Функция перманент

Воронин Иван Петрович, научный руководитель А. Э. Гутерман

Введение

Определение: Пусть $A = (a_{ij})$ - квадратная матрица порядка n:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Перманентом матрицы A называется величина:

$$perA = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)},$$ где суммирование ведётся по всем перестановкам σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Для матрицы $B = (b_{ij})$ размера $n \times m$, $n \leqslant m$:

$$per \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \text{ определяется как: } \sum_{\alpha} \sum_{\sigma \in S_\alpha} b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)},$$

где $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ есть n - элементное подмножество множества $\{1, 2, \ldots, m\}$. То есть суммирование ведётся по всем квадратным подматрицам порядка n матрицы B (их конечно же C_m^n).

Например, $per \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} = per \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + per \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + per \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 62 + 54 + 71 = 187.$

Иными словами, перманент матрицы B есть сумма всех произведений таких её n элементов, что никакие два из них не находятся в одной строке или в одном столбце. Разумеется, перманент квадратной матрицы не меняется при её транспонировании, так что при $n > m$: определим $per(B) := per(B^T)$.

Иногда удобен способ вычисления перманента матрицы, оперируя строчными суммами:

$$per \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \end{pmatrix} = \sum_{s \neq t} b_{1s} \cdot b_{2t} = (b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1m}) \cdot (b_{21} + b_{22} + \ldots + b_{2m}) - (b_{11} \cdot b_{21} + b_{12} \cdot b_{22} + \ldots + b_{1m} \cdot b_{2m})$$

Такой подход вычисления перманента называется формулой Бине [1].

Ввиду сходства в определении перманента и детерминанта, многие результаты, полученные для второго, имеют свои аналоги для первого. Сразу стоит отметить, что перманент не наследует от детерминанта мультипликативное свойство, а также инвариантность при некоторых элементарных преобразованиях строк и столбцов. Однако, функция перманент, конечно, так же полилинейна относительно строк, а в случае квадратных матриц - и столбцов. Справедлива теорема Лапласа [13] о разложении перманента по строке:

Пусть $A = (a_{ij})$ - матрица размера $n \times m$, $n \leqslant m$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

тогда $perA = a_{11} \cdot perA_{11} + a_{12} \cdot perA_{12} + \ldots + a_{1m} \cdot perA_{1m}$, где A_{ij} - подматрица A, получаемая удалением из неё i-той строки и j-того столбца. Перманент произведения матриц выглядит ужасающим, а вот перманент суммы матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ порядка n устроен проще детерминанта, ибо не зависит от знаков перестановок:

$$per(A+B) = per \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \ldots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} = perA + perB + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\alpha,\beta} \left(perA_{[\alpha,\beta]} \cdot per\overline{B}_{[\alpha,\beta]} \right),$$

где $A_{[\alpha,\beta]}$ - подматриаца A, полученная на пересечении строк кортежа $\alpha = (\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \ldots \leqslant \alpha_r)$ и столбцов кортежа $\beta = (\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_r)$, а $\overline{B}_{[\alpha,\beta]}$ - подматрица B, полученная удалением строк кортежа α и столбцов кортежа β. То есть порядок $A_{[\alpha,\beta]}$ равен r, а порядок $\overline{B}_{[\alpha,\beta]}$ равен $(n-r)$, и суммирование для каждого r ведётся по всем парам кортежей α и β. Отсюда понятно, как устроен перманент суммы матриц A и B размера $n \times m$, где $n \leqslant m$, а затем, применяя транспонирование матриц, наконец, для произвольных n и m.

