Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Иракский государственный университет им. Д.В. Буша»

Арбузолитейный факультет

Специальность «Фундаментальный исламизм и физическая софистика»

Кафедра общей демократии

Дипломная работа

Восстановление архитектуры разрушенных городов по многобахчевым дынным полям методом всеобщего голосования

«К защите допущен»:

Зав. кафедрой общей демократии, профессор, д.ф.-м.н.	______________	Иванов И.И.
Научный руководитель, профессор, в.н.с. ЁКЛ ЭМЭН, д.ф.-м.н.	______________	Петров П.П.
Рецензент, зав. лаб. ЖЗ ИКЛ, д.ф.-м.н.	______________	Сидоров С.С.
Консультант по технике безопасности, ассистент каф. софистики	______________	Рейсфейдер Р.Р.
Дипломник	______________	Ватманн В.В.

г. Анкара, 2009

Содержание

Глава I. Введение

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развите идеи комбинаторных типов (species). Мы будем обозначать их h-species для краткости. TODO:добавить введение (видимо взять часть из Bergeron)

План: Изложить теорию для species, параллельно строить ее для h-species

species — сложение умножение — аналитический функтор — композиция аналитических функторов — композиция species — декатегорификация аналитического функтора — примеры

Глава II. Основные определения

species HSet h-species аналитический функтор

Глава III. Формулы

3.1. Аналитический функтор для h-species

Аналитический функтор $\mathcal{F}$ соответствующий species F является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией (TODO: дописать и возможно добавить определение Дурова). Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & Set \\ Set \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, имеется естественное преобразование $\kappa F \to i \circ \mathcal{F}$, обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора $M\colon Set \to Set$ и морфизма функторов $\eta\colon F \to i \circ M$ этот морфизм пропускаеться через $\mathcal{F}$ при помощи κ.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\ & M \end{tikzcd}$$

Явная формула для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F} = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \tag{3.1}$$

У аналитического функтора для типа структуры F имеется прозрачный комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество A как набор цветов, то значение аналитического функтора $\mathcal{F}(A)$ трактуется как множество структур типа F раскрашенных в цвета из A.

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species

$$\begin{tikzcd}
HB \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & HSet \\
HSet \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}} / B_n \tag{3.2}$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверук универсальности картинки

3.2. Декатегорификация аналитического функтора: Фробениусова характеристика / Цикленный индекс

3.2.1. Случай обычных species

Напомним ситуацию с обычными species. Процедура декатегорификации не имеет строго математического смысла, так же как и процедура квантования. Сейчас мы предложим процедуру, которая, стартуя с обычных species, на выходе дает классический цикленный инлдекс/фробениусову характеристику. Затем мы попытаемся аналогические действия провести и в гипероктаэдральном случае. Декатегорификацией моноидальной категории $\mathbb{B}$ является моноид классов изоморфизма объектов категории $\mathbb{B}$, то есть моноид натуральных чисел по сложению. Декатегорификкацией $\widehat{\mathbb{B}}$ естественным образом оказывается моноидная алгебра с коэффициентами из $\mathbb{Z}$ для моноида $\mathbb{N}$, то есть кольцо многочленов $Z[X]$. (Правда это не то, что мы хотели. Чтобы получить цикленный индекс надо декатегорифицировать саму операцию подстановки и аналитический функтор).

Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием S_n имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэфициенте при мономе, отвечающем весу. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как не раскрашенная структура, а во-вторых расскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например расскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответсвует моном $x_1^2 x_2$. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$, где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называеться фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$\mathcal{Z}_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \tag{3.3}$$

Где χ — характер (перестановочного) представления заданного F, σ — перестановка цикленного типа λ, $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots$, z_λ — индекс класса сопряженности σ. Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это $x_1, x_2, x_3, \dots$

3.2.2. Случай h-species

Попробуем построить аналогичную конструкцию для h-species. Прежде всего отметим, что раскраска, элемент $A^{\bar{n}}$, это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы n и $-n$ должны отображаться либо в один и тот же элемент A (который инволюцией переводиться в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

Покрашенные структуры сами по себе также будут являться либо моноцветом, либо бицветом. Это по–прежнему определяется длинной орбиты инволюции A, уже после факторизации по B_n. То есть кроме действия B_n есть еще внешняя инволюция — действие Z_2.

Цикленный индекс, считающий только моноцветные структуры будем обозначать $\mathcal{Z}^{(1)}$, бицветные — $\mathcal{Z}^{(2)}$. Количество орбит под действием $H_n \times Z_2$

соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$, а под действием только H_n соответствует $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$. Поскольку каждый бицвет будет посчитан два раза.

В качестве Н-множества цветов возьмем счетное множество моноцветов $x_1, x_2, x_3, \dots$ объединенное с счетным множеством бицветов $y_1, y_2, y_3, \dots$.

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую расскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляеться в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе H_n бывают двух типов: длинные — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и короткие — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество количество неподвижных точек для H_n. Пусть λ^1 — цикленный тип коротких перестановок, λ^2 — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл соответсвует моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет.

