Федеральное агентство по образованию

Государственное высшее учебное заведение
«Санкт-Петербургский государственный университет»

Математико–механический факультет

Специальность «математика»

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

Дипломная работа

студента 511 группы
Воробьева Сергея Эдуардовича

Гипероктаэдральные комбинаторные типы

«К защите допущен»:

Зав. кафедрой высшей алгебры и теории чисел, профессор, д.ф.-м.н.	______________	Яковлев А.В.
Научный руководитель, доцент, к.ф.-м.н.	______________	Пименов К.И.
Рецензент, профессор, д.ф.-м.н.	______________	Яковлев А.В.

г. Санкт-Петербург, 2012

Содержание

Глава I. Введение

1.1. Комбинаторные виды

Комбинаторные виды (*species*) были введены Жуаялем в 1980 году [1]. Они дают универсальный аппарат изучения помеченных (labeled) и непомеченных (unlabeled) структур, и являются развитием идеи производящих функций. О комбинаторных видах можно говорить на нескольких языках: категорном, комбинаторном и на языке теории представлений. Последний наиболее часто встречается в литературе, хотя автору он кажется наимение выразительным. Во введении изложено начало теории комбинаторных видов. Основным источником информации про комбнаторные виды является [3].

1.1.1. Определение

Рассмотрим категорию $\mathcal{B}$ — группоид конечных множеств. Она эквивалентна группоиду, объекты которого пронумерованы неотрицательными целыми числами и $Hom(n,n) = S_n$.

Определение 1. Комбинаторным видом (species) называется функтор

$$F : \mathcal{B} \to Set$$

Задать такой функтор, это то же самое что для каждого $n \in \mathbb{N}$ задать множество $F[n]$ с действием группы S_n. В комбинаторике такая ситуация возникает, когда мы рассматриваем явно определнные каким-либо образом структуры на конечных множествах. Например: линейные порядки, циклические порядки, деревья. Действие S_n ествественно возникает из перестановок исходных точек.

Пример 1. Вид $\mathbf{E}$ — вид множесто (без дополнительной структуры). Он сопоставляет набору точек одно множество, состоящие из этих точек, $\mathbf{E}[n] = \{*\}$. Все элементы S_n переходят в тождественное отображение.

Пример 2. $\mathbf{C}$ — циклический порядок. Сопоставляет набору из n точек $(n-1)!$ возможных циклических порядков на них.

Пример 3. Линейный порядок $\mathbf{L}$ сопоставляет $n!$ линейных порядков.

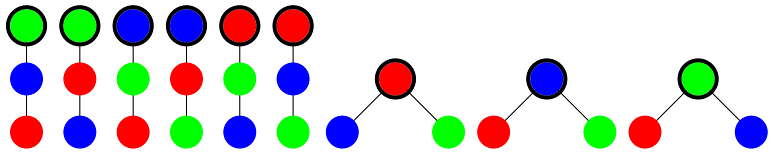


Рис. 1.1. корневые деревья с 3 вершинами

Пример 4. $\mathbf{E}_e$ — сужение $\mathbf{E}$ на четные множества. То есть для четных n, совпадает с $\mathbf{E}$, а для нечетных $\emptyset$. Аналогично $\mathbf{E}_o$ — сужение на нечетные.

Пример 5. На картинке 1.1 изображен вид «корневые деревья с 3 вершинами» (без какого-либо порядка на потомках).

Можно рассмотреть функтор $I : Set \to Vect$, который сопоставляет множеству векторное пространство, базис которого это множество. Тогда $F \circ I : \mathcal{B} \to Vect$ — сопоставляет каждому n перестановочное представление группы S_n. При таком подходе, значение характера этого представления $\chi(\sigma)$, это количество структур, неподвижных относительно $\sigma \in S_n$.

1.1.2. Сложение комбинаторных видов

Сумму двух species F и G определим как поточечную сумму функторов. На комбинаторном языке это будет означать «либо структура типа F, либо структура типа G». $(F+G)[n] = F[n] \coprod G[n]$ с покомпонентным действием S_n.

Пример 6. $\mathbb{E} = \mathbb{E}_e + \mathbb{E}_o$

Пример 7. Любой вид F можно разложить в такую сумму $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$, где F_i — сужение F на $i \in \mathcal{B}$. Значение F_i на $j \neq i$ равно $\emptyset$.

