Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки
КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ ПО ПРАКТИКЕ

Студент Кибалюк Дарья Алексеевна
фамилия, имя, отчество

Группа ФН2-22Б

Тип практики: Учебная практика

Название предприятия: Научно-учебный комплекс «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Студент ________________ Кибалюк Д.А.
подпись, дата *фамилия и.о.*

Руководитель практики ________________ Марчевский И.К.
подпись, дата *фамилия и.о.*

Оценка ______________________________________

2025 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Кафедра «Прикладная математика»

З А Д А Н И Е
на прохождение учебной практики

на предприятии Научно-учебный комплекс «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Студент Кибалюк Дарья Алексеевна
фамилия, имя, отчество

Во время прохождения ознакомительной практики студент должен

1. Изучить на практике основные возможности языка программирования C++, закрепить знания и умения, полученные в курсах «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Введение в информационные технологии».
2. Изучить способы определения положения лучей относительно параболы и расчета координат точки отражения луча от параболы, а также угла наклона отраженного луча.
3. Реализовать алгоритм, позволяющий определять положение лучей относительно параболы и рассчитывать координат точки отражения луча от параболы, а также угла наклона отраженного луча.

Дата выдачи задания «1» марта 2025 г.

Руководитель практики ________________ Марчевский И.К.
подпись, дата *фамилия и.о.*

Студент ________________ Кибалюк Д.А.
подпись, дата *фамилия и.о.*

Оглавление

Задание

На плоскости задана парабола при помощи уравнения

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \quad p \neq 0,$$

и точка $M(\xi, \eta)$, а также натуральное число m.

Требуется построить m лучей, исходящих из точки M и образующих с осью абсцисс углы $j \cdot 2\pi/m,\ j = 0, \dots, m - 1$ (если их измерять от оси абсцисс против часовой стрелки). Если луч не пересекает параболу – указать координаты любой точки на нем, отличной от M, и направление, которое он образует с осью абсцисс. Если луч пересекает параболу – продолжить его по правилу «угол падения равен углу отражения», указав координаты точки первого отражения от параболы и угол, который образует луч с осью абсцисс после первого отражения.

Примечание: если точка M лежит на параболе, то формально считать, что она находится бесконечно близко к ней, и при этом лежит изнутри параболы; точкой отражения для соответствующих направлений будет сама точка M.

Структура исходных данных:

x0 y0 p	<< координаты вершины и фокальный параметр
xi eta	<< координаты точки M
M	<< количество рассчитываемых лучей

Структура результата:

x1 y1 phi1	<< для первого луча (угол phi – в радианах)
...	
xm ym phim	<< для m-го луча (угол phi – в радианах)

Введение

Основной целью ознакомительной практики 2-го семестра, входящей в учебный план подготовки бакалавров по направлению 01.03.04 – Прикладная математика, является знакомство с особенностями осуществления деятельности в рамках выбранного направления подготовки и получение навыков применения теоретических знаний в практической деятельности.

В ранее пройденном курсе «Аналитическая геометрия» изучены основные сведения об операциях над векторами и матрицами и о кривых второго порядка, а в рамках курса «Математический анализ» освоены разделы, связанные с теорией пределов, дифференциальным исчислений функций одной переменной и его приложениями к исследованию функций, в ходе продолжения освоения этого же курса во 2-м семестре изучаются основы интегрального исчисления и методы исследования функций нескольких переменных.

В рамках освоенного курса «Введение в информационные технологии» изучены (изучение продолжается на 2-м семестре) основные возможности языка программирования C++ и сформированы базовые умения в области программирования на C++. Задачей практики является закрепление соответствующих знаний и умений и овладение навыками разработки программ на языке C++, реализующих алгоритмы решения задач аналитической геометрии и математического анализа.

1. Решение геометрической задачи

1.1. Поиск точек пересечения луча, порожденного точкой M и параболой

Вначале представим уравнение прямой, проходящий через точку $M(\xi, \eta)$ под углом φ, в параметрическом виде.

$$\begin{cases} x = \xi + t\cos\varphi, \\ y = \eta + t\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Подставим полученные координаты в данное уравнение параболы, чтобы найти точки пересечения прямой и параболы:

$$(\eta + t\sin\varphi - y_0)^2 = 2p(\xi + t\cos\varphi - x_0).$$

Преобразуем данное выражение:

$$\eta^2 + 2\eta t\sin\varphi - 2ny_0 + t^2\sin^2\varphi - 2t\sin\varphi y_0 + y_0^2 = 2p\xi + 2pt\cos\varphi - 2px_0;$$

$$t^2(\sin^2\varphi) + t(2\sin\varphi(\eta - y_0) - 2p\cos\varphi) + \left((\eta - y_0)^2 - 2p(\xi - x_0)\right) = 0.$$

Получаем квадратное уравнение относительно параметра t.

Введем обозначения

$$\begin{cases} a = \sin^2\varphi, \\ b = 2\sin\varphi(\eta - y_0) - 2p\cos\varphi, \\ c = (\eta - y_0)^2 - 2p(\xi - x_0), \end{cases}$$

тогда имеем уравнение вида $at^2 + bt + c = 0$.