Хотелось бы верить, что теорию перманента можно так или иначе свести к намного более широко изученной теории детерминанта, однако "лаконично" это сделать пока не удалось. А именно, естественным желанием при попытке конвертации перманента в детерминант является расстановка знаков + и - перед элементами матрицы. Так, например,

$$per \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc = det \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Однако подобный подход терпит неминуемый крах уже при работе с матрицами порядка 3:

Утверждение 1 (Проблема Пойа [1]). *Не существует расстановки знаков перед элементами матрицы порядка 3, конвертирующей перманент в детерминант.*

Доказательство:
Предположим обратное, тогда число минусов, приписываемых элементам каждой диагонали, соответствующей чётной перестановке, должно быть чётным: достаточно рассмотреть матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$, и тем самым общее число приписанных минусов должно быть чётным. С другой стороны, аналогично, число минусов на каждой диагонали, соответствующей нечётной перестановке, должно быть нечётным, откуда и общее их число нечётно, ибо нечётных перестановок, равно как и чётных, три. Получено противоречие.
■

Но тогда и для матриц больших порядков подобная расстановка знаков нереализуема. В самом деле, допустим, что для матрицы порядка $n > 3$ существует нужный способ расстановки знаков. Рассмотрим матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & E_{n-3} \end{pmatrix},$$ её перманент равен $perA$.

С помощью нашей расстановки знаков приведём её к виду:

$$\begin{pmatrix} A' & O \\ O & E'_{n-3} \end{pmatrix},$$ где E'_{n-3} - диагональная матрица порядка $(n-3)$ с (± 1) на диагонали.

Детерминант полученной матрицы равен $det(A') \cdot (\pm 1)$, причём мы уже знаем, что $\exists A$: $det(A') \neq perA$. Единственным спасением стало бы равенство $det(A') = -perA$, когда на диагонали E'_{n-3} нечётное число (-1), и значит, на диагонали $A^{'}$ нечётное число замен(достаточно взять $A = E_3$), но перестановка $(1, 2, 3)$ для элементов матрицы A - чётная, откуда следует противоречие.

Результат Пойа был значительно обобщён Маркусом и Минком [11], которые показали, что при $n \geqslant 3$ не существует такого линейного преобразования ϕ множества $M_n(\mathbb{R})$, что $\forall A \in M_n : perA = det(\phi(A))$, что окончательно разрушило надежду найти способ простой конвертации перманента в детерминант. Теорема Валианта [7] утверждает, что задача вычисления перманента даже для бинарных матриц является NP-полной. Стоит отметить, что задача вычисления перманента бинарных матриц имеет широкое приложение в теории графов [6], [15]. О многих других связанных сюжетах можно прочесть в [4], [5].

Класс (1,-1) матриц

Частным случаем класса $(1, -1)$ матриц являются широко известные матрицы Адамара [8], [9].

Обозначим через Ω_n множество матриц порядка n с элементами из множества {1, -1}. Многие задачи, связанные с исследованием перманента (1,-1) принципиально зависят от факта обращения его в нуль. Эффективным методом доказательства того, что перманент матрицы не равен нулю, является нахождение достаточно большой степени двойки, не делящей его значение.

Утверждение 2. $\forall A \in \Omega_n$: $detA \equiv 0 \pmod{2^{n-1}}$.

Доказательство:
Прибавим первую строку ко всем остальным – получим в последующих $(n-1)$ строках числа из множества $\{0, \pm 2\}$, теперь разложим детерминант по первой строке.
■

Для перманента самой простой оценкой на степень вхождения двойки будет $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Утверждение 3 (Wang [12])**.** $\forall A \in \Omega_n$: $perA \equiv 0 \pmod{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$.

Доказательство:
Индукция по n.
База: Перманент матрицы порядка 1 равен (± 1).
Переход: Пусть n - нечётное, разложим $perA$ по первой строке, в ней k единиц и $(n-k)$ минус единиц.

$$perA = per \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot perA_{11} + a_{12} \cdot perA_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot perA_{1n},$$

где по предположению индукции $perA_{1i} \equiv 0 \pmod{2^{\frac{n-1}{2}}}$, причём $(a_{11} \cdot perA_{11} + a_{12} \cdot perA_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot perA_{1n}) =$
$= (\pm perA_{11} \pm perA_{12} \pm \ldots \pm perA_{1n}) \vdots 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Пусть теперь n - чётное, разложим $perA$ по двум первым строкам.

$$perA = per \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix} = per \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot per\overline{A}_{[(1,2),(1,2)]} \ + \ per \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot per\overline{A}_{[(1,2),(1,3)]} \ +$$

$$+ \ \ldots \ + \ per \begin{pmatrix} a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{2(n-1)} & a_{2n} \end{pmatrix} \cdot per\overline{A}_{[(1,2),((n-1),n)]}, \text{ причём все } \ per\overline{A}_{[(1,2),(\alpha,\beta)]} \vdots 2^{\frac{n}{2}-1},$$

