

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математико–механический факультет

Специальность «математика»

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

ГИПЕРОКТАЭДРАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ТИПЫ

«К защите допущен»:

Зав. кафедрой высшей алгебры
и теории чисел,
профессор, д.ф.-м.н.

_____ Яковлев А.В.

Научный руководитель,
доцент, к.ф.-м.н.

_____ Пименов К.И.

Рецензент,
профессор, д.ф.-м.н.

_____ Яковлев А.В.

Дипломник

_____ Воробьев С.Э.

г. Санкт-Петербург, 2012

Содержание

Глава I. Введение	3
1.1. Комбинаторные виды	3
1.2. Композиция комбинаторных видов	5
Глава II. Гипероктаэдральные комбинаторные виды	10
2.1. Определение	10
2.2. Вложение species в h-species	10
2.3. Сложение и умножение h-species	11
2.4. Аналитический функтор для h-species	11
2.5. Декатегорификация аналитического функтора	11
2.6. Сумма и произведение цикленных индексов	15
2.7. Цикленный индекс композиции	16
2.8. Цикленный индекс species, вложенных в h-species	19
2.9. Применение цикленного индекса к решению задач о раскрасках	19
Глава III. Заключение?	20
Список литературы	21

Глава I. Введение

1.1. Комбинаторные виды

[TODO] The combinatorial theory of species, introduced by Joyal in 1980, provides a unified understanding of the use of generating functions for both labeled and unlabeled structures as well as a tool for the specification and analysis of these structures. This key reference presents the basic elements of the theory and gives a unified account of its developments and applications. The authors offer a modern introduction to the use of various generating functions, with applications to graphical enumeration, Polya Theory and analysis of data structures in computer science, and to other areas such as special functions, functional equations, asymptotic analysis, and differential equations.

Комбинаторные виды (*species*) были введены Жуаялем в [1]. Они, в некоторой степени, являются развитием идеи производящих функций. О комбинаторных видах можно говорить на нескольких языках: категорном, комбинаторном и на языке теории представлений. Последний наиболее часто встречается в литературе, хотя автору он кажется наименее выразительным. Во введении изложено начало теории комбинаторных видов. Основным источником информации про комбинаторные виды является [3].

1.1.1. Определение

Рассмотрим категорию \mathcal{B} — группоид конечных множеств. Она эквивалентна группоиду, объекты которого пронумерованы неотрицательными целыми числами и $\text{Hom}(n, n) = S_n$.

Определение 1. Комбинаторным видом (species) называется функтор

$$F : \mathcal{B} \rightarrow \text{Set}$$

Задать такой функтор, это то же самое что для каждого $n \in \mathbb{N}$ задать множества $F[n]$ с действием группы S_n . В комбинаторике такая ситуация возникает, когда мы рассматриваем явно определенные каким-либо образом структуры на конечных множествах. Например: линейные порядки, циклические порядки, деревья. Действие S_n естественно возникает из перестановок исходных точек.

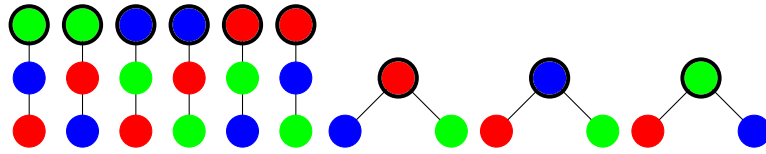


Рис. 1.1. корневые деревья с 3 вершинами

Пример 1. Вид \mathbf{E} — вид множесто (без дополнительной структуры). Он сопоставляет набору точек одно множество, состоящие из этих точек, $\mathbb{E}[n] = \{*\}$. Все элементы S_n переходят в тождественное отображение.

Пример 2. \mathbf{C} — циклический порядок. Сопоставляет набору из n точек $(n-1)!$ возможных циклических порядков на них.

Пример 3. Линейный порядок \mathbb{L} сопоставляет $n!$ линейных порядков.

Пример 4. \mathbb{E}_e — сужение \mathbb{E} на четные множества. То есть для четных n , совпадает с \mathbb{E} , а для нечетных \emptyset . Аналогично \mathbb{E}_o — сужение на нечетные.