Получив коэффициенты квадратного уравнения, вычислим дискриминант по формуле:

$$D = b^2 - 4ac =$$
$$= 4(\sin\varphi(\eta - y_0) - p\cos\varphi)^2 - 4\sin^2\varphi\left((\eta - y_0)^2 - 2p(\xi - x_0)\right).$$

Найдем действительные корни уравнения, если они существуют. Так как по условию, необходимо найти пересечения луча и параболы будем рассматривать положительные значения параметра t.

В случае, если коэффициент a равен нулю, то имеем уравнение первой степени относительно t. Следовательно, получаем единственный корень $t = -\frac{c}{b}$. Если это значение t неположительное или коэффициент $b = 0$, то считаем, что не существует точки пересечения луча и параболы и переходим к случаю 1.4.

В ином случае, количество положительных корней квадратного уравнения будет соответствовать количеству точек пересечения луча и параболы. Если хотя бы один из корней является нулевым ($t = 0$), то точка M будет принадлежать параболе. Этот частный случай подробней рассмотрим в пункте 1.3.

Рассмотрим три возможных результата решения квадратного уравнения.

1) Имеем два положительных корня уравнения: t_1 и t_2, следовательно, две точки пересечения луча и параболы – $P(x_p, y_p)$ и $N(x_n, y_n)$. Для расчета координат точек пересечения подставим полученные значения параметра t в систему. Примем за точку первого отражения луча от параболы ближайшую к точке M точку пересечения. Заметим, что значение параметра t напрямую влияет на расстояние от любой точки, принадлежащей лучу, до точки M. Чем больше значение t, тем длиннее отрезок, ограниченный данной точкой и точкой M. Значит, сравнивая значения t_1 и t_2, выберем наименьшее и вычислим координаты искомой точки пересечения $P(x_p, y_p)$.

2) Имея всего один положительный корень уравнения, можем сделать вывод, что его значение задает единственную точку пересечения луча и параболы, полученная точка будет являться точкой первого отражения $P(x_p, y_p)$.

3) При отсутствии положительных корней или корней вообще ($D < 0$), луч не пересекает параболу, следовательно нет общих точек. Подробнее рассмотрим этот случай в пункте 1.4.

Также стоит отдельно рассмотреть случай, когда луч параллелен оси ординат, то есть $\cos\varphi = 0$. В такой ситуации будем искать положительные значения t по формуле:

$$t_{1,2} = \frac{\left(y_0 \pm \sqrt{2p(\xi - x_0)}\right) - \eta}{\sin\varphi}. \qquad (1)$$

Если среди найденных t нет положительных значений, то луч в такой ситуации не имеет точек пересечения с данной параболой.

1.2. Вычисление угла, образованного отраженным лучом и осью абсцисс

После нахождения точки первого отражения луча, который назовем лучом L, от параболы продолжим луч по правилу «угол падения равен углу отражения». Для этого воспользуемся дополнительным построением. Найдем уравнение касательной к параболе в точке $P(x_p, y_p)$:

$$(y - y_0)y_p = p\left(x - x_0 + x_p\right),$$

или

$$y - y_0 = \frac{p}{y_p}\left(x - x_0 + x_p\right).$$

Значит, угловой коэффициент касательной $k' = \frac{p}{y_p}$, тогда угловой коэффициент нормали $k = -\frac{y_p}{p}$ и можем найти уравнение нормали m в данной точке:

$$y - y_0 = -\frac{y_p}{p}\left(x - x_0 + x_p\right).$$

Теперь найдем угловой коэффициент луча L, который будет являться тангенсом угла φ:

$$k_L = \operatorname{tg}\varphi.$$

Углом отражения α луча L от параболы будет являться угол, образованный нормалью m в точке P и самим лучом L. Найдем угол α по формуле:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{k_L - k}{1 + k_L k}\right). \tag{2}$$

Значит, искомый угол β, угол между осью абсцисс и лучом L после первого отражения, можем найти как $\beta = \varphi - 2\alpha$. Если угол β не попадает в промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, прибавим или вычтем π, чтобы угол β оказался в данном отрезке.

Также стоит отдельно рассмотреть случай, когда луч L параллелен оси ординат, то есть $\cos\varphi = 0$. В таком случае искомый угол β равен 0.

1.3. Случай принадлежности точки *M* параболе

Подставим координаты точки M в уравнение параболы:

$$(\eta - y_0)^2 = 2p(\xi - x_0).$$

Если данное равенство выполнено, то точка $M(\xi, \eta)$ принадлежит параболе. В данном случае по условию задания считаем, что точка M и является точкой первого отражения луча от параболы. Следовательно, для поиска угла между первым отражение луча L и осью абсцисс проделаем алгоритм из пункта 1.2, но с учетом того, что точка P имеет координаты точки M, т.е. $P(\xi, \eta)$.

1.4. Случай отсутствия пересечения лучом параболы

Для нахождения точки, принадлежащей лучу и не совпадающей с точкой M, примем параметр $t = 1$ и подставим его в систему уравнений координат луча. Таким образом, получим точку $P(x_p, y_p)$ с координатами:

$$\begin{cases} x_p = \xi + \cos\varphi, \\ y_p = \eta + \sin\varphi. \end{cases}$$

Направлением луча L относительно оси абсцисс считаем угол φ в данном случае. Таким образом, получаем точку, принадлежащую лучу L, а также несовпадающую с точкой M, и направление луча относительно оси абсцисс.