1.1.3. Произведение комбинаторных видов

Определим произведение по Коши комбинаторных видов. По определению задать на конечном множестве структуру типа $F \cdot G$ означает разбить множество точек на две части (всевозможные) и на первом ввести структуру типа F, на втором — типа G.

$$(F \cdot G)[X] = \coprod_{X_1 \coprod X_2 = X} F[X_1] \times G[X_2]$$

С категорной точки зрения произведение по Коши возникает из тензорного произведения на категории $\mathcal{B}$, которое на объектах задается как $n \otimes m = (n+m)$, на морфизмах при помощи вложения $S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$ (все такие вложения сопряжены). Известна конструкция свертки функторов из $\mathcal{C}$ в Set, где $\mathcal{C}$ — моноидальная категория с копроизведениями [Day convolution [8]].

На языке теории представлений $F[n+m]$ как множество с действием группы S_{n+m} равно индуцированному представлению $Ind\uparrow^{S_{n+m}}_{S_n \times S_m} F[n] \times F[m]$.

Пример 8. $\mathbf{E} \times \mathbf{E}_1$ — множество с выделенной точкой.

Пример 9. $\mathbf{C}^2$ — (упорядоченная) пара циклов.

1.2. Композиция комбинаторных видов

Кроме сложения и умножения на species можно ввести операцию композиции. По определению задать на конечном множестве структуру типа $F \circ G$ означает разбить множество точек на части (всевозможные), на частях (как новых точках) ввести структуру типа F, а на каждой части — типа G. Иначе говоря, «раздуть» каждую точку структуры типа F в структуру типа G.

$$(F \circ G)[X] = \coprod_{\coprod_i X_i = X} F[\{X_i\}_i] \times (\coprod_i G[X_i])$$

Замечание 2. Определение species не предполагает конечности $F[n]$, однако цикленный индекс (см. раздел 1.2.4) можно писать только для таких видов. Класс таких species не замкнут относительно композиции. Поскольку при подстановке species F, для котогоро $F[0] \neq \emptyset$ можно выделить сколько угодно пустых частей. Поэтому в дальнейшем в записи $F \circ G$, мы будем неявно предполагать что внутренний операнд «сужен» на $\mathbb{N}_+$.

Пример 10. $\mathbf{E}_1 \circ F = F$, $F \circ \mathbf{E}_1 = F$. $\mathbf{E}_1$ является нейтральным элементом в моноиде species по композиции.

Пример 11. $\mathbf{E}_2 \circ \mathbf{C}$ — (неупорядоченная) пара циклов.

Пример 12. $\mathbf{E} \circ \mathbf{E}$ — структура разбиения множества.

Пример 13. $\mathbf{E} \circ \mathbf{C} = \mathbf{S}$ — структура перестановки. Буквально перестановка — это набор циклов.

Для того, чтобы ввести композицию на категорном языке нам понадобится дополнительная конструкция: аналитический функтор.

1.2.1. Аналитический функтор комбинаторных видов

Аналитический функтор (введен Жуаялем в [2]) $\mathcal{F}$ соответствует species F. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией.

Определение 3. Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & Set \\
Set \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, существует естественное преобразование $\kappa\colon F \to i \circ \mathcal{F}$, обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора $M\colon Set \to Set$ и морфизма функторов $\eta\colon F \to i \circ M$ этот морфизм пропускаеться через $\mathcal{F}$ при помощи κ.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Явная конструкция для аналитического функтора. Доказательство см. в [3].

$$\mathcal{F}(A) = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \tag{1.1}$$

Замечание 4. У аналитического функтора для типа структуры F имеется прозрачная комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество A как набор цветов, то значение аналитического функтора $\mathcal{F}(A)$ трактуется как множество структур типа F раскрашенных в цвета из A.

1.2.2. Композиция аналитических функторов комбинаторных видов

Теорема 5. *Композиция аналитических функторов $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ является аналитическим функтором для $F \circ G$.*

Доказательство. Набросок. Согласно конструкции $\mathcal{F}(\mathcal{G}(A)) = \sum_k F[k] \times (\sum_m G[m] \times A^m/S_m)^k/S_k = \sum_n \sum_{k, m_1+\dots+m_k=n} F[k] \times (\prod_i G[m_i]) \times A^n/S_n$.

Строгое доказательство см. в http://arxiv.org/pdf/math/9811127v1.pdf (Lemma 2.5) [это еще и про цикленные индексы] □

1.2.3. Другой взгляд на композицию аналитических функторов

Дело в том, что композиция комбинаторных видов — это в некотором смысле частный случай аналитического функтора, только не со значениями в Set, а со значениями в $Species = \hat{\mathcal{B}}$.

А именно, для любой моноидальной категории $\mathcal{C}$ со всевозможными копределами и объекта A из $\mathcal{C}$, функтор из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$, который 1 отправляет в A, а n отправляет в $A^{\otimes n}$ (тензорная степень), можно «продолжить по непрерывности» (видимо расширение Кана) до функтора из категории предпучков на $\mathcal{B}$ со значениями в $\mathcal{C}$ [9]. В этой работе Дурова этот фнктор обозначается Φ_A.

