

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математико–механический факультет

Специальность «математика»

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

**ГИПЕРОКТАЭДРАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ТИПЫ**

*«К защите допущен»:*

Зав. кафедрой высшей алгебры  
и теории чисел,  
профессор, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Яковлев А.В.

Научный руководитель,  
доцент??, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Пименов К.И.

Рецензент,  
профессор, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Яковлев А.В.

Дипломник

\_\_\_\_\_ Воробьев С.Э.

г. Санкт-Петербург, 2012

## Содержание

<b>Глава I. Аннотация[TODO]</b>	<b>3</b>
<b>Глава II. Введение</b>	<b>3</b>
2.1. Комбинаторные виды	3
2.2. Композиция комбинаторных видов	5
<b>Глава III. Гипероктаэдральные комбинаторные виды</b>	<b>10</b>
3.1. Определение	10
3.2. Вложение species в h-species	10
3.3. Сложение и умножение h-species	11
3.4. Аналитический функтор для h-species	11
3.5. Декатегорификация аналитического функтора	11
3.6. Сумма и произведение цикленных индексов	15
3.7. Цикленный индекс композиции	16
3.8. Примеры [TODO]	19

## Глава I. Аннотация[TODO]

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развитие идеи комбинаторных типов (*species*). Мы будем обозначать их *h-species* для краткости. В работе частично разработан комбинаторный язык для *h-species*. Написана формула для композиции цикленных индексов. Рассмотрены примеры.

## Глава II. Введение

### 2.1. Комбинаторные виды

Комбинаторные виды (*species*) были введены Джоялем в [ref, ref, ref]. Они, в некоторой степени, являются развитием идеи производящих функций. О комбинаторных видах можно говорить на нескольких языках: категорном, комбинаторном и на языке теории представлений. Последний наиболее часто встречается в литературе, хотя автору он кажется наименее выразительным. Во введении изложено начало теории комбинаторных видов.

#### 2.1.1. Определение

Рассмотрим категорию  $\mathcal{B}$  — подкатеорию конечных множеств с морфизмами — только биекциями. Это подкатегория в  $Set$ . Функтор  $F : \mathcal{B} \rightarrow Set$  — это комбинаторный вид. То есть вид, это сопоставление каждому числу  $n \in \mathbb{N}$  множества с действием группы  $S_n$ . Комбинаторная интерпретация: множеству точек сопоставляется множество структур на этих точках, а действие  $S_n$  естественно возникает из перестановок исходных точек.

**Пример 1.** Вид  $\mathbb{E}$  — структура множества. Он сопоставляет набору точек одно множество, состоящие из этих точек. Все элементы  $S_n$  переходят в тождественное отображение.

**Пример 2.**  $\mathbb{C}$  — циклический порядок. Сопоставляет набору из  $n$  точек  $(n-1)!$  возможных циклических порядков на них.

**Пример 3.** Линейный порядок  $\mathbb{L}$  сопоставляет  $n!$  линейных порядков.

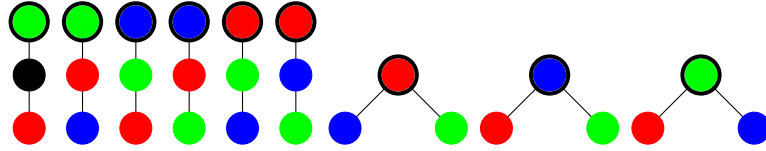


Рис. 2.1. корневые деревья с 3 вершинами

**Пример 4.**  $\mathbb{E}_e$  — сужение  $\mathbb{E}$  на четные множества. То есть для четных  $n$ , совпадает с  $\mathbb{E}$ , а для нечетных  $\emptyset$ . Аналогично  $\mathbb{E}_o$  — сужение на нечетные.

**Пример 5.** На картинке 2.1 изображен вид «корневые деревья с 3 вершинами» (без какого-либо порядка на потомках).

Можно рассмотреть функтор  $I : Set \rightarrow Vec$ , который сопоставляет множеству векторное пространство со свободным[так можно сказать?] базисом из этого множества. Тогда  $F \circ I : \mathcal{B} \rightarrow Vec$ , получается для каждого  $n$  перестановочное представление группы  $S_n$ . При таком подходе, характер этого представления  $\chi(\sigma)$ , это количество структур, неподвижных относительно  $\sigma \in S_n$ .