Пример 5. На картинке 1.1 изображен вид «корневые деревья с 3 вершинами» (без какого-либо порядка на потомках).

Можно рассмотреть функтор $I : Set \rightarrow Vec$, который сопоставляет множеству векторное пространство, базис которого это множество. Тогда $F \circ I : \mathcal{B} \rightarrow Vec$, получается для каждого n перестановочное представление группы S_n . При таком подходе, характер этого представления $\chi(\sigma)$, это количество структур, неподвижных относительно $\sigma \in S_n$.

1.1.2. Сложение комбинаторных видов

Сумму двух species F, G легко определить как поточечную сумму функторов. На комбинаторном языке это будет означать «либо структура типа F , либо структура типа G ». $(F + G)[n] = F[n] \amalg G[n]$ с покомпонентным действием S_n .

Пример 6. $\mathbb{E} = \mathbb{E}_e + \mathbb{E}_o$

Пример 7. Любой вид F можно разложить в такую сумму $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$, где F_i — сужение F на $i \in \mathcal{B}$. Значение F_i на $j \neq i$ равно \emptyset .

1.1.3. Произведение комбинаторных видов

Определим произведение по Коши комбинаторных видов. По определению задать на конечном множестве структуру типа $F \cdot G$ означает разбить множество точек на две части (на всевозможные размеры) и на первом ввести структуру типа F , на втором — типа G .

$$(F \cdot G)[X] = \coprod_{X_1 \amalg X_2 = X} F[X_1] \times G[X_2]$$

С категорной точки зрения произведение по Коши возникает из тензорного произведения на категории \mathcal{B} , которое на объектах задается как $n \otimes m = (n + m)$. На морфизмах при помощи вложения $S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$. Все такие вложения сопряжены. Известна конструкция свертки функторов из \mathcal{C} в Set , где \mathcal{C} — моноидальная категория с копроизведениями <http://nlab.mathforge.org/nlab/show/Day+convolution>.

На языке теории представлений $F[n + m]$ как множество с действием группы S_{n+m} равно индуцированному представлению $Ind \uparrow_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} F[n] \times F[m]$.

Пример 8. $\mathbb{E} \times \mathbb{E}_1$ — множество с выделенной точкой.

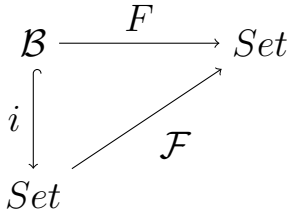
Пример 9. \mathbb{C}^2 — (упорядоченная) пара циклов.

1.2. Композиция комбинаторных видов

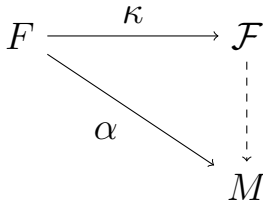
Кроме сложения и умножения на species можно ввести операцию композиции. [ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ] Комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры F раздуваем(красим) в структуру типа G . Для этого необходимо ввести дополнительную конструкцию: аналитический функтор.

1.2.1. Аналитический функтор комбинаторных видов

Аналитический функтор (введен Жуаялем в [2]) \mathcal{F} соответствующий species F является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией. Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i .



Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, имеется естественное преобразование $\kappa: F \rightarrow i \circ \mathcal{F}$, обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора $M: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ и морфизма функторов $\eta: F \rightarrow i \circ M$ этот морфизм пропускается через \mathcal{F} при помощи κ .



Явная конструкция для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F}(A) = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \quad (1.1)$$

У аналитического функтора для типа структуры F имеется прозрачный комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество A как набор цветов, то значение аналитического функтора $\mathcal{F}(A)$ трактуется как множество структур типа F раскрашенных в цвета из A .

