

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математико–механический факультет

Специальность «математика»

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

студента 511 группы  
Воробьева Сергея Эдуардовича

**ГИПЕРОКТАЭДРАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ТИПЫ**

*«К защите допущен»:*

Зав. кафедрой высшей алгебры  
и теории чисел,  
профессор, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Яковлев А.В.

Научный руководитель,  
доцент, к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Пименов К.И.

Рецензент,  
профессор, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Яковлев А.В.

г. Санкт-Петербург, 2012

## Содержание

<b>Глава I. Введение . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1. Комбинаторные виды . . . . .	3
1.2. Композиция комбинаторных видов . . . . .	5
<b>Глава II. Гипероктаэдральные комбинаторные виды . . . . .</b>	<b>10</b>
2.1. Определение . . . . .	10
2.2. Вложение species в h-species . . . . .	10
2.3. Сложение и умножение h-species . . . . .	11
2.4. Аналитический функтор для h-species . . . . .	11
2.5. Декатегорификация аналитического функтора . . . . .	12
2.6. Сумма и произведение цикленных индексов . . . . .	16
2.7. Цикленный индекс композиции . . . . .	17
2.8. Цикленный индекс species, вложенных в h-species . . . . .	20
2.9. Применение цикленного индекса к решению задач о раскрасках . . . . .	20
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>21</b>

# Глава I. Введение

## 1.1. Комбинаторные виды

Комбинаторные виды (*species*) были введены Жуаялем в 1980 году [1]. Они дают универсальный аппарат изучения помеченных (labeled) и непомеченных (unlabeled) структур, и являются развитием идеи производящих функций. О комбинаторных видах можно говорить на нескольких языках: категорном, комбинаторном и на языке теории представлений. Последний наиболее часто встречается в литературе, хотя автору он кажется наименее выразительным. Во введении изложено начало теории комбинаторных видов. Основным источником информации про комбинаторные виды является [3].

### 1.1.1. Определение

Рассмотрим категорию  $\mathcal{B}$  — группоид конечных множеств. Она эквивалентна группоиду, объекты которого пронумерованы неотрицательными целыми числами и  $\text{Hom}(n, n) = S_n$ .

**Определение 1.** Комбинаторным видом (species) называется функтор

$$F : \mathcal{B} \rightarrow \text{Set}$$

Задать такой функтор, это то же самое что для каждого  $n \in \mathbb{N}$  задать множество  $F[n]$  с действием группы  $S_n$ . В комбинаторике такая ситуация возникает, когда мы рассматриваем явно определенные каким-либо образом структуры на конечных множествах. Например: линейные порядки, циклические порядки, деревья. Действие  $S_n$  естественно возникает из перестановок исходных точек.

**Пример 1.** Вид  $\mathbf{E}$  — вид множество (без дополнительной структуры). Он сопоставляет набору точек одно множество, состоящее из этих точек,  $\mathbf{E}[n] = \{*\}$ . Все элементы  $S_n$  переходят в тождественное отображение.

**Пример 2.**  $\mathbf{C}$  — циклический порядок. Сопоставляет набору из  $n$  точек  $(n-1)!$  возможных циклических порядков на них.

**Пример 3.** Линейный порядок  $\mathbf{L}$  сопоставляет  $n!$  линейных порядков.

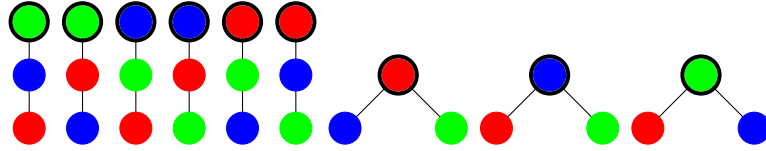


Рис. 1.1. корневые деревья с 3 вершинами

**Пример 4.**  $\mathbf{E}_e$  — сужение  $\mathbf{E}$  на четные множества. То есть для четных  $n$ , совпадает с  $\mathbf{E}$ , а для нечетных  $\emptyset$ . Аналогично  $\mathbf{E}_o$  — сужение на нечетные.