### 2.1.2. Сложение комбинаторных видов

Сумму двух species  $F, G$  легко определить как поточечную сумму функторов [ref]. На комбинаторном языке это будет означать «либо структура типа  $F$ , либо структура типа  $G$ ».

**Пример 6.**  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_e + \mathbb{E}_o$

**Пример 7.** Любой вид  $F$  можно разложить в такую сумму  $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$ , где  $F_i$  — сужение  $F$  на  $i \in \mathcal{B}$ . Значение  $F_i$  на  $j \neq i$  равно  $\emptyset$ .

### 2.1.3. Произведение комбинаторных видов[TODO: тут какая-то чушь написана, надо переписать]

Для определения произведения, используется тензорное произведение на  $\mathcal{B}$ :  $n \otimes m = (n + m)$  и соответствующее ему вложение  $S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$ . Все такие вложения сопряжены. На языке представлений это соответствует индуцированному представлению  $F(S_n \times S_m) \uparrow = F(S_{n+m})$ . [ref]

Поскольку  $F_i \times G_j = (F \times G)_{i+j}$ , то в целом произведение соответствует свертке:  $(F \times G)[n] = \sum_{i=0}^n F[i] \times G[i]$ . На комбинаторном языке это значит: разбить множество точек на два кусочка (на всевозможные размеры) и на первом ввести структуру типа  $F$ , на втором — типа  $G$ .

**Пример 8.**  $\mathbb{E} \times \mathbb{E}_1$  — множество с выделенной точкой.

**Пример 9.**  $\mathbb{C}^2$  — (упорядоченная) пара циклов.

## 2.2. Композиция комбинаторных видов

Кроме сложения и умножения на species можно ввести операцию композиции. Для этого необходимо ввести дополнительную конструкцию: аналитический функтор.

### 2.2.1. Аналитический функтор комбинаторных видов

Аналитический функтор  $\mathcal{F}$  соответствующий species  $F$  является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией. Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора  $F$  относительно  $i$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{F} & Set \\ i \downarrow & \nearrow \mathcal{F} & \\ Set & & \end{array}$$

Эта диаграмма не является коммутативной, а коммутативна лишь настолько, насколько может быть коммутативной диаграмма подобного вида. А именно, имеется естественное преобразование  $\kappa: F \rightarrow i \circ \mathcal{F}$ , обладающее следующим универсальным свойством: для любого функтора  $M: Set \rightarrow Set$  и морфизма функторов  $\eta: F \rightarrow i \circ M$  этот морфизм пропускается через  $\mathcal{F}$  при помощи  $\kappa$ .

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \\ & \searrow \alpha & \vdots \\ & & M \end{array}$$

Явная конструкция для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F}(A) = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \quad (2.1)$$

У аналитического функтора для типа структуры  $F$  имеется прозрачный комбинаторная интерпретация. Если трактовать множество  $A$  как набор цветов, то значение аналитического функтора  $\mathcal{F}(A)$  трактуется как множество структур типа  $F$  раскрашенных в цвета из  $A$ .

### 2.2.2. Композиция аналитических функторов комбинаторных видов

**Теорема 1.** *Композиция аналитических функторов  $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  является аналитическим функтором.*

*Доказательство.* Species, которому соответствует этот аналитический функтор будем называть композицией  $F \circ G$ . Дадим набросок доказательства. Согласно конструкции  $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(A) = \sum_n F[n] \times (\sum_m G[m] \times A^m / S_m)^n / S_n = \sum_n \sum_{k, m_1 + \dots + m_k = n} F[k] \times (\prod_i G[m_i]) \times A^n / S_n$ . [TODO??]

Строгое доказательство см. в [ref]

□

Надо отметить, что все части разбиения предполагаются непустыми, что равносильно сужению внутреннего species на  $\mathbb{N}_+$ . Будем обозначать его  $G_+$ .

У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры  $F$  раздуваем(красим) в структуру типа  $G$ .

**Пример 10.**  $\mathbb{E}_1 \circ F_+ = F_+$ ,  $F \circ \mathbb{E}_1 = F$ .  $\mathbb{E}_1$  является нейтральным элементом в моноиде species по композиции.