В случае когда $\mathcal{C} = Set$, получаем $\Phi_A(F) = \mathcal{F}(A)$. В случае, когда $\mathcal{C} = Species$, получаем $\Phi_G(F) = F \circ G$. То есть можно определить композицию, как функтор $G \mapsto F \circ G$ при помощи Φ_G. Надо только проверить функториальность по G (в обозначении Φ_G, буква G обозначает постоянный параметр, а в аналитеческом функторе — это переменный аргумент). При таком взгляде на подстановку теорема о композиции становится почти тавтологией.

1.2.4. Цикленный индекс

Будем рассматривать только species, конечные в смысле замечания 2. Хочется используя идею подсчета с весом, написать аналог производящей функции для покрашенных (в смысле замечания 4) структур. Цветам сопоставим переменные $x_1, x_2, x_3, \dots$. Раскрашенной структуре с раскраской $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ сопоставим моном $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$. Например, расскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответсвует моном $x_1^2 x_2$. Суммируя по всем расскрашенным структурам из формулы 1.1, мы получим симметрическую (от $x_1, x_2, x_3, \dots$) функцию. Коэффициент при каждом мономе — это число раскрашенных структур с заданной расскраской.

Введем некоторые обозначения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) \vdash n$ — разбиение. σ — перестановка цикленного типа λ. z_λ — индекс класса сопряженности σ. χ — характер (перестановочного) представления заданного F. $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots)\dots$.

Утверждение 6. *Фробениусовой характеристикой или цикленным индексом species F будем называть симметрическую функцию:*

$$\mathcal{Z}_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma)\psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \tag{1.2}$$

Коэффициент при мономе $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ равен числу раскрашенных структур с расскраской $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$.

Доказательство. По Лемме Бернсайда количество орбит равно усредненному по всем элементам группы числу неподвижных точек. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как нераскрашенная структура, а во-вторых расскраска должна переходить в себя. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. □

Пример 14. $\mathcal{Z}_{\mathbf{E}_1} = \psi^1$

Пример 15. $\mathcal{Z}_{\mathbf{E}_2} = \frac{1}{2}((\psi^1)^2 + \psi^2)$

Пример 16. $\mathcal{Z}_{\mathbf{E}} = e^{(\psi^1 + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} + \dots)}$. Доказательство смотри в [3].

1.2.5. Плетизм цикленных индексов

Теорема 7. *Композиции аналитических функторов соответствует плетизм цикленных индексов.*

Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановки. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов A рассмотрим счетный набор цветов $x_1, x_2, x_3, \dots$ Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$

Утверждение 8.

$$\mathcal{Z}_{F\circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots) \quad (1.3)$$

Доказательство. В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G. То есть $\mathcal{Z}_{F\circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$, где $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G. Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$ легко понять в переменных $x_1, x_2, x_3, \dots$. Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G–структуру. Значит каждый цвет x_j в $\mathcal{Z}_G$ при подстановке в ψ^i заменяется на x_j^i. □

Замечание 9. Формулу 1.3 можно специализировать для подсчета labeled–структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в расскраске. Соответсвующие мономы (в базисе $x_1, x_2, x_3, \dots$) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\psi^1)^k$ и коэффициент в них равен $ck!$ — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой $\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$. Формула 1.3 примет вид $\mathcal{Z}_{F\circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \quad (1.4)$$

Пример 17. (Экспоненциальная) производящая функция для $\mathbf{E}$ это $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$. А производящая функция для непустых циклов $\mathbf{C}$ это $-log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$. А для $\mathbf{S}$ производящая функция это $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. И действительно $e^{-log(1-x)} = \frac{1}{1-x}$.

Глава II. Гипероктаэдральные комбинаторные виды

2.1. Определение

Рассмотрим категорию $HSet$. В ней объекты это множества, снабженные дополнительным действием — инволюцией. А стрелки, это морфизмы, сохраняющие инволюцию. Рассмотрим категорию $H\mathcal{B}$ — группоид конечных множеств с инволюциями без неподвижных точек. Функтор $F : H\mathcal{B} \to HSet$ — гипероктаэдральный (или кубический) комбинаторный вид. Мы будем так же для краткости употреблять термин *h-species*. Группоид $H\mathcal{B}$ эквивалентен группоиду, объекты которого $\bar{n} = \{-n, -n+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, n-1, n\}$, инволюция - смена знака. $\bar{n}$ мы интрепретируем как грани куба, на которых действует гипероктаэдральная группа B_n — группа движений n-мерного куба. Эта же группа действует на множестве $F[\bar{n}]$, которое мы интрепретируем как множество структур на множестве граней куба. Действие B_n возникает из перестановок граней.