1.2.2. Композиция аналитических функторов комбинаторных видов

Теорема 2. *Композиция аналитических функторов $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ является аналитическим функтором для $F \circ G$.*

Доказательство. набросок. Согласно конструкции $\mathcal{F}(\mathcal{G}(A)) = \sum_k F[k] \times (\sum_m G[m] \times A^m / S_m)^k / S_k = \sum_n \sum_{k, m_1 + \dots + m_k = n} F[k] \times (\prod_i G[m_i]) \times A^n / S_n$.

Строгое доказательство см. в <http://arxiv.org/pdf/math/9811127v1.pdf> (Lemma 2.5) [это еще и про цикленные индексы] \square

Пример 10. $\mathbb{E}_1 \circ F_+ = F_+$, $F \circ \mathbb{E}_1 = F$. \mathbb{E}_1 является нейтральным элементом в моноиде species по композиции.

Пример 11. $\mathbb{E}_2 \circ \mathbb{C}$ — (неупорядоченная) пара циклов.

Пример 12. $\mathbb{E} \circ \mathbb{E}_+$ — структура разбиения множества. Здесь \mathbb{E}_+ — непустые множества.

Пример 13. $\mathbb{E} \circ \mathbb{C}_+ = \mathbb{S}$ — структура перестановки. Буквально перестановка — это набор непустых циклов.

В дальнейшем мы зачастую будем опускать $F \circ G_+$ и писать просто $F \circ G$.

1.2.3. Цикленный индекс

[НАДО ЗДЕСЬ написать про конечность $F[n]$] Надо отметить, что все части разбиения предполагаются непустыми, что равносильно сужению внутреннего species на \mathbb{N}_+ . Будем обозначать его G_+ .

Процедура декатегорификации не имеет строго математического смысла, так же как и процедура квантования. Сейчас мы предложим процедуру, которая, стартуя с обычных species, на выходе дает классический цикленный индекс/фробениусову характеристику. Затем мы попытаемся аналогичные действия провести и в гипероктаэдральном случае. Декатегорификацией моноидальной категории \mathbb{V} является моноид классов изоморфизма объектов категории \mathcal{B} , то есть моноид натуральных чисел по сложению. Декатегорификацией $\hat{\mathcal{B}}$ естественным образом оказывается моноидная алгебра с коэффициентами из \mathbb{Z} для моноида \mathbb{N} , то есть кольцо многочленов $\mathbb{Z}[X]$. (Правда это не то, что мы хотели. Чтобы получить цикленный индекс надо декатегорифицировать саму операцию подстановки и аналитический функтор). [TODO: этот таинственный абзац стоит переписать]

Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием S_n имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэффициенте при мономе соответствующего веса. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как нераскрашенная структура, а во-вторых

раскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например раскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответствует моном $x_1^2 x_2$. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$, где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называется фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$\mathcal{Z}_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \quad (1.2)$$

Где χ — характер (перестановочного) представления заданного F , σ — перестановка цикленного типа λ , $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots$, z_λ — индекс класса сопряженности σ . Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это x_1, x_2, x_3, \dots

Пример 14. $\mathcal{Z}_{\mathbb{E}} = e^{(\psi^1 + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} + \dots)}$. Для доказательства смотри [ref].

1.2.4. Плетизм цикленных индексов

Теорема 3. *Композиции аналитически функторов соответствует плетизм цикленных индексов.*

Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановки. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов A рассмотрим счетный набор цветов x_1, x_2, x_3, \dots . Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots) \quad (1.3)$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G . То есть $\mathcal{Z}_{F \circ G} =$

$\mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$, где $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G . Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$ легко понять в переменных x_1, x_2, x_3, \dots . Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G -структуру. Значит каждый цвет x_j заменяется на x_j^i .

Формулу 1.3 можно специализировать для подсчета labeled-структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответствующие мономы (в базисе x_1, x_2, x_3, \dots) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\psi^1)^k$ и коэффициент в них равен $ck!$ — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой $\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$. Формула 1.3 примет вид $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \quad (1.4)$$

Пример 15. (Экспоненциальная) производящая функция для \mathbb{E} это $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$. А производящая функция для непустых циклов \mathbb{C}_+ это $-\log(1 - x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$. А для \mathbb{S} производящая функция это $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. И действительно $e^{(-\log(1-x))} = \frac{1}{1-x}$.

