

# 非线性海洋内波致流的物质输运能力探究

庄逸 2017K8009907061

指导老师：王展 研究员

2021 年 1 月 12 日

# 目录

<b>1 引言</b>	<b>4</b>
1.1 海洋内波简介	4
1.2 海洋内波及其输运能力的研究意义	4
1.3 海洋内波研究的历史	5
1.4 海洋内波的观测	5
1.5 海洋内波理论研究现状	6
1.6 研究工作概述	7
<b>2 海洋非线性内波输运能力理论分析</b>	<b>9</b>
2.1 主要符号约定	9
2.2 海洋内波及其致流的总体特征	9
2.3 内孤立波致流特征及输运能力指标	10
2.4 水平输运距离的理论分析	10
2.5 水平输运的特征时间	13
2.6 垂直方向运动分析	14
<b>3 KdV 内波理论研究</b>	<b>17</b>
3.1 KdV 内波理论简介	17
3.2 KdV 理论内波致流流场分析	19
3.3 KdV 理论内波致流输运能力分析	21
3.4 环境参数对 KdV 内波性质的影响	22
<b>4 MCC 内波理论研究</b>	<b>24</b>
4.1 MCC 内波理论简介	24
4.2 MCC 内波致流流场分析	25
4.3 MCC 理论内波致流输运能力分析	27
4.4 环境参数与振幅对 MCC 内波性质的影响	28
<b>5 DJL 内波理论研究</b>	<b>30</b>
5.1 DJL 内波理论简介	30
5.2 DJL 内波致流流场分析	30
5.3 DJL 内波致流输运能力分析	32
5.4 环境参数与 APE 对 DJL 内波性质的影响	33
<b>6 分析与总结</b>	<b>35</b>
6.1 理论结果总结	35
6.2 数值算例结果总结	36
6.3 环境参数影响总结	37

目录	3
6.4 讨论与展望	38
7 致谢	40

# 1 引言

## 1.1 海洋内波简介

人们对海面上的波浪十分熟悉，却鲜少知道海洋表面下有着更为强烈的波动。由于海洋中的温度、盐度、密度等物理量并非均一分布，在重力的作用下，海洋水体呈现密度分层的结构。在海洋这一密度分层流体中发生的波动，称为海洋内波。

海洋内波的传播方向与质点振动方向垂直，是一种横波，频率介于当地科氏力对应频率和浮频率之间。开阔深海中的低频内波的生成与潮汐相关，周期为日或半日，波长为十千米、百千米量级；浅海或温度跃层附近的高频内波周期只有数分钟或数小时，波长为十米至千米量级。温度跃层附近的大振幅内波诱导的流速，最大可超过  $2 \text{ m/s}$  (姜希明 2015; 李家春 2005)。

和海洋表面波相比，海洋内波最显著的特征是其振幅大一量级，可达数十米，其时间尺度也更大 (Liu et al. 2019)。这是由于在海洋内部浮力影响较大，内部密度差异远小于海面气-液的密度差异，故将流体微元提升一定高度所需要的能量远远小于提升海洋表面的流体微元所需的能量。定量而言，内部流体微元受到的恢复力为重力与浮力的合力，称为约化重力。约化重力的强度与密度变化梯度成正比，而实际中海洋密度梯度极小，因此恢复力仅约为表面波的千分之一，故相同能量下内波波幅约为表面波的数十倍 (李家春 2005)。

内波的生成、发展、传播、消亡受多种因素影响，为此人们提出了很多理论来描述其性质。黄晓冬 (2013) 描述了其中三种生成机制，分别为内潮生成机制，Lee wave 生成机制和正压潮经地形变化生成机制。但确凿无疑的是，产生内波至少需要满足两个基本条件 (姜希明 2015; 蒋国荣 et al. 2009)。其一是稳定的流体密度分层，这可通过直接对海洋进行探测确定。其二是存在扰动源。可以作为扰动源的因素众多，潮汐、洋流、流体不稳定性、海底地形变化、风、雷暴，人类活动如船只航行等都可能驱动内波的形成 (Salloum et al. 2012; 姜希明 2015; 蒋国荣 et al. 2009)。关于内波的传播过程，也有大量研究着眼于其传播速度，模态和极性转换，波与波或波与地形的相互作用以及对海洋环境的影响等方面。

## 1.2 海洋内波及其输运能力的研究意义

海洋内波的研究意义主要体现在三大方面。其一是对海洋结构物的影响。内波可诱导均匀的流场，向海洋结构物施加水平推力。例如东沙群岛附近的石油钻井受内波影响而无法操作，油罐产生较大摆动 (李家春 2005)。在水体中，内波会诱导速度达  $1.5 \text{ m/s}$  的剪切流，对水下钻井平台、海底石油管线和海底电缆等结构物造成巨大威胁 (姜希明 2015; 廖光洪 2012)。

其二是对船只或潜艇航行及声呐探测造成影响。河口航行的船只会受到淡水与海水界面上的内波影响而速度减缓 (姜希明 2015)，南海油田的作业船和油轮也有因内孤立波而操纵困难，航向偏移的记录 (方欣华 and 杜涛 2005)。水中航行的潜艇受到内波诱导的垂直速度影响较大，需要主动向反方向运动以补偿内波造成的升降，但是容易造成意外浮出水面或触底 (姜希明 2015)。美国“长尾鲨”号核潜艇，以色列“达喀尔”号潜艇均因受内波影响而超过安全深度，造成失事惨案 (蒋国荣 et al. 2009)。对于声呐探测而言，内波是主要的噪声源。海水分层界面可视为声波声道的反射面，当内波经过时反射面发生振荡，使得声道改变而造成声呐失效 (姜

希明 2015; 方欣华 and 杜涛 2005; 李家春 2005)。

其三是提供较强的混合能力, 是海洋生态环境的重要影响因素。在垂直方向上, 由于内波能诱导较强的垂直流动, 因此能够促进物质和能量在垂直方向上的运输, 这使得深层海洋的营养盐被输送到浅层, 利于浮游生物增殖, 使得浅层海洋的初级生产力增加, 甚至会进一步引来具有经济价值的捕食鱼群 (Deepwell and Stastna 2016; James N. Moum and Klymak 2008; 方欣华 and 杜涛 2005)。在水平方向上, 一些内波特别是第二模态凸波, 具有较强的水体运输能力, 对于近海环境和远海环境之间污染物、盐分甚至生物的运输都有较大的影响 (Dunphy et al. 2011; James N. Moum and Klymak 2008; 黄晓冬 2013)。

研究内波的运输能力, 主要能为分析内波的混合能力, 定量研究其在海洋环境中发挥的作用提供进一步的理论分析。另一方面, 在研究中所得到的流场信息, 也可为其他应用提供一定的参考。例如通过流场可以进一步算得内孤立波的扰动压强, 由此推算其对海底结构物的影响。

### 1.3 海洋内波研究的历史

内波研究的早期理论, 可追溯到 1847 年 Stokes 研究两层流体间的波动和 1883 年 Rayleigh 研究密度连续层化的情况 (方欣华 and 杜涛 2005)。最早的实际观测则是 1893 至 1896 年间, Nansen 在北极考察过程中发现船在分层海水上航行时速度显著降低, 后 Ekman 于 1904 年给出产生内波消耗航行能量的解释。在此之后不断有内波观测报告, 但对内波的理论特性却所知甚少, 甚至只将其当作小尺度噪声处理 (方欣华 and 杜涛 2005; 李家春 2005)。

直到 20 世纪 60 年代, 随着应用数学和海洋探测技术的发展, 内波才成为一个独立的观测研究对象, 并发现了不少大振幅的内波 (Helfrich and W. Kendall Melville 2006)。其中具有代表性的观测有 Perry 和 Schimke 于 1965 年在安达曼海中发现的一群振幅最高达 80 m 的内波, Bockel 于 1962 年在直布罗陀海峡发现了 180 m 高的内波, Zeigenbein 于 1969-1970 年在同海域发现了内孤立波 (Helfrich and W. Kendall Melville 2006; Massel 2015)。1978 年 SEASAT 卫星的发射和合成孔径雷达技术 (SAR) 的应用, 使得通过遥感技术观测内波的方法大规模普及开来, 观测资料大量增加。在同一时期, 各种理论模型也不断被提出, 于后详述。

我国内波研究起步较晚。上世纪 60 年代中科院海洋研究所在舟山外海进行了内波的观测, 直到 70 年代起才开始进行系统研究 (方欣华 and 杜涛 2005)。20 世纪 90 年代初, 美国石油公司在南海发现内波造成的强流; 近年来在南海得到的大量第二模态内孤立波观测资料和罕见的内波极性转换观测记录等, 使得南海内波受到国内外广泛关注 (Helfrich and W. Kendall Melville 2006; Rayson et al. 2019; Yang et al. 2010; 姜希明 2015)。事实上, 我国渤海、黄海、东海、南海都存在性质各异的内波, 但仍有不少性质需要研究验证 (蒋国荣 et al. 2009)。

### 1.4 海洋内波的观测

内波基本分布在中纬度和热带近海海域 (蒋国荣 et al. 2009)。就具体的观测数据而言, 百米及以上的大振幅内波曾在苏禄海, 马斯克林海脊, 直布罗陀海峡等地被观测到 (Massel 2015)。1969 年, Ziegenbein 在直布罗陀海峡观测到内孤立波振幅数十米, 周期不到二十分钟; Apel 等

人 1985 年在苏禄海观测到 17 个内孤立波，周期为一小时，波长达 16 千米；黄海内孤立波据观测传播速度约 1 m/s，吕宋海峡的内孤立波诱导水平流速超过 2 m/s，垂直流速超过 0.7 m/s(黄晓冬 2013)。

内孤立波是一种能较稳定传播的内波，是一个典型且重要的观测对象。它可分为第一斜压模态和第二斜压模态。第一模态内孤立波结构简单，具有最快的相速度，而第二模态的内孤立波的相速度只有第一模态的三分之一 (Liu et al. 2019)。第一模态内孤立波可分为上凸和下凸两个类型，分别表现为等密度面向上凸起和向下凹陷。第二模态内孤立波较第一模态的少见，它也可分为两个类型，分别为凸波和反凸波（或称凹波）。凸波的等密度面在深度较浅处向上凸起，但在深处向下凹陷，被称为双峰或曲张形态。凹波则正相反，具有漏斗状的向中层凸出的等密度面 (Yang et al. 2010)。由于凸波和凹波的独特形态特征，前者对于输运流体十分有效，后者则不太擅长 (Deepwell and Stastna 2016; Rayson et al. 2019)。第二模态内孤立波波数小，能诱导更强的剪切效应，因此促进海水混合的能力也更强，但相应地衰减或发生不稳定而破碎也更快 (Rayson et al. 2019)。

内孤立波的观测受到海洋中多种因素的影响。对第一模态内孤立波而言，观测到的大部分波是向下凹陷的形态 (Liu et al. 2019)。而对第二模态内孤立波的观测，Rayson 等 (2019) 分析得出了三个条件：首先必须有特定的海洋几何结构，其次在传播路径上需要有较好的分层条件，最后它们不能由于湍流或波相互作用而过度耗散。近年来，随着对第二模态内孤立波的关注增加和技术装备发展，获得了不少它们的观测资料。如在新西兰观测到第二模态内孤立波后方跟随一串第一模态内孤立波，中国南海又观测到第二模态内孤立波在第一模态内孤立波之后经过；马斯克林海脊、新泽西大陆架、加里利海等地也都有第二模态内波的观测记录 (Deepwell and Stastna 2016; James N. Moum and Klymak 2008; Liu et al. 2019; Rayson et al. 2019; Yang et al. 2010)。

## 1.5 海洋内波理论研究现状

关于内波的理论模型众多。首先可以分为二维模型和三维模型，绝大部分研究都将流体处理为二维模型，即认为与波传播平面垂直的方向上流场和波的性质没有变化。其次可以分为浅水波模型和深水波模型。深水波模型有 Benjamin-Ono 理论等 (Helffrich and W. Kendall Melville 2006)。对于浅水波模型而言，进一步可以依照所设定的密度变化规律分出双层、三层的简化模型和密度连续层化模型等。在内波研究中，常采用 Boussinesq 假设（即只在重力项中考虑密度变化），刚盖假设（滤除表面波影响），平坦海底地形假设（消除地形影响）等来简化模型。关于流体性质，则可依据海洋水体的参数和所研究内波的尺度，采用无地转，无粘不可压缩等假设。

内波的振幅关系着非线性效应的强弱，对理论分析有着重要影响。最简单的情况是小振幅对流项可忽略的线性内波，给定背景密度环境后可直接由 Euler 方程得出解析解 (Cushman-Roisin and Beckers 2011)。对于有限振幅的内波，又可分为弱非线性和完全非线性两种情况。弱非线性理论指出在非线性效应与色散效应平衡的情况下（即振幅与水深的比值，水深与波长比值的平方两参量同量级且远小于 1）可通过 KdV 或 eKdV 理论得出内孤立波解 (Helffrich

and W. Kendall Melville 2006)。例如 Yang, Y. J. 等人 (2010) 通过 KdV 理论, 在流体三层密度分别为不同常数的情况下得出了不同模态内孤立波的解析解。弱非线性理论的优点是它考虑了时间相关项, 能帮助我们认识非线性内波的发展过程, 对于观测具有指导意义; 但它不能描述不同模态的波的相互作用, 只能认为它们是独立传播, 且预测的波速也与完全非线性模型有较大出入 (Liu et al. 2019)。对于完全非线性模型, 则可采用分层流体的 MCC 理论或连续分层流体的 DJL 方程 (Dunphy et al. 2011; Helfrich and W. Kendall Melville 2006)。其中 DJL 方程仅在密度线性变化时才有显式的解析解 (Dunphy et al. 2011)。

另一些研究讨论了流体密度环境的变化及简化假设的影响, 例如 Boussinesq 近似主要在跃层处产生较大误差 (方欣华 and 杜涛 2005), 背景流的影响 (Stastna and Lamb 2002; 邓冰 et al. 2014) 等。改变海底地形, 可研究内孤立波的模态转换 (Liu et al. 2019), “呼吸”状内波的形成 (Terletska et al. 2016)。地转效应是否可以忽略, 也需要进一步探讨 (刘永军 2009; 方欣华 and 杜涛 2005)。考虑地转, 则能得到 Ostrovsky 方程, OH 方程, 带地转的 KdV 及带地转的 MCC 等模型方程, 其描述的内波也有与非地转的内波不同的性质, 如没有稳态孤立波解, 科氏力的色散效应抑制孤立波产生, 存在抛物线解等 (Farmer et al. 2009; Gerkema 1996; R. Grimshaw and W K. Melville 1989; Roger Grimshaw 1985; Stepanyants 2020)。

