

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Д.В. БУША»

Арбузолитейный факультет

Специальность «Фундаментальный исламизм и физическая софистика»

Кафедра общей демократии

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ АРХИТЕКТУРЫ РАЗРУШЕННЫХ
ГОРОДОВ ПО МНОГОВАХЧЕВЫМ ДЫННЫМ ПОЛЯМ
МЕТОДОМ ВСЕОБЩЕГО ГОЛОСОВАНИЯ**

«К защите допущен»:

Зав. кафедрой общей демократии,
профессор, д.ф.-м.н.

_____ Иванов И.И.

Научный руководитель,
профессор, в.н.с. ЁКЛ ЭМЭН,
д.ф.-м.н.

_____ Петров П.П.

Рецензент,
зав. лаб. ЖЗ ИКЛ,
д.ф.-м.н.

_____ Сидоров С.С.

Консультант по технике
безопасности, ассистент
каф. софистики

_____ Рейсфейдер Р.Р.

Дипломник

_____ Ватманн В.В.

г. Анкара, 2009

Содержание

Глава I. Введение	3
Глава II. Основные определения	4
Глава III. Формулы	4
3.1. Аналитический функтор для h -species	4
3.2. Декатегорификация аналитического функтора: Фробениусова характеристика / Цикленный индекс	5
3.3. Сумма и произведение цикленных индексов	8
3.4. Произведение	8
3.5. Примеры	9
3.6. Цикленный индекс композиции	9

Глава I. Введение

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развитие идеи комбинаторных типов (species). Мы будем обозначать их h-species для краткости. TODO:добавить введение (видимо взять часть из Bergeron)

План: Изложить теорию для species, параллельно строить ее для h-species
 species — сложение умножение — аналитический функтор — композиция аналитических функторов — композиция species — декатегорификация аналитического функтора — примеры

Глава II. Основные определения

species HSet h-species аналитический функтор

Глава III. Формулы

3.1. Аналитический функтор для h-species

Аналитический функтор \mathcal{F} соответствующий species F является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией (TODO: дописать и возможно добавить определение Дурова). Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & Set \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ Set & & \end{array}$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, имеется естественное преобразование $\kappa F \rightarrow i \circ \mathcal{F}$, обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора $M: Set \rightarrow Set$ и морфизма функторов $\eta: F \rightarrow i \circ M$ этот морфизм пропускается через \mathcal{F} при помощи κ .

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \\ & \searrow \alpha & \downarrow \text{---} \\ & & M \end{array}$$

Явная формула для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F} = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \quad (3.1)$$

У аналитического функтора для типа структуры F имеется прозрачный комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество A как набор цветов, то значение аналитического функтора $\mathcal{F}(A)$ трактуется как множество

структур типа F раскрашенных в цвета из A .

Хочется построить аналог аналитического функтора для h -species

$$\begin{array}{ccc} HB & \xrightarrow{F} & HSet \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ HSet & & \end{array}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \quad (3.2)$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверук универсальности картинки

3.2. Декатегорификация аналитического функтора: Фробениусова характеристика / Цикленный индекс

3.2.1. Случай обычных species

Напомним ситуацию с обычными species. Процедура декатегорификации не имеет строго математического смысла, так же как и процедура квантования. Сейчас мы предложим процедуру, которая, стартуя с обычных species, на выходе дает классический цикленный индекс/фробениусову характеристику. Затем мы попытаемся аналогические действия провести и в гипероктаэдральном случае. Декатегорификацией моноидальной категории \mathbb{B} является моноид классов изоморфизма объектов категории \mathbb{B} , то есть моноид натуральных чисел по сложению. Декатегорификацией $\hat{\mathbb{B}}$ естественным образом оказывается моноидная алгебра с коэффициентами из \mathbb{Z} для моноида \mathbb{N} , то есть кольцо многочленов $Z[X]$. (Правда это не то, что мы хотели. Чтобы получить цикленный индекс надо декатегорифицировать саму операцию подстановки и аналитический функтор).

Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием S_n имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэффициенте при мономе, отвечающем весу. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное

число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как не раскрашенная структура, а во-вторых раскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например раскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответствует моном $x_1^2 x_2$. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$, где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называется фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$Z_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \quad (3.3)$$

Где χ — характер (перестановочного) представления заданного F , σ — перестановка цикленного типа λ , $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots$, z_λ — индекс класса сопряженности σ . Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это x_1, x_2, x_3, \dots

3.2.2. Случай h-species

Попробуем построить аналогичную конструкцию для h-species. Прежде всего отметим, что раскраска, элемент $A^{\bar{n}}$, это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы n и $-n$ должны отображаться либо в один и тот же элемент A (который инволюцией переводиться в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по-прежнему определяется длиной орбиты инволюции A , уже после факторизации по B_n . То есть кроме действия B_n есть еще внешняя инволюция — действие Z_2 . Будем называть их *моноструктурами* и *биструктурами*.

Цикленный индекс, считающий только моноструктуры будем обозначать

$\mathcal{Z}^{(1)}$, биструктуры — $\mathcal{Z}^{(2)}$. Количество орбит под действием $H_n \times Z_2$ соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$, а под действием только H_n соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$. Поскольку каждая биструктура будет посчитана два раза.

В качестве H -множества цветов возьмем счетное множество моноцветов x_1, x_2, x_3, \dots объединенное с счетным множеством бицветов y_1, y_2, y_3, \dots .

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую раскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляется в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе H_n бывают двух типов: длинные — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и короткие — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество неподвижных точек для H_n . Пусть λ^1 — цикленный тип коротких перестановок, λ^2 — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл соответствует моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет.