Глава II. Гипероктаэдральные комбинаторные виды

2.1. Определение

Рассмотрим категорию $HSet$. В ней объекты это множества, снабженные дополнительным действием — инволюцией. А стрелки, это морфизмы, сохраняющие инволюцию. Рассмотрим категорию $H\mathcal{B}$ — подкатегорию конечных множеств из $HSet$ с морфизмами только биекциями, и инволюциями без неподвижных точек. Функтор $F : H\mathcal{B} \rightarrow HSet$ — гипероктаэдральный (или кубический) это комбинаторный вид. Мы будем так же для краткости употреблять термин $h\text{-species}$. Gruppoид $H\mathcal{B}$ эквивалентен группоиду, объекты которого $\bar{n} = \{-n, -n+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, n-1, n\}$, инволюция - смена знака. Эпитет гипероктаэдральный используется потому, что на $H\mathcal{B}[\bar{n}]$ действует гипероктаэдральная группа B_n — группа движений n -мерного куба (иногда будем обозначать ее H_n). Некоторая не очень ясная комбинаторная интерпретация: множеству граней куба сопоставляется множество структур на этих гранях, а действие B_n возникает из перестановок граней.

Пример 16. Вид \mathbb{H} — структура куб. Он сопоставляет \bar{n} одно множество. Все элементы B_n переходят в тождественное отображение.

Пример 17. \circ — неразличимая пара граней (\mathbb{H}_1). \bullet — различимая пара граней. Оба они принимают значение \emptyset на всем, кроме $\bar{1}$. Второе соответствует действию H_1 на 2-х точечном множестве.

Пример 18. Аналогично \square — структура куб размерности 2 (\mathbb{H}_2). \square — куб размерности 2 с различимыми противоположными гранями. Второе соответствует действию H_2 на 4-х точечном множестве.

Пример 19. Структура $\bullet \times \bullet$. Это не то же самое что \square , поскольку это «упорядоченная пара \bullet ».

2.2. Вложение species в h-species

Обычные комбинаторные виды можно «вложить» в гипероктаэдральные. Иными словами можно каждый species рассмотреть как $h\text{-species}$. Для этого

достаточно рассматривать структуру не на точках, а на парах (неразличимых) граней. Если $F : \mathcal{B} \rightarrow \text{Set}$, то $\tilde{F} : H\mathcal{B} \rightarrow H\text{Set}$, где $\tilde{F}[\bar{n}] = F[n]$ как множество, а инволюция тождественна.

2.3. Сложение и умножение h-species

Сложение и умножение определяются полностью аналогично species и тут проблем не возникает.

2.4. Аналитический функтор для h-species

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species

$$\begin{array}{ccc} H\mathcal{B} & \xrightarrow{F} & H\text{Set} \\ \downarrow i & \nearrow \mathcal{F} & \\ H\text{Set} & & \end{array}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \quad (2.1)$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию.

Определение 4. Будем называть элементы одного слагаемого 2.1: $(F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n)$ A -крашенными F структурами на гранях n -мерного куба.

TODO:Здесь нужно добавить проверку универсальности картинки

2.5. Декатегорификация аналитического функтора

Можно действовать наивно по аналогии с классическим случаем, написать производящую функцию для числа раскрасок. Такая формула рассматривалась (в контексте теории представлений группы S_n и G) в работе <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/download/v11i1r56/pdf> 2.2 (см. также приложение В во втором английском издании книги Макдональда [7]). Но при таком подходе наши попытки определить гипероктаэдральный плетизм оказались безуспешны. Выяснилось, что правильный аналог цикленного индекса должен помнить информацию о следующем свойстве раскрашенной структуры.

Попробуем декатегорифицировать аналитический функтор для h -species. Прежде всего отметим, что раскраска, элемент $A^{\bar{n}}$, это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы из одной орбиты инволюции i и $-i$ должны отображаться либо в один и тот же элемент A (который инволюцией переводится в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по-прежнему определяется длиной орбиты инволюции A , уже после факторизации по B_n . То есть кроме действия B_n есть еще внешняя инволюция — действие Z_2 . Будем разделять раскрашенные структуры на *моноструктуры* и *биструктуры*.