а все перманенты матриц порядка 2 кратны двум.
■

В работе [2] представлены технические доказательства намного более точных оценок делимости перманента на степень двойки, а именно:

Утверждение 4. *Пусть* $n = 2^t - 1,\ t \in \mathbb{N}$. $\forall A \in \Omega_n :\ perA \,\vdots\, 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor - 1}$, *но* $perA \not\vdots\, 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor}$.

Утверждение 5. *Пусть* $n \neq 2^t - 1,\ t \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\forall A \in \Omega_n :\ perA \,\vdots\, 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor}$.

Гипотеза Кройтера утверждает, что делимость на $2^{n-\lfloor \log_2 (n+1) \rfloor}$ всегда достижима , что проверено в работе [14] только для $n \leqslant 20$.

В работе [11] показано, что для $n \,\vdots\, 2$ и для $n \equiv 1 \pmod 4$ всегда $\exists A \in \Omega_n :\ perA = 0$.
В общем случае для $n \equiv 3 \pmod 4$ не известно, когда существует такая матрица $A \in \Omega_n$, что $perA = 0$.

Так, например, для $n = 3 :\ perA \in \{\pm 2, \pm 6\}$. Для $n = 7$ имеем $perA \not\vdots\, 2^5$ из Утверждения, ведь $7 = 2^3 - 1$. Для $n = 15$ имеем $perA \not\vdots\, 2^{12}$, ведь $15 = 2^4 - 1$. А вот для $n = 11$ и $n = 19$ $\exists A : perA = 0$ (см. примеры на этой странице).

В работе [3] в несколько строк получено следствие Утверждения, его не использующее:

Утверждение 6. *Если* $n = 2^k - 1,\ k \in \mathbb{N},$ *то* $\nexists A \in \Omega_n :\ perA\ = 0$.

Класс симметрических (1,-1) матриц

При работе с некоторыми задачами о графах интерес представляет рассмотрение симметрических (1, -1) матриц (их множество обозначим как Ω_n^+). Имея условие симметричности матрицы, хотелось бы усилить оценки максимальной степени вхождения двойки в значения перманента по сравнению с Утверждением. Займёмся этим.

Пользуясь [2] Лемма 2.3, будем работать с выражением:

$$per(A) = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)!$$

Здесь A – симметрическая $(1,-1)$ матрица порядка n, а k_j – количество её отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины j. Считаем, что $k_0 = 1$. Далее я буду называть обобщённые диагонали просто диагоналями.

Заметим, что k_j может быть представлено как $k_j = d_j + m_j$, где d_j - количество отрицательных частичных диагоналей длины j, лежащих целиком на главной диагонали матрицы (из левого верхнего угла в правый нижний), а m_j - количество остальных отрицательных частичных диагоналей длины j. Тогда в случае симметрических матриц m_j чётно, ведь частичные диагонали, не вложенные в главную, разбиваются на пары симметричных относительно неё.

$$per(A) = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)! = (-2)^0 \cdot k_0 \cdot n! + \sum_{j=1}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)! = n! + \sum_{j=1}^{n} (-2)^j \cdot (d_j + m_j) \cdot (n-j)! =$$

$$= n! + \sum_{j=1}^{n} (-2)^j \cdot d_j \cdot (n-j)! + \sum_{j=1}^{n} (-2)^j \cdot m_j \cdot (n-j)! = n! + D + M \qquad \textbf{(1)}$$

Определение 1. *Через* $\nu_2(N)$ *обозначим степень вхождения двойки в каноническое разложение числа* N *на простые.*

Определение 2. *Через* $\sigma_2(N)$ *обозначим сумму битов(количество единиц) в двоичной записи числа числа* N

Теорема 1. $\nu_2(n!) = n - \sigma_2(n)$

Доказательство:
В терминах записи числа в двоичной системе исчисления, целочисленное деление на 2^k есть сдвиг на k бит вправо с затиранием вылезших правее нулевого разряда. Пусть $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ и $n = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 1,$ то есть в двоичной записи $n_2 = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$

