

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математико–механический факультет

Специальность «математика»

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

ГИПЕРОКТАЭДРАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ТИПЫ

«К защите допущен»:

Зав. кафедрой высшей алгебры
и теории чисел,
профессор, д.ф.-м.н.

_____ Яковлев А.В.

Научный руководитель,
доцент??, д.ф.-м.н.

_____ Пименов К.И.

Рецензент,
д.ф.-м.н.

_____ ??? ??.

Дипломник

_____ Ватманн В.В.

г. Санкт-Петербург, 2012

Содержание

Глава I. Введение	3
1.1. Комбинаторные виды	3
Глава II. Основные определения	5
Глава III. Формулы	5
3.1. Аналитический функтор для h -species	5
3.2. Декатегорификация аналитического функтора: Фробениусова характеристика / Цикленный индекс	6
3.3. Сумма и произведение цикленных индексов	11
3.4. Произведение	11
3.5. Цикленный индекс композиции	12
3.6. Примеры [TODO]	16

Глава I. Введение

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развитие идеи комбинаторных типов (*species*). Мы будем обозначать их *h-species* для краткости. [[TODO:добавить введение (видимо взять часть из Bergeron)

План: Изложить теорию для *species*, параллельно строить ее для *h-species*
species — сложение умножение — аналитический функтор — композиция аналитических функторов — композиция *species* — декатегорификация аналитического функтора — примеры]]

1.1. Комбинаторные виды

Комбинаторные виды (*species*) были введены Джоялем в [ref, ref, ref]. Они, в некоторой степени, являются развитием идеи производящих функций. О комбинаторных видах можно говорить на нескольких языках: категорном, комбинаторном и на языке теории представлений. Последний наиболее часто встречается в литературе, хотя автору он кажется наименее выразительным. Во введении изложено начало теории комбинаторных видов.

1.1.1. Определение

Рассмотрим категорию \mathcal{B} — подкатеорию конечных множеств с морфизмами — только биекциями. Это подкатегория в *Set*. Функтор $F : \mathcal{B} \rightarrow \text{Set}$ — это комбинаторный вид. То есть вид, это сопоставление каждому числу $n \in \mathbb{N}$ множества с действием группы S_n . Комбинаторная интерпретация: множеству точек сопоставляется множество структур на этих точках, а действие S_n естественно возникает из перестановок исходных точек. Например, вид \mathbb{E} — структура множества. Он сопоставляет набору точек одно множество, состоящие из этих точек. Все элементы S_n переходят в тождественное отображение. Другой пример \mathbb{C} — циклический порядок. Сопоставляет набору из n точек $(n - 1)!$ возможных циклических порядков на них. Линейный порядок \mathbb{L} сопоставляет $n!$ линейных порядков. На картинке 1.1 изображен вид «корневые деревья с 3 вершинами» (без какого-либо порядка на потомках).

Можно рассмотреть функтор $I : \text{Set} \rightarrow \text{Vec}$, который сопоставляет множеству векторное пространство со свободным[так можно сказать?] базисом

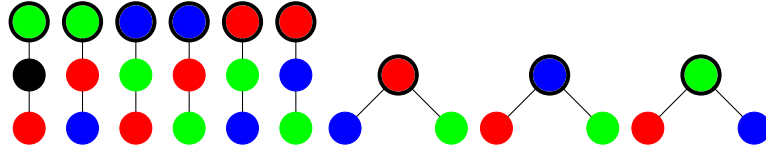


Рис. 1.1. корневые деревья с 3 вершинами

из этого множества. Тогда $F \circ I : \mathcal{B} \rightarrow \text{Vec}$, получается для каждого n перестановочное представление группы S_n . При таком подходе, характер этого представления $\chi(\sigma)$, это количество структур, неподвижных относительно $\sigma \in S_n$.

1.1.2. Сложение комбинаторных видов

Сумму двух species F, G легко определить как поточечную сумму функторов [ref]. На комбинаторном языке это будет означать «либо структура вида F , либо структура вида G ». Например любой вид F можно разложить в такую сумму $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$, где F_i — сужение F на $i \in \mathcal{B}$. Значение F_i на $j \neq i$ равно \emptyset .

1.1.3. Произведение комбинаторных видов[TODO]

Для определения произведения, используется тензорное произведение на \mathcal{B} : $n \otimes m = (n + m)$ и соответствующее ему вложение $S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$. Все такие вложения сопряжены. На языке представлений это соответствует индцированному представлению $F(S_n \times S_m) \uparrow = F(S_{n+m})$. [ref]

1.1.4. Плетизм[TODO]

ТЕОРЕМА: композиции аналитически функторов соответствует плетизм цикленных индексов.