三维模型虽然分析难度较高, 但能更好地解释各种效应与内波生成机制 (Helfrich and W. Kendall Melville 2006), 特别是在地转效应研究上具有天然的优势。有关三维模型的研究主要以 KdV 方程的扩展——KP 方程为中心 (Akylas 1994), 如 KP 方程的提出和求解 (Freeman et al. 1983; Manakov et al. 1977), 利用 KP 方程研究地转效应 (R. Grimshaw and W K. Melville 1989; Roger Grimshaw 1985), 此外还有三维第二模态内孤立波质量输运的模拟 (Deepwell and Stastna 2016) 等。

关于内孤立波的生成机制也有不少研究。对于第一模态内孤立波而言, 有正压潮汐流经过地形, 由第二模态内孤立波产生等理论; 对第二模态内孤立波而言, 有第一模态内孤立波进入浅水时不稳定, 分层流体重力塌陷, 海洋内部振动传导至密跃层激发等理论, 其中重力塌陷法常被用于实验室研究第二模态内孤立波 (Liu et al. 2019; Rayson et al. 2019)。

对内孤立波的数值模拟主要有两种方法, 一是在运动坐标系下求无粘稳定解, 二是直接对分层流体的 Navier-Stokes 方程作数值模拟。在研究第二模态孤立波时, 由于可能在双峰形态中部产生涡核, 在流动接近不稳定时, 往往需要引入粘性项才能较好地进行描述 (Terez and Knio 1998)。在数值模拟中具有代表性的结果是 DJL 方程的数值求解工具, 其主要依赖于 Turkington 等人 (1991) 提出的变分方法, 迭代程序和 M. Dunphy 等人 (2011) 提出的谱方法。依据此方法可数值求解连续密度分层情况下的第一模态内孤立波 (Helfrich and W. Kendall Melville 2006)。在研究波的相互作用或地形的作用时, 也有其他的数值方法, 如计算 RANS 方程 (Rayson et al. 2019), 使用 MITgcm(MIT general circulation model) 进行模拟 (Yuan et al. 2018) 等。

## 1.6 研究工作概述

主要的研究工作流程图如下。

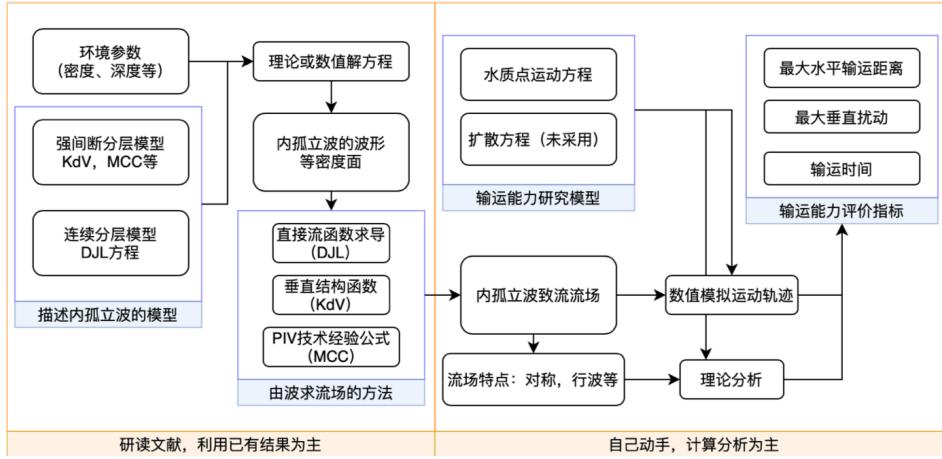


图 1: 主要研究流程图

由图中可见, 从环境参数到内波输运能力需要经过两个主要步骤。左半侧主要是不同模型内波及其致流的导出方法, 这一部分比较复杂艰难, 但前人已经积累了大量经验, 主要通过阅读文献, 学习已有知识来完成这一部分。右半侧则是根据求得的流场数值或理论计算质点运动轨迹来求得输运能力的评价指标。这一部分逻辑明确, 难度较低, 主要通过自己动手理论推导和编写程序完成。

主要研究工作结果详述如下。第二节在简介海洋非线性内波特点的基础上, 将不同模型内波的流场特点抽象出来, 建立数学模型, 进而理论研究水平输运距离, 输运特征时间和垂直位移三个输运指标与流场的关系。第三、四、五节分别具体研究 KdV, MCC 和 DJL 模型。在每一节中先简介相关理论的基本方程, 然后在相近的环境参数下给出一个具体的内波例子, 分析其性质, 流场性质和对质点的输运情况, 并与理论公式相比较, 最后给出不同环境参数下内波性质及最大输运距离的变化规律。第六节总结全文的工作, 并提出一些改进想法和可能的新研究方向。

## 2 海洋非线性内波输运能力理论分析

### 2.1 主要符号约定

符号	含义
$a$	波峰处水平流速与波速比值, 表征波的强度
$c$	内孤立波的波速
$h_0$	流场中垂直速度为零的深度
$L$	水平输运距离
$L_{max}(z)$	在 $z$ 深度上的最大水平输运距离
$L_{max}$	整个流场或所考虑范围内的最大水平输运距离
$t$	质点运动的时间
$u$	流场的水平方向速度分量, 或水平流场
$u_1$	水平流场与 $X$ 相关的部分
$u_2$	水平流场与 $z$ 相关的部分
$u^*$	经过波速无量纲化后的水平流场, $u^* = u/c$
$w$	流场的垂直方向速度分量, 或垂直流场
$w_1$	垂直流场的与 $X$ 相关的部分
$w_2$	垂直流场与 $z$ 相关的部分
$x$	水质点的实际水平位置
$X$	水质点在行波坐标系内的位置, $X = x - ct$
$X^*$	经过波长无量纲化的行波坐标系位移, $X^* = X/\lambda$
$z$	水质点的实际垂直位置
$\lambda$	表征内孤立波的波长 (波宽)
$\Delta t$	主要输运过程所用的时间
$\Delta z$	水质点输运过程中最大垂直位移

表 1: 所用符号说明

### 2.2 海洋内波及其致流的总体特征

内波的产生, 传播, 耗散及消亡是一个复杂的过程。对绝大多数内波而言, 在其生命周期中它的振幅、频率、波长等性质都在不断发生变化。但是如果考虑较为稳定的内孤立波的传播过程, 则为便于研究可作简化假设, 认为其性质在传播中没有发生明显变化。以下简称内孤立波为内波。

正如引言所述, 内波的振幅大小是其建模的重要因素。当内波振幅不可忽略时, 就需要考虑非线性效应。对于浅水内波, 在非线性较弱时常用 KdV 等方程进行建模, 非线性较强时就需要采用 eKdV, MCC 等模型。KdV, MCC 等模型均是间断分层模型, 即在对密度分层流体建模时, 认为每一层的密度不同, 在层与层之间有密度间断, 由此产生了一系列物理量的不连

续性。与之相对的，存在连续分层模型，即不将流体分层，而是通过一个连续函数给定背景密度，并据此求解内波方程。DJL 模型是连续分层模型中具有代表性的一种，并且其还具有描述大振幅内波的能力。

内波致流是由内波引发的流场。由于内孤立波在传播时性质不发生变化，可知其引发的流场性质也不会发生变化。故在以波速行进的行波坐标系中观察，流场是定常的。内波导致的流场可分为水平方向流场和垂直方向流场。由于内波波形往往是水平对称的，流场也具有一定的对称性。其中水平流场是水平对称的，且在最中间波峰处达到最大的水平速度，而垂直方向流场则是水平反对称的。对于间断分层模型而言，往往在不同层流体中有不同方向的水平流场，在间断面上不连续；而垂直流场则是连续地跨过间断面。对于连续分层模型而言，虽然没有间断面的概念，但是仍然存在类似的分层结构，在密度过渡梯度较大处更为明显。

### 2.3 内孤立波致流特征及输运能力指标

如前假设，内孤立波传播时性质不发生变化，其数学表达如下。考虑波传播的  $x - z$  平面，假设波的传播速度恒为  $c$ ，则内波等密度面的振幅  $A$ ，流场的水平及垂直流速  $u, w$  等物理量均可表为  $x - ct$  和  $z$  的函数，并且假定它具有乘积的形式。

$$u(x, z, t) = u(x - ct, z) = u_1(x - ct)u_2(z) \quad w(x, z, t) = w(x - ct, z) = w_1(x - ct)w_2(z) \quad (1)$$

对于稳定的孤立波而言要求  $u < c$  恒成立，否则将产生破碎。

为了考察内孤立波致流的输运能力，需要研究在流场作用下水质点的运动情况。根据上面的流场表达式，在时刻  $t$  处于位置  $(x, z)$  的水质点的运动方程为

$$\frac{dx}{dt} = u_1(x - ct)u_2(z) \quad \frac{dz}{dt} = w_1(x - ct)w_2(z) \quad (2)$$

我们主要通过水质点在水平方向上，垂直方向上的位移及发生位移的时间尺度来衡量内孤立波致流的输运能力。下面对这些物理量作一些理论分析。

### 2.4 水平输运距离的理论分析

由数值模拟经验发现，最大输运距离经常出现在没有垂直运动的深度上。我们首先考虑垂直运动不影响水平运动的情况，即  $u_2(z)$  为常数。这有两种可能。其一是在深度  $z = h_0$  有  $w_2(h_0) = 0$ ，于是位于此深度的水质点在垂直方向上没有运动。由刚盖和平底假设可知上下表面都符合此条件。除此之外，依具体模型不同，流场中可能还有别的深度满足此条件。

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow z = h_0 \quad \forall t \quad (3)$$

由此水平方向上  $u_2(z) = u_2(h_0)$  为一常数。另一种可能是在某一个深度范围内均存在  $u_2(z)$  为常数，且质点在运动过程没有离开此深度范围。

在这两种情况下，可将  $u_1u_2$  乘积简记为  $u(x - ct)$ ，于是水平运动方程不再受垂直坐标影响。

$$\frac{dx}{dt} = u(x - ct) \quad (4)$$

在上式两边同时减去波速  $c$ , 并记  $X = x - ct$ , 可得

$$\frac{d(x - ct)}{dt} = u(x - ct) - c \Rightarrow \frac{dX}{dt} = u(X) - c \quad (5)$$

移项, 两边乘  $u$ , 并利用  $u dt = dx$  得

$$\frac{u(X) dX}{u(X) - c} = dx \quad (6)$$

我们希望能计算  $t_1$  到  $t_2$  时刻水质点被输运的距离, 设经过这段时间质点位置从  $x_1$  变为  $x_2$ , 记  $X_i = x_i - ct_i$ ,  $i = 1, 2$ , 由  $u < c$  易知  $X_2 < X_1$ 。对上式两边积分即得

$$L = x_2 - x_1 = \int_{X_1}^{X_2} \frac{u(X) dX}{u(X) - c} = \int_{X_2}^{X_1} \frac{u(X) dX}{c - u(X)} \quad (7)$$

记  $f(X) = u/(c - u)$ , 可见输运距离就是  $X = X_1, X_2$ ,  $X$  轴与  $f$  曲线所围成的面积。

作为常见的情况, 假定对  $\forall X$  有  $0 < u < c$ , 那么  $f(X)$  恒大于零, 自然可得

$$L_{max} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) dX \quad (8)$$

这对应  $t_1 = -\infty$ ,  $t_2 = +\infty$  的情况, 且与  $x_1, x_2$  无关。从直觉上也很容易理解, 因为任意最初位置的水质点都经历了一个相同的完整的流场变化。

简单分析在什么条件下  $L_{max}$  有限。被积函数  $f$  本身由于  $0 < u < c$ , 没有奇点。因此反常积分只需考虑正无穷的情况, 取  $u_m$  为  $u$  在  $[X_2, +\infty)$  上的最大值, 由  $0 < u < c$  易得如下不等式

$$\frac{1}{c} \int_{X_2}^{+\infty} u(X) dX < \int_{X_2}^{+\infty} f(X) dX < \frac{1}{c - u_m} \int_{X_2}^{+\infty} u(X) dX \quad (9)$$

于是  $\int^{+\infty} f(X) dX$  的收敛性与  $\int^{+\infty} u(X) dX$  的收敛性相同, 因此

$$L_{max} < \infty \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow +\infty} u(X) = o(X^{-1}) \quad (10)$$

对于  $X \rightarrow -\infty$  的情况也是同理, 因此可以总结当  $X \rightarrow \infty$  时  $u(X)$  的衰减速度至少要比  $X^{-1}$  快, 否则质点就会有无穷大的位移。实际上, 由于内孤立波的  $u(X)$  以双曲正割函数为主, 故这一条件总能满足。

下面对最大输运距离作一估计。和直觉不完全一致, 最大输运距离不直接与水平流场  $u$  相关, 而是依赖且仅依赖于水平流场和波速的相对大小  $u/c$ 。较大的  $u$  使得质点运动速度变快, 在  $c$  不变的情况下确实能使得质点运动距离变长, 但是由于  $u < c$  的限制, 要想产生更大水平流速的流场, 需要内孤立波的波速更大, 这使得质点受孤立波致流的影响时间减少, 最终输运距离的变化情况无法简单判断。

记  $u^*(X) = u(X)/c$  为无量纲速度,  $u^* \in (0, 1)$ 。

$$L_{max} = \int_{\mathbb{R}} f dX = \int_{\mathbb{R}} \frac{u^*}{1 - u^*} dX \quad (11)$$

其中函数  $f$  的特性使得在  $u^*$  接近 1 的地方,  $f$  迅速增大直至正无穷, 由此产生较大的输运距离。对应的情景为流场水平速度在某处接近波速, 某质点将被其控制, 以接近波的速度一同运动, 能在较长的时间内获得较大的速度, 因此会有很远的运动距离。

下面利用具体实例来分析，通常孤立波有振幅和波长两要素，取速度波形为

$$u^* = a \operatorname{sech}^2(X/\lambda) \quad (12)$$

其中  $a$  反映最大流场水平速度与波速的比值， $\lambda$  则反映波长，在  $x = \pm\lambda$  处  $u^*$  衰减到最大值的约 42%。对于  $u^* > 0$  的情况，积分结果为

$$L = 2 \int_0^X \frac{u^*}{1 - u^*} dX = 2\lambda \sqrt{\frac{a}{1-a}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a}{1-a}} \tanh(X/\lambda) \right) \quad (13)$$

$$L_{max} = 2\lambda \sqrt{\frac{a}{1-a}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right) := 2 \cdot g(a)|_{a>0} \cdot \lambda \quad (14)$$