**Пример 5.** На картинке 1.1 изображен вид «корневые деревья с 3 вершинами» (без какого-либо порядка на потомках).

Можно рассмотреть функтор  $I : Set \rightarrow Vect$ , который сопоставляет множеству векторное пространство, базис которого это множество. Тогда  $F \circ I : \mathcal{B} \rightarrow Vect$  — сопоставляет каждому  $n$  перестановочное представление группы  $S_n$ . При таком подходе, значение характера этого представления  $\chi(\sigma)$ , это количество структур, неподвижных относительно  $\sigma \in S_n$ .

### 1.1.2. Сложение комбинаторных видов

Сумму двух species  $F$  и  $G$  определим как поточечную сумму функторов. На комбинаторном языке это будет означать «либо структура типа  $F$ , либо структура типа  $G$ ».  $(F + G)[n] = F[n] \amalg G[n]$  с покомпонентным действием  $S_n$ .

**Пример 6.**  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_e + \mathbb{E}_o$

**Пример 7.** Любой вид  $F$  можно разложить в такую сумму  $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$ , где  $F_i$  — сужение  $F$  на  $i \in \mathcal{B}$ . Значение  $F_i$  на  $j \neq i$  равно  $\emptyset$ .

### 1.1.3. Произведение комбинаторных видов

Определим произведение по Коши комбинаторных видов. По определению задать на конечном множестве структуру типа  $F \cdot G$  означает разбить множество точек на две части (всевозможные) и на первом ввести структуру типа  $F$ , на втором — типа  $G$ .

$$(F \cdot G)[X] = \coprod_{X_1 \amalg X_2 = X} F[X_1] \times G[X_2]$$

С категорной точки зрения произведение по Коши возникает из тензорного произведения на категории  $\mathcal{B}$ , которое на объектах задается как  $n \otimes m = (n + m)$ , на морфизмах при помощи вложения  $S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$  (все такие вложения сопряжены). Известна конструкция свертки функторов из  $\mathcal{C}$  в  $Set$ , где  $\mathcal{C}$  — моноидальная категория с копроизведениями [Day convolution [8]].

На языке теории представлений  $F[n + m]$  как множество с действием группы  $S_{n+m}$  равно индуцированному представлению  $Ind \uparrow_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} F[n] \times F[m]$ .

**Пример 8.**  $\mathbf{E} \times \mathbf{E}_1$  — множество с выделенной точкой.

**Пример 9.**  $\mathbf{C}^2$  — (упорядоченная) пара циклов.

## 1.2. Композиция комбинаторных видов

Кроме сложения и умножения на species можно ввести операцию композиции. По определению задать на конечном множестве структуру типа  $F \circ G$  означает разбить множество точек на части (всевозможные), на частях (как новых точках) ввести структуру типа  $F$ , а на каждой части — типа  $G$ . Иначе говоря, «раздуть» каждую точку структуры типа  $F$  в структуру типа  $G$ .

$$(F \circ G)[X] = \coprod_{\coprod_i X_i = X} F[\{X_i\}_i] \times \left( \prod_i G[X_i] \right)$$

**Замечание 2.** Определение species не предполагает конечности  $F[n]$ , однако цикленный индекс (см. раздел 1.2.4) можно писать только для таких видов. Класс таких species не замкнут относительно композиции. Поскольку при подстановке species  $F$ , для которого  $F[0] \neq \emptyset$  можно выделить сколько угодно пустых частей. Поэтому в дальнейшем в записи  $F \circ G$ , мы будем неявно предполагать что внутренний операнд «сужен» на  $\mathbb{N}_+$ .

**Пример 10.**  $\mathbf{E}_1 \circ F = F$ ,  $F \circ \mathbf{E}_1 = F$ .  $\mathbf{E}_1$  является нейтральным элементом в моноиде species по композиции.

**Пример 11.**  $\mathbf{E}_2 \circ \mathbf{C}$  — (неупорядоченная) пара циклов.

**Пример 12.**  $\mathbf{E} \circ \mathbf{E}$  — структура разбиения множества.

**Пример 13.**  $\mathbf{E} \circ \mathbf{C} = \mathbf{S}$  — структура перестановки. Буквально перестановка — это набор циклов.

Для того, чтобы ввести композицию на категорном языке нам понадобится дополнительная конструкция: аналитический функтор.