Цикленный индекс, считающий только моноструктуры будем обозначать $\mathcal{Z}^{(1)}$, биструктуры — $\mathcal{Z}^{(2)}$.

Замечание 5. Таким образом, цикленный индекс для h -species представляет собой пару $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})$.

Утверждение 6. *Количество орбит под действием $H_n \times Z_2$ соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$, а под действием только H_n соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$.*

Доказательство. В первом случае каждая моноструктура и биструктура будет посчитана 1 раз. А во втором каждая биструктура будет посчитана два раза, т.к. действие инволюции «склеивающей» две части биструктуры не учтено. \square

2.5.1. Подсчет цикленного индекса

В качестве H -множества цветов возьмем счетное множество моноцветов x_1, x_2, x_3, \dots объединенное с счетным множеством бицветов y_1, y_2, y_3, \dots .

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую раскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляется в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе H_n бывают двух типов: *длинные* — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и *короткие* — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество неподвижных точек для H_n . Пусть λ^1 — цикленный тип коротких перестановок, λ^2 — цикленный тип длинных

перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл покрашен в моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет. Под покрашенным циклом мы подразумеваем покраску всех его элементов в этот цвет (чтобы такая покрашенная структура была неподвижна относительно действия этого элемента H_n).

Утверждение 7. *Справедлива формула:*

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} \quad (2.2)$$

Здесь нижний индекс ψ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$. При этом коэффициент 2 у y_i^2 отражает тот факт, что можно раскрасить k пар граней в бицвет, так чтобы раскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество неподвижных точек для $H_n \times Z_2$. Разобьем сумму на две части — $(h, \bar{0})$ и $(h, \bar{1})$. Для первой формула будет аналогична 2.2, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коэффициент $\frac{1}{2}$. Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим в него цикл (пару циклов, в случае короткого). Тогда реальный цикл от $(h, \bar{1})$ будет получаться из циклов h добавлением «смены грани» на каждом шаге. Значит для циклов нечетной длины сменится свойство короткий–длинный.

Пример 20. Пусть $h_e = \bullet \leftrightarrow \bullet$. Тогда $(h_e, \bar{1}) = \begin{array}{c} \bullet \leftrightarrow \bullet \\ \bullet \leftrightarrow \bullet \end{array}$

Пример 21. Пусть $h_o = \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \end{array}$. Тогда $(h_o, \bar{1}) = \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \end{array}$

Утверждение 8. *Справедлива формула:*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Где λ_o — циклы нечетной длинны, λ_e — циклы четной длинны.

Из формул 2.2, 2.3 легко получить

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} - \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.5.2. Примеры вычисления цикленного индекса

Посчитаем цикленные индексы для простых h-species. Здесь мы будем писать $Z(A)$ вместо Z_A . Это не должно вызывать путаницу, поскольку вместо A будут использоваться схематические картинки. Их никак не перепутать с переменными, от которых считается цикленный индекс.

Пример 22.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\circ) = \frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) = \psi_{x,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = \frac{1}{2}(\psi_x^1 + \psi_{x,y,y}^1) = \psi_{x,y}^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ) = 0$$

Пример 23.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) = \frac{1}{2}(2\psi_{x,y,y}^1 + 0\psi_x^1) = \psi_{x,y,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) = \frac{1}{2}(2\psi_x^1 + 0\psi_{x,y,y}^1) = \psi_x^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\bullet) = \psi_y^1$$

Пример 24.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}((\psi_{x,y,y}^1)^2 + (\psi_x^1)^2 + 2\psi_x^2 + 2(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Здесь коэффициенты — не характеры (характер при каждом слагаемом = 1).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1\psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)$$

Последнее следовало и из общих соображений: легко видеть что $\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = 0$.

