

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математико–механический факультет

Специальность «математика»

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

студента 511 группы
Воробьева Сергея Эдуардовича

ГИПЕРОКТАЭДРАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ТИПЫ

«К защите допущен»:

Зав. кафедрой высшей алгебры
и теории чисел,
профессор, д.ф.-м.н.

_____ Яковлев А.В.

Научный руководитель,
доцент, к.ф.-м.н.

_____ Пименов К.И.

Рецензент,
профессор, д.ф.-м.н.

_____ Яковлев А.В.

г. Санкт-Петербург, 2012

Содержание

Глава I. Введение	3
1.1. Комбинаторные виды	3
1.2. Композиция комбинаторных видов	5
Глава II. Гипероктаэдральные комбинаторные виды	11
2.1. Определение	11
2.2. Вложение species в h-species	12
2.3. Сложение и умножение h-species	12
2.4. Аналитический функтор для h-species	12
2.5. Декатегорификация аналитического функтора	13
2.6. Цикленный индекс species, вложенных в h-species	17
2.7. Сумма и произведение цикленных индексов	18
2.8. Цикленный индекс композиции	19
2.9. Применение цикленного индекса к решению задачи о раскрасках	22
Список литературы	24

Глава I. Введение

1.1. Комбинаторные виды

Комбинаторные виды (*species*) были введены Жуаялем в 1980 году [1]. Они дают универсальный аппарат изучения помеченных (labeled) и непомеченных (unlabeled) структур, и являются развитием идеи производящих функций. О комбинаторных видах можно говорить на нескольких языках: категорном, комбинаторном и на языке теории представлений. Последний наиболее часто встречается в литературе, хотя автору он кажется наименее выразительным. Во введении изложено начало теории комбинаторных видов. Основным источником информации про комбинаторные виды является [3].

1.1.1. Определение

Рассмотрим категорию \mathcal{B} — группоид конечных множеств. Она эквивалентна группоиду, объекты которого пронумерованы неотрицательными целыми числами и $\text{Hom}(n, n) = S_n$.

Определение 1. Комбинаторным видом (species) называется функтор

$$F : \mathcal{B} \rightarrow \text{Set}$$

Задать такой функтор, это то же самое что для каждого $n \in \mathbb{N}$ задать множество $F[n]$ с действием группы S_n . В комбинаторике такая ситуация возникает, когда мы рассматриваем явно определенные каким-либо образом структуры на конечных множествах. Например: линейные порядки, циклические порядки, деревья. Действие S_n естественно возникает из перестановок исходных точек.

Пример 1. Вид \mathbf{E} — вид множество (без дополнительной структуры). Он сопоставляет набору точек одно множество, состоящее из этих точек, $\mathbf{E}[n] = \{*\}$. Все элементы S_n переходят в тождественное отображение.

Пример 2. \mathbf{C} — циклический порядок. Сопоставляет набору из n точек $(n-1)!$ возможных циклических порядков на них.

Пример 3. Линейный порядок \mathbf{L} сопоставляет $n!$ линейных порядков.

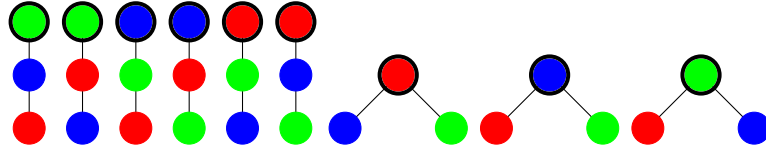


Рис. 1.1. корневые деревья с 3 вершинами

Пример 4. \mathbf{E}_e — сужение \mathbf{E} на четные множества. То есть для четных n , совпадает с \mathbf{E} , а для нечетных \emptyset . Аналогично \mathbf{E}_o — сужение на нечетные.

Пример 5. На картинке 1.1 изображен вид «корневые деревья с 3 вершинами» (без какого-либо порядка на потомках).

Можно рассмотреть функтор $I : Set \rightarrow Vect$, который сопоставляет множеству векторное пространство, базис которого это множество. Тогда $F \circ I : \mathcal{B} \rightarrow Vect$ — сопоставляет каждому n перестановочное представление группы S_n . При таком подходе, значение характера этого представления $\chi(\sigma)$, это количество структур, неподвижных относительно $\sigma \in S_n$.

1.1.2. Сложение комбинаторных видов

Сумму двух species F и G определим как поточечную сумму функторов. На комбинаторном языке это будет означать «либо структура типа F , либо структура типа G ». $(F + G)[n] = F[n] \amalg G[n]$ с покомпонентным действием S_n .