2. Программная реализация алгоритма решения задачи

Для программной реализации решения поставленной задачи напишем три вспомогательные функции и введем структуру `coordinates` для реализации координат точек и векторов. Функция `intersection_points` находит ближайшую к точке M точку пересечения луча и параболы и возвращает ее координаты, если таковая точка есть, иначе функция возвращает координаты точки M. Функция `angle` будет вызываться, когда луч имеет с параболой хотя бы одну точку пересечения или же когда точка M лежит на параболе и, таким образом, сама является точкой первого отражения луча от нее. Данная функция будет возвращать угол, который образует отраженный луч, построенный по правилу «угол падения равен углу отражения», с осью Ox. Функция `check` проверяет, принадлежит ли точка M параболе, подставляя координаты точки в исходное уравнение параболы. Рассмотрим данные функции подробнее.

В начале программы мы определяем

```
#define _USE_MATH_DEFINES
```

чтобы использовать математическую константу `PI`, и определяем малую величину

```
EPS = 1E-9,
```

имеющую смысл «отсечки», с которой мы в дальнейшем будем сравнивать числа с плавающей точкой типа `double`. Также подключаем стандартные библиотеки

`iostream`, `cmath`, `algorithm`, `iomanip`

На вход функции `intersection_points` подаются координаты точки $M(\xi,\eta)$ и параметры параболы: координаты вершины параболы (x_0, y_0), фокальный параметр p и угол φ (угол наклона луча L). Функция сначала сравнивает значение $\cos\varphi$ с `EPS`. В случае, если данный косинус по модулю меньше принятой величины «отсечки», реализуем вычисление точек пересечения луча L и параболы по формуле (1). Иначе функция вычисляет коэффициенты квадратного уравнения относительно параметра t, определяющего положение точки на луче.

Отдельно рассматриваем случай, когда коэффициент a по модулю меньше `EPS`, тогда задача сводится к решению линейного уравнения, корень которого $t = -\frac{c}{b}$. В противном случае вычисляется дискриминант квадратного уравнения. Если дискриминант неотрицателен, находятся корни t_1 и t_2. Выбирается наименьший положительный корень, соответствующий ближайшей точке пересечения «впереди» точки M по направлению луча. Если положительных корней нет, считается, что пересечения нет. Если дискриминант отрицателен, пересечения также не существует. В случае отсутствия пересечения или нахождения отрицательных значений параметра t, функция возвращает исходную точку M. В противном случае, возвращаются координаты вычисленной точки пересечения в формате типа данных структуры `coordinates` (рис. 1).

