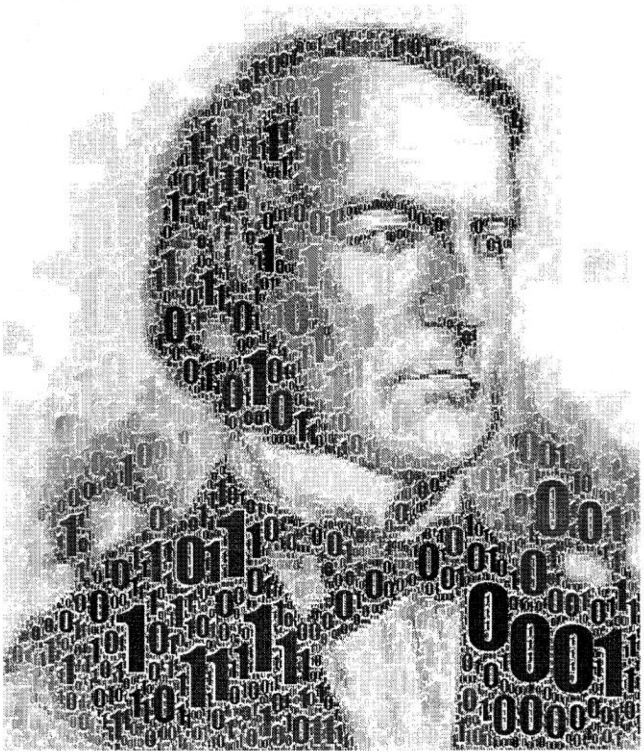
П.С. Довгий, В.И. Поляков,
В.И. Скорубский

Основы теории множеств и приложение булевой алгебры к синтезу комбинационных схем

Учебное пособие по дисциплине «Дискретная математика»



Санкт-Петербург

2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

**П.С. Довгий, В.И. Поляков,
В.И. Скорубский**

Основы теории множеств и приложение булевой алгебры к синтезу комбинационных схем

Учебное пособие по дисциплине «Дискретная математика»

Санкт-Петербург

2012

П.С. Довгий, В.И. Поляков, В.И. Скорубский. Основы теории множеств и приложение булевой алгебры к синтезу комбинационных схем. Учебное пособие по дисциплине «Дискретная математика». – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 104 с.

В пособии в краткой форме излагается материал по основным разделам дискретной математики, связанным со схемотехникой ЭВМ. К ним относятся теория множеств и булева алгебра.

Основное внимание уделяется не столько теоретическим вопросам, сколько техническим приложениям булевой алгебры к задачам анализа и синтеза комбинационных схем. В соответствии с этим достаточно детально рассмотрены методы решения задач минимизации, факторизации и декомпозиции булевых функций, а также преобразование минимальных и скобочных форм булевых функций к заданному функциональному базису. Аналогичные задачи и методы их решения рассмотрены также и применительно к системам булевых функций, что связано с построением многовыходных комбинационных схем.

В пособии приводится большое число практических примеров и задач, иллюстрирующих теоретический материал и облегчающих его восприятие. Каждый раздел пособия сопровождается контрольными вопросами и задачами для самостоятельной подготовки студентов к тестированию по каждой теме курса, а также к рубежному контролю по соответствующему модулю БАРС.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

Содержание

1. Основы теории множеств ... 5
Введение ... 5
1.1. Основные понятия ... 6
1.2. Способы задания множеств ... 8
1.3. Отношения между множествами ... 9
1.4. Алгебра множеств ... 12
1.4.1 Операции над множествами ... 12
1.4.2 Основные тождества (законы) алгебры множеств ... 14
1.4.3 Способы доказательства тождеств ... 16
1.5. Упорядоченные множества. ... 18
1.5.1 Понятие вектора ... 18
1.5.2 Прямое (декартово) произведение множеств ... 18
1.5.3 Декартова степень множества ... 19
1.5.4 Мощность прямого произведения множеств ... 20
1.5.5 Основные тождества для операции прямого произведения множеств ... 20
Литература ... 20
Контрольные вопросы ... 21
Контрольные задачи ... 22

2. Приложение булевой алгебры к синтезу комбинационных схем ... 24
Введение ... 24
2.1. Элементы булевой алгебры ... 25
2.2. Разнообразие булевых функций ... 28
2.3. Нормальные формы булевых функций ... 30
2.4. Числовая и символическая формы представления булевых функций ... 32
2.5. Преобразование произвольной аналитической формы булевой функции в нормальную ... 33
2.6. Приведение произвольных нормальных форм булевой функции к каноническим ... 34
2.7. Разнообразие двоичных алгебр ... 34
2.8. Задача минимизации булевых функций ... 35
2.9. Кубическое представление булевых функций ... 41
2.10. Геометрическая интерпретация кубов малой размерности. Графическое представление булевых функций ... 44
2.11. Покрытия булевых функций ... 45
2.12. Минимизация булевых функций на картах Карно ... 52
2.13. Импликанты булевой функции. Системы импликант ... 59
2.14. Минимизация булевых функций методом Квайна-Мак-Класки ... 61
2.14.1 Нахождение множества максимальных кубов (простых импликант) булевой функци ... 62

2.14.2 Определение ядра покрытия 64
2.14.3 Определение множества минимальных покрытий 65
2.15. Функциональная полнота системы булевых функций 60
2.15.1 Теорема о функциональной полноте (теорема Поста). 70
2.15.2 Замечательные классы булевых функций 71
2.15.3 Конструктивный подход к доказательству функциональной полноты системы булевых функций 73
Контрольные вопросы и задачи……………………………………..……65

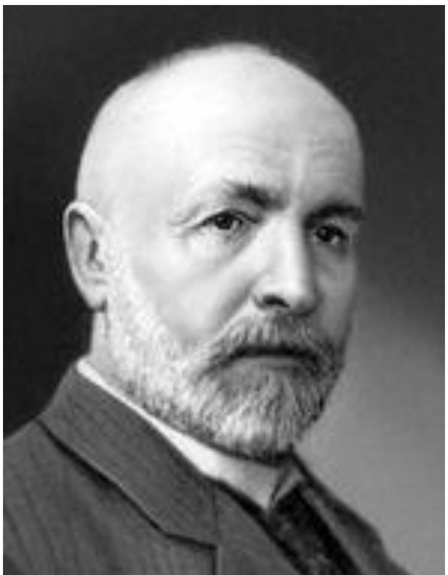
3 Синтез комбинационных схем 67
3.1. Типовые логические элементы и их обозначения на функциональных схемах 67
3.2. Способы кодирования логических сигналов 68
3.3. Понятие логической схемы. Типы логических схем 68
3.4. Основные параметры комбинационных схем 70
3.5. Задачи анализа и синтеза комбинационных схем 71
3.6. Построение комбинационных схем по минимальным нормальным формам в различных базисах 74
3.6.1 Булев базис (И, ИЛИ, НЕ) 74
3.6.2 Сокращенный булев базис (И, НЕ)................................... 75
3.6.3 Сокращенный булев базис (ИЛИ, НЕ) 76
3.6.4 Универсальный базис (И-НЕ) 76
3.6.5 Универсальный базис (ИЛИ-НЕ)...................................... 76
3.7. Задача факторизации булевой функции………....……………...77
3.8. Оценка эффекта факторизации 79
3.9. Декомпозиция булевых функций 80
3.10. Синтез многовыходных комбинационных схем 81
3.11. Минимизация системы булевых функций 82
3.12. Факторизация системы булевых функций 88
3.13. Декомпозиция системы булевых функций 89
Контрольные вопросы и задачи ……………………….……………93
Вопросы к рубежному контролю……………………………………...95
Литература 97

1. Основы теории множеств

Введение

Вряд ли можно назвать какую-либо возникшую в последней трети девятнадцатого века математическую дисциплину, которая оказала бы большее влияние на прогресс всей математики и, шире, на математическое мышление в целом, чем теория множеств. К идеям теории множеств в разное время подходили с разных сторон многие ученые, но оформление ее в самостоятельную науку, со своими особыми предметом и методом исследования, осуществил в своих работах 1872-1897 г.г. немецкий математик Георг Кантор. Среди современников Г. Кантора правильно оценили значение этих работ только немногие, прежде всего Рихард Дедекинд, который внес собственный значительный вклад в новую теорию. Обнаруженные в конце XIX — начале XX вв. логические и методологические парадоксы теории множеств отпугнули некоторых выдающихся математиков, первоначально приветствовавших ее появление, в частности, таких как Анри Пуанкаре. Однако плодотворные приложения теории множеств в различных разделах математики стимулировали ее дальнейшую разработку во многих направлениях и исследование самых ее основ средствами бурно развивавшейся математической логики. Какие-либо окончательные и общепризнанные решения всех сложных проблем до сих пор не достигнуты и все более и более тонкие изыскания здесь продолжаются; вместе с тем современная математика не может обойтись без основного аппарата, понятий и приемов теории множеств.

Г. Кантору принадлежит заслуга привнесения в математику самого понятия "множества" (или "совокупности"). Это понятие относится к категории фундаментальных и неопределяемых понятий математики.



Георг Кантор (1845 -1918)

Его можно толковать и иллюстрировать лишь на примерах. "*Под множеством* - писал Г. Кантор - *я понимаю вообще всякое многое, мыслимое нами как единое, т.е. всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона...*" (Кантор Г. Труды по теории множеств. - М.: Наука, 1985. - С. 101) Г. Кантору принадлежит также следующая формулировка понятия множества: «*Множество — это объединение определённых, различных объектов, называемых элементами множества, в единое целое*».

1.1. Основные понятия

В основе теории множеств лежат первичные понятия: ***множество*** и ***отношение*** «быть элементом множества».

Под множеством будем понимать любую совокупность определенных и различимых между собой объектов, рассматриваемую как единое целое.

Объекты, образующие некоторое множество, называются его ***элементами***. Принадлежность некоторого элемента x множеству A обозначается как $x \in A$ — «x есть элемент множества A» или «x принадлежит множеству A» . В свою очередь, непринадлежность некоторого элемента a множеству M обозначается в виде: $a \notin M$ или $a \overline{\in} M$. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита, а элементы множеств – строчными буквами.

Среди производных понятий теории множеств наиболее важны следующие:

- ***Пустое множество***. Пустым множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество обозначают символом $\varnothing$.
- ***Подмножество и надмножество***. Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если любой элемент, принадлежащий A, также принадлежит B. Это записывается в виде *отношения включения*: $A \subseteq B$. Таким образом, $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$. Множество B, в свою очередь, называется ***надмножеством*** множества A, что записывается в виде *отношения обратного включения*: $B \supseteq A$.

Пустое множество является подмножеством любого множества.

- ***Универсальное множество.*** Обычно, в конкретных рассуждениях элементы всех множеств берутся из некоторого одного, достаточно широкого множества, своего для каждого случая, которое называется ***универсальным множеством (универсумом)***. Универсальное множество обычно обозначается U (от англ. *universe, universal set*), реже E.
- ***Мощность множества*** можно рассматривать как числовую характеристику (метрику) любого множества. ***Мощностью*** некоторого конечного множества A является число его элементов. Мощность множества A принято обозначать $|A|$, например, мощность множества $A=\{a, b, c\}$ равна $|A|=3$.

Мощность пустого множества равна нулю: $|\varnothing|=0$.

- ***Конечные*** и ***бесконечные множества***. Множества, имеющие конечное число элементов и, соответственно, конечное значение мощности, называются ***конечными***, а множества с бесконечным числом элементов и, соответственно, с бесконечной мощностью - ***бесконечными***.

Множества, обладающие одинаковым значением мощности, называются ***равномощными***. Понятие равномощности распространяется и на бесконечные множества.

- ***Счетные*** и ***несчетные множества.*** Бесконечные множества разделяются на ***счётные*** и ***несчетные***. Бесконечное множество называется ***счетным***, если его элементы можно пронумеровать, в противном случае, бесконечное множество называется ***несчетным***.

Простейшим примером счетного множества является множество всех натуральных чисел, в связи с чем можно дать другое определение счетного множества: множество называется ***счетным***, если оно равномощно множеству натуральных чисел, т.е. его можно представить в виде $\{\boldsymbol{x_0, x_1, x_2, \ldots}\}$, где $\boldsymbol{x_i}$ – элемент множества, однозначно соответствующий его номеру (индексу) $\boldsymbol{i}$.

В свою очередь, простейшим примером несчетного множества является множество действительных чисел.

Другими примерами счетных множеств являются множества целых и рациональных чисел, а примером несчетного множества – множество комплексных чисел.

В отношении счетных множеств имеют место следующие теоремы:

– любое подмножество счетного множества является либо конечным, либо счетным, иначе говоря, каждое бесконечное подмножество счетного множества также является счетным;

– объединение конечного числа счетных множеств также является счетным множеством.

- ***Булеан множества***. Любое конечное множество содержит и конечное число подмножеств. Связь между произвольным множеством и всеми его подмножествами определяется булеаном.

Булеаном множества $\boldsymbol{A}$ называется множество всех его подмножеств. Булеан множества $\boldsymbol{A}$ будем обозначать $\boldsymbol{B(A)}$.

Иначе булеан множества $\boldsymbol{A}$ называют ***множеством - степенью*** множества $\boldsymbol{A}$.

Булеан как множество всех подмножеств множества $\boldsymbol{A}$ должен включать в себя:

- пустое множество;
- само множество $\boldsymbol{A}$;
- отдельные элементы множества $\boldsymbol{A}$;
- всевозможные комбинации различных элементов множества $\boldsymbol{A}$.

Замечание. Если множество $\boldsymbol{A}$ содержит $\boldsymbol{n}$ элементов, то число его подмножеств из $\boldsymbol{k}$ элементов представляет собой число сочетаний из $\boldsymbol{n}$ по $\boldsymbol{k}$ и определяется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Пример 1.1. Записать булеан (множество – степень) для множества $A=\{a, b, c\}$.

$B(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

<u>*Утверждение.*</u> Если множество A состоит из n элементов, то множество $B(A)$ всех его подмножеств состоит из 2^n элементов, т.е.

$|A|= n \to |B(A)|= 2^n=2^{|A|}$.

1.2. Способы задания множеств

Множества могут быть заданы списком, порождающей процедурой, описанием свойств элементов или графическим представлением.

1. Задание множеств ***списком*** предполагает перечисление элементов. Например, множество A состоит из букв a, b, c, d : $A=\{ a ,b, c, d\}$ или множество L включает цифры $0, 2, 3, 4$: $L=\{ 0, 2, 3, 4 \}$.

2. Задание множеств ***порождающей процедурой*** означает описание характеристических свойств элементов множества: $X = \{ x \mid H (x) \}$, т. е. множество X содержит такие элементы x, которые обладают свойством $H (x)$.

Например:

$B = \{ b \mid b = \pi / 2 \pm k \pi, k \in N\}$, N - множество всех натуральных чисел.

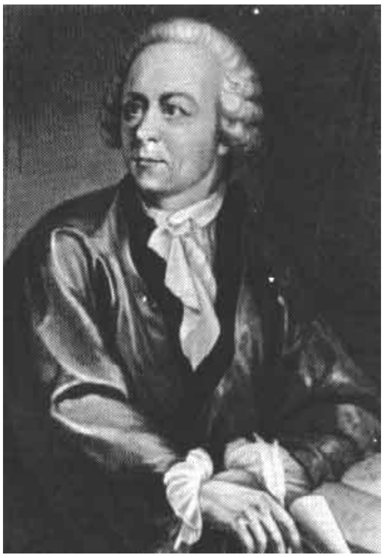
3. Задание множества ***описанием свойств*** элементов. Например, M- это множество чисел, являющихся степенями двойки.

К описанию свойств естественно предъявить требования точности и недвусмысленности. Так, "множество всех хороших песен 2011 года" каждый составит по-разному. Надежным способом однозначного задания множества является использование разрешающей процедуры, которая для любого объекта устанавливает, обладает ли он данным свойством и соответственно является ли элементом рассматриваемого множества.

Например: S - множество успевающих студентов. Разрешающей процедурой включения во множество S является отсутствие неудовлетворительных оценок в последней сессии.

4. ***Графическое*** задание множеств осуществляют с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри его – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих рассматриваемые множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и должны быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.



Леонард Эйлер (1707-1783) - швейцарский математик, механик, физик, астроном

Джон Венн (1834-1923) - английский математик и логик

На рис. 1.1 приведена диаграмма Эйлера-Венна, на которой показаны универсальное множество $\boldsymbol{U}$ и множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

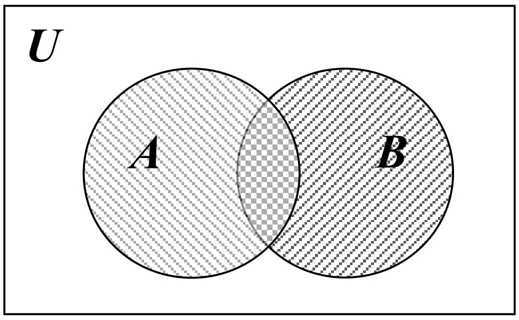


Рис. 1.1. Пример диаграммы Эйлера-Венна

1.3. Отношения между множествами

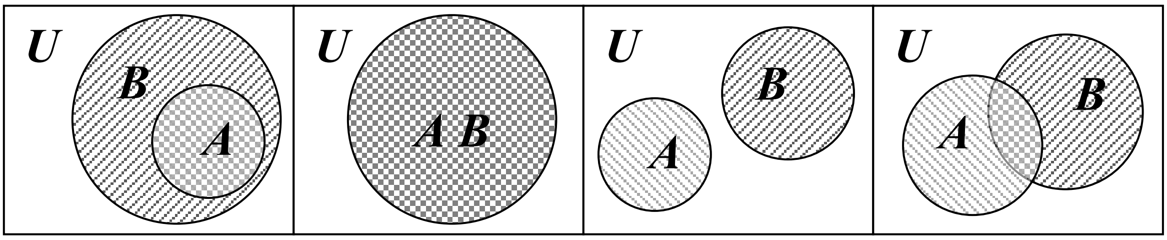
Два множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ могут вступать друг с другом в различные отношения.

- Множество $\boldsymbol{A}$ ***включено*** в $\boldsymbol{B}$, если каждый элемент множества $\boldsymbol{A}$ принадлежит также и множеству $\boldsymbol{B}$ (рис. 1.2 а), 1.2 б). Частным случаем отношения включения может быть и равенство множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, что отражается символом $\subseteq$: $\boldsymbol{A \subseteq B} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{B}$.

Подобное отношение можно называть ***нестрогим*** включением. Довольно часто требуется исключить равенство множеств из отношения включения, в связи с чем, вводится отношение строгого включения.

- Множество $\boldsymbol{A}$ ***строго включено*** в $\boldsymbol{B}$, если $\boldsymbol{A}$ включено в $\boldsymbol{B}$, но не равно ему (рис. 2а), что отражается символом $\subset$: $\boldsymbol{A \subset B} \Leftrightarrow (\boldsymbol{A \subseteq B})$ ***и*** $(\boldsymbol{A \neq B})$.

В этом случае множество ***A*** называют ***собственным*** (строгим, истинным) подмножеством множества ***B***. Примерами использования строгого включения могут являться: $A\subset U$, $B\subset U$, $\varnothing\subset B$, $\varnothing\subset B$.



а б в г

Рис.1.2. Возможные отношения множеств ***A*** и ***B***

Отношения между множествами могут обладать следующими свойствами: рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью.

Свойство ***рефлексивности*** является ***унарным*** (одноместным), т.е. применительно к единственному объекту (в данном случае к множеству) и означает, что отношение применимо к «себе самому».

Простым примером рефлексивного отношения для чисел могут служить отношения «≥» или «≤», т.к. для любого числа d можно записать $d \geq d$ или $d \leq d$. В свою очередь отношения «>» и «<» этим свойством не обладают, в связи с чем, они называются ***антирефлексивными***.

Свойство ***симметричности*** является ***бинарным*** (двухместным), т.е. применимо к двум объектам. Отношение является симметричным, если оно выполняется в обе стороны по отношению к паре объектов (в данном случае множеств). Примерами свойства симметричности являются различные геометрические объекты, для которых понятие «симметрии» является наиболее наглядным. Например, отношение: «быть симметричными относительно оси x» в отношении точек плоскости является ***симметричным***. Действительно, если первая точка симметрична второй, то вторая точка обязательно симметрична первой.

В свою очередь, отношение между двумя объектами не обладает свойством симметричности, т.е. является ***антисимметричным***, если его выполнение в обе стороны имеет место только в случае равенства объектов.

Если записать бинарное отношение между объектами a и b в общем виде aRb, где R – символ отношения, то для симметричного отношения: $aRb \rightarrow bRa$ при любых a и b, а для антисимметричного $aRb \rightarrow bRa$, только, если $a = b$.

Примером антисимметричного отношения могут служить отношения «≥» или «≤» между числами. Действительно, $(a \leq b)\rightarrow(b \leq a)$, только, если $a = b$.

Свойство ***транзитивности*** является ***тернарным*** (трехместным), т.е. применяется к трем объектам. Отношение R между объектами

a, ***b***, ***c*** является ***транзитивным***, если из ***aRb*** и ***bRc*** следует ***aRc***, т.е. из выполнения отношения ***R*** между парами объектов (***a, b***) и (***b, c***) следует его выполнение и для пары (***a, c***). Примерами транзитивного отношения для чисел являются отношения «>», «≥», «<», «≤».

Отношение, не обладающее свойством транзитивности, называется ***нетранзитивным***. Примером нетранзитивного отношения между множествами может служить отношение «пересекаться». Действительно для множеств: $\boldsymbol{A=\{a, b\}, B=\{b, c\}, C=\{c, d\}}$ ***A*** пересекается с ***B***, ***B*** пересекается с ***C***, но ***A*** не пересекается с ***C***.

Отношение нестрогого включения обладает свойствами:

– ***рефлексивности***: $\boldsymbol{A \subseteq A}$;
– ***антисимметричности***: $(\boldsymbol{A \subseteq B}$ и $\boldsymbol{B \subseteq A}) \to (\boldsymbol{A=B})$;
– ***транзитивности***: $(\boldsymbol{A \subseteq B}$ и $\boldsymbol{B \subset C}) \to (\boldsymbol{A \subset C})$.

Отношение строгого включения обладает свойствами:

– ***антирефлексивности:*** $\boldsymbol{A \not\subset A}$;
– ***транзитивности***: $(\boldsymbol{A \subset B}$ и $\boldsymbol{B \subset C}) \to (\boldsymbol{A \subset C})$.

Свойства симметричности или несимметричности для отношения строгого включения не рассматриваются, так как их рассмотрение предполагает случай равенства между объектами отношения.

Для комбинации отношений строгого и нестрогого включений:

– $(\boldsymbol{A \subseteq B}$ и $\boldsymbol{B \subset C}) \to (\boldsymbol{A \subset C})$;
– $(\boldsymbol{A \subset B}$ и $\boldsymbol{B \subseteq C}) \to (\boldsymbol{A \subset C})$.

• множество ***A равно*** множеству ***B***, если ***A*** и ***B*** включены друг в друга или, иначе, между ними существует отношение взаимного включения (рис. 1.2 б.):

$$\boldsymbol{A=B} \Leftrightarrow (\boldsymbol{A \subseteq B}) \text{ и } (\boldsymbol{B \subseteq A}).$$

Вторая часть равенства указывает на наиболее типичный метод доказательства равенства множеств ***A*** и ***B***, который заключается в доказательстве сначала утверждения $\boldsymbol{A \subseteq B}$, а затем $\boldsymbol{B \subseteq A}$.

Равные множества содержат одинаковые элементы, причем порядок элементов в множествах не существенен:

$\boldsymbol{A}=\{1, 2, 3\}$ и $\boldsymbol{B}=\{3, 2, 1\} \to \boldsymbol{A=B}$.

• множества ***A*** и ***B не пересекаются***, если у них нет общих элементов (рис. 1.2 в):

A и ***B*** не пересекаются $\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{a \in A} \to \boldsymbol{a \notin B}$.

• множества ***A*** и ***B находятся в общем положении***, если существуют элемент, принадлежащий исключительно множеству ***A***, элемент, принадлежащий исключительно множеству ***B***, а также элемент, принадлежащий обоим множествам (рис. 1.2 г):

A и ***B*** находятся в общем положении $\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{a, b, c}$**:**$[(\boldsymbol{a \in A})$ и $(\boldsymbol{a \notin B})]$ и $[(\boldsymbol{b \in B})$ и $(\boldsymbol{b \notin A})]$ и $[(\boldsymbol{c \in A})$ и $(\boldsymbol{c \in B})]$.

Рассмотрим отношения между числовыми множествами, для которых будем использовать следующие обозначения:
S – множество простых чисел;
N – множество натуральных чисел (т. е. ***N*** = {1, 2, 3, … });
Z – множество целых чисел;
Z+ – множество целых неотрицательных чисел (иногда обозначается N_0 (т. е. N_0 = {0, 1, 2, 3, … }));
Z– – множество целых неположительных чисел;
R – множество действительных чисел;
R+ – множество неотрицательных действительных чисел;
R– – множество неположительных действительных чисел;
V – множество рациональных чисел;
W – множество иррациональных чисел;
К – множество комплексных чисел.
Для этих множеств очевидными являются следующие цепочки отношений включения:

- $S \subset N \subset Z+ \subset Z \subset V \subset R \subset K;$
- $W \subset R \subset K.$

1.4. Алгебра множеств

Множество всех подмножеств универсального множества ***U*** вместе с операциями над множествами образуют так называемую ***алгебру подмножеств множества U*** или ***алгебру множеств.***

Основными составляющими алгебры множеств являются операции над множествами и свойства этих операций, которые формулируются в виде основных тождеств или законов алгебры множеств.

1.4.1 Операции над множествами

Над множествами определены следующие операции: ***объединение, пересечение, разность*** (относительное дополнение), ***симметрическая разность*** и ***дополнение*** (абсолютное).

Объединением множеств ***A*** и ***B*** называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств ***A, B*** (рис. 1.3 а):

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}.$

Операцию объединения можно распространить на произвольное, в том числе и бесконечное количество множеств, например, $M = A \cup B \cup C \cup D$. В общем случае используется обозначение $\bigcup\limits_{A \subset S} A$, которое читается так: “объединение всех множеств ***A***, принадлежащих совокупности ***S*** ”.

Если же все множества совокупности индексированы (пронумерованы с помощью индексов), то используются другие варианты обозначений:

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, если $S=\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$;

2. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, если S – бесконечная совокупность пронумерованных множеств;

3. $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, если набор индексов множеств задан множеством I.

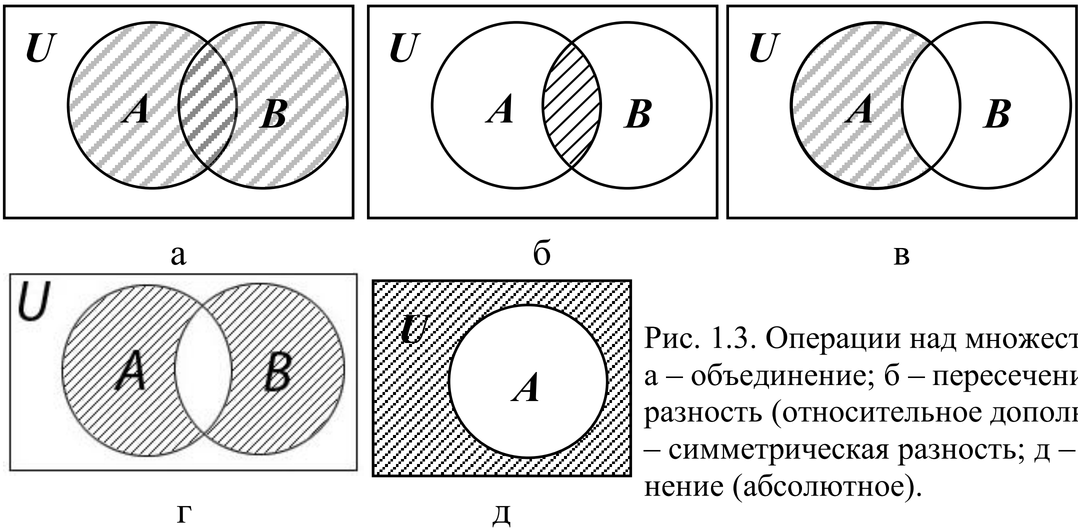


Рис. 1.3. Операции над множествами: а – объединение; б – пересечение; в – разность (относительное дополнение); г – симметрическая разность; д – дополнение (абсолютное).

Пример 1.2.
A={a,b,c}, B={b,c,d}, C={c,d,e}.
$\boldsymbol{A\cup B=\{a,b,c,d\};\ A\cup C=\{a,b,c,d,e\};\ B\cup C=\{b,c,d,e\};\ A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e\}}$.

Пересечением множеств ***A*** и ***B*** называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству ***A***, так и множеству ***B*** (рис. 1.3 б):

$\boldsymbol{A\cap B} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{A} \text{ и } \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}\}$.