可见最大输运距离与波长  $\lambda$  直接成正比，与  $a$  的关系则略有些复杂，但其实也是单调递增。在对数图中作图如下。

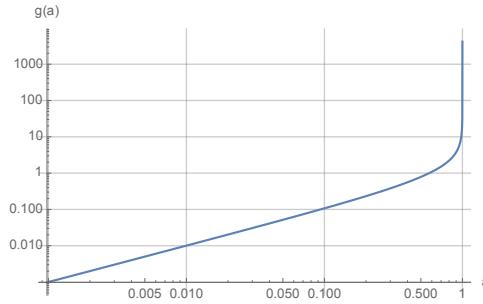


图 2:  $g(a)|_{a>0}$  对数图

可见在  $a < O(0.1)$  时  $g(a) \approx a$ 。因此在  $a$  较小，波运动速度比流场快的多时可以用以下式子近似。

$$L_{max} = 2a\lambda \quad (15)$$

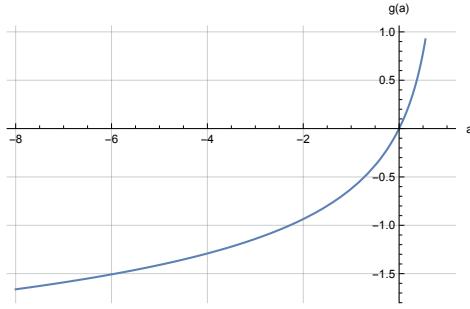
即最大输运距离和波长与  $u(0)/c$  的乘积成正比。在接近 1 时， $g(a)$  迅速增大，可以用如下式子近似。

$$L_{max} = 2(1-a)^{-1/2}\lambda \quad (16)$$

特别地，若在某区间内有  $u < 0$ ，即表示水平流场速度与波速方向相反，粒子将被向后输运，对应  $L < 0$ 。但是此时无论  $|u|$  多大， $c - u$  恒大于零而不会产生奇性。此时  $g(a)$  表达式在形式上有一些变化。

$$g(a)|_{a<0} = -\sqrt{\frac{-a}{1-a}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{-a}{1-a}} \quad (17)$$

作图如下。可见在  $a < 0$  时曲线增长较为缓慢，但实际上还是趋向于负无穷。

图 3:  $g(a)$  曲线图

## 2.5 水平输运的特征时间

下面对输运过程的特征时间作一分析。同样假设垂直运动不影响水平运动，由类似的推导可知

$$dX = (u - c) dt \Rightarrow \int_{X_2}^{X_1} \frac{1}{c - u} dX = t_2 - t_1 = \Delta t \quad (18)$$

类似地设波长为  $\lambda$ ，将积分无量纲化，得

$$\frac{\lambda}{c} \cdot \int_{X_2^*}^{X_1^*} \frac{1}{1 - u^*(X^*)} dX^* = \Delta t \quad (19)$$

可见输运的时间是波的“周期” $\lambda/c$  的某一个倍数。

仍然取双曲正割函数进行分析。

$$u^*(X^*) = a \operatorname{sech}^2(X^*) \quad (20)$$

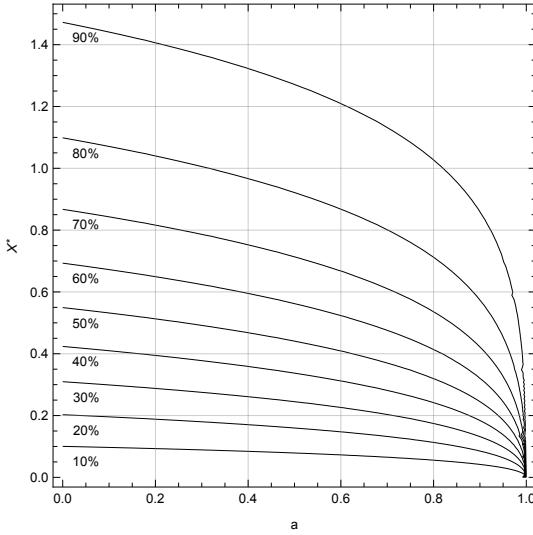
积分结果为

$$\int_0^{X_0^*} \frac{1}{1 - u^*(X^*)} dX^* = X_0^* + \sqrt{\frac{a}{1-a}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a}{1-a}} \tanh X_0^* \right) \quad (21)$$

显然可见对于较小的  $a$ ，有

$$\int_0^{X_0^*} \frac{1}{1 - u^*(X^*)} dX^* \approx X_0^* \quad (22)$$

虽然需要无穷长的时间来完成整个输运过程，但是其实只需要很短一段时间就能完成绝大部分的输运进度，这一段时间的长短是我们比较关心的。定义输运进度为  $\pm X^*$  对应的质点位移与最大输运距离之比，由式 (13)，作图得

图 4: 输运进度与  $X^*$  的关系

可见对于绝大部分的  $a$ , 当质点的  $X$  坐标满足  $X^* > 1.4$  时, 就可以认为内波已经对其完成了至少 90% 的输运进度。因此, 根据对称性, 可以认为对于较小的  $a$ , 内波对质点输运效应较强的时间段长度为

$$\Delta t \approx \frac{3\lambda}{c} \quad (23)$$

对于接近 1 的  $a$ , 虽然达到 90% 输运进度的  $X^*$  变小了, 但是式 (21) 中的主项并非为  $X_0^*$  项。计算得两项大小相当的临界值约为  $a = 0.7$ , 后一项是前一项三倍大小时临界值约为  $a = 0.9$ 。此时, 应有

$$\Delta t \approx \frac{\lambda}{c} \cdot O\left(\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right) = \frac{\lambda}{c} \cdot O((1-a)^{-1/2}) \quad (24)$$

## 2.6 垂直方向运动分析

下面考虑带有垂直运动的情况。设在  $h_0$  的某一个高度邻域  $|z - h_0| \in \Delta h$  中,  $u > 0$ , 有  $X \cdot \partial_X u < 0$ 。根据连续性方程, 有

$$X \cdot \partial_z w > 0 \quad (25)$$

考虑到在  $w(X, h_0) = 0$ , 在此邻域内有

$$X \cdot (z - h_0) \cdot w > 0 \quad (26)$$

因此略微向上 (向下) 偏离  $z = h_0$  的质点, 将在波前上升 (下降), 在波后下降 (上升)。对于  $u < 0$  的情况, 则情况相反。

对于水平对称流场, 可以证明质点在对称的时间区间内具有零的垂直位移。记流场为  $u(x-ct, z), w(x-ct, z)$ ,  $X = x - ct$ , 首先由  $u(X, z)$  关于  $X = 0$  对称证明  $w(X, z)$  关于  $X = 0$  反对称。

由连续性方程  $u_X + w_z = 0$ , 以及  $w(X, h_0) = 0$  得

$$w(X, z) = \int_{h_0}^z -u_X(X, z) dz \quad (27)$$

于是

$$w(-X, z) = \int_{h_0}^z -u_X(-X, z) dz \quad (28)$$

由于  $u(X, z) = u(-X, z)$ , 因此  $u_X(X, z) = -u_X(-X, z)$ 。故有

$$w(-X, z) = \int_{h_0}^z u_X(X, z) dz = -w(X, z) \Rightarrow w(X, z) = -w(-X, z) \quad (29)$$

下面考虑质点轨迹, 设轨迹函数为

$$X = x - ct = f_1(t) \quad z = f_2(t) \quad (30)$$

并设初始点为  $t = 0, X = 0, z = z_0$ , 故轨迹函数满足方程

$$\frac{df_1}{dt} = u(f_1(t), f_2(t)) - c \quad \frac{df_2}{dt} = w(f_1(t), f_2(t)) \quad f_1(0) = 0 \quad f_2(0) = z_0 \quad (31)$$

在  $u, w$  给定的情况下, 由粒子轨迹唯一这一物理意义可知方程的解具有唯一存在性。下面证明  $-f_1(-t), f_2(-t)$  也是方程的解。

设  $s = -t$ , 代入上述方程, 得

$$-\frac{df_1(-s)}{ds} = u(f_1(-s), f_2(-s)) - c \quad -\frac{df_2(-s)}{ds} = w(f_1(-s), f_2(-s)) \quad (32)$$

结合  $u, w$  的对称性质, 可知

$$-\frac{df_1(-s)}{ds} = u(-f_1(-s), f_2(-s)) - c \quad -\frac{df_2(-s)}{ds} = -w(-f_1(-s), f_2(-s)) \quad (33)$$

记  $g_1(s) = -f_1(-s)$ ,  $g_2(s) = f_2(-s)$ , 得

$$\frac{dg_1(s)}{ds} = u(g_1(s), g_2(s)) - c \quad \frac{dg_2(s)}{ds} = w(g_1(s), g_2(s)) \quad (34)$$

对于初始条件, 也有  $g_1(0) = f_1(0) = 0$ ,  $g_2(0) = f_2(0) = z_0$ , 因此  $g_1, g_2$  与  $f_1, f_2$  满足相同的方程。由唯一性, 只能有

$$f_1(t) = g_1(t) = -f_1(-t) \quad f_2(t) = g_2(t) = f_2(-t) \quad (35)$$

由此, 可知  $f_1$  为奇函数,  $f_2$  为偶函数。

因此, 对于输运开始和结束时间满足以下条件的输运过程而言, 总能通过时间平移变换, 使得质点位于  $X = 0$  为时间原点, 由以上分析得质点在垂直方向上位移为零。

$$X \left( t = \frac{t_1 + t_2}{2} \right) = 0 \quad (36)$$

此条件也可写为

$$x \left( t = \frac{t_1 + t_2}{2} \right) = c \cdot \left( \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \quad (37)$$

注意到当  $t_1 \rightarrow -\infty$ ,  $t_2 \rightarrow +\infty$  时, 上式右端可以为任意值, 而由于质点的输运距离有限, 左端值限定在某一区间内, 因此这一条件总是可以满足。故对于完整的输运过程而言, 质点的垂直位移总是零。

现在来分析质点的最大的垂直位移。由前节, 对于  $u > 0$ , 质点深度在  $h_0$  以上的情况, 质点的最高点由  $f_2(0) = z_0$  决定, 最低点则是  $t = \pm\infty$  时的深度, 因此最大垂直位移就是此二深度之差。

首先写出垂直流场的表达式, 由之前的分析易得

$$u(X, z) = u_1(X)u_2(z) \quad w(X, z) = -u'_1(X) \int_{h_0}^z u_2(z) dz \quad (38)$$

考虑简单的情况,  $u$  在垂直方向上没有变化, 即  $u_2(z) = k$  为常数。由质点的轨迹方程,

$$\frac{df_1}{dt} = ku_1(f_1(t)) - c \quad \frac{df_2}{dt} = -ku'_1(f_1(t))(f_2(t) - h_0) \quad (39)$$

第一式对  $t$  求导, 得

$$\frac{d^2f_1}{dt^2} = \frac{df'_1}{dt} = ku'_1(f_1(t))f'_1(t) \Rightarrow \frac{df'_1}{f'_1} = ku'_1 dt \quad (40)$$

代入第二式,

$$\frac{df_2}{f_2 - h_0} = -ku'_1 dt = -\frac{df'_1}{f'_1} \quad (41)$$

积分得

$$\frac{f_2(t_2) - h_0}{f_2(t_1) - h_0} \cdot \frac{f'_1(t_2)}{f'_1(t_1)} = 1 \quad (42)$$

考虑  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \infty$  起始和结束两个时间点, 起点选为  $(0, z_1)$ , 即  $X = 0$ ,  $f_2(t_1) = z_1$ , 此时速度  $f'_1(t_1) = u(t=0) - c = u(X=0) - c$ , 由  $a$  的定义这就是  $c(a-1)$ 。 $f_2(t_2) = z_2$  是待求量, 此时粒子已经远离流场中心, 流场速度为零, 仅有行波坐标系带来的速度  $f'_1(t_2) = -c$ , 因此

$$z_2 = z_1 - az_1 + ah_0 \quad (43)$$

于是最大垂直位移为

$$\Delta z = z_1 - z_2 = a(z_1 - h_0) = \frac{a}{1-a}(z_2 - h_0) \quad (44)$$

此式对于质点跨越分界面的情况不能简单套用, 因为在分界面两侧  $f'_1(f_2 - h_0)$  一般不相等, 即使  $f'_1, h_0$  在分界面两侧取为不同的值。

另外, 此式说明最大垂直位移与两个因素有关: 波的强度 (通过最大水平速度与波速的比值  $a$  表现) 与距离无垂直运动面的距离, 且是简单的乘积关系。距离无垂直运动面距离越远, 波的强度越强, 质点在垂直方向上运动的距离越远, 最远直到  $h_0$ 。

$u_2$  不为常数, 近似误差较大的情况比较复杂, 目前没有找到较好的分析方法。

### 3 KdV 内波理论研究

#### 3.1 KdV 内波理论简介

KdV 所研究的内波模型可简述如下。设水体深度为  $H$ , 密度  $\rho(z)$  在垂直方向上略有变化, 参考密度或取平均密度为  $\rho_0$ 。内波在  $x-z$  平面内传播,  $z \in [-H, 0]$ , 等密度面的振幅为  $\eta$ , 则有如下 KdV 方程 (Yang et al. 2010)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (45)$$

式中  $c_0$  为线性波的波速, 其他系数为

$$\alpha = \frac{3c_0}{2} \frac{\int_{-H}^0 \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^3 dz}{\int_{-H}^0 \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz} \quad \beta = \frac{c_0}{2} \frac{\int_{-H}^0 \phi^2 dz}{\int_{-H}^0 \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz} \quad (46)$$

其中  $\phi$  为垂直结构函数, 由静力平衡, 无摩擦, 无背景流及 Boussinesq 假定下的 Taylor-Goldstein 方程确定, 也是其特征函数。而对应的线性波速  $c_0$  为其特征值。

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{N^2}{c_0^2} \phi = 0 \quad N^2(z) = \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz} \quad (47)$$

采用上下刚盖假设时, 在  $z=0$  及  $z=-H$  处有边界条件  $\phi=0$ 。此外, 还需要满足在区域内  $\max \phi = 1$ 。

KdV 方程式 (45) 有具有双曲正割函数形式的行波解 (Yang et al. 2010), 即

$$\eta(x, t) = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x - ct}{\lambda} \right) \quad c = c_0 + \frac{\alpha \eta_0}{3} \quad \lambda = \sqrt{\frac{12\beta}{\alpha \eta_0}} \quad (48)$$

式中  $\eta_0$  为给定的波中心的振幅, 也是其最大振幅。 $c$  为非线性波的波速,  $\lambda$  表征波长。在求得  $\eta$  的表达式后, 整个水体中水质点的垂直方向位移由分界面振幅  $\eta(x, t)$  乘以垂直结构函数  $\phi(z)$  得到, 进而求得垂直流向的速度, 再通过不可压缩条件求得水平流向的速度。

$$w(x, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} (\eta(x, t) \phi(z)) = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \phi(z) \quad (49)$$

$$= \frac{2c\eta_0}{\lambda} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x - ct}{\lambda} \right) \tanh \left( \frac{x - ct}{\lambda} \right) \phi(z) \quad (50)$$

$$u(x, z, t) = - \int \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial z} dx = -\phi'(z) \int \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx \quad (51)$$

$$= c\eta_0 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x - ct}{\lambda} \right) \phi'(z) \quad (52)$$

