ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математико-механический факультет

Специальность «математика»

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

Дипломная работа

Гипероктаэдральные комбинаторные типы

К защите допущен»:	
Зав. кафедрой высшей алгебры и теории чисел, профессор, д.фм.н.	 Яковлев А.В.
Научный руководитель, доцент??, д.фм.н.	 Пименов К.И.
Рецензент, профессор, д.фм.н.	 Яковлев А.В.
Дипломник	 Воробьев С.Э

г. Санкт-Петербург, 2012

Содержание

Глава	I. Аннотация[TODO] 3
	II. Введение
2.1.	Комбинаторные виды
	Композиция комбинаторных видов
Глава	III. Гипероктаэдральные комбинаторные виды 10
3.1.	Определение
3.2.	Вложение species в h-species
3.3.	Сложение и умножение h-species
3.4.	Аналитический функтор для h-species
	Декатегорификация аналитического функтора
	Сумма и произведение цикленных индексов
	Произведение
	Цикленный индекс композиции
	Примеры [ТОДО]

Глава I. Аннотация[TODO]

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развитие идеи комбинаторных типов (species). Мы будем обозначать их h-species для краткости. В работе частично разработан комбинаторный язык для h-species. Написана формула для композиции цикленных индексов. Рассмотрены примеры.

Глава II. Введение

2.1. Комбинаторные виды

Комбинаторные виды (*species*) были введены Джоялем в [ref, ref, ref]. Они, в некоторой степени, являются развитием идеи производящих функций. О комбинаторных видах можно говорить на нескольких языках: категорном, комбинаторном и на языке теории представлений. Последний наиболее часто встречается в литературе, хотя автору он кажется наимение выразительным. Во введении изложено начало теории комбинаторных видов.

2.1.1. Определение

Рассмотрим категорию \mathcal{B} — подкатегорию конечных множеств с морфизмами — только биекциями. Это подкатегория в Set. Функтор $F: \mathcal{B} \to Set$ — это комбинаторный вид. То есть вид, это сопоставление каждому числу $n \in \mathbb{N}$ множества с действием группы S_n . Комбинаторная интерпретация: множеству точек сопоставляется множество структур на этих точках, а действие S_n ествественно возникает из перестановок исходных точек.

Пример 1. Вид \mathbb{E} — структура множеста. Он сопоставляет набору точек одно множество, состоящие из этих точек. Все элементы S_n переходят в тождественное отображение.

Пример 2. \mathbb{C} — циклический порядок. Сопоставляет набору из n точек (n-1)! возможных циклических порядков на них.

Пример 3. Линейный порядок \mathbb{L} сопоставляет n! линейных порядков.

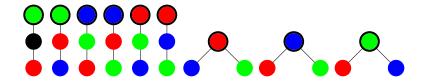


Рис. 2.1. корневые деревья с 3 вершинами

Пример 4. \mathbb{E}_e — сужение \mathbb{E} на четные множества. То есть для четных n, совпадает с \mathbb{E} , а для нечетных \emptyset . Аналогично \mathbb{E}_o — сужение на нечетные.

Пример 5. На картинке 2.1 изображен вид «корневые деревья с 3 вершинами» (без какого-либо порядка на потомках).

Можно рассмотреть функтор $I: Set \to Vec$, который сопоставляет множеству векторное пространство со свободным[так можно сказать?] базисом из этого множества. Тогда $F \circ I: \mathcal{B} \to Vec$, получается для каждого n перестановочное представление группы S_n . При таком подходе, характер этого представления $\chi(\sigma)$, это количество структур, неподвижных относительно $\sigma \in S_n$.

2.1.2. Сложение комбинаторных видов

Сумму двух species F, G легко определить как поточечную сумму функторов [ref]. На комбинаторном языке это будет означать «либо структура типа F, либо структура типа G».

Пример 6. $\mathbb{E} = \mathbb{E}_e + \mathbb{E}_o$

Пример 7. Любой вид F можно разложить в такую сумму $F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$, где F_i — сужение F на $i \in \mathcal{B}$. Значение F_i на $j \neq i$ равно \emptyset .