### 1.2.1. Аналитический функтор комбинаторных видов

Аналитический функтор (введен Жуаялем в [2])  $\mathcal{F}$  соответствует species  $F$ . Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией.

**Определение 3.** Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора  $F$  относительно  $i$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{F} & Set \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ Set & & \end{array}$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, существует естественное преобразование  $\kappa: F \rightarrow i \circ \mathcal{F}$ , обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора  $M: Set \rightarrow Set$  и морфизма функторов  $\eta: F \rightarrow i \circ M$  этот морфизм пропускается через  $\mathcal{F}$  при помощи  $\kappa$ .

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \\ & \searrow \alpha & \vdots \\ & & M \end{array}$$

Явная конструкция для аналитического функтора. Доказательство см. в [3].

$$\mathcal{F}(A) = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \quad (1.1)$$

**Замечание 4.** У аналитического функтора для типа структуры  $F$  имеется прозрачная комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество  $A$  как набор цветов, то значение аналитического функтора  $\mathcal{F}(A)$  трактуется как множество структур типа  $F$  раскрашенных в цвета из  $A$ .

### 1.2.2. Композиция аналитических функторов комбинаторных видов

**Теорема 5.** *Композиция аналитических функторов  $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  является аналитическим функтором для  $F \circ G$ .*

*Доказательство.* Набросок. Согласно конструкции  $\mathcal{F}(\mathcal{G}(A)) = \sum_k F[k] \times (\sum_m G[m] \times A^m / S_m)^k / S_k = \sum_n \sum_{k, m_1 + \dots + m_k = n} F[k] \times (\prod_i G[m_i]) \times A^n / S_n$ .

Строгое доказательство см. в <http://arxiv.org/pdf/math/9811127v1.pdf> (Lemma 2.5) [это еще и про цикленные индексы]  $\square$

### 1.2.3. Другой взгляд на композицию аналитических функторов

Дело в том, что композиция комбинаторных видов — это в некотором смысле частный случай аналитического функтора, только не со значениями в  $Set$ , а со значениями в  $Species = \hat{\mathcal{B}}$ .

А именно, для любой моноидальной категории  $\mathcal{C}$  со всевозможными копределами и объекта  $A$  из  $\mathcal{C}$ , функтор из  $\mathcal{B}$  в  $\mathcal{C}$ , который 1 отправляет в  $A$ , а  $n$  отправляет в  $A^{\otimes n}$  (тензорная степень), можно «продолжить по непрерывности» (видимо расширение Кана) до функтора из категории предпучков на  $\mathcal{B}$  со значениями в  $\mathcal{C}$  [9]. В этой работе Дурова этот функтор обозначает  $\Phi_A$ .

В случае когда  $\mathcal{C} = Set$ , получаем  $\Phi_A(F) = \mathcal{F}(A)$ . В случае, когда  $\mathcal{C} = Species$ , получаем  $\Phi_G(F) = F \circ G$ . То есть можно определить композицию, как функтор  $G \mapsto F \circ G$  при помощи  $\Phi_G$ . Надо только проверить функториальность по  $G$  (в обозначении  $\Phi_G$ , буква  $G$  обозначает постоянный параметр, а в аналитическом функторе — это переменный аргумент). При таком взгляде на подстановку теорема о композиции становится почти тавтологией.

### 1.2.4. Цикленный индекс

[TODO: perepisat Будем рассматривать только species, конечные в смысле замечания 2. Хотелось используя идею подсчета с весом, написать аналог производящей функции для покрашенных (в смысле замечания 4) структур. Для этого устроить из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию

таким образом чтобы орбита раскрашенной структуры под действием  $S_n$  имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэффициенте при мономе соответствующего веса. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Цвета это  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Например, раскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответствует моном  $x_1^2 x_2$ . Тогда первое условие дает нам сомножитель  $\chi(\sigma)$ , где характер это характер соответствующего перестановочного представления. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называется фробениусовой характеристикой или цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем. ]

Введем некоторые обозначения  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) \vdash n$  — разбиение.  $\sigma$  — перестановка цикленного типа  $\lambda$ .  $\chi$  — характер (перестановочного) представления заданного  $F$ .  $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots$

**Утверждение 6.**

$$\mathcal{Z}_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \quad (1.2)$$

Где  $z_\lambda$  — индекс класса сопряженности  $\sigma$ .