Аналогично определяется пересечение произвольной (в том числе бесконечной) совокупности множеств. Обозначение для пересечения системы множеств аналогичны рассмотренным ранее обозначениям для объединения.

Пример 1.3. (для множеств из примера 1.2):
$\boldsymbol{A\cap B=\{b,c\};\ A\cap C=\{c\};\ B\cap C=\{c,d\};\ A\cap B\cap C=\{c\}}$.

Разностью множеств ***A*** и ***B*** называется множество всех тех и только тех элементов ***A***, которые не содержатся в ***B*** (рис. 1.3 в):

$\boldsymbol{A \setminus B} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{A} \text{ и } \boldsymbol{x}\notin\boldsymbol{B}\}$.

Разность множеств ***A*** и ***B*** иначе называется дополнением множества ***A*** до множества ***B*** (относительным дополнением).

Пример 1.4. (для множеств из примера 1.2)
$\boldsymbol{A\setminus B=\{a,\ b,\ c\} \setminus \{b,c,d\}=\{a\}}$.

Симметрической разностью множеств ***A*** и ***B*** называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат либо только множеству $\boldsymbol{A}$, либо только множеству $\boldsymbol{B}$ (рис. 1.3 г). Симметрическую разность обозначают как $\boldsymbol{A \Delta B}$, $\boldsymbol{A - B}$ или $\boldsymbol{A \oplus B}$:

$$\boldsymbol{A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \in B \text{ и } x \notin A)\}}.$$

Таким образом, симметрическая разность множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ представляет собой объединение разностей (относительных дополнений) этих множеств: $\boldsymbol{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$.

Пример 1.5. (для множеств из примера 1.2)
$\boldsymbol{A \Delta B = \{a\} \cup \{d\} = \{a, d\}}$.

Дополнением (абсолютным) множества $\boldsymbol{A}$ называется множество всех тех элементов $\boldsymbol{x}$ универсального множества $\boldsymbol{U}$, которые не принадлежат множеству $\boldsymbol{A}$ (рис. 1.3 д). Дополнение множества $\boldsymbol{A}$ обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x \notin A}\} = \boldsymbol{U \setminus A}.$$

С учетом введенной операции дополнения, разность множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ можно представить в виде: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Операции над множествами используются для получения новых множеств из уже существующих. Порядок выполнения операций над множествами определяется их приоритетами в следующем порядке: $\overline{A}$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$, Δ.

1.4.2 Основные тождества (законы) алгебры множеств

1. Коммутативные (переместительные) законы:
$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

2. Ассоциативные (сочетательные) законы:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

3. Дистрибутивные (распределительные) законы:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Замечание. Эти законы выражают дистрибутивность объединения относительно пересечения (для первого) или дистрибутивность пересечения относительно объединения (для второго) ***слева***. Операции объединения и пересечения обладают также свойством дистрибутивности ***справа***:
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

4. Законы тавтологии (идемпотентности):
$A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

5. Законы двойственности (де Моргана):
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Следствия из законов двойственности: $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$, $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.

6. Законы поглощения: $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.

7. Закон инволютивности: $\overline{\overline{A}} = A$.

8. Закон противоречия: $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

9. Закон «третьего не дано» (исключенного третьего): $A \cup \overline{A} = U$.

10. Свойства универсального множества: $A \cup U = U$; $A \cap U = A$.

11. Свойства пустого множества: $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Дополнительные тождества для операций объединения, пересечения и дополнения множеств:

12. Законы склеивания: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

13. Законы сокращения (законы Порецкого):
$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$; $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$.

Следствия из законов сокращения:
$\overline{A} \cup (A \cap B) = \overline{A} \cup B$; $\overline{A} \cap (A \cup B) = \overline{A} \cap B$.

14. Дополнительные тождества (законы) для операции разности (относительного дополнения) множеств:
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$; $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

15. Дополнительные тождества (законы) для операции симметрической разности:
$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$; $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Замечание. Практически все основные тождества (законы) множеств представлены парами, которые характеризуются своей симметричностью в отношении операций объединения и пересечения. Подобное свойство законов называется ***дуальностью*** (двойственностью). С учетом этого свойства можно выразить один закон пары из другого путем замены операции объединения на операцию пересечения и наоборот. Это относится к законам 1-6. Что касается законов 8-11, то их также можно представить парами, но в отличие от законов 1-6, один закон пары получается из другого не только заменой операций, но и стандартных множеств (универсума и пустого) на противоположные. Кроме того, свойством дуальности обладают также законы 12 и 13.

Огастес де Морган, (1806-1871) шотландский математик и логик

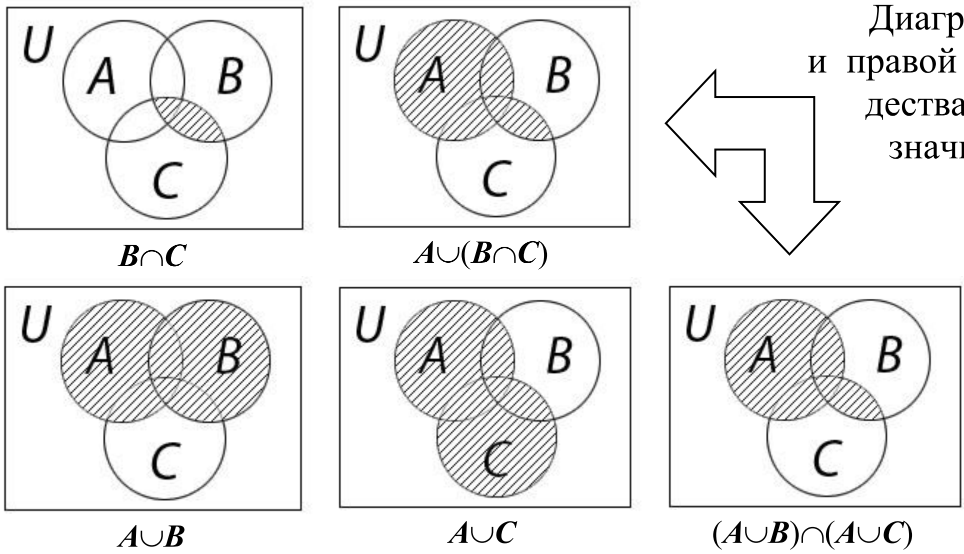
Порецкий Платон Сергеевич (1846 - 1907) русский математик, астроном и логик

1.4.3 Способы доказательства тождеств

Убедиться в справедливости тождеств можно с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Для этого необходимо изобразить на диаграммах левую и правую части тождеств и сравнить их. Такой способ доказательства принято называть ***геометрическим***. Этот способ является наглядным, но не обладает достаточной строгостью.

Пример 1.6. Проверим первый дистрибутивный закон:

$\boldsymbol{A}\cup(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cap(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C})$ (рис.1.4).



Диаграммы левой и правой частей тождества совпадают, значит оно справедливо.

Рис. 1.4. Проверка дистрибутивного закона на диаграммах Эйлера-Венна

Доказательство справедливости проверяемых тождеств можно проводить одним из двух методов:

– ***методом взаимного включения***;
– ***алгебраическим методом.***

Метод взаимного включения базируется на определении равенства двух множеств, между которыми существует отношение взаимного включения: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$.

Пример 1.7. Докажем первый дистрибутивный закон:
$\boldsymbol{A}\cup(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cap(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C})$.

Обозначим левую часть тождества $\boldsymbol{A}\cup(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})$ через D_l, а правую – $(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cap(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C})$ через D_r.

В соответствии с принятым методом доказательство разделяется на две части:

1. берется произвольный элемент множества D_l ($\boldsymbol{x}\in D_l$) и доказывается, что он принадлежит также и множеству D_r, откуда следует: $D_l\subseteq D_r$;
2. берется произвольный элемент множества D_r и доказывается, что он принадлежит также и множеству D_l, откуда следует: $D_r\subseteq D_l$.

1. Пусть элемент $\boldsymbol{x}\in D_l$, т.е. $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{A}\cup(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})$, тогда по определению операции объединения, $(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A})$ или $(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})$.

a) Если элемент $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$, то, по определению операции объединения множеств,

($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$) и ($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C}$), следовательно $\boldsymbol{x}\in(A\cup\boldsymbol{B})\cap(A\cup\boldsymbol{C})$, т.е. $\boldsymbol{x}\in \mathrm{Dr}$;

b) Если элемент $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}$, то, по определению операции пересечения множеств, ($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}$) и ($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$), отсюда, по определению операции объединения, ($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$) и ($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C}$), следовательно $\boldsymbol{x}\in(A\cup\boldsymbol{B})\cap(A\cup\boldsymbol{C})$, т.е. $\boldsymbol{x}\in \mathrm{D_r}$;.

Так как для любого $\boldsymbol{x}\in \mathrm{D_l}$ следует, что $\boldsymbol{x}\in \mathrm{D_r}$, то, по определению отношения включения, $\mathrm{D_l}\subseteq \mathrm{D_r}$.

2. Пусть элемент $\boldsymbol{x}\in \mathrm{D_r}$, т.е. ($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$) и ($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C}$), откуда по определению операции объединения, ($\boldsymbol{x}\in A$ или $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}$) и ($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$), следовательно, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$ или ($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$), откуда, $\boldsymbol{x}\in A$ или ($\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}\cap C$), т.е. $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{A}\cup(\boldsymbol{B}\cap C)$ или $\boldsymbol{x}\in \mathrm{D_l}$, откуда $\mathrm{D_r}\subseteq \mathrm{D_l}$.

Таким образом, между множествами $\mathrm{D_l}$ и $\mathrm{D_r}$ существуют отношение взаимного включения, значит $\mathrm{D_l}=\mathrm{D_r}$, что и требовалось доказать.

Пример 1.8. Докажем первый закон двойственности: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$

Обозначим $\mathrm{D_l}=\overline{A\cup B}$ и $\mathrm{D_r}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

1. Пусть элемент $\boldsymbol{x}\in \mathrm{D_l}$, т.е. $\boldsymbol{x}\in\overline{A\cup B}$. Тогда $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}$ и ($\boldsymbol{x}\notin\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$), значит $\boldsymbol{x}\notin\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{x}\notin\boldsymbol{B}$ (тонкий момент в доказательстве: $\boldsymbol{x}$ не принадлежит **ни** $\boldsymbol{A}$, **ни** $\boldsymbol{B}$), следовательно $\boldsymbol{x}\in\overline{A}$ и $\boldsymbol{x}\in\overline{B}$, т.е. $\boldsymbol{x}\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Значит $\mathrm{D_l}\subseteq \mathrm{D_r}$.

2. Пусть теперь элемент $\boldsymbol{x}\in \mathrm{D_r}$, т.е. $\boldsymbol{x}\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Тогда ($\boldsymbol{x}\in\overline{A}$) и ($\boldsymbol{x}\in\overline{B}$), значит $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{x}$ одновременно не принадлежит **ни** $\boldsymbol{A}$, **ни** $\boldsymbol{B}$**,** т.е. $\boldsymbol{x}\notin$ ($\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$), следовательно $\boldsymbol{x}\notin\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$, т.е. $\boldsymbol{x}\in\overline{A\cup B}$. Из этого следует, что $\mathrm{D_r}\subseteq \mathrm{D_l}$.

Таким образом, между множествами $\mathrm{D_l}$ и $\mathrm{D_r}$ существуют отношение взаимного включения, значит $\mathrm{D_l}=\mathrm{D_r}$, что и требовалось доказать.

Проверим справедливость этого тождества на диаграммах Эйлера-Венна (рис. 1.5).

Диаграммы левой и правой частей тождества совпадают, значит оно справедливо.

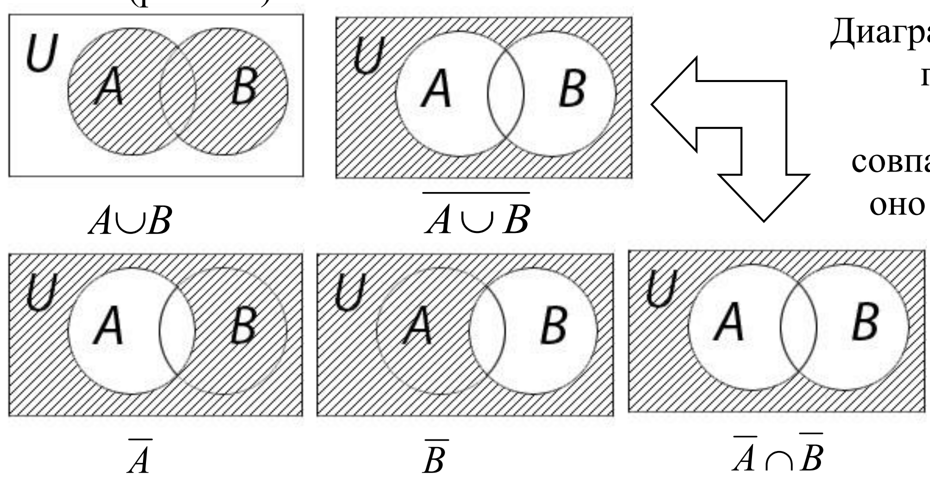


Рис. 1.5. Проверка правила де Моргана $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ на диаграммах Эйлера-Венна

Пример 1.9. Докажем второй закон поглощения: $A \cap (A \cup B) = A$ путем преобразования левой части тождества к правой с использованием других тождеств:

$$A \cap (A \cup B) = \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{свойство пустого} \\ \text{множества}}}{(A \cup \varnothing) \cap (A \cup B)} = \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{по дистрибутивному} \\ \text{закону}}}{(A \cup (\varnothing \cap B))} = \underset{\Uparrow}{A \cup \varnothing} = \underset{\Uparrow}{A}.$$

свойства пустого множества

1.5. Упорядоченные множества

1.5.1 Понятие вектора

Под ***вектором*** понимается упорядоченный набор элементов. Определение является не строгим (интуитивным), так же как и определение множества.

Элементы, образующие вектор, называются ***координатами*** или ***компонентами вектора***. Число координат вектора называется его ***длиной*** или ***размерностью***. Синонимом понятия «вектор» является «***кортеж***».

Для обозначения вектора обычно используются скобки, например (1, 2, 1, 3). Иногда скобки и даже запятые в обозначении вектора опускаются.

Примером векторов могут служить целые числа, при этом отдельные цифры числа являются координатами этого вектора.

Замечание. В отличие от элементов множеств, некоторые координаты вектора могут совпадать.

Векторы длины два называются ***упорядоченными парами*** (или просто ***парами***), длины три – ***тройками***, …, длины ***n – n-ками*** и т.д.

Два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и соответствующие их координаты равны, т.е.

$(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, если $m = n$ и $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_m = b_m$.

Векторы (кортежи) образуют особый класс множеств, называемых ***упорядоченными.*** В отличии от множеств, элементы которых могут быть перечислены в произвольном порядке, для элементов (координат) вектора существенным является их положение внутри вектора. В связи с этим множества, содержащие одинаковые элементы, но в различном порядке, равны $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\}$, а вектора – не равны $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

1.5.2 Прямое (декартово) произведение множеств

Прямым (***декартовым***) ***произведением множеств A*** и ***B*** называется множество всех пар $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, таких, что $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$.

Прямое произведение множеств ***A*** и ***B*** обозначается в виде $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \text{ и } \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}\}.$$

Пример 1.10

$A=\{a,b,c\}$; $B=\{b,c\}$.

$A\times B=\{(a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,b), (c,c)\}$;

$B\times A=\{(b,a\}, (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$.

Замечание. Из рассмотренного примера видно, что $A\times B\neq B\times A$, т.е. коммутативный закон для прямого произведения множеств не действует.

Пример 1.11

X – множество точек отрезка [0;1];

Y – множество точек отрезка [1;2].

Тогда $X\times Y$ – множество точек квадрата с вершинами в точках (0,1), (0,2), (1,1), (1,2).

Рене Декарт (1596-1650) французский философ и математик

1.5.3 Декартова степень множества

Прямое (декартово) произведение одинаковых множеств называется декартовой степенью множества:

если $B=A$, то $A\times B=A\times A=A^2$.

Точка на плоскости может быть задана упорядоченной парой координат, т.е. двумя точками на координатных осях. Та как координаты представляются множеством действительных чисел R, то прямое произведение $R\times R=R^2$ представляет собой множество координат точек плоскости.

Замечание. Метод координат ввел в употребление Рене Декарт, отсюда и название «декартово произведение».

Прямым (декартовым) произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется совокупность всех упорядоченных n-ок (векторов длиной n) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, что $a_i\in Ai$ $(i=1,2,\ldots,n)$. В случае, если $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$, то $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = A^n$ - n-ая декартова степень множества A.

Пример 1.12

X – множество точек отрезка [0;1];

Y – множество точек отрезка [1;2];

Z – множество точек отрезка [0;0,5].

$X\times Y\times Z$ – множество точек пространства, ограниченного параллелепипедом.

Замечание. Декартово произведение $R\times R\times R= R^3$ представляет собой множество координат точек пространства.

1.5.4 Мощность прямого произведения множеств

Теорема. Пусть $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ – конечные множества мощностью $\boldsymbol{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ соответственно, т.е. $|\boldsymbol{A_1}|=\boldsymbol{m_1}, |\boldsymbol{A_2}|=\boldsymbol{m_2}, \ldots, |\boldsymbol{A_n}|=\boldsymbol{m_n}$. Тогда мощность их прямого произведения равна произведению мощностей множеств – сомножителей, т.е.

$$|\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}|=\boldsymbol{m_1 * m_2 * \ldots * m_n}$$

<u>*Следствие:*</u> Мощность $\boldsymbol{n}$-ой декартовой степени множества $\boldsymbol{A}$ равна $\boldsymbol{n}$-ой степени мощности этого множества $|\boldsymbol{A^n}|=|\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{n}}$

1.5.5 Основные тождества для операции прямого произведения множеств

1. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
3. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
4. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Литература

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. 3-е изд. СПб.:Питер, 2009.–383 с.
2. Тюрин С.Ф. Дискретная математика: Практическая дискретная математика и математическая логика: учеб. пособие. /С.Ф.Тюрин, Ю.А. Аляев. – М.:Финансы и статистика, 2010. – 384 с.
3. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М.: Дискретная математика: теория множеств, алгоритмом, алгебры логики: Учебное пособие / Под ред. В.М.Курейчика. – Таганрог: изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. – 312 с.
4. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной информатики: Учеб. пособие. – М.:изд-во МАИ, 1992. – 264 с.
5. Кузнецов О.П. Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480с.

Контрольные вопросы
Основные понятия, положения и формулировки
(В скобках приведены баллы за правильный и полный ответ)

1. Дать понятие:
– множества (3);
– подмножества (3);
– надмножества (3).
2. Какие способы используются для описания множеств? (2) Привести примеры различных способов описания и дать им пояснения. (5)
3. В чем состоит отличие между счетными и несчетными множествами? (2) Приведите примеры счетного и несчетного множества. (3)
4. Что понимается под мощностью множества? (2) Приведите пример множества A с мощностью $|A|=8$. (2)
5. Что понимается под абсолютным дополнением некоторого множества? (3)
6. Чему равна мощность булеана множества A, состоящего из шести элементов? (2)
7. Что понимается под взаимным включением множеств и в каком случае оно существует? (2)
8. В чем состоит отличие между строгим и нестрогим включением множеств? (3)
9. Что понимается под собственным подмножеством некоторого множества? (3)
10. Что понимается под свойством рефлексивности (симметричности, транзитивности) отношения? (3) Привести пример (примеры) отношений, обладающих этим свойством. (1 балл за каждый пример)
11. Что понимается под антирефлексивным (антисимметричным, нетранзитивным) отношением? (3) Привести пример (примеры) подобного отношения. (1 балл за каждый пример)
12. Является ли отношение параллельности двух прямых транзитивным? (1) Утверждение обосновать. (3)
13. Дать определение операции объединения (пересечения, разности, симметрической разности, дополнения) множеств. (3)
14. В каком случае объединение (пересечение, разность) двух множеств равно пустому (универсальному) множеству? (2)
15. Привести пример множеств, для которых пересечение равно $\varnothing$, а разность не равна $\varnothing$. (2)
16. Записать законы де Моргана (поглощения, склеивания, сокращения). (3)
17. Перечислите основные способы (методы) доказательства правомочности тождеств. (3) На чем основан тот или иной способ (метод) доказательства? (3)
18. Что понимается под прямым (декартовым) произведением трех множеств? (3) Чему равна мощность этого произведения? (2)
19. Для множества $A=\{a, b\}$ найти A^3 – третью декартову степень. (3)
20. Записать основные тождества для операции прямого произведения множеств. (2 балла за каждое)

Контрольные задачи

1. Доказать тождества по определению равенства множеств (методом взаимного включения):

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (5)

б) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ (4)

в) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (10)

2. Доказать тождества с использованием других тождеств (алгебраическим способом):

а) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$ (2)

б) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$ (2)

в) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ (4)

3. С помощью диаграмм Эйлера-Венна (геометрическим способом) показать правомочность тождеств:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (3)

б) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ (3)

в) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (3)

г) $A - (B - C) = (A - B) - C$ (5)

4. Убедится в правомочности тождества: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ на примере числовых множеств:

$A = \{x \in N \mid x$ − нечётное и $x \le 30\}$,

$B = \{x \in N \mid x$ делится на 3 и $x \le 30\}$,

$C = \{x \in N \mid x$ делится на 5 и $x \le 30\}$. (6)

5. Записать заданные множества перечислением их элементов:

а) $A = \{x \in Z \mid x^2 + 2x - 3 < 0\}$ (2)

б) $B = \{x \in N_0 \mid |x+1| \le 5\}$ (3)

в) $C = \{x \in Z \mid 0{,}1 < 3^{1-x} < 100\}$ (5)

г) $D = \{x \in Z \mid -1 < \log_2|1-x| < 2\}$ (5)

д) $F = \{x \in R \mid \sin^2 2x = 1$ и $0 \le x \le 2\pi\}$ (4)

6. Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

а) $G = \{(x,y) \in R^2 \mid |x-1| - 1 < y < 3 - |x+1|\}$ (5)

б) $H = \{(x,y) \in R^2 \mid y < x < \sqrt{4 - y^2}\}$ (4)

в) $K = \{(x,y) \in R^2 \mid \log_{\frac{1}{3}}(x+1) < y < 8 + 2x - x^2\}$ (5)

г) $L = \{(x,y) \in R^2 \mid \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} < y < 2\mathrm{Cos}x\}$ (4)

7. Действует ли коммутативный закон в отношении операции разности множеств? Утверждение обосновать. (3)

8. Проверить правомочность дистрибутивных законов для операций пересечения и разности (относительного дополнения) множеств с использованием диаграмм Эйлера-Венна (3 балла за каждый) и/или с использованием тождественных преобразований (5 баллов за каждый).

9. Убедиться в правомочности тождества $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ на примере заданных множеств: $A:\{a,b,c\}$, $B = \{c,d,e\}$, $C = \{a,b,d\}$. (5)

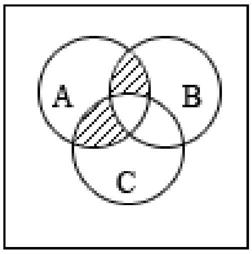
10. Упростить выражение: $((A \cup B) \cap C) \cup (\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C))$ (4)

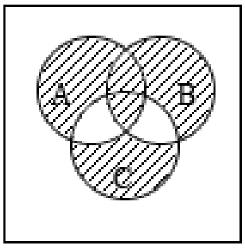
11. Доказать тождества:

а) $(A \setminus B) - (B \setminus C) - (B \setminus A) - (C \setminus B) = A - C$ (4)

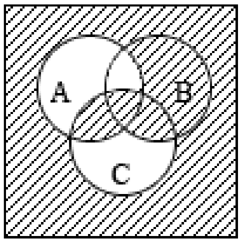
б) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) - (A \setminus B)$ (4)

12. Записать множества, приведённые на диаграммах Эйлера-Венна: (3 балла за каждый)

а) 



б)

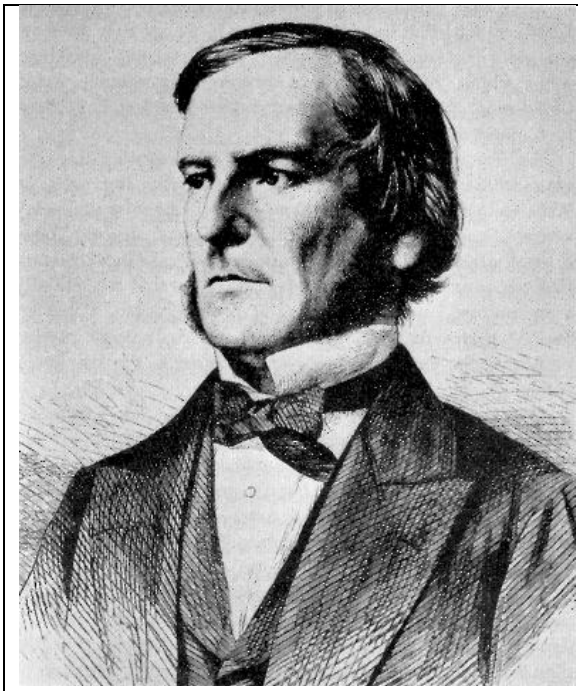


в)

2. Приложение булевой алгебры к синтезу комбинационных схем

Введение

Теоретическим фундаментом современных ЭВМ является алгебра логики, основы которой разработал Дж. Буль. В 1847 году вышла его работа с характерным названием – “Математический анализ логики, являющийся опытом исчисления дедуктивного рассуждения”. Применяя алгебру (в дальнейшем она стала называться булевой алгеброй), можно было закодировать высказывания, истинность и ложность которых требовалось доказать, а потом оперировать ими, как в математике оперируют с числами. Дж. Буль ввел три основные операции: И, ИЛИ, НЕ, хотя алгебра допускает и другие операции – логические действия. Эти действия бинарны по своей сути, т.е. они оперируют с двумя состояниями: “истина” – “ложь”. Данное обстоятельство позволило в дальнейшем использовать булеву алгебру для описания переключательных схем. Добрых семьдесят лет после публикации его труд считался не более чем изящной, но чисто умозрительной конструкцией, пока Клод Шеннон не создал на основе булевой логики современную информатику. Клода Шеннона считают отцом теории информации и теории кодирования. Необходимо отметить, что окончательное оформление и завершение булева алгебра получила в работах последователей Дж. Буля: У.С. Джевонса и Дж. Венна (Англия), Э. Шредера (Германия), П.С. Порецкого (Россия).

	
Джордж Буль (англ. George Boole) (2.11.1815- 8.12.1864) английский логик, математик и философ	Клод Шеннон (англ. Claude Shannon) (30.04.1916 - 24.02.2001) американский инженер и математик

2.1. Элементы булевой алгебры

Основными элементами булевой алгебры являются:

- логические константы;
- переменные;
- операции;
- выражения;
- функции;
- законы.

Логические константы

В булевой алгебре определены две логические константы: логический ноль (0) и логическая единица (1), которые отождествляются с понятиями “истина” и ”ложь” алгебры логики.

Переменные

Булевы (логические, двоичные) переменные - переменные, принимающие значения из множества $\{0,1\}$.

Операции

Основными операциями булевой алгебры являются:

- отрицание (инверсия);
- конъюнкция (логическое умножение);
- дизъюнкция (логическое сложение).

Операция отрицания является унарной, а конъюнкция и дизъюнкция – n-арными.

Операции обозначаются следующим образом:

- Отрицание $\rceil a$, $\overline{a}$;
- Конъюнкция $a \& b$, $a \cdot b$, $a * b$, ab, $a \wedge b$;
- Дизъюнкция $a \vee b$.

Выражения

Логическим (***булевым***) ***выражением*** называется совокупность булевых переменных, соединенных знаками булевых операций при возможном наличии скобок для изменения порядка выполнения операций.

При отсутствии скобок порядок выполнения операций определяется их приоритетом (значимостью). Для булевых операций порядок убывания приоритета следующий: $\rceil$, &, $\vee$.

Примеры логических выражений: $a \vee b \cdot \overline{c}, \quad (a \vee b) \cdot \overline{c}$.

Функции

Булевой (логической) функцией называется функция, аргументами которой являются булевы переменные, а сама функция принимает значение из множества $\{0,1\}$.

Областью определения булевой функции является совокупность 2^n двоичных наборов ее аргументов. Набор аргументов можно рассматривать как n-компонентный двоичный вектор.

Булеву функцию можно задать с помощью следующих форм:

- аналитической;
- табличной;
- графической;
- таблично-графической;
- числовой;
- символической.

Аналитическая форма – булева функция задается логическим выражением, например:

$$y_1 = (\bar{x}_1 \vee x_2)x_3;$$

$$y_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3.$$

Табличная форма – булева функция задается таблицей истинности.

Переход от аналитической формы к табличной однозначен. Обратный переход однозначным не является.