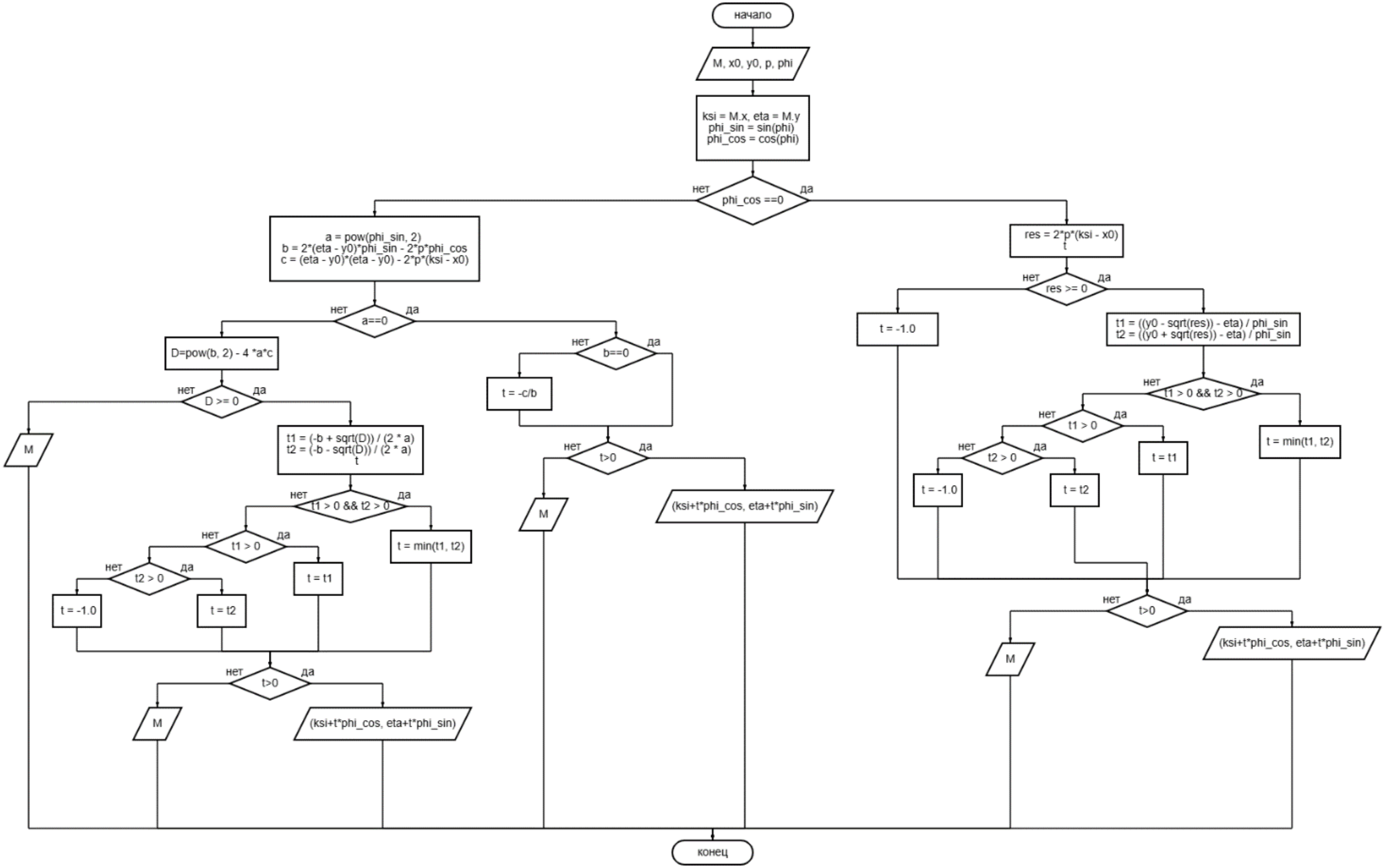

Рис. 1. Блок-схема алгоритма функции `intersection_points`

Функция `angle` вычисляет угол между отраженным лучом и осью абсцисс. На вход функция принимает все параметры параболы, угол φ, угол наклона луча, и точку отражения луча от параболы $P(x_p, y_p)$. Сначала находим значения угловых коэффициентов k и k_L нормали в точке P и луча, исходящего из точки M. Далее по формуле (2) находим угол α, используя математическую функцию `atan2(...)`. Далее находим искомый угол β и «нормализуем» его при помощи функции `fmod(...)` (рис. 2).

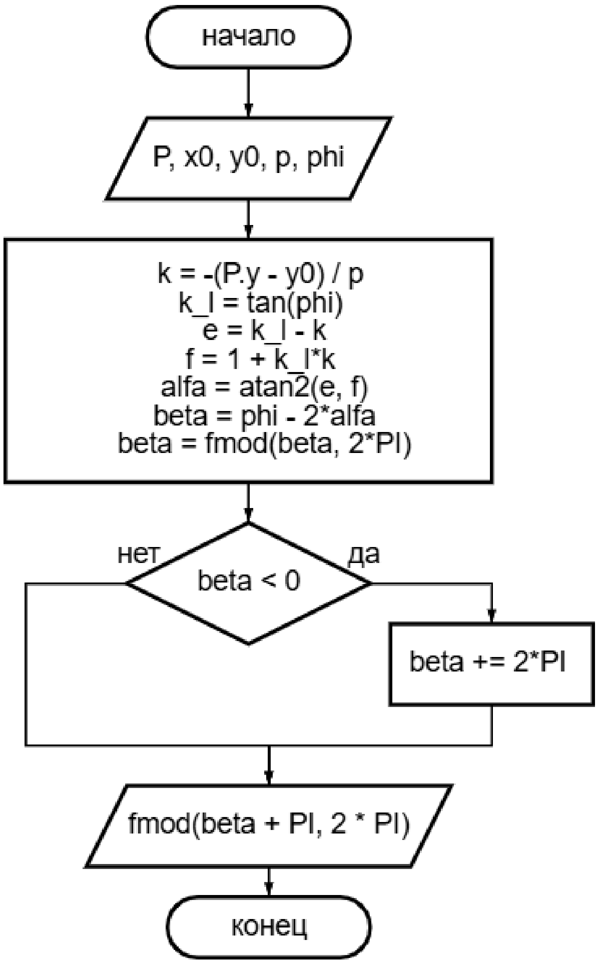

Рис. 2. Блок-схема функции `angle`

Функция `check` определяет, лежит ли точка $M(\xi, \eta)$ параболе. Функция имеет возвращаемый тип `bool` и возвращает соответствующее значение на подстановку координат точки M в уравнение параболы (рис. 3).

