Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки
КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ ПО ПРАКТИКЕ

Студент Шаповалова Арина Романовна
фамилия, имя, отчество

Группа: ФН2-21Б

Тип практики: Учебная практика

Название предприятия: Научно-учебный комплекс «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Студент	________________ *подпись, дата*	Шаповалова А.Р. *фамилия и.о.*
Руководитель практики	________________ *подпись, дата*	Марчевский И.К. *фамилия и.о.*

Оценка ____________________________________

2025 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Кафедра «Прикладная математика»

З А Д А Н И Е
на прохождение учебной практики

на предприятии Научно-учебный комплекс «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Студент Шаповалова Арина Романовна
фамилия, имя, отчество

Во время прохождения ознакомительной практики студент должен

1. Изучить на практике основные возможности языка программирования C++, закрепить знания и умения, полученные в курсах «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Введение в информационные технологии».
2. Изучить способы определения парабол, оси симметрии которых параллельны осям координат Oxy и для которых заданные прямые являются касательными.
3. Реализовать алгоритм нахождения количества парабол, удовлетворяющих условиям задачи, и вывода всех точек касания заданных прямых.

Дата выдачи задания «1» марта 2025 г.

Руководитель практики ________________ Марчевский И.К.
подпись, дата *фамилия и.о.*

Студент ________________ Шаповалова А.Р.
подпись, дата *фамилия и.о.*

Оглавление

Введение

Основной целью ознакомительной практики 2-го семестра, входящей в учебный план подготовки бакалавров по направлению 01.03.04 – Прикладная математика, является знакомство с особенностями осуществления деятельности в рамках выбранного направления подготовки и получение навыков применения теоретических знаний в практической деятельности.

В ранее пройденном курсе «Аналитическая геометрия» изучены основные сведения об операциях над векторами и матрицами и о кривых второго порядка, а в рамках курса «Математический анализ» освоены разделы, связанные с теорией пределов, дифференциальным исчислений функций одной переменной и его приложениями к исследованию функций, в ходе продолжения освоения этого же курса во 2-м семестре изучаются основы интегрального исчисления и методы исследования функций нескольких переменных.

В рамках освоенного курса «Введение в информационные технологии» изучены (изучение продолжается на 2-м семестре) основные возможности языка программирования С++ и сформированы базовые умения в области программирования на С++. Задачей практики является закрепление соответствующих знаний и умений и овладение навыками разработки программ на языке С++, реализующих алгоритмы решения задач аналитической геометрии и математического анализа.

1. Условие задачи

Построение параболы, касающейся двух прямых

Найти уравнения парабол, оси симметрии которых параллельны осям координат Ox и Oy и для которых пересекающиеся прямые

$$l_1:\ A_1x + B_1y + D_1 = 0, \qquad l_1:\ A_2x + B_2y + D_2 = 0$$

являются касательными, а их фокус находится в точке, отстоящей на расстояние $d > 0$ от точки пересечения прямых. В ответе указать количество таких парабол и координаты точек их касания с прямыми l_1 и l_2.

Структура исходных данных:

A1 B1 D1	<< коэффициенты в уравнении прямой l_1
A2 B2 D2	<< коэффициенты в уравнении прямой l_2
d	<< расстояние от фокуса до точки пересечения прямых

Структура результата:

n	<< количество парабол
x11 y11	<< координаты точки касания 1-й параболы с l_1
x12 y12	<< координата точки касания 1-й параболы с l_2
…	
xn1 yn1	<< координаты точки касания n-й параболы с l_1
xn2 yn2	<< координата точки касания n-й параболы с l_2

2. Решение в общем случае

Решив систему линейных алгебраических уравнений, каждое из которых отвечает исходным прямым, найдем точку их пересечения:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0, \end{cases}$$

отсюда

$$x_{0c} = \frac{B_2D_1 - B_1D_2}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y_{0c} = \frac{A_2D_1 - A_1D_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Система всегда имеет единственное решение, т.к. по условию известно, что прямые пересекаются, значит, $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.