Глава II. Основные определения

species HSet h-species аналитический функтор

Глава III. Формулы

3.1. Аналитический функтор для h-species

Аналитический функтор \mathcal{F} соответствующий species F является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией (TODO: дописать и возможно добавить определение Дурова). Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & Set \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ Set & & \end{array}$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, имеется естественное преобразование $\kappa F \rightarrow i \circ \mathcal{F}$, обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора $M: Set \rightarrow Set$ и морфизма функторов $\eta: F \rightarrow i \circ M$ этот морфизм пропускается через \mathcal{F} при помощи κ .

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \\ & \searrow \alpha & \downarrow \text{---} \\ & & M \end{array}$$

Явная формула для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F} = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \quad (3.1)$$

У аналитического функтора для типа структуры F имеется прозрачный комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество A как набор цветов, то значение аналитического функтора $\mathcal{F}(A)$ трактуется как множество

структур типа F раскрашенных в цвета из A .

Хочется построить аналог аналитического функтора для h -species

$$\begin{array}{ccc} HB & \xrightarrow{F} & HSet \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ HSet & & \end{array}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \quad (3.2)$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверок универсальности картинки

3.2. Декатегорификация аналитического функтора: Фробениусова характеристика / Цикленный индекс

3.2.1. Случай обычных species

Напомним ситуацию с обычными species. Процедура декатегорификации не имеет строго математического смысла, так же как и процедура квантования. Сейчас мы предложим процедуру, которая, стартуя с обычных species, на выходе дает классический цикленный индекс/фробениусову характеристику. Затем мы попытаемся аналогические действия провести и в гипероктаэдральном случае. Декатегорификацией моноидальной категории \mathbb{B} является моноид классов изоморфизма объектов категории \mathbb{B} , то есть моноид натуральных чисел по сложению. Декатегорификацией $\hat{\mathbb{B}}$ естественным образом оказывается моноидная алгебра с коэффициентами из \mathbb{Z} для моноида \mathbb{N} , то есть кольцо многочленов $Z[X]$. (Правда это не то, что мы хотели. Чтобы получить цикленный индекс надо декатегорифицировать саму операцию подстановки и аналитический функтор).

Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием S_n имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэффициенте при мономе соответствующего веса. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное

число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как не раскрашенная структура, а во-вторых раскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например раскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответствует моном $x_1^2 x_2$. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$, где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называется фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$Z_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \quad (3.3)$$

Где χ — характер (перестановочного) представления заданного F , σ — перестановка цикленного типа λ , $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots$, z_λ — индекс класса сопряженности σ . Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это x_1, x_2, x_3, \dots

3.2.2. Случай h-species

Попробуем построить аналогичную конструкцию для h-species. Прежде всего отметим, что раскраска, элемент $A^{\bar{n}}$, это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы n и $-n$ должны отображаться либо в один и тот же элемент A (который инволюцией переводиться в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по-прежнему определяется длиной орбиты инволюции A , уже после факторизации по B_n . То есть кроме действия B_n есть еще внешняя инволюция — действие Z_2 . Будем называть их *моноструктурами* и *биструктурами*.

Цикленный индекс, считающий только моноструктуры будем обозначать

$\mathcal{Z}^{(1)}$, биструктуры — $\mathcal{Z}^{(2)}$. Количество орбит под действием $H_n \times Z_2$ соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$, а под действием только H_n соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$. Поскольку каждая биструктура будет посчитана два раза.

В качестве H -множества цветов возьмем счетное множество моноцветов x_1, x_2, x_3, \dots объединенное с счетным множеством бицветов y_1, y_2, y_3, \dots .

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую раскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляется в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе H_n бывают двух типов: длинные — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и короткие — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество неподвижных точек для H_n . Пусть λ^1 — цикленный тип коротких перестановок, λ^2 — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл соответствует моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет.

Это можно выразить такой формулой:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \\ \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь нижний индекс ψ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$. При этом коэффициент 2 у y_i^2 отражает тот факт, что можно раскрасить k пар граней в бицвет, так чтобы раскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество неподвижных точек для $H_n \times Z_2$. Разобьем сумму на две части — $(h, \bar{0})$ и $(h, \bar{1})$. Для первой формула будет аналогична 3.4, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коэффициент $\frac{1}{2}$.

Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим цикл (пару циклов в него). Тогда добавляется смена грани

на каждом шаге, а значит для циклов нечетной длины сменится свойство короткий–длинный. Итоговая формула такая

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Где λ_o — циклы нечетной длины, λ_e — циклы четной длины. Откуда легко получить

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} - \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2.3. Примеры

Посчитаем цикленные индексы для простых h-species. Здесь мы будем писать $Z(A)$ вместо Z_A . Это не должно вызывать путаницу, поскольку вместо A будут использоваться схематические картинки и их не перепутать с переменными, от которых считается цикленный индекс.

Структура «одна пара граней», будем символически писать \circledcirc .

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\circledcirc) = \frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) = \psi_{x,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circledcirc) = \frac{1}{2}(\psi_x^1 + \psi_{x,y,y}^1) = \psi_{x,y}^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circledcirc) = 0$$

Структура «одна пара граней, грани различаются». Обозначение \circlearrowleft .

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\circlearrowleft) = \frac{1}{2}(2\psi_{x,y,y}^1 + 0\psi_x^1) = \psi_{x,y,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circlearrowleft) = \frac{1}{2}(2\psi_x^1 + 0\psi_{x,y,y}^1) = \psi_x^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circlearrowleft) = \psi_y^1$$

Структура «квадрат». Обозначение \square .

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}((\psi_{x,y,y}^1)^2 + (\psi_x^1)^2 + 2\psi_x^2 + 2(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Здесь коэффициенты — не характеры (характер при каждом слагаемом = 1).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1\psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)$$

Последнее следовало и из общих соображений: легко видеть что $\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = 0$.

Структура «квадрат, противоположные грани различаются». Обозначение \square .

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_{x,y,y}^1)^2 + 0(\psi_x^1)^2 + 0\psi_x^2 + 0(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_x^1)^2 + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Откуда

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = \frac{1}{2}([\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) - \mathcal{Z}^{(1)}(\square)) = \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1\psi_x^1 + \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1)^2) = \psi_y^1\psi_x^1 + (\psi_y^1)^2$$

Структура $\circlearrowleft \times \circlearrowleft$. Это не то же самое что \square , поскольку это «упорядоченная пара \circlearrowleft ». Ее цикленный индекс мы посчитаем дальше.

3.3. Сумма и произведение цикленных индексов

3.3.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответствует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} + \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(2)} + \mathcal{Z}_B^{(2)}$$

3.4. Произведение

Для произведения уже не совсем так. Утверждается, что моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры. То есть

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(2)} + \mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(1)} + 2(\mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)}) = (\mathcal{Z}_A^{(1)} + 2\mathcal{Z}_A^{(2)}) * (\mathcal{Z}_B^{(1)} + 2\mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Что логично, поскольку $(\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})$ — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

3.4.1. Примеры

Посчитаем произведение уже известных h-структур и их цикленных индексов.

Структура $\circ \times \circ$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \times \circ) = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = (\psi_{x,y}^1)^2$$

Структура $\circ \times \circ$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\circ \times \circ) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\circ) \times [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\circ) = (\psi_{x,y}^1)^2$$

Легко получить эту же формулу и из других соображений, как $\frac{1}{8}(8(\psi_{x,y}^1)^2)$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \times \circ) = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = (\psi_x^1)^2$$

3.5. Цикленный индекс композиции

3.5.1. Случай обычных species

Аналитический функтор позволяет дать определение композиционного произведения двух структур. Рассмотрим два species F и G . По ним можно построить аналитические функторы \mathcal{F} и \mathcal{G} . Композиция этих функторов снова будет аналитическим функтором $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$. Доказательство его аналитичности можно найти в [TODO: где или взять доказательство Дурова]. Species который соответствует цикленному индексу $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ и будет называться $F \circ G$. У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры F раздуваем(красим) в структуру типа G . Чудесный факт заключается в том, что в декартефикации композиции соответствует простой формуле подстановки. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов A рассмотрим счетный набор цветов x_1, x_2, x_3, \dots . Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots) \end{aligned} \quad (3.8)$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G . То есть $\mathcal{Z}_{F \circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$, где $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G . Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$ легко понять в переменных x_1, x_2, x_3, \dots . Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G -структуру. Значит каждый цвет x_j заменяется на x_j^i .