*Доказательство.* По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки  $\sigma$  нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как нераскрашенная структура, а во-вторых раскраска должна переходить в себя □

**Пример 14.**  $\mathcal{Z}_{\mathbb{E}} = e^{(\psi^1 + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} + \dots)}$ . Доказательство смотри в [3].

### 1.2.5. Плетизм цикленных индексов

**Теорема 7.** *Композиции аналитически функторов соответствует плетизм цикленных индексов.*

Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановки. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов  $A$  рассмотрим



счетный набор цветов  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций  $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \\ \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots) \end{aligned} \quad (1.3)$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру  $F$  это структуры типа  $G$ . То есть  $\mathcal{Z}_{F \circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$ , где  $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$ , где  $g_i$  — перечисление всех структур типа  $G$ . Нужно раскрыть переменные  $g_i$  — написать их относительно начальных цветов. Формулу  $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$  легко понять в переменных  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Мы должны покрасить  $i$  кусков в одну и ту же  $G$ -структуру. Значит каждый цвет  $x_j$  заменяется на  $x_j^i$ .

**Замечание 8.** Формулу 1.3 можно специализировать для подсчета labeled-структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответствующие мономы (в базисе  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ) возникают только при раскрытии мономов вида  $c(\psi^1)^k$  и коэффициент в них равен  $ck!$  — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой  $\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$ . Формула 1.3 примет вид  $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$ . А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \quad (1.4)$$

**Пример 15.** (Экспоненциальная) производящая функция для **E** это  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ . А производящая функция для непустых циклов **C** это  $-\log(1 - x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$ . А для **S** производящая функция это  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . И действительно  $e^{-\log(1-x)} = \frac{1}{1-x}$ .

## Глава II. Гипероктаэдральные комбинаторные виды

### 2.1. Определение

Рассмотрим категорию  $HSet$ . В ней объекты это множества, снабженные дополнительным действием — инволюцией. А стрелки, это морфизмы, сохраняющие инволюцию. Рассмотрим категорию  $H\mathcal{B}$  — подкатегорию конечных множеств из  $HSet$  с морфизмами только биекциями, и инволюциями без неподвижных точек. Функтор  $F : H\mathcal{B} \rightarrow HSet$  — гипероктаэдральный (или кубический) это комбинаторный вид. Мы будем так же для краткости употреблять термин  $h\text{-species}$ . Gruppoид  $H\mathcal{B}$  эквивалентен группоиду, объекты которого  $\bar{n} = \{-n, -n+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, n-1, n\}$ , инволюция - смена знака.  $\bar{n}$  мы интерпретируем как грани куба, на которых действует гипероктаэдральная группа  $B_n$  — группа движений  $n$ -мерного куба. Эта же группа действует на множестве  $F[\bar{n}]$ , которое мы интерпретируем как множество структур на множестве граней куба. Действие  $B_n$  возникает из перестановок граней.

**Пример 16.** Вид  $\mathbb{I}$  — структура куб. Он сопоставляет  $\bar{n}$  одно множество. Все элементы  $B_n$  переходят в тождественное отображение.

**Пример 17.**  $\circ$  — неразличимая пара граней ( $\mathbb{H}_1$ ).  $\bullet$  — различимая пара граней. Оба они принимают значение  $\emptyset$  на всем, кроме  $\bar{1}$ . Второе соответствует действию  $H_1$  на 2-х точечном множестве.

**Пример 18.** Аналогично  $\square$  — структура куб размерности 2 ( $\mathbb{H}_2$ ).  $\square$  — куб размерности 2 с различимыми противоположными гранями. Второе соответствует действию  $H_2$  на 4-х точечном множестве.

**Пример 19.** Структура  $\bullet \times \bullet$ . Это не то же самое что  $\square$ , поскольку это «упорядоченная пара  $\bullet$ ».

**Замечание 9.** При работе со species, мы имели мощную комбинаторную интуицию, которая мотивировала категорные конструкции. В случае  $h\text{-species}$  мы переносим категорные конструкции species на новый контекст и пытаемся дать комбинаторную интерпретацию получившимся результатам.

