

Численные схемы для аппроксимации неограниченных решений при моделировании обтекания профиля крыла в вихревых методах

Докладчик: Измайлова Ю. А.

Научный руководитель: к.ф-м.н., доцент кафедры ФН-2
Марчевский И. К.

группа ФН2-61Б

19 марта 2022 г.



Математическая модель течения жидкости

Вязкая несжимаемая среда

Определяющие уравнения

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad \rho = \text{const},$$
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nu \Delta \vec{V} - \frac{\nabla p}{\rho}$$

Границные условия

На бесконечности:

$$\vec{V}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{V}_\infty, \quad p(\vec{r}, t) \rightarrow p_\infty;$$

На твердой стенке:

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_K(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in K.$$

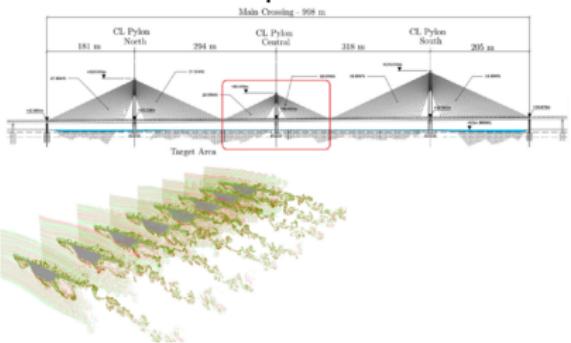
Численные методы:

- сеточные (МКО, МКЭ, МКР, ...);
- бессеточные (вихревые методы, метод сглаженных частиц, ...).

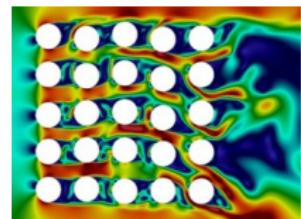
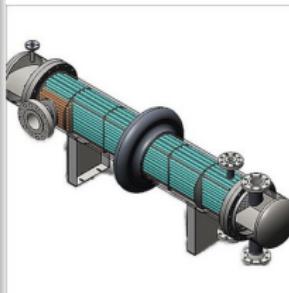
Области применения двумерных вихревых методов

- Сжимаемостью среды можно пренебречь
- Конструкция движется / деформируется
- Двумерные задачи:
 - плоская постановка;
 - метод плоских сечений

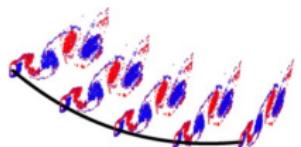
Расчет большепролетных мостов



Расчет колебаний трубных пучков

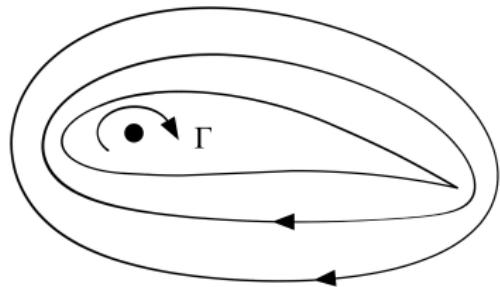


Моделирование колебаний ЛЭП



Замена профиля вихревым слоем

Жуковский Н. Е. выдвинул идею замены обтекаемого профиля вихревым слоем, оказывающим такое же влияние на течение, как и исходный профиль.



Формула Н. Е. Жуковского:

$$Y = \rho V_\infty \Gamma,$$

где Γ — суммарная циркуляция вихревого слоя.

Моделирование обтекания тел вихревыми методами

Завихренность $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$ — первичная расчетная величина

Поле скоростей \vec{V} восстанавливается по закону Био — Савара

Давление p восстанавливается с помощью аналога интеграла

Коши — Лагранжа.

Основные операции алгоритма вихревых методов

- Эволюция завихренности в области течения
- Вычисление давления и нагрузок — при необходимости
- Удовлетворение граничного условия на обтекаемой поверхности

Генерация завихренности в области течения

Модель: вихревой слой на поверхности профиля

Целью работы является совершенствование численных методов для решения граничных интегральных уравнений с неограниченными решениями.



