

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Д.В. БУША»

Арбузолитейный факультет

Специальность «Фундаментальный исламизм и физическая софистика»

Кафедра общей демократии

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ АРХИТЕКТУРЫ РАЗРУШЕННЫХ  
ГОРОДОВ ПО МНОГОБАХЧЕВЫМ ДЫННЫМ ПОЛЯМ  
МЕТОДОМ ВСЕОБЩЕГО ГОЛОСОВАНИЯ**

*«К защите допущен»:*

Зав. кафедрой общей демократии,  
профессор, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Иванов И.И.

Научный руководитель,  
профессор, в.н.с. ЁКЛ ЭМЭН,  
д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Петров П.П.

Рецензент,  
зав. лаб. ЖЗ ИКЛ,  
д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Сидоров С.С.

Консультант по технике  
безопасности, ассистент  
каф. софистики

\_\_\_\_\_ Рейсфейдер Р.Р.

Дипломник

\_\_\_\_\_ Ватманн В.В.

г. Анкара, 2009

## Содержание

Глава I. Введение . . . . .	3
Глава II. Основные определения . . . . .	4
Глава III. Формулы . . . . .	4
3.1. Аналитический функтор для $h$ -species . . . . .	4
3.2. Декатегорификация аналитического функтора: Фробениусова характеристика / Цикленный индекс . . . . .	5
3.3. Сумма и произведение цикленных индексов . . . . .	8
3.4. Произведение . . . . .	8
3.5. Цикленный индекс композиции . . . . .	9

## Глава I. Введение

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развитие идеи комбинаторных типов (species). Мы будем обозначать их h-species для краткости. TODO:добавить введение (видимо взять часть из Bergeron)

План: Изложить теорию для species, параллельно строить ее для h-species  
 species — сложение умножение — аналитический функтор — композиция аналитических функторов — композиция species — декатегорификация аналитического функтора — примеры

## Глава II. Основные определения

species HSet h-species аналитический функтор

## Глава III. Формулы

### 3.1. Аналитический функтор для h-species

Аналитический функтор  $\mathcal{F}$  соответствующий species  $F$  является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией (TODO: дописать и возможно добавить определение Дурова). Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора  $F$  относительно  $i$ .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & Set \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ Set & & \end{array}$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, имеется естественное преобразование  $\kappa F \rightarrow i \circ \mathcal{F}$ , обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора  $M: Set \rightarrow Set$  и морфизма функторов  $\eta: F \rightarrow i \circ M$  этот морфизм пропускается через  $\mathcal{F}$  при помощи  $\kappa$ .

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \\ & \searrow \alpha & \downarrow \text{---} \\ & & M \end{array}$$

Явная формула для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F} = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \quad (3.1)$$

У аналитического функтора для типа структуры  $F$  имеется прозрачный комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество  $A$  как набор цветов, то значение аналитического функтора  $\mathcal{F}(A)$  трактуется как множество

структур типа  $F$  раскрашенных в цвета из  $A$ .

Хочется построить аналог аналитического функтора для  $h$ -species

$$\begin{array}{ccc} HB & \xrightarrow{F} & HSet \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ HSet & & \end{array}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \quad (3.2)$$

Где  $A^{\bar{n}}$  задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверук универсальности картинки

## 3.2. Декатегорификация аналитического функтора: Фробениусова характеристика / Цикленный индекс

### 3.2.1. Случай обычных species

Напомним ситуацию с обычными species. Процедура декатегорификации не имеет строго математического смысла, так же как и процедура квантования. Сейчас мы предложим процедуру, которая, стартуя с обычных species, на выходе дает классический цикленный индекс/фробениусову характеристику. Затем мы попытаемся аналогические действия провести и в гипероктаэдральном случае. Декатегорификацией моноидальной категории  $\mathbb{B}$  является моноид классов изоморфизма объектов категории  $\mathbb{B}$ , то есть моноид натуральных чисел по сложению. Декатегорификацией  $\hat{\mathbb{B}}$  естественным образом оказывается моноидная алгебра с коэффициентами из  $\mathbb{Z}$  для моноида  $\mathbb{N}$ , то есть кольцо многочленов  $Z[X]$ . (Правда это не то, что мы хотели. Чтобы получить цикленный индекс надо декатегорифицировать саму операцию подстановки и аналитический функтор).

Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием  $S_n$  имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэффициенте при мономе, отвечающем весу. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное

число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки  $\sigma$  нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как не раскрашенная структура, а во-вторых раскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например раскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответствует моном  $x_1^2 x_2$ . Тогда первое условие дает нам сомножитель  $\chi(\sigma)$ , где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называется фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$Z_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \quad (3.3)$$

Где  $\chi$  — характер (перестановочного) представления заданного  $F$ ,  $\sigma$  — перестановка цикленного типа  $\lambda$ ,  $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots$ ,  $z_\lambda$  — индекс класса сопряженности  $\sigma$ . Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это  $x_1, x_2, x_3, \dots$

### 3.2.2. Случай h-species

Попробуем построить аналогичную конструкцию для h-species. Прежде всего отметим, что раскраска, элемент  $A^{\bar{n}}$ , это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы  $n$  и  $-n$  должны отображаться либо в один и тот же элемент  $A$  (который инволюцией переводиться в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по-прежнему определяется длиной орбиты инволюции  $A$ , уже после факторизации по  $B_n$ . То есть кроме действия  $B_n$  есть еще внешняя инволюция — действие  $Z_2$ . Будем называть их *моноструктурами* и *биструктурами*.

Цикленный индекс, считающий только моноструктуры будем обозначать

$\mathcal{Z}^{(1)}$ , биструктуры —  $\mathcal{Z}^{(2)}$ . Количество орбит под действием  $H_n \times Z_2$  соответствует  $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$ , а под действием только  $H_n$  соответствует  $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$ . Поскольку каждая биструктура будет посчитана два раза.

В качестве  $H$ -множества цветов возьмем счетное множество моноцветов  $x_1, x_2, x_3, \dots$  объединенное с счетным множеством бицветов  $y_1, y_2, y_3, \dots$ .

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую раскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляется в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе  $H_n$  бывают двух типов: длинные — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и короткие — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество неподвижных точек для  $H_n$ . Пусть  $\lambda^1$  — цикленный тип коротких перестановок,  $\lambda^2$  — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл соответствует моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет.

Это можно выразить такой формулой:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \\ \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь нижний индекс  $\psi$  означает переменные по которым берется степенная сумма. Например  $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$ . При этом коэффициент 2 у  $y_i^2$  отражает тот факт, что можно раскрасить  $k$  пар граней в бицвет, так чтобы раскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество неподвижных точек для  $H_n \times Z_2$ . Разобьем сумму на две части —  $(h, \bar{0})$  и  $(h, \bar{1})$ . Для первой формула будет аналогична 3.4, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коэффициент  $\frac{1}{2}$ .

Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим цикл (пару циклов в него). Тогда добавляется смена грани

на каждом шаге, а значит для циклов нечетной длины сменится свойство короткий–длинный. Итоговая формула такая

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Где  $\lambda_o$  — циклы нечетной длины,  $\lambda_e$  — циклы четной длины.

### 3.3. Сумма и произведение цикленных индексов

#### 3.3.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответствует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}_F^{(1)}(A + B) = \mathcal{Z}_F^{(1)}(A) + \mathcal{Z}_F^{(1)}(B)$$

$$\mathcal{Z}_F^{(2)}(A + B) = \mathcal{Z}_F^{(2)}(A) + \mathcal{Z}_F^{(2)}(B)$$

#### 3.4. Произведение

Для произведения уже не совсем так. Утверждается, что моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры. То есть

$$\mathcal{Z}_F^{(1)}(A * B) = \mathcal{Z}_F^{(1)}(A) * \mathcal{Z}_F^{(1)}(B)$$

$$\mathcal{Z}_F^{(2)}(A * B) = \mathcal{Z}_F^{(1)}(A) * \mathcal{Z}_F^{(2)}(B) + \mathcal{Z}_F^{(2)}(A) * \mathcal{Z}_F^{(1)}(B) + 2(\mathcal{Z}_F^{(2)}(A) * \mathcal{Z}_F^{(2)}(B))$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})(A * B) = (\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})(A) * (\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})(B)$$