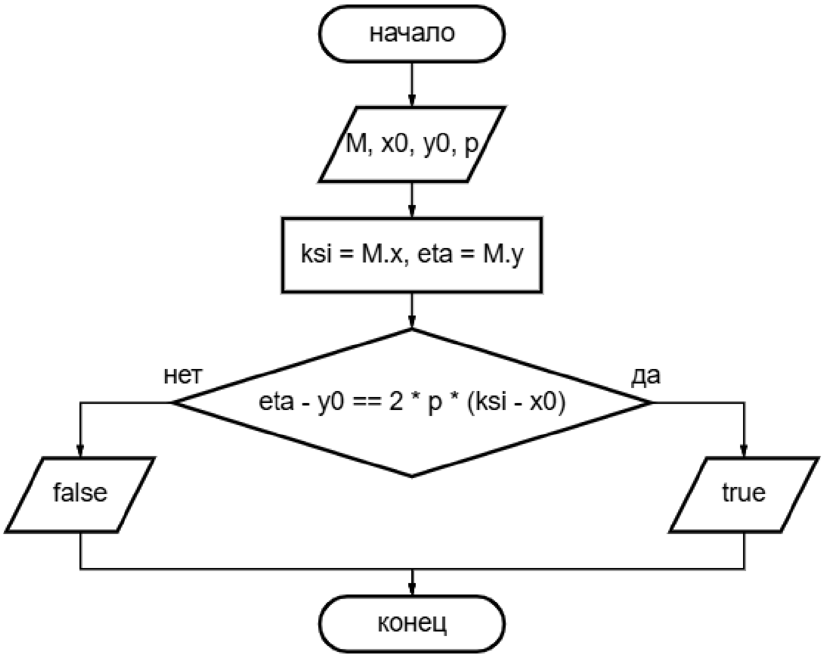

Рис. 3. Блок-схема функции `check`

Рассмотрим функцию `main`. Данная функция начинается с чтения координат вершины параболы (x_0, y_0), параметра параболы p, координат точки $M(\xi, \eta)$ из стандартного ввода и числа m, определяющего количество углов, для которых будут проводиться вычисления. Инициализируем точку M как объект типа `coordinates` и проверяем, лежит ли точка M на параболе, используя функцию `check`. Если точка лежит на параболе, то для каждого угла φ (от 0 до 2π с шагом $2\pi j/m$) вычисляется угол β с использованием упрощенной функции `angle`, и результаты выводятся в стандартный поток вывода. Если точка M не лежит на прямой, то для каждого угла φ вычисляется точка пересечения P луча, выпущенного из M под углом φ, с параболой, используя функцию `intersection_points`. Если пересечения нет (выполнено условие `P == M`), то вычисляется точка на луче, не совпадающая с точкой M, в стандартный поток вывода отправляется эта найденная точка и угол φ. Иначе вычисляется угол `ans_angle` для точки P с использованием функции `angle`, и выводятся координаты точки P и угол `ans_angle` (рис. 4).

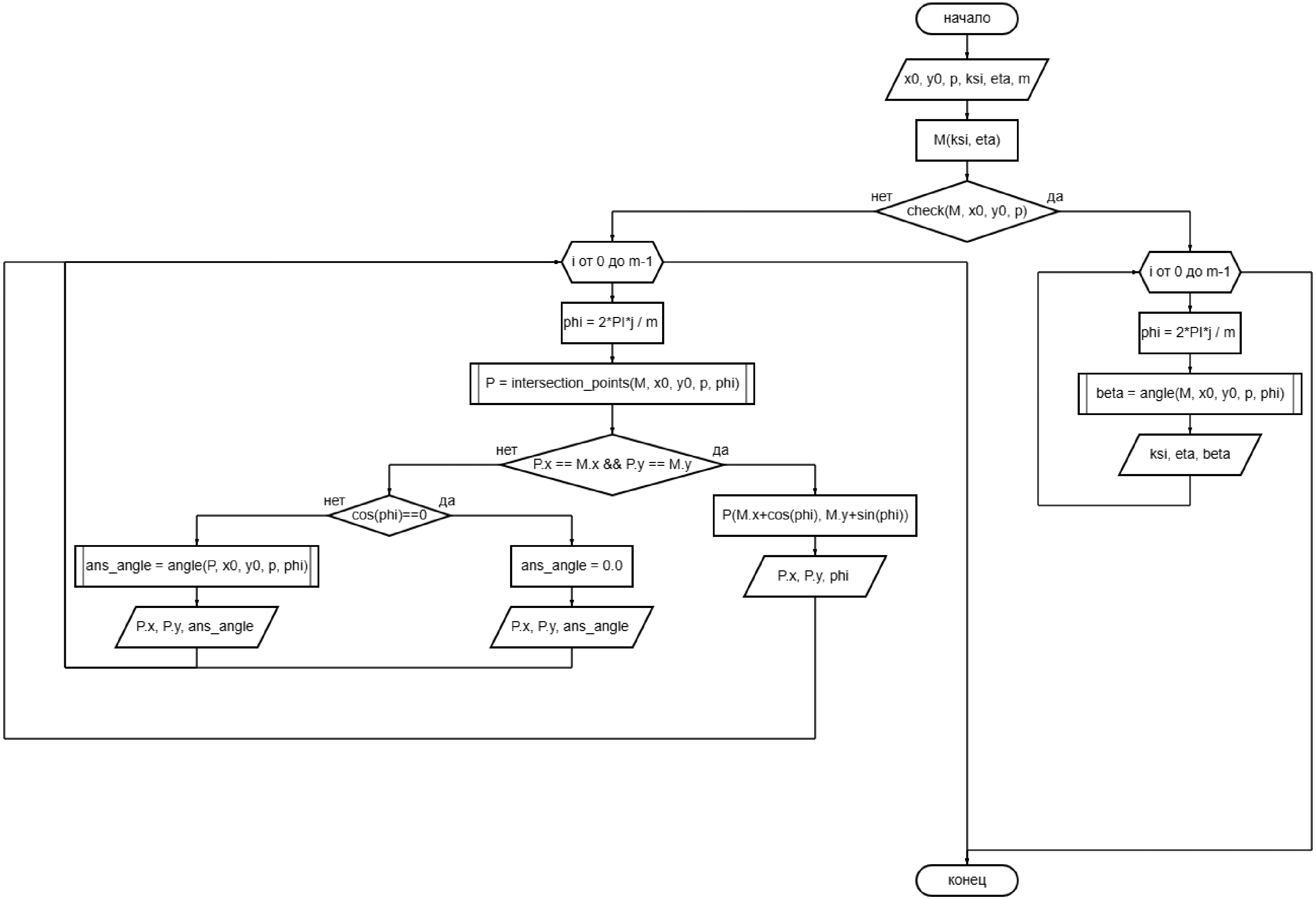

Рис. 4. Блок-схема функции `main`

3. Анализ сложности алгоритма

Количество выполняемых операций в алгоритме не является фиксированным, таким образом итоговая сложность алгоритма составляет $O(m)$, что определяется основным циклом в функции `main()`. Произведем подсчет арифметических операций, выполняемых каждой функцией (Табл.).