Пример 25.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_{x,y,y}^1)^2 + 0(\psi_x^1)^2 + 0\psi_x^2 + 0(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_x^1)^2 + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Откуда

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = \frac{1}{2}([\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) - \mathcal{Z}^{(1)}(\square)) = \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1\psi_x^1 + \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1)^2) = \psi_y^1\psi_x^1 + (\psi_y^1)^2$$

2.6. Сумма и произведение цикленных индексов

2.6.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответствует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} + \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(2)} + \mathcal{Z}_B^{(2)}$$

2.6.2. Произведение

Для произведения уже не совсем так.

Утверждение 9. *Моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры.*

То есть

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} &= \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(1)} \\ \mathcal{Z}_{A*B}^{(2)} &= \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(2)} + \mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(1)} + 2(\mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(2)})\end{aligned}$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)}) = (\mathcal{Z}_A^{(1)} + 2\mathcal{Z}_A^{(2)}) * (\mathcal{Z}_B^{(1)} + 2\mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Замечание 10. Это логично, поскольку $(\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})$ — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

2.6.3. Примеры цикленных индексов произведений

Посчитаем произведение уже известных h-структур и их цикленных индексов.

Пример 26. Структура $\circ \times \circ$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \times \circ) = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = (\psi_{x,y}^1)^2$$

Пример 27. Структура $\bullet \times \bullet$.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet \times \bullet) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) \times [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) = (\psi_{x,y,y}^1)^2$$

Легко получить эту же формулу и прямым подсчетом по формуле 2.2, как $\frac{1}{8}(8(\psi_{x,y,y}^1)^2)$.

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\bullet \times \bullet) = \mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) = (\psi_x^1)^2$$

2.7. Цикленный индекс композиции

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. В качестве моноцветов возьмем $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, бицветов — $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$. Формулы 2.2 и 2.3 подсказывают,

что в качестве симметричного базиса можно брать не $\{\psi_x^i, \psi_y^j\}$ а $\{\psi_x^i, \psi_{x,y}^j\}$. Впрочем это тривиальная замена переменных.

Задача 1. Как выразить

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots)$$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(2)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots)$$

Теорема 11.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{F \circ G}^{(i)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F^{(i)}(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots), \\ \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^4, \psi_{x,y,y}^6, \dots), \\ \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y,y}^3, \psi_{x,y,y}^6, \psi_{x,y,y}^9, \dots), \\ \dots, \\ [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots), \\ [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^4, \psi_{x,y,y}^6, \dots), \\ [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y,y}^3, \psi_{x,y,y}^6, \psi_{x,y,y}^9, \dots), \\ \dots) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому напомним ее на уровне членов:

$$\psi_x^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \psi_{x,y,y}^i, \psi_{x,y,y}^{2i}, \psi_{x,y,y}^{3i}, \dots)$$

$$\psi_{x,y,y}^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \psi_{x,y,y}^i, \psi_{x,y,y}^{2i}, \psi_{x,y,y}^{3i}, \dots)$$

Биструктуры подставляются вместо бицветов, моноструктуры, вместо моноцветов. В остальном рассуждение дословно повторяет случай обычных

species.

Замечание 12. Если сделать подстановку

$$\psi_x^1 = t, \psi_x^k = 0, k > 1$$

$$\psi_{x,y}^1 = s, \psi_{x,y}^k = 0, k > 1$$

То полученная формула показывает, что 1.4 справедливо для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур (то есть производящая функция от двух переменных [TODO: А что такое 1.4 в этом случае?]). А можно сделать подстановку $s := t$, которая даст выполнение формулы 1.4 для экспоненциальной функции просто labeled-структур [TODO: А это разве что-то новое?].

2.7.1. Примеры цикленного индекса композиции

Пример 28. Посчитаем $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})(\circ \circ)$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \circ) = \psi_x^1 \circ \psi_{x,y}^1 = \psi_{x,y}^1 = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ \circ) = \psi_y^1 \circ 0 = 0 = \mathcal{Z}^{(2)}(\circ)$$

Пример 29. Да и вообще, справедливо

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \circ A) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ \circ A) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

А так же

$$\mathcal{Z}^{(1)}(A \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(A \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

Это дает некоторое понимание композиции. Так $A \circ \circ = \circ \circ A = A$. То есть \circ является нейтральным элементом в моноиде h-species по композиции. Это несколько контр-интуитивно, поскольку в обычных species нейтральным элементом является одноточечное множество. А его образом при вложении species в h-species является \circ . [TODO А не значит ли это что просто можно по другому вложить?]