Подход Галеркина к решению интегрального уравнения

Интегральное уравнение 2-го рода

$$\oint_K P_\tau(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma(\vec{\xi}) dl_\xi - \frac{1}{2} \gamma(\vec{r}) = f_\tau(\vec{r}), \quad P_\tau(\vec{r}, \vec{\xi}) = \frac{\vec{n}(\vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi |\vec{r} - \vec{\xi}|^2}, \quad \vec{r} \in K.$$

Вводим базисные функции $\varphi_i^q(\vec{r})$, $i = 1, \dots, n$, $q = 0, \dots, m$.

Приближенное решение ищем в виде

$$\gamma(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \sum_{q=0}^m \gamma_i^q \varphi_i^q(\vec{r}).$$

Неизвестные γ_i^q находим из условия ортогональности невязки ИУ проекционным функциям, совпадающим с базисными:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{q=0}^m \gamma_i^q \int_{K_i} \varphi_i^p(\vec{r}) dl_r \int_{K_j} P_\tau(\vec{r}, \vec{\xi}) \varphi_j^q(\vec{r}) dl_\xi - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^m \gamma_i^q \int_{K_i} \varphi_i^q(\vec{r}) \varphi_i^p(\vec{r}) dl_r = \int_{K_i} f_\tau(\vec{r}) \varphi_i^p(\vec{r}) dl_r, \quad p = 0, \dots, m. \end{aligned}$$

Кусочно-постоянная и кусочно-линейная схемы

Ищем решение в виде

$$\gamma(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n (\gamma_i^0 \varphi_i^0(\vec{r}) + \gamma_i^1 \varphi_i^1(\vec{r})),$$

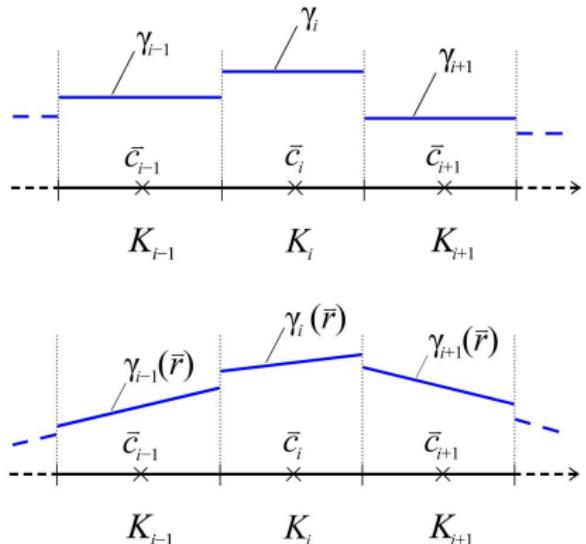
$$\varphi_i^1(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{(\vec{r} - \vec{c}_i) \cdot \vec{\tau}_i}{L_i}, & \vec{r} \in K_i, \\ 0, & \vec{r} \notin K_i. \end{cases}$$

$\phi_i^0(\vec{r}) = 1$ на i -й панели и

$\phi_i^0(\vec{r}) = 0$ на остальных панелях

Условие выделения единственного решения:

$$\sum_{i=1}^n \int_{K_i} (\gamma_i^0 \varphi_i^0(\vec{r}) + \gamma_i^1 \varphi_i^1(\vec{r})) dl_r = \Gamma^*$$



Окончательная СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [A^{00}] + [D^{00}] & [A^{01}] + [D^{01}] & \{I_n\} \\ [A^{10}] + [D^{10}] & [A^{11}] + [D^{11}] & \{O_n\} \\ \{L^0\}^T & \{L^1\}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ \Gamma^* \end{pmatrix},$$

где $[A^{pq}]$ — квадратные матрицы $n \times n$; $[D^{pq}]$ — диагональные матрицы, $p, q = 0, 1$; $\{L^0\}^T$ и $\{L^1\}^T$ — n -мерные вектор-строки; O_n — столбец из нулей; $\{\gamma^0\}$ и $\{\gamma^1\}$ — n -мерные векторы.