Таблица. Количество арифметических операций

Функция	Минимальное количество арифметических операций	Максимальное количество арифметических операций
`intersection_points`	2 (при |phi_cos| ≤ EPS)	21 (при D ≥ EPS и t ≥ EPS)
`angle`	6	6
`check`	4	4

4. Примеры решения задачи

Пример 1. Парабола задана уравнением $y^2 = 2x$, точка $M(0.5, 0)$.

Угол наклона луча, исходящего из точки M равен $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Зададим прямую, совпадающую с лучом:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} t, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} t. \end{cases}$$

Вычислим координаты точки пересечения параболы и луча, исходящего из точки M под углом φ:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right)^2 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} t\right),$$

$$\frac{1}{2} t^2 - \sqrt{2} t - 1 = 0,$$

$$t_1 = \sqrt{2} + 2,$$
$$t_2 = \sqrt{2} - 2.$$

Поскольку $t_2 < 0$, то данный параметр задает точку, не принадлежащую лучу. Подставив t_1 в уравнение луча L, получим x_p и y_p – координаты точки пересечения луча и параболы:

$$\begin{cases} x_p = \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}, \\ y_p = 1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Заметим, что координаты точки M и фокуса параболы совпадают. Согласно оптическому свойству параболы, лучи, вышедшие из фокуса параболы, отразившись от неё, будут параллельны оси параболы. Следовательно, угол наклона отраженного луча относительно оси Ox равен 2π (рис. 5).