2.1.3. Произведение комбинаторных видов[TODO: тут какая-то чушь написана, надо переписать]

Для определения произведения, используется тензорное произведение на \mathcal{B} : $n \otimes m = (n+m)$ и соответствующее ему вложение $S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$. Все такие вложения сопряжены. На языке представлений это соответствует индуцированному представлению $F(S_n \times S_m) \uparrow = F(S_{n+m})$. [ref]

Поскольку $F_i \times G_j = (F \times G)_{i+j}$, то в целом произведение соответствует свертке: $(F \times G)[n] = \sum_{i=0}^n F[i] \times G[i]$. На комбинаторном языке это значит: разбить множество точек на два кусочка (на всевозможные размеры) и на первом ввести структуру типа F, на втором — типа G.

Пример 8. $\mathbb{E} \times \mathbb{E}_1$ — множество с выделенной точкой.

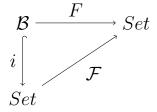
Пример 9. \mathbb{C}^2 — (упорядоченная) пара циклов.

2.2. Композиция комбинаторных видов

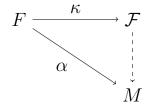
Кроме сложения и умножения на species можно ввести операцию композиции. Для этого необходимо ввести дополнительную конструкцию: аналитический функтор.

2.2.1. Аналитический функтор комбинаторных видов

Аналитический функтор \mathcal{F} соответствующий species F является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией. Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i.



Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, имеется естественное преобразование $\kappa\colon F\to i\circ \mathcal{F}$, обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора $M\colon Set\to Set$ и морфизма функторов $\eta\colon F\to i\circ M$ этот морфизм пропускаеться через \mathcal{F} при помощи κ .



Явная конструкция для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F}(A) = \sum_{n} F[n] \times A^{n} / S_{n} \tag{2.1}$$

У аналитического функтора для типа структуры F имеется прозрачный комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество A как набор цветов, то значение аналитического функтора $\mathcal{F}(A)$ трактуется как множество структур типа F раскрашенных в цвета из A.

2.2.2. Композиция аналитических функторов комбинаторных видов

Теорема 1. Композиция аналитических функторов $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ является аналитическим функтором.

Доказательство. Species, которому соответствует этот аналитический функтор будем называть композицией $F \circ G$. Дадим набросок доказательства. Согласно конструкции $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(A) = \sum_{n} F[n] \times (\sum_{m} G[m] \times A^{m}/S_{m})^{n}/S_{n} = \sum_{n} \sum_{k,m_{1}+\dots+m_{k}=n} F[k] \times (\coprod_{i} G[m_{i}]) \times A^{n}/S_{n}$. [TODO??]

Строгое доказательство см. в [ref]

Надо отметить, что все части разбиения предполагаются непустыми, что равносильно сужению внутреннего speceis на \mathbb{N}_+ . Будем обозначать его G_+ .

У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры F раздуваем(красим) в структуру типа G.

Пример 10. $\mathbb{E}_1 \circ F_+ = F_+, \ F \circ \mathbb{E}_1 = F_-$. \mathbb{E}_1 является нейтральным элементом в монойде species по композиции.

Пример 11. $\mathbb{E}_2 \circ \mathbb{C}$ — (неупорядоченная) пара циклов.

Пример 12. $\mathbb{E} \circ \mathbb{E}_+$ — структура разбиения множества. Здесь E_+ — непустые множества.

Пример 13. $\mathbb{E} \circ \mathbb{C}_+ = \mathbb{S}$ — структура перестановки. Буквально перестановка — это набор непустых циклов.

В дальнейшем мы зачастую будем опускать $F \circ G_+$ и писать просто $F \circ G$.

2.2.3. Цикленный индекс

Процедура декатегорификации не имеет строго математического смысла, так же как и процедура квантования. Сейчас мы предложим процедуру, которая, стартуя с обычных species, на выходе дает классический цикленный индекс/фробениусову характеристику. Затем мы попытаемся аналогические действия провести и в гипероктаэдральном случае. Декатегорификацией моноидальной категории $\mathbb B$ является моноид классов изоморфизма объектов категории $\widehat{\mathcal B}$, то есть моноид натуральных чисел по сложению. Декатегорификкацией $\widehat{\mathcal B}$ естественным образом оказывается моноидная алгебра с коэффициентами из $\mathbb Z$ для моноида $\mathbb N$, то есть кольцо многочленов Z[X]. (Правда это не то, что мы хотели. Чтобы получить цикленный индекс надо декатегорифицировать саму операцию подстановки и аналитический функтор). [ТОDО: этот таинственный абзац стоит переписать]

Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием S_n имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэффициенте при мономе соответствующего веса. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы вопервых она была неподвижна как нераскрашенная структура, а во-вторых расскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например расскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответсвует моном $x_1^2x_2$. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$, где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называеться фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$\mathcal{Z}_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda}$$
 (2.2)

Где χ — характер (перестановочного) представления заданного F, σ — перестановка цикленного типа λ , $\psi^{\lambda} = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots, z_{\lambda}$ — индекс класса сопряженности σ . Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это x_1, x_2, x_3, \dots

Пример 14. $\mathcal{Z}_{\mathbb{E}} = e^{(\psi^1 + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} + \dots)}$. Для доказательства смотри [ref].

2.2.4. Плетизм цикленных индексов

Теорема 2. Композиции аналитически функторов соответствует плетизм цикленных индексов.

Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановки. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов A рассмотрим счетный набор цветов x_1, x_2, x_3, \ldots Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \ldots$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi^{1}, \psi^{2}, \psi^{3}, \dots) = \mathcal{Z}_{F}(\mathcal{Z}_{G}(\psi^{1}, \psi^{2}, \psi^{3}, \dots), \mathcal{Z}_{G}(\psi^{2}, \psi^{4}, \psi^{6}, \dots), \mathcal{Z}_{G}(\psi^{3}, \psi^{6}, \psi^{9}, \dots), \dots)$$
(2.3)

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G. То есть $\mathcal{Z}_{F \circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$, где $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G. Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$ легко понять в переменных x_1, x_2, x_3, \dots Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G-структуру. Значит каждый цвет x_j заменяется на x_i^i .

Формулу 2.3 можно специализировать для подсчета labeled–структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в расскраске. Соответсвующие мономы (в базисе x_1, x_2, x_3, \ldots) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\psi^1)^k$ и коэффициент в них равен ck! — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой

 $\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$. Формула 2.3 примет вид $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \tag{2.4}$$

Пример 15. (Экспоненциальная) производящая функция для $\mathbb E$ это $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$ А производящая функция для непустых циклов $\mathbb C_+$ это $-log(1-x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$ А для $\mathbb S$ производящая функция это $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$ И действительно $e^(-log(1-x))=\frac{1}{1-x}$.

Глава III. Гипероктаэдральные комбинаторные виды

3.1. Определение

Рассмотрим категорию HSet. В ней объекты это множества, снабженные дополнительным действием — инволюцией. А стрелки, это морфизмы, сохраняющие инволюцию. Рассмотрим категорию $H\mathcal{B}$ — подкатегорию конечных множеств из HSet с морфизмами только биекциями, и инволюциями без неподвижных точек. Функтор $F:H\mathcal{B}\to HSet$ — гипероктаэдральный (или кубический) это комбинаторный вид. Мы будем так же для краткости употреблять термин h-species. Объекты из $H\mathcal{B}$ будем отождествлять с $\bar{n}=\{-n,-n+1,\ldots,-1,1,2,\ldots,n-1,n\}$, где инволюция - смена знака. Эпитет гипероктаэдральный используется потому, что на $H\mathcal{B}[\bar{n}]$ действует гипероктаэдральная группа B_n — группа движений n-мерного куба (иногда будем обозначать ее H_n). Некоторая не очень ясная комбинаторная интерпретация: множеству граней куба сопоставляется множество структур на этих гранях, а действие B_n возникает из перестановок граней.

Пример 16. Вид \mathbb{H} — структура куб. Он сопоставляет \bar{n} одно множество. Все элементы B_n переходят в тождественное отображение.

Пример 17. \$ — неразличимая пара граней (\mathbb{H}_1). \$ — различимая пара граней. Оба они принимают значение \emptyset на всем, кроме $\bar{1}$. Но во втором случае $\$(\bar{1})$ это два объекта [TODO: правда??].