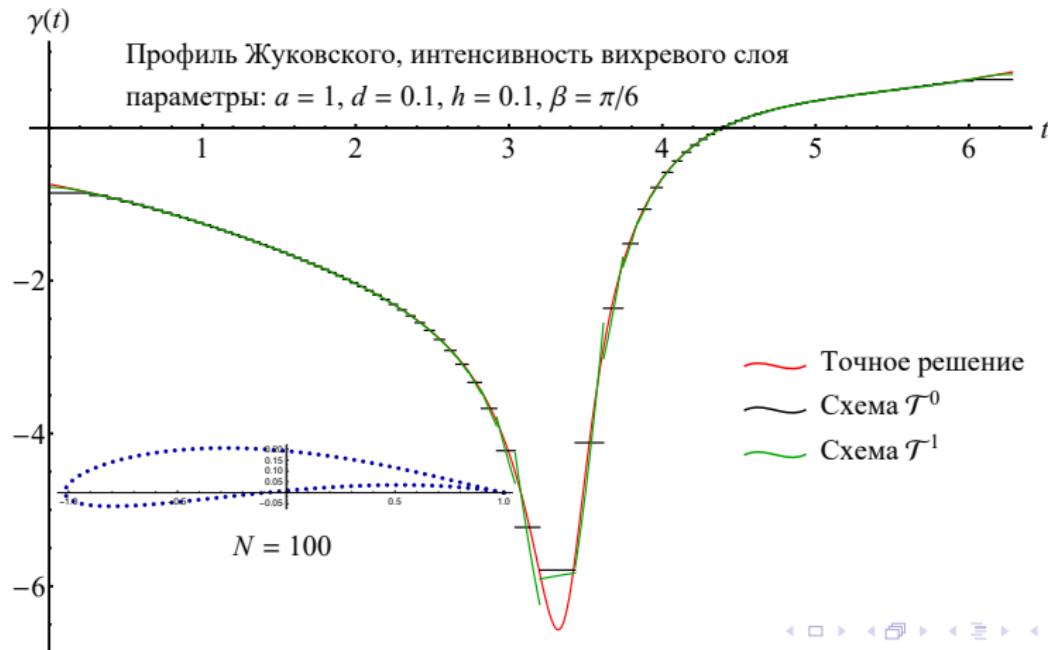
$$A_{ij}^{pq} = \frac{1}{L_i} \int_{K_i} \left(\int_{K_j} P_\tau(\vec{r}, \vec{\xi}) \varphi_j^q(\vec{\xi}) dl_\xi \right) \varphi_i^p(\vec{r}) dl_r,$$

$$D_{ii}^{pq} = -\frac{1}{2L_i} \int_{K_i} \varphi_i^p(\vec{r}) \varphi_i^q(\vec{r}) dl_r, \quad L_i^p = \int_{K_i} \varphi_i^p(\vec{r}) dl_r,$$

$$b_i^p = \frac{1}{L_i} \int_{K_i} f_\tau(\vec{r}) \varphi_i^p(\vec{r}) dl_r, \quad p, q = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