Замечание 10. При работе со species, мы имели мощную комбинаторную интуицию, которая мотивировала категорные конструкции. В случае h-species мы переносим категорные конструкции species на новый контекст и пытаемся дать комбинаторную интерпретацию получившимся результатам.

Пример 18. Вид $\mathbf{H}$ — структура куб. Он сопоставляет $\bar{n}$ одно множество. Действие B_n тривиально.

Пример 19. $\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\circ}$ — неразличимая пара граней ($\mathbf{H}_1$). $\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\bullet}$ — различимая пара граней. Оба они принимают значение $\emptyset$ на всем, кроме $\bar{1}$. Второе соответствует действию B_1 на 2-х точечном множестве.

Пример 20. $\square$ — куб размерности 2 ($\mathbf{H}_2$). $\boldsymbol{\square}$ — куб размерности 2 с различимыми противоположными гранями. Второе соответствует действию B_2 на 4-х точечном множестве.

Пример 21. Структура $\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\bullet} \times \genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\bullet}$. Это не то же самое что $\boldsymbol{\square}$, поскольку это «упорядоченная пара $\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\bullet}$».

2.2. Вложение species в h-species

Обычные комбинаторные виды можно «вложить» в гипероктаэдральные. Это вложение задается функторами $I_1 : H\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ ($\pm i \mapsto i$) и $I_2 : Set \to HSet$ (к множеству добавляется тождественная инволюция). В композиции с F они дают $I_1 \circ F \circ I_2 : H\mathcal{B} \to HSet$. Комбинаторно: species рассмотреть как структуру не на точках, а на парах (неразличимых) граней.

2.3. Сложение и умножение h-species

Сложение и умножение определяются полностью аналогично species. Они введены в работе Бержерона [4].

2.4. Аналитический функтор для h-species

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species. Мы считаем, что правильная версия гипероктаэдрального аналитического функтора действует из $HSet$ в $HSet$. По аналогии с обычным случаем строим $\mathcal{F}$ как левое расширение Кана:

$$\begin{tikzcd} HB \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & HSet \\ HSet \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Аргумент $\mathcal{F}$ будем называть множеством цветов (в действительности это множество с инволюцией, подробнее в замечании 11).

$$\mathcal{F}(A) = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \tag{2.1}$$

[TODO:Здесь нужно добавить ссылку на общую конструкцию]

$A^{\bar{n}}$ — это отображения (раскраски), сохраняющие инволюцию. По аналогии с обычными species, мы мыслим $\mathcal{F}(A)$, как множество F-структур, раскрашеных в цвета из A.

Замечание 11. В новой ситуации множество цветов A уже является не просто множеством, а множеством с инволюцией. Пара элементов $(-i, i)$ отображается либо в один и тот же элемент (a, a) (который инволюцией переводится в себя), либо в пару элементов $(b, \bar{b})$, сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

На $F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}$ действует группа $B_n \times \mathbb{Z}_2$, второй сомножитель соответствует инволюции на цветах. После факторизации по B_n, мы получаем объект из $HSet$.

2.5. Декатегорификация аналитического функтора

Можно действовать наивно: написать производящую функцию для числа раскрасок (1.2), по аналогии с классическим случаем. Такая формула (2.2) рассматривалась (в контексте теории представлений группы $S_n \wr G$) в работе http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/download/v11i1r56/pdf (см. также приложение B во втором анлгийском издании книги Макдональда [7]). При таком подходе определяются операции сложения и умножения по Коши для цикленных индексов. Но попытки определить гипероктаэдральных плетизм оказываются безуспешны. Выяснилось, что правильный аналог цикленного индекса должен помнить информацию о следующем свойстве раскрашенной структуры.

В качестве множества цветов рассмотрим счетное множество моноцветов $x_1, x_2, x_3, \dots$ объединенное с счетным множеством бицветов $y_1, y_2, y_3, \dots$.

Предложение 12. Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по–прежнему определяется длинной орбиты инволюции на A (уже после факторизации по B_n). Будем разделять раскрашенные структуры на *моноструктуры* и *бийструктуры*.

Пример 22. Раскрашенная в бицвет , это моноструктура. А раскрашенная в тот же бицвет , это биструктура.

Предложение 13. Гипероктаэдральный цикленный индекс (аналог 1.2) определим как пару симметрических (от $\{x_i\}, \{y_j\}$) функций $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})$. Коофициент при мономе $x_{i_1} \dots x_{i_k} y_{j_1} \dots y_{j_l}$ в $\mathcal{Z}^{(1)}$ равен количеству моноструктур с раскраской $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, y_{j_1}, \dots, y_{j_l}\}$. Коофициент при том же мономе в $\mathcal{Z}^{(2)}$ равен количеству биструктур с такой раскраской.