Пример 18. Аналогично \square — структура куб размерности 2 (\mathbb{H}_2). \square — куб размерности 2 с различимыми противоположными гранями. Их уже целых 4 [TODO: правда??].

Пример 19. Структура $\stackrel{\circ}{\bullet} \times \stackrel{\circ}{\bullet}$. Это не то же самое что \square , поскольку это «упорядоченная пара $\stackrel{\circ}{\bullet}$ ».

3.2. Вложение species в h-species

Обычные комбинаторные виды можно «вложить» в гипероктаэдральные. Иными словами можно каждый species рассмотреть как h-species. Для этого

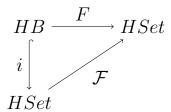
достаточно рассматривать структуру не на точках, а на парах (неразличимых) граней. Если $F:\mathcal{B}\to Set$, то $\tilde{F}:H\mathcal{B}\to HSet$, где $\tilde{F}[\bar{n}]=F[n]$ как множество, а инволюция тождественна.

3.3. Сложение и умножение h-species

Сложение и умножение определяются полностью аналогично species и тут проблем не возникает.

3.4. Аналитический функтор для h-species

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species



$$\mathcal{F} = \sum_{n} F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \tag{3.1}$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверку универсальности картинки

3.5. Декатегорификация аналитического функтора

Попробуем декатегорифицировать аналитический функтор для h-species. Прежде всего отметим, что раскраска, элемент $A^{\bar{n}}$, это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы из одной орбиты инволюции i и -i должны отображаться либо в один и тот же элемент A (который инволюцией переводиться в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай моноцветом, второй — бицветом.

Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по–прежнему определяется длинной орбиты инволюции A, уже после факторизации по B_n . То есть кроме действия B_n есть еще внешняя инволюция — действие Z_2 . Будем разделять расскрашенные структуры на моноструктуры и биструктуры.

Цикленный индекс, считающий только моноструктуры будем обозначать $\mathcal{Z}^{(1)}$, биструктуры — $\mathcal{Z}^{(2)}$.

Утверждение 3. Количество орбит под действием $H_n \times Z_2$ соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$, а под действием только H_n соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$.

Доказательство. В первом случае каждая моноструктура и биструктура будет посчитана 1 раз. А во втором каждая биструктура будет посчитан два раза, т.к. действие инволюции «склеивающей» две части биструктуры не учтено.

3.5.1. Подсчет цикленного индекса

В качестве H-множества цветов возьмем счетное множество моноцветов x_1, x_2, x_3, \ldots объединенное с счетным множеством бицветов y_1, y_2, y_3, \ldots

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую расскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляеться в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе H_n бывают двух типов: $\partial \Lambda u h h b e$ — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и $\kappa o pom \kappa u e$ — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество количество неподвижных точек для H_n . Пусть λ^1 — цикленный тип коротких перестановок, λ^2 — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл покрашен в моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет. Под покрашенным циклом мы подразумеваем покраску всех его элементов в этот цвет (чтобы такая покрашенная структура была неподвижна относительно действия этого элемента H_n).

Утверждение 4. Справедлива формула:

$$\mathcal{Z}_{F}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{F}^{(2)} = \sum_{n} \frac{1}{2^{n} n!} \sum_{\sigma \in B_{n}} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^{1}(\sigma)} \psi_{x}^{\lambda^{2}(\sigma)} = \sum_{n,\lambda^{1} + \lambda^{2} \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^{1}\lambda^{2}}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^{1}} \psi_{x}^{\lambda^{2}}}{z_{\lambda^{1}\lambda^{2}}}$$

$$(3.2)$$

Здесь нижний индекс ψ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$. При этом коофициент 2 у y_i^2 отражает тот факт, что можно раскрасить k пар граней в бицвет, так чтобы расскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество неподвижных точек для $H_n \times Z_2$. Разобъем сумму на две части — $(h,\bar{0})$ и $(h,\bar{1})$. Для первой формула будет аналогична 3.2, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коофициент $\frac{1}{2}$. Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим в него цикл (пару циклов, в случае короткого). Тогда реальный цикл от $(h,\bar{1})$ будет получатся из циклов h добавлением «смены грани» на каждом шаге. Значит для циклов нечетной длинны сменится свойство короткий—длинный.