Это можно выразить такой формулой:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \\ \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь нижний индекс ψ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$. При этом коэффициент 2 у y_i^2 отражает тот факт, что можно раскрасить k пар граней в бицвет, так чтобы раскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество неподвижных точек для $H_n \times Z_2$. Разобьем сумму на две части — $(h, \bar{0})$ и $(h, \bar{1})$. Для первой формула будет аналогична 3.4, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коэффициент $\frac{1}{2}$.

Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим цикл (пару циклов в него). Тогда добавляется смена грани

на каждом шаге, а значит для циклов нечетной длины сменится свойство короткий–длинный. Итоговая формула такая

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Где λ_o — циклы нечетной длины, λ_e — циклы четной длины.

3.3. Сумма и произведение цикленных индексов

3.3.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответствует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} + \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(2)} + \mathcal{Z}_B^{(2)}$$

3.4. Произведение

Для произведения уже не совсем так. Утверждается, что моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры. То есть

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(2)} + \mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(1)} + 2(\mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)}) = (\mathcal{Z}_A^{(1)} + 2\mathcal{Z}_A^{(2)}) * (\mathcal{Z}_B^{(1)} + 2\mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Что логично, поскольку $(\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})$ — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

3.5. Примеры

Посчитаем цикленные индексы для простых h-species.

$$\mathcal{Z}(\circ) + \mathcal{Z}(\bullet) + \mathcal{Z}(\square) + \mathcal{Z}(\blacksquare)$$

3.6. Цикленный индекс композиции

3.6.1. Случай обычных species

Аналитический функтор позволяет дать определение композиционного произведения двух структур. Рассмотрим два species F и G . По ним можно построить аналитические функторы \mathcal{F} и \mathcal{G} . Композиция этих функторов снова будет аналитическим функтором $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$. Доказательство его аналитичности можно найти в [TODO: где или взять доказательство Дурова]. Species который соответствует цикленному индексу $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ и будет называться $F \circ G$. У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры F раздуваем(красим) в структуру типа G . Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановке. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов A рассмотрим счетный набор цветов x_1, x_2, x_3, \dots . Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots) \end{aligned} \quad (3.6)$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G . То есть $\mathcal{Z}_{F \circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$, где $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G . Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$ легко понять в переменных x_1, x_2, x_3, \dots . Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же

G -структуру. Значит каждый цвет x_j заменяется на x_j^i .

Формулу 3.6 можно специализировать для подсчета labeled-структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответствующие мономы (в базисе x_1, x_2, x_3, \dots) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\psi^1)^k$ и коэффициент в них равен $ck!$ — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой $\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$. Формула 3.6 примет вид $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \quad (3.7)$$

А поскольку labeled структур ровно в $k!$ раз больше, чем unlabeled, то равенство 3.7 справедливо для обыкновенных производящих функций unlabeled структур.

3.6.2. Случай h-species [TODO: out of date]

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. Прежде всего отметим, что инволюция на множестве цветов делит их на моноцвета (x_1, x_2, x_3, \dots) и бицвета (y_1, y_2, y_3, \dots) . Однако, формула ?? подсказывает что в качестве базиса можно брать не ψ_x^i, ψ_y^j а $\psi_x^i, \psi_{x,y}^j$. Впрочем это тривиальная замена переменных, поскольку $\psi_{x,y}^j = \psi_x^j + \psi_y^j$. Итак мы хотя бы поняли чему равняется

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \\ \psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots)$$

Предположение[TODO: заменить на утверждение] такое:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots) = \\
\mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots), \\
\mathcal{Z}_G(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots), \\
\mathcal{Z}_G(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots), \\
\dots, \\
\mathcal{Z}_G(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots), \\
\mathcal{Z}_G(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^4, \psi_{x,y}^6, \dots), \\
\mathcal{Z}_G(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y}^3, \psi_{x,y}^6, \psi_{x,y}^9, \dots), \\
\dots)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому давайте напомним ее на уровне членов:

$$\begin{aligned}
\psi_x^i \circ \mathcal{Z}_G = \mathcal{Z}_G(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \\
\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots)
\end{aligned}$$

Нужно понять в каком случае раскрашенная структура является биструктурой, а в каком моноструктурой. Утверждается, что структура будет бицветом, если при ее раскраске использовался хотя бы один бицвет [TODO б) она не переводиться инволюцией в себя (как нераскрашенная структура) — но у нас ведь все склеено по орбитам, значит это будет та же самая структура]. Значит цикленный индекс отвечающий моноцветам получается, после обнуления y_i .

$$\begin{aligned}
\psi_{x,y}^i \circ \mathcal{Z}_G = \mathcal{Z}_G(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \\
\psi_{x,y}^i, \psi_{x,y}^{2i}, \psi_{x,y}^{3i}, \dots)
\end{aligned}$$

Можно сказать что цикленный индекс для бицветных структур — это разность полного цикленного индекса и моноцветных. Но, поскольку в $\psi_{x,y}^i$ входит сумма бицветного и моноцветного индексов, то как раз и получается, что нужно подставлять полный цикленный индекс.

Давайте попробуем оставить только мономы отвечающие bilabeled-структурам. Это значит занулить все x_i и сделать подстановку $\psi_y^1 = t, \psi_y^2 =$

$0, \psi_y^3 = 0$. Получившаяся формула показывает, что 3.7 справедливо для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур со всеми вытекающими последствиями.