Пример 6. $\mathbb{E} = \mathbb{E}_e + \mathbb{E}_o$

Пример 7. Любой вид F можно разложить в такую сумму $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$, где F_i — сужение F на $i \in \mathcal{B}$. Значение F_i на $j \neq i$ равно \emptyset .

1.1.3. Произведение комбинаторных видов

Определим произведение по Коши комбинаторных видов. По определению задать на конечном множестве структуру типа $F \cdot G$ означает разбить множество точек на две части (всевозможные) и на первом ввести структуру типа F , на втором — типа G .

$$(F \cdot G)[X] = \coprod_{X_1 \amalg X_2 = X} F[X_1] \times G[X_2]$$

С категорной точки зрения произведение по Коши возникает из тензорного произведения на категории \mathcal{B} , которое на объектах задается как $n \otimes m = (n + m)$, на морфизмах при помощи вложения $S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$ (все такие вложения сопряжены). Известна конструкция свертки функторов из \mathcal{C} в Set , где \mathcal{C} — моноидальная категория с копроизведениями [Day convolution [8]].

На языке теории представлений $F[n + m]$ как множество с действием группы S_{n+m} равно индуцированному представлению $Ind \uparrow_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} F[n] \times F[m]$.

Пример 8. $\mathbf{E} \times \mathbf{E}_1$ — множество с выделенной точкой.

Пример 9. \mathbf{C}^2 — (упорядоченная) пара циклов.

1.2. Композиция комбинаторных видов

Кроме сложения и умножения на species можно ввести операцию композиции. По определению задать на конечном множестве структуру типа $F \circ G$ означает разбить множество точек на части (всевозможные), на частях (как новых точках) ввести структуру типа F , а на каждой части — типа G . Иначе говоря, «раздуть» каждую точку структуры типа F в структуру типа G .

$$(F \circ G)[X] = \coprod_{\coprod_i X_i = X} F[\{X_i\}_i] \times \left(\prod_i G[X_i] \right)$$

Замечание 2. Определение species не предполагает конечности $F[n]$, однако цикленный индекс (см. раздел 1.2.4) можно писать только для таких видов. Класс таких species не замкнут относительно композиции. Поскольку при подстановке species F , для которого $F[0] \neq \emptyset$ можно выделить сколько угодно пустых частей. Поэтому в дальнейшем в записи $F \circ G$, мы будем неявно предполагать что внутренний операнд «сужен» на \mathbb{N}_+ .

Пример 10. $\mathbf{E}_1 \circ F = F$, $F \circ \mathbf{E}_1 = F$. \mathbf{E}_1 является нейтральным элементом в моноиде species по композиции.

Пример 11. $\mathbf{E}_2 \circ \mathbf{C}$ — (неупорядоченная) пара циклов.

Пример 12. $\mathbf{E} \circ \mathbf{E}$ — структура разбиения множества.

Пример 13. $\mathbf{E} \circ \mathbf{C} = \mathbf{S}$ — структура перестановки. Буквально перестановка — это набор циклов.

Для того, чтобы ввести композицию на категорном языке нам понадобится дополнительная конструкция: аналитический функтор.

1.2.1. Аналитический функтор комбинаторных видов

Аналитический функтор (введен Жуаялем в [2]) \mathcal{F} соответствует species F . Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией.

Определение 3. Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{F} & Set \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ Set & & \end{array}$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, существует естественное преобразование $\kappa: F \rightarrow i \circ \mathcal{F}$, обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора $M: Set \rightarrow Set$ и морфизма функторов $\eta: F \rightarrow i \circ M$ этот морфизм пропускается через \mathcal{F} при помощи κ .

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \\ & \searrow \alpha & \vdots \\ & & M \end{array}$$

Явная конструкция для аналитического функтора. Доказательство см. в [3].

$$\mathcal{F}(A) = \coprod_n F[n] \times A^n / S_n \quad (1.1)$$

Замечание 4. У аналитического функтора для типа структуры F имеется прозрачная комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество A как набор цветов, то значение аналитического функтора $\mathcal{F}(A)$ трактуется как

множество структур типа F раскрашенных в цвета из A . Будем называть их A -раскрашенными структурами.

1.2.2. Композиция аналитических функторов комбинаторных видов

Теорема 5. *Композиция аналитических функторов $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ является аналитическим функтором для $F \circ G$.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{F}(\mathcal{G}(A))$. Согласно замечанию 4, это множество $G(A)$ -раскрашенных структур типа F . То есть, раскрашенных в цвета из множества: « A -раскрашенные структуры типа G ».

С другой стороны, рассмотрим аналитический функтор \mathcal{X} отвечающий species $F \circ G$. Множество $\mathcal{X}(A)$ — это набор A -раскрашенных структур типа $F \circ G$. Их, по определению, можно рассмотреть как множество F -структур, введенных на A -раскрашенных G -структурах (как новых точках). А это то же самое, что и $G(A)$ -раскрашенные структуры типа F .

