Implementación del cómputo del un-ranking dada una sumatoria de n coeficientes binomiales que tiene como resultado un valor N

Ing. Vicente Oscar Mier Vela

10 de julio del 2013

Curso propedéutico del 2013, a cargo del Dr Jose Torres-Jimenez, CINVESTAV, UNIDAD TAMAULIPAS, LABORATORIO DE TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN, Parque Científico y Tecnológico TECNOTAM – Km. 5.5 carretera Cd. Victoria-Soto La Marina C.P. 87130 Cd. Victoria, Tamps. Teléfono: (834) 107 02 20 – Fax: (834) 107 02 24 y (834) 314 73 92, vinculacion@tamps.cinvestav.mx

Resumen

Estimación del polinomio mayor-qué correspondiente a una sumatoria de coeficientes binomiales por medio de aproximaciones numéricas en C.

1. Introducción

Es posible aproximarnos a los valores de a_i en la siguiente expresión:

$$N=\binom{a_1}{1}+\binom{a_2}{2}+...+\binom{a_n}{n}$$

Donde los valores de a_i deben satisfacer la siguiente condición:

$$a_1 < a_2 < ... < a_n$$

Estos valores representan el poliniomio mayor-qué correspondiente a un valor N con una cantidad n de coeficientes binomiales.

Podemos aproximarnos al valor de cualquier coeficiente binomial de la sumatoria anterior utilizando la siguiente expresión:

$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!}$$

Si conocemos el resultado de $\binom{n}{k}$ (llamémosle C), es posible despejar el valor de n, de esta manera:

$$n = \sqrt[k]{k! \times C}$$

El coeficiente binomial $\binom{a_n}{n}$ es el de valor más alto en la sumatoria. Podemos aproximarnos al valor de a_n por medio de la ecuación anterior. Partiendo de esta aproximación, podemos proceder a probar con valores cada vez más grandes de a_n, de tal manera que $\binom{a_n}{n}$ no exceda el valor de N.

Una vez que obtenemos el valor de $\binom{a_n}{n}$ más cercano a N, le restamos $\binom{a_n}{n}$ a N y continuamos con a_{n-1}, de la misma manera que en el paso anterior, pero utilizando el resultado de N-$\binom{a_n}{n}$ como la "nueva$N$". Este proceso se repite hasta llegar a a_1.

2. Implementación en C

El siguiente programa realiza la operación discutida en la introducción. Utiliza varias funciones de reportes anteriores, como la función coef_bin2(), y nroot(), para auxiliar en el cómputo del polinomio mayor-qué:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int nroot(int, int);
int factor(int);
int coef_bin2(int, int);
int unrank_aprox(int, int);

int main(int argc, char *argv[]) {
        int n = atoi(argv[1]);
        int N = atoi(argv[2]);
        unrank_aprox(n,N);
        return 0;
}

int unrank_aprox(int n, int N) {
        int i,j;
        int fac, x, root, coef, N2;
        int unr[n];
        N2=N;
        for(i=n;i>0;i--){
                fac = factor(i);
                x = fac*N2;
                root = nroot(i,x);
                coef = coef_bin2(root,i);
                while(N2-coef>=0){
```

```
                        coef = coef_bin2(++root,i);
                        printf("coef=%d\n",coef);
                }
                coef = coef_bin2(root-1,i);
                N2 -= coef;
                printf("a%d=%d\n",i,root-1);
                printf("N2=%d\n",N2);
                unr[i-1]=root-1;
        }
        for(i=0;i<n;i++){
                printf("%d ",unr[i]);
        }
        printf("\n");
}

int nroot(int n, int x) {
        int mat[n][n];
        int delta[n];
        int i,j,c;
        for(i=0;i<n;i++){
                for(j=0;j<n;j++){
                        mat[i][j]=0;
                }
        }
        for(i=0;i<n;i++){
                mat[i][i]=factor(i+1);
        }
        for(i=1;i<n;i++){
                mat[i][0]=1;
        }
        for(i=2;i<n;i++){
                for(j=1;j<i+1;j++){
                        mat[i][j] = (mat[i-1][j]+mat[i-1][j-1])*(j+1);
                }
        }
        for(i=1;i<n;i+=2){
                for(j=0;j<n-i;j++){
                        mat[i+j][j]*=-1;
                }
        }
        for(i=0;i<n;i++){
                for(j=0;j<n;j++){
                        printf("%d\t",mat[i][j]);
                }
                printf("\n");
        }
```

