Федеральное агентство по образованию

Государственное высшее учебное заведение
«Санкт-Петербургский государственный университет»

Математико–механический факультет

Специальность «математика»

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

Дипломная работа

Гипероктаэдральные комбинаторные типы

«К защите допущен»:

Зав. кафедрой высшей алгебры и теории чисел, профессор, д.ф.-м.н.	______________	Яковлев А.В.
Научный руководитель, доцент??, д.ф.-м.н.	______________	Пименов К.И.
Рецензент, профессор, д.ф.-м.н.	______________	Яковлев А.В.
Дипломник	______________	Воробьев С.Э.

г. Санкт-Петербург, 2012

Содержание

Глава I. Аннотация[TODO]

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развитие идеи комбинаторных типов (species). Мы будем обозначать их h-species для краткости. В работе частично разработан комбинаторный язык для h-species. Написана формула для композиции цикленных индексов. Рассмотрены примеры.

Глава II. Введение

2.1. Комбинаторные виды

Комбинаторные виды (*species*) были введены Джоялем в [ref, ref, ref]. Они, в некоторой степени, являются развитием идеи производящих функций. О комбинаторных видах можно говорить на нескольких языках: категорном, комбинаторном и на языке теории представлений. Последний наиболее часто встречается в литературе, хотя автору он кажется наимение выразительным. Во введении изложено начало теории комбинаторных видов.

2.1.1. Определение

Рассмотрим категорию $\mathcal{B}$ — подкатегорию конечных множеств с морфизмами — только биекциями. Это подкатегория в Set. Функтор $F : \mathcal{B} \to Set$ — это комбинаторный вид. То есть вид, это сопоставление каждому числу $n \in \mathbb{N}$ множества с действием группы S_n. Комбинаторная интерпретация: множеству точек сопоставляется множество структур на этих точках, а действие S_n еcтвественно возникает из перестановок исходных точек.

Пример 1. Вид $\mathbb{E}$ — структура множеста. Он сопоставляет набору точек одно множество, состоящие из этих точек. Все элементы S_n переходят в тождественное отображение.

Пример 2. $\mathbb{C}$ — циклический порядок. Сопоставляет набору из n точек $(n-1)!$ возможных циклических порядков на них.

Пример 3. Линейный порядок $\mathbb{L}$ сопоставляет $n!$ линейных порядков.

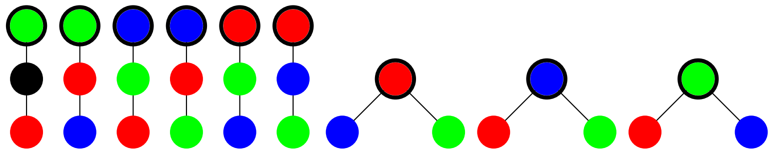


Рис. 2.1. корневые деревья с 3 вершинами

Пример 4. $\mathbb{E}_e$ — сужение $\mathbb{E}$ на четные множества. То есть для четных n, совпадает с $\mathbb{E}$, а для нечетных $\emptyset$. Аналогично $\mathbb{E}_o$ — сужение на нечетные.

Пример 5. На картинке 2.1 изображен вид «корневые деревья с 3 вершинами» (без какого-либо порядка на потомках).

Можно рассмотреть функтор $I : Set \to Vec$, который сопоставляет множеству векторное пространство со свободным[так можно сказать?] базисом из этого множества. Тогда $F \circ I : \mathcal{B} \to Vec$, получается для каждого n перестановочное представление группы S_n. При таком подходе, характер этого представления $\chi(\sigma)$, это количество структур, неподвижных относительно $\sigma \in S_n$.

2.1.2. Сложение комбинаторных видов

Сумму двух species F, G легко определить как поточечную сумму функторов [ref]. На комбинаторном языке это будет означать «либо структура типа F, либо структура типа G».

Пример 6. $\mathbb{E} = \mathbb{E}_e + \mathbb{E}_o$

Пример 7. Любой вид F можно разложить в такую сумму $F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$, где F_i — сужение F на $i \in \mathcal{B}$. Значение F_i на $j \neq i$ равно $\emptyset$.