Более строгое доказательство см. в [11] (Lemma 2.5). □

1.2.3. Правильный взгляд на композицию аналитических функторов

Дело в том, что композиция комбинаторных видов — это в некотором смысле частный случай аналитического функтора, только не со значениями в Set , а со значениями в $Species = \hat{\mathcal{B}}$.

А именно, для любой симметрической моноидальной категории \mathcal{D} и объекта A из \mathcal{D} , функтор из \mathcal{B} в \mathcal{D} , который 1 отправляет в A , а n отправляет в $A^{\otimes n}$. Если в \mathcal{D} существуют всевозможные копределы, то этот функтор можно «продолжить по непрерывности» (расширение Кана) до функтора из категории предпучков на \mathcal{B} со значениями в \mathcal{D} (см. например заметку [10], предложение 1.9). В работе Дурова [9] этот функтор обозначается Φ_A .

В случае когда $\mathcal{C} = Set$, получаем $\Phi_A(F) = \mathcal{F}(A)$. В случае, когда $\mathcal{C} = Species$, получаем $\Phi_G(F) = F \circ G$. То есть можно определить композицию, как функтор $G \mapsto F \circ G$ при помощи Φ_G . При таком взгляде на подстановку теорема о композиции становится почти тавтологией.

1.2.4. Цикленный индекс

Будем рассматривать только species, конечные в смысле замечания 2. Хочется используя идею подсчета с весом, написать аналог производящей функции для покрашенных (в смысле замечания 4) структур. Цветам сопоставим переменные x_1, x_2, x_3, \dots . Раскрашенной структуре с раскраской $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ сопоставим моном $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$. Например, раскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответствует моном $x_1^2x_2$. Суммируя по всем раскрашенным структурам из формулы 1.1, мы получим симметрическую (от x_1, x_2, x_3, \dots) функцию. Коэффициент при каждом мономе — это число раскрашенных структур с заданной раскраской.

Введем некоторые обозначения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) \vdash n$ — разбиение. σ — перестановка цикленного типа λ . z_λ — индекс класса сопряженности σ . χ — характер (перестановочного) представления заданного F . $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots)\dots$

Утверждение 6. *Фробениусовой характеристикой или цикленным индексом species F будем называть симметрическую функцию:*

$$Z_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \quad (1.2)$$

Коэффициент при мономе $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ равен числу раскрашенных структур с раскраской $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$.

Доказательство. По Лемме Бернсайда количество орбит равно усредненному по всем элементам группы числу неподвижных точек. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как нераскрашенная структура, а во-вторых раскраска должна переходить в себя. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. \square

Пример 14. $Z_{E_1} = \psi^1$

Пример 15. $Z_{E_2} = \frac{1}{2}((\psi^1)^2 + \psi^2)$

Пример 16. $Z_E = e^{(\psi^1 + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} + \dots)}$. Доказательство смотри в [3].

1.2.5. Плетизм цикленных индексов

Теорема 7. *Композиции аналитических функторов соответствует плетизм цикленных индексов.*

Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановки. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов A рассмотрим счетный набор цветов x_1, x_2, x_3, \dots . Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$.

Утверждение 8.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Доказательство. В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G . То есть $\mathcal{Z}_{F \circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$, где $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G . Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$ легко понять в переменных x_1, x_2, x_3, \dots . Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G -структуру. Значит каждый цвет x_j в \mathcal{Z}_G при подстановке в ψ^i заменяется на x_j^i . \square

Замечание 9. Формулу 1.3 можно специализировать для подсчета labeled-структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответствующие мономы (в базисе x_1, x_2, x_3, \dots) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\psi^1)^k$ и коэффициент в них равен $ck!$ — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой $\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$. Формула 1.3 примет вид $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \quad (1.4)$$

Пример 17. (Экспоненциальная) производящая функция для **E** это $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$. А производящая функция для непустых циклов **C** это $-\log(1 - x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$. А для **S** производящая функция это $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. И действительно $e^{-\log(1-x)} = \frac{1}{1-x}$.