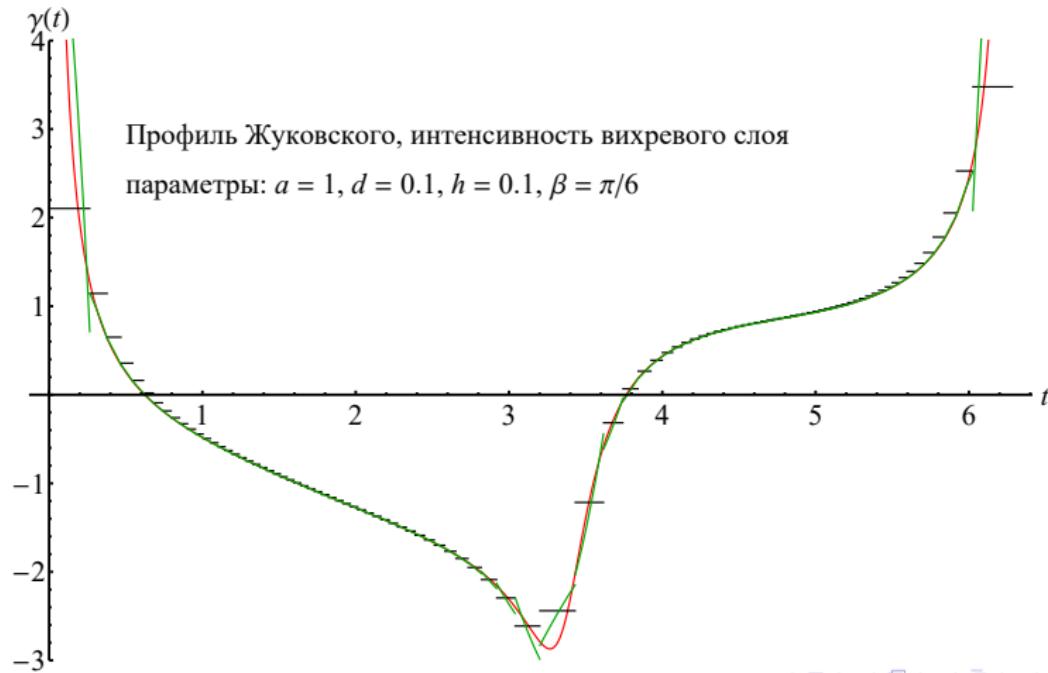
Результаты применения схем

Суммарная циркуляция Γ^* выбрана согласно условию Чаплыгина — Жуковского и соответствует стационарному обтеканию крыла.



Результаты применения схем

Суммарная циркуляция $\Gamma^* = 0$, что соответствует нестационарному обтеканию крыла.



T-схема с асимптотическим решением

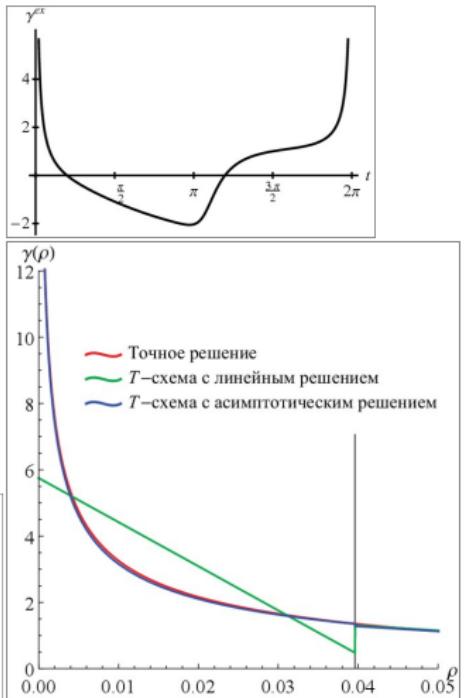
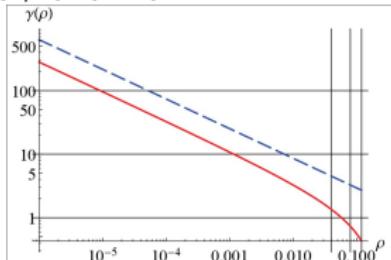
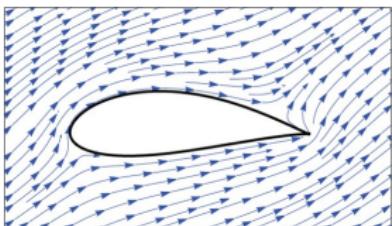
Для неограниченных решений на крайних панелях вводим базисные функции:

$$\varphi_1^a(\vec{r}) = \frac{L_1^\mu}{s_1(\vec{r})^\mu} - \frac{1}{1-\mu}, \quad \mu = 1 - \frac{\pi}{\chi},$$

$$\bar{\varphi}_n^a(\vec{r}) = \frac{L_n^\mu}{(L_n - s_n(\vec{r}))^\mu} - \frac{1}{1-\mu}.$$

Асимптотика: $\gamma(\rho) = \rho^{-\mu}$.

Коэффициенты схемы найдены аналитически при $\chi = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$.



T-схема с асимптотическим решением

- Новые базисные функции вводятся только на крайних панелях.
- Проекционные функции совпадают с базисными функциями кусочно-линейной T-схемы.

Окончательная СЛАУ

$$\begin{pmatrix} [A^{00}] + [D^{00}] & [A^{01}] + [D^{01}] & \{I_n\} \\ [A^{10}] + [D^{10}] & [A^{11}] + [D^{11}] & \{O_n\} \\ \{L^0\}^T & \{L^1\}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma^0\} \\ \{\gamma^1\} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{b^0\} \\ \{b^1\} \\ \Gamma^* \end{pmatrix},$$

совпадает по форме с системой для кусочно-линейной T-схемы. Все коэффициенты системы остаются неизменными за исключением первых и последних столбцов блоков $[A^{01}]$ и $[A^{11}]$, а также первого и последнего диагональных коэффициентов в блоке $[D^{11}]$.