由于在无穷远处流体不受内波影响而静止, 因此可由  $u(\infty, z, t) = 0$  确定积分常数。从式中可见, 流场的水平结构与垂直结构是相分离的。水平方向主要受具有行波形式的双曲函数控制, 而垂直方向则完全取决于垂直结构函数  $\phi$  及其导数。

需要说明的是，尽管内波经过时等密度面会发生起伏，从而影响 Taylor-Goldstein 方程的求解，但是在本模型中并不考虑这一点而认为垂直结构函数在内波经过时也保持不变。这一方面源于模型本身的缺陷，另一方面也可认为模型只能适用于小振幅内波，从而等密度面的振荡对解的性质影响较微弱。

考察各物理量与深度  $H$  的关系，由线性波理论知  $c_0 \sim H^{1/2}$ 。由以上分析不难得出

$$\begin{aligned} h_i &\sim H \quad \phi \sim 1 \quad \frac{d\phi}{dz} \sim H^{-1} \quad \alpha \sim H^{-1/2} \quad \beta \sim H^{5/2} \\ \eta_0 &\sim H \quad c \sim H^{1/2} \quad \lambda \sim H \quad u \sim H^{1/2} \quad w \sim H^{1/2} \end{aligned} \quad (53)$$

以二层简化流体模型为例，设流体上，下层厚度分别为  $h_1, h_2$ ,  $h_1 + h_2 = H$ 。除分界面附近，上下层密度分别为常数  $\rho_1, \rho_2$ ，而在分界面附近设有宽度为  $\Delta z$  的极薄密度过渡层，使得密度在分界面附近连续，在其中取  $N^2 = \frac{g\Delta\rho}{\rho_0\Delta z}$ ,  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ 。由于  $\Delta z$  很小，在上下层可以将  $N = 0$  代入 Taylor-Goldstein 方程求解，方程变为

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \quad (54)$$

除了边界条件  $\phi(0) = \phi(-H) = 0$ ，极大值条件  $\max \phi = 1$  外，我们还要求  $\phi$  在分界面上连续，即  $\phi(-h_1^-) = \phi(-h_1^+)$ 。由此可以确定解的表达式为

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{h_1}z & -h_1 \leq z \leq 0 \\ \frac{1}{h_2}(z + h_1) + 1 & -h_1 - h_2 \leq z < -h_1 \end{cases} \quad (55)$$

将 Taylor-Goldstein 方程在分界面附近的过渡层中积分，可得

$$\left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{-h_1-\Delta z/2}^{-h_1+\Delta z/2} + \int_{-h_1-\Delta z/2}^{-h_1+\Delta z/2} \frac{N^2}{c_0^2} \phi dz = 0 \quad (56)$$

由于  $\Delta z$  很小，利用积分中值定理化简得

$$\left( -\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) + \Delta z \cdot \frac{g\Delta\rho}{\rho_0 c_0^2 \Delta z} \phi(-h_1) = 0 \quad (57)$$

即解得线性波速

$$c_0^2 = \frac{g'h_1h_2}{h_1+h_2} \quad g' = \frac{g\Delta\rho}{\rho_0} \approx \frac{2g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2} \quad (58)$$

将解得的  $\phi$  代入式 (46)，可解得 KdV 方程的非线性参数和色散参数为

$$\alpha = \frac{3c_0}{2} \frac{h_1 - h_2}{h_1h_2} \quad \beta = \frac{c_0}{6} h_1h_2 \quad (59)$$

由此可解得对应的波和流场。

对于三层流体的情况，可以作类似的分析，导出

$$(h_1 + h_2 + h_3)c_0^4 - (h_1(h_2 + h_3)g'_1 + (h_1 + h_2)h_3g'_2)c_0^2 + h_1h_2h_3g'_1g'_2 = 0 \quad (60)$$

其中  $g'_i$  为在第  $i$  个分界面附近的约化重力，其表达式为

$$g'_i = \frac{g\Delta\rho_i}{\rho_0} = \frac{g(\rho_{i+1} - \rho_i)}{\rho_0} \quad i = 1, 2 \quad (61)$$

由  $c_0$  的方程可知  $|c_0|$  总是有两个解，这两个  $|c_0|$  分别对应两种模态的内孤立波，其中较大的对应速度较快的第一模态内孤立波，较小的对应速度较慢的第二模态内孤立波，相应地  $\phi, \alpha, \beta, \eta, u, v$  等量也都有对应的两组解。对于二层流体模型，由式 (58) 可知其只有一种模态的内孤立波。而对于四层流体模型，相应地则有三种模态的内孤立波。由于一般海洋可以近似成三层模型，故观测结果以第一和第二模态内孤立波为主。

对三层模型而言，由于需要满足  $\alpha\eta > 0$ ，内孤立波振幅的正负由  $\alpha$  决定，而  $\alpha$  取决于三层的厚度  $h_1, h_2, h_3$  (Yang et al. 2010)。具体取值范围如下图所示。

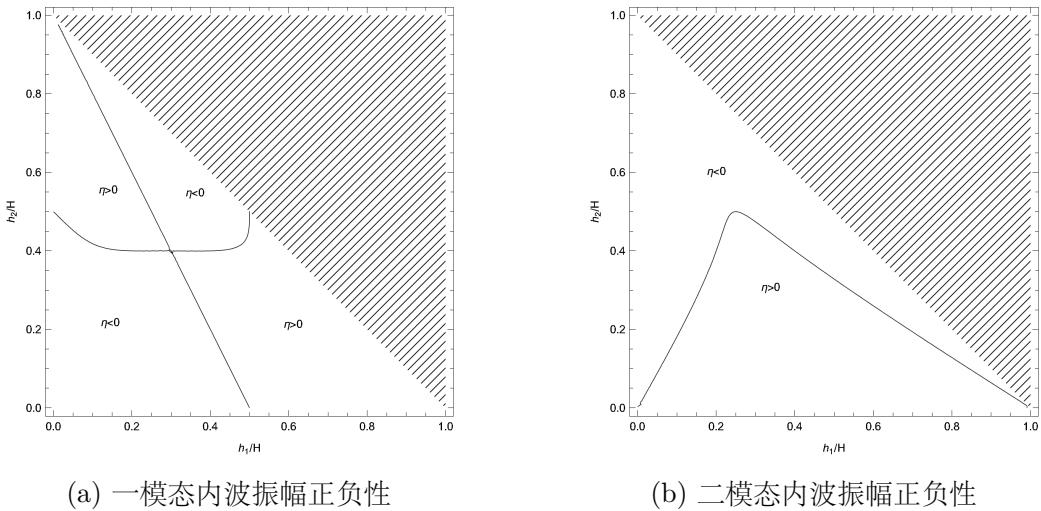


图 5: 三层 KdV 模型两种模态内波的振幅正负性

### 3.2 KdV 理论内波致流流场分析

考虑 KdV 内波的水平输运能力，根据式 (7) 和式 (52) 两式，可直接给出 KdV 理论下内波的水平输运距离表达式。在不考虑水质点运动过程中  $\phi'(z)$  的变化时，由式 (14) 和式 (17)，取  $a = \eta_0\phi'(z)$  即得在某一深度上的最大输运距离

$$L_{max}(z) = 2\lambda \cdot g(\eta_0\phi'(z)) \quad g(a) = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{1-a}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right) & 0 \leq a < 1 \\ -\sqrt{\frac{-a}{1-a}} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{-a}{1-a}} \right) & a < 0 \end{cases} \quad (62)$$

完成输运主要过程的时间，和线性近似下最大垂直位移可以根据式 (23) 和式 (44) 确定。对于质点跨越分界面的情况则不能直接使用此公式。

下面进行具体数值模拟分析。研究三层二模态内波，取  $H = 1 \text{ m}$ ，环境参数为

$h_1$	$h_2$	$h_3$	$\rho_0$	$\Delta\rho_1/\rho$	$\Delta\rho_2/\rho$	$g$	$\eta_0$
$0.3H$	$0.4H$	$0.3H$	$10^3 \text{ kg/m}^3$	0.01	0.01	$9.8 \text{ m/s}^2$	$0.1H$

表 2: KdV 三层二模态内波环境参数例

对于不同的水深，可以根据式 (53) 来作相应缩放。值得注意的是，此处参数满足  $h_1 = h_3$  和  $\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2$  的条件能够滤除三层模型中的一模态内波，使得其对应的  $\alpha$  值为零，故满足这一条件的参数常被实验采用。振幅与水深的比值 0.1 虽然不是充分小，但是能够更好地定性反映内波及其流场的性质。

如下所示为该组参数下二模态内波及流场的计算结果。其中间断是由流体的分层性所致。此内波的波长为  $\lambda = 0.69 \text{ m}$ ，波速为  $0.12 \text{ m/s}$ 。

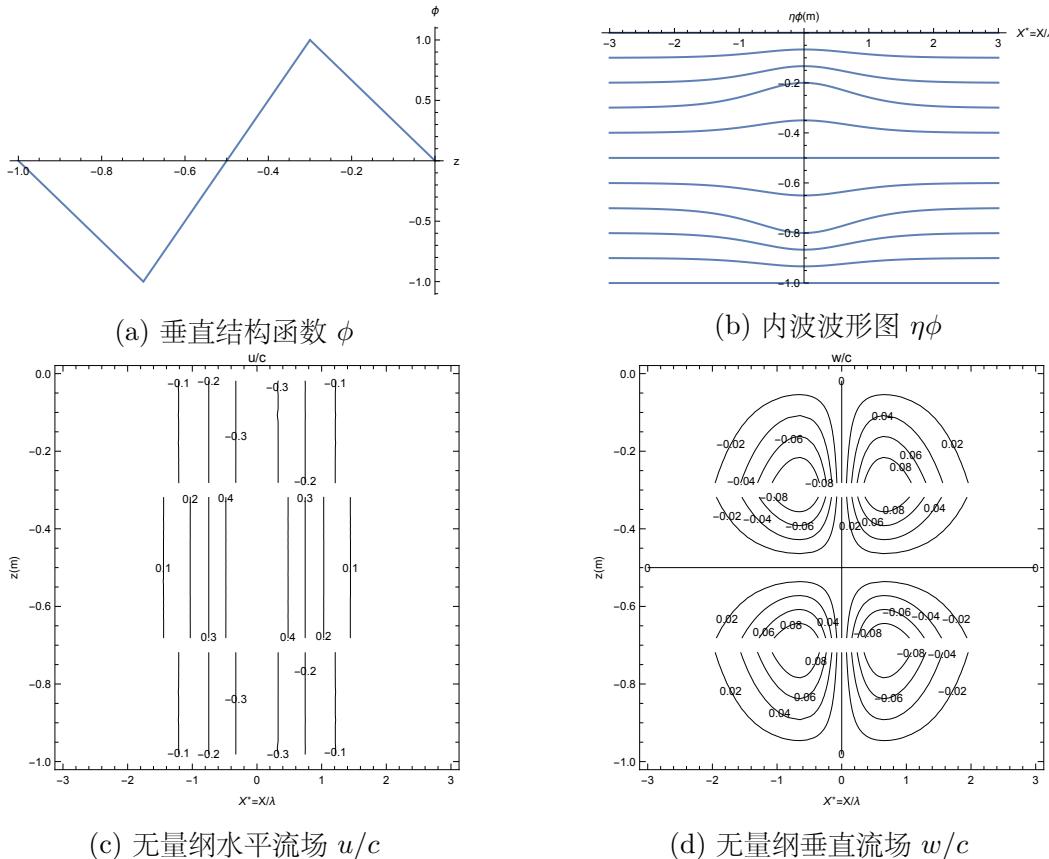


图 6: 三层二模态内波计算结果例

从上图中图 (b) 可见，内波在水体上下层的振动方向相反，故称为第二模态内波。其在上半层表现为向上凸起，下半层表现为向下凹陷，形成一个典型的双峰结构。从图 (c) 中可见水平流场在上层、下层为逆着波传播的方向，而在中间层为顺着波传播的方向。图 (d) 可见在波前，上层为上升流而下层为下沉流，在波后则相反。

考察内波对水下结构物的影响，这一影响通过流场的压强来反映。定义扰动压强为实际压

强与静水压强之差，根据水平动量方程可推得内波导致的扰动压强分布，即

$$-\frac{\partial p'}{\partial x} = \rho(u_t + uu_x + wu_z) = \rho((u - c)u_X + wu_z) \quad (63)$$

认为  $3\lambda$  处为远场，扰动压强为零，数值积分结果如下图所示。

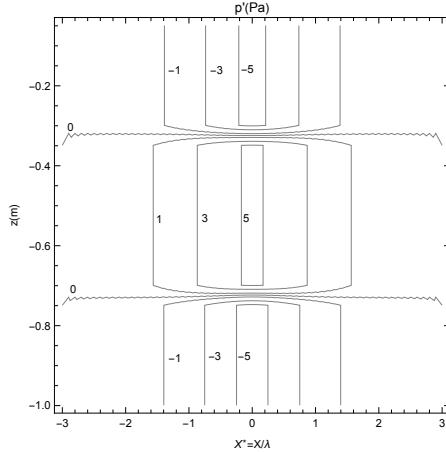


图 7: 三层二模态内波扰动压强计算结果例

可见扰动压强在上下层为负，在中层为正，量级为 1 Pa，最大值可达 5 Pa。在间断面压强梯度较大，体现了剪切性。

### 3.3 KdV 理论内波致流输运能力分析

根据流场可推知内波对质点的输运作用。取一列位于  $x = 4 \text{ m}$ ，不同水深的质点，此处  $X^* = 5.77$ ，可以认为是波前很远处。将 21 个质点编号，第  $i$  个质点位于  $z = 0.05(i-1)H$  处。利用 Forward-Euler 算法计算这些质点的运动轨迹，直至这些质点达到波后很远处。模拟结果如下，其中黑点标记了这些质点的初始位置。

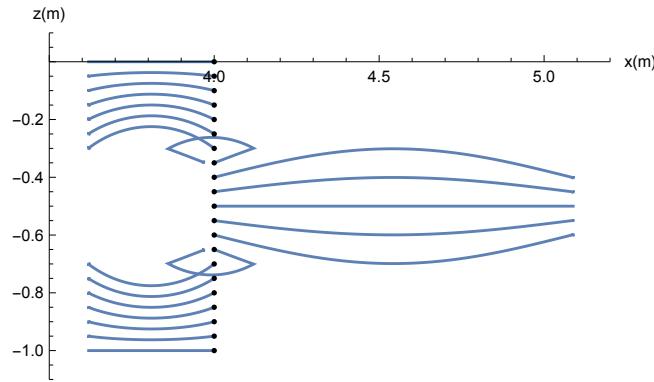


图 8: 三层二模态内波输运轨迹例

从图中可以看出，位于上层、下层的质点向负方向运动较长距离，位于中层的质点向正方向运动较远距离。在分界面  $z = -0.3H, -0.7H$  处，垂直位移最大。而在上下表面及中部，垂直位移为零。分界面附近的质点由于在运动过程中跨越分界面，从而轨迹较为不规则。