В качестве примера составим таблицу истинности для функции y_1:

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1 \vee x_2$	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Остальные формы задания булевой функции рассматриваются в следующих разделах.

Основные законы булевой алгебры

К основным законам (тождествам, правилам) булевой алгебры относятся:

1. Коммутативные (переместительные) законы:

$$a \vee b = b \vee a; \quad a \cdot b = b \cdot a$$

2. Ассоциативные (сочетательные) законы:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c; \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

3. Дистрибутивные (распределительные) законы:

$$a \vee (b \cdot c) = (a \vee b) \cdot (a \vee c); \quad a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c$$

4. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{a}} = a$
5. Законы тавтологии (идемпотентности): $a \vee a = a; a \cdot a = a$
6. Законы нулевого элемента: $a \vee 0 = a; \quad a \cdot 0 = 0$
7. Законы единичного элемента: $a \vee 1 = 1; \quad a \cdot 1 = a$
8. Законы дополнительного элемента. В булевой алгебре дополнительным элементом по отношению к a является отрицание a $(\overline{a})$.

$$a \vee \overline{a} = 1; \quad a \cdot \overline{a} = 0$$

9. Законы двойственности (де Моргана):

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} \vee \overline{b}; \quad \overline{a \vee b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

<u>*Следствия*</u>: $a \cdot b = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}; \quad a \vee b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$

10. Законы поглощения: $a \vee a \cdot b = a; \quad a \cdot (a \vee b) = a$
11. Правила сокращения:

$$a \vee \overline{a} \cdot b = a \vee b; \quad a \cdot (\overline{a} \vee b) = a \cdot b$$

<u>*Следствия*</u>: $\overline{a} \vee a \cdot b = \overline{a} \vee b; \quad \overline{a} \cdot (a \vee b) = \overline{a} \cdot b$

12. Правила склеивания:

$$a \cdot b \vee a \cdot \overline{b} = a; \quad (a \vee b) \cdot (a \vee \overline{b}) = a$$

Комментарии к законам булевой алгебры

1. Для доказательства законов можно использовать:

а) метод совершенной индукции,

б) одни законы для доказательства других законов.

Метод совершенной индукции состоит в доказательстве эквивалентности левой и правой частей на всем множестве наборов аргументов. Для этого составляются таблицы истинности левой и правой частей с последующим их сравнением.

2. Большинство законов задается парой соотношений (дуальность законов булевой алгебры). При этом одно соотношение можно получить из другого, заменив операции конъюнкции на дизъюнкцию или дизъюнкцию на конъюнкцию. В законах, в которых участвуют логические константы (0 и 1), они заменяются на противоположные значения.

3. Некоторые законы можно распространять на произвольное число элементов.

4. В любом законе любую букву можно заменить на произвольное логическое выражение.

5. Законы применяются для упрощения булевых функций.

2.2. Разнообразие булевых функций

Булевы функции от одной переменной приведены в табл.2.1.

Обозначение аргумента и функции	Значения аргумента и функции		Наименование функции
x	0	1	
f_0^1	0	0	Логический ноль
f_1^1	0	1	Повторение ***x***
f_2^1	1	0	Инверсия ***x***
f_3^1	1	1	Логическая единица

Таблица 2.1. Булевы функции от одной переменной

Булева функция от n аргументов $f^n(X)$ называется ***вырожденной по аргументу*** $\boldsymbol{x_i}$, если ее значение не зависит от этого аргумента, то есть для всех наборов аргументов имеет место равенство:

$$f(x_1, x_2, \dots , x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots , x_n) = f(x_1, x_2, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots , x_n).$$

Невырожденные функции от двух переменных с добавлением функции отрицания принято называть ***базовыми функциями*** булевой алгебры. С учетом обращаемости некоторых базовых функций по отношению к своим аргументам, их общее количество равно девяти.

Среди функций от одной переменной содержатся две вырожденные: логический ноль и логическая единица.

Булевы функций от двух переменных приведены в табл.2.2.

Среди функций от двух переменных шесть вырожденных функций, к которым относятся:

- логический ноль;
- логическая единица;
- функция повторения аргументов x_1 и x_2;
- отрицание аргументов $\boldsymbol{x_1}$ и x_2.

Некоторые функции от трех переменных представлены в табл. 2.3.

Замечание. Функции сумма по модулю 2 и исключающее ИЛИ для трех аргументов являются неэквивалентными.

Утверждение. Общее число разнообразных булевых функций, в том числе и вырожденных, от n аргументов равно 2^{2^n} .

Аргументы и функции (в символической форме)	Значения аргументов и функций				Обозначение функций	Наименование	Вырожденность	Представление функции в булевом базисе
x_1	**0**	**0**	**1**	**1**				
x_2	**0**	**1**	**0**	**1**				
f_0^2	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	Логический ноль	+	-
f_1^2	**0**	**0**	**0**	**1**	$x_1 \mathbin{\&} x_2$	Конъюнкция	-	$x_1 \cdot x_2$
f_2^2	**0**	**0**	**1**	**0**	$x_1 \Delta x_2$	Запрет x_1 по x_2	-	$x_1 \cdot \bar{x}_2$
f_3^2	**0**	**0**	**1**	**1**	x_1	Повторение x_1	+	-
f_4^2	**0**	**1**	**0**	**0**	$x_2 \Delta x_1$	Запрет x_2 по x_1	-	$\bar{x}_1 \cdot x_2$
f_5^2	**0**	**1**	**0**	**1**	x_2	Повторение x_2	+	-
f_6^2	**0**	**1**	**1**	**0**	$x_1 \oplus x_2$	Сумма по модулю 2, неравнозначность, исключительное ИЛИ	-	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2$
f_7^2	**0**	**1**	**1**	**1**	$x_1 \vee x_2$	Дизъюнкция	-	$x_1 \vee x_2$
f_8^2	**1**	**0**	**0**	**0**	$x_1 \downarrow x_2$	Функция Вебба, стрелка Пирса	-	$\overline{x_1 \vee x_2}$
f_9^2	**1**	**0**	**0**	**1**	$x_1 \sim x_2$ $(x_1 \equiv x_2)$	Равнозначность, эквивалентность	-	$x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$
f_{10}^2	**1**	**0**	**1**	**0**	$\bar{x}_2$	Отрицание x_2	+	$\bar{x}_2$
f_{11}^2	**1**	**0**	**1**	**1**	$x_2 \rightarrow x_1$	Импликация от x_2 к x_1	-	$x_1 \vee \bar{x}_2$
f_{12}^2	**1**	**1**	**0**	**0**	$\bar{x}_1$	Отрицание x_1	+	$\bar{x}_1$
f_{13}^2	**1**	**1**	**0**	**1**	$x_1 \rightarrow x_2$	Импликация от x_1 к x_2	-	$\bar{x}_1 \vee x_2$
f_{14}^2	**1**	**1**	**1**	**0**	$x_1 \mid x_2$	Штрих Шеффера	-	$\overline{x_1 \cdot x_2}$
f_{15}^2	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	Логическая единица	+	-

Таблица 2.2. Булевы функции от двух переменных

Значение аргументов			Значение функций		
			Сумма по модулю 2	Исключающее ИЛИ	Функция мажоритарности
x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$XOR\ (x_1, x_2, x_3)$	$x_1 \# x_2 \# x_3$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1

Таблица 2.3. Некоторые функции от трех переменных

2.3. Нормальные формы булевых функций

Нормальные формы - это особый класс аналитических выражений, используемых при решении задачи минимизации булевых функций и для перехода от табличной формы задания к аналитической. Нормальные формы строятся на основании операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, причем отрицание только единственной переменной.

Элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией) называется конъюнкция (дизъюнкция) конечного числа попарно различимых переменных или их отрицаний.

Элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) называют также ***конъюнктивным (дизъюнктивным) термом***.

В частном случае терм, как конъюнктивный, так и дизъюнктивный, может состоять из единственной буквы (литерала). Под буквой будем понимать аргумент булевой функции или его отрицание.

Примерами термов являются:. x_1, x_2, $x_1\bar{x}_3$, $x_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_5$.

Выражения типа: $\overline{x_1\bar{x}_3}$, $x_1\bar{x}_1x_3$ термами не являются, так как в первом случае знак отрицания стоит над конъюнкцией переменных, а во втором случае переменная x_1 находится в выражении с отрицанием и без него.

Рангом терма называется количество букв входящих в него.

Дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой булевой функции называется дизъюнкция (конъюнкция) конечного числа попарно различимых конъюнктивных (дизъюнктивных) термов.

Конституентой единицы (нуля) называется конъюнктивный (дизъюнктивный) терм максимального ранга, т.е. для булевой функции от n переменных конституента включает в себя n букв.

Свойство конституенты. Конституента единицы (нуля) принимает значение единицы (нуля) на одном и только одном наборе аргументов.

Пример 2.1. При *n* = 4 конъюктивный терм $x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ принимает значение равное единице на наборе 1010, а дизъюнктивный терм $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$ принимает значение равное нулю на наборе 1101.

Определение. Дизъюнктивная (конъюнктивная) нормальная форма называется ***канонической***, если все ее конъюнктивные (дизъюнктивные) термы представляют собой конституенты единицы (нуля). Канонические формы называют также ***совершенными***.

Замечания:

1. С помощью канонических форм наиболее просто осуществляется переход от табличной формы задания булевой функции к аналитической.
2. С помощью канонических форм любую булеву функцию можно представить в булевом базисе.
3. Любая булева функция, за исключением логического нуля и логической единицы, имеет единственные КДНФ и ККНФ. Логическую единицу можно представить в виде КДНФ, а логический ноль - в виде ККНФ.
4. Правило перехода от табличной формы задания булевой функции к аналитической:

а) в таблице истинности выделяются все наборы аргументов, при которых функция равна единице (нулю);

б) для каждого из этих наборов составляют конституенты единицы (нуля);

в) объединением конституенты единицы (нуля) знаками дизъюнкции (конъюнкции) получается аналитическая форма в виде КДНФ (ККНФ).

Пояснение. При составлении конституент единицы (нуля) используют следующее правило: *Если некоторый аргумент принимает на наборе значение равное нулю, то в конституенту единицы он входит с отрицанием, а в конституенту нуля без него.*

Пример 2.2. Получить канонические формы для функции $y = x_1 \oplus x_2$.

Составим таблицу истинности заданной функции:

x_1	x_2	y	Конституенты единицы	Конституенты нуля
0	0	0	-	$x_1 \vee x_2$
0	1	1	$\bar{x}_1 \cdot x_2$	-
1	0	1	$x_1 \cdot \bar{x}_2$	-
1	1	0	-	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

КДНФ - каноническая дизъюнктивная нормальная форма:

$$y=\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_2\,;$$

ККНФ - каноническая конъюнктивная нормальная форма:

$$y=(x_1\vee x_2)\cdot(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\,.$$

КДНФ и ККНФ представляют собой две различные, но эквивалентные аналитические формы булевой функции. Это означает, что из одной формы можно получить другую, используя законы булевой алгебры.

$$y=(x_1\vee x_2)\cdot(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)=x_1\cdot\bar{x}_1\vee x_1\cdot\bar{x}_2\vee x_2\cdot\bar{x}_1\vee x_2\cdot\bar{x}_2=$$

$$=x_1\cdot\bar{x}_2\vee x_2\cdot\bar{x}_1=x_1\cdot\bar{x}_2\vee\bar{x}_1\cdot x_2\quad(\text{КДНФ})$$

Существует другой способ получения ККНФ:

а) составляется КДНФ, но не для самой булевой функции, а для ее отрицания;

б) берется отрицание над полученной КДНФ, которое снимается с применением закона двойственности.

$$\bar{y}=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\vee x_1\cdot x_2$$

$$\bar{\bar{y}}=y=\overline{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\vee x_1\cdot x_2}=\overline{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2}\cdot\overline{x_1\cdot x_2}=(x_1\vee x_2)\cdot(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2),$$

2.4. Числовая и символическая формы представления булевых функций

Для любой булевой функции можно предложить две числовые формы, основанные на перечислении десятичных эквивалентов наборов аргументов, на которых функция принимает значение единицы (нуля).

Пример 2.3. Функция от трех переменных задана в числовой форме: $f^3(X)=\underset{f=1}{\vee}(0,2,6,7)$.

От числовой формы легко перейти к КДНФ путем замены каждого из наборов в перечислении конституентой единицы.

$$f^3(X)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3\,.$$

Аналогично можно перейти к ККНФ:

$$f^3(X)=\underset{f=0}{\&}(1,3,4,5).$$

$$f^3(X)=(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)\cdot(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)\cdot(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3).$$

В самом компактном виде любую булеву функцию можно представить в следующей ***символической форме***: f_N^n, где n-количество аргументов, а N-десятичный эквивалент двоичного набора значений функции на упорядоченном множестве аргументов.

Пример 2.4. $f^3(X)=x_1\oplus x_2\oplus x_3=f_{105}^3$ - символическая форма булевой функции.

2.5. Преобразование произвольной аналитической формы булевой функции в нормальную

В булевой алгебре в виде теоремы доказывается следующее утверждение: *существует единый конструктивный подход, позволяющий преобразовать аналитическое выражение булевой функции, заданное в произвольной форме, к нормальной форме*.

Пример 2.5. Преобразовать аналитическое выражение заданной булевой функции к нормальной форме:

$$
\begin{aligned}
f^4(X) &= (x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)\cdot(\bar{x}_1 \mid x_4) = (x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)\cdot(\overline{\bar{x}_1x_4}) = \\
&= (x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_4) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 = \\
&= x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 = && \text{(ДНФ 1)} \\
&= x_1(x_2 \vee \bar{x}_2x_3) \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 = && (*) \\
&= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 && \text{(ДНФ 2)}
\end{aligned}
$$

<u>*Замечания:*</u>

1. В общем случае любая булева функция может иметь несколько ДНФ, отличающихся либо количеством термов, либо количеством букв в этих термах.

2. При построении комбинационной схемы, реализующей данную функцию по ее нормальной форме предпочтительней схема, которая обладает наименьшим числом термов и наименьшим количеством букв в этих термах.

3. По сравнению со схемой, построенной по ДНФ, схема, построенная по скобочной форме (*), является предпочтительной т.к. при одном и том же числе логических элементов (И, ИЛИ) содержит меньшее число входов (9 вместо 10).

Задачу преобразования нормальной формы булевой функции в скобочную форму называют ***задачей факторизации***.

4. Сущность конструктивного подхода при получении ДНФ состоит в следующем:

а) преобразование операций небулевого базиса к операциям булевого базиса (см. последний столбец табл. 2.2);

б) снятие отрицаний над выражениями с применением законов двойственности;

в) раскрытие скобок с применением дистрибутивного закона;

г) упрощение выражения с применением законов поглощения, склеивания, сокращения и тавтологии.

Приведенные рассуждения справедливы и для КНФ.

2.6. Приведение произвольных нормальных форм булевой функции к каноническим

Для приведения произвольной ДНФ к КДНФ необходимо использовать правило дизъюнктивного развертывания применительно к каждому из неполных конъюнктивных термов.

$P = P(x_i \vee \bar{x}_i) = P \cdot x_i \vee P \cdot \bar{x}_i$, где P - неполный конъюнктивный терм (ранг этого терма меньше n), а x_i - недостающий в терме аргумент.

Пример 2.6. Привести ДНФ заданной функции к КДНФ:

$$y = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_3 = (\text{ДНФ})$$
$$= \bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_2)(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee \bar{x}_2 x_3 (x_1 \vee \bar{x}_1) =$$
$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \underline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3} \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \underline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3} =$$
$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \quad (\text{КДНФ})$$

<u>*Замечание.*</u> После раскрытия скобок могут получиться одинаковые термы, из которых нужно оставить только один.

$y = f^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,2,3,5)$ - числовая форма функции.

Преобразование КНФ к ККНФ реализуется путем применения правила конъюнктивного развертывания к каждому неполному дизъюнктивному терму.

$$P = P \vee x_i \bar{x}_i = (P \vee x_i)(P \vee \bar{x}_i)$$

Пример 2.7. Привести ДНФ заданной функции к ККНФ:

$$y = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_3 = \qquad (\text{ДНФ})$$
$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_3) = \qquad (\text{КНФ})$$
$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_2 \bar{x}_2) =$$
$$= (\underline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3})(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\underline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3}) =$$
$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \quad (\text{ККНФ})$$

$y = f^3(X) = \underset{f=0}{\&}(4,6,7)$ - числовая форма функции.

2.7. Разнообразие двоичных алгебр

В связи с тем, что любую сколь угодно сложную булеву функцию можно представить в канонических формах, то есть записать ее с помощью операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции эта система булевых операций обладает свойством функциональной полноты, т.е. образует так называемый базис. Естественно предположить, что система булевых операций является не единственной, с помощью которой можно образовать некоторый базис.

В принципе любую из базовых функций можно отождествить с соответствующей операцией и на основе совокупности этих операций построить двоичные алгебры, отличные от булевой. К наиболее распространенным двоичным алгебрам относятся: алгебра Жегалкина (⊕, &); алгебра Вебба (Пирса) (↓); алгебра Шеффера (|). В каждой из этих алгебр действуют собственные законы. Естественно существуют взаимно однозначные переходы от операций одного базиса к операциям другого.

2.8. Задача минимизации булевых функций и методы ее решения

2.8.1. Постановка задачи минимизации

Аналитические выражения булевых функций являются математическими моделями, на основании которых строятся логические схемы. Проектируемые схемы должны быть оптимальными в смысле минимума используемого оборудования при выполнении ограничений снизу на быстродействие схемы, которое определяется временем распространения сигналов от входов схемы к ее выходам. Количество оборудования, используемого в схеме, принято характеризовать ***ценой схемы***. Если в схеме используются элементы k типов с ценами $s_1, s_2, ..., s_k$ и в количестве $n_1, n_2, ..., n_k$, то цена схемы $\boldsymbol{S}$ определяется суммарной ценой элементов:

$$S = \sum_{i=1}^{k} s_i n_i .$$

Методика проектирования логических схем, оптимальных в смысле минимума цены S крайне затруднительна. В связи с этим в практике проектирования используются методы, основанные на ряде допущений, которые позволяют упростить решение задачи проектирования и синтезировать схемы, близкие к оптимальным.

Канонический метод проектирования комбинационных схем, обеспечивающий решение задачи синтеза для широкого класса схем, состоит в следующем. Закон функционирования проектируемой схемы, в общем случае, задается системой булевых функций, в частном случае, одной булевой функцией. Аналитические выражения булевых функций путем эквивалентного преобразования приводятся к виду, позволяющему строить экономичные схемы.

При использовании многовходовых логических элементов И (реализует операцию конъюнкции), ИЛИ (реализует операцию дизъюнкции) и одновходового элемента НЕ (реализует операцию инверсии) логическая схема может быть построена по ДНФ или КНФ функции.

Замечание. Для схем с так называемыми ***парафазными входами*** (на входы схемы подаются как прямые, так и инверсные значения входных переменных, соответствующих аргументам булевых функций или их инверсиям) необходимость во входных инверторах (элементах НЕ) отпадает. Входные инверторы используются в схемах с ***однофазными входами*** (на входы схемы подаются только прямые значения входных переменных - аргументов булевых функций).

При упрощенной оценке затрат оборудования на реализацию логической схемы цена схемы определяется суммарным числом входов в логические элементы и называется ***ценой схемы по Квайну - S_Q***. Использование S_Q в качестве критерия оптимальности синтезируемой схемы в смысле затрат оборудования предполагает, что схема должна строится по аналитическому выражению булевой функции в нормальной форме (ДНФ или КНФ), содержащему минимальное количество ***букв*** (***аргументов*** булевых функций и их ***отрицаний***). Задача получения нормальных форм булевых функций, содержащих минимальное количество букв, называется ***канонической задачей минимизации***, а сами нормальные формы (ДНФ или КНФ) булевых функций, получаемые в результате решения задачи минимизации, называются ***минимальными*** и обозначаются МДНФ или МКНФ.

2.8.2. Методы минимизации булевых функций

Методы решения задачи минимизации булевых функций можно разделить на две группы: ***графические*** и ***аналитические***.

Графический метод минимизации основан на использовании ***минимизирующих карт***, называемых ***картами Карно*** (***диаграммами Вейча***). Карта Карно для функции от $\boldsymbol{n}$ аргументов представляет собой прямоугольник, квадрат или совокупность квадратов, разделенных на $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$ клеток, каждая из которых соответствует определенному набору аргументов булевой функции. В клетках карты фиксируются значения функции.

Замечание. Как правило, при нахождении МДНФ на карте Карно фиксируются только единичные значения функции, в то время как нулевые значения соответствуют пустым клеткам. В свою очередь, при нахождении МКНФ фиксируются нулевые значения функции, а единичным соответствуют пустые клетки.

Решение задачи минимизации сводится к нахождению минимального покрытия булевой функции, которое строится из максимальных кубов, представленных на карте Карно прямоугольниками с числом клеток, равным $\mathbf{2}^{\boldsymbol{k}}$, где $\boldsymbol{k}$ – размерность куба. При минимизации функций от трех и четырех переменных карта Карно состоит из 8 или 16 клеток соответственно, причем все кубы покрытия (в том числе и минимального) размещаются внутри карты.

Замечание. Восьмиклеточная карта Карно рассматривается как развертка боковой поверхности цилиндра на плоскости. Из этого следует, что правая и левая границы карты совмещены. Это позволяет образовывать кубы из клеток, находящихся на границах. В свою очередь, шестнадцатиклеточная карта рассматривается как развертка тора на плоскости, то есть для такой карты совмещенными оказываются не только правая и левая границы, но и верхняя, и нижняя.

При минимизации функций от большего числа аргументов (пять или шесть) карта Карно представляется двумя или четырьмя квадратами по 16 клеток в каждом. При этом кубы, образующие покрытие, могут размещаться либо в одном квадрате, либо в двух ($\boldsymbol{n} = 5, 6$), либо в четырех ($\boldsymbol{n} = 6$). Однако, при этом в разных квадратах они представляются одинаково расположенными конфигурациями (прямоугольниками).

Для получения минимального покрытия на карте Карно используется следующий принцип: покрытие булевой функции будет являться действительно минимальным, если оно по сравнению с другими покрытиями состоит из минимально возможного числа кубов, каждый из которых обладает максимально возможной размерностью. Более детально графический метод минимизации булевых функций с использованием карт Карно описан в разделе 2.12.

Основными достоинствами графического метода минимизации булевых функций являются его наглядность и относительная простота реализации, что позволяет применять его на практике при “ручной” минимизации. В то же время, существенным ограничением на использование карт Карно для решения задачи минимизации является относительно небольшая размерность задачи (число аргументов минимизируемой функции не более шести), при которой можно еще получить решение, если даже не оптимальное, то достаточно близкое к нему.

Большим недостатком графического метода минимизации является также отсутствие формализованного подхода к решению задачи (метод является во многом интуитивным), что ставит в зависимость получение оптимального решения (минимального покрытия булевой функции) от квалификации и практических навыков специалиста (в особенности, если речь идет о функциях от пяти и, тем более, от шести аргументов).

Аналитические методы минимизации булевых функций связаны с преобразованием аналитического выражения булевой функции таким образом, чтобы в результате получилось максимально компактное выражение, содержащее минимальное число литер и термов.

Рассмотрим наиболее известные аналитические методы минимизации.

Метод Квайна:

В методе Квайна простые импликанты находятся по канонической дизъюнктивной нормальной форме в результате последовательного применения к ней операций неполного склеивания и элементарного поглощения.

Правило склеивания $a \cdot b \vee a \cdot \overline{b} = a$ заменяется формулой $a \cdot b \vee a \cdot \overline{b} = a \vee a \cdot b \vee a \cdot \overline{b}$, которую будем называть операций неполного склеивания. Эта операция отличается тем, что термы, уже подвергшиеся склеиванию, могут принимать участие в дальнейших склеиваниях столько раз, сколько это окажется необходимым. После того как с термами произведены все возможные склеивания, их необходимо удалить. Операция удаления склеенных термов называется операцией элементарного поглощения. Эта операция основывается на законе поглощения $a \vee a \cdot b = a$.

Алгоритм Квайна:

1. Минимизируемая булева функция f от n переменных записывается в КДНФ f_0.
2. Строим последовательность ДНФ $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots$ до тех пор, пока две какие-либо ДНФ f_k и f_{k+1} не совпадут между собой. Переход от формы f_i к форме f_{i+1} производится по следующему правилу: в форме f_i выполняются все операции неполного склеивания, применимые к элементарным произведениям длины $n - i$, после чего исключаются все те элементарные произведения длины $n - i$, которые могут быть исключены на основании закона поглощения.
3. Результатом применения алгоритма Квайна к функции f является сокращенная ДНФ (СДНФ) f_k.

Доказана следующая теорема Квайна:

Теорема. Для любой булевой функции f результатом применения алгоритма Квайна к КДНФ этой функции будет СДНФ функции f.

Иными словами, с помощью последовательного применения операций неполного склеивания и элементарного поглощения в конечное число шагов КДНФ любой булевой функции преобразуется СДНФ этой функции.

Более подробно метод Кавйна изложен в [1, стр. 278-282] и [3, стр.196-199].

Для булевых функций от большого числа переменных применение алгоритма Квайна в описанном выше виде становится затруднительным. С целью обойти эти затруднения Мак-Класки предложил несколько иное, практически более удобное оформление алгоритма Квайна, которое называется методом Квайна-Мак-Класки.

Метод представляет собой формализованный на этапе нахождения простых импликант метод Квайна. Формализация производится следующим образом:

1. Все конституанты единицы из СДНФ булевой функции f записываются их двоичными номерами.
2. Все номера разбиваются на непересекающиеся группы. Признак образования i-й группы: i единиц в каждом двоичном номере конституенты единицы.

3. Склеивание производят только между номерами соседних групп. Склеиваемые номера отмечаются каким-либо знаком (зачеркиванием).
4. Склеивания производят всевозможные, как и в методе Квайна. Неотмеченные после склеивания номера являются простыми импликантами.

Метод Квайна-Мак-Класки подробно рассмотрен в подразделе 2.14 настоящего пособия.

Недостатком метода Квайна-Мак-Класки является то, что для его применения необходимо представить функцию в КДНФ. Процесс такого представления для функции с большим числом аргументов зачастую является весьма громоздкой задачей, т.е. было бы желательно найти возможность построения сокращенной ДНФ не по КДНФ, а по произвольной ДНФ данной функции. Идея построения сокращенной ДНФ по произвольной ДНФ была предложена в работах А. Блейка и П.С. Порецкого.

Метод Блейка-Порецкого:

Суть метода состоит в том, что в произвольной ДНФ осуществляют все операции ***обобщенного склеивания.*** Суть этой операции состоит в применении следующего тождественного соотношения булевой алгебры:

$$ac \vee b \cdot \bar{c} = ac \vee b \cdot \bar{c} \vee ab.$$

В основу метода положено следующее утверждение (**теорема Блейка**): если в произвольной ДНФ булевой функции *f* произвести все возможные обобщенные склеивания, а затем выполнить все поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ функции *f*.

Метод построения сокращенной ДНФ заключается в том, что если в произвольной форме булевой функции есть конъюнкции с переменными c и $\bar{c}$, то не изменяя исходную функцию необходимо пополнить ее новыми членами вида ab. После этого надо провести поглощения и вновь повторить пополнение ДНФ. Этот процесс необходимо производить до тех пор, пока не будут возникать новые конъюнкции вида ab В. По окончании преобразований получаем СДНФ.

Более подробно метод Блейка-Порецкого изложен в [1, стр. 292-297] и [4, стр .66-67].

Метод Нельсона:

Этот метод основан на следующей теореме (**теорема Нельсона**):
Теорема. Если в произвольной КНФ булевой функции раскрыть все скобки в соответствии с дистрибутивным законом и устранить все элементарные поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ этой функции.

Более подробно метод Нельсона изложен в [1, стр. 297-299].

Метод неопределенных коэффициентов:

Метод применим для минимизации булевых функций от любого числа аргументов, но для простоты изложения рассмотрим функцию. зависящую от трех переменных.