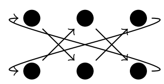
Пример 23. $[\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)}]($$) = [(x_1 + x_2 + x_3 + \dots), (y_1 + y_2 + y_3 + \dots)]$

Утверждение 14. *Количество орбит под действием $B_n \times \mathbb{Z}_2$ соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$, а под действием только B_n соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$.*

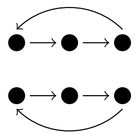
Доказательство. В первом случае каждая моноструктура и биструктура будет посчитана 1 раз. А во втором каждая биструктура будет посчитан два раза, т.к. действие инволюции «склеивающей» две части биструктуры не учтено. □

2.5.1. Подсчет цикленного индекса

Замечание 15. Циклы в каждом элементе B_n бывают двух типов: *длинные* — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью. Пример длинного цикла:



И *короткие* — пара граней лежит в симметричных, различных циклах. Пример короткого цикла:



Введем обозначения. Пусть λ, μ — разбиения. $|\lambda| + |\mu| = n$. λ — цикленный тип коротких перестановок, μ — цикленный тип длинных перестановок. σ — перестановка цикленного типа (λ, μ). $z_{\lambda\mu}$ — индекс класса сопряженности σ. χ — характер (перестановочного) представления заданного F.

Посчитаем количество неподвижных точек для B_n.

Утверждение 16. *Неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл покрашен в моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет. Причем для каждой пары коротких циклов есть ровно 2 способа их покрасить в выбранный бицвет (эти два способа сопряжены инволюцией на цветах).*

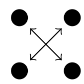
Под покрашенным циклом мы подразумеваем покраску всех его элементов в этот цвет (такая покрашенная структура будет неподвижна относительно действия этого элемента B_n).

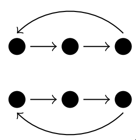
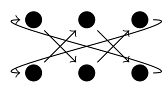
Утверждение 17. *Справедлива формула:*

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda(\sigma)} \psi_x^{\mu(\sigma)} = \sum_{n, \lambda+\mu \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda\mu}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda} \psi_x^{\mu}}{z_{\lambda\mu}} \tag{2.2}$$

Здесь нижний индекс ψ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + \dots)$. При этом удвоенное y в $\psi_{x,y,y}$ (то есть коофициент 2 у y_i^k) отражает тот факт, что можно красить в бицвет 2-мя способами.

Посчитаем количество неподвижных точек для $B_n \times Z_2$. Разобъем сумму на две части — $(h, \bar{0})$ и $(h, \bar{1})$. Для первой формула будет аналогична 2.2, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коофициент $\frac{1}{2}$. Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим в него цикл (пару циклов, в случае короткого). Тогда реальный цикл от $(h, \bar{1})$ будет получатся из циклов h добавлением «смены грани» на каждом шаге. Значит для циклов нечетной длинны сменится свойство короткий–длинный. Ниже два поясняющих примера.

Пример 24. Пусть перестановка $h_e = \begin{array}{c} \bullet\leftrightarrow\bullet \\ \bullet\leftrightarrow\bullet \end{array}$. Тогда $(h_e, \bar{1}) =$ 

Пример 25. Пусть перестановка $h_o =$ . Тогда $(h_o, \bar{1}) =$ 

Утверждение 18. *Справедлива формула:*

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda+\mu \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda\mu}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda} \psi_x^{\mu}}{z_{\lambda\mu}} + \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o+\mu_o+\lambda_e+\mu_e \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e+\mu_o} \psi_x^{\mu_e+\lambda_o}}{z_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}} \tag{2.3}$$

Где λ_o, μ_o — разбиения соответствующие коротким и длинным циклам нечетной длинны, λ_e, μ_e — четной.

Из формул 2.2, 2.3 легко получить

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n,\lambda_o+\mu_o+\lambda_e+\mu_e \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e+\mu_o}\psi_x^{\mu_e+\lambda_o}}{z_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{n,\lambda+\mu\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda\mu})\frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda}\psi_x^{\mu}}{z_{\lambda\mu}} - \\ \frac{1}{2}\sum_{n,\lambda_o+\mu_o+\lambda_e+\mu_e \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e+\mu_o}\psi_x^{\mu_e+\lambda_o}}{z_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}}\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.5.2. Примеры вычисления цикленного индекса

Посчитаем цикленные индексы для простых h-species. Здесь мы будем писать $Z(A)$ вместо Z_A. Это не должно вызывать путаницу, поскольку вместо A будут использоваться схематические картинки. Их никак не перепутать с переменными, от которых считается цикленный индекс.