Пример 20. Пусть
$$h_e = \bullet \leftrightarrow \bullet$$
. Тогда $(h_e, \bar{1}) = \bullet \to \bullet$
Пример 21. Пусть $h_o = \bullet \to \bullet$. Тогда $(h_o, \bar{1}) = \bullet \to \bullet$

Утверждение 5. Справедлива формула:

$$\mathcal{Z}_{F}^{(1)} + \mathcal{Z}_{F}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n,\lambda^{1} + \lambda^{2} \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^{1}\lambda^{2}}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^{1}} \psi_{x}^{\lambda^{2}}}{z_{\lambda^{1}\lambda^{2}}} + \frac{1}{2} \sum_{n,\lambda^{1}_{0} + \lambda^{2}_{0} + \lambda^{1}_{0} + \lambda^{2}_{0} + \lambda^{1}_{0} + \lambda^{2}_{0} \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^{1}_{0}\lambda^{2}_{0}\lambda^{1}_{e}\lambda^{2}_{e}}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^{1}_{e} + \lambda^{2}_{0}} \psi_{x}^{\lambda^{2}_{e} + \lambda^{1}_{0}}}{z_{\lambda^{1}_{0}\lambda^{2}_{0}\lambda^{1}_{e}\lambda^{2}_{e}}} \tag{3.3}$$

Где λ_o — циклы нечетной длинны, λ_e — циклы четной длинны. Из формул 3.2, 3.3 легко получить

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n,\lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}}$$
(3.4)

$$\mathcal{Z}_{F}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n,\lambda^{1}+\lambda^{2}\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^{1}\lambda^{2}}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^{1}} \psi_{x}^{\lambda^{2}}}{z_{\lambda^{1}\lambda^{2}}} - \frac{1}{2} \sum_{n,\lambda^{1}_{o}+\lambda^{2}_{o}+\lambda^{1}_{e}+\lambda^{2}_{e}\vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^{1}_{o}\lambda^{2}_{o}\lambda^{1}_{e}\lambda^{2}_{e}}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^{1}_{e}+\lambda^{2}_{o}} \psi_{x}^{\lambda^{2}_{e}+\lambda^{1}_{o}}}{z_{\lambda^{1}_{o}\lambda^{2}_{o}\lambda^{1}_{e}\lambda^{2}_{e}}}$$
(3.5)

3.5.2. Примеры

Посчитаем цикленные индексы для простых h-species. Здесь мы будем писать Z(A) вместо Z_A . Это не должно вызывать путаницу, поскольку вместо A будут использоваться схематические картинки. Их никак не перепутать с переменными, от которых считается цикленный индекс.

Пример 22.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\delta) = \frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) = \psi_{x,y}^1$$
$$\mathcal{Z}^{(1)}(\delta) = \frac{1}{2}(\psi_x^1 + \psi_{x,y,y}^1) = \psi_{x,y}^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\lozenge) = 0$$

Пример 23.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\mathring{\bullet}) = \frac{1}{2}(2\psi_{x,y,y}^1 + 0\psi_x^1) = \psi_{x,y,y}^1$$
$$\mathcal{Z}^{(1)}(\mathring{\bullet}) = \frac{1}{2}(2\psi_x^1 + 0\psi_{x,y,y}^1) = \psi_x^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\overset{\circ}{\bullet}) = \psi_y^1$$

Пример 24.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}((\psi_{x,y,y}^1)^2 + (\psi_x^1)^2 + 2\psi_x^2 + 2(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Здесь коофициенты — не характеры (характер при каждом слагаемом = 1).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\Box) = \frac{1}{8}((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1)^2 + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\Box)$$

Последнее следовало и из общих соображений: легко видеть что $\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = 0$.

