Федеральное агентство по образованию

Государственное высшее учебное заведение
«Санкт-Петербургский государственный университет»

Математико–механический факультет

Специальность «математика»

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

Дипломная работа

Гипероктаэдральные комбинаторные типы

«К защите допущен»:

Зав. кафедрой высшей алгебры и теории чисел, профессор, д.ф.-м.н.	_______________	Яковлев А.В.
Научный руководитель, доцент??, д.ф.-м.н.	_______________	Пименов К.И.
Рецензент, д.ф.-м.н.	_______________	??? ?.?.
Дипломник	_______________	Ватманн В.В.

г. Санкт-Петербург, 2012

Содержание

Глава I. Введение

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развитие идеи комбинаторных типов (species). Мы будем обозначать их h-species для краткости. [[TODO:добавить введение (видимо взять часть из Bergeron)

План: Изложить теорию для species, параллельно строить ее для h-species

species — сложение умножение — аналитический функтор — композиция аналитических функторов — композиция species — декатегорификация аналитического функтора — примеры]]

1.1. Комбинаторные виды

Комбинаторные виды (*species*) были введены Джоялем в [ref, ref, ref]. Они, в некоторой степени, являются развитием идеи производящих функций. О комбинаторных видах можно говорить на нескольких языках: категорном, комбинаторном и на языке теории представлений. Последний наиболее часто встречается в литературе, хотя автору он кажется наимение выразительным. Во введении изложено начало теории комбинаторных видов.

1.1.1. Определение

Рассмотрим категорию $\mathcal{B}$ — подкатегорию конечных множеств с морфизмами — только биекциями. Это подкатегория в Set. Функтор $F : \mathcal{B} \to Set$ — это комбинаторный вид. То есть вид, это сопоставление каждому числу $n \in \mathbb{N}$ множества с действием группы S_n. Комбинаторная интерпретация: множеству точек сопоставляется множество структур на этих точках, а действие S_n ествественно возникает из перестановок исходных точек. Например, вид $\mathbb{E}$ — структура множеста. Он сопоставляет набору точек одно множество, состоящие из этих точек. Все элементы S_n переходят в тождественное отображение. Другой пример $\mathbb{C}$ — циклический порядок. Сопоставляет набору из n точек $(n-1)!$ возможных циклических порядков на них. Линейный порядок $\mathbb{L}$ сопоставляет $n!$ линейных порядков. На картинке 1.1 изображен вид «корневые деревья с 3 вершинами» (без какого-либо порядка на потомках).

Можно рассмотреть функтор $I : Set \to Vec$, который сопоставляет множеству векторное пространство со свободным[так можно сказать?] базисом

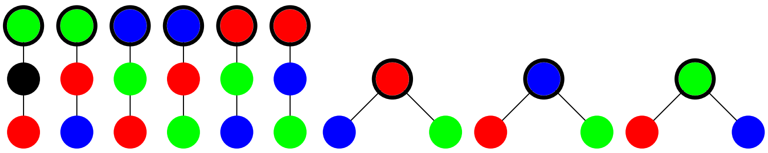

Рис. 1.1. корневые деревья с 3 вершинами

из этого множества. Тогда $F \circ I : \mathcal{B} \to Vec$, получается для каждого n перестановочное представление группы S_n. При таком подходе, характер этого представления $\chi(\sigma)$, это количество структур, неподвижных относительно $\sigma \in S_n$.

ТЕОРЕМА: композиции аналитически функторов соответсвует плетизм цикленных индексов.

Глава II. Основные определения

species HSet h-species аналитический функтор

Глава III. Формулы

3.1. Аналитический функтор для h-species

Аналитический функтор $\mathcal{F}$ соответствующий species F является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией (TODO: дописать и возможно добавить определение Дурова). Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & Set \\
Set \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, имеется естественное преобразование $\kappa F \to i \circ \mathcal{F}$, обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора $M\colon Set \to Set$ и морфизма функторов $\eta\colon F \to i \circ M$ этот морфизм пропускаеться через $\mathcal{F}$ при помощи κ.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Явная формула для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F} = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \tag{3.1}$$

У аналитического функтора для типа структуры F имеется прозрачный комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество A как набор цветов, то значение аналитического функтора $\mathcal{F}(A)$ трактуется как множество структур типа F раскрашенных в цвета из A.