2.1. Параболы с горизонтальной осью симметрии

Запишем уравнения прямых через угловые коэффициенты

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0; \quad x = k_1y + b_1; \quad k_1 = -\frac{B_1}{A_1}; \quad b_1 = -\frac{D_1}{A_1};$$

$$A_2x + B_2y + D_2 = 0; \quad x = k_2y + b_2; \quad k_2 = -\frac{B_2}{A_2}; \quad b_2 = -\frac{D_2}{A_2}.$$

2.1.1. Парабола, заданная уравнением $2px = y^2$

Для удобства вычислений выполним параллельный перенос, чтобы центр параболы находился в начале координат. В новой системе координат для данной параболы фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Подставив уравнение первой прямой, которое теперь принимает вид

$$x = k_1 y + \tilde{b}_1,$$

в уравнение параболы, получаем

$$2pk_1 y + 2p\tilde{b}_1 = y^2,$$

или

$$y^2 - 2pk_1 y - 2p\tilde{b}_1 = 0.$$

Рассмотрим это соотношение как квадратное уравнение, тогда условие равенства дискриминанта нулю, т.е.

$$D = 4p^2 k_1^2 + 8p\tilde{b}_1 = 0,$$

и будет условием касания первой прямой и параболы, отсюда находим

$$\tilde{b}_1 = -\frac{pk_1^2}{2}.$$

Аналогичные рассуждения для второй прямой приводят к условию

$$\tilde{b}_2 = -\frac{pk_2^2}{2}.$$

Найдем точку пересечения прямых. Для этого подставим найденные выражения для $\tilde{b}_1$ и $\tilde{b}_2$ в уравнения прямых и решим систему

$$\begin{cases} x_{0c} = k_1 y_{0c} - \dfrac{pk_1^2}{2}, \\ x_{0c} = k_2 y_{0c} - \dfrac{pk_2^2}{2}, \end{cases}$$

откуда

$$k_1 y_{0c} - \frac{pk_1^2}{2} = k_2 y_{0c} - \frac{pk_2^2}{2},$$

и окончательно

$$y_{0c} = \frac{p(k_1 + k_2)}{2} = -\frac{p}{2}\frac{B_1 A_2 + B_2 A_1}{A_1 A_2},$$

$$x_{0c} = \frac{pk_1 k_2}{2} = \frac{p}{2}\frac{B_1 B_2}{A_1 A_2}.$$

Для нахождения значения p воспользуемся условием заданного расстояния между фокусом параболы и точкой пересечения:

$$y_0^2 + \left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 = d^2,$$

отсюда

$$p = \frac{2d}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_1^2 k_2^2 + 1}} = \frac{2d}{\sqrt{(k_1 k_2 - 1)^2 + (k_1 + k_2)^2}}.$$

Для нахождения точек касания параболы с каждой из прямых используем полученные ранее условия касания и находим

$$y_1 = pk_1 = -p\frac{B_1}{A_1}, \qquad y_2 = pk_2 = -p\frac{B_2}{A_2};$$

полученные значения подставляем в уравнения соответствующих прямых и находим

$$x_1 = p\frac{B_1^2}{A_1^2} - \frac{p}{2}\frac{B_1^2}{A_1^2} = \frac{p}{2}\frac{B_1^2}{A_1^2}, \qquad x_2 = p\frac{B_2^2}{A_2^2} - \frac{p}{2}\frac{B_2^2}{A_2^2} = \frac{p}{2}\frac{B_2^2}{A_2^2}.$$

При переходе в «старую» систему координат используем смещение точки пересечения прямых и получаем

$$x_{1c} = \frac{p}{2}\frac{B_1^2}{A_1^2} - (x_{0c} - x_0), \qquad y_{1c} = -p\frac{B_1}{A_1} - (y_{0c} - y_0),$$

$$x_{2c} = \frac{p}{2}\frac{B_2^2}{A_2^2}. -(x_{0c} - x_0), \qquad y_{2c} = -p\frac{B_2}{A_2} - (y_{0c} - y_0).$$

2.1.2. Парабола, заданная уравнением $-2px = y^2$

Для удобства вычислений снова используем параллельный перенос, чтобы центр параболы переместить в начало координат. В новой системе координат, для данной параболы, фокус имеет координаты $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$.