Представим функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде следующей ДНФ:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= K_1^1\,x_1 \vee K_1^0\,\bar{x}_1 \vee K_2^1\,x_2 \vee K_2^0\,\bar{x}_2 \vee K_3^1\,x_3 \vee K_3^0\,\bar{x}_3 \vee \\
&\vee K_{12}^{1}\,x_1x_2 \vee K_{12}^{10}\,x_1\bar{x}_2 \vee K_{12}^{01}\,\bar{x}_1x_2 \vee K_{12}^{00}\,\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \\
&\vee K_{13}^{11}\,x_1x_3 \vee K_{13}^{10}\,x_1\bar{x}_3 \vee K_{13}^{01}\,\bar{x}_1x_3 \vee K_{13}^{00}\,\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \\
&\vee K_{23}^{11}\,x_2x_3 \vee K_{23}^{10}\,x_2\bar{x}_3 \vee K_{23}^{01}\,\bar{x}_2x_3 \vee K_{23}^{00}\,\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \\
&\vee K_{123}^{111}\,x_1x_2x_3 \vee K_{123}^{110}\,x_1x_2\bar{x}_3 \vee K_{123}^{101}\,x_1\bar{x}_2x_3 \vee K_{123}^{100}\,x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \\
&\vee K_{123}^{011}\,\bar{x}_1x_2x_3 \vee K_{123}^{010}\,\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee K_{123}^{001}\,\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee K_{123}^{000}\,\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3.
\end{aligned}
$$

Здесь представлены все возможные конъюнктивные термы, которые могут входить в ДНФ представления $f(x_1, x_2, x_3)$. Коэффициенты K с различными индексами являются неопределенными и подбираются так, чтобы получающаяся после этого ДНФ была минимальной. Если теперь задавать всевозможные наборы значений аргументов $< x_1, x_2, x_3 >$ и приравнивать полученное после этого выражение (отбрасывая нулевые конъюнкции) значению функции на выбранных наборах, то получим систему 2^3 уравнений для определения коэффициентов K:

$$
\left.
\begin{aligned}
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} &= f(1,1,1)\\
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{110} &= f(1,1,0)\\
K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} &= f(1,0,1)\\
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} &= f(1,0,0)\\
K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} &= f(0,1,1)\\
K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} &= f(0,1,0)\\
K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} &= f(0,0,1)\\
K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} &= f(0,0,0)
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.1)
$$

Пусть функция f задана таблично, тогда значения функции на конкретных наборах определяет значения правых частей системы (2.1). Если на наборе функция равна нулю, то в правой части соответствующего уравнения будет стоять нуль. Для удовлетворения этого уравнения необходимо приравнять нулю все коэффициенты K, входящие в левую часть рассматриваемого уравнения.

Рассмотрев все наборы, на которых данная функция обращается в нуль, получим все нулевые коэффициенты K. В уравнениях, в которых справа стоят единицы, вычеркнем слева все нулевые коэффициенты. Из оставшихся коэффициентов приравняем единице коэффициент, определяющий конъюнкцию наименьшего возможного ранга, а остальные коэффициенты в левой части данного уравнения примем равными нулю. Единичные коэффициенты K_i определят из (2.1) соответствующую ДНФ.

Более подробно метод неопределенных коэффициентов изложен в [3, стр. 194-195] и [4, стр. 57-60].

Метод Рота:

Метод Рота (алгоритм извлечения) в отличие от метода Квайна-Мак-Класки, для которого исходное выражение задается в канонической форме, ориентируется на задание выражений в форме произвольного кубического покрытия, благодаря чему во многих случаях упрощается процесс подготовки выражения для минимизации. Достоинством метода Рота является полная формализация действий на всех этапах минимизации функции, что позволяет автоматизировать процесс получения минимальных форм. В то же время, процесс минимизации функций распадается на большое число достаточно сложных действий, что затрудняет использование метода при работе вручную.

Более подробно метод Рота изложен в [6, стр. 95-108] и [2, стр.195-236].

Минимизация булевых функций, представленных в других базисах:

Все рассмотренные ранее методы минимизации относились в тому случаю, когда функция описывалась операциями булева базиса (конъюнкция, дизъюнкция и отрицание). Задача минимизации может быть сформулирована и для случая любого другого базиса (см. подраздел 2.7).

Общая идея минимизации булевых функций, представленных в других базисах, описана в [4, стр. 69-71]. В [3, стр. 207-210] и [4, стр. 77 -84] описаны методы минимизации булевых функций, представленных в монофункциональных базисах (базисы Вебба (Пирса) и Шеффера). Минимизация функций в базисе Жегалкина рассматривается в [4, стр. 71-77], а в базисе ($\oplus$, &, $\rceil$) – в [3, стр. 203-207].

Замечание. Считается, что схемы, характеризуемые малым значением S, являются минимальными по количеству используемого оборудования. Задача минимизации булевых функций по критерию минимальности числа букв, входящих в ДНФ функции, называется канонической задачей минимизации. Схема, получаемая в результате ее решения, не является абсолютно минимальной. Поэтому, используя скобочные формы функций, можно провести дальнейшее упрощение схемы, но абсолютный минимум оборудования в большинстве случаев так и не достигается.

2.9. Кубическое представление булевых функций

В кубическом представлении булевой функции от n переменных все множество из 2^n наборов ее аргументов рассматривается как множество координат вершин n-мерного куба с длиной ребра, равной 1. В соответствии с этим наборы аргументов, на которых булева функция принимает значение, равное 1, принято называть ***существенными вершинами***.

Существенные вершины образуют так называемые ***ноль-кубы*** (**0-*кубы***). Между 0-кубами существует ***отношение соседства*** и определена ***операция склеивания***. Два 0-куба называются ***соседними***, если они отличаются только по одной координате и, соответственно, могут вступать в операцию склеивания, в результате которой получается **1-*куб***.

Пример 2.8. Для функции $f^4(X)$ определить, являются ли ее 0-кубы (0101) и (0001) соседними и, если являются, то выполнить операцию их склеивания.

Заданные кубы являются соседними, так как они различаются только по одной координате. Результатом их склеивания является 1-куб (0X01).

Координата, отмечаемая символом X, называется ***свободной*** (***независимой, несвязанной***), а остальные (числовые), координаты называются ***зависимыми*** (***связанными***).

Аналогичное отношение соседства существует между 1-кубами, в результате склеивания которых получается 2-куб.

Пример 2.9. Для функции $f^4(X)$ определить, являются ли ее 1-кубы (0X01) и (<u>0X11</u>) соседними и, если являются, то выполнить операцию их склеивания.

Заданные кубы являются соседними, так как они различаются только по одной координате. Результатом их склеивания является 2-куб (0XX1).

В порядке обобщения: два r-куба называются соседними, если они отличаются только по одной (естественно, зависимой) координате. Каждый r-куб содержит r независимых и $(n - r)$ зависимых координат. В результате склеивания двух соседних r-кубов образуется $(r+1)$-куб содержащий $(r+1)$ независимую координату.

<u>Замечания.</u>

1. Размерность куба определяется количеством свободных координат.
2. В соседних r-кубах ($r > 0$) все свободные координаты являются одноименными.
3. Операция склеивания над кубами различной размерности соответствует применению закона склеивания к конъюнктивным термам, отождествляемым с этими кубами.

Так, для примера 2.8 0-кубу (0101) соответствует терм $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$, а 0-кубу (0001) – терм $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$. Эти термы склеиваются по переменной x_2. Результат склеивания: $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4$, в котором отсутствует переменная x_2, отождествляется с 1-кубом (0X01).

Аналогично, для примера 2.9 1-кубу (0X01) соответствует терм $\bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4$, а 1-кубу (0X01) – терм $\bar{x}_1 x_3 x_4$. Эти термы склеиваются по переменной x_3. Результат склеивания: $\bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 = \bar{x}_1 x_4$, отождествляется с 2-кубом (0XX1).

Кубическим комплексом $\boldsymbol{K^0(f)}$ булевой функции f называется множество 0-кубов этой функции. В общем случае, ***кубическим комплексом*** $\boldsymbol{K(f)}$ булевой функции f называется объединение множеств кубов всех размерностей этой функции $K(f) = \bigcup_{r=0}^{m} K^r(f)$, m - максимальная размерность кубов функции f.

Пример 2.10. Получить кубический комплекс функции

$$y = f^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(1, 2, 3, 6, 7).$$

Для получения кубического комплекса $K(f)$ необходимо провести всевозможные операции склеивания над 0-кубами, 1-кубами и т.д. до тех пор, пока при склеивании r-кубов не получится $K^{r+1}(f) = \varnothing$.

$$K^0(f) = \begin{Bmatrix} 001 \\ 010 \\ 011 \\ 110 \\ 111 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} \quad K^1(f) = \begin{Bmatrix} 0X1 \\ 01X \\ X10 \\ X11 \\ 11X \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1-3)\ (1) \\ (2-3)\ (2) \\ (2-4)\ (3) \\ (3-5)\ (4) \\ (4-5)\ (5) \end{matrix} \quad K^2(f) = \begin{Bmatrix} \text{X1X} \\ \underline{\text{X1X}} \end{Bmatrix} \begin{matrix} (2-5) \\ (3-4) \end{matrix}$$

$K^3(f) = \varnothing$ (пустое множество).

$K(f) = K^0(f) \cup K^1(f) \cup K^2(f)$. Естественно, что в комплексе $K^2(f)$ останется только один куб (X1X).

<u>Пояснения</u>. Получение 1-кубов осуществляется на основе попарного сравнения 0-кубов с целью выявления всевозможных пар соседних 0-кубов и образования 1-кубов из каждой пары. Для сокращения числа попарных сравнений можно учесть следующий факт: соседними могут являться только такие два 0-куба, в которых число единичных координат отличается ровно на единицу. В связи с этим целесообразно разделить 0-кубы на группы, различающиеся числом единичных координат, и проводить попарные сравнения только для 0-кубов, принадлежащих соседним группам.

<u>*Замечания.*</u>

1. Для данного примера в записи 0-кубов в кубическом комплексе $K^0(f)$ в порядке возрастания их десятичных эквивалентов уже присутствует их упорядочеие и разделение на группы.
2. При полном попарном сравнении пяти 0-кубов потребовалось бы выполнить 4!=24 операции сравнения, а при целенаправленном (сравниваются только кубы из двух соседних групп) – число операций сравнения равно шести.
3. Подобный принцип рационального сравнения кубов можно распространить и на кубы большей размерности. При этом добавляется еще одно условие: два r-куба могут быть соседними, если все r их независимых координат являются одноименными.

При склеивании 1-кубов 2-кубы представлены в двух экземплярах как результаты склеивания двух различных пар 1-кубов. Распространяя этот принцип на кубы большей размерности, можно утверждать, что r-кубы как результат склеивания (r-1)-кубов получаются в r-кратном количестве экземпляров.

Куб, входящий в состав кубического комплекса *K*(*f*), называется ***максимальным***, если он не вступает ни в одну операцию склеивания.

Множество максимальных кубов функции *f* обозначается *Z*(*f*). Это множество является окончательным результатом операции склеивания кубов. Из кубов этого множества (и только из них) строится минимальное покрытие булевой функции.

В примере 2.10 максимальными кубами являются кубы $Z(f) = \begin{Bmatrix} \mathrm{X1X} \\ 0\,\mathrm{X}\,1 \end{Bmatrix}$.

2.10. Графическое представление булевых функций. Геометрическая интерпретация кубов малой размерности

Графическое представление булевых функций носит ограниченный характер и, как правило, является наглядным для булевых функций от двух (“плоский” вариант) и трех переменных (“пространственный” вариант).

При использовании графического способа задания булевой функции от *n* переменных каждый из 2^n наборов ее аргументов отождествляется с точкой *n*-мерного пространства с соответствующими координатами, которые могут принимать только два значении: 0 или 1. Таким образом, множество наборов аргументов булевой функции, представляющих область ее определения, можно отождествить с множеством вершин *n*-мерного куба с длиной ребра, равной 1.

Для представления значений функции (0 или 1) обычно выделяются вершины куба, соответствующие наборам аргументов, на которых функция равна единице. На рис. 2.1 показано графическое представление функции из примера 2.10: $f^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(1,2,3,6,7)$.

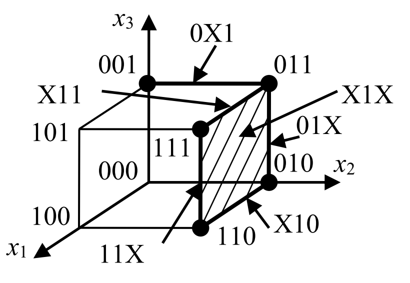


Рис. 2.1. Графическое представление функции от трех переменных

Единичные значения функции выделены “жирными” точками в соответствующих вершинах куба. Выделенные вершины будем называть ***существенными.*** Существенные вершины соответствуют 0-кубам функции. Таким образом, геометрической интерпретацией 0-куба является точка, представляющая существенную вершину.

Два соседних 0-куба являются концами какого-либо ребра, в связи с чем, геометрической интерпретацией 1-куба является ребро, замыкаемое склеивающимися 0-кубами. На рис. 2.1 выделены пять ребер, соответствующих 1-кубам кубического комплекса K^1(*f*) из примера 2.10.

Два параллельных ребра, образующих грань, являются образами склеивающихся 1-кубов. В соответствии с этим геометрической интерпретацией

2-куба является грань, образуемая парой параллельных ребер. Так как любую грань можно определить одной из пар параллельных ребер, 2-куб может быть получен как результат склеивания двух различных пар 1-кубов, то есть при всевозможных склеиваниях представляется в двух экземплярах. На рис. 2.1 штриховкой выделена грань, соответствующая 2-кубу (X1X) из примера 2.10.

Геометрическим образом 3-куба можно считать весь трехмерный куб. Так как он может быть образован тремя способами как пара параллельных граней, то при склеивании он получается в трех экземплярах.

На рис. 2.2 приведены возможные графические представления функции от четырех переменных в виде гиперкуба (тессеракта).

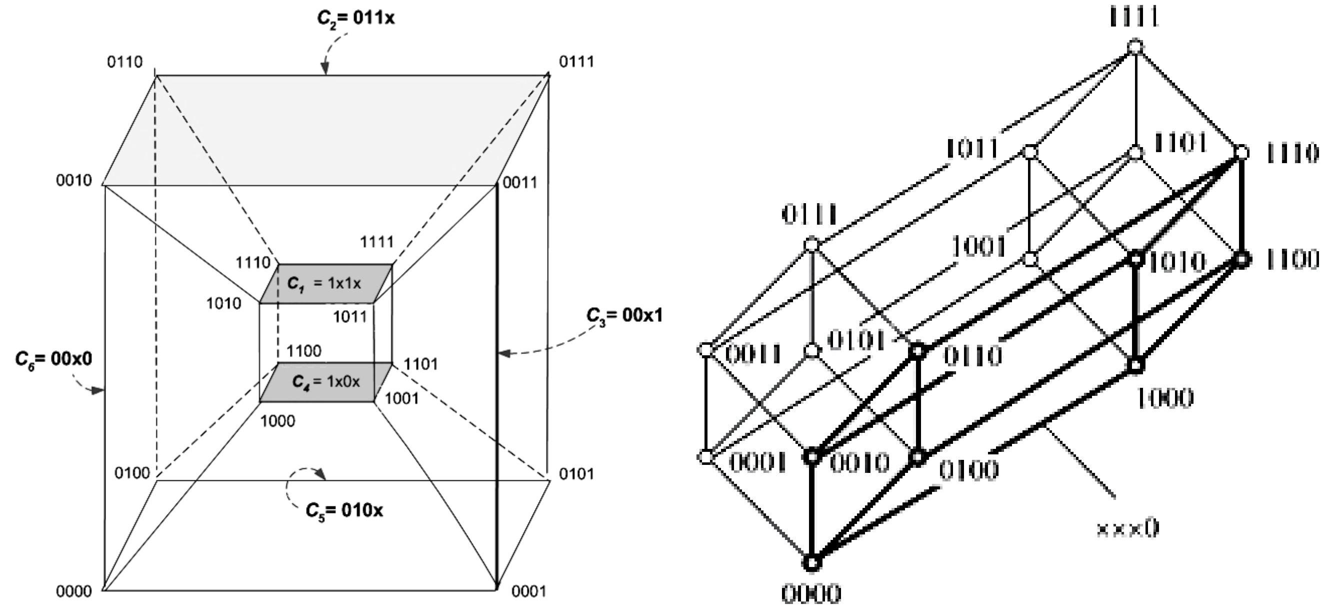


Рис. 2.2. Графические представления функции от четырех переменных

2.11. Покрытия булевых функций

2.11.1. Построение покрытий булевых функций из кубов различной размерности. Соответствие между покрытием и ДНФ булевой функции

Между кубами различной размерности, входящими в кубический комплекс $K(f)$, существует ***отношение включения*** или ***покрытия***. При этом принято говорить, что куб ***A*** меньшей размерности покрывается кубом ***B*** большей размерности. Куб ***A*** включается в куб ***B***, если при образовании куба ***B*** хотя бы в одном склеивании участвует куб ***A***.

Отношение включения (покрытия) между кубами обозначается: $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$. В теории множеств отношение включения связывает между собой некоторое множество и его подмножества. Для примера отношения включения имеют место между следующими кубами: 001⊂0X1; 011⊂X11⊂X1X.

Любой 1-куб покрывает два 0-куба, 2-куб - четыре 0-куба и четыре 1-куба, 3-куб покрывает восемь 0-кубов, двенадцать 1-кубов и шесть 2-кубов (см. рис.2.1).

Замечание. Для кубов большей размерности студентам предлагается определить количество покрываемых кубов самостоятельно. Представляется целесообразным вывести общую формулу для N_m^k - числа ***k***-кубов, покрываемых одним ***m***-кубом (***m>k***), используя элементы комбинаторики.

Покрытием булевой функции *f* называется такое подмножество кубов из кубического комплекса $K(f)$, которое покрывает все существенные вершины функции. В связи с тем, что любому кубу комплекса $K(f)$ можно поставить в соответствие конъюнктивный терм, для произвольного покрытия $C(f)$ можно составить ДНФ булевой функции. Частным случаем покрытия булевой функции является кубический комплекс $K^0(f)$ ($C_0(f)=K^0(f)$). Этому покрытию соответствует КДНФ.

Для примера 2.10 покрытием является также комплекс $K^1(f)$:

$$C_1(f)=K^1(f)=\left\{\begin{matrix}0\text{X}1\\01\text{X}\\ \text{X}10\\ \text{X}11\\11\text{X}\end{matrix}\right\}.$$

Этому покрытию соответствует ДНФ вида:

$f(X)=\bar{x}_1x_3\vee\bar{x}_1x_2\vee x_2\bar{x}_3\vee x_2x_3\vee x_1x_2$, которая ***не является*** минимальной. В качестве еще одного варианта покрытия можно использовать множество максимальных кубов. Для примера 2.10:

$$C_2(f)=Z(f)=\left\{\begin{matrix}0\text{X}1\\ \text{X}1\text{X}\end{matrix}\right\}.$$

Действительно, кубы, входящие в Z(*f*), покрывают все существенные вершины: 0X1⊃(001, 011), X1X⊃(010, 011, 110, 111).

Замечание. Множество максимальных кубов булевой функции всегда является ее покрытием.

Покрытию $C_2(f)$ соответствует ДНФ вида: $f(X)=\bar{x}_1x_3\vee x_2$.

Эта ДНФ ***является*** минимальной.

Покрытие булевой функции, которое соответствует минимальной ДНФ, называется ***минимальным покрытием*** и обозначается $\boldsymbol{C_{\min}(f)}$.

Замечание: Минимальное покрытие должно состоять только из максимальных кубов.

Множество максимальных кубов булевой функции лишь в частном случае может являться минимальным покрытием. Это справедливо для рассмотренного выше примера 2.10. В общем случае, множество максимальных кубов является избыточным и для получения минимального покрытия достаточно выделить некоторое его подмножество. Рассмотрим подобный случай на примере.

Пример 2.11. Минимизируемая булева функция задана в числовой форме:

$f^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,4,6,7).$ Найти ее минимальное покрытие и МДНФ.

По числовой форме булевой функции составим ее кубический комплекс $K^0(f)$:

$$K^0(f) = \begin{Bmatrix} 000 \\ 001 \\ 100 \\ 110 \\ 111 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix}$$

Произведя всевозможные операции склеивания между 0-кубами, получим кубический комплекс $K^1(f)$:

$$K^1(f) = \begin{Bmatrix} 00\text{X} \\ \text{X}00 \\ 1\text{X}0 \\ 11\text{X} \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1-2) \\ (1-3) \\ (3-4) \\ (4-5) \end{matrix}$$

Все 0-кубы функции вступили хотя бы в одну операцию склеивания и, следовательно, среди них нет максимальных. Кроме того, среди 1-кубов функции нет соседних ($K^2(f)= \varnothing$). Следовательно, для данного примера множество максимальных кубов совпадает с кубическим комплексом $K^1(f)$: Z(f)= $K^1(f)$.

Множеству максимальных кубов, образующих покрытия булевой функции, соответствует ДНФ, которая называется ***сокращенной*** (СДНФ).

Для рассматриваемого примера СДНФ: $f(X) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2.$

Из анализа покрытия существенных вершин максимальными кубами из комплекса $K^1(f)$ следует:

1. Куб (00X) должен обязательно включаться в покрытие, так как он и только он покрывает существенную вершину (001), аналогично, только куб (11X) покрывает существенную вершину (111).

Множество максимальных кубов, без которых не может быть образовано покрытие булевой функции, называется ***ядром покрытия*** и обозначается $T(f)$: $T(f)$={00X, 11X}.

2. Так как ядром покрытия, кроме существенных вершин (001) и (111), покрываются также существенные вершины (000) и (110), то не покрытой

ядром остается только существенная вершина (100). Для ее покрытия достаточно взять любой из оставшихся максимальных кубов: (X00) или (1X0).

Таким образом, для рассматриваемого примера получены два минимальных покрытия:

$$C^1_{\min}(f)=\begin{Bmatrix}00\mathrm{X}\\ 11\mathrm{X}\\ \mathrm{X}00\end{Bmatrix};\ C^2_{\min}(f)=\begin{Bmatrix}00\mathrm{X}\\ 11\mathrm{X}\\ 1\mathrm{X}0\end{Bmatrix},$$

которым соответствуют МДНФ:

$$f_1(X)=\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_1x_2\vee\bar{x}_2\bar{x}_3 \quad \text{и} \quad f_2(X)=\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_1x_2\vee x_1\bar{x}_3.$$

Выводы:

1. Задача получения минимальной ДНФ сводится к задаче получения минимального покрытия булевой функции.

2. В общем случае: получение минимального покрытия осуществляется в следующем порядке:

а) находится множество максимальных кубов;

б) выделяется ядро покрытия;

в) из множества максимальных кубов, не вошедших в ядро, выбирается такое минимальное подмножество, которое покрывает существенные вершины, не покрытые ядром.

3. Частными случаями могут являться:

1. $C_{min}(f) = K^0(f)$. Минимальное покрытие совпадает с кубическим комплексом $K^0(f)$. При этом МДНФ совпадает с КДНФ;

2. $C_{min}(f) = Z(f)$. Минимальное покрытие совпадает с множеством максимальных кубов $Z(f)$. При этом МДНФ совпадает с СДНФ;

3. $C_{min}(f) \subset Z(f)$. Минимальное покрытие представляет собой некоторое подмножество множества максимальных кубов. При этом могут иметь место следующие случаи:

а) $C_{min}(f) = T(f)$. Минимальное покрытие совпадает с ядром.

б) $T(f) \subset C_{min}(f)$. Минимальное покрытие включает в себя ядро, как обязательную часть, и дополняется минимальным числом максимальных кубами, не принадлежащими ядру и покрывающих существенные вершины, которые не покрыты ядром.

в) $T(f) = \varnothing$. Ядро покрытия отсутствует. Покрытие формируется из минимального числа максимальных кубов. Данный случай является наиболее сложным для получения минимального покрытия.

2.11.2. Цена покрытия

Цена покрытия используется при решении задачи минимизации булевых функций как количественная оценка качества покрытия в смысле его минимальности. Эта оценка базируется на понятии ***цены кубов***, составляющих покрытие. ***Цена r-куба*** (***S_r***) представляет собой количество несвязанных координат: $\boldsymbol{S_r = n - r}$.

Принято использовать два вида цены покрытия: S^a и S^b.

$$S^a = \sum_{r=0}^{m} S_r N_r,$$

где N_r - количество r-кубов, входящих в покрытие, m - максимальная размерность кубов, входящих в покрытие. Цена S^a представляет собой сумму цен кубов, входящих в покрытие.

$$S^b = S^a + k,$$

где k – общее количество кубов, входящих в покрытие.

$$S^a = \sum_{r=0}^{m}(n-r)N_r; \qquad S^b = \sum_{r=0}^{m}(n-r+1)N_r.$$

Минимальным покрытием булевой функции называется покрытие, обладающее ***минимальной ценой S^a*** по сравнению с любым другим покрытием этой функции.

Можно показать, что покрытие, обладающее минимальной ценой S^a, обладает также и минимальной ценой S^b.

Пример 2.12. Определить цены покрытий функции $f^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,4,6,7)$ из примера 2.11.

$C_0(f)=K^0(f)$:	$S^a=5\cdot3=15$;	$S^b=S^a+5=20$;
$C_1(f)=K^1(f)$:	$S^a=4\cdot2=8$;	$S^b=S^a+4=12$;
$C_2(f)=C_{min}(f)$:	$S^a=3\cdot2=6$;	$S^b=9$.

Цены покрытия S^a и S^b связаны с ДНФ, соответствующей этому покрытию, следующим образом:

- цена покрытия S^a представляет собой количество букв, входящих в ДНФ;
- цена S^b представляет сумму количества букв и количества термов, образующих ДНФ.

Цена покрытия хорошо согласуется с ценой схемы, построенной по нормальной форме функции, соответствующей этому покрытию.

Пример 2.13. Построить логическую схему, реализующую булеву функцию по МДНФ из примера 2.11. Определить цену схемы по Квайну и сравнить ее значение с ценами покрытия S^a и S^b.

В качестве исходного аналитического выражения для построения схемы возьмем МДНФ функции $f_2(X)$: $y = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3$. В качестве системы логических элементов используем элементы булева базиса {И, ИЛИ, НЕ}, при этом на элементах И реализуем конъюнктивные термы, а элементы ИЛИ используем для реализации дизъюнкции конъюнктивных термов. Будем, кроме того, строить схему с парафазными входами, в следствии чего элементы НЕ (инверторы) не понадобятся.

Для интерпретации выражения для МДНФ в схему представим его в следующем виде:

$$y = \underbrace{\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2}_{\text{И}(2)} \vee \underbrace{x_1x_2}_{\text{И}(2)} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_3}_{\text{И}(2)}}_{\text{ИЛИ}(3)},$$

где показано соответствие термов функции и логических элементов схемы. Значения аргументов булевой функции и их инверсий интерпретируется в схеме в виде входных сигналов, а значение самой функции интерпретируется в виде выходного сигнала y.

Логическая схема приведена на рис. 2.3.

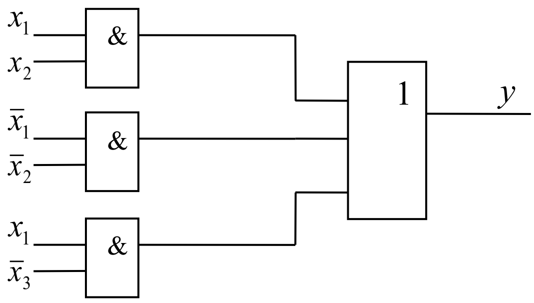


Рис. 2.3. Логическая схема, построенная по покрытию C_2 примера 2.11.

Цена схемы по Квайну, опреледяемая суммарным числом входов во все логические элементы схемы: S_Q=2*3 (входы в элементы И) + 1*3 (входы в элемент ИЛИ) = 9.

В свою очередь, цены покрытия по МДНФ, по которой строилась схема, S^a =6, S^b =9. Таким образом $S^a < S_Q = S^b$

<u>*Замечание.*</u> В принципе, между ценой схемы S_Q и ценами покрытия S^a и S^b существует соотношение: $S^a \le S_Q \le S^b$, которое выполняется при следующих допущениях:

1. Схема строится по нормальной форме (ДНФ или КНФ).

2. Схема строится на элементах булевого базиса (И, ИЛИ).

3. На входы схемы подаются как прямые, так и инверсные значения аргументов булевой функции (схема с парафазными входами). В соответствии с этим элементы НЕ (инверторы) в схеме отсутствуют.

<u>*Задание*</u> (на освоение материала).

В отношении минимального покрытия или МДНФ сформулировать условия, при которых:

1. $S_Q = S^b$;

2. $S_Q = S^a$;

3. $S^a < S_Q < S^b$.

2.11.3. *Нулевое покрытие булевой функции и получение МКНФ*

Выше было рассмотрено покрытие булевой функции на наборах аргументов, для которых функция равна единице. Такие покрытия можно назвать ***единичными***. Наряду с единичными покрытиями существуют и ***нулевые***, покрывающие наборы аргументов, на которых функция равна нулю, то есть покрытие строится для существенных вершин, но не самой функции, а ее отрицания (инверсии).

Принципы построения нулевого покрытия такие же, как и для единичного.

Пример 2.14. Для булевой функции из примера 2.11. найти минимальное нулевое покрытие и составить МКНФ.