Замечание 19. Формулы 2.2 и 2.3 подсказывают, что в практических вычислениях в качестве симметричного базиса можно брать не $\{\psi_x^i, \psi_y^j\}$ а $\{\psi_x^i, \psi_{x,y,y}^j\}$. Или другую линейную комбинацию, например $\{\psi_x^i, \psi_{x,y}^j\}$.

Пример 26.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\substack{\circ \\ \circ}) = \frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) = \psi_{x,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\substack{\circ \\ \circ}) = \frac{1}{2}(\psi_x^1 + \psi_{x,y,y}^1) = \psi_{x,y}^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\substack{\circ \\ \circ}) = 0$$

Пример 27.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\substack{\circ \\ \bullet}) = \frac{1}{2}(2\psi_{x,y,y}^1 + 0\psi_x^1) = \psi_{x,y,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\substack{\circ \\ \bullet}) = \frac{1}{2}(2\psi_x^1 + 0\psi_{x,y,y}^1) = \psi_x^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\substack{\circ \\ \bullet}) = \psi_y^1$$

Пример 28.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\Box) = \frac{1}{8}((\psi^1_{x,y,y})^2 + (\psi^1_x)^2 + 2\psi^2_x + 2(\psi^1_x\psi^1_{x,y,y}) + 2\psi^2_{x,y,y})$$

Здесь коофициенты — не характеры (характер при каждом слагаемом = 1).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\Box) = \frac{1}{8}((\psi^1_x)^2 + (\psi^1_{x,y,y})^2 + 2\psi^2_{x,y,y} + 2(\psi^1_{x,y,y}\psi^1_x) + 2\psi^2_x) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\Box)$$

Последнее следовало и из общих соображений: легко видеть что $\mathcal{Z}^{(2)}(\Box) = 0$.

Пример 29.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\boldsymbol{\Box}) = \frac{1}{8}(4(\psi^1_{x,y,y})^2 + 0(\psi^1_x)^2 + 0\psi^2_x + 0(\psi^1_x\psi^1_{x,y,y}) + 2 \times 2\psi^2_{x,y,y})$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\boldsymbol{\Box}) = \frac{1}{8}(4(\psi^1_x)^2 + 2 \times 2\psi^2_{x,y,y})$$

Откуда

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\boldsymbol{\Box}) = \frac{1}{2}([\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\boldsymbol{\Box}) - \mathcal{Z}^{(1)}(\boldsymbol{\Box})) = \frac{1}{2}(\psi^1_{y,y}\psi^1_x + \frac{1}{2}(\psi^1_{y,y})^2) = \psi^1_y\psi^1_x + (\psi^1_y)^2$$

2.6. Сумма и произведение цикленных индексов

2.6.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответсвует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{A+B} = \mathcal{Z}^{(1)}_A + \mathcal{Z}^{(1)}_B$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}_{A+B} = \mathcal{Z}^{(2)}_A + \mathcal{Z}^{(2)}_B$$

2.6.2. Произведение

Для произведения уже не совсем так.

Утверждение 20. *Моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А бистуктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры.*

То есть

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{A*B} = \mathcal{Z}^{(1)}_{A} * \mathcal{Z}^{(1)}_{B}$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}_{A*B} = \mathcal{Z}^{(1)}_{A} * \mathcal{Z}^{(2)}_{B} + \mathcal{Z}^{(2)}_{A} * \mathcal{Z}^{(1)}_{B} + 2(\mathcal{Z}^{(2)}_{A} * \mathcal{Z}^{(2)}_{B})$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}^{(1)}_{A*B} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{A*B}) = (\mathcal{Z}^{(1)}_{A} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{A}) * (\mathcal{Z}^{(1)}_{B} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{B})$$

Замечание 21. Это логично, поскольку $(\mathcal{Z}^{(1)}_{F} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{F})$ — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

2.6.3. Примеры цикленных индексов произведений

Посчитаем произведение уже известных h-структур и их цикленных индексов.

Пример 30. Структура $\overset{\circ}{\circ} \times \overset{\circ}{\circ}$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\circ} \times \overset{\circ}{\circ}) = \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\circ}) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\circ}) = (\psi^1_{x,y})^2$$

Пример 31. Структура $\overset{\circ}{\bullet} \times \overset{\circ}{\bullet}$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet} \times \overset{\circ}{\bullet}) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}) \times [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}) = (\psi^1_{x,y,y})^2$$

Легко получить эту же формулу и прямым подсчетом по формуле 2.2, как $\frac{1}{8}(8(\psi^1_{x,y,y})^2)$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet} \times \overset{\circ}{\bullet}) = \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet}) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet}) = (\psi^1_{x})^2$$

2.7. Цикленный индекс композиции

Попробуем написать плетизм цикленных индексов для h-species, по аналогии с обычными species.