2.1.3. Произведение комбинаторных видов[TODO: тут какая-то чушь написана, надо переписать]

Для определения произведения, используется тензорное произведение на $\mathcal{B}$: $n \otimes m = (n + m)$ и соответствующее ему вложение $S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$. Все такие вложения сопряжены. На языке представлений это соответствует индуцированному представлению $F(S_n \times S_m) \uparrow = F(S_{n+m})$. [ref]

Поскольку $F_i \times G_j = (F \times G)_{i+j}$, то в целом произведение соответствует свертке: $(F \times G)[n] = \sum\limits_{i=0}^{n} F[i] \times G[i]$. На комбинаторном языке это значит: разбить множество точек на два кусочка (на всевозможные размеры) и на первом ввести структуру типа F, на втором — типа G.

Пример 8. $\mathbb{E} \times \mathbb{E}_1$ — множество с выделенной точкой.

Пример 9. $\mathbb{C}^2$ — (упорядоченная) пара циклов.

2.2. Композиция комбинаторных видов

Кроме сложения и умножения на species можно ввести операцию композиции. Для этого необходимо ввести дополнительную конструкцию: аналитический функтор.

2.2.1. Аналитический функтор комбинаторных видов

Аналитический функтор $\mathcal{F}$ соответствующий species F является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией. Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & Set \\
Set \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, имеется естественное преобразование $\kappa\colon F \to i \circ \mathcal{F}$, обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора $M\colon Set \to Set$ и морфизма функторов $\eta\colon F \to i \circ M$ этот морфизм пропускаеться через $\mathcal{F}$ при помощи κ.

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\
& M
\end{tikzcd}
$$

Явная конструкция для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F}(A) = \sum_n F[n] \times A^n/S_n \tag{2.1}$$

У аналитического функтора для типа структуры F имеется прозрачный комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество A как набор цветов, то значение аналитического функтора $\mathcal{F}(A)$ трактуется как множество структур типа F раскрашенных в цвета из A.

2.2.2. Композиция аналитических функторов комбинаторных видов

Теорема 1. *Композиция аналитических функторов $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ является аналитическим функтором.*

Доказательство. Species, которому соответствует этот аналитический функтор будем называть композицией $F \circ G$. Дадим набросок доказательства. Согласно конструкции $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(A) = \sum\limits_n F[n] \times (\sum\limits_m G[m] \times A^m/S_m)^n/S_n = \sum\limits_n \sum\limits_{k, m_1 + \dots + m_k = n} F[k] \times (\coprod\limits_i G[m_i]) \times A^n/S_n$. [TODO??]

Строгое доказательство см. в [ref] ☐

Надо отметить, что все части разбиения предполагаются непустыми, что равносильно сужению внутреннего specеis на $\mathbb{N}_+$. Будем обозначать его G_+.

У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры F раздуваем(красим) в структуру типа G.

Пример 10. $\mathbb{E}_1 \circ F_+ = F_+$, $F \circ \mathbb{E}_1 = F$. $\mathbb{E}_1$ является нейтральным элементом в монойде species по композиции.

Пример 11. $\mathbb{E}_2 \circ \mathbb{C}$ — (неупорядоченная) пара циклов.

Пример 12. $\mathbb{E} \circ \mathbb{E}_+$ — структура разбиения множества. Здесь E_+ — непустые множества.

Пример 13. $\mathbb{E} \circ \mathbb{C}_+ = \mathbb{S}$ — структура перестановки. Буквально перестановка — это набор непустых циклов.

В дальнейшем мы зачастую будем опускать $F \circ G_+$ и писать просто $F \circ G$.