Числовое представление булевой функции по единичным значениям имеет вид:

$$f^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,4,6,7).$$

Альтернативное числовое представление булевой функции по нулевым значениям имеет вид:

$$f^3(X) = \underset{f=0}{\&}(2,3,5).$$

Определим множество максимальных кубов нулевого покрытия. Над 0-кубами кубического комплекса

$$K^0(\overline{f}) = \begin{Bmatrix} 010 \\ 011 \\ 101 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} S^a=9 \\ S^b=12; \end{matrix}$$

выполним единственную операцию склеивания, в результате чего получим кубический комплекс

$$K^1(\overline{f}) = \{01X\}.$$

Поскольку 0-куб (101) не склеивался с другими 0-кубами, а 1-куб – единственный ($K^2(\overline{f})=\varnothing$), то множество максимальных кубов:

$$Z(\overline{f}) = \begin{Bmatrix} 01X \\ 101 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} S^a=5 \\ S^b=7. \end{matrix}$$

Минимальное нулевое покрытие совпадает с множеством максимальных кубов: $C_{\min}(\overline{f}) = Z(\overline{f})$.

<u>*Замечания*</u>.

1. Для того, чтобы отличать нулевое покрытие от единичного в обозначениях кубических комплексов различной размерности, а также покрытий используется знак инверсии над функцией.

Цена минимального нулевого покрытия оказалась меньше цены минимального единичного покрытия.

Так как предсказать какое из минимальных покрытий данной функции, единичное или нулевое, будет иметь меньшую цену заранее невозможно, то для построения схемы, обладающей минимальной ценой по Квайну, целесообразно решать задачу минимизации в отношении обоих покрытий.

2.12. Минимизация булевых функций на картах Карно

2.12.1. Представление булевых функций на картах Карно

Одним из способов графического представления булевых функций от небольшого числа переменных являются карты Карно. Карты Карно были изобретены в 1952 г. Эдвардом В. Вейчем (диаграммы Вейча) и усовершенствованы в 1953 г. Морисом Карно, физиком лаборатории Белла (Bell Labs).

Идея построения карт Карно различной размерности и представление булевых функций на них изложены в разделе 2.8.2.

На рис. 2.4. приведены булевы функции от трех переменных из примеров 2.10 (а) и 2.11 (б).

а)

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0		1	1	1
1			1	1

б)

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	1		
1	1		1	1

Рис.2.4. Карты Карно функций от трех переменных

В связи с тем, что в основе формирования кубов различной размерности k (k>0) положены отношения соседства и операции склеивания, порядок проставления координат (x_2 x_3) в столбцах карты {(00), (01), (11), (10)} принят таким, чтобы соседние 0-кубы размещались в геометрически соседних клетках карты.

На рис. 2.5. приведен пример карты Карно для булевой функции от четырех переменных, заданной в числовой форме:

$$f^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(0, 4, 10, 13, 14).$$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	10	10
00	1			
01	1			
11		1		1
10				1

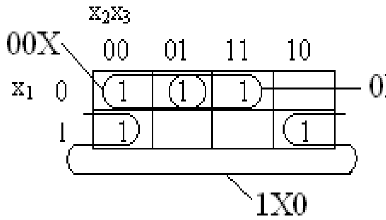
Рис.2.5. Карта Карно функции от четырех переменных

Карты Карно являются удобным средством для минимизации булевых функций от небольшого числа переменных. С использованием карт Карно находится минимальное покрытие функции, по которому строится ее минимальная ДНФ (КНФ).

2.12.2. Образование кубов различной размерности на картах Карно

Две соседние клетки образуют 1-куб. При этом имеется в виду, что клетки, лежащие на границах карты, также являются соседними по отношению друг к другу. Примеры образования 1-кубов приведены на рис. 2.6 а),б).

а)



б)

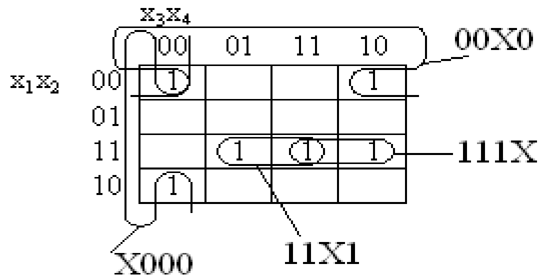


Рис. 2.6. Образование 1- кубов на картах Карно для функций от трех (а) и четырех (б) переменных

Карты позволяют для функций f_1 и f_2, заданных комплексами $K^0(f_1)$ и $K^0(f_2)$

$$K^0(f_1)=\left\{\begin{matrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{matrix}\right\};\quad K^0(f_2)=\left\{\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{matrix}\right\}$$

с ценами $S^a(f_1) = 15$, $S^b(f_1) = 20$ и $S^a(f_2) = 24$, $S^b(f_2)=30$ определить покрытия

$$C(f_1)=\left\{\begin{matrix}X&0&0\\0&X&1\\1&X&0\end{matrix}\right\};\quad C(f_2)=\left\{\begin{matrix}X&0&0&0\\0&0&X&0\\1&1&X&1\\1&1&1&X\end{matrix}\right\}$$

с ценами $S^a(f_1) = 6$, $S^b(f_1) = 9$, $S^a(f_2) = 12$, $S^b(f_1) = 16$. Эти покрытия являются минимальными и им соответствуют минимальные ДНФ:

$$f_1=\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_3\vee x_1\bar{x}_3 \quad \text{и} \quad f_2=\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4\vee x_1x_2x_4\vee x_1x_2x_3.$$

Четыре клетки карты могут объединяться, образуя 2-куб, содержащий две независимые координаты. Примеры образования 2-кубов приведены на рис. 2.7.

Карты построены для функций f_1, f_2 и f_3, заданных в числовой форме:

$$f_1^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,2,4,5,6,10,12,13,14),$$

$$f_2^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,2,3,8,10),$$

$$f_3^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(1,3,8,9,10,11,12,14).$$

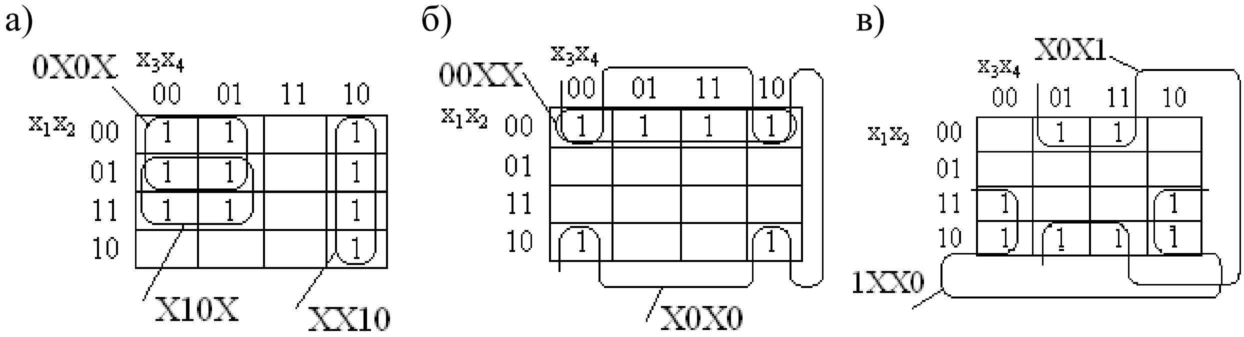


Рис. 2.7. Образование 2-кубов

На картах определены покрытия, состоящие из 2-кубов:

$$C(f_1)=\begin{Bmatrix} 0 & \text{X} & 0 & \text{X} \\ \text{X} & 1 & 0 & \text{X} \\ \text{X} & \text{X} & 1 & 0 \end{Bmatrix};\quad C(f_2)=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & \text{X} & \text{X} \\ \text{X} & 0 & \text{X} & 0 \end{Bmatrix};\quad C(f_3)=\begin{Bmatrix} 1 & \text{X} & \text{X} & 0 \\ \text{X} & 0 & \text{X} & 1 \end{Bmatrix}$$

и имеющие цены $S^a(f_1) = 6$, $S^b(f_1) = 9$, $S^a(f_2) = 4$, $S^b(f_2) = 6$, $S^a(f_3) = 4$, $S^b(f_3) = 6$.

Покрытия являются минимальными. Составленные по ним МДНФ имеют вид:

$$f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_4, \quad f_2 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4, \quad f_3 = x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_4.$$

Объединение восьми клеток карты приводит к образованию 3-куба. Примеры образования 3-кубов для функций от четырех переменных f_1, f_2, f_3, заданных в числовой форме:

$$f_1^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,2,3,4,5,6,7,12,13,14,15),$$

$$f_2^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(1,3,4,5,6,7,9,11,12,13,14,15),$$

$$f_3^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,2,3,6,7,8,9,10,11,14,15)$$

приведены соответственно на рис. 2.8, а), б), в).

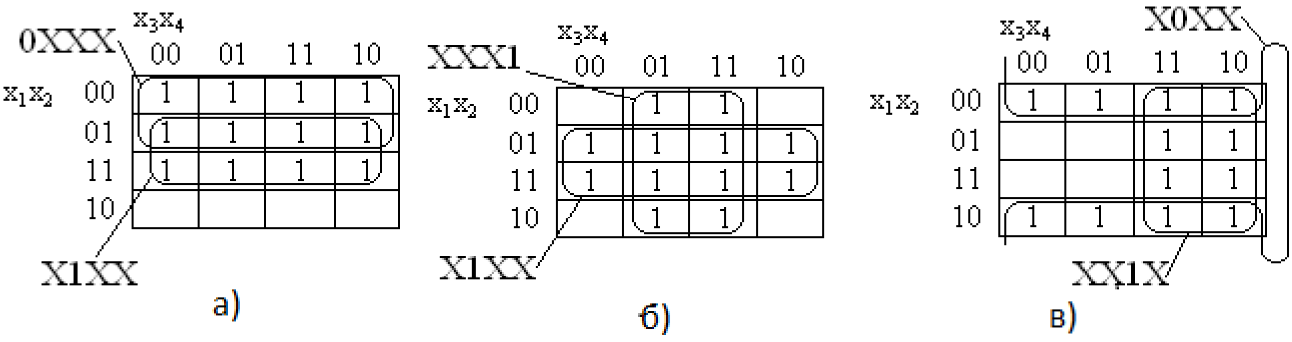


Рис. 2.8. Образование 3-кубов

Функциям f_1, f_2, f_3 соответствуют покрытия с одинаковыми ценами S^a = 2, S^b = 4.

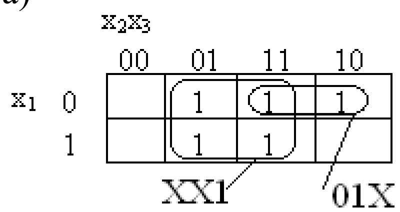
$$C(f_1)=\begin{Bmatrix}0 & X & X & X\\ X & 1 & X & X\end{Bmatrix};\quad C(f_2)=\begin{Bmatrix}X & X & X & 1\\ X & 1 & X & X\end{Bmatrix};\quad C(f_3)=\begin{Bmatrix}X & 0 & X & X\\ X & X & 1 & X\end{Bmatrix}.$$

2.12.3. Определение минимальных покрытий и МДНФ

Для получения минимальной ДНФ функции с использованием карты Карно определяется покрытие функции, имеющее минимальную цену S^a. Минимальное покрытие выбирается интуитивным путем на основе анализа различных вариантов покрытий минимизируемой функции. Покрытие с минимальной ценой формируется, если каждая существенная вершина функции будет покрыта кубом максимальной размерности (с наибольшим числом независимых координат) и для покрытия всех существенных вершин будет использовано наименьшее число кубов.

Примеры минимизации функций приведены на рис. 2.9.

а)



б)

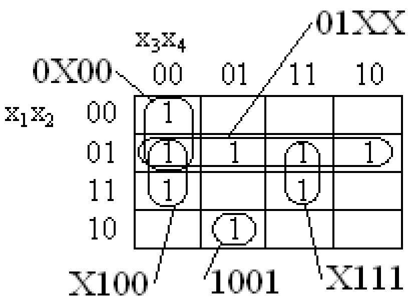


Рис. 2.9. Минимизация булевых функций от трех а) и четырех б) переменных

На рис. 2.9 а) представлено минимальное покрытие для функции от трех переменных:

$$f_1^3(X)=\underset{f=1}{\vee}(1,2,3,5,6,),$$

а на рис. 2.9 (б) - минимальное покрытие для функции от четырех переменных:

$$f_2^4(X)=\underset{f=1}{\vee}(0,4,5,6,7,9,12,15).$$

Минимальному покрытию функции f_1 $C_{\min}(f_1)=\begin{Bmatrix}XX1\\ 01X\end{Bmatrix}$ с ценами S^a =3, S^b= 5, соответствует МДНФ $f_1 = x_3 \vee \bar{x}_1 x_2$.

$$\begin{Bmatrix}1001\\ 0X00\\ X100\\ X111\\ 01XX\end{Bmatrix}$$

Минимальному покрытию функции f_2 $C_{min}(f_2) =$

с ценами $S^a = 15$, $S^b = 20$, соответствует МДНФ

$$f_2 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2.$$

Для минимизации функций от пяти и шести переменных используются соответственно две и четыре четырехмерные карты Карно.

На рис 2.10. приведен пример минимизации функции пяти переменных $f^5(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,8,10,13,15,16,17,22,23,29,30,31)$.

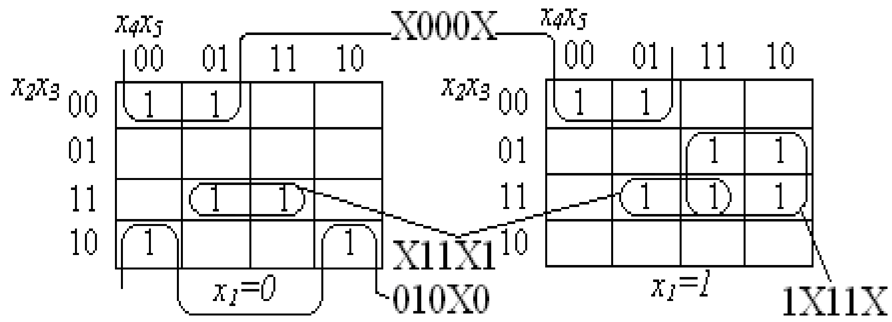


Рис. 2.10. Минимизация булевой функции от пяти переменных

Разделение четырехмерных карт Карно производится по значению аргумента x_1: для левой карты x_1=0, для правой - x_1=1. Каждая клетка Карно для функции от пяти переменных имеет пять соседних, четыре из которых размещаются в пределах своей четырехмерной карте, а одна расположена в соседней карте и имеет в ней одинаковые с исходной клеткой координаты $x_2, x_3, x_4, x_5,$ отличаясь только по координате x_1.

Кубы, используемые в покрытии функции, могут располагаться:

а) целиком в одной из четырехместных карт (при x_1=0 - в левой, при x_1=1 – в правой);

б) в обеих четырехместных картах (при этом координата x_1 - независимая: x_1=X).

Минимальное покрытие функции:

$$C_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} \mathrm{X} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{X} \\ \mathrm{X} & 1 & 1 & \mathrm{X} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{X} & 0 \\ 1 & \mathrm{X} & 1 & 1 & \mathrm{X} \end{Bmatrix}.$$

имеет цены $S^a = 13$, $S^b = 17$. Ему соответствует МДНФ:

$$f = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2x_3x_5 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_5 \vee x_1x_3x_4.$$

Принцип размещения карт для представления функций шести переменных показан на рис. 2.11. На этом рисунке представлена функция от шести переменных, заданная комплексом с ценой $S^a = 48$:

$$K^0 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Минимальное покрытие этой функции имеет цену $S^a = 8$.

При минимизации функций от большого числа переменных карты Карно неудобны, в этом случае для решения задач минимизации используются алгебраические методы. Минимальным ДНФ и КНФ функций соответствуют минимальные двухуровневые логические схемы.

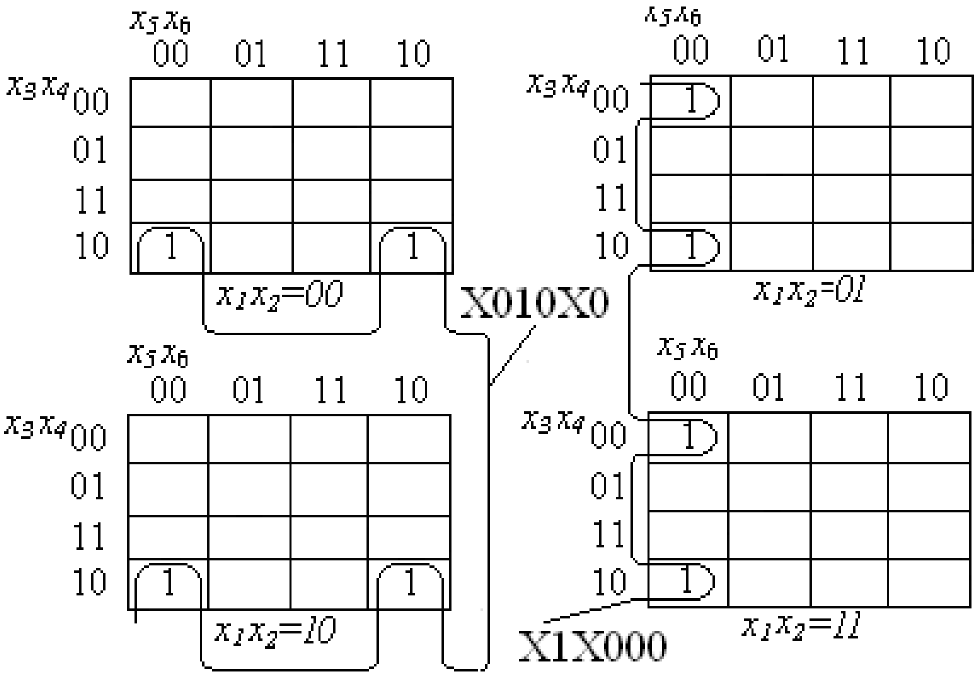


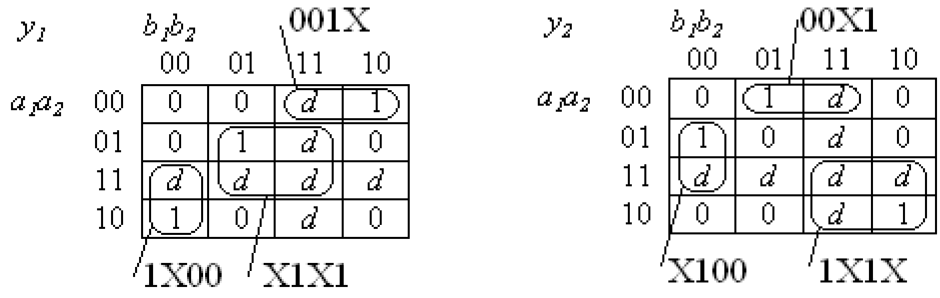
Рис. 2.12. Минимизация булевой функции от шести переменных

Минимизация частично определенных булевых функций

При минимизации частично определенных булевых функций в клетки карты Карно, соответствующие наборам аргументов, на которых функция не определена, ставится символ ***d*** (*don't care*). Эти наборы используются для построения кубов возможно большей размерности, в результате чего уменьшается цена покрытия функции.

Пример 2.13. Найти минимальную ДНФ функций, используемых для построения комбинационной схемы, в которой выполняется операция суммирования двоичных кодов по *mod* 3: $y_1y_2 = (a_1a_2 + b_1b_2)_{mod\,3}$.

Предполагается, что слагаемые имеют значения $a_1a_2 \le 2$; $b_1b_2 \le 2$, т.е. наборы $a_1a_2 = 11$ и $b_1b_2 = 11$ отсутствуют и рассматриваются как несущественные. Функции $y_1 = f_1(a_1,a_2,b_1,b_2)$ и $y_2 = f_2(a_1,a_2,b_1,b_2)$ представлены на рис. 2.9 в виде карт Карно. На картах нулевые значения y_1 и y_2 обозначены 0, единичные – 1, несущественные – знаком ***d***.



а) б)

Рис. 2.9. Минимизация частично определенных булевых функций

С использованием несущественных вершин определяются минимальные покрытия:

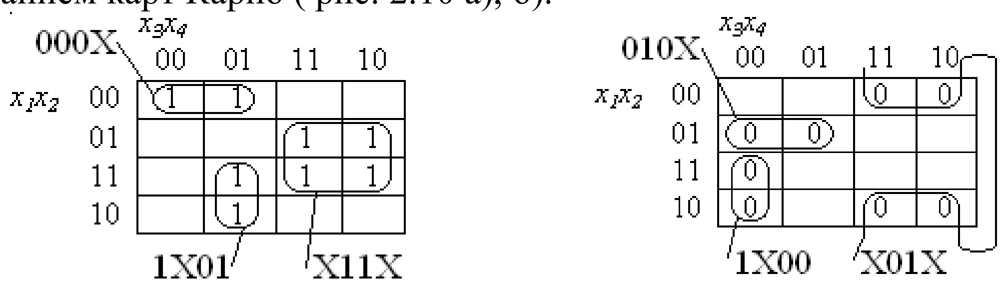
$$C(y_1)=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & X \\ 1 & X & 0 & 0 \\ X & 1 & X & 1 \end{Bmatrix};\quad C(y_2)=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & X & 1 \\ X & 1 & 0 & 0 \\ 1 & X & 1 & X \end{Bmatrix}$$

с ценой $S^a = 8$ каждое. Покрытиям соответствуют минимальные ДНФ:

$$y_1 = \bar{a}_1\bar{a}_2 b_1 \vee a_1\bar{b}_1\bar{b}_2 \vee a_2 b_2,$$
$$y_2 = \bar{a}_1\bar{a}_2 b_2 \vee a_2\bar{b}_1\bar{b}_2 \vee a_1 b_1.$$

Замечание. После минимизации функция становится полностью определенной. Значения функции на несущественных наборах доопределяется до 1, если набор использовался при минимизации, и до 0, если нет.

Пример 2.14. Определение минимальных ДНФ и КНФ функции с использованием карт Карно (рис. 2.10 а), б).



а) б)

Рис. 2.10. Определение минимальных ДНФ (а) и КНФ (б) функции

Данной функции соответствует минимальная ДНФ (рис. 2.10 а) вида:

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 x_4 \vee x_2 x_3.$$

Нахождение нулевого покрытия этой функции представлено на рис. 2.10 б). Минимальная КНФ:

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3).$$

Экономия оборудования, составляющего логическую схему, может быть получена на основе скобочных форм булевых функций, используемых для синтеза логических схем.

Так, булевой функции

$$f^5(X) = \underset{f=1}{\vee}(5,6,7,13,14,15,21,22,23,25,26,27,29,30,31)$$

соответствует минимальная ДНФ: $f = x_3x_4 \vee x_3x_5 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_5,$
по которой строится двухуровневая логическая схема (рис. 2.13 а) с ценой $S^b = 14$. Минимальная ДНФ преобразуется в скобочную форму:

$$f = (x_1x_2 \vee x_3)x_4 \vee (x_1x_2 \vee x_3)x_5 = (x_1x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_5),$$

по которой строится схема (рис. 2.13 б) с ценой $S^b = 8$.

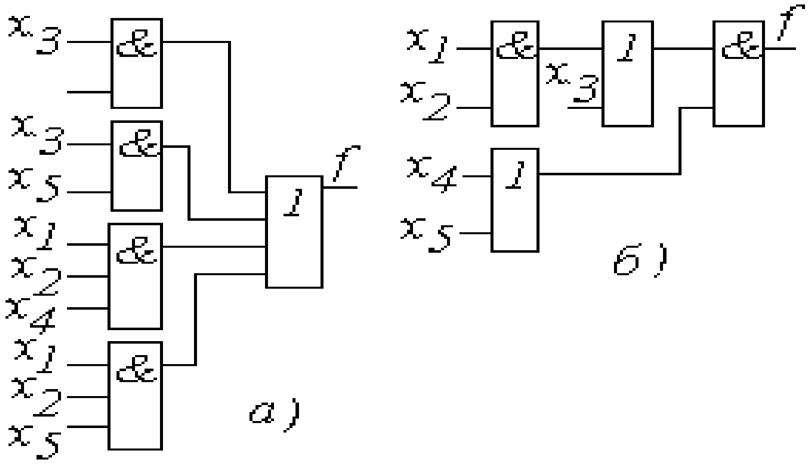


Рис. 2.13. Схема, построенная по МДНФ (*а*) и по скобочной форме (*б*)

2.13. Импликанты булевой функции. Системы импликант

Решение задачи минимизации булевой функции методом Квайна и усовершенствованным методом Квайна-Мак-Класки базируется на понятиях импликант и их систем.

Булева функция $g(X)$ называется ***импликантой*** булевой функции $f(X)$, если для любого набора аргументов, на которых $g(X)=1$, $f(X)$ также равна единице.

$g(\widetilde{X}) = 1 \Rightarrow f(\widetilde{X}) = 1,$ где $\widetilde{X}$ – некоторый набор аргументов.

Свойства импликант:

Между импликантой и самой функцией существует отношение включения $g(X) \subset f(X)$.

Можно утверждать, что для любого набора аргументов, на котором функция равна нулю, ее импликанта также равна нулю.

Если $g(X)$ и $\varphi(X)$ являются импликантами функции $f(X)$, то их дизъюнкция также является импликантой этой функции.

Простейшими примерами импликант могут служить конъюнктивные термы, входящие в произвольную ДНФ данной функции.

Пример 2.16. Импликантами функции $f^3(X) = \bigvee_{f=1}(0, 1, 4, 6, 7)$ являются $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$, $x_1x_2\bar{x}_3$, x_1x_2, $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$, $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2$. Т.е. произвольная дизъюнкция этих термов также является импликантой функции.

Простой (***первичной***) ***импликантой*** булевой функции называется конъюнктивный терм, который сам является импликантой этой функции, но никакая его собственная часть уже не является импликантой этой функции.

Под ***собственной частью терма*** понимается новый терм, полученный из исходного, путем вычеркивания произвольного числа букв.

Для функции примера 2.16 простыми импликантами являются: $\bar{x}_1\bar{x}_2$, x_1x_2, $\bar{x}_2\bar{x}_3$, $x_1\bar{x}_3$.

Множеству простых импликант можно поставить в соответствие множество максимальных кубов.

Дизъюнкция всех простых импликант булевой функции представляет собой ДНФ этой функции, которая называется ***сокращенной - СДНФ***.

Для функции примера 2.16 СДНФ имеет вид:

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3.$$

Понятие «сокращенная» присвоено ДНФ в том смысле, что она, как правило, содержит меньшее количество букв и термов по сравнению с КДНФ. Для нашего примера КДНФ содержит 15 букв и 5 термов, а СДНФ - 8 букв и 4 терма.

Аналогия между импликантами и кубическим представлением булевой функции

Любому кубу из *K*(*f*) можно поставить в соответствие конъюнктивный терм, который можно рассматривать как импликанту булевой функции. Любой простой импликанте булевой функции соответствует максимальный куб, и, в свою очередь, множество всех простых импликант соответствует множеству *Z*(*f*) всех максимальных кубов *K*(*f*). Таким образом, можно провести некоторую аналогию между сокращенной СДНФ и *Z*(*f*).

В отношении импликант булевой функции также как и в отношении кубов, соответствующих им, существует отношение покрытия.

Принято считать, что импликанта булевой функции покрывает некоторую существенную вершину этой функции или, в общем случае, некоторый куб из *K*(*f*), если значение импликанты на наборе аргументов, представляющем данную существенную вершину, равно 1 или, в общем случае, значение импликанты равно 1 для всех существенных вершин покрываемых кубом из *K*(*f*).

Наример, импликанта x_1x_2 покрывает существенные вершины (110, 111) и в свою очередь покрывает куб 11X.

Множество импликант булевой функции образует ***полную систему импликант***, если любая существенная вершина булевой функции покрывается хотя бы одной импликантой этого множества.

Если считать, что в полную систему импликант включаются импликанты только в виде конъюнктивных термов и не включаются импликанты в виде дизъюнкции термов, то полной системе импликант можно поставить в соответствие некоторое множество кубов из $K(f)$ образующих покрытие булевой функции f.

Так, например, кубам из кубического комплекса $K^{\circ}(f)$ соответствует полная система импликант, представляющая собой множество конституент 1 данной функции f. В свою очередь, множеству максимальных кубов $Z(f)$, естественно образующих покрытие булевой функции, соответствует полная система простых импликант.

Система простых импликант называется ***приведенной***, если она является полной, а никакая ее собственная часть уже не образует полную систему импликант.

Пример 2.17. Проверить, является ли система простых импликант $\{x_1x_2,\ \bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_3\}$ для функции $y = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3$ полной и, если да, то является ли она приведенной.

Для функции $y = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3$ система простых импликант $\{x_1x_2,\ \bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_3\}$ является полной, но не является приведенной, т.к. из нее можно исключить одну из импликант $(\bar{x}_2\bar{x}_3 \text{ или } x_1\bar{x}_3)$ не нарушая полноты системы.

