

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математико–механический факультет

Специальность «математика»

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

ГИПЕРОКТАЭДРАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ТИПЫ

«К защите допущен»:

Зав. кафедрой высшей алгебры
и теории чисел,
профессор, д.ф.-м.н.

_____ Яковлев А.В.

Научный руководитель,
доцент??, д.ф.-м.н.

_____ Пименов К.И.

Рецензент,
профессор, д.ф.-м.н.

_____ Яковлев А.В.

Дипломник

_____ Воробьев С.Э.

г. Санкт-Петербург, 2012

Содержание

Глава I. Аннотация[TODO]	3
Глава II. Введение	3
2.1. Комбинаторные виды	3
2.2. Композиция комбинаторных видов	5
Глава III. Гипероктаэдральные комбинаторные виды	10
3.1. Определение	10
3.2. Вложение species в h-species	10
3.3. Сложение и умножение h-species	11
3.4. Аналитический функтор для h-species	11
3.5. Декатегорификация аналитического функтора	11
3.6. Сумма и произведение цикленных индексов	15
3.7. Цикленный индекс композиции	16
3.8. Цикленный индекс species, вложенных в h-species	19
3.9. Применение цикленного индекса к решению задач о раскрасках	19
Глава IV. Заключение?	20
Список литературы	21

Глава I. Аннотация[TODO]

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развитие идеи комбинаторных типов (*species*). Мы будем обозначать их *h-species* для краткости. В работе частично разработан комбинаторный язык для *h-species*. Написана формула для композиции цикленных индексов. Рассмотрены примеры.

Глава II. Введение

2.1. Комбинаторные виды

Комбинаторные виды (*species*) были введены Джоялем в [ref, ref, ref]. Они, в некоторой степени, являются развитием идеи производящих функций. О комбинаторных видах можно говорить на нескольких языках: категорном, комбинаторном и на языке теории представлений. Последний наиболее часто встречается в литературе, хотя автору он кажется наименее выразительным. Во введении изложено начало теории комбинаторных видов.

2.1.1. Определение

Рассмотрим категорию \mathcal{B} — подкатеорию конечных множеств с морфизмами — только биекциями. Это подкатегория в Set . Функтор $F : \mathcal{B} \rightarrow Set$ — это комбинаторный вид. То есть вид, это сопоставление каждому числу $n \in \mathbb{N}$ множества с действием группы S_n . Комбинаторная интерпретация: множеству точек сопоставляется множество структур на этих точках, а действие S_n естественно возникает из перестановок исходных точек.

Пример 1. Вид \mathbb{E} — структура множества. Он сопоставляет набору точек одно множество, состоящие из этих точек. Все элементы S_n переходят в тождественное отображение.

Пример 2. \mathbb{C} — циклический порядок. Сопоставляет набору из n точек $(n - 1)!$ возможных циклических порядков на них.

Пример 3. Линейный порядок \mathbb{L} сопоставляет $n!$ линейных порядков.

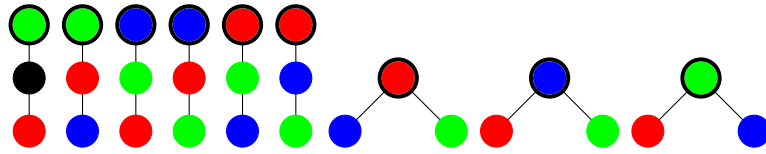


Рис. 2.1. корневые деревья с 3 вершинами

Пример 4. \mathbb{E}_e — сужение \mathbb{E} на четные множества. То есть для четных n , совпадает с \mathbb{E} , а для нечетных \emptyset . Аналогично \mathbb{E}_o — сужение на нечетные.

Пример 5. На картинке 2.1 изображен вид «корневые деревья с 3 вершинами» (без какого-либо порядка на потомках).

Можно рассмотреть функтор $I : Set \rightarrow Vec$, который сопоставляет множеству векторное пространство со свободным[так можно сказать?] базисом из этого множества. Тогда $F \circ I : \mathcal{B} \rightarrow Vec$, получается для каждого n перестановочное представление группы S_n . При таком подходе, характер этого представления $\chi(\sigma)$, это количество структур, неподвижных относительно $\sigma \in S_n$.

2.1.2. Сложение комбинаторных видов

Сумму двух species F, G легко определить как поточечную сумму функторов [ref]. На комбинаторном языке это будет означать «либо структура типа F , либо структура типа G ».