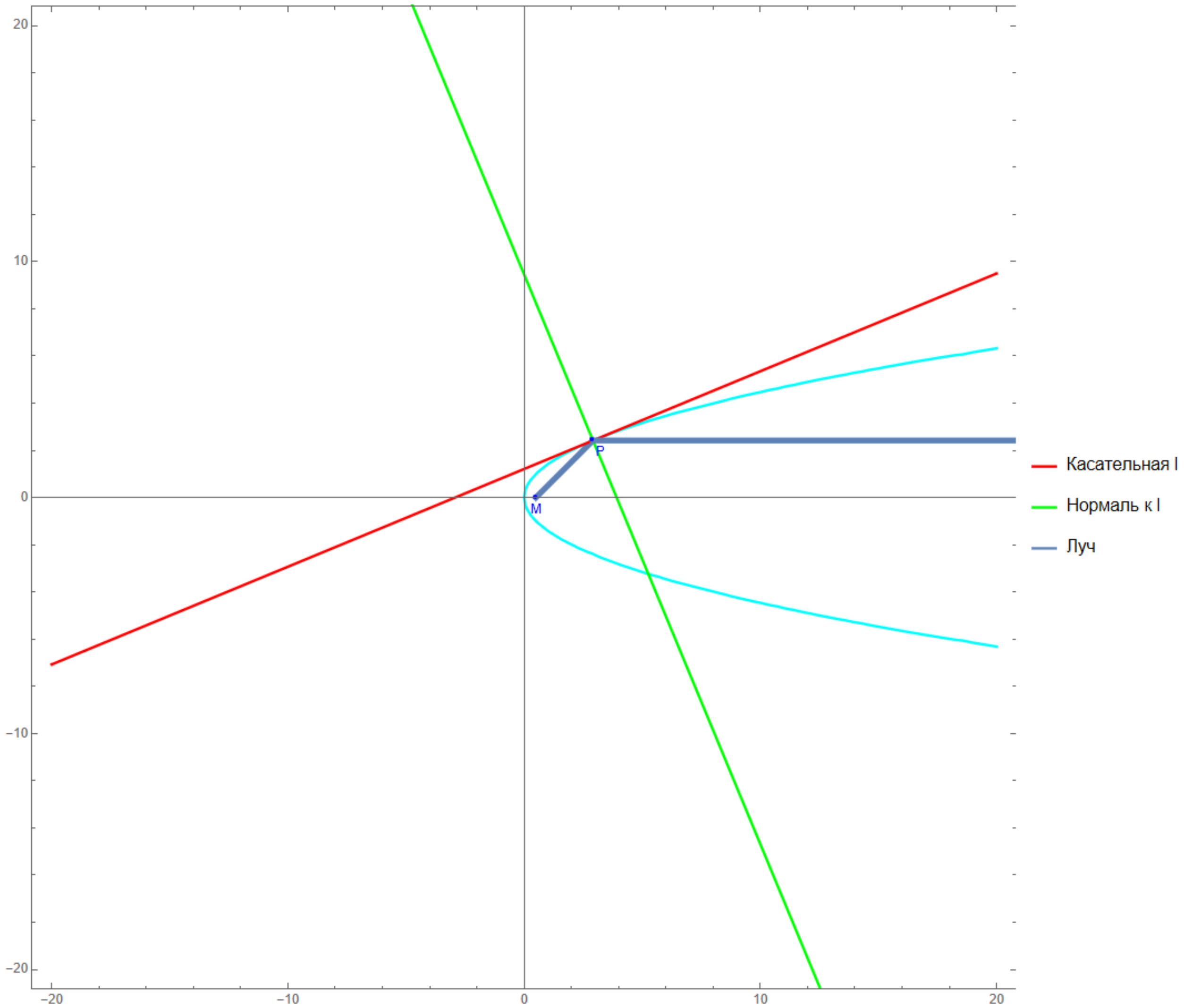

Рис. 5. Иллюстрация к примеру 1

Пример 2. Парабола $y^2 = 4(x-1)$, $M(1,4)$, угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Уравнение луча:

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{2}t, \\ y = 4 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t. \end{cases}$$

Подставим координаты в уравнение параболы:

$$\left(4 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 = 2t,$$

$$\frac{3}{4}t^2 + \left(\sqrt{3} - 2\right)t + 16 = 0,$$

$$D = \left(\sqrt{3} - 2\right)^2 - 3 \cdot 16 = -41 - 4\sqrt{3}.$$

Заметим, что дискриминант меньше нуля, значит, парабола не имеет с лучом общих точек. Вычислим координаты точки, принадлежащей лучу, подставив в уравнение луча любое значение t, отличное от нуля (чтобы не получить данную точку M), к примеру, $t = 1$, тогда $x_p = \frac{3}{2}$, $y_p = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Направлением луча относительно оси абсцисс является угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$, точка P, не совпадающая с точкой M, имеет координаты $\left(\frac{3}{2}, 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, см. рис. 6.

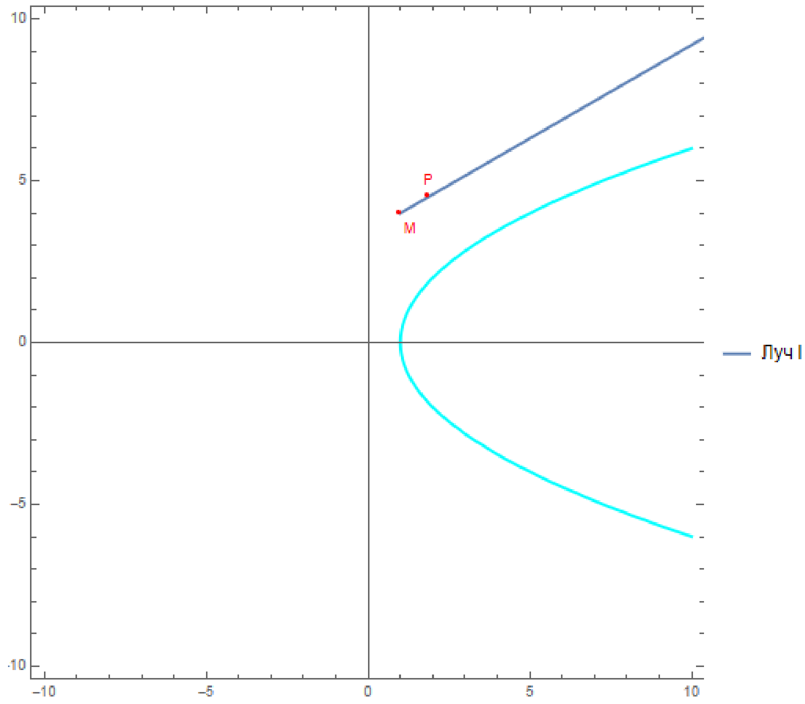

Рис. 6. Иллюстрация к примеру 2

Пример 3. Парабола $(y-\ 1.5)^2 = 0.4(x-1.5)$, $M(1.7, 1.55)$, угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Уравнение луча:

$$\begin{cases} x = \dfrac{17}{10} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \dfrac{31}{20} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t. \end{cases}$$

Вычислим координаты точки пересечения параболы и луча, исходящего из точки M под углом φ:

$$\left(\frac{31}{20} + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}\left(\frac{17}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{3}{2}\right),$$

$$200t^2 - 60\sqrt{2}t - 31 = 0,$$

$$\left[\begin{aligned} t_1 &= \frac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{5}}{20}, \\ t_2 &= \frac{3\sqrt{2} + 4\sqrt{5}}{20}. \end{aligned}\right.$$

Так как $t_1 < 0$, то данный параметр задает точку, не принадлежащую лучу. Подставив t_2 в уравнение луча L, получим x_p и y_p – координаты точки пересечения луча и параболы:

$$\begin{cases} x_p = \dfrac{37 + 2\sqrt{10}}{20}, \\ y_p = \dfrac{17 + \sqrt{10}}{10}. \end{cases}$$

Найдем угол, который образует первое отражение луча L в точке P, учитывая, что:

$$k = -\frac{\left(\dfrac{17 + \sqrt{10}}{10} - \dfrac{3}{2}\right)}{\dfrac{1}{5}} = -\ \frac{2 + \sqrt{10}}{2}, \qquad k_L = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + \dfrac{2 + \sqrt{10}}{2}}{1 - \dfrac{2 + \sqrt{10}}{2}}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{5 + 2\sqrt{10}}{5}\right),$$

$$\beta = \varphi - 2\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{5 + 2\sqrt{10}}{5}\right).$$

Проверяем остался ли искомый угол в нужном диапазоне $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Это не так, поэтому вычтем из величины угла π Таким образом, искомый угол первого отражения луча $\beta = -\frac{3\pi}{4} + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{5+2\sqrt{10}}{5}\right) \approx -0{,}0461585$ рад, а точка P имеет координаты $\left(\frac{37+2\sqrt{10}}{20}, \frac{17+\sqrt{10}}{10}\right)$, см. рис. 7.