Подставив уравнение первой прямой, которое имеет вид

$$x = k_1 y + \tilde{b}_1,$$

в уравнение параболы, получаем

$$-2pk_1y - 2p\tilde{b}_1 = y^2,$$

или

$$y^2 + 2pk_1y + 2p\tilde{b}_1 = 0.$$

Как и в предыдущем пункте, рассмотрим это соотношение как квадратное уравнение, тогда условие равенства дискриминанта нулю, т.е.

$$D = 4p^2k_1^2 - 8p\tilde{b}_1 = 0,$$

и будет условием касания первой прямой и параболы, отсюда находим

$$\tilde{b}_1 = \frac{pk_1^2}{2}.$$

и аналогично

$$\tilde{b}_2 = \frac{pk_2^2}{2}.$$

Найдем точку пересечения прямых. Для этого подставим найденные выражения для $\tilde{b}_1$ и $\tilde{b}_2$ в уравнения прямых и решим систему

$$\begin{cases} x_{0c} = k_1y_{0c} + \dfrac{pk_1^2}{2}, \\ x_{0c} = k_2y_{0c} + \dfrac{pk_2^2}{2}, \end{cases}$$

откуда

$$k_1y_{0c} + \frac{pk_1^2}{2} = k_2y_{0c} + \frac{pk_2^2}{2},$$

и окончательно

$$y_{0c} = -\frac{p(k_1 + k_2)}{2} = \frac{p}{2}\frac{B_1A_2 + B_2A_1}{A_1A_2},$$

$$x_{0c} = -\frac{pk_1k_2}{2} = -\frac{p}{2}\frac{B_1B_2}{A_1A_2}.$$

Для нахождения значения p воспользуемся условием заданного расстояния между фокусом параболы и точкой пересечения:

$$y_0^2 + \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2 = d^2,$$

отсюда

$$p=\frac{2d}{\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2+1}}=\frac{2d}{\sqrt{(k_1k_2-1)^2+(k_1+k_2)^2}}.$$

Для нахождения точек касания параболы с каждой из прямых используем полученные ранее условия касания и находим

$$y_3=-pk_1=p\frac{B_1}{A_1},\qquad y_3=-pk_2=p\frac{B_2}{A_2};$$

полученные значения подставляем в уравнения соответствующих прямых и находим

$$x_3=-p\frac{B_1^2}{A_1^2}+\frac{p}{2}\frac{B_1^2}{A_1^2}=\frac{p}{2}\frac{B_1^2}{A_1^2},\qquad x_3=-p\frac{B_2^2}{A_2^2}+\frac{p}{2}\frac{B_2^2}{A_2^2}=\frac{p}{2}\frac{B_2^2}{A_2^2}.$$

При переходе в «старую» систему координат используем смещение точки пересечения прямых и получаем

$$x_{3c}=\frac{p}{2}\frac{B_1^2}{A_1^2}-(x_{0c}-x_0),\qquad y_{3c}=p\frac{B_1}{A_1}-(y_{0c}-y_0),$$

$$x_{4c}=\frac{p}{2}\frac{B_2^2}{A_2^2}-(x_{0c}-x_0),\qquad y_{4c}=p\frac{B_2}{A_2}-(y_{0c}-y_0).$$

2.2. Параболы с вертикальной осью симметрии

Для вертикальных парабол сделаем аналогичные действия.

Уравнение первой прямой:

$$y=k_1x+b_1,\quad k_1=-\frac{A_1}{B_1},\ \ b_1=-\frac{D_1}{B_1};$$

аналогично для второй прямой

$$y=k_2x+b_2,\quad k_2=-\frac{A_2}{B_2},\ \ b_2=-\frac{D_2}{B_2}.$$

2.2.1. Парабола, заданная уравнением $2py=x^2$

Перейдем в новую систему координат, где центр параболы лежит в начале координат, а ее фокус имеет координаты $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$. В новой системе запишем уравнения прямых

$$y = k_1 x + \tilde{b}_1, \qquad y = k_2 x + \tilde{b}_2,$$

где $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, где $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$.