Пример 6. $\mathbb{E} = \mathbb{E}_e + \mathbb{E}_o$

Пример 7. Любой вид F можно разложить в такую сумму $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$, где F_i — сужение F на $i \in \mathcal{B}$. Значение F_i на $j \neq i$ равно \emptyset .

2.1.3. Произведение комбинаторных видов[TODO: тут какая-то чушь написана, надо переписать]

Для определения произведения, используется тензорное произведение на \mathcal{B} : $n \otimes m = (n + m)$ и соответствующее ему вложение $S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$. Все такие вложения сопряжены. На языке представлений это соответствует индуцированному представлению $F(S_n \times S_m) \uparrow = F(S_{n+m})$. [ref]

Поскольку $F_i \times G_j = (F \times G)_{i+j}$, то в целом произведение соответствует свертке: $(F \times G)[n] = \sum_{i=0}^n F[i] \times G[i]$. На комбинаторном языке это значит: разбить множество точек на два кусочка (на всевозможные размеры) и на первом ввести структуру типа F , на втором — типа G .

Пример 8. $\mathbb{E} \times \mathbb{E}_1$ — множество с выделенной точкой.

Пример 9. \mathbb{C}^2 — (упорядоченная) пара циклов.

2.2. Композиция комбинаторных видов

Кроме сложения и умножения на species можно ввести операцию композиции. Для этого необходимо ввести дополнительную конструкцию: аналитический функтор.

2.2.1. Аналитический функтор комбинаторных видов

Аналитический функтор \mathcal{F} соответствующий species F является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией. Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{F} & Set \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ Set & & \end{array}$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, имеется естественное преобразование $\kappa: F \rightarrow i \circ \mathcal{F}$, обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора $M: Set \rightarrow Set$ и морфизма функторов $\eta: F \rightarrow i \circ M$ этот морфизм пропускается через \mathcal{F} при помощи κ .

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \\ & \searrow \alpha & \downarrow \text{---} \\ & & M \end{array}$$

Явная конструкция для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F}(A) = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \quad (2.1)$$

У аналитического функтора для типа структуры F имеется прозрачный комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество A как набор цветов, то значение аналитического функтора $\mathcal{F}(A)$ трактуется как множество структур типа F раскрашенных в цвета из A .

2.2.2. Композиция аналитических функторов комбинаторных видов

Теорема 1. *Композиция аналитических функторов $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ является аналитическим функтором.*

Доказательство. Species, которому соответствует этот аналитический функтор будем называть композицией $F \circ G$. Дадим набросок доказательства. Согласно конструкции $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(A) = \sum_n F[n] \times (\sum_m G[m] \times A^m / S_m)^n / S_n = \sum_n \sum_{k, m_1 + \dots + m_k = n} F[k] \times (\prod_i G[m_i]) \times A^n / S_n$. [TODO??]

Строгое доказательство см. в [ref]

□

Надо отметить, что все части разбиения предполагаются непустыми, что равносильно сужению внутреннего species на \mathbb{N}_+ . Будем обозначать его G_+ .

У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры F раздуваем(красим) в структуру типа G .

Пример 10. $\mathbb{E}_1 \circ F_+ = F_+$, $F \circ \mathbb{E}_1 = F$. \mathbb{E}_1 является нейтральным элементом в моноиде species по композиции.

Пример 11. $\mathbb{E}_2 \circ \mathbb{C}$ — (неупорядоченная) пара циклов.

Пример 12. $\mathbb{E} \circ \mathbb{E}_+$ — структура разбиения множества. Здесь \mathbb{E}_+ — непустые множества.

Пример 13. $\mathbb{E} \circ \mathbb{C}_+ = \mathbb{S}$ — структура перестановки. Буквально перестановка — это набор непустых циклов.

В дальнейшем мы зачастую будем опускать $F \circ G_+$ и писать просто $F \circ G$.