Тогда:
$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor = a_k\cdot 2^{k-1} + a_{k-1}\cdot 2^{k-2} + \cdots + a_1,\ \ \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor = a_k\cdot 2^{k-2} + a_{k-1}\cdot 2^{k-3} + \cdots + a_2,\ \ \ldots$$
Откуда:
$$\nu_2(n!) = a_k\cdot(2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2^1+1) + a_{k-1}\cdot(2^{k-2}+2^{k-3}+\cdots+2^1+1) + \cdots + a_2\cdot(2^1+1) + a_1 =$$
$$= a_k\cdot(2^k-1) + a_{k-1}\cdot(2^{k-1}-1) + \cdots + a_2\cdot(2^2-1) + a_1\cdot(2^1-1) + a_0(1-1) =$$
$$= a_k\cdot 2^k + a_{k-1}\cdot 2^{k-1} + \cdots + a_1\cdot 2^1 + a_0\cdot 1 - (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) = n - \sigma_2(n)$$

■

Определение 3. *Назовём* ***(r+1)-нулевыми*** *числа, в двоичной записи которых есть хотя бы* ***r+1*** *нуль.*

Утверждение 7. $\nu_2(n!)\ \geqslant\ n - \lfloor\log_2(n)\rfloor + r$ *тогда и только тогда, когда n является $(r+1)$-нулевым.*

Доказательство:
Из Теоремы имеем:
$$\nu_2(n!) = n - \sigma_2(n)\ \geqslant\ n - \lfloor\log_2(n)\rfloor + r \quad\Longleftrightarrow\quad \sigma_2(n)\ \leqslant\ \lfloor\log_2(n)\rfloor - r$$

■

Замечание 1. *Натуральные числа вида 2^t-1 не являются* ***n-нулевыми*** *ни для какого натурального n. Действительно, их бинарные записи не содержат нулей.*

Утверждение 8. $\nu_2\left((-2)^j\cdot(n-j)!\right)\ \geqslant\ n - \lfloor\log_2(n)\rfloor$ *для* ***1-нулевых*** *n.*

Доказательство:

$$\nu_2\left((-2)^j\cdot(n-j)!\right) = j + \nu_2\left((n-j)!\right) = j + n - j - \sigma_2(n-j) = n - \sigma_2(n-j)\ \geqslant\ n - (\lfloor\log_2(n-j)\rfloor + 1)\ \geqslant\ n - (\lfloor\log_2(n)\rfloor + 1),$$

где первое неравенство следует из соображения, что сумма битов не больше их количества, а второе из монотонности функции логарифма. Причём одновременно равенства выполнены только при $n = 2^k-1$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$, а $j=0$.
Действительно, $\sigma_2(n-j) = \lfloor\log_2(n-j)\rfloor + 1$ только, если его бинарная запись $n-j$ состоит только из единиц, а $\lfloor\log_2(n)\rfloor$ возрастает на единицу при переходе через степень двойки. Значит, в остальных случаях, а именно при наличии хотя бы одного нуля в двоичной записи, неравенство из утверждения выполнено.
■

Наложим условия на симметрическую $(1,-1)$ матрицу порядка n, при которой её перманент делится на $2^{n-\lfloor\log_2(n)\rfloor+1}$. А именно потребуем делимости на данную степень двойки всех трёх слагаемых выражения **(1)**: $n!$, M и D:

Для $n!$ вопрос решён Утверждением. Подойдут **2-нулевые** n.