**Пример 11.**  $\mathbb{E}_2 \circ \mathbb{C}$  — (неупорядоченная) пара циклов.

**Пример 12.**  $\mathbb{E} \circ \mathbb{E}_+$  — структура разбиения множества. Здесь  $\mathbb{E}_+$  — непустые множества.

**Пример 13.**  $\mathbb{E} \circ \mathbb{C}_+ = \mathbb{S}$  — структура перестановки. Буквально перестановка — это набор непустых циклов.

В дальнейшем мы зачастую будем опускать  $F \circ G_+$  и писать просто  $F \circ G$ .

### 2.2.3. Цикленный индекс

Процедура декатегорификации не имеет строго математического смысла, так же как и процедура квантования. Сейчас мы предложим процедуру, которая, стартуя с обычных species, на выходе дает классический цикленный индекс/фробениусову характеристику. Затем мы попытаемся аналогичные действия провести и в гипероктаэдральном случае. Декатегорификацией моноидальной категории  $\mathbb{B}$  является моноид классов изоморфизма объектов категории  $\mathcal{B}$ , то есть моноид натуральных чисел по сложению. Декатегорификацией  $\hat{\mathcal{B}}$  естественным образом оказывается моноидная алгебра с коэффициентами из  $\mathbb{Z}$  для моноида  $\mathbb{N}$ , то есть кольцо многочленов  $Z[X]$ . (Правда это не то, что мы хотели. Чтобы получить цикленный индекс надо декатегорифицировать саму операцию подстановки и аналитический функтор). [TODO: этот таинственный абзац стоит переписать]

Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием  $S_n$  имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэффициенте при мономе соответствующего веса. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки  $\sigma$  нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как нераскрашенная структура, а во-вторых раскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например раскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответствует моном  $x_1^2 x_2$ . Тогда первое условие дает нам сомножитель  $\chi(\sigma)$ , где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называется фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$Z_F = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi^{\lambda(\sigma)} = \sum_{n, \lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\psi^\lambda}{z_\lambda} \quad (2.2)$$

Где  $\chi$  — характер (перестановочного) представления заданного  $F$ ,  $\sigma$  — перестановка цикленного типа  $\lambda$ ,  $\psi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots$ ,  $z_\lambda$  — индекс класса сопряженности  $\sigma$ . Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это  $x_1, x_2, x_3, \dots$

**Пример 14.**  $\mathcal{Z}_{\mathbb{E}} = e^{(\psi^1 + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} + \dots)}$ . Для доказательства смотри [ref].

#### 2.2.4. Плетизм цикленных индексов

**Теорема 2.** *Композиции аналитически функторов соответствует плетизм цикленных индексов.*

Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответствует простой формуле подстановки. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. В качестве множества цветов  $A$  рассмотрим счетный набор цветов  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Цикленный индекс запишем относительно базиса кольца симметрических функций  $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^2, \psi^4, \psi^6, \dots), \mathcal{Z}_G(\psi^3, \psi^6, \psi^9, \dots), \dots) \quad (2.3)$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру  $F$  это структуры типа  $G$ . То есть  $\mathcal{Z}_{F \circ G} = \mathcal{Z}_F(\psi_g^1, \psi_g^2, \psi_g^3, \dots)$ , где  $\psi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \dots)$ , где  $g_i$  — перечисление всех структур типа  $G$ . Нужно раскрыть переменные  $g_i$  — написать их относительно начальных цветов. Формулу  $\psi_g^i = \mathcal{Z}_G(\psi^i, \psi^{2i}, \psi^{3i}, \dots)$  легко понять в переменных  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Мы должны покрасить  $i$  кусков в одну и ту же  $G$ -структуру. Значит каждый цвет  $x_j$  заменяется на  $x_j^i$ .

Формулу 2.3 можно специализировать для подсчета labeled-структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответствующие мономы (в базисе  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ) возникают только при раскрытии мономов вида  $c(\psi^1)^k$  и коэффициент в них равен  $ck!$  — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой



$\psi^1 = t, \psi^2 = 0, \psi^3 = 0, \psi^4 = 0$ . Формула 2.3 примет вид  $\mathcal{Z}_{F \circ G}(t, 0, 0, \dots) = \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots)$ . А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \quad (2.4)$$

**Пример 15.** (Экспоненциальная) производящая функция для  $\mathbb{E}$  это  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ . А производящая функция для непустых циклов  $\mathbb{C}_+$  это  $-\log(1 - x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$ . А для  $\mathbb{S}$  производящая функция это  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . И действительно  $e^{(-\log(1-x))} = \frac{1}{1-x}$ .