Глава II. Гипероктаэдральные комбинаторные виды

2.1. Определение

Рассмотрим категорию $HSet$. В ней объекты это множества, снабженные дополнительным действием — инволюцией. А стрелки, это морфизмы, сохраняющие инволюцию. Рассмотрим категорию $H\mathcal{B}$ — группоид конечных множеств с инволюциями без неподвижных точек. Функтор $F : H\mathcal{B} \rightarrow HSet$ — гипероктаэдральный (или кубический) комбинаторный вид. Мы будем так же для краткости употреблять термин $h\text{-species}$. Группоид $H\mathcal{B}$ эквивалентен группоиду, объекты которого $\bar{n} = \{-n, -n+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, n-1, n\}$, инволюция — смена знака. \bar{n} мы интерпретируем как грани куба, на которых действует гипероктаэдральная группа B_n — группа движений n -мерного куба. Эта же группа действует на множестве $F[\bar{n}]$, которое мы интерпретируем как множество структур на множестве граней куба. Действие B_n возникает из перестановок граней.

Замечание 10. При работе со $species$, мы имели мощную комбинаторную интуицию, которая мотивировала категорные конструкции. В случае $h\text{-species}$ мы переносим категорные конструкции $species$ на новый контекст и пытаемся дать комбинаторную интерпретацию получившимся результатам.

Пример 18. Вид \mathbf{H} — структура куб. Он сопоставляет \bar{n} одно множество. Действие B_n тривиально.

Пример 19. \circ — неразличимая пара граней (\mathbf{H}_1). \bullet — различимая пара граней. Оба они принимают значение \emptyset на всем, кроме $\bar{1}$. Второе соответствует действию B_1 на 2-х точечном множестве.

Пример 20. \square — куб размерности 2 (\mathbf{H}_2). \square — куб размерности 2 с различными противоположными гранями. Второе соответствует действию B_2 на 4-х точечном множестве.

Пример 21. Структура $\bullet \times \bullet$. Это не то же самое что \square , поскольку это «упорядоченная пара \bullet ».

2.2. Вложение species в h-species

Обычные комбинаторные виды можно «вложить» в гипероктаэдральные. Это вложение задается функторами $I_1 : H\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ ($\pm i \mapsto i$) и $I_2 : Set \rightarrow HSet$ (к множеству добавляется тождественная инволюция). В композиции с F они дают $I_1 \circ F \circ I_2 : H\mathcal{B} \rightarrow HSet$. Комбинаторно: species рассмотреть как структуру не на точках, а на парах (неразличимых) граней.

2.3. Сложение и умножение h-species

Сложение и умножение определяются полностью аналогично species. Они введены в работе Бержерона [4].

2.4. Аналитический функтор для h-species

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species. Мы считаем, что правильная версия гипероктаэдрального аналитического функтора действует из $HSet$ в $HSet$. По аналогии с обычным случаем строим \mathcal{F} как левое расширение Кана:

$$\begin{array}{ccc} H\mathcal{B} & \xrightarrow{F} & HSet \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ HSet & & \end{array}$$

Аргумент \mathcal{F} будем называть множеством цветов (в действительности это множество с инволюцией, подробнее в замечании 11).

$$\mathcal{F}(A) = \coprod_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}} / B_n \quad (2.1)$$

Явная конструкция, это расписанная формула из пункта 1.4 в заметке [10].

$A^{\bar{n}}$ — это отображения (раскраски), сохраняющие инволюцию. По аналогии с обычными species, мы мыслим $\mathcal{F}(A)$, как множество F -структур, раскрашенных в цвета из A .

Замечание 11. В новой ситуации множество цветов A уже является не просто множеством, а множеством с инволюцией. Пара элементов $(-i, i)$ отображается либо в один и тот же элемент (a, a) (который инволюцией переводится

в себя), либо в пару элементов (b, \bar{b}) , сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

На $F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}$ действует группа $B_n \times \mathbb{Z}_2$, второй сомножитель соответствует инволюции на цветах. После факторизации по B_n , мы получаем объект из $HSet$.

2.4.1. Композиция аналитических функторов h -species

Теорема 12. *Композиция аналитических функторов h -species $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ является аналитическим функтором для h -species, этот h -species будем называть $F \circ G$.*

Доказательство. Общее рассуждение из пункта 1.2.3. Теперь мы работаем в симметрической моноидальной категории с инволюцией. Инволюция в моноидальной категории — это инволютивное естественное преобразование тождественного функтора. Композиция $F \circ G$ определяется, как $\Phi_G(F)$. Здесь $\Phi_G : \bar{n} \mapsto A^{\otimes n}$, инволюция действует покомпонентно. \square

2.5. Декатегорификация аналитического функтора

Можно действовать наивно: написать производящую функцию для числа раскрасок (1.2), по аналогии с классическим случаем. Такая формула (2.2) рассматривалась (в контексте теории представлений группы $S_n \wr G$) в работе [12] (см. также приложение В во втором английском издании книги Макдональда [7]). При таком подходе определяются операции сложения и умножения по Коши для цикленных индексов. Но попытки определить гипероктаэдральных плетизм оказываются безуспешны. Выяснилось, что правильный аналог цикленного индекса должен помнить информацию о следующем свойстве раскрашенной структуры.