2.2.3. Цикленный индекс

Процедура декатегорификации не имеет строго математического смысла, так же как и процедура квантования. Сейчас мы предложим процедуру, которая, стартуя с обычных species, на выходе дает классический цикленный индекс/фробениусову характеристику. Затем мы попытаемся аналогические действия провести и в гипероктаэдральном случае. Декатегорификацией моноидальной категории $\mathbb{B}$ является моноид классов изоморфизма объектов категории $\mathcal{B}$, то есть моноид натуральных чисел по сложению. Декатегорификкацией $\widehat{\mathcal{B}}$ естественным образом оказывается моноидная алгебра с коэффициентами из $\mathbb{Z}$ для моноида $\mathbb{N}$, то есть кольцо многочленов $Z[X]$. (Правда это не то, что мы хотели. Чтобы получить цикленный индекс надо декатегорифицировать саму операцию подстановки и аналитический функтор). [TODO: этот таинственный абзац стоит переписать]

Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием S_n имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэффициенте при мономе соответствующего веса. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы вопервых она была неподвижна как нераскрашенная структура, а во-вторых расскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например расскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответсвует моном $x_1^2 x_2$. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$, где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называеться фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$\mathcal{Z}_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \tag{2.2}$$

Где χ — характер (перестановочного) представления заданного F, σ — перестановка цикленного типа λ, $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots)\dots$, z_λ — индекс класса сопряженности σ. Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это $x_1, x_2, x_3, \dots$

Пример 14. $\mathcal{Z}_{\mathbb{E}} = e^{(\psi^1 + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} + \dots)}$. Для доказательства смотри [ref].

2.2.4. Плетизм цикленных индексов

Теорема 2. *Композиции аналитически функторов соответствует плетизм цикленных индексов.*

Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановки. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов A рассмотрим счетный набор цветов $x_1, x_2, x_3, \dots$ Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{F\circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots)\end{aligned} \tag{2.3}$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G. То есть $\mathcal{Z}_{F\circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$, где $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G. Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$ легко понять в переменных $x_1, x_2, x_3, \dots$. Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G–структуру. Значит каждый цвет x_j заменяется на x_j^i.

Формулу 2.3 можно специализировать для подсчета labeled–структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в расскраске. Соответсвующие мономы (в базисе $x_1, x_2, x_3, \dots$) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\psi^1)^k$ и коэффициент в них равен $ck!$ — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой

$\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$. Формула 2.3 примет вид $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \tag{2.4}$$

Пример 15. (Экспоненциальная) производящая функция для $\mathbb{E}$ это $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$. А производящая функция для непустых циклов $\mathbb{C}_+$ это $-log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$. А для $\mathbb{S}$ производящая функция это $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. И действительно $e^(- log(1-x)) = \frac{1}{1-x}$.

Глава III. Гипероктаэдральные комбинаторные виды

3.1. Определение

Рассмотрим категорию $HSet$. В ней объекты это множества, снабженные дополнительным действием — инволюцией. А стрелки, это морфизмы, сохраняющие инволюцию. Рассмотрим категорию $H\mathcal{B}$ — подкатегорию конечных множеств из $HSet$ с морфизмами только биекциями, и инволюциями без неподвижных точек. Функтор $F : H\mathcal{B} \to HSet$ — гипероктаэдральный (или кубический) это комбинаторный вид. Мы будем так же для краткости употреблять термин *h-species*. Объекты из $H\mathcal{B}$ будем отождествлять с $\bar{n} = \{-n, -n+1, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, n-1, n\}$, где инволюция - смена знака. Эпитет гипероктаэдральный используется потому, что на $H\mathcal{B}[\bar{n}]$ действует гипероктаэдральная группа H_n — группа движений n-мерного куба. Некоторая не очень ясная комбинаторная интерпретация: множеству граней куба сопоставляется множество структур на этих гранях, а действие H_n возникает из перестановок граней.

Пример 16. Вид $\mathbb{H}$ — структура куб. Он сопоставляет $\bar{n}$ одно множество. Все элементы B_n переходят в тождественное отображение.

Пример 17. ⚲ — неразличимая пара граней ($\mathbb{H}_1$). ⚲ — различимая пара граней. Оба они принимают значение $\emptyset$ на всем, кроме $\bar{1}$. Но во втором случае ⚲$(\bar{1})$ это два объекта [TODO: правда??].