根据粒子的轨迹可计算出水平和垂直位移，水平位移结果如下。

质点序号	1-7,15-21	8,14	9-13
水平位移 (m)	-0.3806	-0.0320	1.0882

表 3: 三层二模态内波输运质点水平位移

根据式 (62) 可以算得最大输运距离的理论值为  $1.0883 \text{ m}$  与  $-0.3806 \text{ m}$ 。数值计算结果除了跨越分界面的质点外，和理论符合得很好。事实上，这里的误差来源仅有未模拟无穷大时间的输运过程，但是在模拟中，已经取了足够大的模拟范围使得这一误差很小。

垂直位移取绝对值后绘图如下。其中图线为理论值，数据点为数值模拟结果。

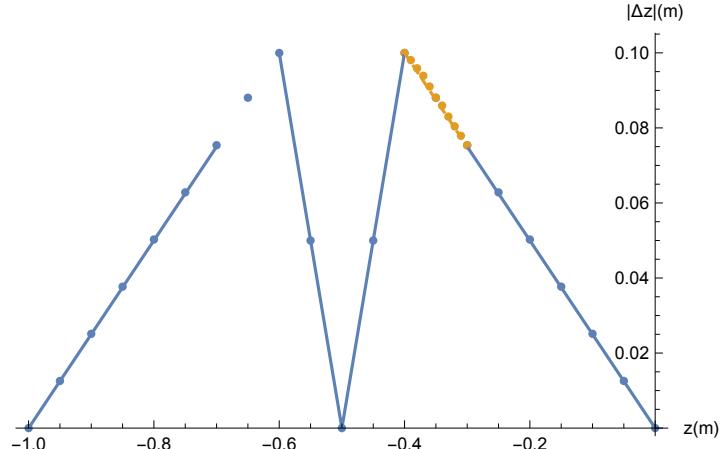


图 9: 三层二模态内波输运质点垂直位移例

根据式 (44) 计算得，垂直位移关于深度的函数斜率绝对值理论值为 1 和  $1/4$ ，和上图中非跨越分界面质点的结果完全一致。对于跨越分界面的质点，例如深度处于  $-0.4H < z < -0.3H$  范围内，取更多质点进行模拟，从结果上看其对应的垂直位移可以用  $z > -0.3H$  部分的理论近似，但是在理论上并不能保证这一点。

### 3.4 环境参数对 KdV 内波性质的影响

探究分层流体各层厚度对三层二模态内波的最大水平输运距离的影响，只考虑与波同向传播的情况。由式 (62) 可知  $L_{max}(z) = 2\lambda \cdot g(\eta_0 \phi'(z))$ 。式中波长  $\lambda$  可以直接由 KdV 理论计算得出， $\phi'(z)$  需要分类讨论。由数值模拟结果可知，对  $\eta_0 > 0$  的情况，在所有深度中最大输运距离出现在中部深度上。而对于  $\eta_0 < 0$  的情况，则取另外两层  $-\phi'(z)$  中的最大值。两种情况均取  $|\eta_0| = 0.1$ ，得到的结果如下图所示。图中粗实线下方表示  $\eta_0 > 0$ ，上方则相反。

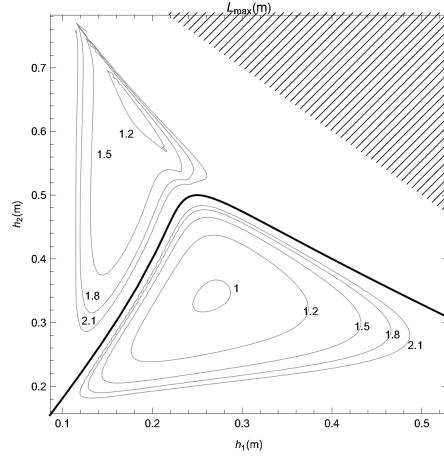


图 10: 不同水层厚度下三层二模态内波的最大输运距离

从图中可见, 对振幅为正和为负的二模态内孤立波, 均存在一最大输运距离的极小点, 而在  $h_1, h_2, h_3 \rightarrow 0$  时, 及趋向振幅转换线时快速增加, 但其增加的原因不同。对于前者, 是由于  $\phi'$  快速增大; 而对于后者, 是由于  $\lambda$  快速增加。这可以从下面关于  $\lambda$  的分布图中可以看出。

在固定  $|\eta_0| = 0.1$  的条件下, 三层厚度对波长、波速的影响如下二图所示。

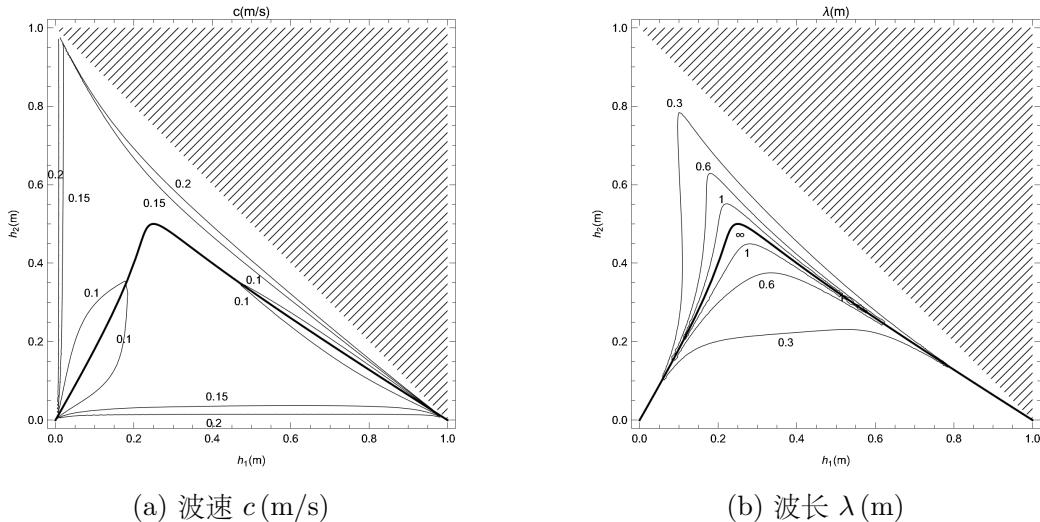


图 11: 不同水层厚度下三层二模态内波的波速与波长

从图 (a) 中可见, 三层二模态内波的波速大约在  $0.1 \text{ m/s}$ , 在  $h_1, h_2, h_3 \rightarrow 0$  时快速增加, 在中心区域变化不大。从图 (b) 中可见, 当趋向振幅转换线时波长趋向于无穷大, 而在两区域内主要为  $0.5 \text{ m}$  量级, 当  $\eta > 0$  时主要随  $h_2$  增大而增大, 当  $\eta < 0$  时主要随  $h_1, h_3$  的增大而增大。

## 4 MCC 内波理论研究

### 4.1 MCC 内波理论简介

对于大振幅的内波，非线性参数的量级  $O(\alpha) \sim 1$ ，需要引入新的理论对其进行描述。MCC 理论是其中一个具有代表性的理论，其主要观点如下。对于两层流体模型而言，通过采取对水平流速在垂直方向上取平均等做法，最终可以得到描述行波解的方程如下 (Choi and Roberto Camassa 1999; Jo and Choi 2002)

$$\eta_X^2 = \frac{3g(\rho_2 - \rho_1)}{c^2(\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2)} \frac{\eta^2(\eta - a_-)(\eta - a_+)}{(\eta - a_*)} \quad X = x - ct \quad (64)$$

其中

$$a_* = -\frac{h_1 h_2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2} \quad (65)$$

$a_+, a_-$  是下面方程的根。

$$a^2 + q_1 a + q_2 = 0 \quad q_1 = -\frac{c^2}{g} - h_1 + h_2 \quad q_2 = h_1 h_2 \left( \frac{c^2}{c_0^2} - 1 \right) \quad c_0^2 = \frac{gh_1 h_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} \quad (66)$$

根据行波解常见的波形可知，在波的中心  $X = 0$  处振幅最大，且此处有  $\eta_X = 0$ 。给定最大振幅为  $\eta_0$ ，则由式 (64) 可知  $(\eta_0 - a_+)(\eta_0 - a_-) = 0$ ，进一步可知  $\eta_0$  也满足  $\eta_0^2 + q_1 \eta_0 + q_2 = 0$ 。由此，可以得到波速  $c$  与线性波速  $c_0$  的关系如下 (Choi and Roberto Camassa 1999; Jo and Choi 2002)

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \frac{(h_1 - \eta_0)(h_2 + \eta_0)}{h_1 h_2 - (c_0^2/g)\eta_0} \quad (67)$$

在求得波之后，可以利用下式计算垂直平均后的水平流速

$$\bar{u}_i = c \left( 1 - \frac{h_i}{\xi_i} \right) \quad \xi_1 = h_1 - \eta \quad \xi_2 = h_2 + \eta \quad (68)$$

而由平均水平流速反推水平流场，可以采用如下近似式。这一关系是由 PIV 测量结果中得出的 (Camassa et al. 2006)。

$$u_1(x, z, t) = \bar{u}_1(x, t) + \left( \frac{\xi_1^2(x, t)}{6} - \frac{(h_1 - z)^2}{2} \right) \partial_x^2 \bar{u}_1(x, t) \quad (69)$$

$$u_2(x, z, t) = \bar{u}_2(x, t) + \left( \frac{\xi_2^2(x, t)}{6} - \frac{(h_2 + z)^2}{2} \right) \partial_x^2 \bar{u}_2(x, t) \quad (70)$$

式中  $z \in [-h_2, h_1]$  为水体的垂直范围。再进一步由无旋或无粘条件得出垂直方向速度的表达式。两种方法得出的垂直流速略有不同，其原因应是水平流场是采用近似式而存在一定误差。

二层 MCC 内波的波峰振幅  $\eta_0$  存在一上限，振幅高于此上限的二层 MCC 内波不能稳定存在。(Choi and Roberto Camassa 1999) 给出表达式如下。

$$\eta_0 \leq \frac{h_1 - h_2 \sqrt{\rho_1/\rho_2}}{1 + \sqrt{\rho_1/\rho_2}} \quad (71)$$

可见在  $\rho_1 \approx \rho_2$  时, 上式退化为  $\eta_0 \leq (h_1 - h_2)/2$ , 说明上下层水深差别越大, 可容许的 MCC 内波振幅越大。

如果仍用双曲正割函数考察 MCC 理论内波的性质, 设采用如下函数近似

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^{r_1} \frac{X}{\lambda} = \eta_0 \operatorname{sech}^{r_1} X^* \quad (72)$$

以  $u_1$  为例, 可以推得

$$\frac{\bar{u}_1}{c} = \frac{-\eta_0 \operatorname{sech}^{r_1} X^*}{h_1 - \eta_0 \operatorname{sech}^{r_1} X^*} \quad (73)$$

同样用双曲正割函数近似  $u$ , 取  $\bar{u}_1/c = a \operatorname{sech}^{r_2} X^*$ , 通过取  $X^* = 0$  处函数值与一阶导数值相等解得

$$a = \frac{-\eta_0}{h_1 - \eta_0} \quad r_2 = \frac{r_1}{1 - \eta_0/h_1} \quad (74)$$

即得  $a$  的估计式。此时有

$$\partial_x^2 \bar{u}_1 \sim ac \cdot \lambda^{-2} \quad (75)$$

故当  $\lambda$  较大时, 式 (69) 中仅保留主项得  $u_i = \bar{u}_i$ , 说明流场在垂直方向上变化很小。事实上,

$$\partial_z u_1 = (h_1 - z) \partial_x^2 \bar{u}_1 \sim h_1 ac \cdot \lambda^{-2} = \frac{h_1}{\lambda} \partial_x \bar{u}_1 \quad (76)$$

水平方向和垂直方向变化率量级相差为  $h_1/\lambda$ 。

## 4.2 MCC 内波致流流场分析

如上所述的 MCC 理论已经完备, 可以求出 MCC 理论内波输运能力的相关指标。然而由于内波方程没有解析解, 故直接通过数值模拟进行研究分析。

研究二层模型的一模态内波, 取  $H = 1$  m, 环境参数为

$h_1$	$h_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$g$	$\eta_0$
$0.3H$	$0.7H$	$980 \text{ kg/m}^3$	$1020 \text{ kg/m}^3$	$9.8 \text{ m/s}^2$	$-0.1H$

表 4: MCC 二层一模态内波环境参数例

根据 MCC 理论, 模拟得到等密度面的波形如下图。此处的内波是向下凹陷的波, 深度范围为  $z \in [-h_2, h_1]$ 。

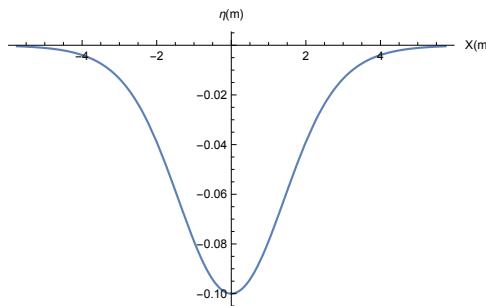


图 12: MCC 二层一模态内波波形例

考察内波的波长，类比 KdV 的解析解  $\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2(X/\lambda)$ ，取此处内波的波长  $\lambda$  使得当  $X = \lambda$  时，振幅衰减为峰值的  $\operatorname{sech}^2 1$  倍。计算得此例中  $\lambda = 1.92 \text{ m}$ ，波速  $c = 0.31 \text{ m/s}$ 。