Разберёмся с M. При **1-нулевых** n, которые по определению являются надмножеством **2-нулевых**, имеем:
$$\nu_2\left((-2)^j\cdot m_j\cdot(n-j)!\right)\ \geqslant\ n - \lfloor\log_2(n)\rfloor + \nu_2(m_j)\ \geqslant\ n - \lfloor\log_2(n)\rfloor + 1\ \text{ в силу чётности }\ m_j$$
Откуда при **2-нулевых** n имеем делимость
$$M = \sum_{j=1}^{n}(-2)^j\cdot m_j\cdot(n-j)!\ \text{ на }\ 2^{n-\lfloor\log_2(n-j)\rfloor+1}$$

Осталось разобраться со слагаемым
$$D = \sum_{j=1}^{n}(-2)^j\cdot d_j\cdot(n-j)!$$

Напомню, что d_j – количество отрицательных частичных диагоналей длины j, лежащих целиком на главной диагонали матрицы (из левого верхнего угла в правый нижний). Пусть на главной диагонали находятся ровно k минус единиц. Если подобрать k так, чтобы для $\forall j \in \{1,\ldots,n\}: \ (d_j \cdot (n-j)!) \ \vdots \ 2^{n-\lfloor\log_2(n)\rfloor+1-j}$, то, аналогично полученной делимости M на $2^{n-\lfloor\log_2(n)\rfloor+1}$, для **2-нулевых** n, заключим её для D. Но $d_j = C_k^j$, то есть нас интересуют такие k, что C_k^j чётно для $\forall j \in \{1,\ldots,n-1\}$, ведь для $j=n$ и так имеем $1-\lfloor\log_2(n)\rfloor \leqslant 0$ при $n \geqslant 2$. Назовём интересующие нас k **замечательными**.

Утверждение 9. ***Замечательными*** *являются в точности степени двойки и нуль.*

Доказательство:
Воспользуемся Теоремой:

$$\nu_2\left(C_{2^n}^k\right) = \nu_2\left(\frac{2^n!}{k!(2^n-k)!}\right) = \nu_2(2^n!) - \nu_2(k!) - \nu_2(2^n-k)! = 2^n - \sigma_2(2^n) - (k-\sigma_2(k)) - (2^n-k-\sigma_2(2^n-k)) =$$
$$= \sigma_2(k) + \sigma_2(2^n-k) - \sigma_2(2^n) = \sigma_2(k) + \sigma_2(2^n-k) - 1.$$

Тогда при $n \geqslant 2$, при $k \in \{1,\ldots,2^n-1\}$ имеем $\sigma_2(k) \geqslant 1$ и $\sigma_2(2^n-k) \geqslant 1$, значит, $\nu_2(C_{2^n}^k) \geqslant 1$.
То есть степени двойки действительно **замечательные**. А **замечательность** нуля и единицы очевидна.

С другой стороны, если число m не является степенью двойки, то есть $m = 2^n+r$, где $r \in \{1,\ldots,2^n-1\}$, то

$$\nu_2\left(C_{2^n+r}^r\right) = \nu_2\left(\frac{(2^n+r)!}{r!\cdot 2^n!}\right) = \nu_2\Big((2^n+r)!\Big) - \nu_2(r!) - \nu_2(2^n!) = 2^n + r - \sigma_2(2^n+r) - (r-\sigma_2(r)) - (2^n - \sigma_2(2^n)) =$$
$$= \sigma_2(r) + \sigma_2(2^n) - \sigma_2(2^n+r) = \sigma_2(r) + 1 - \sigma_2(2^n+r) = \sigma_2(r) + 1 - (\sigma_2(r)+1) = 0$$

Значит, кроме степеней двойки, **замечательных** чисел нет. И конечно же, **замечательные** числа, как степени двоек, являются подмножеством **1-нулевых** (для $n \geqslant 4$).
■

Замечание 2. *А ещё можно рассмотреть треугольник Паскаля по модулю 2, получится красивая рекурсивная картинка: треугольник Серпинского*[1] *с пустотами - нулями и ячейками - единицами. Причём строки из двух единиц по краям и всеми нулями между ними имеют номера – в точности степени двойки.*

Наконец, сформулируем наше утверждение о делимости перманента.