2.2.3. Цикленный индекс

Процедура декатегорификации не имеет строго математического смысла, так же как и процедура квантования. Сейчас мы предложим процедуру, которая, стартуя с обычных species, на выходе дает классический цикленный индекс/фробениусову характеристику. Затем мы попытаемся аналогичные действия провести и в гипероктаэдральном случае. Декатегорификацией моноидальной категории \mathbb{B} является моноид классов изоморфизма объектов категории \mathcal{B} , то есть моноид натуральных чисел по сложению. Декатегорификацией $\hat{\mathcal{B}}$ естественным образом оказывается моноидная алгебра с коэффициентами из \mathbb{Z} для моноида \mathbb{N} , то есть кольцо многочленов $Z[X]$. (Правда это не то, что мы хотели. Чтобы получить цикленный индекс надо декатегорифицировать саму операцию подстановки и аналитический функтор). [TODO: этот таинственный абзац стоит переписать]

Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием S_n имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэффициенте при мономе соответствующего веса. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как нераскрашенная структура, а во-вторых раскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например раскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответствует моном $x_1^2 x_2$. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$, где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называется фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$Z_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \quad (2.2)$$

Где χ — характер (перестановочного) представления заданного F , σ — перестановка цикленного типа λ , $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots$, z_λ — индекс класса сопряженности σ . Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это x_1, x_2, x_3, \dots

Пример 14. $\mathcal{Z}_{\mathbb{E}} = e^{(\psi^1 + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} + \dots)}$. Для доказательства смотри [ref].

2.2.4. Плетизм цикленных индексов

Теорема 2. *Композиции аналитически функторов соответствует плетизм цикленных индексов.*

Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановки. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов A рассмотрим счетный набор цветов x_1, x_2, x_3, \dots . Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots) \quad (2.3)$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G . То есть $\mathcal{Z}_{F \circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$, где $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G . Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$ легко понять в переменных x_1, x_2, x_3, \dots . Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G -структуру. Значит каждый цвет x_j заменяется на x_j^i .

Формулу 2.3 можно специализировать для подсчета labeled-структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответствующие мономы (в базисе x_1, x_2, x_3, \dots) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\psi^1)^k$ и коэффициент в них равен $ck!$ — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой

$\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$. Формула 2.3 примет вид $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \quad (2.4)$$

Пример 15. (Экспоненциальная) производящая функция для \mathbb{E} это $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$. А производящая функция для непустых циклов \mathbb{C}_+ это $-\log(1 - x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$. А для \mathbb{S} производящая функция это $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. И действительно $e^{(-\log(1-x))} = \frac{1}{1-x}$.

Глава III. Гипероктаэдральные комбинаторные виды

3.1. Определение

Рассмотрим категорию $HSet$. В ней объекты это множества, снабженные дополнительным действием — инволюцией. А стрелки, это морфизмы, сохраняющие инволюцию. Рассмотрим категорию $H\mathcal{B}$ — подкатегорию конечных множеств из $HSet$ с морфизмами только биекциями, и инволюциями без неподвижных точек. Функтор $F : H\mathcal{B} \rightarrow HSet$ — гипероктаэдральный (или кубический) это комбинаторный вид. Мы будем так же для краткости употреблять термин *h-species*. Объекты из $H\mathcal{B}$ будем отождествлять с $\bar{n} = \{-n, -n + 1, \dots, -1, 1, 2, \dots, n - 1, n\}$, где инволюция - смена знака. Эпитет гипероктаэдральный используется потому, что на $H\mathcal{B}[\bar{n}]$ действует гипероктаэдральная группа B_n — группа движений n -мерного куба (иногда будем обозначать ее H_n). Некоторая не очень ясная комбинаторная интерпретация: множеству граней куба сопоставляется множество структур на этих гранях, а действие B_n возникает из перестановок граней.

Пример 16. Вид \mathbb{H} — структура куб. Он сопоставляет \bar{n} одно множество. Все элементы B_n переходят в тождественное отображение.

Пример 17. \circ — неразличимая пара граней (\mathbb{H}_1). \bullet — различимая пара граней. Оба они принимают значение \emptyset на всем, кроме $\bar{1}$. Но во втором случае $\bullet(\bar{1})$ это два объекта [TODO: правда??].

Пример 18. Аналогично \square — структура куб размерности 2 (\mathbb{H}_2). \square — куб размерности 2 с различимыми противоположными гранями. Их уже целых 4 [TODO: правда??].

Пример 19. Структура $\bullet \times \bullet$. Это не то же самое что \square , поскольку это «упорядоченная пара \bullet ».