根据式 (69) 等计算出水平和垂直流场如下图所示。

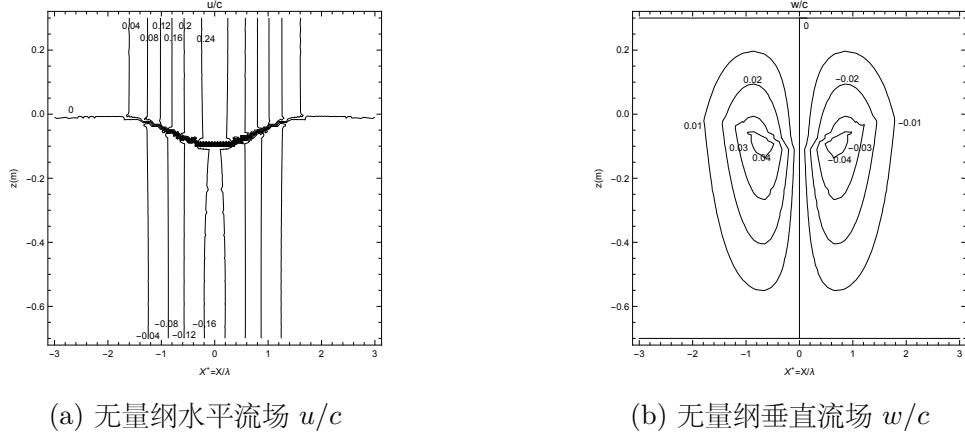


图 13: MCC 二层一模态内波流场计算结果例

由水平流场图可知上层流体水平运动方向与波相同，下层流体则相反。由垂直流场图可知波前为下沉流，波后为上升流。

利用相同方法，即通过式 (63) 得出扰动压强分布图如下。

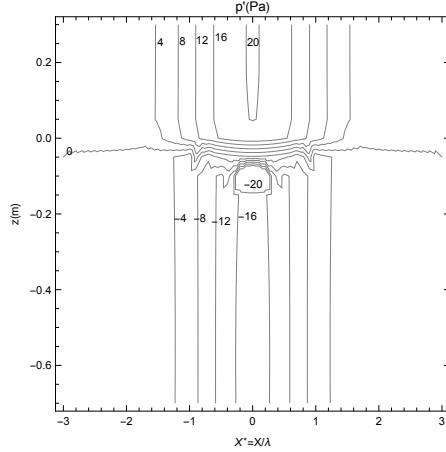


图 14: MCC 二层一模态内波扰动压强计算结果例

从图中可见，在上层中部扰动压强为正，在下层则为负，量级均约为  $20 \text{ Pa}$ 。在间断面上扰动压强梯度很大，体现了较强的剪切性。

### 4.3 MCC 理论内波致流输运能力分析

选取  $t = 0$  时  $x = 3\lambda$  处的位于不同深度的一系列质点，将其编号，第  $i$  号质点距离水面  $z = h_1$  为  $0.05(i - 1)$  m。计算得质点运动轨迹如下图所示，图中黑点标示了质点的初始位置。

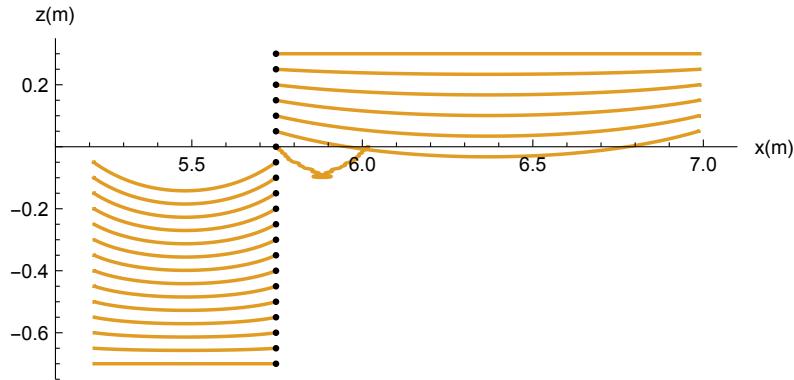


图 15: MCC 二层一模态内波输运质点轨迹例

从图中可见质点主要以水平运动为主，位于上层流体的质点运动得更远一些。位于分界面附近的质点运动距离最近。所有质点的运动轨迹都是向下凹的。

具体而言，上层质点水平输运距离在  $1.239$  m 至  $1.243$  m 范围之间，下层质点水平输运距离在  $-0.533$  m 至  $-0.535$  m 范围之间，其波动主要由数值计算流场时产生的噪声引起。根据式 (8)，数值积分取  $X^* = \pm 3$  截断，在表面和底部计算得最大输运距离的理论值为  $1.243$  m 与  $-0.533$  m，与模拟结果相吻合。

质点的垂直位移计算结果如下图。此图中直线为实际值的连线而非理论值。

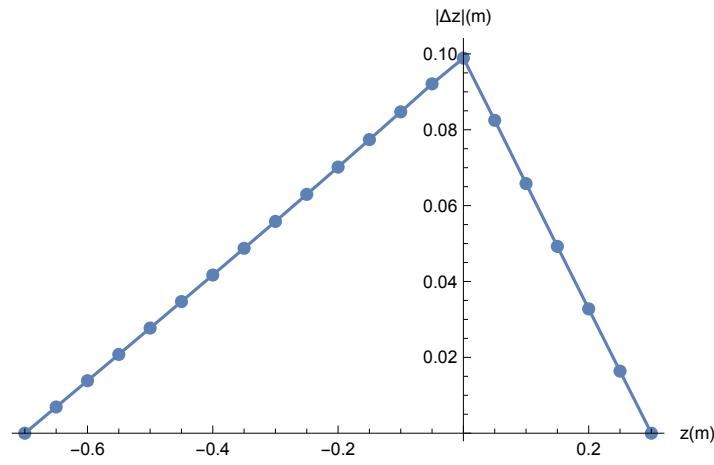


图 16: MCC 二层一模态内波输运质点垂直位移例

从图中可发现垂直位移图线也很接近于直线，经过拟合得到其斜率绝对值分别为  $0.33$  与  $0.13$ 。值得注意的是，MCC 理论并未像 KdV 理论那样引入垂直结构函数，但是仍然可以套用

计算最大垂直位移的理论。根据式 (44)，首先计算出在上层和下层的中部  $X = 0$  处， $u/c$  的值分别为 0.250 和 -0.166，然后计算出斜率理论值为 0.333 和 -0.143，和数值模拟得到的结果非常相近。造成这一结果的原因是在这一组参数下，MCC 理论导出的内波水平流场，在各层中  $z$  方向导数很小，可以近似认为其满足式 (44) 的适用条件。根据式 (76) 等得垂直方向变化率  $\partial_z u/u$  大约只有  $0.08\% \text{ m}^{-1}$ 。

#### 4.4 环境参数与振幅对 MCC 内波性质的影响

考察不同环境条件下 MCC 内波的输运能力，除了振幅  $\eta_0$  和水深  $h_1, h_2$  外，其他参数保持不变。根据式 (71)，确定一系列用于试验的  $\eta_0$  与  $h_1$ ，利用  $h_2 = H - h_1$  求得  $h_2$ 。与之前求解过程不同，此处不再模拟质点的运动，而是直接计算出  $z = h_1$  处表面的水平流场，根据式 (8) 求得输运距离的理论最大值，数值积分上下限取  $X = 3\lambda$  以截断。计算结果如下图所示。

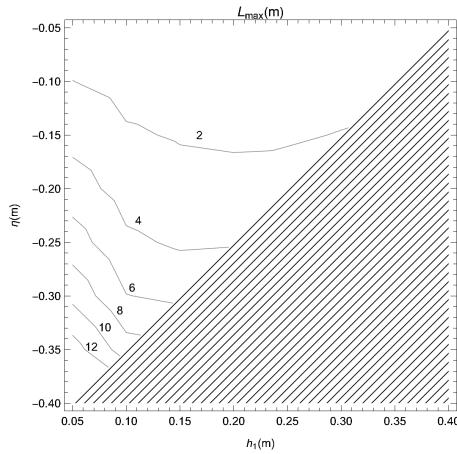


图 17: MCC 二层一模态内波最大输运距离与水深、振幅的关系

从图中可见最大输运距离量级在 1 m 至 10 m 之间。其主要随着内波振幅增大而增大。在振幅较小时，上层流体厚度对最大输运距离的影响不大，而在振幅较大时，上层流体厚度影响较明显，且其越浅，最大输运距离越大。

此外也同时得到了  $\eta_0, h_1$  与波速和波长的关系，如下二图所示。

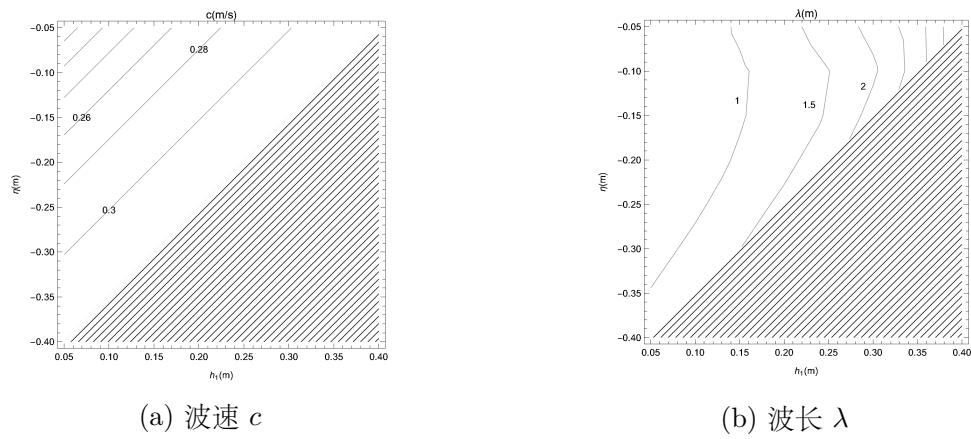


图 18: MCC 二层一模态内波波速、波长与水深、振幅的关系

可见上层水深越大，振幅越大，波速越大，但是其变化的范围不大，保持在 0.3 m/s 左右；而波长则主要随着上层水深的增大而增大，其值也保持在 1.5 m 左右。

## 5 DJL 内波理论研究

### 5.1 DJL 内波理论简介

对于密度连续分层的情形，则可采用 DJL 理论。根据 (Dunphy et al. 2011)，其描述内波的方程为 Dubreil-Jacotin-Long 方程。取背景密度函数为  $\rho_0(z)$ ，参考密度为  $\bar{\rho}_0$ ，采用无地转，不可压缩，无粘，Boussinesq 假设的情况下，在行波坐标系中导出如下的控制方程。

$$\nabla^2 \eta + \frac{N^2(z - \eta)}{c^2} \eta = 0 \quad N^2(z) = -\frac{g}{\bar{\rho}_0} \frac{d\rho_0(z)}{dz} \quad (77)$$

采取刚盖和平底假设，取水体表面为  $z = 0$ ，边界条件为

$$\eta = 0 \quad z = 0, -H \quad (78)$$

$$\eta = 0 \quad x = \pm\infty \quad (79)$$

在解得  $\eta$  和  $c$  后，无背景流的情况下，由于波的形状正是由于水质点的运动而形成，可得流函数  $\psi = c\eta$ ，进一步可得流场  $(u, w) = (-\psi_z, \psi_x)$ 。在给定背景密度和波的有效势能 APE (Available Potential Energy) 后，利用 MATLAB 的 DJLES 程序 (Dunphy et al. 2011) 可得波的数值解。除非  $N$  为常数，一般情况下 DJL 方程没有显式解析解。

根据 (Dunphy et al. 2011)，结合 DJLES 程序知 APE 的表达式如下

$$APE = \frac{g}{\bar{\rho}_0} \iint \int_0^\eta (\rho_0(z - \eta) - \rho_0(z - \xi)) d\xi dx dy \quad (80)$$

### 5.2 DJL 内波致流流场分析

由于一般情况下 DJL 方程仅有数值解，故无解析表达式，只能通过数值模拟进行研究分析。此时流体不再间断分层，分层方式通过密度函数确定，可用如下函数描述。

$$\rho_0(z)/\bar{\rho}_0 = 1 - \Delta\rho \cdot \tanh \frac{z + z_\rho}{\Delta z_\rho} \quad z \in [-H, 0] \quad (81)$$

式中  $\Delta\rho$  反映总的密度变化幅度， $z_\rho$  表示密度跃层的位置， $\Delta z_\rho$  表示密度跃层的宽度。以 DJLES 的 large\_ape 算例为蓝本，如下设置参数。

$H$	$\bar{\rho}_0$	$\Delta\rho$	$z_\rho$	$\Delta z_\rho$	$g$	APE
1 m	$10^3 \text{ kg/m}^3$	0.02	0.3 m	0.1 m	$9.8 \text{ m/s}^2$	$5 \times 10^{-3} \text{ m}^4/\text{s}^2$

表 5: DJL 内波环境参数例

DJLES 计算内波的波长公式如下 (Aghsaee et al. 2010)

$$L_w = \frac{1}{\eta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(X) dX \quad (82)$$

其中  $\eta(x)$  为所有深度中振幅最大的深度， $\eta_0$  为振幅的最大值即计算出的内波振幅。若以  $\eta(X) = \eta_0 \operatorname{sech}^2(X/\lambda)$  代入，则求得  $L_w = 2\lambda$ 。故在程序计算出  $L_w$  后，取 DJL 内波的波长

为  $\lambda = L_w/2$ 。在这一组计算参数下得到  $\lambda = 1.798 \text{ m}$ ,  $\eta_0 = -0.110 \text{ m}$ , 波速  $c = 0.273 \text{ m/s}$ 。密度, 波形, 流场图如下。

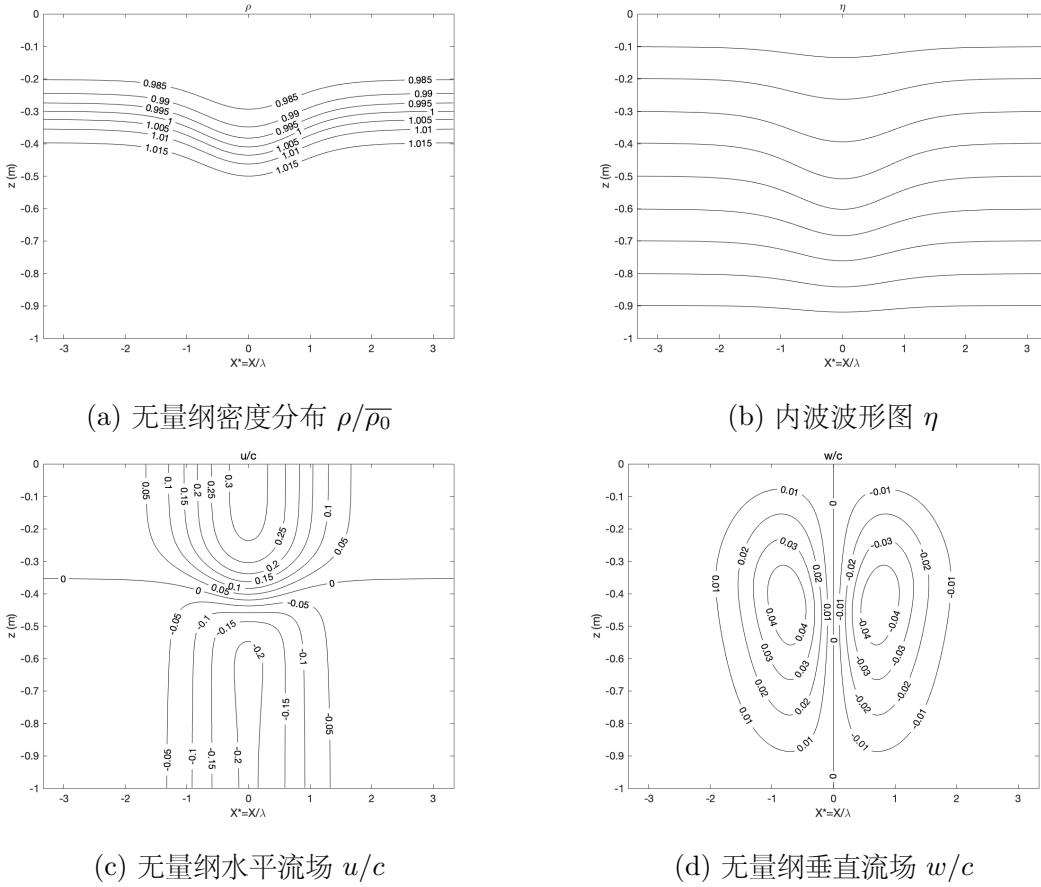


图 19: DJL 内波计算结果例

从图中可看出, 这是一个向下凹陷的内波, 在上层流体水平流向与波相同, 在下层则相反; 在波前为下沉流, 在波后为上升流。由于 DJL 理论描述的是连续分层的情形, 故可以看出各物理量没有明显的间断。