Пример 18. Аналогично $\square$ — структура куб размерности 2 ($\mathbb{H}_2$). $\square$ — куб размерности 2 с различимыми противоположными гранями. Их уже целых 4 [TODO: правда??].

3.2. Вложение species в h-species

Обычные комбинаторные виды можно «вложить» в гипероктаэдральные. Иными словами можно каждый species рассмотреть как h-species. Для этого достаточно рассматривать структуру не на точках, а на парах (неразличимых) граней. Если $F : \mathcal{B} \to Set$, то $\tilde{F} : H\mathcal{B} \to HSet$, где $\tilde{F}[\bar{n}] = F[n]$ как множество, а инволюция тождественна.

3.3. Аналитический функтор для h-species

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species

$$\begin{tikzcd} HB \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & HSet \\ HSet \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \tag{3.1}$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверук универсальности картинки

3.4. Декатегорификация аналитического функтора: цикленный индекс

3.4.1. Случай h-species

Попробуем построить аналогичную конструкцию для h-species. Прежде всего отметим, что раскраска, элемент $A^{\bar{n}}$, это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы n и $-n$ должны отображаться либо в один и тот же элемент A (который инволюцией переводиться в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом.*

Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по–прежнему определяется длинной орбиты инволюции A, уже после факторизации по B_n. То есть кроме действия B_n есть еще внешняя инволюция — действие Z_2. Будем называть их *моноструктурами* и *бstructурами*.

Цикленный индекс, считающий только моноструктуры будем обозначать $\mathcal{Z}^{(1)}$, бистуктуры — $\mathcal{Z}^{(2)}$. Количество орбит под действием $H_n \times Z_2$ соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$, а под действием только H_n соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$. Поскольку каждая бистуктура будет посчитан два раза.

В качестве Н-множества цветов возьмем счетное множество моноцветов $x_1, x_2, x_3, \ldots$ объединенное с счетным множеством бицветов $y_1, y_2, y_3, \ldots$.

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую расскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляеться в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе H_n бывают двух типов: длинные — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и короткие — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество количество неподвижных точек для H_n. Пусть λ^1 — цикленный тип коротких перестановок, λ^2 — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл соответсвует моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет.

Это можно выразить такой формулой:

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \\ \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} \tag{3.2}$$

Здесь нижний индекс ψ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$. При этом коофициент 2 у y_i^2 отражает тот факт, что можно раскрасить k пар граней в бицвет, так чтобы расскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество количество неподвижных точек для $H_n \times Z_2$. Разобъем сумму на две части — $(h, \bar{0})$ и $(h, \bar{1})$. Для первой формула будет аналогична 3.2, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коофициент $\frac{1}{2}$.

Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим цикл (пару циклов в него). Тогда добавляется смена грани на каждом шаге, а значит для циклов нечетной длинны сменится свойство короткий–длинный. Итоговая формула такая

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{n,\lambda^1+\lambda^2\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1\lambda^2})\frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1}\psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1\lambda^2}} + \frac{1}{2}\sum_{n,\lambda_o^1+\lambda_o^2+\lambda_e^1+\lambda_e^2\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1\lambda_o^2\lambda_e^1\lambda_e^2})\frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1+\lambda_o^2}\psi_x^{\lambda_e^2+\lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1\lambda_o^2\lambda_e^1\lambda_e^2}} \tag{3.3}$$

Где λ_o — циклы нечетной длинны, λ_e — циклы четной длинны.