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species

$$\begin{tikzcd}
HB \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & HSet \\
HSet \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \tag{3.2}$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверук универсальности картинки

3.2. Декатегорификация аналитического функтора: Фробениусова характеристика / Цикленный индекс

3.2.1. Случай обычных species

Напомним ситуацию с обычными species. Процедура декатегорификации не имеет строго математического смысла, так же как и процедура квантования. Сейчас мы предложим процедуру, которая, стартуя с обычных species, на выходе дает классический цикленный инлдекс/фробениусову характеристику. Затем мы попытаемся аналогические действия провести и в гипероктаэдральном случае. Декатегорификацией моноидальной категории $\mathbb{B}$ является моноид классов изоморфизма объектов категории $\mathbb{B}$, то есть моноид натуральных чисел по сложению. Декатегорификкацией $\widehat{\mathbb{B}}$ естественным образом оказывается моноидная алгебра с коэффициентами из $\mathbb{Z}$ для моноида $\mathbb{N}$, то есть кольцо многочленов $Z[X]$. (Правда это не то, что мы хотели. Чтобы получить цикленный индекс надо декатегорифицировать саму операцию подстановки и аналитический функтор).

Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием S_n имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэффициенте при мономе соответствующего веса. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как не раскрашенная структура, а во-вторых расскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например расскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответсвует моном $x_1^2 x_2$. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$, где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называеться фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$\mathcal{Z}_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \tag{3.3}$$

Где χ — характер (перестановочного) представления заданного F, σ — перестановка цикленного типа λ, $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots$, z_λ — индекс класса сопряженности σ. Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это $x_1, x_2, x_3, \dots$

3.2.2. Случай h-species

Попробуем построить аналогичную конструкцию для h-species. Прежде всего отметим, что раскраска, элемент $A^{\bar{n}}$, это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы n и $-n$ должны отображаться либо в один и тот же элемент A (который инволюцией переводиться в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по–прежнему определяется длинной орбиты инволюции A, уже после факторизации по B_n. То есть кроме действия B_n есть еще внешняя инволюция — действие Z_2. Будем называть их *моноструктурами* и *бисструктурами*.

Цикленный индекс, считающий только моноструктуры будем обозначать

$\mathcal{Z}^{(1)}$, биструктуры — $\mathcal{Z}^{(2)}$. Количество орбит под действием $H_n \times Z_2$ соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$, а под действием только H_n соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$. Поскольку каждая биструктура будет посчитан два раза.

В качестве H-множества цветов возьмем счетное множество моноцветов $x_1, x_2, x_3, \dots$ объединенное с счетным множеством бицветов $y_1, y_2, y_3, \dots$.

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую расскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляеться в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе H_n бывают двух типов: длинные — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и короткие — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество количество неподвижных точек для H_n. Пусть λ^1 — цикленный тип коротких перестановок, λ^2 — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл соответсвует моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет.

Это можно выразить такой формулой:

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} \tag{3.4}$$

Здесь нижний индекс ψ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\psi^2_{x,y,y} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$. При этом коофициент 2 у y_i^2 отражает тот факт, что можно раскрасить k пар граней в бицвет, так чтобы расскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество количество неподвижных точек для $H_n \times Z_2$. Разобъем сумму на две части — $(h, \bar{0})$ и $(h, \bar{1})$. Для первой формула будет аналогична 3.4, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коофициент $\frac{1}{2}$.

Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим цикл (пару циклов в него). Тогда добавляется смена грани на каждом шаге, а значит для циклов нечетной длинны сменится свойство короткий–длинный. Итоговая формула такая

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} + \\
\frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Где λ_o — циклы нечетной длинны, λ_e — циклы четной длинны.

Откуда легко получить

$$
\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} - \\
\frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

3.2.3. Примеры

Посчитаем цикленные индексы для простых h-species. Здесь мы будем писать $Z(A)$ вместо Z_A. Это не должно вызывать путаницу, поскольку вместо A будут использоваться схематические картинки и их не перепутать с переменными, от которых считаеться цикленный индекс.