Подставив поочередно уравнения прямых в уравнение параболы, получим $\tilde{b}_1 = -\frac{pk_1^2}{2}$ и $\tilde{b}_2 = -\frac{pk_2^2}{2}$. Повторяя вычисления аналогично предыдущему разделу, получаем, что точка пересечения прямых имеет координаты

$$x_0 = \frac{p(k_1 + k_2)}{2}, \;\; y_0 = \frac{pk_1 k_2}{2}.$$

С учетом заданного по условию задачи расстояния d находим параметр

$$p = \frac{2d}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_1^2 k_2^2 + 1}} = \frac{2d}{\sqrt{(k_1 k_2 - 1)^2 + (k_1 + k_2)^2}}.$$

Для нахождения точек касания параболы с каждой из прямых используем условие касания и получаем:

$$x_1 = pk_1 = -p\frac{A_1}{B_1}, \qquad x_2 = pk_2 = -p\frac{A_2}{B_2};$$

полученные значения подставляем в уравнения соответствующих прямых и находим

$$y_1 = p\frac{A_1^2}{B_1^2} - \frac{p}{2}\frac{A_1^2}{B_1^2} = \frac{p}{2}\frac{A_1^2}{B_1^2}, \qquad y_2 = p\frac{A_2^2}{B_2^2} - \frac{p}{2}\frac{A_2^2}{B_2^2} = \frac{p}{2}\frac{A_2^2}{B_2^2}.$$

Для перехода в «старую» систему координат учтем смещение точки пересечения прямых и получим:

$$x_{1c} = -p\frac{A_1}{B_1} - (x_{0c} - x_0), \qquad y_{1c} = \frac{p}{2}\frac{A_1^2}{B_1^2} - (y_{0c} - y_0),$$

$$x_{2c} = -p\frac{A_2}{B_2} - (x_{0c} - x_0), \qquad y_{2c} = \frac{p}{2}\frac{A_2^2}{B_2^2} - (y_{0c} - y_0).$$

2.2.2. Парабола, заданная уравнением $-2py = x^2$

Перейдем в новую систему координат, где центр параболы лежит в начале координат, а ее фокус имеет координаты $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$. В новой системе зададим уравнения прямых

$$y = k_1x + \tilde{b}_1, \qquad y = k_2x + \tilde{b}_2,$$

где $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, где $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$.

Подставив поочередно уравнения прямых в уравнение параболы, получим $\tilde{b}_1 = \frac{pk_1^2}{2}$ и $\tilde{b}_2 = \frac{pk_2^2}{2}$, точка пересечения прямых имеет координаты

$$x_0 = -\frac{p(k_1 + k_2)}{2}, \; y_0 = -\frac{pk_1k_2}{2}.$$

В новой системе координат, для данной параболы, фокус имеет координаты $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$. С учетом данного по условию расстояния d находим

$$p = \frac{2d}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_1^2k_2^2 + 1}} = \frac{2d}{\sqrt{(k_1k_2 - 1)^2 + (k_1 + k_2)^2}}.$$

Далее из условий касания находим абсциссы точек касания:

$$x_3 = -pk_1 = p\frac{B_1}{A_1}, \qquad x_4 = -pk_2 = p\frac{B_2}{A_2},$$

полученные значения подставляем в уравнения прямых и находим

$$y_3 = -p\frac{A_1^2}{B_1^2} + \frac{p}{2}\frac{A_1^2}{B_1^2} = \frac{p}{2}\frac{A_1^2}{B_1^2}, \qquad y_4 = -p\frac{A_2^2}{B_2^2} + \frac{p}{2}\frac{A_2^2}{B_2^2} = \frac{p}{2}\frac{A_2^2}{B_2^2}.$$

При переходе в старую систему координат учтем смещение точки пересечения прямых и получим:

$$x_{3c} = p\frac{A_1}{B_1} - (x_{0c} - x_0), \qquad y_{3c} = \frac{p}{2}\frac{A_1^2}{B_1^2} - (y_{0c} - y_0);$$

$$x_{4c} = p\frac{A_2}{B_2} - (x_{0c} - x_0), \qquad y_{4c} = \frac{p}{2}\frac{A_2^2}{B_2^2} - (y_{0c} - y_0).$$

3. Определение количества парабол

Проанализировав полученные результаты, получаем, что в общем случае наибольшее их количество равно четырем. Причем параметры p для двух горизонтальных и двух вертикальных парабол соответственно равны. В ходе решения была выявлена симметрия парабол, имеющих одинаково направленные оси, относительно биссектрисы углов, образованных прямыми. В силу этой симметрии, невозможно существование только одной или трех парабол. Также были рассмотрены и некоторые отдельные случаи, при которых количество парабол равно либо двум, либо нулю. В случае, если одна из прямых параллельна оси *Ox*, могут быть построены только вертикальные параболы. Если же одна из прямых направлена вдоль *Oy*, то можно построить только горизонтальные. В случае, если обе прямые направлены параллельно осям системы координат, то построение парабол невозможно.