В качестве множества цветов рассмотрим счетное множество моноцветов x_1, x_2, x_3, \dots объединенное с счетным множеством бицветов y_1, y_2, y_3, \dots

Предложение 13. Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по-прежнему определяется длиной орбиты инволюции на A (уже после факторизации по B_n). Будем разделять раскрашенные структуры на *моноструктуры* и *биструктуры*.

Пример 22. Раскрашенная в бигцвет \circ , это моноструктура. А раскрашенная в тот же бигцвет \bullet , это биструктура.

Предложение 14. Гипероктаэдральный цикленный индекс (аналог 1.2) определим как пару симметрических (от $\{x_i\}, \{y_j\}$) функций $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})$. Коэффициент при мономе $x_{i_1} \dots x_{i_k} y_{j_1} \dots y_{j_l}$ в $\mathcal{Z}^{(1)}$ равен количеству моноструктур с раскраской $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, y_{j_1}, \dots, y_{j_l}\}$. Коэффициент при том же мономе в $\mathcal{Z}^{(2)}$ равен количеству биструктур с такой раскраской.

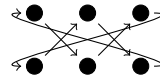
Пример 23. $[\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)}](\circ) = [(x_1 + x_2 + x_3 + \dots), (y_1 + y_2 + y_3 + \dots)]$

Утверждение 15. Количество орбит под действием $B_n \times \mathbb{Z}_2$ соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$, а под действием только B_n соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$.

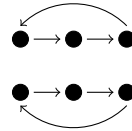
Доказательство. В первом случае каждая моноструктура и биструктура будет посчитана 1 раз. А во втором каждая биструктура будет посчитана два раза, т.к. действие инволюции «склеивающей» две части биструктуры не учтено. \square

2.5.1. Подсчет цикленного индекса

Замечание 16. Циклы в каждом элементе B_n бывают двух типов: *длинные* — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью. Пример длинного цикла:



И *короткие* — пара граней лежит в симметричных, различных циклах. Пример короткого цикла:



Введем обозначения. Пусть λ, μ — разбиения. $|\lambda| + |\mu| = n$. λ — цикленный тип коротких перестановок, μ — цикленный тип длинных перестановок. σ — перестановка цикленного типа (λ, μ) . $z_{\lambda\mu}$ — индекс класса сопряженности σ . χ — характер (перестановочного) представления заданного F .

Посчитаем количество неподвижных точек для B_n .

Утверждение 17. *Неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл покрашен в моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет. Причем для каждой пары коротких циклов есть ровно 2 способа их покрасить в выбранный бицвет (эти два способа сопряжены инволюцией на цветах).*

Под покрашенным циклом мы подразумеваем покраску всех его элементов в этот цвет (такая покрашенная структура будет неподвижна относительно действия этого элемента B_n).

Утверждение 18. *Справедлива формула:*

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda(\sigma)} \psi_x^{\mu(\sigma)} = \sum_{n, \lambda+\mu \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda\mu}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda} \psi_x^{\mu}}{z_{\lambda\mu}} \quad (2.2)$$

Здесь нижний индекс ψ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + \dots)$. При этом удвоенное y в $\psi_{x,y,y}$ (то есть коэффициент 2 у y_i^k) отражает тот факт, что можно красить в бицвет 2-мя способами.

Посчитаем количество неподвижных точек для $B_n \times Z_2$. Разобьем сумму на две части — $(h, \bar{0})$ и $(h, \bar{1})$. Для первой формула будет аналогична 2.2, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коэффициент $\frac{1}{2}$. Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим в него цикл (пару циклов, в случае короткого). Тогда реальный цикл от $(h, \bar{1})$ будет получаться из циклов h добавлением «смены грани» на каждом шаге. Значит для циклов нечетной длины сменится свойство короткий–длинный. Ниже два поясняющих примера.

Пример 24. Пусть перестановка $h_e = \bullet \leftrightarrow \bullet$. Тогда $(h_e, \bar{1}) = \begin{array}{c} \bullet \leftrightarrow \bullet \\ \bullet \leftrightarrow \bullet \end{array}$

Пример 25. Пусть перестановка $h_o = \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \end{array}$. Тогда $(h_o, \bar{1}) = \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \end{array}$

Утверждение 19. Справедлива формула:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda + \mu \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda\mu}) \frac{\psi_{x,y,y}^\lambda \psi_x^\mu}{z_{\lambda\mu}} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o + \mu_o + \lambda_e + \mu_e \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e + \mu_o} \psi_x^{\mu_e + \lambda_o}}{z_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Где λ_o, μ_o — разбиения соответствующие коротким и длинным циклам нечетной длины, λ_e, μ_e — четной.

