Гипероктаэдральные комбинаторные виды

Сергей Воробьев

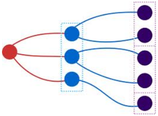
Санкт-Петербургский Государственный университет

2012

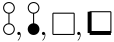
Научный руководитель Константин Игоревич Пименов

Введение

Комбинаторные виды (species) $F\colon \mathbb{B} \to \mathbf{Set}$ (Joyal, 1980-ые).
Определил сумму, произведение и композицию species.
Композиции соответствует плетизм цикленных индексов.
Комбинаторная интерпретация — структуры на точках.



Гипероктаэдральные комбинаторные виды (H-species) $F\colon \mathbb{HB} \to \mathbf{HSet}$ (Bergeron, 1996). Определил сумму, произведение, но остался вопрос о композиции.
Комбинаторная интерпретация — структуры на гранях куба?



Постановка задачи

* Определить цикленный индекс для гипероктаэдральных комбинаторных видов.
* Определить композицию и гипероктаэдральный плетизм.
* Развить комбинаторный подход серией примеров.

Работа состоит из двух частей. Первая половина посвящена конспективному изложению теории обычных комбинаторных видов. Во второй части параллельно излагается теория для гипероктаэдральных комбинаторных видов.
В первой главе, мы имели мощную комбинаторную интуицию, которая мотивировала категорные конструкции. Во второй, мы переносим категорные конструкции species на новый контекст и пытаемся дать комбинаторную интерпретацию получившимся результатам.

Аналитический функтор

Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & Set \\ Set \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} HB \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & HSet \\ HSet \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Явная конструкция является спецификацией результата из заметки Akhil Mathew «Dold-Kan correspondence»

$$\mathcal{F} = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \tag{1}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}} / B_n \tag{2}$$

Здесь $A^{\bar{n}}$ задает «раскраску», сохраняющую инволюцию.

Цикленный индекс — результат декатегорификации аналитического функтора. В отличии от обычных species, для h-species выяснилось, что плетизм можно определить, если рассмотреть пару симметрических функций $(\mathscr{Z}^{(1)}, \mathscr{Z}^{(2)})$. Эти две функции соответствуют двум видам орбит под действием инволюции: длины 1 и длины 2.

Комбинаторные виды

$$\mathcal{Z}_F = \sum_{n,\lambda\vdash n} \chi(\sigma_\lambda)\frac{\psi_x^\lambda}{z_\lambda}$$

Гипероктаэдральные комбинаторные виды

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n,\lambda_o+\mu_o+\lambda_e+\mu_e\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e})\frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e+\mu_o}\psi_x^{\mu_e+\lambda_o}}{z_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{n,\lambda+\mu\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda\mu})\frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda}\psi_x^{\mu}}{z_{\lambda\mu}} - \\ \frac{1}{2}\sum_{n,\lambda_o+\mu_o+\lambda_e+\mu_e\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e})\frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e+\mu_o}\psi_x^{\mu_e+\lambda_o}}{z_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}}\end{aligned} \tag{4}$$

Формулы для плетизма

Плетизм

$$\mathcal{Z}_{F\circ G}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\ldots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\ldots),\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2,\psi_x^4,\psi_x^6,\ldots), \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3,\psi_x^6,\psi_x^9,\ldots),\ldots)$$

Гипероктаэдральный плетизм (основная теорема)

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{(i)}_{F\circ G}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\ldots,\psi_y^1,\psi_y^2,\psi_y^3,\ldots) = \\
\mathcal{Z}^{(i)}_F(&\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\ldots,\psi_y^1,\psi_y^2,\psi_y^3,\ldots),\\
&\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2,\psi_x^4,\psi_x^6,\ldots,\psi_y^2,\psi_y^4,\psi_y^6,\ldots),\\
&\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3,\psi_x^6,\psi_x^9,\ldots,\psi_y^3,\psi_y^6,\psi_y^9,\ldots),\\
&\ldots, \\
&\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\ldots,\psi_y^1,\psi_y^2,\psi_y^3,\ldots),\\
&\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^2,\psi_x^4,\psi_x^6,\ldots,\psi_y^2,\psi_y^4,\psi_y^6,\ldots),\\
&\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^3,\psi_x^6,\psi_x^9,\ldots,\psi_y^3,\psi_y^6,\psi_y^9,\ldots),
\end{aligned} \tag{5}$$

Примеры

Из формулы гипероктаэрального плетизма цикленного индекса, следуют неочевидные примеры композиций. Вот простейшие из них:

(1)

$A \circ$  $=$  $\circ A = A$

 — единица подстановки.

(2)

 $\circ$  $= \square$

Подстановка , это «стирание различий между противоположными гранями».

Заключение

Результат:

* Введен гипероктаэдральный цикленный индекс, написана явная формула.
* Определена композиция, введен гипероктаэдральный плетизм. Написана явная формула.
* Рассмотрено множество примеров. Частично разработан комбинаторный язык.

Таким образом получены оригинальные результаты, формулировки которых не были известы заранее. Планируется опубликовать главу II в виде отдельной статьи. Главу I можно использовать как русскоязычный конспект по теории комбинаторных видов.