利用 DJLES 程序同时可以计算出扰动压强, 结果如下图所示。

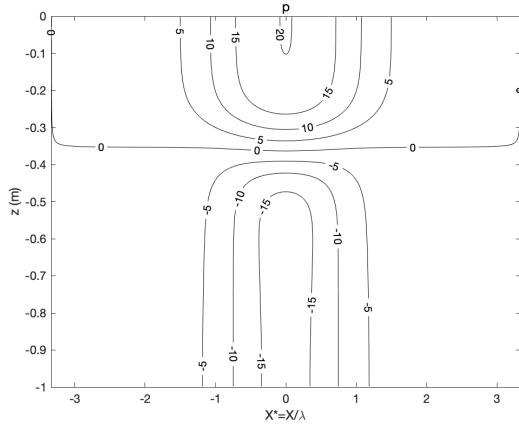


图 20: DJL 内波扰动压强计算结果例

从图中可见扰动压强的分布和二层 MCC 一模态内波的情形很类似，在上层为正，下层为负。量级尺度也类似，最大值为 20 Pa 左右。同样，虽然 DJL 模型密度分层并非间断，但是其中部仍然体现出了较强的剪切性。

### 5.3 DJL 内波致流输运能力分析

类似地，取  $X = 3\lambda$  处的一系列质点，将其编号，第  $i$  号质点位于  $-0.05i$  m 深度上，计算其运动轨迹如下图所示。黑点标记质点的初始位置。

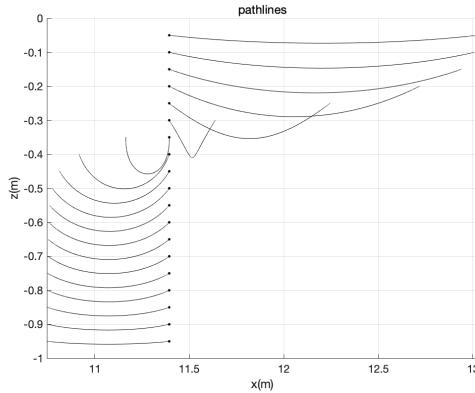


图 21: DJL 内波输运质点轨迹例

考察质点的最大水平和垂直位移，结果如下二图所示。图中实线及其连接的点为实际值，虚线及其连接的点为理论值。水平位移的理论值来源于式 (8)，取每个质点所在深度的水平流场进行积分，积分限为计算区域 ( $> 6\lambda$ )。垂直位移的理论值来源于式 (44)，其中  $a$  值取为  $z = -H$  与  $z = 0$  深度上的  $u/c$  峰值。

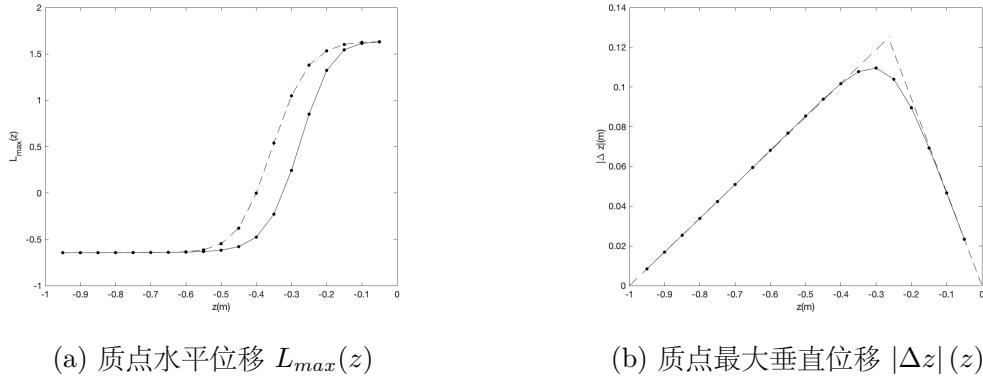


图 22: DJL 内波输运质点位移例

从图中可见，质点的水平位移最大约为 1.6 m，负最大约为 -0.6 m。垂直最大约为 0.1 m。并且由于 DJL 模型为连续模型，水平和垂直位移都不存在突变的情形。

对水平位移而言，在上层至中层深度上，理论值略大于实际值，这是因为理论值式 (8) 没有考虑到垂直运动，而在这一内波模型的这一深度范围内下垂直运动较为明显，且水平速度的垂直梯度也较为明显。这也说明了在一般情况下，受垂直流场影响的质点，其最大输运距离往往要比相同条件下不受垂直流场影响的质点要小。

对于垂直位移而言，即使 DJL 模型不存在恒定的水平流场垂直分量  $u_2(z)$ ，其理论值也和实际值吻合得很好，仅在分界面处有较大误差，这显然是在距离分界面远时  $\partial_z u$  小，理论公式可以近似使用；在分界面附近  $\partial_z u$  大，理论公式无法应用而造成的。

#### 5.4 环境参数与 APE 对 DJL 内波性质的影响

同样考察振幅与水深对内波性质特别是输运能力的影响，但是在 DJL 模型中，不能直接给定振幅  $\eta_0$ ，而只能给定 APE，再取流场中振幅最大的点作为  $\eta_0$ 。同样，由于 DJL 是连续分层模型，也不能直接设定“上层”水深的厚度，而只能改变背景密度分布函数式 (81) 中的  $z_\rho$  来间接反映这一点。在计算最大输运距离时，由上面的例子可知在  $z = 0$  表面处取到整个流场的最大输运距离，且理论值与实际值符合得很好，故在下面的计算中均取  $z = 0$  处的最大输运距离理论值作为输运能力的指标。

通过在一定范围内取不同的 APE 和  $z_\rho$  值，其他环境参数不变，计算得到 DJL 模型内波的波长、振幅、波速与最大输运距离结果如下四图所示。

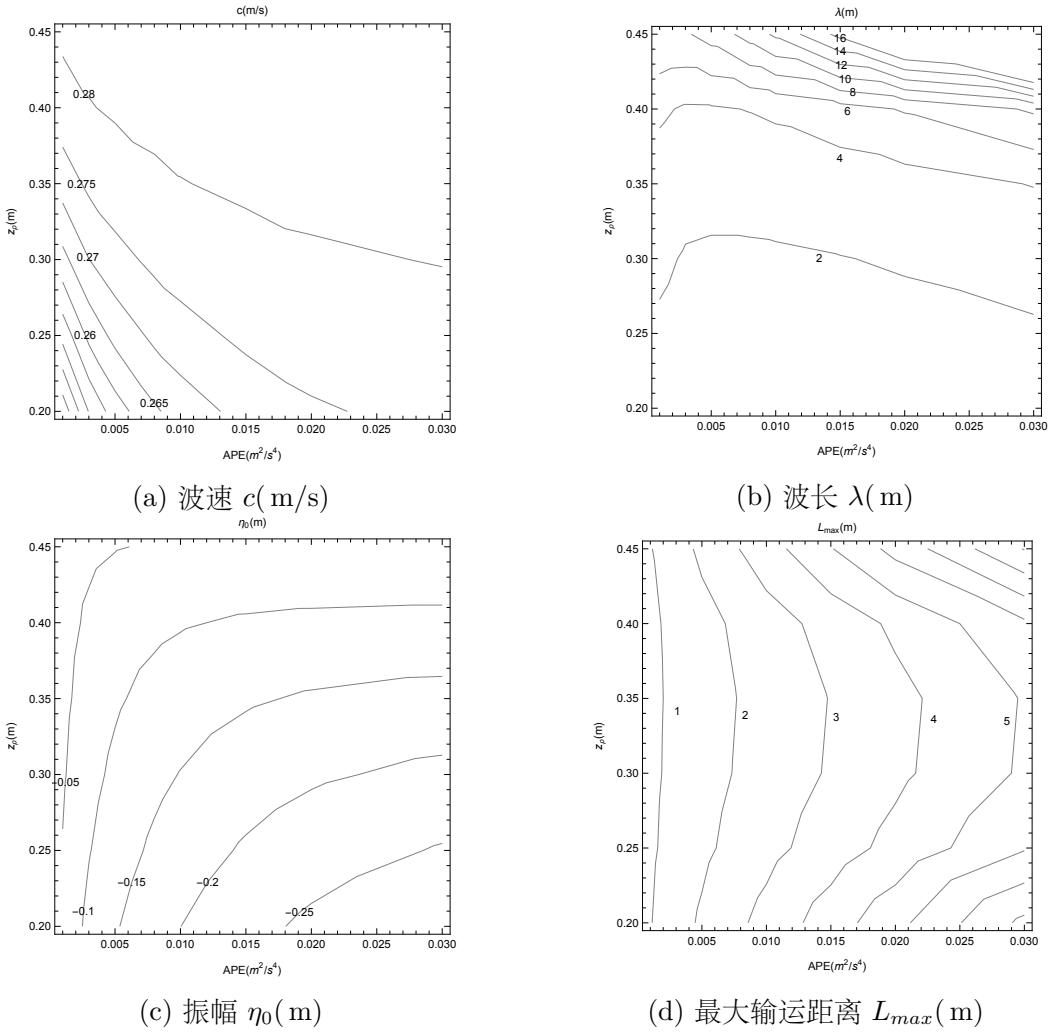


图 23: 环境参数对 DJL 内波性质的影响

从图 (a) 中可见, APE 和上层水深的增大都使得波速增大, 但变化幅度不大, 均在  $0.27 \text{ m/s}$  左右。从图 (b) 中可见, 波长主要受上层水深的影响, 结合理论外推可知当上层水深趋向  $0.5 \text{ m}$  时波长快速增加, 而在上层水深小于  $0.4 \text{ m}$  时则变化不大, 约为  $3 \text{ m}$ 。从图 (c) 中可见, 振幅不完全由 APE 决定。上层流体厚度减小也会使得振幅增大, 且在 APE 较小时, 其对振幅的影响较大; 而在 APE 较大时, 其对振幅的影响要小于上层流体厚度的影响。在给定参数区域内, 计算所得的振幅从  $0.05 \text{ m}$  至  $0.25 \text{ m}$  不等, 和 MCC、KdV 的相应分析相匹配。而从图 (d) 中可见, 最大输运距离随着 APE 的增大而增大, 关于上层水深则是在水深适中时存在一最小值。在此参数范围内最大输运距离变化不大, 约为  $3 \text{ m}$ 。

## 6 分析与总结

### 6.1 理论结果总结

本文理论研究主要着眼于具有行波结构的流场输运性质的分析。根据内波致流流场具有行波结构，具有对称性，满足连续性方程等特点，基于水平与垂直变量可分离等假设，得出了内波致流流场对质点的输运性能指标的理论计算或估算公式。

输运性能指标主要包括水平输运距离，输运特征时间和垂直位移。具体结论如下。

**水平输运距离** 定义为质点受内波的影响而水平位移的距离。

- 在质点垂直运动不影响水平运动的假设下，输运距离和最大输运距离可以通过式(7)和式(8)计算。

$$L = \lambda \int_{X_1^*}^{X_2^*} \frac{u^*(X^*)}{1 - u^*(X^*)} dX^* \quad (83)$$

$$L_{max} = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^*(X^*)}{1 - u^*(X^*)} dX^* \quad (84)$$

- 由上式可知，要想使得  $L_{max}$  有限，必须满足  $u < c$  恒成立，且满足式(10)

$$\lim_{X^* \rightarrow \infty} u^*(X^*) = o(X^{*-1}) \quad (85)$$

对于稳定传播的内孤立波而言一般总能满足此二条件。

- 由上面的结论，可以利用式(14)和式(17)估计最大输运距离。

$$L_{max} = 2g(a)\lambda \quad g(a) = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{1-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a}{1-a}} & 0 \leq a < 1 \\ -\sqrt{\frac{-a}{1-a}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{-a}{1-a}} & a < 0 \end{cases} \quad (86)$$

且在  $a \leq O(0.1)$  时  $g(a) \sim a$ ，在  $1-a < O(0.1)$  时， $g(a) \sim (1-a)^{-1/2}$ 。

**输运特征时间** 虽然整个输运过程需要无穷大的时间，但是质点只在有限的时间内具有较大的速度。输运特征时间尺度定义为这一时间段的尺度。

- 基于垂直运动不影响水平运动的假设，输运时间可以通过式(19)计算

$$\Delta t = \frac{\lambda}{c} \cdot \int_{X_2^*}^{X_1^*} \frac{1}{1 - u^*(X^*)} dX^* \quad (87)$$

- 由上式得输运时间可以通过式(21)估计。

$$\Delta t = \frac{\lambda}{c} \cdot \left( X_0^* + \sqrt{\frac{a}{1-a}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a}{1-a}} \tanh X_0^* \right) \right) \quad (88)$$

3. 输运进度可以通过式 (4) 确定。在  $a$  较小时, 上式括号内主项为  $X_0^*$ , 若取输运进度 90% 为限, 则输运特征时间可通过式 (23) 估计。

$$\Delta t = \frac{3\lambda}{c} \quad (89)$$

在  $a$  较大时, 主项变为后一项, 可通过式 (24) 估计。

$$\Delta t = \frac{\lambda}{c} \cdot O((1-a)^{-1/2}) \quad (90)$$

**垂直位移** 质点的垂直位移定义为质点的深度与初始深度之差。最大垂直位移则是垂直位移在整个输运过程中的最大值。一般而言, 质点运动深度的最大最小值在远场和波峰处取到, 且每层流体中都存在一个垂直流场为零的深度  $h_0$ 。

1. 如果水平流场是对称的, 基于连续性条件, 若质点输运过程满足式 (36)

$$X \left( t = \frac{t_1 + t_2}{2} \right) = 0 \quad (91)$$

则质点在这段过程中的垂直位移为零。特别地, 对于一个完整的输运过程, 质点的垂直位移总为零。

2. 当假定  $u_2(z)$  为常数时, 质点在整个输运过程中的最大垂直位移可通过式 (44) 计算。

$$\Delta z = z_1 - z_2 = a(z_1 - h_0) = \frac{a}{1-a}(z_2 - h_0) \quad (92)$$

对于  $\partial_z u$  较小的情况, 上式则给出了一个较好的近似。

## 6.2 数值算例结果总结

本文数值研究的前一部分着眼于具体例子。在相似的环境参数下, 即水深 1 m, 密度差  $\Delta\rho \sim 20 \text{ kg/m}^3$ , 上层水深约为 0.3 m, 振幅约为 0.1 m 等, 计算了三层二模态 KdV 内波, 二层一模态 MCC 内波和连续分层的 DJL 模型内波三个例子, 并对比它们所描述的内波性质及其致流的流场性质和输运性质。主要结果如下。