Дизъюнкция всех простых импликант, образующих некоторую приведенную систему называется ***тупиковой ДНФ*** булевой функции или ***ТДНФ.***

Для функции примера 2.17 существуют две ТДНФ:

1. $y = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3;$
2. $y = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3.$

В данном случае они совпадают с минимальной ДНФ. Но в общем случае это утверждение не справедливо, т.е. минимальная ДНФ обязательно является ТДНФ, но не любая ТДНФ является МДНФ. Таким образом, множество МДНФ является подмножеством ТДНФ.

Простая импликанта булевой функции называется ***существенной***, если она и только она покрывает некоторую существенную вершину этой функции.

Множество существенных импликант соответствует максимальным кубам, образующим ядро покрытия.

2.14. Минимизация булевых функций методом Квайна-Мак-Класки

Метод Квайна — Мак-Класки — табличный метод минимизации булевых функций, предложенный Уиллардом Квайном и усовершенствованный Эдвардом Мак-Класки.

Уиллард Ван Орман Квайн (англ. Willard Van Orman Quine; 1908—2000) — американский философ, логик и математик

Для решения канонической задачи минимизации методом Квайна-Мак-Класки применяется следующая последовательность действий:

1. Нахождение множества максимальных кубов (простых импликант) булевой функции.
2. Выделение ядра покрытия (определение множества существенных импликант).
3. Дополнение множества кубов, принадлежащих ядру покрытия, минимальным подмножеством из множества максимальных кубов, не входящих в ядро покрытия, для получения покрытия с минимальной ценой.

С точки зрения последовательного преобразования ДНФ булевой функции с целью их упрощения каноническая задача минимизации может быть представлена в виде:

КДНФ $\Rightarrow$ СДНФ $\Rightarrow$ ТДНФ $\Rightarrow$ МДНФ.

Распространение терминологии в отношении нулевого покрытия базируется на понятии имплиценты (как соответствие импликанте) и системы имплицент.

2.14.1 Нахождение множества максимальных кубов (простых импликант) булевой функции

Рассмотрим процедуру нахождения простых импликант на следующем примере.

Пример 2.18. *Минимизация булевой функции методом Квайна-Мак-Класки.*

Найти множество простых импликант булевой функции заданной в числовой форме:

$$f^4(X) = \bigvee_{f=1} (0, 1, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15).$$

На этом этапе производятся всевозможные склеивания кубов меньшей размерности с целью получения кубов большей размерности. Для сокращения количества операций сравнения кубов на предмет их склеивания целесообразно производить упорядочивание кубов одинаковой размерности путем разделения их на группы по количеству единичных координат. При таком подходе в операцию склеивания могут вступать только кубы, принадлежащие двум соседним группам, то есть такие кубы, количество единичных координат в которых отличается на единицу. Кроме того, рекомендуется проводить нумерацию кубов одинаковой размерности с фиксацией пары склеиваемых кубов при образовании куба большей размерности как результат склеивания. Также по ходу склеивания необходимо осуществлять отметку кубов, вступающих в операцию склеивания. Тогда после завершения операций по склеиванию кубов все неотмеченные кубы будут представлять собой множество максимальных кубов как кубов, не участвовавших ни в одной операции склеивания.

Результат этого этапа представлен в табл. 2.4.

$K^0(f)$			$K^1(f)$				$K^2(f)$			$K^3(f)$	$Z(f)$	
1	0000	∨	1	000X	1-2		1	1XX0	4-8	∅	1	1XX0
	--------		2	X000	1-3		2	1XX0	5-7		2	000X
2	0001	∨		---------							3	X000
3	1000	∨	3	0X01	2-4						4	0X01
	--------		4	10X0	3-5	∨					5	01X1
4	0101	∨	5	1X00	3-6	∨					6	X111
5	1010	∨		---------							7	111X
6	1100	∨	6	01X1	4-7							
	--------		7	1X10	5-8	∨						
7	0111	∨	8	11X0	6-8	∨						
8	1110	∨		---------								
	--------		9	X111	7-9							
9	1111	∨	10	111X	8-9							

Таблица 2.4. Нахождение множества максимальных кубов

<u>*Замечания*</u>.

1. При образовании 2-кубов получено два одинаковых 2-куба как результата склеивания двух различных пар соседних 1-кубов. Точно также при образовании 3-кубов должно получаться три одинаковых 3-куба как результата склеивания трех различных пар соседних 2-кубов. Этот факт хорошо согласуется с геометрической интерпретацией кубов небольшой размерности. Действительно, 2-куб представляет собой грань трехмерного куба, которая полностью определяется одной из двух противоположных ребер, соответствующих двум соседним 1-кубам. В свою очередь 3-куб соответствует полному трехмерному кубу, который полностью определяется одной из трех пар противоположных граней, интерпретируемых как геометрические образы двух соседних 2-кубов.

Продолжая аналогию, можно заметить, что при склеивании r-кубов ($r\geq 3$), получается (r+1) одинаковых (r+1)-кубов. Этот факт можно использовать как некоторое подтверждение корректности производимых операций склеивания над кубами.

2. Можно проследить за уменьшением цены покрытий заданной булевой функции, получаемых из кубов различной размерности. Так, для покрытия $C_o(f)=K^o(f)$, составленного из исходных 0-кубов, цена составляет: $S^a = 9{\cdot}4 = 36$, $S^b = 36+9 = 45$. Этому покрытию соответствует КДНФ заданной функции. Так как все 0-кубы отмечены как вступающие в операции склеивания, то кубический комплекс $K^1(f)$ также можно рассматривать в качестве одного из покрытий булевой функции: $C_1(f)=K^1(f)$. Цена этого покрытия: $S^a = 10{\cdot}3 = 30$, $S^b = 30+10 = 40$. Этому покрытию соответствует ДНФ заданной функции:

$$f(X) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee$$
$$\vee\ \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3.$$

И, наконец, множество максимальных кубов $Z(f)$ также представляет собой покрытие заданной функции $C_2(f)=Z(f)$ с ценой:

$S^a = 1{\cdot}2+6{\cdot}3 = 20$, $S^b = 20+7 = 27$.

Этому покрытию соответствует СДНФ вида:

$$f(X) = x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3.$$

3. При минимизации не полностью определенных булевых функций производится дополнение множества 0-кубов (существенные вершины) булевой функции множеством безразличных наборов $N(f)$ с целью образования кубов большей размерности. Тем самым на этом этапе осуществляется доопределение исходной функции значениями «единица» на безразличных наборах.

2.14.2 Определение ядра покрытия

Для выполнения этого этапа первоначально строится таблица покрытий, строки которой соответствуют максимальным кубам покрытия, а столбцы – существенным вершинам булевой функции. Безразличные наборы аргументов при минимизации не полностью определенной булевой функции в таблице покрытий не участвуют. Тем самым на этом этапе производится доопределение не полностью определенной булевой функции значениями нуля на безразличных наборах аргументов.

Таблица покрытий отображает отношение покрытия между существенными вершинами булевой функции и максимальными кубами. Для этого на пересечении i-ой строки и j-го столбца таблицы делается соответствующая отметка в том случае, если максимальный куб из i-ой строки покрывает существенную вершину из j-го столбца.

Таблица покрытий с соответствующими отметками приведена в виде табл. 2.5.

<u>*Замечания*</u>.

1. Таблицу покрытий называют также импликантной таблицей в связи с тем, что максимальные кубы соответствуют простым (первичным) импликантам булевой функции, а существенные вершины - конституентам единицы булевой функции.

2. Для полностью определенных булевых функций количество меток в строке таблицы покрытий, соответствующей максимальному кубу размерности r, равно 2^r. Для не полностью определенных функций количество меток может быть меньше 2^r в том случае, если в образовании r-куба участвуют кроме существенных вершин и безразличные наборы.

Для выделения ядра покрытия в таблице покрытий ищутся столбцы, в которых содержится единственная метка. Это означает, что существенная вершина, соответствующая такому столбцу, покрывается только одним из максимальных кубов. В соответствии с этим максимальный куб, который один и только один покрывает некоторую существенную вершину булевой функции, включается в обязательную часть покрытия, называемую ядром.

В табл. 2.5 выделены метки, являющиеся единственными в своих столбцах.

Максимальные кубы	Существенные вершины								
	0000	**0001**	**0101**	**0111**	**~~1000~~**	**~~1010~~**	**~~1110~~**	**1110**	**~~1111~~**
~~1XX0~~					×	×	×	×	
000X	×	×							
X000	×				×				
0X01		×	×						
01X1			×	×					
X111				×					×
111X								×	×

Таблица 2.5. Таблица покрытий

Как видно из табл. 2.5, в нашем примере кубом ядра будет являться куб: $T(f)=\{1XX0\}$.

2.14.3 Определение множества минимальных покрытий

На этом этапе из множества максимальных кубов, не принадлежащих ядру покрытия, выделяются такие минимальные подмножества, с помощью каждого из которых покрываются оставшиеся вершины (не покрытые ядром). Реализацию этого этапа целесообразно производить с использованием упрощенной таблицы покрытий (табл. 2.6). В ней вычеркнуты все кубы, принадлежащие ядру, и вершины, покрываемые ядром.

Для решения задачи третьего этапа можно использовать один из трех методов или их комбинацию:

1) метод простого перебора;
2) метод Петрика;
3) дальнейшее упрощение таблицы покрытий.

Максимальные кубы		Существенные вершины				
		0000	**0001**	**0101**	**0111**	**1111**
A	**000X**	×	×			
B	**X000**	×				
C	**0X01**		×	×		
D	**01X1**			×	×	
E	**X111**				×	×
F	**111X**					×
		a	***b***	***c***	***d***	***e***

Таблица 2.6. Упрощенная таблица покрытий

На данном этапе целесообразно ввести обозначение максимальных кубов и существенных вершин.

Максимальные кубы обозначены в табл. 2.6 прописными буквами *A, ..., F*, а существенные вершины строчными буквами *a, ..., e.*

Метод целесообразно применять для упрощенной таблицы небольшого объема. Он не дает гарантии получения всех максимальных покрытий.

Для рассматриваемого примера все кубы, входящие в упрощенную таблицу покрытий, обладают одной размерностью, т.е. необходимо выбрать минимальное количество этих кубов для покрытия всех оставшихся существенных вершин.

Из табл. 2.6 видно, что минимальное число кубов равно трем. К возможным вариантам минимальных покрытий относятся:

$$C^1_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \\ E \end{Bmatrix}; \quad C^2_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \\ E \end{Bmatrix}; \quad \ldots$$

Метод Петрика основан на составлении булева выражения, определяющего условие покрытия всех существенных вершин булевой функции из упрощенной импликантной таблицы. Булево выражение представляет собой конъюнкцию дизъюнктивных термов, каждый из которых включает в себя совокупность всех простых импликант, покрывающих одну существенную вершину функции. Полученное выражение преобразуется в дизъюнктивную форму и минимизируется с использованием законов поглощения и тавтологии. Каждый конъюнктивный терм дизъюнктивной формы соответствует одному из вариантов покрытия, из которых выбирается минимальное.

Достоинством метода Петрика является возможность получения всех минимальных покрытий булевой функции.

Для рассматриваемого примера булево выражение, определяющее условие покрытия всех существенных вершин в соответствии с табл. 2.6 будет иметь вид: $Y = (A \vee B)(A \vee C)(C \vee D)(D \vee E)(E \vee F)$.

Это выражение представлено в конъюнктивной форме. Для его преобразования в дизъюнктивную форму выполняется попарное логическое умножение дизъюнктивных термов.

Замечание. В целях максимального упрощения этапа преобразования выражения Y перемножаются термы, содержащие по возможности максимальное количество букв.

После логического умножения двух первых пар дизъюнктивных термов получим выражение: $Y = (AA \vee AC \vee AB \vee BC)(CD \vee CE \vee DD \vee DE)(E \vee F)$, которое, после применения законов тавтологии и поглощения, приводится к виду: $Y = (A \vee BC)(D \vee CE)(E \vee F)$.

После логического умножения последних двух скобок и последующего упрощения получим: $Y=(A \vee BC)(DE \vee DF \vee CEE \vee CEF)$.

Умножив оставшуюся пару скобок, получим выражение Y в дизъюнктивной форме: $Y = ADE \vee ADF \vee ACE \vee BCDE \vee BCDF \vee BCCE =$

$= ADE \vee ADF \vee ACE \vee BCE \vee BCDF$.

Каждый из пяти конъюнктивных термов соответствуют покрытию булевой функции (с учетом дополнения ядром), каждому из которых можно поставить в соответствие тупиковую ДНФ.

Последний терм не соответствует минимальному покрытию, то есть данная функция имеет четыре минимальных покрытия.

$$C^1_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} 1 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & X & 1 \\ X & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}; \; C^2_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} 1 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{Bmatrix};$$

$$C^3_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} 1 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & X & 0 & 1 \\ X & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}; \; C^4_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} 1 & X & X & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 1 \\ X & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Для всех минимальных покрытий $S^a=11$; $S^b=15$.

Минимальные ДНФ, соответствующие этим покрытиям:

МДНФ$_1$: $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_3 x_4$;

МДНФ$_2$: $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_2 x_3$;

МДНФ$_3$: $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4$;

МДНФ$_4$: $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4$;

Дальнейшее упрощение таблицы покрытий состоит в применении двух операций:

а) вычеркивание “лишних” строк;

б) вычеркивание “лишних” столбцов.

Операции вычеркивания строк и столбцов базируются на следующих правилах:

- если множество меток i-й строки является подмножеством меток j-й строки и куб i имеет не большую размерность, чем куб j, то из таблицы можно вычеркнуть i-ю строку, так как существенные вершины покрываемые i-м кубом будут с гарантией покрыты j-м кубом;

- если множество меток k–го столбца таблицы покрытий является подмножеством меток l-го столбца, то из таблицы покрытий можно вычеркнуть l –ый столбец, так как существенная вершина l будет наверняка покрыта за счет одного из кубов, покрывающих оставшуюся существенную вершину k.

Применим метод дальнейшего упрощения таблицы покрытий в отношении табл. 2.6. С помощью операции вычеркивания “лишних” строк из нее можно удалить две строки ***B*** и ***F***, множество меток в которых является подмножеством меток в строках ***A*** и ***E*** соответственно. Процесс удаления “лишних” строк показан в табл. 2.7.

Максимальные кубы		Существенные вершины				
		0000	**0001**	**0101**	**0111**	**1111**
	000X	*	*			
	~~**X000**~~	*				
	0X01		*	*		
	01X1			*	*	
	X111				*	*
	~~**111X**~~					*
		a	***b***	***c***	***d***	***e***

Таблица 2.7. Вычеркивание “лишних” строк

После удаления строк ***B*** и ***F***, соответствующих максимальным кубам X000 и 111X получим новую упрощенную таблицу покрытий, представленную в табл. 2.8. В отличии от табл.2.6 (упрощенная таблица покрытий нулевого порядка) табл. 2.8 будем называть упрощенной таблицей покрытий первого порядка.

В табл. 2.8 можно выделить новое ядро покрытия $T^1(f)=\begin{Bmatrix}000X\\X111\end{Bmatrix}$, которое будем называть ядром покрытия первого порядка в отличии от ядра $T(f)$ (ядра покрытия нулевого порядка), выделяемого по исходной таблице покрытий (табл. 2.5).

Максимальные кубы		Существенные вершины				
		0000	**0001**	**0101**	**0111**	**1111**
A	~~**000X**~~	⊗	*			
C	**0X01**		*	*		
D	**01X1**			*	*	
E	~~**X111**~~				*	⊗
		a	***b***	***c***	***d***	***e***

Таблица 2.8. Упрощенная таблица покрытий первого порядка

После вычеркивания кубов ядра $T^1(f)$ (строки ***A*** и ***E***), а также существенных вершин, покрываемых кубами ядра (столбцы ***a, b, d, e***) получим упрощенную таблицу покрытий второго порядка (табл. 2.9).

Максимальные кубы		Существенные вершины
		0101
C	**0X01**	*
D	**01X1**	*

Таблица 2.9. Упрощенная таблица покрытий второго порядка

Из табл. 2.9 определяем два минимальных покрытия в виде двух возможных вариантов дополнения кубов ядер покрытия нулевого $T(f)$ и первого порядка $T^1(f)$ кубами ***C*** и ***D*** соответственно.

Таким образом, с помощью метода упрощения таблицы покрытий получено только два минимальных покрытия:

$$C^1_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} 1XX0 \\ 000X \\ X111 \\ 01X1 \end{Bmatrix}, \qquad C^2_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} 1XX0 \\ 000X \\ X111 \\ 0X01 \end{Bmatrix},$$

в то время, как с помощью метода Петрика найдены четыре минимальных покрытия, т.е. все возможные варианты.

2.15. Функциональная полнота системы булевых функций

Система булевых функций $S=\{f_1, f_2,..., f_m\}$ называется ***функционально полной***, если с помощью функций этой системы можно выразить любую булеву функцию с использованием метода суперпозиции.

Под суперпозицией в отношении булевых функций понимается подстановка одних функций в другие вместо их аргумента.

Примером полной системы является $S_1 = \{\rceil, \&, \vee\}$ (***булев базис***).

Обоснованность утверждения о функциональной полноте этой системы базируется на возможности представления любой сколь угодно сложной булевой функции в нормальной форме, которая является комбинацией операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции применительно к аргументам этой функции.

Система S_1 является ***избыточной***, так как из нее можно удалить одну из функций (& или $\vee$) без нарушения функциональной полноты.

Получаемые при этом системы $S_2 = \{\rceil, \&\}$ и $S_3 = \{\rceil, \vee\}$ обычно называют ***сокращенным булевым базисом***.

Недостающие операции ($\vee$ в системе S_2 и & в системе S_3) могут быть выражены с помощью следствий из законов де Моргана:

$$a \vee b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}; \qquad a \cdot b = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}.$$

Другими примерами функционально полных систем являются системы из одной функции: $S_4=\{\downarrow\}$ (***стрелка Пирса***), $S_5=\{|\}$ (***штрих Шеффера***), которые принято называть ***универсальными базисами***, а также система $S_6=\{\&, \oplus, 1\}$, которую называют ***базисом Жегалкина.***

Функционально полная система булевых функций называется ***минимальной,*** если удаление из нее какой-либо функции приводит к нарушению свойства функциональной полноты.

Понятие функциональной полноты системы булевых функций связано с аналогичным понятием для системы логических элементов.

Эта связь заключается в следующем: если каждой функции из некоторой функционально полной системы сопоставить логический элемент, реализующий эту функцию, то система логических элементов соответствующая некоторой функционально полной системе булевых функций естественным образом оказывается тоже функционально полной. С использованием функционально полной системы логических элементов можно построить комбинационную схему, реализующую любую, сколь угодно сложную, булеву функцию.

Доказательство функциональной полноты некоторой системы булевых функций можно осуществлять одним из двух способов:

1. с использованием теоремы о функциональной полноте;
2. с использованием конструктивного подхода.

2.15.1 Теорема о функциональной полноте (теорема Поста)

Для того чтобы система булевых функций была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала:

1. хотя бы одну функцию, не сохраняющую ноль;
2. хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу;
3. хотя бы одну не линейную функцию;
4. хотя бы одну не монотонную функцию;
5. хотя бы одну не самодвойственную функцию.

В теореме Поста фигурируют пять классов булевых функций:

K_0 – класс функций, сохраняющих ноль;
K_1 – класс функций, сохраняющих единицу;
K_L – класс линейных функций;
K_M – класс монотонных функций;
K_S – класс самодвойственных функций.

Эти классы называют ***замечательными классами*** булевых функций.

Другая формулировка теоремы Поста:

Для того, чтобы система булевых функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ была функционально полной необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов K_0, K_1, K_L, K_M, K_S нашлась функция f_i из системы, не принадлежащая этому классу.

2.15.2 Замечательные классы булевых функций

Булева функция называется ***сохраняющей ноль***, если на нулевом наборе аргументов она принимает значение, равное нулю, то есть $f(0, 0, 0,..., 0) = 0$. В противном случае функция относится к классу функций, не сохраняющих ноль.

К функциям, сохраняющим ноль, относятся

$$f(x_1,x_2)= x_1 \vee x_2 \text{ и } f(x_1,x_2)= x_1 \cdot x_2.$$

К функциям, не сохраняющим ноль, относятся $f(x)= \overline{x}$ и $f(x_1,x_2)=x_1 \sim x_2$.

Булева функция называется ***сохраняющей единицу***, если на единичном наборе аргументов она принимает значение, равное единице, то есть $f(1, 1, 1,..., 1) = 1$. В противном случае функция относится к классу функций, не сохраняющих единицу.

К функциям, сохраняющим единицу, относятся:

$$f(x_1, x_2)= x_1 \vee x_2 \text{ и } f(x_1, x_2)= x_1 \cdot x_2.$$

К функциям, не сохраняющим единицу, относятся:

$$f(x)= \overline{x} \text{ и } f(x_1 ,x_2)=x_1 \oplus x_2.$$

Булева функция называется ***линейной***, если она представима полиномом Жегалкина первой степени.

В булевой алгебре доказывается теорема о возможности представления любой булевой функции от n переменных с помощью полинома Жегалкина n-ой степени.

В общем случае полином имеет вид:

$$f^n(X) = K_0 \oplus K_1x_1 \oplus ... \oplus K_n x_n \oplus ...$$
$$... \oplus K_{n+1}x_1x_2 \oplus K_{n+2}x_1x_3 \oplus ... \oplus K_{n+l}x_{n-1}x_n \oplus ...$$
$$...\oplus K_{n+m}x_1x_2...x_n.$$

$K_0, K_1,..., K_{n+m}$ - являются коэффициентами полинома и представляют собой логические константы K_i=0 или K_i=1.

В алгебре Жегалкина одноименный полином (полином Жегалкина) можно считать аналогом канонической нормальной формы функции для булевой алгебры.

Полином Жегалкина является ***линейным*** **(1-*ой степени*)**, если все коэффициенты общего полинома, начиная с K_{n+1}, равны нулю.

В отношении функции от двух переменных линейный полином Жегалкина имеет вид: $f^2(X)=K_0 \oplus K_1x_1 \oplus K_2x_2$.

Примерами линейных функций являются:

$$y= x_1\oplus x_2\ (K_0=0,\ K_1=K_2=1),$$

$$y = x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2} = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \quad (K_0 = K_1 = K_2 = 1),$$

$$y= \overline{x} =1\oplus x\ (K_0=K_1=1,\ K_2=0).$$

Примеры нелинейных функций: $y= x_1 \cdot x_2$,

$$y = x_1 | x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} = 1 \oplus x_1 \cdot x_2.$$

Булева функция называется ***монотонной,*** если при возрастании наборов аргументов она принимает неубывающие значения:

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\ \dots,\ a_n) > \boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\ \dots,\ b_n) \Rightarrow f(\boldsymbol{A}) \geq f(\boldsymbol{B}).$$

Между наборами аргументов ***A*** и ***B*** имеет место отношение возрастания в том и только том случае, если имеет место отношение неубывания для всех компонент этого набора:

$$a_i \geq b_i\ (i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

и, по крайней мере, для одной компоненты имеет место отношение возрастания.

Примеры наборов, для которых имеет место отношение возрастания:

$$(1011) > (0011)$$
$$(1011) > (0001)$$
$$(0001) > (0000).$$

Примеры несопоставимых наборов (1011) и (0111), (1000) и (0111).

В отношении функции от двух переменных несопоставимыми являются наборы (01) и (10)

Примеры немонотонных функций*:*

$$y = \overline{x}\ ,\ y = x_1 \oplus x_2.$$

Две булевы функции $f^{\,n}(X)$ и $g^n(X)$ называются ***двойственными,*** если для любых наборов аргументов выполняется равенство

$$f^{\,n}(\overline{X}) = \overline{g^{\,n}(X)},$$

то есть функции f и g на противоположных наборах аргументов X и $\overline{X}$ принимают противоположные значения.

Два набора аргументов называются ***противоположными***, если каждая из их компонент принимает противоположные значения, например,

$$X = (0101) \ \text{ и } \ \overline{X} = (1010).$$

Булева функция называется ***самодвойственной,*** если она является двойственной по отношению к самой себе, то есть принимает противоположные значения на противоположных наборах аргументов.

Примером самодвойственной функции является: $y = \overline{x}$.

Примеры не самодвойственных функций: $y=x_1 \cdot x_2,\ y=x_1 \vee x_2,\ y=x_1 \oplus x_2.$

Принадлежность базовых булевых функций и логических констант к замечательным классам представлена табл. 2.10. Знаком “+” отмечена принадлежность функции соответствующему классу, а знаком “-” не принадлежность.

Из таблицы видно, что согласно теореме Поста, функции штрих Шеффера и стрелка Пирса являются функционально полными.

С помощью таблицы легко дополнить любую булеву функцию минимальным количеством других булевых функций так, чтобы полученная система была функционально полной и не избыточной.

Функция	K_0	K_1	K_L	K_M	K_S
0	+	-	+	+	-
1	-	+	+	+	-
$\bar{x}$	-	-	+	-	+
$x_1 \cdot x_2$	+	+	-	+	-
$x_1 \vee x_2$	+	+	-	+	-
$x_1 \oplus x_2$	+	-	+	-	-
$x_1 \sim x_2$	-	+	+	-	-
$x_1 \Delta x_2$	+	-	-	-	-
$x_1 \rightarrow x_2$	-	+	-	-	-
$x_1 \mid x_2$	-	-	-	-	-
$x_1 \downarrow x_2$	-	-	-	-	-

Таблица 2.10. Принадлежность булевых функций к замечательным классам

2.15.3 Конструктивный подход к доказательству функциональной полноты системы булевых функций

Подход базируется на следующей теореме булевой алгебры:

Теорема. Пусть система булевых функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ является функционально полной и любая из функций $f_1, \ldots, f_m$ может быть выражена с помощью суперпозиции через функции $g_1, \ldots, g_k$. Тогда система булевых функций $\{g_1, \ldots, g_k\}$ также является функционально полной.

При этом в качестве исходной системы $\{f_1, \ldots, f_m\}$ обычно используется система S_1 (булев базис).

Пример 2.18. Докажем функциональную полноту системы $S_5=\{|\}$ (универсальный базис), выразив инверсию, конъюнкцию и дизъюнкцию с помощью только функции штрих Шеффера .

$$\bar{x} = \overline{x \cdot x} = x \mid x;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2);$$

$$(x_1 \vee x_2) = \overline{(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)} = (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2).$$

Таким образом, согласно приведенной теореме, система S_5 является функционально полной.

Контрольные вопросы и задачи

1. Записать законы двойственности. Доказать один из них. (5)
2. Упростить выражение $ab \vee a\bar{c} \vee a\bar{b}\bar{c} \vee \bar{a} \vee \bar{a}b\bar{c}$ с использованием законов булевой алгебры. (2)
3. Является ли аналитическая форма булевой функции $y = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$ нормальной, и если является, то какой (дизъюнктивной или конъюнктивной)? (3) Может ли эта форма являться канонической, и если может, то какой (дизъюнктивной или конъюнктивной) и при каких условиях? (2)
4. Действует ли сочетательный закон в отношении операции запрета? Ответ обосновать. (5)
5. Записать функцию $y = x_1 \rightarrow \overline{x_2}$ с помощью операций булева базиса. (2)
6. Записать функцию $y = \overline{x_1} \downarrow x_2$ в канонических формах. (4)
7. Не пользуясь таблицей истинности, получить канонические формы булевой функции $y = (x_1 \vee \overline{x_3})\,\&\,\overline{x_2}$. (8)
8. Записать функцию $f^3(x) = \overline{x_1} \vee \overline{x_3}$ в символической форме. (5)
9. Представить функцию $f^3(x) = f^3_{107}$ в канонических формах. (6)
10. Сколько 1-кубов накрывается одним 4-кубом? Ответ обосновать. (5)
11. Записать все 2-кубы, которые накрываются кубом XX10X. (3)
12. Найти существенные импликанты булевой функции $f^3(x) = \&(0, 6)$. (10)
13. Булева функция от четырех переменных принимает значение, равное нулю, на наборах (0, 7, 8, 13) и безразличное значение – на наборах (2, 6, 10, 14). Найти минимальную ДНФ этой функции. (10)
14. Привести пример минимального покрытия булевой функции от четырех переменных, для которого S^a =10, S^b=14. (6)
15. Привести пример булевой функции от четырех переменных, для которой минимальная ДНФ совпадает с канонической, а минимальная КНФ не совпадает с канонической, и число существенных вершин равно пяти. Функцию представить в числовой форме. (5)
16. Для функции из примера 15 найти минимальную КНФ. (6)
17. Является ли покрытие булевой функции, состоящее из кубов 0X0, 10X, X00 минимальным? Ответ обосновать. (5)
18. Минимальное единичное покрытие булевой функции состоит из кубов 0X0 и X10. Найти минимальную КНФ. (6)
19. В отношении минимального покрытия сформулировать условия, при которых цена схемы с парафазными входами, построенной на элементах булева базиса по минимальной форме, совпадает с ценой S^a минимального покрытия. (3)

20. Перечислить все базовые функции булевой алгебры, сохраняющие константу 0. (3)
21. Является ли функция равнозначности нелинейной? Утверждение доказать. (3)
22. Является ли функция запрета монотонной? Утверждение доказать.(3)
23. Реализовать дизъюнкцию в базисе Жегалкина. (4)
24. Дополнить функцию импликации минимальным количеством других булевых функций так, чтобы полученная система была функционально полной, но не избыточной. (2) Доказать функциональную полноту системы, используя конструктивный подход. (8)

3. Синтез комбинационных схем

3.1. Типовые логические элементы и их обозначения на функциональных схемах

Логический элемент — простейшее устройство ЭВМ, выполняющее одну определённую логическую операцию над входными сигналами согласно правилам алгебры логики.