## 2.2. Вложение species в h-species

Обычные комбинаторные виды можно «вложить» в гипероктаэдральные. Иными словами можно каждый species рассмотреть как h-species. Для этого достаточно рассматривать структуру не на точках, а на парах (неразличимых) граней. Если  $F : \mathcal{B} \rightarrow Set$ , то  $\tilde{F} : H\mathcal{B} \rightarrow HSet$ , где  $\tilde{F}[\bar{n}] = F[n]$  как множество, а инволюция тождественна. [TODO]  $H\mathcal{B} \rightarrow B$

## 2.3. Сложение и умножение h-species

Сложение и умножение определяются полностью аналогично species. Они введены в работе [4].

## 2.4. Аналитический функтор для h-species

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species. Мы считаем, что правильная версия гипероктаэдрального аналитического функтора действует из  $HSet$  в  $HSet$ . По аналогии с обычным случаем строим  $\mathcal{F}$  как расширение Кана:

$$\begin{array}{ccc} H\mathcal{B} & \xrightarrow{F} & HSet \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ HSet & & \end{array}$$

Аргумент  $\mathcal{F}$  будем называть множеством цветов.

$$\mathcal{F}(A) = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}} / B_n \quad (2.1)$$

[TODO:Здесь нужно добавить ссылку на общую конструкцию]

$A^{\bar{n}}$  — это отображения(раскраска), сохраняющие инволюцию. По аналогии с обычным, случаем мы мыслим  $\mathcal{F}(A)$ , как множество  $F$ -структур, раскрашенных в цвета из  $A$ .

**Замечание 10.** В новой ситуации множество цветов  $A$  уже является не просто множеством, а множеством с инволюцией. Пара элементов  $(-i, i)$  отображается либо в один и тот же элемент  $(a, a)$  (который инволюцией переводится в себя), либо в пару элементов  $(b, \bar{b})$ , сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

На  $F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}$  действует группа  $B_n \times \mathbb{Z}_2$ , второй сомножитель соответствует инволюции на цветах. После факторизации по  $B_n$ , мы получаем  $HSet$ , множество с инволюцией.

## 2.5. Декатегорификация аналитического функтора

Можно действовать наивно: написать производящую функцию для числа раскрасок, по аналогии с классическим случаем. Такая формула (2.2) рассматривалась (в контексте теории представлений группы  $S_n \wr G$ ) в работе <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/download/v11i1r56/pdf> (см. также приложение В во втором английском издании книги Макдональда [7]). При таком подходе определяются операции сложения и умножения по Коши для цикленных индексов. Но попытки определить гипероктаэдральный плетизм оказываются безуспешны. Выяснилось, что правильный аналог цикленного индекса должен помнить информацию о следующем свойстве раскрашенной структуры.

Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бивцвет. Это по-прежнему определяется длиной орбиты инволюции на  $A$ , уже после факторизации по  $B_n$ . То есть кроме действия  $B_n$  есть еще внешняя инволюция — действие  $\mathbb{Z}_2$ . Будем разделять раскрашенные структуры на *моноструктуры* и *биструктуры*.

[TODO: (расписать слово считающий) Цикленный индекс, считающий только моноструктуры будем обозначать  $\mathcal{Z}^{(1)}$ , биструктуры —  $\mathcal{Z}^{(2)}$ . ]

**Замечание 11.** Таким образом, цикленный индекс для  $h$ -species представляет собой пару  $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})$ .

**Утверждение 12.** *Количество орбит под действием  $B_n \times \mathbb{Z}_2$  соответствует  $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$ , а под действием только  $B_n$  соответствует  $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$ .*

*Доказательство.* В первом случае каждая моноструктура и биструктура будет посчитана 1 раз. А во втором каждая биструктура будет посчитана два раза, т.к. действие инволюции «склеивающей» две части биструктуры не учтено. □

### 2.5.1. Подсчет цикленного индекса

В качестве  $H$ -множества цветов возьмем счетное множество моноцветов  $x_1, x_2, x_3, \dots$  объединенное с счетным множеством бивцветов  $y_1, y_2, y_3, \dots$ .