Формулу 3.8 можно специализировать для подсчета labeled-структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответствующие мономы (в базисе x_1, x_2, x_3, \dots) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\psi^1)^k$ и коэффициент в них равен $ck!$ — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой $\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$. Формула 3.8 примет вид $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \quad (3.9)$$

А поскольку labeled структур ровно в $k!$ раз больше, чем unlabeled, то равенство 3.9 справедливо для обыкновенных производящих функций unlabeled структур.

3.5.2. Случай h-species

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. Прежде всего отметим, что инволюция на множестве цветов делит их на моноцвета (x_1, x_2, x_3, \dots) и бицвета (y_1, y_2, y_3, \dots) . Однако, формулы 3.4 и 3.6 подсказывают, что в качестве базиса можно брать не ψ_x^i, ψ_y^j а $\psi_x^i, \psi_{x,y}^j$. Впрочем это тривиальная замена переменных.

Итак мы хотим выяснить чему равняются

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots)$$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(2)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots)$$

Утверждается следующее:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(1)/(2)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots) = \\
\mathcal{Z}_F^{(1)/(2)}(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^4, \psi_{x,y,y}^6, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y,y}^3, \psi_{x,y,y}^6, \psi_{x,y,y}^9, \dots), \\
\dots, \\
[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots), \\
[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^4, \psi_{x,y,y}^6, \dots), \\
[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y,y}^3, \psi_{x,y,y}^6, \psi_{x,y,y}^9, \dots), \\
\dots)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому давайте напомним ее на уровне членов:

$$\begin{aligned}
\psi_x^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \\
\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{x,y,y}^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \\
\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots)
\end{aligned}$$

Здесь мы пишем $(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})$, поскольку цикленный индекс для h-species в действительности представляет собой пару. Биструктуры подставляются вместо бицветов, моноструктуры, вместо моноцветов. В остальном рассуждение дословно повторяет случай обычных species.

Аналогично, если сделать подстановку

$$\psi_x^1 = t, \psi_x^k = 0, k > 1$$

$$\psi_{x,y,y}^1 = s, \psi_{x,y,y}^k = 0, k > 1$$

То полученная формула показывает, что 3.9 справедливо для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур (то есть производящая

функция от двух переменных). А можно сделать подстановку $s := t$, которая даст выполнение формулы 3.9 для ехр-производящей функции просто labeled-структур. А значит и обычной производящей функции unlabeled-структур.

3.5.3. Примеры

Посчитаем $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})(\circ \circ \circ)$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \circ \circ) = \psi_x^1 \circ \psi_{x,y}^1 = \psi_{x,y}^1 = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ \circ \circ) = \psi_y^1 \circ 0 = 0 = \mathcal{Z}^{(2)}(\circ)$$

Да и вообще, справедливо

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \circ A) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ \circ A) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

А так же

$$\mathcal{Z}^{(1)}(A \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(A \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

Это дает некоторое понимание композиции. Так $A \circ \circ = \circ \circ A = A$. То есть \circ является нейтральным элементом в моноиде h-species по композиции. Это несколько контр-интуитивно, поскольку в обычных species нейтральным элементом является одноточечное множество. А его образом при вложении species в h-species является \circ . [TODO А не значит ли это что просто можно по другому вложить?]

Интересно посмотреть чем является \circ . Например

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square \circ \circ) &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1))^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^2 + \psi_x^2)) = \\ \frac{1}{8}((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1 \psi_x^1) + 2\psi_x^2) &= [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Откуда можно сделать вывод, что $\square \circ \circ = \square$. То есть подстановка \circ , это «стирание различий между противоположными гранями».

3.5.4. Предложения [TODO]

$$(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots) = (\mathcal{Z}_G(\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots), 0)$$

Где G — обычный species, вложенный в h-species. А \mathcal{Z}_G — его цикленный индекс.

3.6. Примеры [TODO]

Посчитаем для структуры V «вершина куба».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](V) = e^{\psi_{x,y,y}^1 + \frac{\psi_{x,y,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y,y}^3}{3!} + \dots}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(V) = e^{(\psi_x^1 + \frac{\psi_x^2}{2!} + \frac{\psi_x^3}{3!} + \dots) + (\psi_y^2 + \frac{\psi_y^4}{2!} + \frac{\psi_y^6}{3!} + \dots)}$$

Для структуры куба H «куб».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](H) = \mathcal{Z}^{(1)}(H) = e^{\psi_{x,y}^1 + \frac{\psi_{x,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y}^3}{3!} + \dots}$$

Нетрудно убедиться что $\mathcal{Z}^{(i)}(V \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(i)}(H)$.