Откуда легко получить

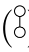
$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n,\lambda_o^1+\lambda_o^2+\lambda_e^1+\lambda_e^2\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1\lambda_o^2\lambda_e^1\lambda_e^2})\frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1+\lambda_o^2}\psi_x^{\lambda_e^2+\lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1\lambda_o^2\lambda_e^1\lambda_e^2}} \tag{3.4}$$

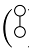
$$\mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{n,\lambda^1+\lambda^2\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1\lambda^2})\frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1}\psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1\lambda^2}} - \frac{1}{2}\sum_{n,\lambda_o^1+\lambda_o^2+\lambda_e^1+\lambda_e^2\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1\lambda_o^2\lambda_e^1\lambda_e^2})\frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1+\lambda_o^2}\psi_x^{\lambda_e^2+\lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1\lambda_o^2\lambda_e^1\lambda_e^2}} \tag{3.5}$$

3.4.2. Примеры

Посчитаем цикленные индексы для простых h-species. Здесь мы будем писать $Z(A)$ вместо Z_A. Это не должно вызывать путаницу, поскольку вместо A будут использоваться схематические картинки и их не перепутать с переменными, от которых считаеться цикленный индекс.

Структура «одна пара граней», будем символически писать .

$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]($$) = \frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) = \psi_{x,y}^1$

$\mathcal{Z}^{(1)}($$) = \frac{1}{2}(\psi_x^1 + \psi_{x,y,y}^1) = \psi_{x,y}^1$

Значит

$\mathcal{Z}^{(2)}($$) = 0$

Структура «одна пара граней, грани различаются». Обозначение $\substack{\circ\\ \bullet}$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\substack{\circ\\ \bullet}) = \frac{1}{2}(2\psi^1_{x,y,y}+0\psi^1_x) = \psi^1_{x,y,y}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\substack{\circ\\ \bullet}) = \frac{1}{2}(2\psi^1_x+0\psi^1_{x,y,y}) = \psi^1_x$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\substack{\circ\\ \circ}) = \psi^1_y$$

Структура «квадрат». Обозначение $\square$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}((\psi^1_{x,y,y})^2+(\psi^1_x)^2+2\psi^2_x+2(\psi^1_x\psi^1_{x,y,y})+2\psi^2_{x,y,y})$$

Здесь кoофициенты — не характеры (характер при каждом слагаемом $= 1$).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}((\psi^1_x)^2+(\psi^1_{x,y,y})^2+2\psi^2_{x,y,y}+2(\psi^1_{x,y,y}\psi^1_x)+2\psi^2_x) = [\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)$$

Последнее следовало и из общих соображений: легко видеть что $\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = 0$.

Структура «квадрат, противоположные грани различаются». Обозначение $\boldsymbol{\square}$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\boldsymbol{\square}) = \frac{1}{8}(4(\psi^1_{x,y,y})^2+0(\psi^1_x)^2+0\psi^2_x+0(\psi^1_x\psi^1_{x,y,y})+2\times 2\psi^2_{x,y,y})$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\boldsymbol{\square}) = \frac{1}{8}(4(\psi^1_x)^2+2\times 2\psi^2_{x,y,y})$$

Откуда

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\boldsymbol{\square}) = \frac{1}{2}([\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\boldsymbol{\square})-\mathcal{Z}^{(1)}(\boldsymbol{\square})) = \frac{1}{2}(\psi^1_{y,y}\psi^1_x+\frac{1}{2}(\psi^1_{y,y})^2) = \psi^1_y\psi^1_x+(\psi^1_y)^2$$

Структура $\substack{\circ\\ \bullet}\times\substack{\circ\\ \bullet}$. Это не то же самое что $\boldsymbol{\square}$, поскольку это «упорядоченная пара $\substack{\circ\\ \bullet}$ ». Ее цикленный индекс мы посчитаем дальше.

3.5. Сумма и произведение цикленных индексов

3.5.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответсвует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{A+B} = \mathcal{Z}^{(1)}_{A} + \mathcal{Z}^{(1)}_{B}$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}_{A+B} = \mathcal{Z}^{(2)}_{A} + \mathcal{Z}^{(2)}_{B}$$

3.6. Произведение

Для произведения уже не совсем так. Утверждается, что моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры. То есть

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{A*B} = \mathcal{Z}^{(1)}_{A} * \mathcal{Z}^{(1)}_{B}$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}_{A*B} = \mathcal{Z}^{(1)}_{A} * \mathcal{Z}^{(2)}_{B} + \mathcal{Z}^{(2)}_{A} * \mathcal{Z}^{(1)}_{B} + 2(\mathcal{Z}^{(2)}_{A} * \mathcal{Z}^{(2)}_{B})$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}^{(1)}_{A*B} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{A*B}) = (\mathcal{Z}^{(1)}_{A} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{A}) * (\mathcal{Z}^{(1)}_{B} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{B})$$

Что логично, поскольку $(\mathcal{Z}^{(1)}_{F} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{F})$ — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

3.6.1. Примеры

Посчитаем произведение уже известных h-структур и их цикленных индексов.