Пример 25.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8} (4(\psi_{x,y,y}^1)^2 + 0(\psi_x^1)^2 + 0\psi_x^2 + 0(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$
$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8} (4(\psi_x^1)^2 + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Откуда

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = \frac{1}{2}([\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) - \mathcal{Z}^{(1)}(\square)) = \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1\psi_x^1 + \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1)^2) = \psi_y^1\psi_x^1 + (\psi_y^1)^2$$

3.6. Сумма и произведение цикленных индексов

3.6.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответсвует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(1)} = \mathcal{Z}_{A}^{(1)} + \mathcal{Z}_{B}^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(2)} = \mathcal{Z}_{A}^{(2)} + \mathcal{Z}_{B}^{(2)}$$

3.7. Произведение

Для произведения уже не совсем так. Утверждается, что моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры. То есть

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(2)} + \mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(1)} + 2(\mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)}) = (\mathcal{Z}_{A}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{A}^{(2)}) * (\mathcal{Z}_{B}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{B}^{(2)})$$

Что логично, поскольку $(\mathcal{Z}_F^{(1)}+2\mathcal{Z}_F^{(2)})$ — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

3.7.1. Примеры

Посчитаем произведение уже известных h-структур и их цикленных индексов.

Структура $% \times %$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\mathring{\Diamond} \times \mathring{\Diamond}) = \mathcal{Z}^{(1)}(\mathring{\Diamond}) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\mathring{\Diamond}) = (\psi^1_{x,y})^2$$

Структура $\stackrel{\circ}{\bullet} \times \stackrel{\circ}{\bullet}$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\mathring{\bullet} \times \mathring{\bullet}) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\mathring{\bullet}) \times [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\mathring{\bullet}) = (\psi_{x,y,y}^1)^2$$

Легко получить эту же формулу и из других соображений, как $\frac{1}{8}(8(\psi^1_{x,y,y})^2)$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}({}^{\circ}_{\bullet}\times{}^{\circ}_{\bullet})=\mathcal{Z}^{(1)}({}^{\circ}_{\bullet})\times\mathcal{Z}^{(1)}({}^{\circ}_{\bullet})=(\psi^1_x)^2$$

3.8. Цикленный индекс композиции

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. Прежде всего отметим, что инволюция на множестве цветов делит их на моноцвета $(x_1, x_2, x_3, ...)$ и бицвета $(y_1, y_2, y_3, ...)$. Однако, формулы 3.2 и 3.3 подсказывают, что в качестве базиса можно брать не ψ_x^i, ψ_y^j а $\psi_x^i, \psi_{x,y,y}^j$. Впрочем это тривиальная замена переменных.

Итак мы хотим выяснить чему равняются

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots)$$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(2)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots)$$

Утверждается следующее:

$$\mathcal{Z}_{F\circ G}^{(1)/(2)}(\psi_{x}^{1}, \psi_{x}^{2}, \psi_{x}^{3}, \dots, \psi_{x,y,y}^{1}, \psi_{x,y,y}^{2}, \psi_{x,y,y}^{3}, \dots) = \\
\mathcal{Z}_{F}^{(1)/(2)}(\mathcal{Z}_{G}^{(1)}(\psi_{x}^{1}, \psi_{x}^{2}, \psi_{x}^{3}, \dots, \psi_{x,y,y}^{1}, \psi_{x,y,y}^{2}, \psi_{x,y,y}^{3}, \dots), \\
\mathcal{Z}_{G}^{(1)}(\psi_{x}^{2}, \psi_{x}^{4}, \psi_{x}^{6}, \dots, \psi_{x,y,y}^{2}, \psi_{x,y,y}^{4}, \psi_{x,y,y}^{6}, \dots), \\
\mathcal{Z}_{G}^{(1)}(\psi_{x}^{3}, \psi_{x}^{6}, \psi_{y}^{9}, \dots, \psi_{x,y,y}^{3}, \psi_{x,y,y}^{6}, \psi_{y,y,y}^{9}, \dots), \\
\dots, \\
(2^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_{G}(\psi_{x}^{1}, \psi_{x}^{2}, \psi_{x}^{3}, \dots, \psi_{x,y,y}^{1}, \psi_{x,y,y}^{2}, \psi_{x,y,y}^{3}, \dots), \\
[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_{G}(\psi_{x}^{2}, \psi_{x}^{4}, \psi_{x}^{6}, \dots, \psi_{x,y,y}^{2}, \psi_{x,y,y}^{4}, \psi_{x,y,y}^{6}, \dots), \\
[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_{G}(\psi_{x}^{3}, \psi_{x}^{6}, \psi_{y}^{9}, \dots, \psi_{x,y,y}^{3}, \psi_{x,y,y}^{6}, \psi_{x,y,y}^{9}, \dots), \\
\dots)$$