4. Оценка сложности алгоритма

Алгоритм состоит из операций с фиксированным числом входных данных (7 чисел с плавающей точкой) и ограниченным числом выходных точек (до 8). Общая временная сложность алгоритма составляет O(1), так как все операции выполняются за константное время, а число итераций ограничено.

5. Особенности реализации на языке C++

Код реализован с использованием объектно-ориентированного подхода, что обеспечивает модульность и читаемость кода. Основные компоненты реализации включают:

- структуру `Point`: представляет точку на плоскости с координатами x и y (тип `double`), для нее реализованы операторы для арифметических операций ($+$, $-$, $+=$, $-=$, унарный $-$), скалярного произведения (&) и вычисления длины вектора (функция-член класса `length()`);
- структуру `Line`: описывает прямую в общем виде $Ax + By + D = 0$, где A, B, D – числа типа `double`, для нее реализованы методы для получения ненормированного вектора нормали (`nVar()`) и вычисления точки пересечения двух прямых (`intersection()`);
- функции `Horizontal_parabola` и `Vertical_parabola`: вычисляют точки касания парабол с прямыми для горизонтальной и вертикальной

ориентации соответственно; каждая функция принимает прямые, точку пересечения, параметр d, параметр p и вектор для хранения результатов.

Использование структур `Point` и `Line` упрощает работу с геометрическими объектами, обеспечивая понятный интерфейс для выполнения вычислений.

Одной из важных особенностей реализации является обеспечение корректности вычислений при работе с числами с плавающей точкой. В созданной реализации определена константа EPS со значением 10^{-14} для обеспечения необходимой точности и избегания ошибок, связанных с ограниченной точностью типа `double`. В функциях `Horizontal_parabola` и `Vertical_parabola` осуществляются проверки деления на ноль, в случаях когда одна из прямых параллельна оси Ox или Oy соответственно. Если же прямые параллельны или совпадают, метод `intersection` возвращает точку с координатами `NaN`, что проверяется в `main` с выводом сообщения об ошибке.

Пространственная сложность алгоритма составляет $O(1)$. Вектор `touch_points` хранит максимум 8 точек (по 2 точки от каждого из 4 вызовов функций `Horizontal_parabola` и `Vertical_parabola`). Для предотвращения реаллокации памяти используется метод `reserve(8)`, который выделяет память заранее.

Ввод и вывод данных реализованы с учетом требований задачи. Результаты выводятся с использованием `std::cout` с фиксированной точностью (`std::fixed`, `std::setprecision(7)`), что обеспечивает единообразное представление координат точек с 7 знаками после запятой. Сначала выводится количество пар точек касания, затем — координаты каждой точки.