3.2. Вложение species в h-species

Обычные комбинаторные виды можно «вложить» в гипероктаэдральные. Иными словами можно каждый species рассмотреть как h-species. Для этого

достаточно рассматривать структуру не на точках, а на парах (неразличимых) граней. Если $F : \mathcal{B} \rightarrow Set$, то $\tilde{F} : H\mathcal{B} \rightarrow HSet$, где $\tilde{F}[\bar{n}] = F[n]$ как множество, а инволюция тождественна.

3.3. Сложение и умножение h-species

Сложение и умножение определяются полностью аналогично species и тут проблем не возникает.

3.4. Аналитический функтор для h-species

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species

$$\begin{array}{ccc} HB & \xrightarrow{F} & HSet \\ \downarrow i & \nearrow \mathcal{F} & \\ HSet & & \end{array}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \quad (3.1)$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверку универсальности картинки

3.5. Декатегорификация аналитического функтора

Попробуем декатегорифицировать аналитический функтор для h-species. Прежде всего отметим, что раскраска, элемент $A^{\bar{n}}$, это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы из одной орбиты инволюции i и $-i$ должны отображаться либо в один и тот же элемент A (который инволюцией переводится в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по-прежнему определяется длиной орбиты инволюции A , уже после факторизации по B_n . То есть кроме действия B_n есть еще внешняя инволюция — действие Z_2 . Будем разделять раскрашенные структуры на *моноструктуры* и *биструктуры*.

Цикленный индекс, считающий только моноструктуры будем обозначать $\mathcal{Z}^{(1)}$, биструктуры — $\mathcal{Z}^{(2)}$.

Замечание 3. Таким образом, цикленный индекс для h -species представляет собой пару $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})$.

Утверждение 4. *Количество орбит под действием $H_n \times Z_2$ соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$, а под действием только H_n соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$.*

Доказательство. В первом случае каждая моноструктура и биструктура будет посчитана 1 раз. А во втором каждая биструктура будет посчитана два раза, т.к. действие инволюции «склеивающей» две части биструктуры не учтено. \square

3.5.1. Подсчет цикленного индекса

В качестве H -множества цветов возьмем счетное множество моноцветов x_1, x_2, x_3, \dots объединенное с счетным множеством бицветов y_1, y_2, y_3, \dots .

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую раскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляется в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе H_n бывают двух типов: *длинные* — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и *короткие* — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество неподвижных точек для H_n . Пусть λ^1 — цикленный тип коротких перестановок, λ^2 — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл покрашен в моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет. Под покрашенным циклом мы подразумеваем покраску всех его элементов в этот цвет (чтобы такая покрашенная структура была неподвижна относительно действия этого элемента H_n).

Утверждение 5. *Справедлива формула:*

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} \quad (3.2)$$

Здесь нижний индекс ψ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$. При этом коэффициент 2 у y_i^2 отражает тот факт, что можно раскрасить k пар граней в бицвет, так чтобы раскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество неподвижных точек для $H_n \times Z_2$. Разобьем сумму на две части — $(h, \bar{0})$ и $(h, \bar{1})$. Для первой формула будет аналогична 3.2, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коэффициент $\frac{1}{2}$. Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим в него цикл (пару циклов, в случае короткого). Тогда реальный цикл от $(h, \bar{1})$ будет получаться из циклов h добавлением «смены грани» на каждом шаге. Значит для циклов нечетной длины сменится свойство короткий–длинный.

Пример 20. Пусть $h_e = \bullet \leftrightarrow \bullet$. Тогда $(h_e, \bar{1}) = \bullet \begin{smallmatrix} \nearrow & \nwarrow \\ \searrow & \swarrow \end{smallmatrix} \bullet$

Пример 21. Пусть $h_o = \bullet \begin{smallmatrix} \curvearrowright & \curvearrowleft \end{smallmatrix} \bullet$. Тогда $(h_o, \bar{1}) = \bullet \begin{smallmatrix} \nearrow & \nwarrow & \searrow & \swarrow \\ \nwarrow & \nearrow & \swarrow & \nwarrow \end{smallmatrix} \bullet$

Утверждение 6. *Справедлива формула:*

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} + \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \quad (3.3)$$

Где λ_o — циклы нечетной длины, λ_e — циклы четной длины.

Из формул 3.2, 3.3 легко получить

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z \lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z \lambda^1 \lambda^2} - \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z \lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.5.2. Примеры вычисления цикленного индекса

Посчитаем цикленные индексы для простых h-species. Здесь мы будем писать $Z(A)$ вместо Z_A . Это не должно вызывать путаницу, поскольку вместо A будут использоваться схематические картинки. Их никак не перепутать с переменными, от которых считается цикленный индекс.