Структура «одна пара граней», будем символически писать $\overset{\circ}{\circ}$.

$$
[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\circ}) = \frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) = \psi_{x,y}^1
$$

$$
\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\circ}) = \frac{1}{2}(\psi_x^1 + \psi_{x,y,y}^1) = \psi_{x,y}^1
$$

Значит

$$
\mathcal{Z}^{(2)}(\overset{\circ}{\circ}) = 0
$$

Структура «одна пара граней, грани различаются». Обозначение $\overset{\circ}{\bullet}$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}) = \frac{1}{2}(2\psi^1_{x,y,y}+0\psi^1_x) = \psi^1_{x,y,y}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet}) = \frac{1}{2}(2\psi^1_x+0\psi^1_{x,y,y}) = \psi^1_x$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\overset{\circ}{\circ}) = \psi^1_y$$

Структура «квадрат». Обозначение $\square$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}((\psi^1_{x,y,y})^2+(\psi^1_x)^2+2\psi^2_x+2(\psi^1_x\psi^1_{x,y,y})+2\psi^2_{x,y,y})$$

Здесь коофициенты — не характеры (характер при каждом слагаемом $=1$).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}((\psi^1_x)^2+(\psi^1_{x,y,y})^2+2\psi^2_{x,y,y}+2(\psi^1_{x,y,y}\psi^1_x)+2\psi^2_x) = [\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)$$

Последнее следовало и из общих соображений: легко видеть что $\mathcal{Z}^{(2)}(\square)=0$.

Структура «квадрат, противоположные грани различаются». Обозначение $\underline{\square}$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\underline{\square}) = \frac{1}{8}(4(\psi^1_{x,y,y})^2+0(\psi^1_x)^2+0\psi^2_x+0(\psi^1_x\psi^1_{x,y,y})+2\times 2\psi^2_{x,y,y})$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\underline{\square}) = \frac{1}{8}(4(\psi^1_x)^2+2\times 2\psi^2_{x,y,y})$$

Откуда

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\underline{\square}) = \frac{1}{2}([\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\underline{\square})-\mathcal{Z}^{(1)}(\underline{\square})) = \frac{1}{2}(\psi^1_{y,y}\psi^1_x+\frac{1}{2}(\psi^1_{y,y})^2) = \psi^1_y\psi^1_x+(\psi^1_y)^2$$

Структура $\overset{\circ}{\bullet}\times\overset{\circ}{\bullet}$. Это не то же самое что $\underline{\square}$, поскольку это «упорядоченная пара $\overset{\circ}{\bullet}$». Ее цикленный индекс мы посчитаем дальше.

3.3. Сумма и произведение цикленных индексов

3.3.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответсвует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{A+B} = \mathcal{Z}^{(1)}_{A} + \mathcal{Z}^{(1)}_{B}$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}_{A+B} = \mathcal{Z}^{(2)}_{A} + \mathcal{Z}^{(2)}_{B}$$

3.4. Произведение

Для произведения уже не совсем так. Утверждается, что моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры. То есть

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{A*B} = \mathcal{Z}^{(1)}_{A} * \mathcal{Z}^{(1)}_{B}$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}_{A*B} = \mathcal{Z}^{(1)}_{A} * \mathcal{Z}^{(2)}_{B} + \mathcal{Z}^{(2)}_{A} * \mathcal{Z}^{(1)}_{B} + 2(\mathcal{Z}^{(2)}_{A} * \mathcal{Z}^{(2)}_{B})$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}^{(1)}_{A*B} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{A*B}) = (\mathcal{Z}^{(1)}_{A} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{A}) * (\mathcal{Z}^{(1)}_{B} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{B})$$

Что логично, поскольку $(\mathcal{Z}^{(1)}_{F} + 2\mathcal{Z}^{(2)}_{F})$ — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

3.4.1. Примеры

Посчитаем произведение уже известных h-структур и их цикленных индексов.

Структура $\overset{\circ}{\underset{\circ}{|}} \times \overset{\circ}{\underset{\circ}{|}}$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\underset{\circ}{|}} \times \overset{\circ}{\underset{\circ}{|}}) = \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\underset{\circ}{|}}) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\underset{\circ}{|}}) = (\psi^{1}_{x,y})^2$$

Структура $\overset{\circ}{\bullet} \times \overset{\circ}{\bullet}$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet} \times \overset{\circ}{\bullet}) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}) \times [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}) = (\psi^1_{x,y,y})^2$$

Легко получить эту же формулу и из других соображений, как $\frac{1}{8}(8(\psi^1_{x,y,y})^2)$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet} \times \overset{\circ}{\bullet}) = \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet}) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet}) = (\psi^1_x)^2$$