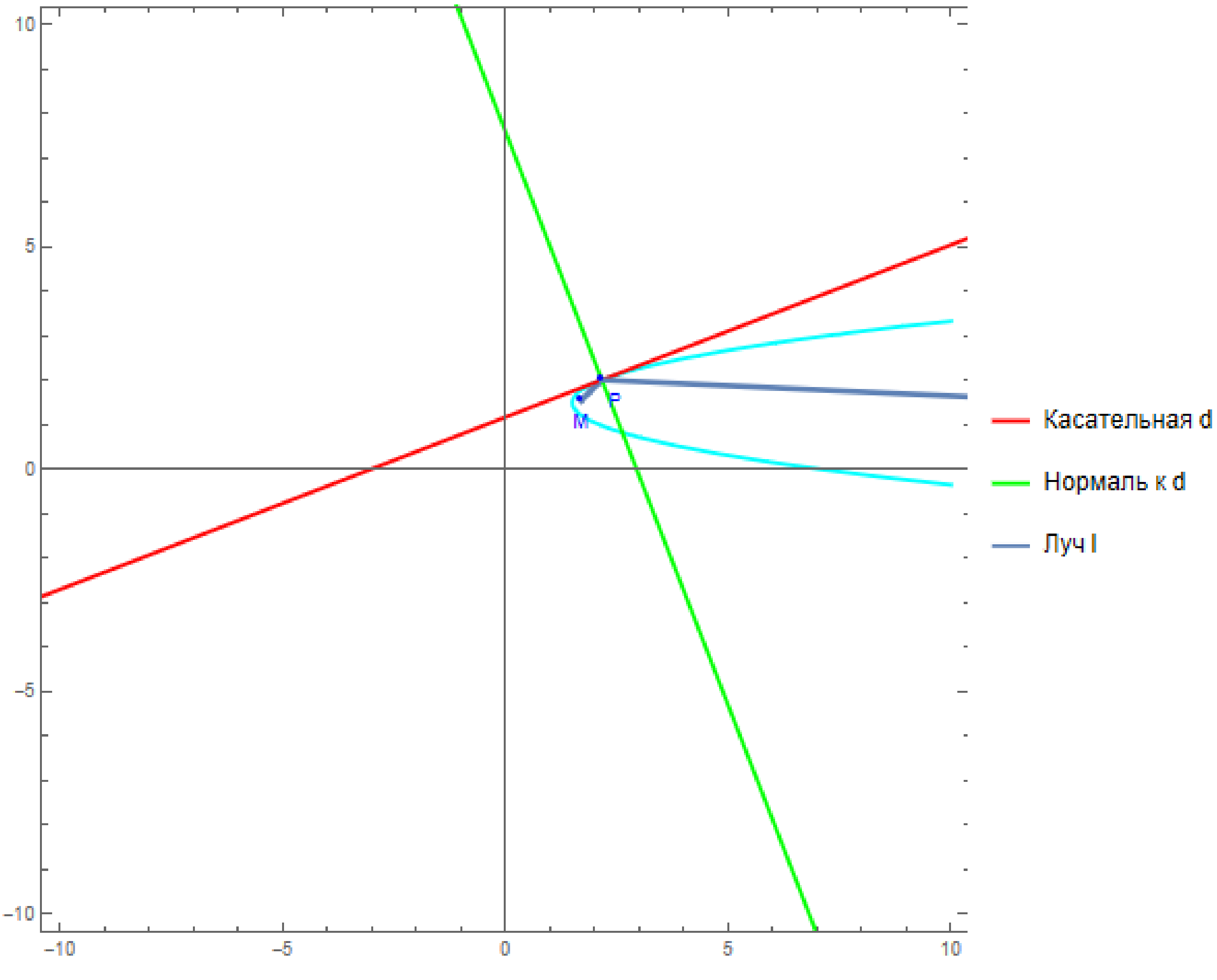

Рис. 7. Иллюстрация к примеру 3

Заключение

В ходе практики были изучены методы решения задачи нахождения лучей, проведенных из заданной точки, их положения относительно заданной параболы, а также углов, которые лучи образуют после первого отражения от параболы, или углов наклона заданных лучей относительно оси абсцисс. Реализация алгоритма на языке C++ позволила закрепить навыки программирования, полученные в курсе «Введение в информационные технологии».

Разработанная программа успешно решает поставленную задачу, учитывая различные случаи расположения точки и параметры параболы. Проведенные тесты подтвердили корректность работы алгоритма. Практика способствовала углублению понимания применения математических методов в программировании и развитию навыков аналитического решения геометрических задач.

Список использованных источников

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 388 с.
2. Прата С. Язык программирования C++. Лекции и упражнения. М.: Диалектика, 2020. 1244 с.