Пример 22.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\circ) = \frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) = \psi_{x,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = \frac{1}{2}(\psi_x^1 + \psi_{x,y,y}^1) = \psi_{x,y}^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ) = 0$$

Пример 23.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) = \frac{1}{2}(2\psi_{x,y,y}^1 + 0\psi_x^1) = \psi_{x,y,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) = \frac{1}{2}(2\psi_x^1 + 0\psi_{x,y,y}^1) = \psi_x^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\bullet) = \psi_y^1$$

Пример 24.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}((\psi_{x,y,y}^1)^2 + (\psi_x^1)^2 + 2\psi_x^2 + 2(\psi_x^1 \psi_{x,y,y}^1) + 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Здесь коэффициенты — не характеры (характер при каждом слагаемом = 1).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1\psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)$$

Последнее следовало и из общих соображений: легко видеть что $\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = 0$.

Пример 25.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_{x,y,y}^1)^2 + 0(\psi_x^1)^2 + 0\psi_x^2 + 0(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_x^1)^2 + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Откуда

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = \frac{1}{2}([\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) - \mathcal{Z}^{(1)}(\square)) = \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1\psi_x^1 + \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1)^2) = \psi_y^1\psi_x^1 + (\psi_y^1)^2$$

3.6. Сумма и произведение цикленных индексов

3.6.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответствует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} + \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(2)} + \mathcal{Z}_B^{(2)}$$

3.6.2. Произведение

Для произведения уже не совсем так.

Утверждение 7. *Моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры.*

То есть

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(2)} + \mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(1)} + 2(\mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)}) = (\mathcal{Z}_A^{(1)} + 2\mathcal{Z}_A^{(2)}) * (\mathcal{Z}_B^{(1)} + 2\mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Замечание 8. Это логично, поскольку $(\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})$ — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

3.6.3. Примеры цикленных индексов произведений

Посчитаем произведение уже известных h-структур и их цикленных индексов.

Пример 26. Структура $\circ \times \circ$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \times \circ) = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = (\psi_{x,y}^1)^2$$

Пример 27. Структура $\bullet \times \bullet$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet \times \bullet) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) \times [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) = (\psi_{x,y,y}^1)^2$$

Легко получить эту же формулу и прямым подсчетом по формуле 3.2, как $\frac{1}{8}(8(\psi_{x,y,y}^1)^2)$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\bullet \times \bullet) = \mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) = (\psi_x^1)^2$$

3.7. Цикленный индекс композиции

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. В качестве моноцветов возьмем $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, бицветов — $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$. Формулы 3.2 и 3.3 подсказывают, что в качестве симметричного базиса можно брать не $\{\psi_x^i, \psi_y^j\}$ а $\{\psi_x^i, \psi_{x,y,y}^j\}$. Впрочем это тривиальная замена переменных.

Задача 1. Как выразить

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \\ \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots)$$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(2)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots)$$

Теорема 9.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{F \circ G}^{(i)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F^{(i)}(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots), \\ \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^4, \psi_{x,y,y}^6, \dots), \\ \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y,y}^3, \psi_{x,y,y}^6, \psi_{x,y,y}^9, \dots), \\ \dots, \\ [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots), \\ [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^4, \psi_{x,y,y}^6, \dots), \\ [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y,y}^3, \psi_{x,y,y}^6, \psi_{x,y,y}^9, \dots), \\ \dots) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому напомним ее на уровне членов:

$$\psi_x^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \psi_{x,y,y}^i, \psi_{x,y,y}^{2i}, \psi_{x,y,y}^{3i}, \dots)$$

$$\psi_{x,y,y}^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \psi_{x,y,y}^i, \psi_{x,y,y}^{2i}, \psi_{x,y,y}^{3i}, \dots)$$

Биструктуры подставляются вместо бицветов, моноструктуры, вместо моноцветов. В остальном рассуждение дословно повторяет случай обычных species.

Замечание 10. Если сделать подстановку

$$\psi_x^1 = t, \psi_x^k = 0, k > 1$$

$$\psi_{x,y,y}^1 = s, \psi_{x,y,y}^k = 0, k > 1$$

То полученная формула показывает, что 2.4 справедливо для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур (то есть производящая функция от двух переменных [TODO: А что такое 2.4 в этом случае?]). А можно сделать подстановку $s := t$, которая даст выполнение формулы 2.4 для экспоненциальной функции просто labeled-структур [TODO: А это разве что-то новое?].