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую раскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляется в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе  $B_n$  бывают двух типов: *длинные* — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и *короткие* — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество неподвижных точек для  $B_n$ . Пусть  $\lambda^1$  — цикленный тип коротких перестановок,  $\lambda^2$  — цикленный тип длинных перестановок.

**Утверждение 13.** *Неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл покрашен в моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бивцвет.*

Под покрашенным циклом мы подразумеваем покраску всех его элементов в этот цвет (такая покрашенная структура будет неподвижна относительно действия этого элемента  $B_n$ ).

**Утверждение 14.** *Справедлива формула:*

$$\begin{aligned} Z_F^{(1)} + 2Z_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \\ \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь нижний индекс  $\psi$  означает переменные по которым берется степенная сумма. Например  $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$ . При этом коэффициент 2 у  $y_i^2$  отражает тот факт, что можно раскрасить  $k$  пар граней в бивцвет, так чтобы раскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество неподвижных точек для  $B_n \times Z_2$ . Разобьем сумму на две части —  $(h, \bar{0})$  и  $(h, \bar{1})$ . Для первой формула будет аналогична 2.2, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коэффициент  $\frac{1}{2}$ . Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие

циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим в него цикл (пару циклов, в случае короткого). Тогда реальный цикл от  $(h, \bar{1})$  будет получаться из циклов  $h$  добавлением «смены грани» на каждом шаге. Значит для циклов нечетной длины сменится свойство короткий–длинный.

**Пример 20.** Пусть  $h_e = \bullet \leftrightarrow \bullet$ . Тогда  $(h_e, \bar{1}) = \bullet \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \bullet$

**Пример 21.** Пусть  $h_o = \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$ . Тогда  $(h_o, \bar{1}) = \bullet \begin{array}{c} \nearrow \searrow \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \nwarrow \nearrow \end{array} \bullet$

**Утверждение 15.** Справедлива формула:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Где  $\lambda_o$  — циклы нечетной длины,  $\lambda_e$  — циклы четной длины.

Из формул 2.2, 2.3 легко получить

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} - \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

### 2.5.2. Примеры вычисления цикленного индекса

Посчитаем цикленные индексы для простых  $h$ -species. Здесь мы будем писать  $Z(A)$  вместо  $Z_A$ . Это не должно вызывать путаницу, поскольку вместо  $A$  будут использоваться схематические картинки. Их никак не перепутать с переменными, от которых считается цикленный индекс.

**Пример 22.**

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\circ) = \frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) = \psi_{x,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = \frac{1}{2}(\psi_x^1 + \psi_{x,y,y}^1) = \psi_{x,y}^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ) = 0$$

**Пример 23.**

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) = \frac{1}{2}(2\psi_{x,y,y}^1 + 0\psi_x^1) = \psi_{x,y,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) = \frac{1}{2}(2\psi_x^1 + 0\psi_{x,y,y}^1) = \psi_x^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\bullet) = \psi_y^1$$

**Пример 24.**

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}((\psi_{x,y,y}^1)^2 + (\psi_x^1)^2 + 2\psi_x^2 + 2(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Здесь коэффициенты — не характеры (характер при каждом слагаемом = 1).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1\psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)$$

Последнее следовало и из общих соображений: легко видеть что  $\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = 0$ .

**Пример 25.**

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_{x,y,y}^1)^2 + 0(\psi_x^1)^2 + 0\psi_x^2 + 0(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_x^1)^2 + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Откуда

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = \frac{1}{2}([\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) - \mathcal{Z}^{(1)}(\square)) = \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1\psi_x^1 + \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1)^2) = \psi_y^1\psi_x^1 + (\psi_y^1)^2$$

## 2.6. Сумма и произведение цикленных индексов

### 2.6.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответствует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} + \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(2)} + \mathcal{Z}_B^{(2)}$$

### 2.6.2. Произведение

Для произведения уже не совсем так.

**Утверждение 16.** *Моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры.*

То есть

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} &= \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(1)} \\ \mathcal{Z}_{A*B}^{(2)} &= \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(2)} + \mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(1)} + 2(\mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(2)})\end{aligned}$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)}) = (\mathcal{Z}_A^{(1)} + 2\mathcal{Z}_A^{(2)}) * (\mathcal{Z}_B^{(1)} + 2\mathcal{Z}_B^{(2)})$$

**Замечание 17.** Это логично, поскольку  $(\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})$  — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

### 2.6.3. Примеры цикленных индексов произведений

Посчитаем произведение уже известных h-структур и их цикленных индексов.