Из формул 2.2, 2.3 легко получить

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n, \lambda_o + \mu_o + \lambda_e + \mu_e \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e + \mu_o} \psi_x^{\mu_e + \lambda_o}}{z_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda + \mu \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda\mu}) \frac{\psi_{x,y,y}^\lambda \psi_x^\mu}{z_{\lambda\mu}} - \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o + \mu_o + \lambda_e + \mu_e \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e + \mu_o} \psi_x^{\mu_e + \lambda_o}}{z_{\lambda_o\mu_o\lambda_e\mu_e}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.5.2. Примеры вычисления цикленного индекса

Посчитаем цикленные индексы для простых h -species. Здесь мы будем писать $Z(A)$ вместо Z_A . Это не должно вызывать путаницу, поскольку вместо A будут использоваться схематические картинки. Их никак не перепутать с переменными, от которых считается цикленный индекс.

Замечание 20. Формулы 2.2 и 2.3 подсказывают, что в практических вычислениях в качестве симметричного базиса можно брать не $\{\psi_x^i, \psi_y^j\}$ а $\{\psi_x^i, \psi_{x,y,y}^j\}$. Или другую линейную комбинацию, например $\{\psi_x^i, \psi_{x,y}^j\}$.

Пример 26.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\circ) = \frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) = \psi_{x,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = \frac{1}{2}(\psi_x^1 + \psi_{x,y,y}^1) = \psi_{x,y}^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ) = 0$$

Пример 27.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) = \frac{1}{2}(2\psi_{x,y,y}^1 + 0\psi_x^1) = \psi_{x,y,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) = \frac{1}{2}(2\psi_x^1 + 0\psi_{x,y,y}^1) = \psi_x^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\bullet) = \psi_y^1$$

Пример 28.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}((\psi_{x,y,y}^1)^2 + (\psi_x^1)^2 + 2\psi_x^2 + 2(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Здесь коэффициенты — не характеры (характер при каждом слагаемом = 1).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1\psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)$$

Последнее следовало и из общих соображений: легко видеть что $\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = 0$.

Пример 29.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_{x,y,y}^1)^2 + 0(\psi_x^1)^2 + 0\psi_x^2 + 0(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_x^1)^2 + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Откуда

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = \frac{1}{2}([\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) - \mathcal{Z}^{(1)}(\square)) = \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1\psi_x^1 + \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1)^2) = \psi_y^1\psi_x^1 + (\psi_y^1)^2$$

2.6. Цикленный индекс species, вложенных в h-species

Утверждение 21. Пусть G — обычный species, вложенный в h -species. \mathcal{Z}_G — его цикленный индекс.

$$(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots) = (\mathcal{Z}_G(\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots), 0)$$

Доказательство. Очевидно, поскольку при таком вложении бицвет и моноцвет ничем не отличаются с точки зрения итоговой раскрашенной структуры.

Они оба являются просто цветом. □

2.7. Сумма и произведение цикленных индексов

2.7.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответствует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} + \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(2)} + \mathcal{Z}_B^{(2)}$$

2.7.2. Произведение

Для произведения уже не совсем так.

Утверждение 22. *Моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры.*

То есть

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(2)} + \mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(1)} + 2(\mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)}) = (\mathcal{Z}_A^{(1)} + 2\mathcal{Z}_A^{(2)}) * (\mathcal{Z}_B^{(1)} + 2\mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Замечание 23. Это логично, поскольку $(\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})$ — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

2.7.3. Примеры цикленных индексов произведений

Посчитаем произведение уже известных h -структур и их цикленных индексов.

Пример 30. Структура $\circ \times \circ$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \times \circ) = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = (\psi_{x,y}^1)^2$$

Пример 31. Структура $\bullet \times \bullet$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet \times \bullet) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) \times [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) = (\psi_{x,y,y}^1)^2$$

Легко получить эту же формулу и прямым подсчетом по формуле 2.2, как $\frac{1}{8}(8(\psi_{x,y,y}^1)^2)$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \times \bullet) = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) = (\psi_x^1)^2$$

2.8. Цикленный индекс композиции

Попробуем написать плетизм цикленных индексов для h-species, по аналогии с обычными species.

Задача 1. Выразить

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(i)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots)$$

Ответ будет дан в основной теореме 24. Рассмотрим доказательство утверждения 8. В нем мы «красили» каждую точку F -структуры в раскрашенную G -структуру. Сейчас у нас появились бицвета и моноцвета. Исходя из определения биструктуры, будем доказывать, что бицвета в цикленном индексе $\mathcal{Z}_F^{(i)}$ нужно заменить на цикленные индексы $\mathcal{Z}_G^{(2)}$, отвечающие биструктурам G . А моноцвета заменить на цикленные индексы $\mathcal{Z}_G^{(1)}$.