## Глава III. Гипероктаэдральные комбинаторные виды

### 3.1. Определение

Рассмотрим категорию  $HSet$ . В ней объекты это множества, снабженные дополнительным действием — инволюцией. А стрелки, это морфизмы, сохраняющие инволюцию. Рассмотрим категорию  $H\mathcal{B}$  — подкатеорию конечных множеств из  $HSet$  с морфизмами только биекциями, и инволюциями без неподвижных точек. Функтор  $F : H\mathcal{B} \rightarrow HSet$  — гипероктаэдральный (или кубический) это комбинаторный вид. Мы будем так же для краткости употреблять термин *h-species*. Объекты из  $H\mathcal{B}$  будем отождествлять с  $\bar{n} = \{-n, -n+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, n-1, n\}$ , где инволюция - смена знака. Эпитет гипероктаэдральный используется потому, что на  $H\mathcal{B}[\bar{n}]$  действует гипероктаэдральная группа  $B_n$  — группа движений  $n$ -мерного куба (иногда будем обозначать ее  $H_n$ ). Некоторая не очень ясная комбинаторная интерпретация: множеству граней куба сопоставляется множество структур на этих гранях, а действие  $B_n$  возникает из перестановок граней.

**Пример 16.** Вид  $\mathbb{H}$  — структура куб. Он сопоставляет  $\bar{n}$  одно множество. Все элементы  $B_n$  переходят в тождественное отображение.

**Пример 17.**  $\circ$  — неразличимая пара граней ( $\mathbb{H}_1$ ).  $\bullet$  — различимая пара граней. Оба они принимают значение  $\emptyset$  на всем, кроме  $\bar{1}$ . Но во втором случае  $\bullet(\bar{1})$  это два объекта [TODO: правда??].

**Пример 18.** Аналогично  $\square$  — структура куб размерности 2 ( $\mathbb{H}_2$ ).  $\square$  — куб размерности 2 с различимыми противоположными гранями. Их уже целых 4 [TODO: правда??].

**Пример 19.** Структура  $\bullet \times \bullet$ . Это не то же самое что  $\square$ , поскольку это «упорядоченная пара  $\bullet$ ».

### 3.2. Вложение species в h-species

Обычные комбинаторные виды можно «вложить» в гипероктаэдральные. Иными словами можно каждый species рассмотреть как h-species. Для этого

достаточно рассматривать структуру не на точках, а на парах (неразличимых) граней. Если  $F : \mathcal{B} \rightarrow \text{Set}$ , то  $\tilde{F} : H\mathcal{B} \rightarrow H\text{Set}$ , где  $\tilde{F}[\bar{n}] = F[n]$  как множество, а инволюция тождественна.

### 3.3. Сложение и умножение h-species

Сложение и умножение определяются полностью аналогично species и тут проблем не возникает.

### 3.4. Аналитический функтор для h-species

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species

$$\begin{array}{ccc} HB & \xrightarrow{F} & H\text{Set} \\ \downarrow i & \nearrow \mathcal{F} & \\ H\text{Set} & & \end{array}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \quad (3.1)$$

Где  $A^{\bar{n}}$  задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверку универсальности картинки

### 3.5. Декатегорификация аналитического функтора

Попробуем декатегорифицировать аналитический функтор для h-species. Прежде всего отметим, что раскраска, элемент  $A^{\bar{n}}$ , это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы из одной орбиты инволюции  $i$  и  $-i$  должны отображаться либо в один и тот же элемент  $A$  (который инволюцией переводится в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом*.

Покрашенные структуры сами по себе можно рассматривать как моноцвет, либо бицвет. Это по-прежнему определяется длиной орбиты инволюции  $A$ , уже после факторизации по  $B_n$ . То есть кроме действия  $B_n$  есть еще внешняя инволюция — действие  $Z_2$ . Будем разделять раскрашенные структуры на *моноструктуры* и *биструктуры*.

Цикленный индекс, считающий только моноструктуры будем обозначать  $\mathcal{Z}^{(1)}$ , биструктуры —  $\mathcal{Z}^{(2)}$ .

