Гипероктаэдральные комбинаторные типы

Сергей Воробьев

Санкт-Петербургский Государственный университет

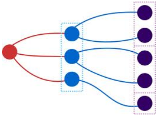
2012

Научный руководитель Константин Игоревич Пименов

Введение

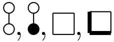
Комбинаторные типы (species) $F\colon \mathbb{B} \to \mathbf{Set}$ (Joyal, 1990-ые). Определил сумму, произведение и композицию (через композицию аналитических функторов).

Комбинаторная интерпретация — структуры на точках.



Гипероктаэдральные комбинаторные типы (H-species) $F\colon \mathbb{HB} \to \mathbf{HSet}$ (Bergeron, 1996). Определил сумму, произведение, но остался вопрос о композиции.

Комбинаторная интерпретация — структуры на гранях куба?



Постановка задачи

* Разработать комбинаторный язык для h-species.
* Определить композицию h-species

Аналитический функтор

Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & Set \\ Set \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} HB \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & HSet \\ HSet \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[n] \times A^n / S_n$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}} / B_n$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию. Это раскраска.

Цикленный индекс

Цикленный индекс — результат декатегорификации аналитического функтора. Морфизм из моноидальной категории в какую-либо алгебру. Новое: моноцвета и бицвета. Моноструктуры и биструктуры. В отличии от обычных species, для h-species разумно рассматривать пару $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})$ — для моноструктур и биструктур. Удобно рассмотреть базис $\psi_x, \psi_{x,y,y}$.

Формулы для цикленного индекса

Species

$$\mathcal{Z}_F = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi_x^\lambda}{z_\lambda}$$

H-species

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} - \\ \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \end{aligned} \tag{2}$$

Где λ_o — циклы нечетной длинны, λ_e — циклы четной длинны.

Формулы для композиционного произведения

Species:

$$\mathcal{Z}_{F\circ G}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\dots),\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2,\psi_x^4,\psi_x^6,\dots),\\ \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3,\psi_x^6,\psi_x^9,\dots),\dots)$$

H-Species:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}_{F\circ G}^{(1)/(2)}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\dots,\psi_{x,y,y}^1,\psi_{x,y,y}^2,\psi_{x,y,y}^3,\dots) = \\
&\mathcal{Z}_F^{(1)/(2)}(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\dots,\psi_{x,y,y}^1,\psi_{x,y,y}^2,\psi_{x,y,y}^3,\dots),\\
&\qquad \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2,\psi_x^4,\psi_x^6,\dots,\psi_{x,y,y}^2,\psi_{x,y,y}^4,\psi_{x,y,y}^6,\dots),\\
&\qquad \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3,\psi_x^6,\psi_x^9,\dots,\psi_{x,y,y}^3,\psi_{x,y,y}^6,\psi_{x,y,y}^9,\dots),\dots,\\
&\qquad [\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^1,\psi_x^2,\psi_x^3,\dots,\psi_{x,y,y}^1,\psi_{x,y,y}^2,\psi_{x,y,y}^3,\dots),\\
&\qquad [\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^2,\psi_x^4,\psi_x^6,\dots,\psi_{x,y,y}^2,\psi_{x,y,y}^4,\psi_{x,y,y}^6,\dots),\\
&\qquad [\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^3,\psi_x^6,\psi_x^9,\dots,\psi_{x,y,y}^3,\psi_{x,y,y}^6,\psi_{x,y,y}^9,\dots),\dots)
\end{aligned}$$

(1)

$$[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}\times\overset{\circ}{\bullet}) = [\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet})\times[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}) = (\psi^{1}_{x,y,y})^{2}$$

Произведение сохраняется для $\mathcal{Z}^{(1)}$, $[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}]$.

(2)

$$A\circ\overset{\circ}{\bullet} = \overset{\circ}{\bullet}\circ A = A$$

$\overset{\circ}{\bullet}$ — единица подстановки.

(3)

$$\blacksquare\circ\overset{\circ}{\circ} = \square$$

Подстановка $\overset{\circ}{\circ}$, это «стирание различий между противоположными гранями».

Заключение

Результат:

* Начата разработатка комбинаторного языка для h-species.
* Написана явная формула для цикленного индекса.
* Написана формула для композиции цикленных индексов.
* Произведены явные вычисления для нескольких содержательных примеров, результаты согласуются с комбинаторной интуицией и помогают ее развить.