```
        int x2 = x;
        c = 0;
        while(x2>0){
                printf("mat[%d][%d]=%d\n",n-1,n-1,mat[n-1][n-1]);
                for(i=n-1;i>0;i--){
                        mat[n-1][i-1]+=mat[n-1][i];
                        printf("mat[%d][%d]=%d\n",n-1,i-1,mat[n-1][i-1]);
                }
        printf("--\n");
                x2-=mat[n-1][0];
                c++;
        }
        int power = pow(c-1,n);
        printf("%d a la %d es %d\n",c-1,n,power);
        printf("La raiz %d de %d es %d y sobran %d\n",n,x,c-1,x-power);
        printf("El residuo debe ser \
%d + %d = %d\n",x2,mat[n-1][0],x2+mat[n-1][0]);
        return c-1;
}

int factor(int n) {
        int result = 1;
        while(n>0){
                result *= n--;
        }
        return result;
}

int coef_bin2(int n, int k) {
        int c = 1;
        int limit = k-1;
        int stop = n-limit;
        int result = n;
        while(n>stop){
                result *= --n;
                result /= c++;
        }
        return result/c;
}
```

Para el cómputo de las raíces, se utilizó el algoritmo desarrollado en el CINVESTAV para computar las ηésimas raíces de un valor dado[1].

3. Ejemplo de ejecución

Para el comando

```
./unrank 7 300
```

el programa arroja el siguiente resultado. La última línea de la salida representa el polinomio mayor-qué correspondiente a los valores n=7, N=300

```
1       0       0       0       0       0       0
-1      2       0       0       0       0       0
1       -6      6       0       0       0       0
-1      14      -36     24      0       0       0
1       -30     150     -240    120     0       0
-1      62      -540    1560    -1800   720     0
1       -126    1806    -8400   16800   -15120  5040
mat[6][6]=5040
mat[6][5]=-10080
mat[6][4]=6720
mat[6][3]=-1680
mat[6][2]=126
mat[6][1]=0
mat[6][0]=1
--
mat[6][6]=5040
mat[6][5]=-5040
mat[6][4]=1680
mat[6][3]=0
mat[6][2]=126
mat[6][1]=126
mat[6][0]=127
--
mat[6][6]=5040
mat[6][5]=0
mat[6][4]=1680
mat[6][3]=1680
mat[6][2]=1806
mat[6][1]=1932
mat[6][0]=2059
--
mat[6][6]=5040
mat[6][5]=5040
mat[6][4]=6720
mat[6][3]=8400
mat[6][2]=10206
mat[6][1]=12138
mat[6][0]=14197
--
mat[6][6]=5040
mat[6][5]=10080
mat[6][4]=16800
```

```
mat[6][3]=25200
mat[6][2]=35406
mat[6][1]=47544
mat[6][0]=61741
--
mat[6][6]=5040
mat[6][5]=15120
mat[6][4]=31920
mat[6][3]=57120
mat[6][2]=92526
mat[6][1]=140070
mat[6][0]=201811
--
mat[6][6]=5040
mat[6][5]=20160
mat[6][4]=52080
mat[6][3]=109200
mat[6][2]=201726
mat[6][1]=341796
mat[6][0]=543607
--
mat[6][6]=5040
mat[6][5]=25200
mat[6][4]=77280
mat[6][3]=186480
mat[6][2]=388206
mat[6][1]=730002
mat[6][0]=1273609
--
7 a la 7 es 823543
La raiz 7 de 1512000 es 7 y sobran 688457
El residuo debe ser -585152 + 1273609 = 688457
coef=8
coef=36
coef=120
coef=330
a7=10
N2=180
1       0       0       0       0       0
-1      2       0       0       0       0
1       -6      6       0       0       0
-1      14      -36     24      0       0
1       -30     150     -240    120     0
-1      62      -540    1560    -1800   720
mat[5][5]=720
mat[5][4]=-1080
```

```
mat[5][3]=480
mat[5][2]=-60
mat[5][1]=2
mat[5][0]=1
--
mat[5][5]=720
mat[5][4]=-360
mat[5][3]=120
mat[5][2]=60
mat[5][1]=62
mat[5][0]=63
--
mat[5][5]=720
mat[5][4]=360
mat[5][3]=480
mat[5][2]=540
mat[5][1]=602
mat[5][0]=665
--
mat[5][5]=720
mat[5][4]=1080
mat[5][3]=1560
mat[5][2]=2100
mat[5][1]=2702
mat[5][0]=3367
--
mat[5][5]=720
mat[5][4]=1800
mat[5][3]=3360
mat[5][2]=5460
mat[5][1]=8162
mat[5][0]=11529
--
mat[5][5]=720
mat[5][4]=2520
mat[5][3]=5880
mat[5][2]=11340
mat[5][1]=19502
mat[5][0]=31031
--
mat[5][5]=720
mat[5][4]=3240
mat[5][3]=9120
mat[5][2]=20460
mat[5][1]=39962
mat[5][0]=70993
```