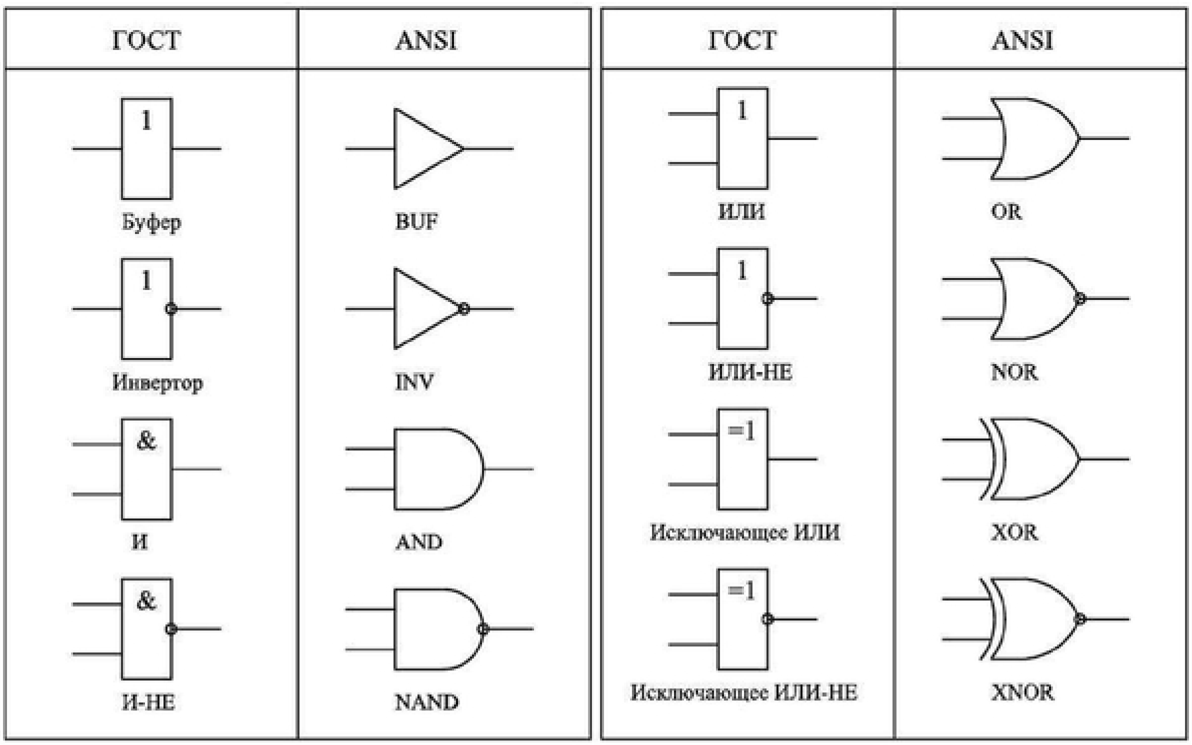
Логический элемент характеризуется:

1. Наличием одного или нескольких входов, на которые подаются входные сигналы (входные переменные).
2. Наличием выхода, на котором формируется выходной сигнал (выходная переменная).
3. Определенной функцией, которая отображает зависимость выходного сигнала от входных.

В мире применяют две системы условных графических обозначение (УГО) логических элементов - ANSI и DIN.

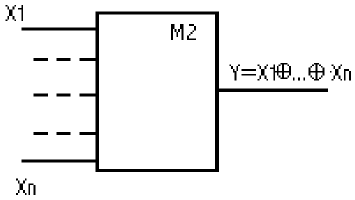
ANSI - это американский стандарт (American National Standart Institute), DIN - европейский стандарт (Deutsche Ingenieuring Normen - немецкий инженерный стандарт). Российский ГОСТ ближе к стандарту DIN.

К базовым логическим элементам относятся:



В первом столбце таблицы показаны некоторые обозначения в соответствии с ГОСТ, который применим в России. Похожий стандарт DIN используется в странах Европы. Второй столбец соответствует стандарту ANSI.

В России еще используется элемент «Сумматор по модулю 2», функция которого совпадают с элементом «Исключающее ИЛИ» только при наличии двух входов.



При построении функциональных схем используется совокупность типовых логических элементов, образующих *функционально полную систему* (*базис*).

Основными базисами являются:

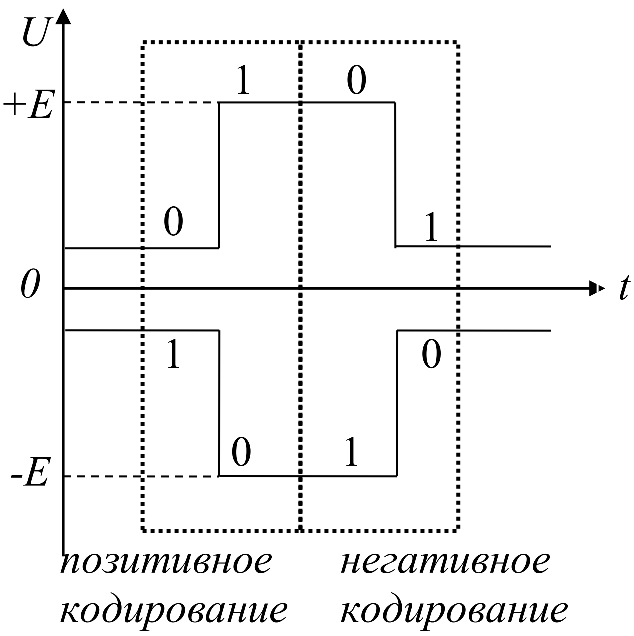
1. булев базис (И, ИЛИ, НЕ);
2. сокращенные булевы базисы (И, НЕ), (ИЛИ, НЕ);
3. универсальные базисы (И - НЕ), (ИЛИ - НЕ);
4. базис Жегалкина (И, М2).

3.2. Способы кодирования логических сигналов

В связи с использованием двухзначной логики в логических схемах как входные, так и выходные сигналы представляются с помощью, так называемого, ***двоичного сигнала***, особенностью которого является наличие двух четко различимых уровней, отождествляемых с нулем и единицей соответственно. В зависимости от того, какой уровень сигнала сопоставляется с логическим нулем, а какой с логической единицей, различают два способа кодирования двоичных сигналов (рис.3.1):

- ***позитивное*** (положительное) кодирование (позитивная логика) высокий уровень сигнала принимается за “1”, а низкий за “0”.

- ***негативное*** (отрицательное) кодирование (негативная логика) высокий уровень сигнала принимается за “0”, а низкий за “1”.



При изменении способа кодирования двоичного сигнала функция одной и той же электронной схемы, реализующей некоторый логический элемент, меняется на противоположную.

Рис.3.1. Способы кодирования двоичных сигналов

3.3. Понятие логической схемы. Типы логических схем

Функциональная логическая схема представляет собой совокупность логических элементов и связей между ними.

Соединения логических элементов в рамках единой логической схемы должны удовлетворять следующим правилам:

1. К любому входу логического элемента могут быть подключены:
- выход любого другого логического элемента;
- входной сигнал (входная переменная);
- логическая константа (0 или 1).

В реальных электронных схемах подача логической константы на вход элемента реализуется заземлением или подключением этого входа, обязательно через резистор, к шине питания.

2. Выход любого логического элемента схемы может быть подключен к входу другого логического элемента или представлять собой выходной сигнал схемы. В частном случае возможна комбинация того и другого.

Логические схемы разделяются на два типа :
- комбинационные;
- последовательностные.

В ***комбинационных схемах*** значение выходного сигнала в любой момент времени зависит только от комбинации входных сигналов в этот же момент времени.

С учетом этой задержки распространения сигналов от входов схемы к ее выходу изменение значения выходного сигнала запаздывает по сравнению с моментом изменения входных сигналов.

Принцип работы комбинационной схемы может быть описан булевой функцией, отражающей зависимость выходного сигнала схемы, как функции от входных сигналов, как аргумент этой функции.

Для комбинационных схем с несколькими выходами эта зависимость отражается системой булевых функций.

Пример 3.1. На рис.3.2. приведена комбинационная схема на элементах булева базиса.

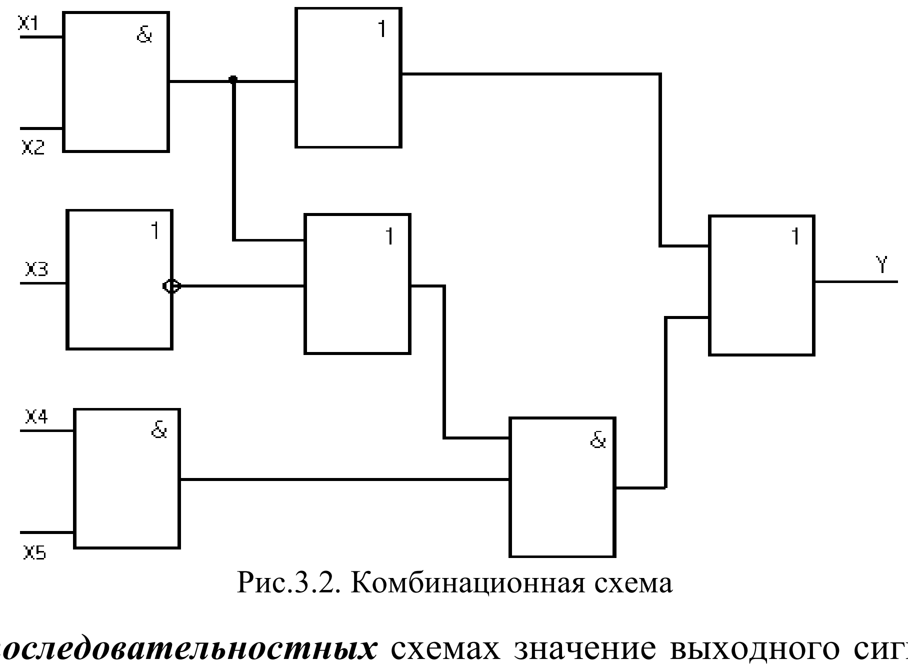


Рис.3.2. Комбинационная схема

В ***последовательностных*** схемах значение выходного сигнала в любой момент времени зависит не только от комбинации входных сигналов в данный момент времени, но и от предыстории их изменения, то есть от последовательности входных сигналов во времени.

Как правило, последовательностные схемы характеризуются некоторым внутренним строением, от которого зависит значение выходного сигнала (сигналов). Внутреннее состояние такой схемы сохраняется на запоминающих элементах (триггерах), в связи с чем, схемы этого типа называются также *схемами с памятью*. В общем случае поседовательносная схема представляет собой некоторый *цифровой автомат*.

Пример 3.2. На рис.3.3. приведена последовательностная схема на элементах универсального базиса И-НЕ.

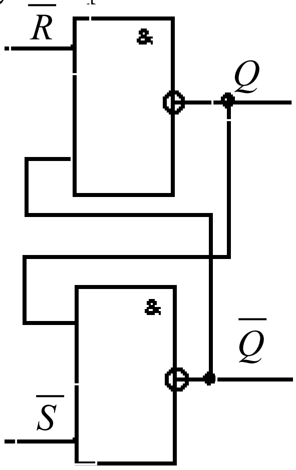


Рис.3.3. Схема простейшего запоминающего элемента – RS-триггера.

Последовательностные схемы характеризуются наличием так называемых петель, по которым выход некоторого элемента соединяется со входом этого же самого элемента через другие элементы схемы.

3.4. Основные параметры комбинационных схем

Основными параметрами комбинационных схем (КС) является стоимость и быстродействие.

Стоимость КС определяется двумя составляющими; стоимостью логических элементов и стоимостью связей. Как правило, стоимостью связей (соединений) пренебрегают. В свою очередь, стоимость логического элемента определяется числом его входов. Как правило, при построении абстрактных КС, не привязанных к конкретной системе элементов, ***цена схемы*** определяется в смысле Квайна, т.е. суммарным числом входов во все логические элементы схемы.

Быстродействие схемы, как правило, оценивается ***задержкой*** распространения сигналов от входов схемы к ее выходу. Для абстрактных КС эту задержку принято определять в виде: $\mathbf{T=K\tau}$, где τ - задержка на одном логическом элементе; К - максимальное количество логических элементов, через которые проходит сигнал от входов к выходу.

Как правило, задержка схемы сопоставляется с числом уровней этой схемы. Для этой цели все элементы схемы распределяются по уровням. Входные сигналы схемы относятся к уровню 0. Элемент схемы относится к уровню N, если он связан по входам с элементами уровней меньших N и хотя бы с одним элементом уровня N-1. Уровень элемента, на выходе которого формируется выходной сигнал схемы, совпадает с количеством уровней схема и, тем самым, определяет ее задержку.

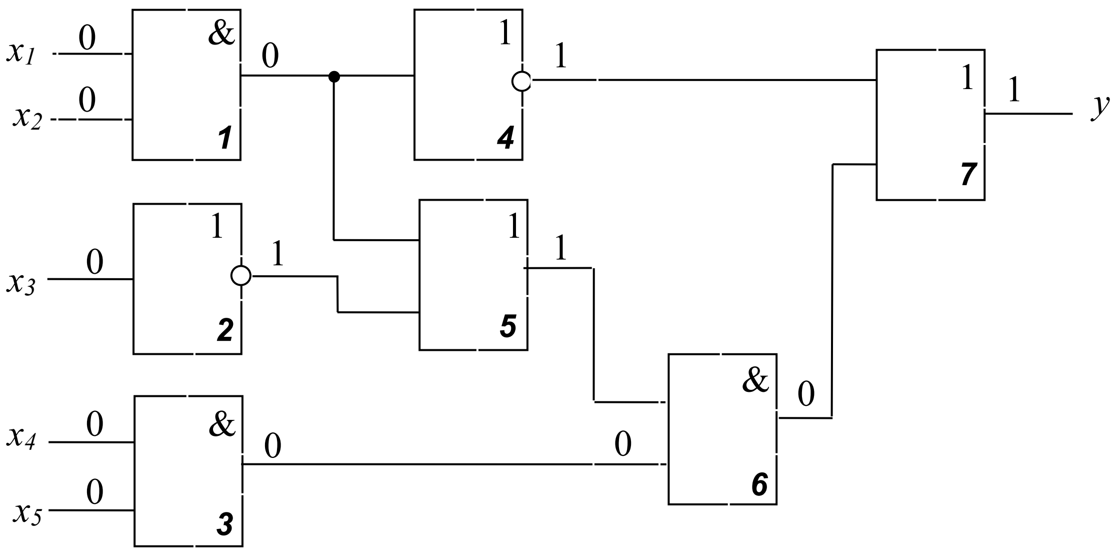


Рис. 3.4. четырех уровневая комбинационная схема.

Для схемы, приведенной на рис. 3.4:

- элементы 1,2,3 относятся к первому уровню;
- элементы 4,5 ко второму уровню;
- элемент 6 к третьему уровню;
- элемент 7 к четвертому уровню.

Задержка приведенной схемы составляет: T=4τ. Цена схемы по Квайну S_Q=12.

3.5. Задачи анализа и синтеза комбинационных схем

В общем виде ***задача анализа***, комбинационных схем сводится к определению функции, реализуемой заданной схемой. В частном случае задача анализа состоит в определении реакции заданной схемы на определенную комбинацию входных сигналов (входной набор).

Для определения функции схемы целесообразно использовать ***метод подстановки***. Его идея состоит в следующем. Выходы логических элементов обозначаются промежуточными переменными: y_1, y_2, … Последовательно продвигаясь от выхода схемы к входам, осуществляют подстановку в выходную функцию промежуточных переменных, как аргументов, до тех пор. пока в выражении функции все промежуточные переменные не будут заменены на входные переменные.

Для схемы, приведенной на рис. 3.4:

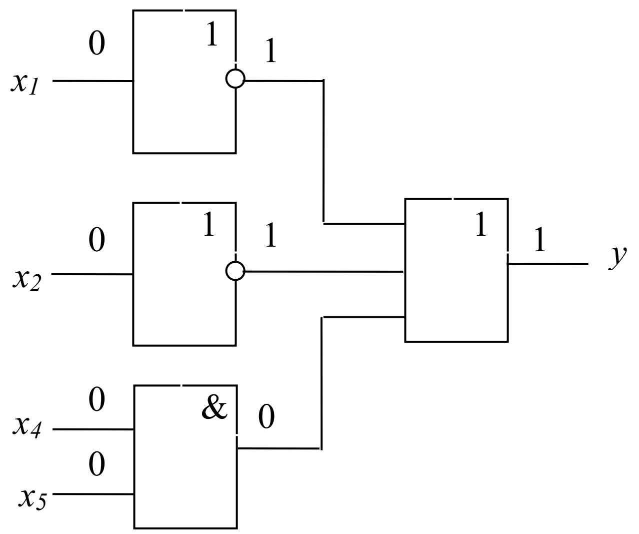
$$y = y_1 \vee y_2 = \bar{y}_4 \vee y_3 y_6 = \overline{x_1 x_2} \vee (y_4 \vee y_5) x_4 x_5 = \overline{x_1 x_2} \vee (x_1 x_2 \vee \bar{x}_3) x_4 x_5.$$

Полученное выражение для функции y можно привести к ДНФ и далее упростить с использованием законов булевой алгебры. Цепочка преобразований выражения имеет следующий вид:

$$y = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_1 x_2 x_4 x_5 \vee \bar{x}_3 x_4 x_5 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4 x_5 \vee \bar{x}_3 x_4 x_5 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4 x_5.$$

Замечание. В полученном аналитическом выражении отсутствует один из аргументов – x_3, т.е. функция является вырожденной по аргументу x_3.

Схема, реализующая заданную функцию по сокращенной аналитической форме, принимает следующий вид (рис.3.5):



По сравнению с исходной КС (рис. 3.4) полученная схема обладает меньшей ценой по Квайну S_Q=7 и меньшей задержкой T=2τ.

Рис.3.5. Схема, построенная по сокращенной форме.

Определим реакцию схемы на входной набор, например (00000). На обеих схемах показаны значения входных и промежуточных выходных сигналов: y(00000)=1.

Задача синтеза состоит в построении комбинационной схемы по заданному закону функционирования.

При решении задачи синтеза необходимо учитывать следующие моменты:

1. Синтезируемая схема должна, по возможности, содержать минимум оборудования (логических элементов). В связи с этим актуальной задачей является минимизация заданной булевой функции. При решении этой задачи целесообразно получить как МДНФ, так и МКНФ.

2. Как правило, синтезируемая схема строится на логических элементах, принадлежащих некоторому базису. Естественно, что используемая система элементов должна обладать свойством функциональной полноты, то есть быть достаточной для построения на ее основе комбинационной схемы, реализующей любую, наперед заданную булеву функцию. Такими функционально полными системами логических элементов являются: {И, ИЛИ, НЕ}; {И, НЕ}; {ИЛИ, НЕ}; {И-НЕ}; {ИЛИ-НЕ}; {И, М2}.

3. Как правило, при решении задачи синтеза стараются добиться экстремального значения одного из параметров схемы: минимума цены или максимума быстродействия (минимум задержки). В тех случаях, когда критерием эффективности схемы является цена по Квайну, над минимальными формами

проводят дополнительные преобразования, путем решения задач ***факторизации*** и, возможно, ***декомпозиции*** булевой функции с целью дальнейшего уменьшения цены схемы. Если же критерием эффективности схемы является задержка, то следует иметь в виду, что факторное преобразование и декомпозиция булевой функции, в общем случае, могут уменьшить цену схемы, но всегда увеличивают ее задержку.

В более сложном случае схема оптимизируется по одному из показателей при наличии ограничения на второй. Пример подобной постановки задачи синтеза: синтезировать схему с минимальной ценой по Квайну и с задержкой, не превосходящей величины 4τ.

4. Необходимо учитывать, в каком виде представлены входные сигналы схемы: только в прямом или и в прямом, и в инверсном. В первом случае строится комбинационная схема с ***однофазными*** входами. Во втором случае - с ***парафазными***. В реальных комбинационных схемах входные сигналы представляют собой значение выходов регистров. Например, при построении комбинационного сумматора входные сигналы снимаются с регистров слагаемого. При интегральной реализации регистров в целях минимизации числа выходов интегральной микросхемы выходные сигналы регистров, как правило, представляются только в прямом виде, что делает актуальными схемы с однофазными входами. Если же выходные сигналы регистра представляются в прямом и инверсном виде, то целесообразным является построение КС с парафазными входами.

При построении схем в реальной системе элементов необходимо учитывать ряд конструктивных ограничений, основными из которых являются:

- ***коэффициент объединения по входу***, который представляет собой ограничение на число входов в логический элемент и может принимать значения 2, 3, 4, 8, 16;
- ***коэффициент разветвления по выходам***, определяющий максимальное число логических элементов, которые можно подключить к выходу данного элемента при сохранении условий его нормального функционирования. (Этот коэффициент определяет нагрузочную способность элемента и варьируется от 10 до 30).

5. В реальных системах элементов однотипные элементы объединяются в модули, реализуемые одной интегральной схемой с малым уровнем интеграции. В связи с этим при построении схем в реальной системе элементов необходимо минимизировать не столько число элементов и входов в них, сколько число модулей, из которых компонуется схема.

6. Как правило, в большинстве реальных систем элементов наряду с простыми логическими элементами, реализующими элементарные булевы функции, используются также сдвоенные элементы, реализующие составную булеву функцию. Типичным примером подобного элемента может служить элемент И-ИЛИ-НЕ.

7. В реальных системах элементов, как правило, используется значительное разнообразие логических элементов, относящихся к разным базисам.

Тем не менее, построение схемы в рамках определенного базиса является достаточно актуальной задачей, так как позволяет уменьшить номенклатуру используемых элементов.

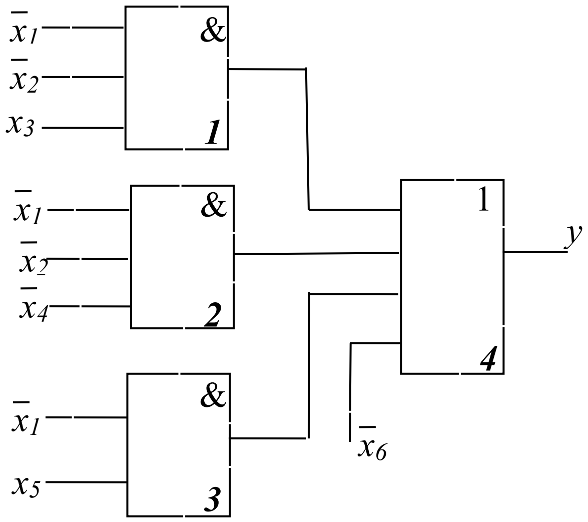
3.6. Построение комбинационных схем по минимальным нормальным формам в различных базисах

3.6.1. Булев базис (И, ИЛИ, НЕ)

Пример 3.3. Построить схему, реализующую функцию:

$$y = \underbrace{\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3}_{\text{И (3)}} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4}_{\text{И (3)}} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_5}_{\text{И (2)}} \vee \bar{x}_6}_{\text{ИЛИ (4)}} \qquad \text{МДНФ.}$$

Построим схему с парафазными входами на элементах булева базиса, реализующую заданную функцию (рис. 3.6).



Цена схемы:
S_Q=3+3+2+4=12,
S^a=9,
S^b=9+4=13,
S^a<S_Q<S^b.

Рис.3.6. Схема с парафазными входами в булевом базисе

В общем случае, задержка схемы с парафазными входами: T=2τ (схема двухуровневая), в частном случае T=1τ. Построим схему с парафазными входами на элементах булева базиса, реализующую заданную функцию (рис. 3.6).

При построении схемы по МКНФ элементами 1-го уровня будут ИЛИ, а 2-го - И.

В общем случае, задержка схемы с однофазными входами составляет T=3τ, а в частных случаях, T=2τ или T=1τ.

Построим схему с однофазными входами на элементах булева базиса, реализующую заданную функцию (рис. 3.7).

Цена схемы:

S_Q=16, S^a=9, S^b=9+4=13,

S^a<S_Q<S^b+ 4 (четыре входных инвертора).

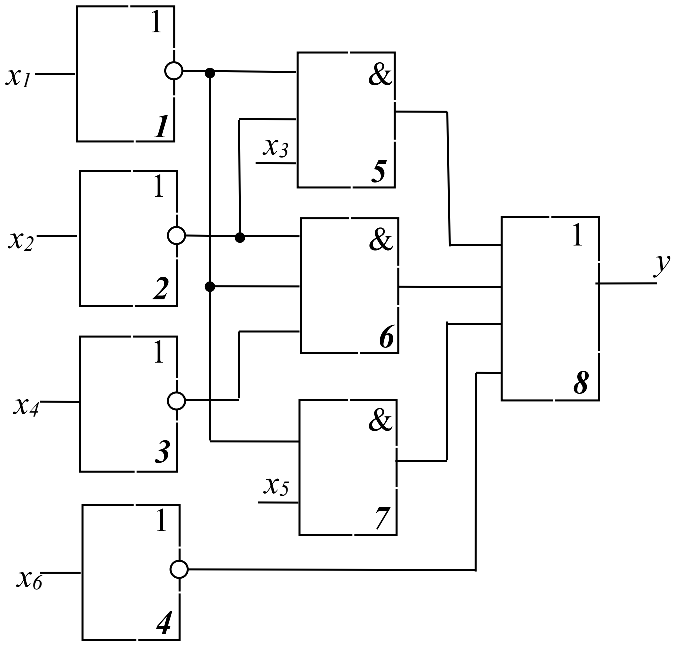


Рис.3.7. Схема с однофазными входами

При построении схемы с однофазными входами целесообразно выбирать такую минимальную форму (если она не единственная), которая содержит наименьшее число инверсий над разными входными переменными.

При наличии единственной минимальной нормальной формы, можно осуществить ее преобразование с использованием законов двойного отрицания и двойственности (Де Моргана).

$$y=\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_1x_5\vee\bar{x}_6}}=\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3}\wedge\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4}\wedge\overline{\bar{x}_1x_5}\wedge x_6}=$$

$$=\underbrace{\overline{\underbrace{\underbrace{(x_1\vee x_2\vee\underbrace{\bar{x}_3}_{\text{НЕ(1)}})}_{\text{ИЛИ(3)}}\underbrace{(x_1\vee x_2\vee x_4)}_{\text{ИЛИ(3)}}\underbrace{(x_1\vee\underbrace{\bar{x}_5}_{\text{НЕ(1)}})}_{\text{ИЛИ(2)}}x_6}_{\text{И(4)}}}}_{\text{НЕ(1)}}.$$

Для реализации этой схемы понадобятся три инвертора.

По сравнению со схемой рис. 3.7. цена уменьшается на единицу (S_Q=15). Однако наличие выходного инвертора приведет к увеличению задержки, T=4τ.

3.6.2. Сокращенный булев базис (И, НЕ)

При использовании этого базиса необходимо из используемого выражения удалить все операции дизъюнкции, заменив их на конъюнкции и отрицания.

Используя предыдущие преобразования, можно построить схему как с парафазными, так и с однофазными входами.

$$y==\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3}\wedge\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4}\wedge\overline{\bar{x}_1x_5}\wedge x_6}\ .$$

Построим схему с парафазными входами в данном базисе (рис.3.8).

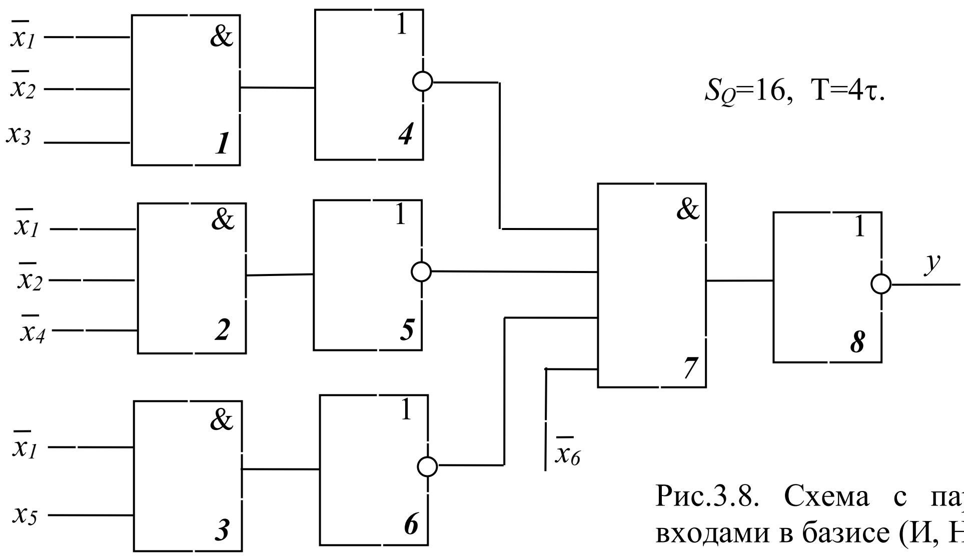


Рис.3.8. Схема с парафазными входами в базисе (И, НЕ)

При построении схемы на элементах базиса (И, НЕ) по МДНФ задержка схемы, в общем случае, составляет T=4τ. А при использовании однофазных входов - T=5τ.