Утверждение 10. *Для* ***2-нулевых*** n *перманент симметрической* $(1,-1)$ *матрицы порядка* n *с* ***замечательным*** *количеством минус единиц на главной диагонали, делится на* $2^{n-\lfloor\log_2(n)\rfloor+1}$

Утверждение 11 (без введённых определений)**.** *Для чисел* n *таких, что в их двоичной записи есть хотя бы два нуля, перманент симметрической* $(1,-1)$ *матрицы порядка* n *делится на* $2^{n-\lfloor\log_2(n)\rfloor+1}$*, если количество минус единиц на главной диагонали равно* $k=2^t$*, для некоторого* $t \in \mathbb{N}$

Обратим внимание, что в ходе рассуждения о делимости было полученно, что для M и N достаточно потребовать от n быть **1-нулевым**, в то время как для слагаемого $n!$ требуется наличие уже 2 нулей в двоичной записи. Тем самым получаем:

Замечание 3. *Для* ***1-нулевых*** n *перманент симметрической* $(1,-1)$ *матрицы порядка* n *с* ***замечательным*** *количеством минус единиц на главной диагонали, делится на* $2^{n-\lfloor\log_2(n)\rfloor}$*, но не делится на* $2^{n-\lfloor\log_2(n)\rfloor+1}$*. Тем самым степень вхождения двойки в значение перманента в точности равна* $n-\lfloor\log_2(n)\rfloor$*.*

Утверждение 12. *Убрать условие наличия двух нулей в двоичной записи* n *в общем случае нельзя. В качестве доказательства привожу в Приложении после списка литературы примеры найденных мной матриц.*

[1] Source text: https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle

Литература

1. H. Minc, Theory of permanents (1984).

2. М. В. Будревич, А. Э. Гутерман, К. А. Таранин, О делимости перманента (± 1)-матриц – Записи научных семинаров ПОМИ Том 439, 2015 г.

3. R. Simion, F.W. Schmidt, On $(+1,-1)$-matrices with vanishing permanent – Department of Mathematics, Southern Illinois University, Carbondale, IL 62901, USA.

4. Wolfram MathWorld (0,1)-Matrix.

5. Gerard Sierksma, Elmer Sterken, The structure matrix of (0,1)-matrices.

6. Hall's marriadge theorem - Wikipedia.

7. NP-completeness of 01-permanent - Wikipedia.

8. Hadamard matrix – Wikipedia.

9. Hong-Yeop Song, Examples and Constructions of Hadamard Matrices – Yonsei University.

10. А. Ю. Эвнин Перманент матрицы и его вычисление

11. Marvin Marcus, Henryk Minc, On the relation between the determinant and the permanent – The University of British Columbia Vancouver, Canada The National Burea of Standards Washington, D.C. The University of Florida Gainesville, Florida.

12. Edward Tzu-Hsia Wang, On permanents of (1, - 1)-matrices – Israel J. Math. **18** (1974), 353-361.

13. Laplace expansion - Wikipedia

14. IAN M. WANLESS, Permanents of matrices of signed ones – School of Engineering and Logistics, Charles Darwin University, Darwin NT 0909, Australia Communicated by Stephen Kirkland.

15. A proof of the Frobenius-König theorem.

16. R. B. Bapat, Recent developments and open problems in the theory of permanents – Indian Statistical Institute New Delhi, 110016.

17. A note on the Van der Warden. Permanent conjecture JACQUES DUBOIS.

Приложение

Для Ω_1^+ существует:

$$per(1) = 1, \text{ и в оценке}(1 = 2^1 - 1)\text{: } 2^{1-\lfloor \log_2 1 \rfloor - 1} = 2^0.$$

Для Ω_2^+ существует:

$$per \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{ и в оценке: } 2^{2-\lfloor \log_2 2 \rfloor} = 2^1.$$

Для Ω_3^+ существует:

$$per \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{ и в оценке}(3 = 2^2 - 1)\text{: } 2^{3-\lfloor \log_2 3 \rfloor - 1} = 2^1.$$

Для Ω_4^+ существует:

$$per \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 4, \text{ и в оценке: } 2^{4-\lfloor \log_2 4 \rfloor} = 2^2.$$

Для Ω_5^+ существует:

$$per \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 8, \text{ и в оценке: } 2^{5-\lfloor \log_2 5 \rfloor} = 2^3.$$

Для Ω_6^+ существует:

$$per \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 16, \text{ и в оценке: } 2^{6-\lfloor \log_2 6 \rfloor} = 2^4.$$

Для Ω_7^+ существует:

$$per \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 16, \text{ и в оценке}(7 = 2^3 - 1)\text{: } 2^{7-\lfloor \log_2 7 \rfloor - 1} = 2^4.$$

