Гипероктаэдральные комбинаторные типы

Сергей Воробьев

Санкт-Петербургский Государственный университет

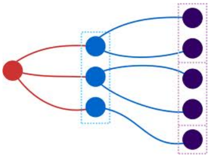
2012

Введение

Обычные species $\widehat{\mathbb{B}}$ (Joyal)

$$F : \mathbb{B} \to \mathbf{Set}$$

Комбинаторная интерпретация — структуры на точках.

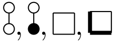


Введение

H-species (Bergeron)

$$F\colon \mathbb{HB} \to \mathbf{HSet}$$

Комбинаторная интерпретация — структуры на гранях куба.



Аналитический функтор

Аналогично species, аналитический функтор для h-species является левым расширением по Кану функтора F относительно i.

$$\begin{tikzcd}
HB \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & HSet \\
HSet \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{F} = \sum_{n} F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}} / B_n$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию. Раскраска.

Цикленный индекс

* Процедура декатегорификации.
* Морфизм из моноидальной категории в какую-то алгебру функций.
* Весовая функция (один вес для орбиты).
* Коэффициент при мономе соотвествующий весу.
* Моноцвета и бицвета.
* Моноструктуры и биструктуры.
* В отличии от обычных species, для h-species разумно рассматривать пару $(\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)})$ — для моноструктур и биструктур.
* Считаем относительно переменных x_i, y_i. В симметричных функциях $\psi_x, \psi_{x,y,y}$.

Формулы для цикленного индекса

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + 2\mathcal{Z}_F^{(2)} = \sum_n \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in B_n} \chi(\sigma) \psi_{x,y,y}^{\lambda^1(\sigma)} \psi_x^{\lambda^2(\sigma)} = \sum_{n,\lambda^1+\lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1\lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1\lambda^2}} \tag{1}$$

$$\mathcal{Z}_F^{(1)} + \mathcal{Z}_F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n,\lambda^1+\lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1\lambda^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda^1} \psi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1\lambda^2}} + \frac{1}{2} \sum_{n,\lambda_o^1+\lambda_o^2+\lambda_e^1+\lambda_e^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda_o^1\lambda_o^2\lambda_e^1\lambda_e^2}) \frac{\psi_{x,y,y}^{\lambda_e^1+\lambda_o^2} \psi_x^{\lambda_e^2+\lambda_o^1}}{z_{\lambda_o^1\lambda_o^2\lambda_e^1\lambda_e^2}} \tag{2}$$

Где λ_o — циклы нечетной длинны, λ_e — циклы четной длинны.

Формула для композиционного произведения

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Z}^{(1)/(2)}_{F\circ G}(\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \dots, \psi^1_{x,y,y}, \psi^2_{x,y,y}, \psi^3_{x,y,y}, \dots) = \\
&\mathcal{Z}^{(1)/(2)}_{F}(\mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \dots, \psi^1_{x,y,y}, \psi^2_{x,y,y}, \psi^3_{x,y,y}, \dots), \\
&\qquad \mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^2_x, \psi^4_x, \psi^6_x, \dots, \psi^2_{x,y,y}, \psi^4_{x,y,y}, \psi^6_{x,y,y}, \dots), \\
&\qquad \mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^3_x, \psi^6_x, \psi^9_x, \dots, \psi^3_{x,y,y}, \psi^6_{x,y,y}, \psi^9_{x,y,y}, \dots), \\
&\qquad \dots, \\
&\qquad [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^1_x, \psi^2_x, \psi^3_x, \dots, \psi^1_{x,y,y}, \psi^2_{x,y,y}, \psi^3_{x,y,y}, \dots), \\
&\qquad [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^2_x, \psi^4_x, \psi^6_x, \dots, \psi^2_{x,y,y}, \psi^4_{x,y,y}, \psi^6_{x,y,y}, \dots), \\
&\qquad [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^3_x, \psi^6_x, \psi^9_x, \dots, \psi^3_{x,y,y}, \psi^6_{x,y,y}, \psi^9_{x,y,y}, \dots), \\
&\qquad \dots)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Формула для композиционного произведения для простых симметрических функций

$$\psi^i_x \circ (\mathcal{Z}^{(1)}_G, \mathcal{Z}^{(2)}_G) = \mathcal{Z}^{(1)}_G(\psi^i_x, \psi^{2i}_x, \psi^{3i}_x, \dots, \\ \psi^i_x, \psi^{2i}_x, \psi^{3i}_x, \dots)$$

$$\psi^i_{x,y,y} \circ (\mathcal{Z}^{(1)}_G, \mathcal{Z}^{(2)}_G) = [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]_G(\psi^i_x, \psi^{2i}_x, \psi^{3i}_x, \dots, \\ \psi^i_x, \psi^{2i}_x, \psi^{3i}_x, \dots)$$

Примеры

(1)

$$[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}\times\overset{\circ}{\bullet}) = [\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet})\times[\mathcal{Z}^{(1)}+2\mathcal{Z}^{(2)}](\overset{\circ}{\bullet}) = (\psi^1_{x,y,y})^2$$

Произведение сохраняется для $\mathcal{Z}^{(1)}, [\mathcal{Z}^{(1)} + 2\mathcal{Z}^{(2)}]$.

(2)

$$A \circ \overset{\circ}{\bullet} = \overset{\circ}{\bullet} \circ A = A$$

$\overset{\circ}{\bullet}$ — единица подстановки.

(3)

$$\square \circ \overset{\circ}{\circ} = \square$$

Подстановка $\overset{\circ}{\circ}$, это «стирание различий между противоположными гранями».

Спасибо за внимание!