3.5. Цикленный индекс композиции

3.5.1. Случай обычных species

Аналитический функтор позволяет дать определние композиционного произведения двух структур. Рассмотрим два species F и G. По ним можно построить аналитические функторы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Композиция этих функторов снова будет анлитическим функтором $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$. Доказательство его аналитичности можно найти в [TODO: где или взять доказательство Дурова]. Species который соответсвует цикленному индексу $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ и будет называться $F \circ G$. У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры F раздуваем(красим) в структуру типа G. Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановки. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов A рассмотрим счетный набор цветов $x_1, x_2, x_3, \dots$ Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}_{F\circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \\ &\qquad \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots) \end{aligned} \tag{3.8}$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G. То есть $\mathcal{Z}_{F\circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi^1_g, \psi^2_g, \psi^3_g, \dots)$, где $\psi^i_g = (g^i_1 + g^i_2 + g^i_3 + \dots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G. Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\psi^i_g = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$ легко понять в переменных $x_1, x_2, x_3, \dots$. Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G–структуру. Значит каждый цвет x_j заменяется на x^i_j.

Формулу 3.8 можно специализировать для подсчета labeled–структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответсвующие мономы (в базисе $x_1, x_2, x_3, \dots$) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\psi^1)^k$ и коэффициент в них равен $ck!$ — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой $\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$. Формула 3.8 примет вид $\mathcal{Z}_{F\circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \tag{3.9}$$

А поскольку labeled структур ровно в $k!$ раз больше, чем unlabeled, то равенство 3.9 справедливо для обыкновенных производящих функций unlabeled структур.

3.5.2. Случай h-species

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. Прежде всего отметим, что инволюция на множестве цветов делит их на моноцвета $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ и бицвета $(y_1, y_2, y_3, \dots)$. Однако, формулы 3.4 и 3.6 подсказывают, что в качестве базиса можно брать не ψ^i_x, ψ^j_y а $\psi^i_x, \psi^j_{x,y,y}$. Впрочем это тривиальная замена переменных.

Итак мы хотим выяснить чему равняются

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(1)}_{F\circ G}(&\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \dots, \\ &\psi^1_{x,y,y}, \psi^2_{x,y,y}, \psi^3_{x,y,y}, \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(2)}_{F\circ G}(&\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \dots, \\ &\psi^1_{x,y,y}, \psi^2_{x,y,y}, \psi^3_{x,y,y}, \dots)\end{aligned}$$

Утверждается следующее:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}^{(1)/(2)}_{F\circ G}(\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \ldots, \psi^1_{x,y,y}, \psi^2_{x,y,y}, \psi^3_{x,y,y}, \ldots) = \\
&\qquad \mathcal{Z}^{(1)/(2)}_{F}(\mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \ldots, \psi^1_{x,y,y}, \psi^2_{x,y,y}, \psi^3_{x,y,y}, \ldots), \\
&\qquad\qquad \mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^2_x, \psi^4_x, \psi^6_x, \ldots, \psi^2_{x,y,y}, \psi^4_{x,y,y}, \psi^6_{x,y,y}, \ldots), \\
&\qquad\qquad \mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^3_x, \psi^6_x, \psi^9_x, \ldots, \psi^3_{x,y,y}, \psi^6_{x,y,y}, \psi^9_{x,y,y}, \ldots), \\
&\qquad\qquad \ldots, \\
&\qquad\qquad [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \ldots, \psi^1_{x,y,y}, \psi^2_{x,y,y}, \psi^3_{x,y,y}, \ldots), \\
&\qquad\qquad [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^2_x, \psi^4_x, \psi^6_x, \ldots, \psi^2_{x,y,y}, \psi^4_{x,y,y}, \psi^6_{x,y,y}, \ldots), \\
&\qquad\qquad [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^3_x, \psi^6_x, \psi^9_x, \ldots, \psi^3_{x,y,y}, \psi^6_{x,y,y}, \psi^9_{x,y,y}, \ldots), \\
&\qquad\qquad \ldots)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому давайте напишем ее на уровне членов:

$$\begin{aligned}
\psi^i_x \circ (\mathcal{Z}^{(1)}_G, \mathcal{Z}^{(2)}_G) = \mathcal{Z}^{(1)}_G(&\psi^i_x, \psi^{2i}_x, \psi^{3i}_x, \ldots, \\
&\psi^i_x, \psi^{2i}_x, \psi^{3i}_x, \ldots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi^i_{x,y,y} \circ (\mathcal{Z}^{(1)}_G, \mathcal{Z}^{(2)}_G) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(&\psi^i_x, \psi^{2i}_x, \psi^{3i}_x, \ldots, \\
&\psi^i_x, \psi^{2i}_x, \psi^{3i}_x, \ldots)
\end{aligned}$$