3.7.1. Примеры цикленного индекса композиции

Пример 28. Посчитаем $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})(\bullet \circ \circ)$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\bullet \circ \circ) = \psi_x^1 \circ \psi_{x,y}^1 = \psi_{x,y}^1 = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\bullet \circ \circ) = \psi_y^1 \circ 0 = 0 = \mathcal{Z}^{(2)}(\circ)$$

Пример 29. Да и вообще, справедливо

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\bullet \circ A) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\bullet \circ A) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

А так же

$$\mathcal{Z}^{(1)}(A \circ \bullet) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(A \circ \bullet) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

Это дает некоторое понимание композиции. Так $A \circ \bullet = \bullet \circ A = A$. То есть \bullet является нейтральным элементом в моноиде h-species по композиции. Это несколько контр-интуитивно, поскольку в обычных species нейтральным элементом является одноточечное множество. А его образом при вложении species в h-species является \circ . [TODO А не значит ли это что просто можно по другому вложить?]

Пример 30. Интересно посмотреть на композицию с \circ

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square \circ \circ) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\psi_{x,y,y}^2 + \psi_x^2) \right) = \\ &= \frac{1}{8} ((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1 \psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Откуда можно сделать предположение, что $\square \circ \circ = \square$. То есть подстановка \circ — это «стирание различий между противоположными гранями».

Пример 31. Посчитаем для структуры V «вершина куба».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](V) = e^{\psi_{x,y,y}^1 + \frac{\psi_{x,y,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y,y}^3}{3!} + \dots}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(V) = e^{(\psi_x^1 + \frac{\psi_x^2}{2!} + \frac{\psi_x^3}{3!} + \dots) + (\psi_y^2 + \frac{\psi_y^4}{2!} + \frac{\psi_y^6}{3!} + \dots)}$$

Для структуры H «куб».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](H) = \mathcal{Z}^{(1)}(H) = e^{\psi_{x,y}^1 + \frac{\psi_{x,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y}^3}{3!} + \dots}$$

Нетрудно убедиться что $\mathcal{Z}^{(i)}(V \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(i)}(H)$.

3.8. Цикленный индекс species, вложенных в h-species

Утверждение 11. Пусть G — обычный species, вложенный в h -species. \mathcal{Z}_G — его цикленный индекс.

$$(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots) = (\mathcal{Z}_G(\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots), 0)$$

3.9. Применение цикленного индекса к решению задач о раскрасках

Задача 2. Посчитать количество способов покрасить n -мерный куб в k цветов с точностью до изометрий. Иными словами, посчитать количество орбит при действии B_n на множестве всевозможно раскрашенных кубов. <http://math.stackexchange.com/questions/5697/coloring-the-faces-of-a-hypercube>.

Решение. В нашей нотации это вопрос о количестве раскрасок пар граней в k моноцветов и $\frac{k(k-1)}{2}$ бицветов. Поскольку любая раскраска даст нам моноструктуру, то производящая функция для количества раскрасок от размерности, будет равна $\mathcal{Z}_{\mathbb{H}}^{(1)}(kt, kt^2, kt^3, \dots, k^2t, k^2t^2, k^2t^3, \dots) = \exp(kt + kt^2 + kt^3 + \dots + \frac{k(k-1)}{2}t + \frac{k(k-1)}{2}t^2 + \frac{k(k-1)}{2}t^3 + \dots) = \exp(\frac{k(k+1)}{2}t + \frac{k(k+1)}{2}t^2 + \frac{k(k+1)}{2}t^3 + \dots) = (\exp(\log(\frac{1}{1-t})))^{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{1}{1-t}^{\frac{k(k+1)}{2}}$ \square

Глава IV. Заключение?

Список литературы

1. Joyal *todo* [TODO]
2. Bergeron, N.; Choquette, P. *Hyperoctahedral species* Sém. Lothar. Combin. 61A (2009/10), available at <http://arxiv.org/abs/0810.4089>
3. Hetyei, Gábor; Labelle, Gilbert; Leroux, Pierre *Cubical species and nonassociative algebras* Adv. in Appl. Math. (1998), no. 3