Присоединенные массы

Задача вычисления присоединенных масс λ_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$,
 \Leftrightarrow задаче о восстановлении шести потенциалов течения $\Phi_i(\vec{r})$ и
последующему вычислению интегралов

$$\lambda_{ij} = -\rho \oint_S \Phi_i(\vec{r}) \frac{\partial \Phi_j(\vec{r})}{\partial \vec{n}} dS,$$

где $\Phi_i(\vec{r})$ — потенциал, соответствующий движению тела с
единичной скоростью в направлении i -й координатной оси для
 $i = 1, 2, 3$ или вращению с единичной угловой скоростью
вектор которой направлен вдоль $(i-3)$ -й координатной оси
для $i = 4, 5, 6$; \vec{n} — единичный вектор внешней к поверхности тела
нормали.

$$[\Lambda] = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{16} \\ & \lambda_{22} & \lambda_{26} \\ & & \lambda_{66} \end{pmatrix}$$

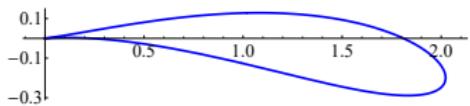
$$\lambda_j = \rho \oint_S \vec{r} \times (\vec{\gamma}_j(\vec{r}) + \vec{\gamma}_j^{att}(\vec{r})) dS,$$

$$\mu_{j6} = -\frac{\rho}{2} \oint_S |\vec{r} - \vec{r}_0|^2 (\vec{\gamma}_j(\vec{r}) + \vec{\gamma}_j^{att}(\vec{r})) dS,$$

где $\lambda_j = (\lambda_{1j}, \lambda_{2j})^T$;
 \vec{r}_0 — радиус-вектор точки, относительно которой вычисляются моменты.

Отобразим внешность круга радиусом ηa , с центром в точке $z_c = a(\eta e^{i\alpha} - 1)$ на внешность профиля ζ согласно закону

$$\zeta(z) = e^{-i\alpha} \left(z + \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \right),$$



Точные значения присоединенных масс с учетом
 $\sigma = \eta / (2\eta \cos \alpha - 1)$, ρ — плотность среды:

$$\lambda_{11}^{\text{ex}} = \frac{\pi \rho a^2}{4} (\sigma^2 + \eta^2 - 2 \cos 2\alpha), \quad \lambda_{22}^{\text{ex}} = \frac{\pi \rho a^2}{4} (\sigma^2 + \eta^2 + 2 \cos 2\alpha),$$
$$\lambda_{16}^{\text{ex}} = \frac{\pi \rho a^3}{8} \sin \alpha (\sigma^2 + \eta^2 + 4(\sigma + \eta) \cos \alpha),$$
$$\lambda_{26}^{\text{ex}} = \frac{\pi \rho a^3}{8} (\sigma^3 + \eta^3 + (\sigma^2 + \eta^2) \cos \alpha + 2(\sigma + \eta) \cos 2\alpha),$$
$$\lambda_{66}^{\text{ex}} = \frac{\pi \rho a^4}{8} \sigma^2 \eta^2 (8\sigma^2 \eta^2 \cos^4 \alpha - 2\sigma \eta \sin^2 2\alpha + \cos 4\alpha).$$

Ошибки при вычислении присоединенных масс:

n	400	800	1600	3200
Кус.-лин. схема	0.000739	0.000351	0.000171	0.000085
Асимпт. схема	0.000301	0.000076	0.000019	4.74×10^{-6}

Порядки сходимости схем:

n	400	800	1600	3200
Кус.-лин. схема	1.16	1.08	1.03	1.01
Асимпт. схема	1.98	1.99	2.00	2.00

Результаты

В ходе работы получены следующие результаты

- ① реализована расчетная T -схема с кусочно-линейным и асимптотическим представлениями решения для плоского обтекания гладкого профиля;
- ② результаты работы каждой из расчетных схем были сравнены с точным решением для профиля Жуковского;
- ③ изучена задача о вычислении присоединенных масс и моментов инерции профиля Жуковского по полученному решению относительно интенсивности вихревого слоя на границе профиля.