```
--
mat[5][5]=720
mat[5][4]=3960
mat[5][3]=13080
mat[5][2]=33540
mat[5][1]=73502
mat[5][0]=144495
--
7 a la 6 es 117649
La raiz 6 de 129600 es 7 y sobran 11951
El residuo debe ser -132544 + 144495 = 11951
coef=28
coef=84
coef=210
a6=9
N2=96
1       0       0       0       0
-1      2       0       0       0
1       -6      6       0       0
-1      14      -36     24      0
1       -30     150     -240    120
mat[4][4]=120
mat[4][3]=-120
mat[4][2]=30
mat[4][1]=0
mat[4][0]=1
--
mat[4][4]=120
mat[4][3]=0
mat[4][2]=30
mat[4][1]=30
mat[4][0]=31
--
mat[4][4]=120
mat[4][3]=120
mat[4][2]=150
mat[4][1]=180
mat[4][0]=211
--
mat[4][4]=120
mat[4][3]=240
mat[4][2]=390
mat[4][1]=570
mat[4][0]=781
--
mat[4][4]=120
```

```
mat[4][3]=360
mat[4][2]=750
mat[4][1]=1320
mat[4][0]=2101
--
mat[4][4]=120
mat[4][3]=480
mat[4][2]=1230
mat[4][1]=2550
mat[4][0]=4651
--
mat[4][4]=120
mat[4][3]=600
mat[4][2]=1830
mat[4][1]=4380
mat[4][0]=9031
--
6 a la 5 es 7776
La raiz 5 de 11520 es 6 y sobran 3744
El residuo debe ser -5287 + 9031 = 3744
coef=21
coef=56
coef=126
a5=8
N2=40
1       0       0       0
-1      2       0       0
1       -6      6       0
-1      14      -36     24
mat[3][3]=24
mat[3][2]=-12
mat[3][1]=2
mat[3][0]=1
--
mat[3][3]=24
mat[3][2]=12
mat[3][1]=14
mat[3][0]=15
--
mat[3][3]=24
mat[3][2]=36
mat[3][1]=50
mat[3][0]=65
--
mat[3][3]=24
mat[3][2]=60
```

```
mat[3][1]=110
mat[3][0]=175
--
mat[3][3]=24
mat[3][2]=84
mat[3][1]=194
mat[3][0]=369
--
mat[3][3]=24
mat[3][2]=108
mat[3][1]=302
mat[3][0]=671
--
5 a la 4 es 625
La raiz 4 de 960 es 5 y sobran 335
El residuo debe ser -336 + 671 = 335
coef=15
coef=35
coef=70
a4=7
N2=5
1       0       0
-1      2       0
1       -6      6
mat[2][2]=6
mat[2][1]=0
mat[2][0]=1
--
mat[2][2]=6
mat[2][1]=6
mat[2][0]=7
--
mat[2][2]=6
mat[2][1]=12
mat[2][0]=19
--
mat[2][2]=6
mat[2][1]=18
mat[2][0]=37
--
3 a la 3 es 27
La raiz 3 de 30 es 3 y sobran 3
El residuo debe ser -34 + 37 = 3
coef=4
coef=10
a3=4
```

```
N2=1
1       0
-1      2
mat[1][1]=2
mat[1][0]=1
--
mat[1][1]=2
mat[1][0]=3
--
1 a la 2 es 1
La raiz 2 de 2 es 1 y sobran 1
El residuo debe ser -2 + 3 = 1
coef=1
coef=3
a2=2
N2=0
1
-1 a la 1 es -1
La raiz 1 de 0 es -1 y sobran 1
El residuo debe ser 0 + 1 = 1
coef=0
coef=1
a1=0
N2=0
0 2 4 7 8 9 10
```

Se puede confirmar que dicho polinomio es correcto usando el programa rank, de un reporte anterior:

```
./rank `./unrank 7 300 | tail -n 1`
```

Aquí, las comillas invertidas sustituyen al comando unrank 7 300 por su salida (el polinomio $\{0, 2, 4, 7, 8, 9, 10\}$). Este comando arroja el resultado:

```
sum=300
```

que es el valor de N.

Referencias

[1] http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2010.528755