6. Блок схема решения задачи на C++

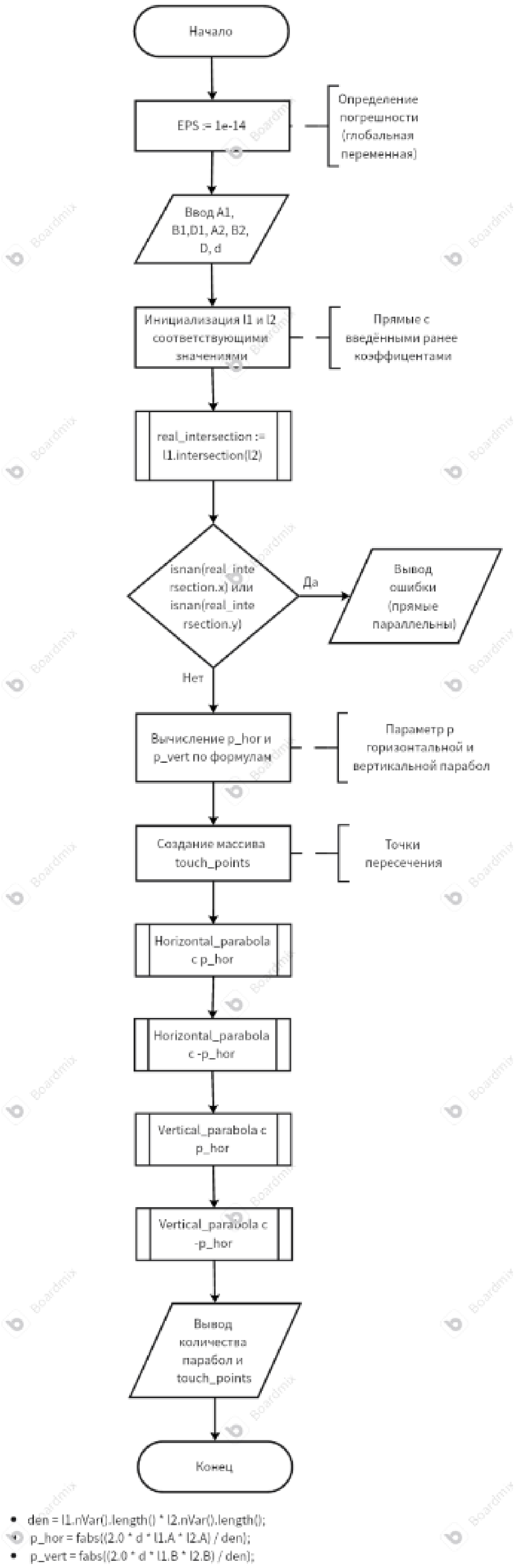

Рис. 1. Блок-схема основной программы

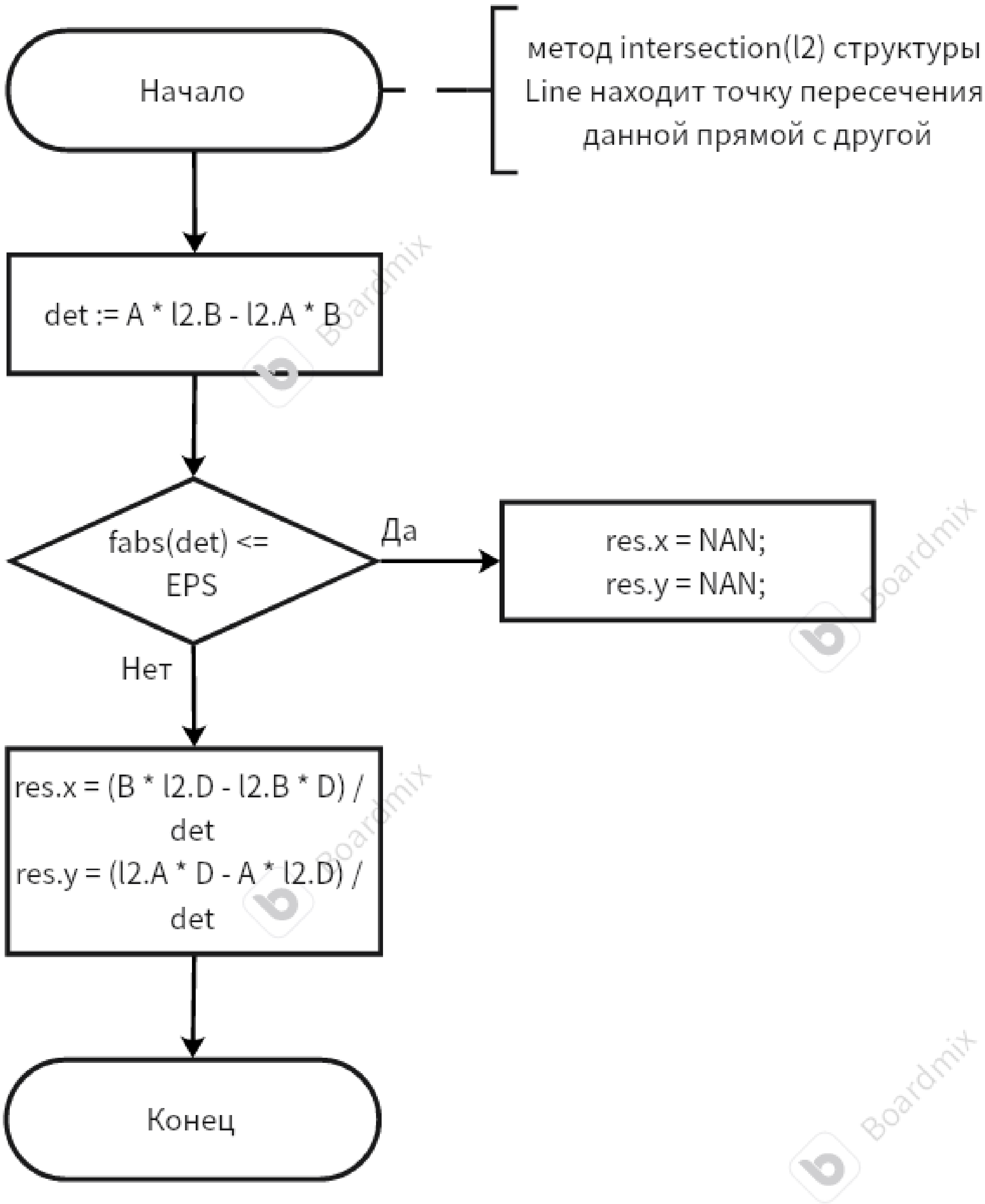

Рис. 2. Блок-схема процедуры поиска точки пересечения

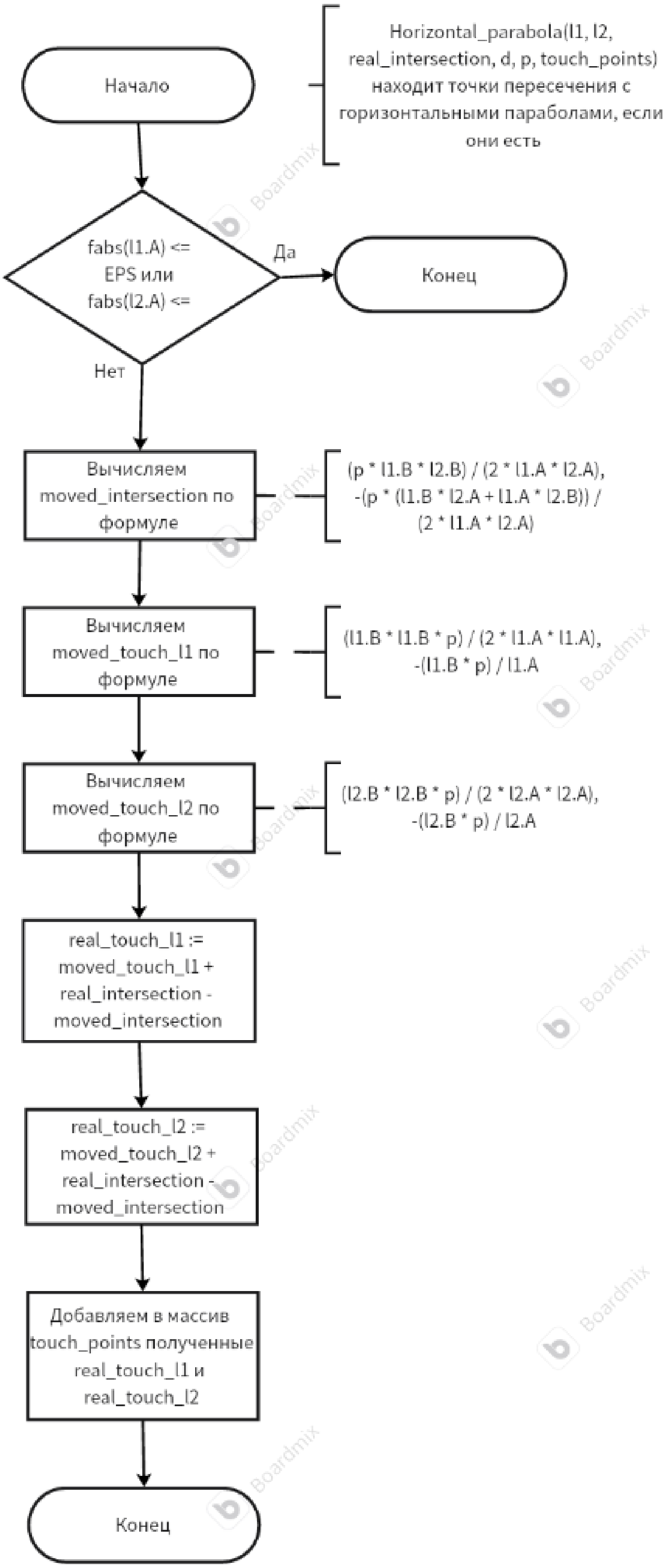

Рис. 3. Блок-схема функции нахождения горизонтальных парабол