**Пример 26.** Структура  $\circ \times \circ$ .

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \times \circ) = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = (\psi_{x,y}^1)^2$$



**Пример 27.** Структура  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ .

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\mathfrak{g}) \times [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\mathfrak{g}) = (\psi_{x,y,y}^1)^2$$

Легко получить эту же формулу и прямым подсчетом по формуле 2.2, как  $\frac{1}{8}(8(\psi_{x,y,y}^1)^2)$ .

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) = \mathcal{Z}^{(1)}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\mathfrak{g}) = (\psi_x^1)^2$$

## 2.7. Цикленный индекс композиции

**Задача 1.** Как выразить

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(i)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \\ \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots)$$

[TODO: Dopisat etot razdel, поставить ссылку на основную теорему 18] Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для  $h$ -species, параллельно теории species. В качестве моноцветов возьмем  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ , бицветов —  $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ . Формулы 2.2 и 2.3 подсказывают, что на практике в качестве симметричного базиса можно брать не  $\{\psi_x^i, \psi_y^j\}$  а  $\{\psi_x^i, \psi_{x,y,y}^j\}$ . Или другую линейную комбинацию, например  $\{\psi_x^i, \psi_{x,y}^j\}$ .

Биструктуры подставляются вместо бицветов, моноструктуры, вместо моноцветов. В остальном рассуждение дословно повторяет случай обычных species.

**Теорема 18.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(i)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots) = \\
\mathcal{Z}_F^{(i)}(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_y^2, \psi_y^4, \psi_y^6, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_y^3, \psi_y^6, \psi_y^9, \dots), \\
\dots, \\
\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_y^2, \psi_y^4, \psi_y^6, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_y^3, \psi_y^6, \psi_y^9, \dots), \\
\dots)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому напомним ее на уровне членов:

$$\begin{aligned}
\psi_x^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \\
\psi_y^i, \psi_y^{2i}, \psi_y^{3i}, \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_y^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(2)}(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \\
\psi_y^i, \psi_y^{2i}, \psi_y^{3i}, \dots)
\end{aligned}$$

**Замечание 19.** Если сделать в 2.6 подстановку

$$\psi_x^1 = t, \psi_x^k = 0, k > 1$$

$$\psi_y^1 = s, \psi_y^k = 0, k > 1$$

То получится формула

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{F \circ G}^{(i)}(t, s) = \tilde{\mathcal{Z}}_F^{(i)}(\tilde{\mathcal{Z}}_G^{(1)}(t, s), \tilde{\mathcal{Z}}_G^{(2)}(t, s))$$

Таким образом аналог 1.4 справедлив для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур.

### 2.7.1. Примеры цикленного индекса композиции

**Пример 28.** Посчитаем  $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})(\circlearrowleft \circ \circlearrowright)$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circlearrowleft \circ \circlearrowright) = \psi_x^1 \circ \psi_{x,y}^1 = \psi_{x,y}^1 = \mathcal{Z}^{(1)}(\circlearrowright)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circlearrowleft \circ \circlearrowright) = \psi_y^1 \circ 0 = 0 = \mathcal{Z}^{(2)}(\circlearrowright)$$

**Пример 29.** Да и вообще, справедливо

$$\mathcal{Z}^{(i)}(\circlearrowleft \circ A) = \mathcal{Z}^{(i)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(i)}(A \circ \circlearrowleft) = \mathcal{Z}^{(i)}(A)$$

**Замечание 20.** Это дает некоторое понимание композиции. Так видимо  $A \circ \circlearrowleft = \circlearrowleft \circ A = A$ . То есть  $\circlearrowleft$  является нейтральным элементом в моноиде  $h\text{-species}$  по композиции. Это несколько контр-интуитивно, поскольку в обычных species нейтральным элементом является одноточечное множество. А его образом при вложении species в  $h\text{-species}$  является  $\circlearrowright$ .