Пример 30. Интересно посмотреть на композицию с \circledast

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square \circ \circledast) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1))^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^2 + \psi_x^2)) = \frac{1}{8}((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1 \psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) \quad (2.7)$$

Откуда можно сделать предположение, что $\square \circ \circledast = \square$. То есть подстановка \circledast — это «стирание различий между противоположными гранями».

Пример 31. Посчитаем для структуры V «вершина куба».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](V) = e^{\psi_{x,y,y}^1 + \frac{\psi_{x,y,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y,y}^3}{3!} + \dots}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(V) = e^{(\psi_x^1 + \frac{\psi_x^2}{2!} + \frac{\psi_x^3}{3!} + \dots) + (\psi_y^2 + \frac{\psi_y^4}{2!} + \frac{\psi_y^6}{3!} + \dots)}$$

Для структуры H «куб».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](H) = \mathcal{Z}^{(1)}(H) = e^{\psi_{x,y}^1 + \frac{\psi_{x,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y}^3}{3!} + \dots}$$

Нетрудно убедиться что $\mathcal{Z}^{(i)}(V \circ \circledast) = \mathcal{Z}^{(i)}(H)$.

2.8. Цикленный индекс species, вложенных в h-species

Утверждение 13. Пусть G — обычный species, вложенный в h-species. \mathcal{Z}_G — его цикленный индекс.

$$(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots) = (\mathcal{Z}_G(\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots), 0)$$

2.9. Применение цикленного индекса к решению задач о раскрасках

Задача 2. Посчитать количество способов покрасить n -мерный куб в k цветов с точностью до изометрий. Иными словами, посчитать количество орбит при действии B_n на множестве всевозможно раскрашенных кубов. <http://math.stackexchange.com/questions/5697/coloring-the-faces-of-a-hypercube>.

Решение. В нашей нотации это вопрос о количестве раскрасок пар граней в k моноцветов и $\frac{k(k-1)}{2}$ бицветов. Поскольку любая раскраска даст нам моноструктуру, то производящая функция для количества раскрасок от размерности, будет равна $\mathcal{Z}_{\mathbb{H}}^{(1)}(kt, kt^2, kt^3, \dots, k^2t, k^2t^2, k^2t^3, \dots) = \exp(kt + kt^2 + kt^3 + \dots + \frac{k(k-1)}{2}t + \frac{k(k-1)}{2}t^2 + \frac{k(k-1)}{2}t^3 + \dots) = \exp(\frac{k(k+1)}{2}t + \frac{k(k+1)}{2}t^2 + \frac{k(k+1)}{2}t^3 + \dots) = (\exp(\log(\frac{1}{1-t})))^{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{1}{1-t}^{\frac{k(k+1)}{2}} \quad \square$

Глава III. Заключение?

Список литературы

1. André Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. Math 42 (1981), 1–82.
2. André Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces des structures*, in Combinatoire Énumérative, Lecture Notes in Mathematics 1234, Springer, Berlin, (1986), pp. 126–159
3. F. Bergeron, Gilbert Labelle, Pierre LeRoux *Combinatorial Species and Tree-Like Structures*, Cambridge University Press, (1998)
4. N. Bergeron; P. Choquette. *Hyperoctahedral species* Sémin. Lothar. Combin. 61A (2009/10), available at <http://arxiv.org/abs/0810.4089>
5. Heteyi, Gábor; Labelle, Gilbert; Leroux, Pierre *Cubical species and nonassociative algebras* Adv. in Appl. Math. (1998), no. 3
6. I. G. Macdonald. *Polynomial functors and wreath products*, J. Pure Appl. Algebra, 18(2):173–204, 1980.
7. I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995.