Задача 1. Выразить

$$\mathcal{Z}^{(i)}_{F\circ G}(\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \dots,$$
$$\psi^1_y, \psi^2_y, \psi^3_y, \dots)$$

Ответ будет дан в основной теореме 22. Рассмотрим доказательство утверждения 8. В нем мы «красили» каждую точку F-структуры в раскрашенную G-структуру. Сейчас у нас есть бицвета и моноцвета. Исходя из определения, утверждаем, что бицвета в цикленном индексе $\mathcal{Z}_F^{(i)}$ нужно заменять на цикленные индексы $\mathcal{Z}_G^{(2)}$, отвечающие биструктурам G. А моноцвета заменяются на цикленные индексы $\mathcal{Z}_G^{(1)}$, отвечающие моноструктурам G. Так же как и в случае обычных species, каждый цвет из $\mathcal{Z}_G^{(i)}$ копируеться k раз для ψ^k.

Теорема 22 (О гипероктаэдральном плетизме)**.** *Справедливо следующее*

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{F\circ G}^{(i)}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\dots,\psi_y^1,\psi_y^2,\psi_y^3,\dots) = \\ \mathcal{Z}_F^{(i)}(&\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\dots,\psi_y^1,\psi_y^2,\psi_y^3,\dots), \\ &\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2,\psi_x^4,\psi_x^6,\dots,\psi_y^2,\psi_y^4,\psi_y^6,\dots), \\ &\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3,\psi_x^6,\psi_x^9,\dots,\psi_y^3,\psi_y^6,\psi_y^9,\dots), \\ &\dots, \\ &\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\dots,\psi_y^1,\psi_y^2,\psi_y^3,\dots), \\ &\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^2,\psi_x^4,\psi_x^6,\dots,\psi_y^2,\psi_y^4,\psi_y^6,\dots), \\ &\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^3,\psi_x^6,\psi_x^9,\dots,\psi_y^3,\psi_y^6,\psi_y^9,\dots), \\ &\dots)\end{aligned} \tag{2.6}$$

Формула громоздкая, поэтому напишем ее на уровне членов:

$$\psi_x^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)},\mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^i,\psi_x^{2i},\psi_x^{3i},\dots, \\ \psi_y^i,\psi_y^{2i},\psi_y^{3i},\dots)$$

$$\psi_y^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)},\mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^i,\psi_x^{2i},\psi_x^{3i},\dots, \\ \psi_y^i,\psi_y^{2i},\psi_y^{3i},\dots)$$

Замечание 23. Если сделать в 2.6 подстановку

$$\psi_x^1 = t, \psi_x^k = 0, k > 1$$

$$\psi_y^1 = s, \psi_y^k = 0, k > 1$$

То получится формула

$$\tilde{\mathcal{Z}}^{(i)}_{F\circ G}(t,s) = \tilde{\mathcal{Z}}^{(i)}_F(\tilde{\mathcal{Z}}^{(1)}_G(t,s), \tilde{\mathcal{Z}}^{(2)}_G(t,s))$$

Таким образом аналог 1.4 справедлив для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур.

2.7.1. Примеры цикленного индекса композиции

Пример 32. Посчитаем $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})(\substack{\circ\\ \bullet} \circ \substack{\circ\\ \circ})$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\substack{\circ\\ \bullet} \circ \substack{\circ\\ \circ}) = \psi^1_x \circ \psi^1_{x,y} = \psi^1_{x,y} = \mathcal{Z}^{(1)}(\substack{\circ\\ \circ})$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\substack{\circ\\ \bullet} \circ \substack{\circ\\ \circ}) = \psi^1_y \circ 0 = 0 = \mathcal{Z}^{(2)}(\substack{\circ\\ \circ})$$

Пример 33. Да и вобще, справедливо

$$\mathcal{Z}^{(i)}(\substack{\circ\\ \bullet} \circ A) = \mathcal{Z}^{(i)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(i)}(A \circ \substack{\circ\\ \bullet}) = \mathcal{Z}^{(i)}(A)$$

Замечание 24. Это дает некоторое комбинаторное понимание композиции. Так, видимо, $A \circ \substack{\circ\\ \bullet} = \substack{\circ\\ \bullet} \circ A = A$. То есть $\substack{\circ\\ \bullet}$ является нейтральным элементом в монойде h-species по композиции. Это несколько не интуитивно, поскольку в обычных species нейтральным элементом являеться одноточечное множество. А его образом при вложении species в h-species являеться $\substack{\circ\\ \circ}$.