**Утверждение 3.** *Количество орбит под действием  $H_n \times Z_2$  соответствует  $\mathcal{Z}^{(1)} + \mathcal{Z}^{(2)}$ , а под действием только  $H_n$  соответствует  $\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}$ .*

*Доказательство.* В первом случае каждая моноструктура и биструктура будет посчитана 1 раз. А во втором каждая биструктура будет посчитана два раза, т.к. действие инволюции «склеивающей» две части биструктуры не учтено.  $\square$

### 3.5.1. Подсчет цикленного индекса

В качестве  $H$ -множества цветов возьмем счетное множество моноцветов  $x_1, x_2, x_3, \dots$  объединенное с счетным множеством бицветов  $y_1, y_2, y_3, \dots$ .

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую раскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляется в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе  $H_n$  бывают двух типов: *длинные* — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и *короткие* — пара граней лежит в симметричных, различных циклах.

Посчитаем количество неподвижных точек для  $H_n$ . Пусть  $\lambda^1$  — цикленный тип коротких перестановок,  $\lambda^2$  — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те, у которых длинный цикл покрашен в моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет. Под покрашенным циклом мы подразумеваем покраску всех его элементов в этот цвет (чтобы такая покрашенная структура была неподвижна относительно действия этого элемента  $H_n$ ).

**Утверждение 4.** *Справедлива формула:*

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} \quad (3.2)$$

Здесь нижний индекс  $\psi$  означает переменные по которым берется степенная сумма. Например  $\psi_{x,y,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$ . При этом коэффициент 2 у  $y_i^2$  отражает тот факт, что можно раскрасить  $k$  пар граней в бицвет, так чтобы раскраска была неподвижна, под действием короткого цикла, 2-мя способами.

Посчитаем количество неподвижных точек для  $H_n \times Z_2$ . Разобьем сумму на две части —  $(h, \bar{0})$  и  $(h, \bar{1})$ . Для первой формула будет аналогична 3.2, только из-за того что порядок группы в 2 раза больше, появится коэффициент  $\frac{1}{2}$ . Во второй части по-прежнему можно красить и длинные и короткие циклы в моноцвет. А вот с бицветом происходит любопытная вещь — предположим мы красим в него цикл (пару циклов, в случае короткого). Тогда реальный цикл от  $(h, \bar{1})$  будет получаться из циклов  $h$  добавлением «смены грани» на каждом шаге. Значит для циклов нечетной длины сменится свойство короткий–длинный.

**Пример 20.** Пусть  $h_e = \bullet \leftrightarrow \bullet$ . Тогда  $(h_e, \bar{1}) = \begin{array}{c} \bullet \leftrightarrow \bullet \\ \bullet \leftrightarrow \bullet \end{array}$

**Пример 21.** Пусть  $h_o = \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \end{array}$ . Тогда  $(h_o, \bar{1}) = \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \end{array}$

**Утверждение 5.** Справедлива формула:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Где  $\lambda_o$  — циклы нечетной длины,  $\lambda_e$  — циклы четной длины.

Из формул 3.2, 3.3 легко получить

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} = \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}} - \\
& \frac{1}{2} \sum_{n, \lambda_o^1 + \lambda_o^2 + \lambda_e^1 + \lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1 + \lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2 + \lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1 \lambda_o^2 \lambda_e^1 \lambda_e^2}}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

### 3.5.2. Примеры вычисления цикленного индекса

Посчитаем цикленные индексы для простых h-species. Здесь мы будем писать  $Z(A)$  вместо  $Z_A$ . Это не должно вызывать путаницу, поскольку вместо  $A$  будут использоваться схематические картинки. Их никак не перепутать с переменными, от которых считается цикленный индекс.

#### Пример 22.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\circ) = \frac{1}{2}(\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) = \psi_{x,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = \frac{1}{2}(\psi_x^1 + \psi_{x,y,y}^1) = \psi_{x,y}^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ) = 0$$

#### Пример 23.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) = \frac{1}{2}(2\psi_{x,y,y}^1 + 0\psi_x^1) = \psi_{x,y,y}^1$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) = \frac{1}{2}(2\psi_x^1 + 0\psi_{x,y,y}^1) = \psi_x^1$$

Значит

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\bullet) = \psi_y^1$$

#### Пример 24.

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}((\psi_{x,y,y}^1)^2 + (\psi_x^1)^2 + 2\psi_x^2 + 2(\psi_x^1 \psi_{x,y,y}^1) + 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Здесь коэффициенты — не характеры (характер при каждом слагаемом = 1).