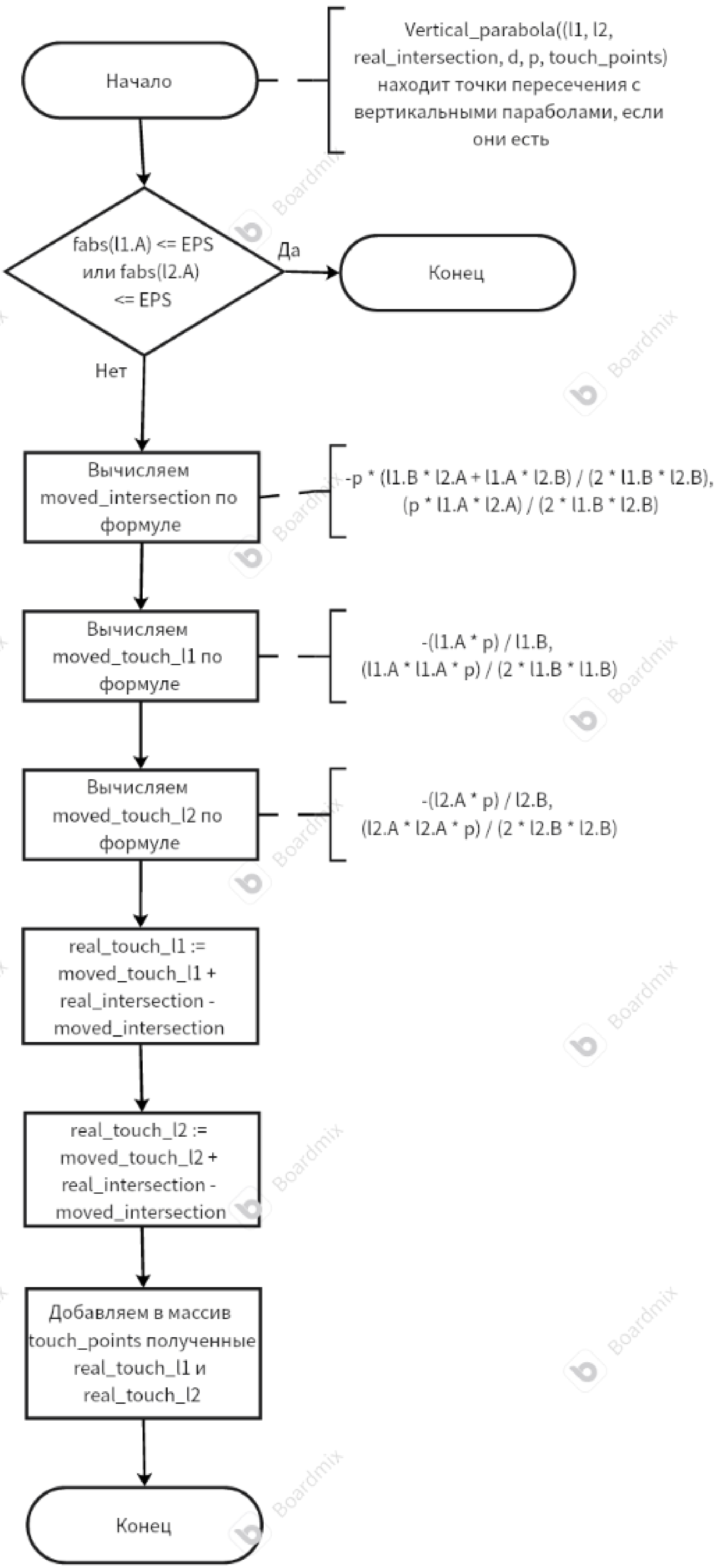

Рис. 4. Блок-схема функции нахождения вертикальных парабол

Заключение

В ходе выполнения практики удалось разработать и реализовать алгоритм определения количества парабол, оси которых направлены параллельно осям координат и для которых заданные прямые являются касательными. При решении данной задачи были использованы знания, полученные в ходе курсов «Аналитическая геометрия» и «Введение в информационные технологии».

Список использованных источников

1. Страуструп Б. Язык программирования C++. Специальное издание. М.: Бином, 2006. 1104 с.
2. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 387 с.