**波的性质** 三种内波的振幅均控制在 0.1 m 左右, KdV 第二模态内波的波速较慢, 为 0.12 m/s; 波长较短, 为 0.69 m/s。MCC 和 DJL 内波的波速较快, 分别为 0.31 m/s 和 0.27 m/s; 波长较长, 分别为 1.92 m 和 1.8 m。

**流场尺寸** 三种内波的影响基本都到达  $X^* = \pm 2\lambda$  为止。

**水平流场** KdV 内波无量纲水平流场峰值可达 0.4 与 -0.3, 强度略高于 MCC 内波和 DJL 内波的 0.3 与 -0.2。

**垂直流场** KdV 内波无量纲垂直流场峰值可达  $\pm 0.08$ , 略高于 MCC 和 DJL 内波的  $\pm 0.04$ 。

**扰动压强** KdV 内波的扰动压强峰值为 5 Pa, 低于 MCC 和 DJL 内波的约 20 Pa。除了 KdV 内波的三层结构外, 三种模型扰动压强的分布规律相同, 均在中部具有较大的剪切性。

### 水平输运距离

- (a) 三种模型的最大水平输运距离（正向和负向）均出现在没有垂直运动的上下底及 KdV 模型的中部深度，最小的水平输运距离均出现在分界面深度附近。在垂直运动影响不大的情况下，三种内波模型对质点的水平输运距离均符合理论公式式 (8)。
- (b) KdV 模型的最大输运距离最小，为 1.09 m 和 -0.38 m。MCC 内波其次，为 1.24 m 和 -0.53 m。DJL 内波最大，为 1.6 m 和 -0.6 m。

### 垂直位移

- (a) 对于完整的输运过程，三种内波模型均得到了垂直位移为零的结果，且最大最小值在波峰处和远场取到，这与理论相吻合。但是模拟得到对于运动轨迹跨越分界面的情况，也有总垂直位移为零，这是不太寻常的。关于最大垂直位移，虽然只有 KdV 模型存在严格的  $u_2(z)$  为常数，但是三个模型均给出了和理论公式式 (44) 相符合的结果，只在分界面附近存在较大误差。这虽然有  $\partial_z u$  变化不大的原因，但也是不太寻常的。
- (b) 三个模型给出的所有质点的最大垂直位移均约为 0.1 m，DJL 模型略高不到 10%。

## 6.3 环境参数影响总结

本文数值研究的后一部分着眼于环境参数和振幅对三种模型内波的影响，影响主要考察最大输运距离，波速和波长。对于三层 KdV 模型而言，变量为上层和中层厚度，振幅则保持为 0.1 m 不变；对于二层 MCC 模型而言，变量为上层厚度和振幅；对 DJL 模型而言则是背景密度梯度较大处的深度，和有效势能 APE。其他环境参数保持不变，主要结果如下，具体细节见之前各节中的图线。

**KdV 模型** 上层，中层厚度范围为 [0, 1] m。

- (a) 固定振幅时，在满足  $u/c < 1$  的内孤立波稳定存在条件下，最大输运距离关于三层厚度存在一极小值，当某层厚度趋向零，或三层厚度组合趋向振幅转换线时最大输运距离快速增加，总体量级为 1.5 m 左右。
- (b) 波速量级约为 0.1 m/s，当某层厚度趋向零时快速增加。
- (c) 波长量级约为 0.5 m，在振幅转换线上取到无穷，向两侧递减。

**MCC 模型** 振幅和上层流体厚度范围均为 [0.05, 0.4] m。

- (a) 最大输运距离主要受振幅影响，随振幅的增大而增大。上层流体厚度在振幅小时影响不大，在振幅大时厚度越小，最大输运距离越大。量级约为 5 m
- (b) 波速随着上层流体厚度和振幅的增大而增大，二者影响能力相同。波速变化的幅度不大，基本保持在 0.28 m/s 量级。

- (c) 波长随着上层流体厚度的增大而增大，关于振幅则是在振幅适中时波长较小，在振幅较大或较小时波长较大。其量级基本保持在 1.5 m。

**DJL 模型** APE 范围为  $[0.005, 0.03] \text{ m}^4/\text{s}^2$ ，仍用“上层厚度”指代  $z_\rho$ ，范围为  $[0.2, 0.45] \text{ m}$ 。

- (a) 计算区域内 DJL 内波的振幅范围从 0.05 m 至 0.25 m，APE 越大，上层水深越浅，振幅越大。在 APE 较小时主要受 APE 影响，在 APE 较大时主要受上层厚度影响。
- (b) 最大运输距离随着 APE 的增大而增大，关于上层厚度则是在上层厚度适中时有最小值，过浅或过深会使得最大运输距离增大。量级基本为 3 m。
- (c) 波速随 APE 和上层厚度的增大而增大，量级基本为  $0.27 \text{ m/s}$ 。
- (d) 波长主要随上层厚度的增大而增大，且增加速度越来越快。量级基本为 3 m。

## 6.4 讨论与展望

本文对三种内孤立波的模型及其运输能力作了研究，在得到丰硕成果的同时，也存在一些局限性与未竟之事，讨论如下。

### 理论部分

- (a) 未能讨论垂直运动对于水平运输情况的影响。根据数值模拟结果，有垂直运动的质点的水平运输距离不大于没有垂直运动的质点，但还未能从理论上证明这一点。
- (b) 未能严格讨论质点运动轨迹跨越分界面的情况。根据数值模拟结果，一些性质对于跨越分界面的质点仍然适用，例如其总垂直位移为零等。跨越分界面质点的水平运输距离一般是所有质点运输距离中的最小值，这也仍需进一步研究。
- (c) 未能讨论  $u_2(z)$  不为常数的情况。虽然三个模型算例结果都给出了和式 (44) 相贴合的结果，但是一般情况仍然值得研究。经过尝试发现此时原方法行不通，需要采取新的方法，例如通过渐近展开，分析  $u_2(z)$  与常数偏差为一小量级数的情况。

### 数值部分

- (a) 未能研究总水深对三种内波的影响。虽然可以根据式 (53) 尺度关系来确定  $H \neq 1 \text{ m}$  时各物理量的变化情况，但是在实际的模拟中发现水深对流场的分布规律、性状等仍然有一定的影响，需要从一开始就全部作无量纲化来避免这个问题。
- (b) 仍有一些参数对三种内波的影响没有研究，如密度变化幅度  $\Delta\rho$  等。但是更多的变量会使得结果呈现的复杂度更高。
- (c) 未能研究透彻 DJLES 程序中所用的计算方法及其原理。

### 其他

- (a) 未能研究考虑地转效应的内波，以及地转效应对内波及其运输能力的影响。虽然在二维平面内存在考虑地转的内波模型，如 Ostrovsky 方程和 OH 方程，但是对于海

洋内波而言 Ostrovsky 方程不存在孤立波解，只有渐近解等 (Stepanyants 2020)。并且，关于这些方程的研究基本仅止步于求得波形，几乎没有了解到求得波致流场的方法，从而更无法作进一步研究。

- (b) 未能展示出第二模态内孤立波的特殊结构使得其具有较强的输运能力这一特点 (Deep-well and Stastna 2016)。
- (c) 未能研究考虑粘性对内波的影响。在  $u/c$  趋向于甚至超过 1 时，需要引入粘性才能很好地对其进行描述。
- (d) 未能在计算中体现出不同分层模式下，随着能量增加，内孤立波有变陡和平坦区延展两种模式 (Lamb and Wan 1998)。
- (e) 未考虑质点位移以外的输运能力评估方式，如求解扩散方程来评估输运性质 (Deep-well and Stastna 2016)。

## 7 致谢

在本文的最后，我想对在为期一年半的科研实践过程中帮助过我的人表示感谢。首先要感谢我的导师王展老师。王老师提供的这一个具有研究价值而又不过于困难的课题，是顺利完成科研实践的重要基础。在一年半的时光中，王老师不仅常常指导我探究内波的性质，解答遇到的疑惑，而且还十分关心我的学习生活，令我能在学习与科研的道路上更坚定地前行。其次要感谢李家春院士，班主任鲍麟老师，教学秘书梁重阳老师等学院老师，关心我们专业的科研实践，协调日程，安排相关讲座。同时也要感谢支持我的父母同学们，你们的陪伴与鼓励也是顺利完成科研实践不可或缺的一环。最后也要感谢我自己，经过几十周的各方面探究，才能在内波研究方面从完全不了解能提出自己的观点，并且最终完成这样一篇大体量的工作。

## 参考文献

- Aghsaei, P., Boegman, L., & Lamb, K. G. (2010). Breaking of shoaling internal solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 659, 289–317.
- Akylas, T. R. (1994). Three-dimensional long water-wave phenomena. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26(1), 191–210.
- Camassa, R., Choi, W., Michallet, H., Rusås, P.-O., & Sveen, J. (2006). On the realm of validity of strongly nonlinear asymptotic approximations for internal waves. *Journal of fluid mechanics*, 549, 1–23.
- Choi, W., & Camassa, R. [Roberto]. (1999). Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. *Journal of Fluid Mechanics*, 396, 1–36.
- Cushman-Roisin, B., & Beckers, J.-M. (2011). *Introduction to geophysical fluid dynamics, 2nd edition - physical and numerical aspects*. Academic Press.
- Deepwell, D., & Stastna, M. (2016). Mass transport by mode-2 internal solitary-like waves. *Physics of Fluids*, 28(5), 395–425.
- Dunphy, M., Subich, C., & Stastna, M. (2011). Spectral methods for internal waves: Indistinguishable density profiles and double-humped solitary waves. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 18(3), 351–358.
- Farmer, D., Li, Q., & Park, J.-H. (2009). Internal wave observations in the south china sea: The role of rotation and non-linearity. *Atmosphere-Ocean*, 47(4), 267–280.
- Freeman, N. C., Nimmo, J. J. C., & Stewartson, K. (1983). Soliton solutions of the korteweg de vries and the kadomtsev-petviashvili equations: The wronskian technique. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 389(1797), 319–329.
- Gerkema, T. (1996). A unified model for the generation and fission of internal tides in a rotating ocean. *Journal of Marine Research*, 54(3), 421–450.
- Grimshaw, R. [R.], & Melville, W. K. [W K.]. (1989). On the derivation of the modified kadomtsev-petviashvili equation. *Studies in Applied Mathematics*, 80(3), 183–202.
- Grimshaw, R. [Roger]. (1985). Evolution equations for weakly nonlinear, long internal waves in a rotating fluid. *Studies in Applied Mathematics*, 73(1), 1–33.
- Helfrich, K. R., & Melville, W. K. [W. Kendall]. (2006). Long nonlinear internal waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 38(38), 395–425.
- James N. Moum, J. D. N., & Klymak, J. M. (2008). Small-scale processes in the coastal ocean. *Oceanography*, 21(4), 22–33.
- Jo, T.-C., & Choi, W. (2002). Dynamics of Strongly Nonlinear Internal Solitary Waves in Shallow Water. *Studies in Applied Mathematics*, 109(3), 205–227.
- Lamb, K. G., & Wan, B. (1998). Conjugate flows and flat solitary waves for a continuously stratified fluid. *Physics of Fluids*, 10(8), 2061–2079.

- Liu, Z., Grimshaw, R., & Johnson, E. (2019). Generation of mode 2 internal waves by the interaction of mode 1 waves with topography. *Journal of Fluid Mechanics*, 880, 799–830.
- Manakov, S., Zakharov, V. E., Bordag, L., Its, A., & Matveev, V. (1977). Two-dimensional solitons of the kadomtsev-petviashvili equation and their interaction. *Physics Letters A*, 63(3), 205–206.
- Massel, S. R. (2015). *Internal gravity waves in the shallow seas*. Springer International Publishing.
- Rayson, M. D., Jones, N. L., & Ivey, G. N. (2019). Observations of large-amplitude mode-2 nonlinear internal waves on the australian north west shelf. *Journal of Physical Oceanography*, 49(1), 309–328.
- Salloum, M., Knio, O. M., & Brandt, A. (2012). Numerical simulation of mass transport in internal solitary waves. *Physics of Fluids*, 24(1), 016602.
- Stastna, M., & Lamb, K. G. (2002). Large fully nonlinear internal solitary waves: The effect of background current. *Physics of Fluids*, 14(9), 2987–2999.
- Stepanyants, Y. A. (2020). Nonlinear Waves in a Rotating Ocean (The Ostrovsky Equation and Its Generalizations and Applications). *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 56(1), 16–32.
- Terez, D. E., & Knio, O. M. (1998). Numerical simulations of large-amplitude internal solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 362, 53–82.
- Terletska, K., Jung, K. T., Talipova, T., Maderich, V., & Grimshaw, R. (2016). Internal breather-like wave generation by the second mode solitary wave interaction with a step. *Physics of Fluids*, 28(11), L03601–276.
- Turkington, B., Eydeland, A., & Wang, S. (1991). A computational method for solitary internal waves in a continuously stratified fluid. *Studies in Applied Mathematics*, 85(2), 93–127.
- Yang, Y. J., Fang, Y. C., Tang, T. Y., & Ramp, S. R. (2010). Convex and concave types of second baroclinic mode internal solitary waves. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 17, 6(2010-11-02), 17(6), 605–614.
- Yuan, C., Grimshaw, R., Johnson, E., & Chen, X. (2018). The Propagation of Internal Solitary Waves over Variable Topography in a Horizontally Two-Dimensional Framework. *Journal of Physical Oceanography*, 48(2), 283–300.
- 刘永军. (2009). 地转对海洋内波的影响研究 (Doctoral dissertation).
- 姜希明. (2015). 海洋物理. 中国海洋大学出版社.
- 廖光洪. (2012). 南海北部内潮与非线性内波: 观测与数值模拟研究 (Doctoral dissertation). 中国海洋大学.
- 方欣华, & 杜涛. (2005). 海洋内波基础和中国海内波. 中国海洋大学.
- 李家春. (2005). 水面下的波浪——海洋内波. 力学与实践, 27(2), 1–6.
- 蒋国荣, 张军, 施伟来, & 刘群燕. (2009). 海洋内波及其对海战的影响. 气象出版社.

邓冰, 张翔, & 张铭. (2014). 背景流中海洋内波垂向结构的计算和分析. 海洋科学进展, 32(2), 121–129.

黄晓冬. (2013). 南海内孤立波的空间分布与时间变化特征研究 (Doctoral dissertation). 中国海洋大学.