**Пример 30.** Интересно посмотреть на композицию с  $\circlearrowright$

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square \circ \circlearrowright) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} (\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} (\psi_{x,y,y}^2 + \psi_x^2) \right) = \\ &= \frac{1}{8} ((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1 \psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) \end{aligned} \quad (2.7)$$

**Замечание 21.** Отсюда можно сделать предположение, что  $\square \circ \circlearrowright = \square$ . То есть подстановка  $\circlearrowright$  — это «стирание различий между противоположными гранями».

**Пример 31** (TODO:дописать). Посчитаем для структуры  $V$  «вершина куба».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](V) = e^{\psi_{x,y,y}^1 + \frac{\psi_{x,y,y}^2}{2} + \frac{\psi_{x,y,y}^3}{3} + \dots}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(V) = e^{(\psi_x^1 + \frac{\psi_x^2}{2} + \frac{\psi_x^3}{3} + \dots) + (\psi_y^2 + \frac{\psi_y^4}{2} + \frac{\psi_y^6}{3} + \dots)}$$

Для структуры  $H$  «куб».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](H) = \mathcal{Z}^{(1)}(H) = e^{\psi_{x,y}^1 + \frac{\psi_{x,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y}^3}{3!} + \dots}$$

Тогда  $\mathcal{Z}^{(i)}(V \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(i)}(H)$ , поскольку при специализации всех  $y$  в 0, они равны.

## 2.8. Цикленный индекс species, вложенных в h-species

**Утверждение 22.** Пусть  $G$  — обычный species, вложенный в  $h$ -species.  $\mathcal{Z}_G$  — его цикленный индекс.

$$(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_y^1, \psi_y^2, \psi_y^3, \dots) = (\mathcal{Z}_G(\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots), 0)$$

## 2.9. Применение цикленного индекса к решению задач о раскрасках

**Задача 2.** Посчитать количество способов покрасить  $n$ -мерный куб в  $k$  цветов с точностью до изометрий. Иными словами, посчитать количество орбит при действии  $B_n$  на множестве всевозможно раскрашенных кубов. <http://math.stackexchange.com/questions/5697/coloring-the-faces-of-a-hypercube>.

*Решение.* В нашей нотации это вопрос о количестве раскрасок пар граней в  $k$  моноцветов и  $\frac{k(k-1)}{2}$  бицветов. Поскольку любая раскраска даст нам моноструктуру, то производящая функция для количества раскрасок от размерности, будет равна  $\mathcal{Z}_{\mathbb{H}}^{(1)}(kt, kt^2, kt^3, \dots, k^2t, k^2t^2, k^2t^3, \dots) = \exp(kt + kt^2 + kt^3 + \dots + \frac{k(k-1)}{2}t + \frac{k(k-1)}{2}t^2 + \frac{k(k-1)}{2}t^3 + \dots) = \exp(\frac{k(k+1)}{2}t + \frac{k(k+1)}{2}t^2 + \frac{k(k+1)}{2}t^3 + \dots) = (\exp(\log(\frac{1}{1-t})))^{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{1}{1-t}^{\frac{k(k+1)}{2}} = \square$

## Список литературы

1. André Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. Math 42 (1981), 1–82.
2. André Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces des structures*, in Combinatoire Énumérative, Lecture Notes in Mathematics 1234, Springer, Berlin, (1986), pp. 126–159
3. F. Bergeron, Gilbert Labelle, Pierre LeRoux *Combinatorial Species and Tree-Like Structures*, Cambridge University Press, (1998)
4. N. Bergeron; P. Choquette. *Hyperoctahedral species*, Sémin. Lothar. Combin. 61A (2009/10), доступно на <http://arxiv.org/abs/0810.4089>
5. Hetyei, Gábor; Labelle, Gilbert; Leroux, Pierre *Cubical species and nonassociative algebras* Adv. in Appl. Math. (1998), no. 3
6. I. G. Macdonald. *Polynomial functors and wreath products*, J. Pure Appl. Algebra, 18(2):173–204, 1980.
7. I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995.
8. <http://nlab.mathforge.org/nlab/show/Day+convolution>
9. Н. В. Дуров. *Классифицирующие вектоиды и классы операд*, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия 2009, доступно (английский) на <http://arxiv.org/abs/1105.3114>