

# Гипероктаэдральные комбинаторные виды

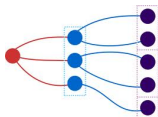
Сергей Воробьев

Санкт-Петербургский Государственный университет

2012

Научный руководитель Константин Игоревич Пименов

Комбинаторные виды (species)  $F: \mathbb{B} \rightarrow \mathbf{Set}$  (Joyal, 1980-ые).  
Определил сумму, произведение и композицию species.  
Композиции соответствует плетизм цикленных индексов.  
Комбинаторная интерпретация — структуры на точках.



Гипероктаэдральные комбинаторные виды (H-species)  
 $F: \mathbb{H}\mathbb{B} \rightarrow \mathbf{HSet}$  (Bergeron, 1996). Определил сумму,  
произведение, но остался вопрос о композиции.  
Комбинаторная интерпретация — структуры на гранях куба?



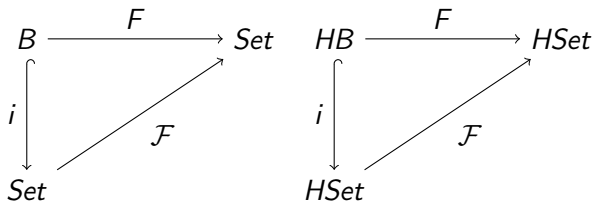
- \* Определить цикленный индекс для гипероктаэдральных комбинаторных видов.
- \* Определить композицию и гипероктаэдральный плетизм.
- \* Развить комбинаторный подход серией примеров.

Работа состоит из двух частей. Первая половина посвящена конспективному изложению теории обычных комбинаторных видов. Во второй части параллельно излагается теория для гипероктаэдральных комбинаторных видов.

В первой главе, мы имели мощную комбинаторную интуицию, которая мотивировала категорные конструкции. Во второй, мы переносим категорные конструкции *species* на новый контекст и пытаемся дать комбинаторную интерпретацию получившимся результатам.

# Аналитический функтор

Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора  $F$  относительно  $i$ .



Явная конструкция является спецификацией результата из заметки Akhil Mathew «Dold-Kan correspondence»

$$\mathcal{F} = \sum_n F[n] \times A^n / S_n$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}} / B_n$$

Здесь  $A^{\bar{n}}$  задает «раскраску», сохраняющую инволюцию.

Цикленный индекс — результат декатегорификации аналитического функтора. В отличие от обычных species, для h-species выяснилось, что плетизм можно определить, если рассмотреть пару симметрических функций  $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})$ . Эти две функции соответствуют двум видам орбит под действием инволюции: длины 1 и длины 2.

# Формулы для цикленного индекса

## Комбинаторные виды

$$\mathcal{Z}_F = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi_x^\lambda}{z_\lambda}$$

## Гипероктаэдральные комбинаторные виды

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n, \lambda_o + \mu_o + \lambda_e + \mu_e \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o \mu_o \lambda_e \mu_e}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e + \mu_o} \psi_x^{\mu_e + \lambda_o}}{z_{\lambda_o \mu_o \lambda_e \mu_e}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda + \mu \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda \mu}) \frac{\psi_{x,y,y}^\lambda \psi_x^\mu}{z_{\lambda \mu}} - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o + \mu_o + \lambda_e + \mu_e \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o \mu_o \lambda_e \mu_e}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e + \mu_o} \psi_x^{\mu_e + \lambda_o}}{z_{\lambda_o \mu_o \lambda_e \mu_e}} \end{aligned} \quad (2)$$

## Плетизм

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots), \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots), \\ \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots), \dots)$$

## Гипероктаэдральный плетизм (основная теорема)


$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{F \circ G}^{(i)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F^{(i)}(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots), \\ \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_y^2, \psi_y^4, \psi_y^6, \dots), \\ \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_y^3, \psi_y^6, \psi_y^9, \dots), \\ \dots, \\ \mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots), \\ \mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_y^2, \psi_y^4, \psi_y^6, \dots), \\ \mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_y^3, \psi_y^6, \psi_y^9, \dots), \end{aligned} \quad (3)$$



Из формулы гипероктаэдрального плетизма цикленного индекса, следуют неочевидные примеры композиций. Вот простейшие из них:


(1)

$$A \circ \bullet = \bullet \circ A = A$$

 — единица подстановки.

(2)

$$\square \circ \circ = \square$$

Подстановка , это «стирание различий между противоположными гранями».

Результат:

- \* Введен гипероктаэдральный цикленный индекс, написана явная формула.
- \* Определена композиция, введен гипероктаэдральный плетизм. Написана явная формула.
- \* Рассмотрено множество примеров. Частично разработан комбинаторный язык.

Таким образом получены оригинальные результаты, формулировки которых не были известны заранее. Планируется опубликовать главу II в виде отдельной статьи. Главу I можно использовать как русскоязычный конспект по теории комбинаторных видов.