Что логично, поскольку  $(\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})$  — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

### 3.5. Цикленный индекс композиции

#### 3.5.1. Случай обычных species

Аналитический функтор позволяет дать определение композиционного произведения двух структур. Рассмотрим два species  $F$  и  $G$ . По ним можно построить аналитические функторы  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$ . Композиция этих функторов снова будет аналитическим функтором  $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ . Доказательство его аналитичности можно найти в [TODO: где или взять доказательство Дурова]. Species который соответствует цикленному индексу  $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  и будет называться  $F \circ G$ . У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры  $F$  раздуваем(красим) в структуру типа  $G$ . Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановке. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов  $A$  рассмотрим счетный набор цветов  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций  $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots) \end{aligned} \quad (3.6)$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру  $F$  это структуры типа  $G$ . То есть  $\mathcal{Z}_{F \circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$ , где  $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$ , где  $g_i$  — перечисление всех структур типа  $G$ . Нужно раскрыть переменные  $g_i$  — написать их относительно начальных цветов. Формулу  $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$  легко понять в переменных  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Мы должны покрасить  $i$  кусков в одну и ту же  $G$ -структуру. Значит каждый цвет  $x_j$  заменяется на  $x_j^i$ .

Формулу 3.6 можно специализировать для подсчета labeled-структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответствующие мономы (в базисе  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ) возникают только при раскрытии мономов вида  $c(\psi^1)^k$  и коэффициент в них равен  $ck!$  — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приво-

дит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой  $\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$ . Формула 3.6 примет вид  $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$ . А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \quad (3.7)$$

А поскольку labeled структур ровно в  $k!$  раз больше, чем unlabeled, то равенство 3.7 справедливо для обыкновенных производящих функций unlabeled структур.

### 3.5.2. Случай h-species [TODO: out of date]

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. Прежде всего отметим, что инволюция на множестве цветов делит их на моноцвета  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  и бицвета  $(y_1, y_2, y_3, \dots)$ . Однако, формула ?? подсказывает что в качестве базиса можно брать не  $\psi_x^i, \psi_y^j$  а  $\psi_x^i, \psi_{x,y}^j$ . Впрочем это тривиальная замена переменных, поскольку  $\psi_{x,y}^j = \psi_x^j + \psi_y^j$ . Итак мы хотя понять чему равняется

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots)$$

Предположение[TODO: заменить на утверждение] такое:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots), \\ \mathcal{Z}_G(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots), \\ \mathcal{Z}_G(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots), \\ \dots, \\ \mathcal{Z}_G(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots), \\ \mathcal{Z}_G(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^4, \psi_{x,y}^6, \dots), \\ \mathcal{Z}_G(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y}^3, \psi_{x,y}^6, \psi_{x,y}^9, \dots), \\ \dots) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому давайте напомним ее на уровне членов:

$$\psi_x^i \circ Z_G = Z_G(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots)$$

Нужно понять в каком случае раскрашенная структура является биструктурой, а в каком моноструктурой. Утверждается, что структура будет бицветом, если при ее раскраске использовался хотя бы один бицвет [TODO б) она не переводиться инволюцией в себя (как нераскрашенная структура) — но у нас ведь все склеено по орбитам, значит это будет та же самая структура]. Значит цикленный индекс отвечающий моноцветам получается, после обнуления  $y_i$ .

$$\psi_{x,y}^i \circ Z_G = Z_G(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \psi_{x,y}^i, \psi_{x,y}^{2i}, \psi_{x,y}^{3i}, \dots)$$

Можно сказать что цикленный индекс для бицветных структур — это разность полного цикленного индекса и моноцветных. Но, поскольку в  $\psi_{x,y}^i$  входит сумма бицветного и моноцветного индексов, то как раз и получается, что нужно подставлять полный цикленный индекс.

Давайте попробуем оставить только мономы отвечающие bilabeled-структурам. Это значит занулить все  $x_i$  и сделать подстановку  $\psi_y^1 = t, \psi_y^2 = 0, \psi_y^3 = 0$ . Получившаяся формула показывает, что 3.7 справедливо для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур со всеми вытекающими последствиями.