Для Ω_8^+ существует:

$$per\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 32, \text{ и в оценке: } 2^{8-\lfloor \log_2 8 \rfloor} = 2^5.$$

Для Ω_9^+ существует:

$$per\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 64 \text{ и в оценке: } 2^{9-\lfloor \log_2 9 \rfloor} = 2^6.$$

Для Ω_{10}^+ существует:

$$per\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 128 \text{ и в оценке } 2^{10-\lfloor \log_2 10 \rfloor} = 2^7.$$

Для Ω_{11}^+ существует:

$$per\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 256 \text{ и в оценке: } 2^{11-\lfloor \log_2 11 \rfloor} = 2^8.$$

Для Ω_{12}^{+} существует:

$$per\begin{pmatrix}
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1\\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1\\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1
\end{pmatrix} = 512 \text{ и в оценке: } 2^{12-\lfloor \log_2 12\rfloor} = 2^9.$$

Для Ω_{13}^{+} существует:

$$per\begin{pmatrix}
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1\\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1\\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1\\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1\\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1\\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1\\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1
\end{pmatrix} = 1024 \text{ и в оценке: } 2^{13-\lfloor \log_2 13\rfloor} = 2^{10}.$$

Для Ω_{14}^{+} существует:

$$per\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1\\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1\\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1\\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1\\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1\\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1\\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1
\end{pmatrix} = 2048 \text{ и в оценке: } 2^{14-\lfloor \log_2 14\rfloor} = 2^{11}.$$

Для Ω^{+}_{15} существует:

$$per\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1\\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1\\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1\\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1\\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix} = 2048$$

И в оценке $(15 = 2^4 - 1)$: $2^{15-\lfloor \log_2 15 \rfloor - 1} = 2^{11}$

Для Ω^{+}_{16} существует:

$$per\begin{pmatrix}
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1\\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1\\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1\\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix} = 4096$$

И в оценке: $2^{16-\lfloor \log_2 16 \rfloor} = 2^{12}$

Для Ω_{17}^{+} существует:

$$per \begin{pmatrix}
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1
\end{pmatrix} = 8192,$$

И в оценке: $2^{17-\lfloor \log_2 17 \rfloor} = 2^{13}$

Для Ω_{18}^{+} существует:

$$per \begin{pmatrix}
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1
\end{pmatrix} = 16384,$$

И в оценке: $2^{18-\lfloor \log_2 18 \rfloor} = 2^{14}$

Для Ω_{19}^{+} существует:

$$
per \begin{pmatrix}
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix} = 32768
$$

И в оценке: $2^{19-\lfloor \log_2 19 \rfloor} = 2^{15}$

Для Ω_{20}^{+} существует:

$$
per \begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix} = 65536
$$

И в оценке: $2^{20-\lfloor \log_2 20 \rfloor} = 2^{16}$

Для Ω_{21}^{+} существует:

$$
per \begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$= -9043968 \not\vdots\, 2^{18}$.   И в оценке: $2^{21-\lfloor \log_2 21 \rfloor} = 2^{17}$

Для Ω_{22}^{+} существует:

$$
per \begin{pmatrix}
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$= -47972352 \not\vdots\, 2^{19}$.   И в оценке: $2^{22-\lfloor \log_2 22 \rfloor} = 2^{18}$

Для Ω_{23}^{+} существует:

$$per\begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1
\end{pmatrix} =$$

$= 39447953408 \not\vdots\, 2^{20}$. И в оценке: $2^{23-\lfloor \log_2 23 \rfloor} = 2^{19}$

Для Ω_{24}^{+} существует:

$$per\begin{pmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1
\end{pmatrix} =$$

$= 257715863552 \not\vdots\, 2^{21}$. И в оценке: $2^{24-\lfloor \log_2 24 \rfloor} = 2^{20}$

Для Ω_{25}^{+} существует:

$$
per\begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$= -931456352256 \not\vdots\, 2^{22}$. И в оценке: $2^{25-\lfloor\log_2 25\rfloor} = 2^{21}$