Пример 34. Интересно посмотреть на композицию с $\substack{\circ\\ \circ}$

$$\begin{gathered}[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\underline{\square} \circ \substack{\circ\\ \circ}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\psi^1_{x,y,y} + \psi^1_x))^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\psi^2_{x,y,y} + \psi^2_x)) = \\ \frac{1}{8}((\psi^1_x)^2 + (\psi^1_{x,y,y})^2 + 2\psi^2_{x,y,y} + 2(\psi^1_{x,y,y}\psi^1_x) + 2\psi^2_x) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)\end{gathered} \tag{2.7}$$

Замечание 25. Отсюда можно сделать предположение, что $\underline{\square} \circ \substack{\circ\\ \circ} = \square$. То есть подстановка $\substack{\circ\\ \circ}$ — это «стирание различий между противоположными гранями».

Пример 35. Посчитаем для структуры V «вершина куба».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](V) = e^{\psi^1_{x,y,y} + \frac{\psi^2_{x,y,y}}{2} + \frac{\psi^3_{x,y,y}}{3} + \dots}$$

Эта формула получается по аналогии с $\mathcal{Z}_{\mathbf{E}}$. Коофициент при мономе $x_1^{i_1} y_1^{j_1} \ldots$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(V) = e^{(\psi_x^1 + \frac{\psi_x^2}{2} + \frac{\psi_x^3}{3} + \ldots) + (\psi_y^2 + \frac{\psi_y^4}{2} + \frac{\psi_y^6}{3} + \ldots)}$$

Для структуры H «куб».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](H) = \mathcal{Z}^{(1)}(H) = e^{\psi_{x,y}^1 + \frac{\psi_{x,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y}^3}{3!} + \ldots}$$

Тогда $\mathcal{Z}^{(i)}(V \circ \begin{smallmatrix}\circ\\ |\\ \circ\end{smallmatrix}) = \mathcal{Z}^{(i)}(H)$, поскольку при специализации всех y в 0, они равны.

2.8. Цикленный индекс species, вложенных в h-species

Утверждение 26. *Пусть G — обычный species, вложенный в h-species. $\mathcal{Z}_G$ — его цикленный индекс.*

$$(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \ldots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \ldots) = (\mathcal{Z}_G(\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \ldots), 0)$$

2.9. Применение цикленного индекса к решению задачи о раскрасках

Задача 2. Посчитать количество способов покрасить n-мерный куб в k цветов с точностью до изометрий. Иными словами, посчитать количество орбит при действии B_n на множестве всевозможно раскрашенных кубов. http://math.stackexchange.com/questions/5697/coloring-the-faces-of-a-hypercube.

Решение. В нашей нотации это вопрос о количестве раскрасок пар граней в k моноцветов и $\frac{k(k-1)}{2}$ бицветов. Поскольку любая раскраска даст нам моноструктуру, то производящая функция для количества раскрасок от размерности, будет равна $\mathcal{Z}_{\mathbf{H}}^{(1)}(kt, kt^2, kt^3, \ldots, k^2t, k^2t^2, k^2t^3, \ldots) = exp(kt + kt^2 + kt^3 + \cdots + \frac{k(k-1)}{2}t + \frac{k(k-1)}{2}t^2 + \frac{k(k-1)}{2}t^3 + \ldots) = exp(\frac{k(k+1)}{2}t + \frac{k(k+1)}{2}t^2 + \frac{k(k+1)}{2}t^3 + \ldots) = (exp(log(\frac{1}{1-t})))^{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{1}{1-t}^{\frac{k(k+1)}{2}}$ □

Список литературы

1. André Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. Math 42 (1981), 1–82.

2. André Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces des structures*, in Combinatoire Énumérative, Lecture Notes in Mathematics 1234, Springer, Berlin, (1986), pp. 126–159

3. F. Bergeron, Gilbert Labelle, Pierre LeRoux *Combinatorial Species and Tree-Like Structures*, Cambridge University Press, (1998)

4. N. Bergeron; P. Choquette. *Hyperoctahedral species*, Sém. Lothar. Combin. 61A (2009/10), доступно на http://arxiv.org/abs/0810.4089

5. Hetyei, Gábor; Labelle, Gilbert; Leroux, Pierre *Cubical species and nonassociative algebras* Adv. in Appl. Math. (1998), no. 3

6. I. G. Macdonald. *Polynomial functors and wreath products*, J. Pure Appl. Algebra, 18(2):173–204, 1980.

7. I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Mathemati- cal Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995.

8. http://nlab.mathforge.org/nlab/show/Day+convolution

9. Н. В. Дуров. *Классифицирующие вектоиды и классы операд*, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия 2009, доступно (английский) на http://arxiv.org/abs/1105.3114