Эта формула слишком грамоздкая, поэтому давайте напишем ее на уровне членов:

$$\psi_x^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots)$$

$$\psi_{x,y,y}^{i} \circ (\mathcal{Z}_{G}^{(1)}, \mathcal{Z}_{G}^{(2)}) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_{G}(\psi_{x}^{i}, \psi_{x}^{2i}, \psi_{x}^{3i}, \dots, \psi_{x}^{i}, \psi_{x}^{2i}, \psi_{x}^{3i}, \dots)$$

Здесь мы пишем $(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})$, поскольку цикленный индекс для h-species в действительности представляет собой пару. Биструктуры подставляются вместо бицветов, моноструктуры, вместо моноцветов. В остальном рассуждение дословно повторяет случай обычных species.

Аналогично, если сделать подстановку

$$\psi_x^1 = t, \psi_x^k = 0, k > 1$$

$$\psi_{x,y,y}^1 = s, \psi_{x,y,y}^k = 0, k > 1$$

То полученная формула показывает, что 2.4 справедливо для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур (то есть производящая функция от двух переменных). А можно сделать подстановку s := t, которая даст выполнение формулы 2.4 для exp-производящей функции просто labeledструктур. А значит и обычной производящей функции unlabeled-структур.

3.8.1. Примеры

Посчитаем $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})(\stackrel{\diamond}{\bullet} \circ \stackrel{\diamond}{\circ})$

$$\mathcal{Z}^{(1)}({}^{\lozenge}_{\bullet} \circ {}^{\lozenge}) = \psi^1_x \circ \psi^1_{x,y} = \psi^1_{x,y} = \mathcal{Z}^{(1)}({}^{\lozenge}_{\bullet})$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\mathring{\bullet} \circ \mathring{\circ}) = \psi_y^1 \circ 0 = 0 = \mathcal{Z}^{(2)}(\mathring{\circ})$$

Да и вобще, справедливо

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\stackrel{\circ}{\bullet} \circ A) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\overset{\circ}{\bullet} \circ A) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

А так же

$$\mathcal{Z}^{(1)}(A \circ \stackrel{\Diamond}{\bullet}) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(A \circ \stackrel{\diamond}{\bullet}) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

Это дает некоторое понимание композиции. Так $A \circ \mathring{\bullet} = \mathring{\bullet} \circ A = A$. То есть $\mathring{\bullet}$ является нейтральным элементом в монойде h-species по композиции. Это несколько контр-интуитивно, поскольку в обычных species нейтральным элементом являеться одноточечное множество. А его образом при вложении species в h-species являеться $\mathring{\circ}$. [ТОДО A не значит ли это что просто можно по другому вложить?]

Интересно посмотреть чем является 🖇 . Например

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square \circ \lozenge) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1))^2 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\psi_{x,y,y}^2 + \psi_x^2)) = \frac{1}{8} ((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1 \psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)$$
(3.7)

Откуда можно сделать вывод, что $\square \circ \lozenge = \square$. То есть подстановка \lozenge , это «стирание различий между противоположными гранями».

3.8.2. Предложения [TODO]

$$(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots) = (\mathcal{Z}_G(\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots), 0)$$

Где G — обычный species, вложенный в h-species. А \mathcal{Z}_G — его цикленный индекс.

3.9. Примеры [TODO]

Посчитаем для структуры V «вершина куба».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](V) = e^{\psi_{x,y,y}^1 + \frac{\psi_{x,y,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y,y}^3}{3!} + \dots}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(V) = e^{(\psi_x^1 + \frac{\psi_x^2}{2!} + \frac{\psi_x^3}{3!} + \dots) + (\psi_y^2 + \frac{\psi_y^4}{2!} + \frac{\psi_y^6}{3!} + \dots)}$$

Для структуры куба H «куб».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](H) = \mathcal{Z}^{(1)}(H) = e^{\psi_{x,y}^1 + \frac{\psi_{x,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y}^3}{3!} + \dots}$$

Нетрудно убедится что $\mathcal{Z}^{(i)}(V \circ \S) = \mathcal{Z}^{(i)}(H)$.