Здесь мы пишем $(\mathcal{Z}^{(1)}_G, \mathcal{Z}^{(2)}_G)$, поскольку цикленный индекс для h-species в действительности представляет собой пару. Биструктуры подставляются вместо бицветов, моноструктуры, вместо моноцветов. В остальном рассуждение дословно повторяет случай обычных species.

Аналогично, если сделать подстановку

$$\psi^1_x = t, \psi^k_x = 0, k > 1$$

$$\psi^1_{x,y,y} = s, \psi^k_{x,y,y} = 0, k > 1$$

То полученная формула показывает, что 3.9 справедливо для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур (то есть производящая функция от двух переменных). А можно сделать подстановку $s := t$, которая даст выполнение формулы 3.9 для exp-производящей функции просто labeled-структур. А значит и обычной производящей функции unlabeled-структур.

3.5.3. Примеры

Посчитаем $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})(\overset{\circ}{\bullet} \circ \overset{\circ}{\circ})$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet} \circ \overset{\circ}{\circ}) = \psi^1_x \circ \psi^1_{x,y} = \psi^1_{x,y} = \mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\circ})$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\overset{\circ}{\bullet} \circ \overset{\circ}{\circ}) = \psi^1_y \circ 0 = 0 = \mathcal{Z}^{(2)}(\overset{\circ}{\circ})$$

Да и вобще, справедливо

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\overset{\circ}{\bullet} \circ A) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\overset{\circ}{\bullet} \circ A) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

А так же

$$\mathcal{Z}^{(1)}(A \circ \overset{\circ}{\bullet}) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(A \circ \overset{\circ}{\bullet}) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

Это дает некоторое понимание композиции. Так $A \circ \overset{\circ}{\bullet} = \overset{\circ}{\bullet} \circ A = A$. То есть $\overset{\circ}{\bullet}$ является нейтральным элементом в монойде h-species по композиции. Это несколько контр-интуитивно, поскольку в обычных species нейтральным элементом являеться одноточечное множество. А его образом при вложении species в h-species являеться $\overset{\circ}{\circ}$. [TODO А не значит ли это что просто можно по другому вложить?]

Интересно посмотреть чем является $\overset{\circ}{\circ}$. Например

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\boldsymbol{\square} \circ \overset{\circ}{\circ}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\psi^1_{x,y,y} + \psi^1_x))^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\psi^2_{x,y,y} + \psi^2_x)) = \\ \frac{1}{8}((\psi^1_x)^2 + (\psi^1_{x,y,y})^2 + 2\psi^2_{x,y,y} + 2(\psi^1_{x,y,y}\psi^1_x) + 2\psi^2_x) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) \tag{3.11}$$

Откуда можно сделать вывод, что $\boldsymbol{\square} \circ \overset{\circ}{\circ} = \square$. То есть подстановка $\overset{\circ}{\circ}$, это «стирание различий между противоположными гранями».

3.5.4. Предложения [TODO]

$$(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \ldots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \ldots) = (\mathcal{Z}_G(\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \ldots), 0)$$

Где G — обычный species, вложенный в h-species. А $\mathcal{Z}_G$ — его цикленный индекс.

3.6. Примеры [TODO]

Посчитаем для структуры V «вершина куба».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](V) = e^{\psi_{x,y,y}^1 + \frac{\psi_{x,y,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y,y}^3}{3!} + \ldots}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(V) = e^{(\psi_x^1 + \frac{\psi_x^2}{2!} + \frac{\psi_x^3}{3!} + \ldots) + (\psi_y^2 + \frac{\psi_y^4}{2!} + \frac{\psi_y^6}{3!} + \ldots)}$$

Для структуры куба H «куб».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](H) = \mathcal{Z}^{(1)}(H) = e^{\psi_{x,y}^1 + \frac{\psi_{x,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y}^3}{3!} + \ldots}$$

Нетрудно убедится что $\mathcal{Z}^{(i)}(V \circ \begin{smallmatrix}\circ\\|\\\circ\end{smallmatrix}) = \mathcal{Z}^{(i)}(H)$.