Это можно выразить такой формулой:

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} \tag{3.4}$$

Здесь нижний индекс ψ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\psi^2_{x,y,y} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$. При этом коофициент 2 у y_i^2 отражает тот факт, что можно раскрасить k пар граней в бицвет, так чтобы расскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество количество неподвижных точек для $H_n \times Z_2$. Разобъем сумму на две части — $(h, \bar{0})$ и $(h, \bar{1})$. Для первой формула будет аналогична 3.4, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коофициент $\frac{1}{2}$.

Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим цикл (пару циклов в него). Тогда добавляется смена грани на каждом шаге, а значит для циклов нечетной длинны сменится свойство короткий–длинный. Итоговая формула такая

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1+\lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} + \\ \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1+\lambda_o^2+\lambda_e^1+\lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1+\lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2+\lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \tag{3.5}$$

Где λ_o — циклы нечетной длинны, λ_e — циклы четной длинны.

3.3. Цикленный индекс композиции

3.3.1. Случай обычных species

Аналитический функтор позволяет дать определние композиционного произведения двух структур. Рассмотрим два species F и G. По ним можно построить аналитические функторы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Композиция этих функторов снова будет анлитическим функтором $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$. Доказательство его аналитичности можно найти в [TODO: где или взять доказательство Дурова]. Species который соответсвует цикленному индексу $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ и будет называться $F \circ G$. У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры F раздуваем(красим) в структуру типа G. Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановке. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов A рассмотрим счетный набор цветов $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \ldots$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \ldots) = \\ \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \ldots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \ldots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \ldots), \ldots) \tag{3.6}$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G. То есть $\mathcal{Z}_{F \circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \ldots)$, где $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \ldots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G. Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \ldots)$ легко понять в переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G–структуру. Значит каждый цвет x_j заменяется на x_j^i.

Формулу 3.6 можно специализировать для подсчета labeled–структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответсвующие мономы (в базисе $x_1, x_2, x_3, \ldots$) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\psi^1)^k$ и коэффициент в них равен $ck!$ — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой $\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$. Формула 3.6 примет вид $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \ldots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \ldots), 0, 0, \ldots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \tag{3.7}$$

А поскольку labeled структур ровно в $k!$ раз больше, чем unlabeled, то равенство 3.7 справедливо для обыкновенных производящих функций unlabeled структур.

3.3.2. Случай h-species

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. Прежде всего отметим, что инволюция на множестве цветов делит их на моноцвета $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ и бицвета $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$. Однако, формула **??** подсказывает что в качестве базиса можно брать не ψ_x^i, ψ_y^j а $\psi_x^i, \psi_{x,y}^j$. Впрочем это тривиальная замена переменных, поскольку $\psi_{x,y}^j = \psi_x^j + \psi_y^j$. Итак мы хоти понять чему равняется

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{F \circ G}(&\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \ldots, \\ &\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \ldots)\end{aligned}$$

Предположение[TODO: заменить на утверждение] такое:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{F\circ G}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots) = \\
\mathcal{Z}_F(&\mathcal{Z}_G(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots), \\
&\mathcal{Z}_G(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots), \\
&\mathcal{Z}_G(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots), \\
&\dots, \\
&\mathcal{Z}_G(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots), \\
&\mathcal{Z}_G(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^4, \psi_{x,y}^6, \dots), \\
&\mathcal{Z}_G(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y}^3, \psi_{x,y}^6, \psi_{x,y}^9, \dots), \\
&\dots)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому давайте напишем ее на уровне членов:

$$\begin{aligned}
\psi_x^i \circ \mathcal{Z}_G = Z_G(&\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \\
&\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots)
\end{aligned}$$

Нужно понять в каком случае расскрашенная структура являеться бицветом, а в каком моноцветом. Утверждается, что структура будет бицветом, если при ее расскраске использовался хотя бы один бицвет [TODO б) она не переводиться инволюцией в себя (как нерасскрашенная структура) — но у нас ведь все склеено по орбитам, значит это будет та же самая структура]. Значит цикленный индекс отвечающий моноцветам получается, после обнуления y_i.

$$\begin{aligned}
\psi_{x,y,y}^i \circ \mathcal{Z}_G = Z_G(&\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \\
&\psi_{x,y}^i, \psi_{x,y}^{2i}, \psi_{x,y}^{3i}, \dots)
\end{aligned}$$

Можно сказать что цикленный индекс для бицветных структур — это разность полного цикленного индекса и моноцветных. Но, поскольку в $\psi_{x,y}^i$ входит сумма бицветного и моноцветного индексов, то как раз и получается, что нужно подставлять полный цикленный индекс.

Давайте попробуем оставить только мономы отвечающие bilabeled-структурам. Это значит занулить все x_i и сделать подстановку $\psi_y^1 = t, \psi_y^2 =$

$0, \psi_y^3 = 0$. Получившаяся формула показывает, что 3.7 справедливо для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур со всеми вытекающими последствиями.