Структура $\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\circ} \times \genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\circ}$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\circ} \times \genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\circ}) = \mathcal{Z}^{(1)}(\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\circ}) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\circ}) = (\psi^1_{x,y})^2$$

Структура $\overset{\circ}{\bullet} \times \overset{\circ}{\bullet}$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet} \times \overset{\circ}{\bullet}) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}) \times [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}) = (\psi^1_{x,y,y})^2$$

Легко получить эту же формулу и из других соображений, как $\frac{1}{8}(8(\psi^1_{x,y,y})^2)$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet} \times \overset{\circ}{\bullet}) = \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet}) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet}) = (\psi^1_x)^2$$

3.7. Цикленный индекс композиции

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. Прежде всего отметим, что инволюция на множестве цветов делит их на моноцвета $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ и бицвета $(y_1, y_2, y_3, \dots)$. Однако, формулы 3.2 и 3.4 подсказывают, что в качестве базиса можно брать не ψ^i_x, ψ^j_y а $\psi^i_x, \psi^j_{x,y,y}$. Впрочем это тривиальная замена переменных.

Итак мы хотим выяснить чему равняются

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(1)}_{F\circ G}(&\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \dots,\\ &\psi^1_{x,y,y}, \psi^2_{x,y,y}, \psi^3_{x,y,y}, \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(2)}_{F\circ G}(&\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \dots,\\ &\psi^1_{x,y,y}, \psi^2_{x,y,y}, \psi^3_{x,y,y}, \dots)\end{aligned}$$

Утверждается следующее:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}^{(1)/(2)}_{F\circ G}(\psi^1_x,\psi^2_x,\psi^3_x,\dots,\psi^1_{x,y,y},\psi^2_{x,y,y},\psi^3_{x,y,y},\dots) = \\
&\qquad\mathcal{Z}^{(1)/(2)}_{F}(\mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^1_x,\psi^2_x,\psi^3_x,\dots,\psi^1_{x,y,y},\psi^2_{x,y,y},\psi^3_{x,y,y},\dots),\\
&\qquad\qquad\mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^2_x,\psi^4_x,\psi^6_x,\dots,\psi^2_{x,y,y},\psi^4_{x,y,y},\psi^6_{x,y,y},\dots),\\
&\qquad\qquad\mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^3_x,\psi^6_x,\psi^9_x,\dots,\psi^3_{x,y,y},\psi^6_{x,y,y},\psi^9_{x,y,y},\dots),\\
&\qquad\qquad\dots,\\
&\qquad\qquad[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^1_x,\psi^2_x,\psi^3_x,\dots,\psi^1_{x,y,y},\psi^2_{x,y,y},\psi^3_{x,y,y},\dots),\\
&\qquad\qquad[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^2_x,\psi^4_x,\psi^6_x,\dots,\psi^2_{x,y,y},\psi^4_{x,y,y},\psi^6_{x,y,y},\dots),\\
&\qquad\qquad[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^3_x,\psi^6_x,\psi^9_x,\dots,\psi^3_{x,y,y},\psi^6_{x,y,y},\psi^9_{x,y,y},\dots),\\
&\qquad\qquad\dots)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому давайте напишем ее на уровне членов:

$$\psi^i_x\circ(\mathcal{Z}^{(1)}_G,\mathcal{Z}^{(2)}_G) = \mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^i_x,\psi^{2i}_x,\psi^{3i}_x,\dots,\\ \psi^i_x,\psi^{2i}_x,\psi^{3i}_x,\dots)$$

$$\psi^i_{x,y,y}\circ(\mathcal{Z}^{(1)}_G,\mathcal{Z}^{(2)}_G) = [\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^i_x,\psi^{2i}_x,\psi^{3i}_x,\dots,\\ \psi^i_x,\psi^{2i}_x,\psi^{3i}_x,\dots)$$