Теорема 24 (О гипероктаэдральном плетизме). *Справедлив аналог утвер-*

ждения 8:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(i)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots) = \\
\mathcal{Z}_F^{(i)}(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_y^2, \psi_y^4, \psi_y^6, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_y^3, \psi_y^6, \psi_y^9, \dots), \\
\dots, \\
\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_y^2, \psi_y^4, \psi_y^6, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_y^3, \psi_y^6, \psi_y^9, \dots), \\
\dots)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Формула громоздкая, поэтому напомним ее на уровне членов:

$$\psi_x^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \psi_y^i, \psi_y^{2i}, \psi_y^{3i}, \dots) \tag{2.7}$$

$$\psi_y^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \psi_y^i, \psi_y^{2i}, \psi_y^{3i}, \dots) \tag{2.8}$$

Доказательство. Рассмотрим моном $\psi_x^\lambda \psi_y^\mu = \psi_x^{\lambda_1} \psi_x^{\lambda_2} \dots \psi_x^{\lambda_k} \psi_y^{\mu_1} \psi_y^{\mu_2} \dots \psi_y^{\mu_r}$ из $\mathcal{Z}_F^{(i)}$. Во что он превратится в $\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(i)}$? Композиция аналитических функторов — замена набора цветов на набор раскрашенных структур. Согласно этому, моноцвета $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ заменяются на моноструктуры из $\mathcal{Z}^{(1)}$. Значит ψ_x^1 превратится в $\mathcal{Z}^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots)$. А во что превратится ψ_x^{2i} ? Каждая моноструктура должна встречаться 2 раза. Значит, количество каждого цвета удвоится. Это соответствует замене в $\mathcal{Z}^{(1)}$ каждого ψ_x^i на ψ_x^{2i} , ψ_y^i на ψ_y^{2i} . То же самое для любого l : ψ_x^i на ψ_x^{li} , ψ_y^i на ψ_y^{li} . Так получается формула 2.7.

Это рассуждение дословно повторяется для ψ_y^l , с заменой моноцвета на бивет, моноструктуры на биструктуру и $\mathcal{Z}^{(1)}$ на $\mathcal{Z}^{(2)}$. Так получается формула 2.8.

По мультипликативности результат продолжается до формулы 2.6. \square

Замечание 25. Если сделать в 2.6 подстановку

$$\psi_x^1 = t, \psi_x^k = 0, k > 1$$

$$\psi_y^1 = s, \psi_y^k = 0, k > 1$$

То получится формула

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{F \circ G}^{(i)}(t, s) = \tilde{\mathcal{Z}}_F^{(i)}(\tilde{\mathcal{Z}}_G^{(1)}(t, s), \tilde{\mathcal{Z}}_G^{(2)}(t, s))$$

Таким образом аналог 1.4 справедлив для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур.

2.8.1. Примеры цикленного индекса композиции

Пример 32. Посчитаем $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})(\circlearrowleft \circ \circlearrowright)$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circlearrowleft \circ \circlearrowright) = \psi_x^1 \circ \psi_{x,y}^1 = \psi_{x,y}^1 = \mathcal{Z}^{(1)}(\circlearrowright)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circlearrowleft \circ \circlearrowright) = \psi_y^1 \circ 0 = 0 = \mathcal{Z}^{(2)}(\circlearrowright)$$

Пример 33. Да и вообще, справедливо

$$\mathcal{Z}^{(i)}(\circlearrowleft \circ A) = \mathcal{Z}^{(i)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(i)}(A \circ \circlearrowright) = \mathcal{Z}^{(i)}(A)$$

Замечание 26. Это дает некоторое комбинаторное понимание композиции. Так, видимо, $A \circ \circlearrowleft = \circlearrowleft \circ A = A$. То есть \circlearrowleft является нейтральным элементом в моноиде h-species по композиции. Это несколько не интуитивно, поскольку в обычных species нейтральным элементом является одноточечное множество. А его образом при вложении species в h-species является \circlearrowleft .

Пример 34. Интересно посмотреть на композицию с \circlearrowright

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square \circ \circlearrowright) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\psi_{x,y,y}^2 + \psi_x^2) \right) = \\ &= \frac{1}{8} ((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1 \psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Замечание 27. Отсюда можно сделать предположение, что $\square \circ \circ = \square$. То есть подстановка \circ — это «стирание различий между противоположными гранями».