Для Ω_{26}^{+} существует:

$$
per\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix} =
$$

$= 11890470158336 \not\vdots\, 2^{23}$. И в оценке: $2^{26-\lfloor\log_2 26\rfloor} = 2^{22}$

Для Ω_{27}^{+} существует:

$$
per \begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1
\end{pmatrix} =
$$

$= -38138328121344 \not\vdots\, 2^{24}$. И в оценке: $2^{27-\lfloor \log_2 27 \rfloor} = 2^{23}$

Для Ω_{28}^{+} существует:

$$
per \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1
\end{pmatrix} =
$$

$= -4195317176074224 \not\vdots\, 2^{25}$. И в оценке: $2^{28-\lfloor \log_2 28 \rfloor} = 2^{24}$

Для Ω_{29}^{+} существует:

$$
per \begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$= -2960700976660480 \not\vdots\, 2^{26}$. И в оценке: $2^{29-\lfloor \log_2 29 \rfloor} = 2^{25}$

Для Ω_{30}^{+} существует:

$$
per\begin{pmatrix}
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$= -14413597853614080 \not\vdots\, 2^{27}$.   И в оценке: $2^{30-\lfloor \log_2 30 \rfloor} = 2^{26}$

Для Ω_{31}^{+} существует:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix}
$$

С $per = 77368377001115648 \not\vdots\, 2^{27}$.   И в оценке $(31 = 2^5 - 1):\ 2^{31-\lfloor \log_2 31 \rfloor - 1} = 2^{26}$

Для Ω^+_{32} существует:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

С $per = 1764926150645121024 \not\vdots\, 2^{28}$. И в оценке: $2^{32-\lfloor \log_2 32 \rfloor} = 2^{27}$

Для Ω_{11}^{+} существует (1,-1) матрица с $per = 0$:

$$per \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{Timing } 0.017 \text{ sec.}$$

Для Ω_{19}^{+} существует (1,-1) матрица с $per = 0$:

$$per \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Timing } 1.5 \text{ hour.}$$

P.S. Вычисления на компьютере проводились непосредственно перебором: генерировалась случайная симметрическая (1, -1) матрица нужного размера, по формуле Райзера[10, p.48] вычислялся её перманент, и, наконец, если он равнялся искомой величине, матрица записывалась в файл, в противном случае генерировалась новая. Поиск примера симметрической матрицы 11×11 с нулевым перманентом с помощью разложения Лапласа занял целых 15 минут, а с помощью формулы Райзера порядка сотой секунды!

Обратно к тексту

А вот, собственно, и код на языке C++, с помощью которого я вычислял значения перманента по формуле Райзера с оптимизацией, использующей коды Грея и битовые операции над числами.

```
int64_t per(vector<vector<int64_t>>& A) {
    int64_t answer = 0;
    uint32_t n = A.size();
    uint32_t prev_mask = 0;
    uint32_t mask;
    uint32_t distinguish_column;
    uint32_t prev_number_of_columns = 0;
    uint32_t number_of_columns;
    vector<int64_t> sum_in_row(n, 0);
    for (uint64_t i = 1; i < (1 << n); ++i) {
        mask = (i xor (i >> 1)); // Grey's code
        distinguish_column = __builtin_ctz(mask xor prev_mask); // count number of trailing zeroes
        number_of_columns = __builtin_popcount(mask); // count number of set bits

        if (number_of_columns > prev_number_of_columns) {
        // if distinguish_column is contained in mask(therefore, it is absent in prev_mask)
            for (uint32_t row = 0; row < n; ++row) {
                sum_in_row[row] += A[row][distinguish_column]; // add new element in sum_in_row
            }
        } else { // else, distinguish column is absent in mask(therefore, it is contained in prev_mask)
            for (uint32_t row = 0; row < n; ++row) {
                sum_in_row[row] -= A[row][distinguish_column]; // subtract element from the sum_in_row
            }
        }
        prev_number_of_columns = number_of_columns;
        int64_t S = 1;
        for (auto row : sum_in_row) {
            S *= row;
        }
        answer += (__builtin_ctz(n - number_of_columns) ? S : -S);
        prev_mask = mask;
    }
    return answer;
}
```