Здесь мы пишем $(\mathcal{Z}^{(1)}_G,\mathcal{Z}^{(2)}_G)$, поскольку цикленный индекс для h-species в действительности представляет собой пару. Биструктуры подставляются вместо бицветов, моноструктуры, вместо моноцветов. В остальном рассуждение дословно повторяет случай обычных species.

Аналогично, если сделать подстановку

$$\psi^1_x = t, \psi^k_x = 0, k>1$$

$$\psi^1_{x,y,y} = s, \psi^k_{x,y,y} = 0, k>1$$

То полученная формула показывает, что 2.4 справедливо для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур (то есть производящая функция от двух переменных). А можно сделать подстановку $s := t$, которая даст выполнение формулы 2.4 для exp-производящей функции просто labeled-структур. А значит и обычной производящей функции unlabeled-структур.

3.7.1. Примеры

Посчитаем $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})(\overset{\circ}{\bullet} \circ \overset{\circ}{\circ})$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet} \circ \overset{\circ}{\circ}) = \psi_x^1 \circ \psi_{x,y}^1 = \psi_{x,y}^1 = \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\circ})$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\overset{\circ}{\bullet} \circ \overset{\circ}{\circ}) = \psi_y^1 \circ 0 = 0 = \mathcal{Z}^{(2)}(\overset{\circ}{\circ})$$

Да и вобще, справедливо

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet} \circ A) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\overset{\circ}{\bullet} \circ A) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

А так же

$$\mathcal{Z}^{(1)}(A \circ \overset{\circ}{\bullet}) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(A \circ \overset{\circ}{\bullet}) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

Это дает некоторое понимание композиции. Так $A \circ \overset{\circ}{\bullet} = \overset{\circ}{\bullet} \circ A = A$. То есть $\overset{\circ}{\bullet}$ является нейтральным элементом в монойде h-species по композиции. Это несколько контр-интуитивно, поскольку в обычных species нейтральным элементом являеться одноточечное множество. А его образом при вложении species в h-species являеться $\overset{\circ}{\circ}$. [TODO А не значит ли это что просто можно по другому вложить?]

Интересно посмотреть чем является $\overset{\circ}{\circ}$. Например

$$\begin{gathered}[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\boldsymbol{\square} \circ \overset{\circ}{\circ}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1))^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^2 + \psi_x^2)) = \\ \frac{1}{8}((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1\psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)\end{gathered} \tag{3.7}$$

Откуда можно сделать вывод, что $\boldsymbol{\square} \circ \overset{\circ}{\circ} = \square$. То есть подстановка $\overset{\circ}{\circ}$, это «стирание различий между противоположными гранями».

3.7.2. Предложения [TODO]

$$(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \ldots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \ldots) = (\mathcal{Z}_G(\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \ldots), 0)$$

Где G — обычный species, вложенный в h-species. А $\mathcal{Z}_G$ — его цикленный индекс.

3.8. Примеры [TODO]

Посчитаем для структуры V «вершина куба».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](V) = e^{\psi_{x,y,y}^1 + \frac{\psi_{x,y,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y,y}^3}{3!} + \ldots}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(V) = e^{(\psi_x^1 + \frac{\psi_x^2}{2!} + \frac{\psi_x^3}{3!} + \ldots) + (\psi_y^2 + \frac{\psi_y^4}{2!} + \frac{\psi_y^6}{3!} + \ldots)}$$

Для структуры куба H «куб».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](H) = \mathcal{Z}^{(1)}(H) = e^{\psi_{x,y}^1 + \frac{\psi_{x,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y}^3}{3!} + \ldots}$$

Нетрудно убедится что $\mathcal{Z}^{(i)}(V \circ \overset{\circ}{\circ}) = \mathcal{Z}^{(i)}(H)$.