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1 \psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square)$$

Последнее следовало и из общих соображений: легко видеть что  $\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = 0$ .

**Пример 25.**

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_{x,y,y}^1)^2 + 0(\psi_x^1)^2 + 0\psi_x^2 + 0(\psi_x^1\psi_{x,y,y}^1) + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\square) = \frac{1}{8}(4(\psi_x^1)^2 + 2 \times 2\psi_{x,y,y}^2)$$

Откуда

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\square) = \frac{1}{2}([\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) - \mathcal{Z}^{(1)}(\square)) = \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1\psi_x^1 + \frac{1}{2}(\psi_{y,y}^1)^2) = \psi_y^1\psi_x^1 + (\psi_y^1)^2$$

### 3.6. Сумма и произведение цикленных индексов

#### 3.6.1. Сумма

Сумма цикленных индексов соответствует поточечной сумме аналитических функторов и здесь нет никаких сюрпризов:

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} + \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A+B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(2)} + \mathcal{Z}_B^{(2)}$$

#### 3.6.2. Произведение

Для произведения уже не совсем так.

**Утверждение 6.** *Моноструктура получается в произведении двух моноструктур. А биструктура получается, если один из сомножителей биструктура. Причем в случае, когда оба сомножителя — биструктуры, получается две различных биструктуры.*

То есть

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(1)}$$

$$\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)} = \mathcal{Z}_A^{(1)} * \mathcal{Z}_B^{(2)} + \mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(1)} + 2(\mathcal{Z}_A^{(2)} * \mathcal{Z}_B^{(2)})$$

Откуда следует

$$(\mathcal{Z}_{A*B}^{(1)} + 2\mathcal{Z}_{A*B}^{(2)}) = (\mathcal{Z}_A^{(1)} + 2\mathcal{Z}_A^{(2)}) * (\mathcal{Z}_B^{(1)} + 2\mathcal{Z}_B^{(2)})$$

**Замечание 7.** Это логично, поскольку  $(\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)})$  — это цикленный индекс для цветов, с «забытой» инволюцией.

### 3.6.3. Примеры цикленных индексов произведений

Посчитаем произведение уже известных  $h$ -структур и их цикленных индексов.

**Пример 26.** Структура  $\circ \times \circ$ .

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \times \circ) = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\circ) = (\psi_{x,y}^1)^2$$

**Пример 27.** Структура  $\bullet \times \bullet$ .

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet \times \bullet) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) \times [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\bullet) = (\psi_{x,y,y}^1)^2$$

Легко получить эту же формулу и из других соображений, как  $\frac{1}{8}(8(\psi_{x,y,y}^1)^2)$ .

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\bullet \times \bullet) = \mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) \times \mathcal{Z}^{(1)}(\bullet) = (\psi_x^1)^2$$

## 3.7. Цикленный индекс композиции

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для  $h$ -species, параллельно теории species. Прежде всего отметим, что инволюция на множестве цветов делит их на моноцвета  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  и бицвета  $(y_1, y_2, y_3, \dots)$ . Однако, формулы 3.2 и 3.3 подсказывают, что в качестве базиса можно брать не  $\psi_x^i, \psi_y^j$  а  $\psi_x^i, \psi_{x,y}^j$ . Впрочем это тривиальная замена переменных.

Итак мы хотим выяснить чему равняются

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots)$$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(2)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots)$$



Утверждается следующее:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{F \circ G}^{(1)/(2)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots) = \\
\mathcal{Z}_F^{(1)/(2)}(\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^4, \psi_{x,y,y}^6, \dots), \\
\mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y,y}^3, \psi_{x,y,y}^6, \psi_{x,y,y}^9, \dots), \\
\dots, \\
[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots), \\
[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^2, \psi_x^4, \psi_x^6, \dots, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^4, \psi_{x,y,y}^6, \dots), \\
[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^3, \psi_x^6, \psi_x^9, \dots, \psi_{x,y,y}^3, \psi_{x,y,y}^6, \psi_{x,y,y}^9, \dots), \\
\dots)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому давайте напомним ее на уровне членов:

$$\begin{aligned}
\psi_x^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = \mathcal{Z}_G^{(1)}(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \\
\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{x,y,y}^i \circ (\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)}) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots, \\
\psi_x^i, \psi_x^{2i}, \psi_x^{3i}, \dots)
\end{aligned}$$

Здесь мы пишем  $(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})$ , поскольку цикленный индекс для h-species в действительности представляет собой пару. Биструктуры подставляются вместо бицветов, моноструктуры, вместо моноцветов. В остальном рассуждение дословно повторяет случай обычных species.