Пример 35. Посчитаем для структуры V «вершина куба».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](V) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i} \prod_j \frac{1}{(1 - y_j)^2} = e^{\psi_{x,y,y}^1 + \frac{\psi_{x,y,y}^2}{2} + \frac{\psi_{x,y,y}^3}{3} + \dots}$$

Коэффициент при мономе $x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} \dots y_1^{j_1} y_2^{j_2} y_3^{j_3} \dots$ должен равняться $(j_1 + 1)(j_2 + 1)(j_3 + 1) \dots$, поскольку для моноцвета нет вариантов, а для бицвета количество вариантов это количество способов разбить кратность этого цвета на два сомножителя (поскольку каждая пара граней отличима). Остальное доказывается явным вычислением, аналогичным с $\mathcal{Z}_{\mathbf{E}}$ (обычный species).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(V) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i} \prod_j \frac{1}{(1 - y_j^2)} = e^{(\psi_x^1 + \frac{\psi_x^2}{2} + \frac{\psi_x^3}{3} + \dots) + (\psi_y^2 + \frac{\psi_y^4}{2} + \frac{\psi_y^6}{3} + \dots)}$$

Для структуры H «куб» (см. утверждение 21).

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](H) = \mathcal{Z}^{(1)}(H) = e^{\psi_{x,y}^1 + \frac{\psi_{x,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y}^3}{3!} + \dots}$$

Тогда $\mathcal{Z}^{(i)}(V \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(i)}(H)$, поскольку при специализации всех y в 0, они равны.

2.9. Применение цикленного индекса к решению задачи о раскрасках

Задача 2. Посчитать количество способов покрасить n -мерный куб в k цветов с точностью до изометрий. Иными словами, посчитать количество орбит при действии B_n на множестве всевозможно раскрашенных кубов [13].

Решение. В нашей нотации это вопрос о количестве раскрасок пар граней в k моноцветов и $\frac{k(k-1)}{2}$ бицветов. Поскольку любая раскраска даст нам моноструктуру, то производящая функция для количества раскрасок от размерности, будет равна $\mathcal{Z}_{\mathbf{H}}^{(1)}(kt, kt^2, kt^3, \dots, k^2t, k^2t^2, k^2t^3, \dots) = \exp(kt + kt^2 + kt^3 + \dots)$

$$\begin{aligned} \dots + \frac{k(k-1)}{2}t + \frac{k(k-1)}{2}t^2 + \frac{k(k-1)}{2}t^3 + \dots) = \exp\left(\frac{k(k+1)}{2}t + \frac{k(k+1)}{2}t^2 + \frac{k(k+1)}{2}t^3 + \dots\right) = \\ \left(\exp\left(\log\left(\frac{1}{1-t}\right)\right)\right)^{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{1}{1-t}^{\frac{k(k+1)}{2}} \quad \square \end{aligned}$$

Список литературы

1. André Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. Math 42 (1981), 1–82
2. André Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces des structures*, in Combinatoire Énumérative, Lecture Notes in Mathematics 1234, Springer, Berlin, (1986), pp. 126–159
3. F. Bergeron, Gilbert Labelle, Pierre LeRoux, *Combinatorial Species and Tree-Like Structures*, Cambridge University Press, (1998)
4. N. Bergeron, P. Choquette, *Hyperoctahedral species*, Sémin. Lothar. Combin. 61A (2009/10), доступно на <http://arxiv.org/abs/0810.4089>
5. Heteyi, Gábor, Labelle, Gilbert, Leroux, Pierre *Cubical species and nonassociative algebras* Adv. in Appl. Math. (1998), no. 3
6. I. G. Macdonald, *Polynomial functors and wreath products*, J. Pure Appl. Algebra, 18(2):173–204, (1980)
7. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, (1995)
8. nLab, *Day convolution*, <http://nlab.mathforge.org/nlab/show/Day+convolution>
9. Н. В. Дуров, *Классифицирующие вектоиды и классы операд*, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия (2009), доступно (английский) на <http://arxiv.org/abs/1105.3114>
10. Akhil Mathew, *The Dold-Kan correspondence between simplicial abelian groups and chain complexes*, Expository writings (2011), доступно на <http://people.fas.harvard.edu/~amathew/doldkan.pdf>
11. Leopold Travis, *Graphical Enumeration: A Species-Theoretic Approach*, Dissertation (1999), доступно на <http://arxiv.org/pdf/math/9811127v1.pdf>
12. Anthony Mendes, Jeffrey Remmel, Jennifer Wagner, *A λ -ring Frobenius Characteristic for $G \wr S_n$* , The electronic journal of combinatorics 11 (2004), #R56, доступно на <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/download/v11i1r56/pdf>
13. Задача обсуждается на <http://math.stackexchange.com/questions/5697/coloring-the-faces-of-a-hypercube>