Аналогично, если сделать подстановку

$$\psi_x^1 = t, \psi_x^k = 0, k > 1$$

$$\psi_{x,y,y}^1 = s, \psi_{x,y,y}^k = 0, k > 1$$

То полученная формула показывает, что 2.4 справедливо для экспоненциальных производящих функций bilabeled-структур (то есть производящая функция от двух переменных). А можно сделать подстановку  $s := t$ , которая

даст выполнение формулы 2.4 для exp-производящей функции просто labeled-структур. А значит и обычной производящей функции unlabeled-структур.

### 3.7.1. Примеры

Посчитаем  $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})(\circ \circ \circ)$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \circ \circ) = \psi_x^1 \circ \psi_{x,y}^1 = \psi_{x,y}^1 = \mathcal{Z}^{(1)}(\circ)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ \circ \circ) = \psi_y^1 \circ 0 = 0 = \mathcal{Z}^{(2)}(\circ)$$

Да и вообще, справедливо

$$\mathcal{Z}^{(1)}(\circ \circ A) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(\circ \circ A) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

А так же

$$\mathcal{Z}^{(1)}(A \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(1)}(A)$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}(A \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(2)}(A)$$

Это дает некоторое понимание композиции. Так  $A \circ \circ = \circ \circ A = A$ . То есть  $\circ$  является нейтральным элементом в моноиде h-species по композиции. Это несколько контр-интуитивно, поскольку в обычных species нейтральным элементом является одноточечное множество. А его образом при вложении species в h-species является  $\circ$ . [TODO А не значит ли это что просто можно по другому вложить?]

Интересно посмотреть чем является  $\circ$ . Например

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square \circ \circ) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} (\psi_{x,y,y}^1 + \psi_x^1) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} (\psi_{x,y,y}^2 + \psi_x^2) \right) = \\ &= \frac{1}{8} ((\psi_x^1)^2 + (\psi_{x,y,y}^1)^2 + 2\psi_{x,y,y}^2 + 2(\psi_{x,y,y}^1 \psi_x^1) + 2\psi_x^2) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](\square) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Откуда можно сделать вывод, что  $\square \circ \circ = \square$ . То есть подстановка  $\circ$ , это «стирание различий между противоположными гранями».

### 3.7.2. Предложения [TODO]

$$(\mathcal{Z}_G^{(1)}, \mathcal{Z}_G^{(2)})(\psi_x^1, \psi_x^2, \psi_x^3, \dots, \psi_{x,y,y}^1, \psi_{x,y,y}^2, \psi_{x,y,y}^3, \dots) = (\mathcal{Z}_G(\psi_{x,y}^1, \psi_{x,y}^2, \psi_{x,y}^3, \dots), 0)$$

Где  $G$  — обычный species, вложенный в  $h$ -species. А  $\mathcal{Z}_G$  — его цикленный индекс.

### 3.8. Примеры [TODO]

Посчитаем для структуры  $V$  «вершина куба».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](V) = e^{\psi_{x,y,y}^1 + \frac{\psi_{x,y,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y,y}^3}{3!} + \dots}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}(V) = e^{(\psi_x^1 + \frac{\psi_x^2}{2!} + \frac{\psi_x^3}{3!} + \dots) + (\psi_y^2 + \frac{\psi_y^4}{2!} + \frac{\psi_y^6}{3!} + \dots)}$$

Для структуры куба  $H$  «куб».

$$[\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}](H) = \mathcal{Z}^{(1)}(H) = e^{\psi_{x,y}^1 + \frac{\psi_{x,y}^2}{2!} + \frac{\psi_{x,y}^3}{3!} + \dots}$$

Нетрудно убедиться что  $\mathcal{Z}^{(i)}(V \circ \circ) = \mathcal{Z}^{(i)}(H)$ .