3.6.3. Сокращенный булев базис (ИЛИ, НЕ)

При использовании этого базиса необходимо из выражения удалить все операции конъюнкции, заменив их на дизъюнкции и отрицания.

$$y = \overline{x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3} \vee \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_4} \vee \overline{x_1 \vee \bar{x}_5} \vee \bar{x}_6 .$$

Схема в базисе (ИЛИ, НЕ) приведена на рис 3.8.

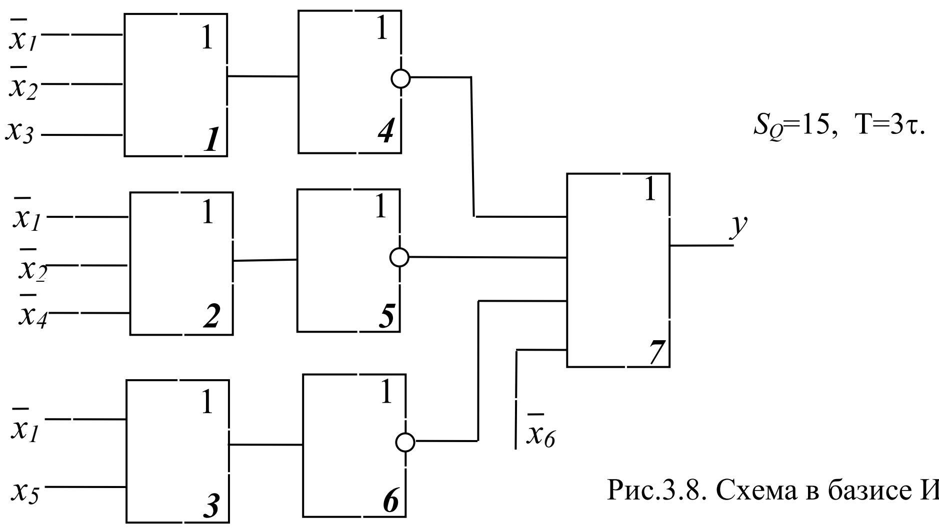
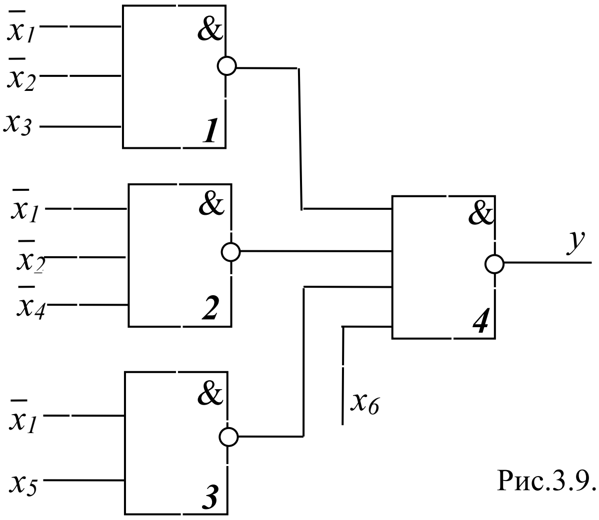


Рис.3.8. Схема в базисе ИЛИ, НЕ

3.6.4. Универсальный базис (И-НЕ)

Для получения выражения в базисе (И-НЕ) воспользуемся выражением, полученном для базиса (И, НЕ).

$$y == \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3} \wedge \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4} \wedge \overline{\bar{x}_1x_5} \wedge x_6} = (\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2 \mid x_3) \mid (\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2 \mid \bar{x}_4) \mid (\bar{x}_1 \mid x_5) \mid x_6$$



S_Q=12, T=2τ.

Рис.3.9. Схема в базисе (И-НЕ)

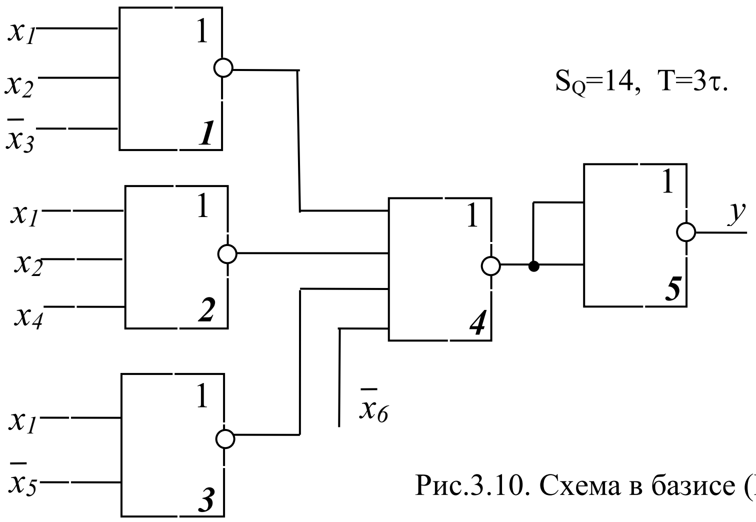
Заметим, что цена по Квайну и задержка схемы, построенной в базисе (И-НЕ), такие же, как и у схемы, построенной в булевом базисе.

3.6.5. Универсальный базис (ИЛИ-НЕ)

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_5 \vee \bar{x}_6 = \overline{\overline{\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3}} \vee \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4}} \vee \overline{\overline{\bar{x}_1x_5}} \vee \bar{x}_6}} =$$

$$= \overline{\overline{\overline{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)} \vee \overline{(x_1 \vee x_2 \vee x_4)} \vee \overline{(x_1 \vee \bar{x}_5)} \vee \bar{x}_6}} =$$

$$= \overline{(x_1 \downarrow x_2 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow (x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_4) \downarrow (x_1 \downarrow \bar{x}_5) \downarrow \bar{x}_6}$$



S_Q=14, T=3τ.

Рис.3.10. Схема в базисе (ИЛИ-НЕ)

Цена по Квайну и задержка схемы, построенной в базисе (ИЛИ-НЕ) (рис.3.10), из-за наличия выходного инвертора больше, чем у схем, построенных в булевом базисе (рис.3.6) и базисе (И-НЕ) (ри.3.9).

3.7. Задача факторизации булевых функций

Факторизация (факторное преобразование) булевой функции сводится к определению общих частей термов и вынесению их за скобки для ДНФ и из скобок для КНФ, что, как правило, приводит к уменьшению цены синтезируемой схемы.

Рассмотрим факторное преобразование булевой функции из примера 3.3.

$$y=\underbrace{\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3}_{\text{И (3)}}\vee\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4}_{\text{И (3)}}\vee\underbrace{\bar{x}_1x_5}_{\text{И (2)}}\vee\bar{x}_6}_{\text{ИЛИ (4)}}=\quad(S_{\mathrm{Q}}=12,\quad \mathrm{T}=2\tau),$$

схема двухуровневая,
поэтому задержка равна 2

вынесем из первых двух термов переменные $\bar{x}_1\bar{x}_2$, получим

$$=\underbrace{\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2(\underbrace{x_3\vee\bar{x}_4}_{\text{ИЛИ(2)}})}_{\text{И (3)}}\vee\underbrace{\bar{x}_1x_5}_{\text{И (2)}}\vee\bar{x}_6}_{\text{ИЛИ (3)}}=\quad(S_{\mathrm{Q}}=10,\ \mathrm{T}=3\tau),\qquad(1)$$

схема трехуровневая,
поэтому задержка равна 3

можно из исходного выражения сначала из трех термов вынести переменную $\bar{x}_1$,

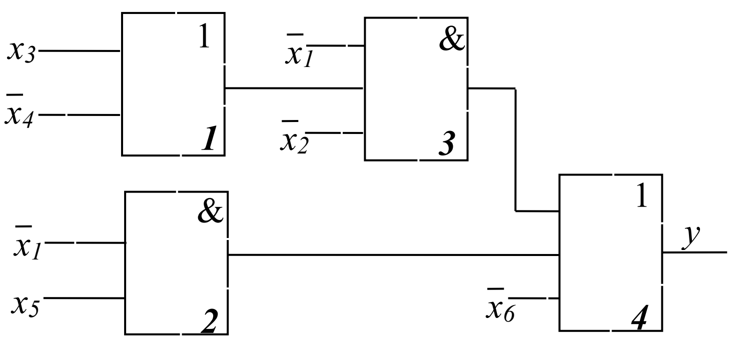
$=\bar{x}_1(\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_4\vee x_5)\vee\bar{x}_6=\quad(S_{\mathrm{Q}}=11,\ \mathrm{T}=4\tau)$, а затем из первых двух термов переменную $\bar{x}_2$,

$$=\bar{x}_1(\bar{x}_2(x_3\vee\bar{x}_4)\vee x_5)\vee\bar{x}_6\quad(S_{\mathrm{Q}}=10,\ \mathrm{T}=5\tau).\qquad(2)$$

Решение задачи факторизации, приводя к уменьшению цены схемы, увеличивает ее задержку. Для рассмотренного примера S_{Q}=10, а Т=3τ и Т=5τ.

В тех случаях, когда схема синтезируется при ограничении на число входов в элементы, например, равное двум, предпочтение следует отдавать скобочной форме (2).

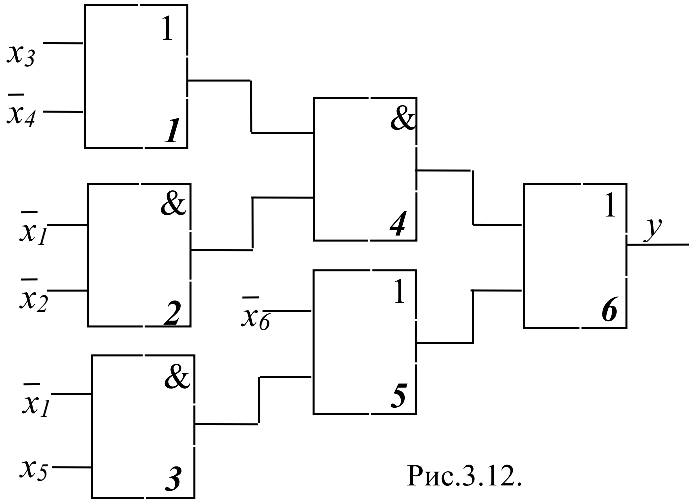
Построим схему по выражению (1) без ограничений на число входов в элементы (рис.3.11).



S_{Q}=10, Т=3τ.

Рис.3.11.

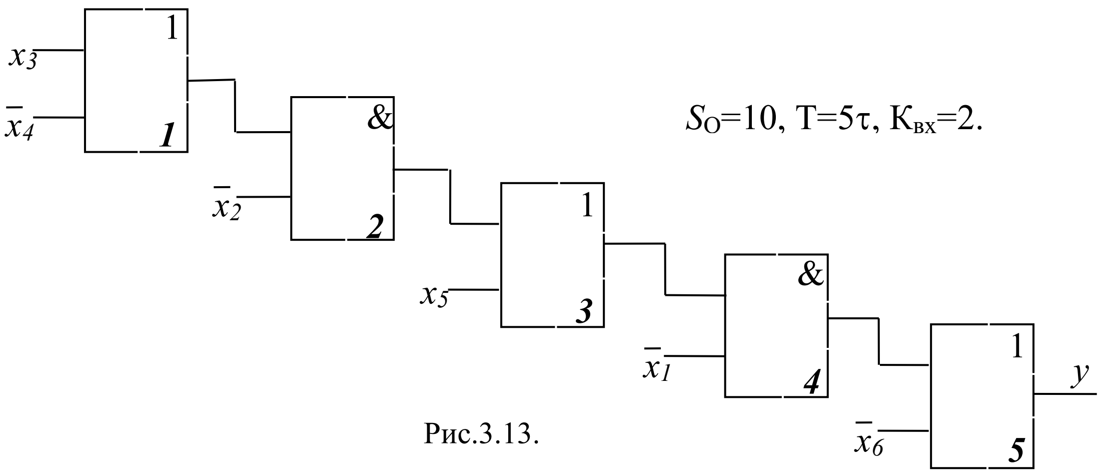
Построим схему по выражению (1) с ограничением на число входов в элементы, равное двум (рис.3.12).



S_Q=12, T=3τ, $К_{вх}$=2.

Рис.3.12.

Построим схему по выражению (2) с ограничением на число входов в элементы, равное двум (рис.3.13).



S_O=10, T=5τ, $К_{вх}$=2.

Рис.3.13.

Схема, построенная по выражению (2) (рис.3.13), по критерию цены схемы является более предпочтительной по сравнению со схемой (рис.3.12), а по критерию минимальной задержки - лучше схема (рис.3.12).

Пример 3.4. Для функции, заданной в МКНФ

$$y = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_5) \qquad (S_Q = 11, T = 2\tau)$$

выполним факторное преобразование. Вынесем из первых двух термов дизъюнкцию $(\bar{x}_1 \vee x_2)$ $\quad y = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_5) = \quad (S_Q = 9,\ T = 3\tau)$, можно вынести из всех термов переменную $\bar{x}_1$

$= \bar{x}_1 \vee (x_2 \vee x_3)(\bar{x}_4 \vee x_2)x_5 = \quad (S_Q = 9,\ T = 3\tau)$, а затем – переменную x_2 из двух

$$= \bar{x}_1 \vee (x_2 \vee x_3\bar{x}_4)x_5 \qquad (S_Q = 8,\ T = 4\tau).$$

3.8. Оценка эффекта факторизации

Этот эффект характеризуется разностью цен схемы до и после факторизации.

Можно показать, что для однократной факторизации ее эффект определяется выражением:

$$\Delta S_Q = S_Q^{\text{до}} - S_Q^{\text{после}} = m\,(k\text{-}1) + q - \Delta\ ,$$

где m - количество букв, выносимых за скобки;
k - количество термов, из которых происходит вынесение;
q - количество термов, в которых после вынесения осталась одна буква ($q \le k$);
Δ=1, если вынесение осуществляется из всех термов;
Δ=2, если не из всех.

<u>*Замечание.*</u> Для эффективного решения задачи факторизации необходимо учитывать следующие моменты:

1. При наличии у булевой функции нескольких минимальных форм целесообразно выбрать из них такие, для которых применение факторизации даст выигрыш в цене схемы.

2. При минимизации не полностью определенной булевой функции может оказаться, что максимальный эффект за счет факторизации дает нормальная форма, не являющаяся минимальной.

Пример 3.5. Рассмотрим минимизацию функции $y=f^4(x)$, которая принимает значение, равное единице на наборах (9, 10, 11) и безразличное значение – на наборах (2, 6, 14) и выполним факторизацию.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00				d
01				d
11				d
10		1	1	1

$$C_{\min}(f)=\begin{Bmatrix}10X1\\XX10\end{Bmatrix}\qquad C(f)=\begin{Bmatrix}10X1\\101X\end{Bmatrix}$$

МДНФ $y=x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4$ $\quad(S_Q=7)$.

ДНФ $y=x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 = x_1\bar{x}_2(x_3 \vee x_4)$ $\quad(S_Q=5)$.

Второе покрытие не минимальное, но эффект от факторизации больше.

3. В некоторых случаях максимального эффекта за счет факторизации можно достичь путем расширения термов МНФ с применением законов тавтологии.

Пример 3.6. Выполним факторизацию булевой функции, заданной в МДНФ

$y= x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_5x_6 \vee x_2x_4x_5x_6=$ $\quad$ (S_Q=18), вынесем из первых двух термов конъюнкцию переменных x_1x_2, аз остальных - x_5x_6:

$= x_1x_2(x_3 \vee x_4) \vee x_5x_6(x_1x_3 \vee x_2x_4)=$ $\quad$ (S_Q=16), расширим дизъюнктивный терм $(x_3 \vee x_4)$ переменными x_1 и x_2:

$= x_1x_2(x_1x_3 \vee x_2x_4) \vee x_5x_6(x_1x_3 \vee x_2x_4)=$ $\quad$ (S_Q=20), вынесем общую дизъюнкцию за скобки:

$= (x_1x_3 \vee x_2x_4)(\ x_1x_2 \vee x_5x_6)$ $\quad$ (S_Q=14).

3.9. Декомпозиция булевых функций

Задача декомпозиции булевой функции в общем случае состоит в таком разделении множества ее аргументов на ряд подмножеств, при котором можно выразить исходную функцию $f(x)$ через вспомогательную промежуточную функцию $\varphi(z)$, где $z \subset x$.

В частном случае, имеет место так называемая простая разделительная декомпозиция, при которой множество аргументов x разделяется на два непересекающихся подмножества ($z,w \rightarrow (z \cap w = \varnothing;\ z \cup w = x)$) и приведение исходной функции к виду $f(x) = f(\varphi\,(z,w))$.

Пример 3.5. Рассмотрим задачу декомпозиции функции от трех переменных: $f^3(x) = \bigvee_{f=1}(1,2,4,7)$. Заметим, что минимальные формы функции совпадают с каноническими.

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

$$f(x) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = \qquad (S_Q=18)$$

$$= \bar{x}_1\underbrace{(\bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3)}_{x_2 \oplus x_3} \vee x_1\underbrace{(\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3)}_{x_2 \sim x_3} \qquad (S_Q=18).$$

Видно, что эффект от факторизации нулевой, но факторизация позволила выделить две обратные булевы функции: неравнозначность и равнозначность. Используем это для декомпозиции.

$$z = \{x_2, x_3\},\ w = \{x_1\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(z) = \bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \\ f(z) = \bar{x}_1\varphi(z) \vee x_1\bar{\varphi}(z) \end{array}\right| \ S_Q = 13$$

Построим схему по полученной системе булевых функций (рис.3.14).

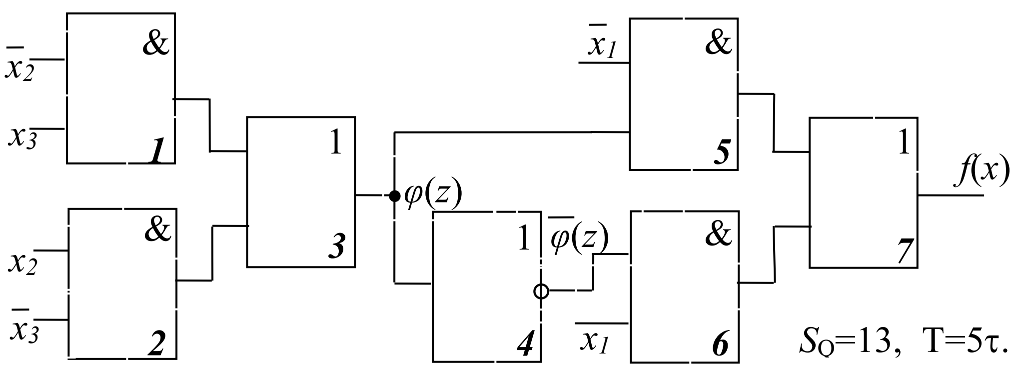
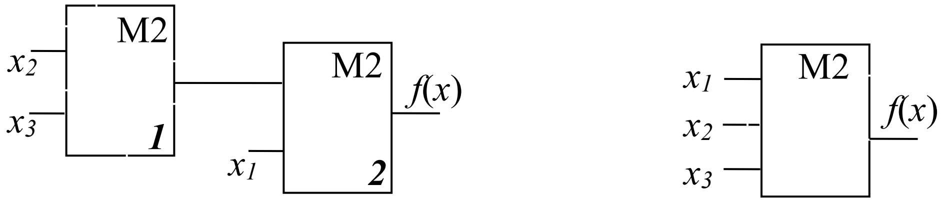


Рис.3.14.

Эту схему с целью уменьшения цены и задержки удобно реализовать в базисе Жегалкина (рис.3.15).



S_Q=4, T=2τ. S_Q=3, T=1τ.

а) б)

Рис.3.15. Схемы в базисах Жегалкина: а) на двухвходовых элементах; б) на трехвходовом элементе

Применение декомпозиции там, где это уместно, во многих случаях позволяет уменьшить цену синтезируемой схемы.

Пример 3.6. Применить факторизацию и декомпозицию к функции

$$y = x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2\bar{x}_5 \vee \bar{x}_3\bar{x}_5 \vee x_4\bar{x}_5 \qquad S_Q = (14).$$

Вынесем из трех последних термов переменную $\bar{x}_5$

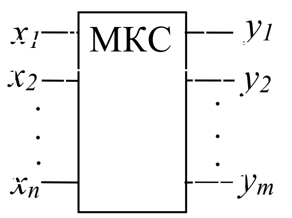
$$= \underbrace{x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4}_{\bar{\varphi}(z)} \vee \bar{x}_5\underbrace{(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)}_{\varphi(z)} \qquad (S_Q = 11).$$

Применим к функции декомпозицию

$$\begin{cases} \varphi(z) = x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \\ f(x) = x_1\bar{\varphi}(z) \vee \bar{x}_5\varphi(z) \end{cases} \qquad (S_Q = 10).$$

3.10. Синтез многовыходных комбинационных схем

Многовыходная комбинационная схема (МКС) представляется в виде обобщенного «черного ящика» (рис.3.16), а закон функционирования МКС представляется в виде системы булевых функций:



$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 = f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ y_m = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}.$$

Рис.3.16. Обобщенное представление МКС

При решении задачи синтеза МКС применяются методы минимизации, факторизации и, возможно, декомпозиции, только не к одной булевой функции, а к системе булевых функций.

3.11. Минимизация системы булевых функций

Задача минимизации применительно к системе булевых функций решается аналогично как для одной функции и сводится к получению минимального покрытия. Для решения этой задачи система функций приводится к одной функции путем дополнения множества аргументов подмножеством вспомогательных переменных, с помощью которых выделяются отдельные функции системы. Количество вспомогательных переменных $k \geq \log_2 m$, где m - количество функций.

Пример 3.7. Решим задачу минимизации системы булевых функций**:**

$$\begin{cases} y_1^3(x) = \vee(2,3,6) \\ y_2^3(x) = \vee(1,3,5). \end{cases}$$

Раздельная минимизация функций системы

Решим задачу минимизации раздельно для каждой функции системы на картах Карно (рис.3.17):

y_1

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0			1	1
1				1

$$C_{\min}(y_1) = \begin{Bmatrix} 01X \\ X10 \end{Bmatrix}$$

y_2

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0		1	1	
1		1		

$$C_{\min}(y_2) = \begin{Bmatrix} 0X1 \\ X01 \end{Bmatrix}$$

МДНФ :

$$\begin{cases} y_1 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 & S_Q^{y_1} = 6 \\ y_2 = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 & S_Q^{y_2} = 6 \end{cases} \quad \Bigg| \; S_Q^{\Sigma} = 12$$

Рис.3.17. Раздельная минимизация функций системы

При построении комбинационной схемы по МДНФ, она распадается на две независимые подсхемы, отдельные для реализаций каждой функции.

Совместная минимизация функций системы

Решим задачу минимизации совместно для обеих функций системы. Приведем систему булевых функций к одной функции от четырех переменных, введя вспомогательную переменную v. Значение переменной v=0 используется для задания y_1, а v=1 - для y_2. Карта Карно для обобщенной функции $Y=(y_1, y_2)$ от четырех переменных: v, x_1, x_2, x_3 приведена на рис.3.18.

$v\,x_1 \backslash x_2\,x_3$	00	01	11	10	
00			1	1	y_1
01				1	y_1
11		1			y_2
10		1	1		y_2

$$C_{\min}(Y) = \begin{Bmatrix} 1X01 \\ 0X10 \\ X011 \end{Bmatrix} \begin{matrix} y_2 \\ y_1 \\ y_1, y_2 \end{matrix}$$

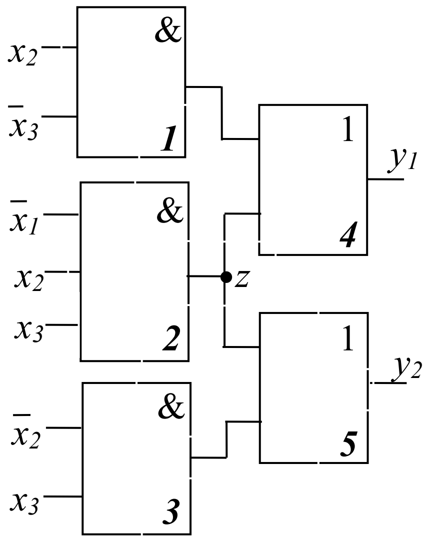
Рис. 3.18. Совместная минимизация функций системы

Минимальное покрытие состоит из трех кубов, первый из которых принадлежит только функции y_2, второй – y_1, а третий обеим функциям. Справа от кубов покрытия отмечается их принадлежность функциям системы.

Сначала выделяют общий терм для обеих функций $z=\bar{x}_1x_2x_3$. Составим минимальные ДНФ для функций системы с учетом общего терма.

$$\left\{\begin{array}{ll} z=\bar{x}_1x_2x_3 & S_Q^z=3 \\ y_1=x_2\bar{x}_3\vee z & S_Q^{y_1}=4 \\ y_2=\bar{x}_2x_3\vee z & S_Q^{y_2}=4 \end{array}\right| \; S_Q^{\Sigma}=11.$$

Сравнение результатов раздельной и совместной минимизаций показывает, что цена после совместной минимизации меньше.



$S_Q=11$, $T_1=T_2=2\tau$.

Рис.3.19. Схема, реализующая систему булевых функций.

Пример 3.8. Выполнить минимизацию системы булевых функций**:**

$$\begin{cases} y_1=\vee(3,5,6,7) \\ y_2=\vee(0,1,6,7) \\ y_3=\vee(0,2,7) \\ y_4=\vee(0,2,4,5,6,7) \end{cases}$$

Введем вспомогательные переменные:

$v_1v_2=00$ y_1
$v_1v_2=01$ y_2
$v_1v_2=10$ y_3
$v_1v_2=11$ y_4

Выполним совместную минимизацию функций системы (рис. 3.20).

После получения минимального покрытия, с целью удобства, рядом с каждым кубом покрытия рекомендуется проставить его принадлежность функциям системы.

При совместной минимизации булевых функций может оказаться, что некоторые кубы поглощаются другими, т.е. после получения минимальной формы следует проверить необходимость использования каждого общего куба для покрытия отдельных функций.

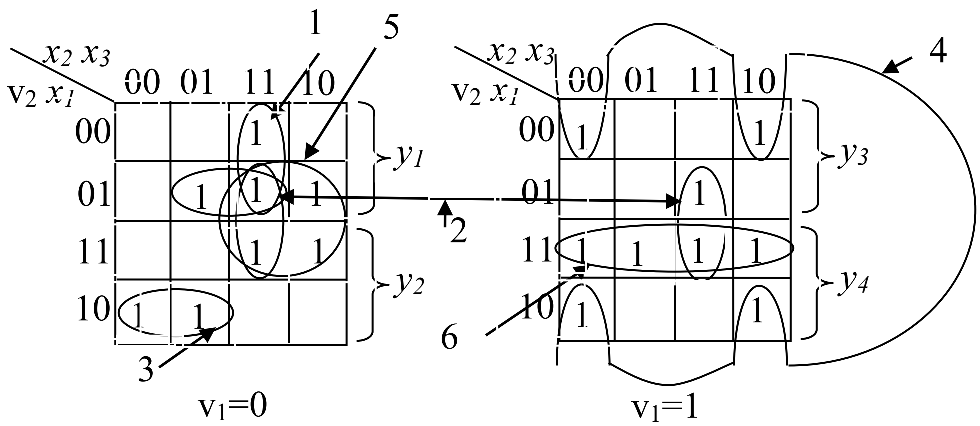


Рис. 3.20. Совместная минимизация функций системы

$$Y=(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$C_{\min}(Y)=\left(\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6 \end{array}\left\{\begin{array}{cc|ccc} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0 & 0 & X & 1 & 1 \\ X & X & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X \\ 1 & X & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 1 & 1 & X \\ 1 & 1 & 1 & X & X \end{array}\right\}\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \\ y_2 \\ y_3, y_4 \\ y_1, y_2 \\ y_4 \end{array}\right)$$

Заметим, что второй куб, покрывающий вершины всех функций системы, на самом деле, соответствует простой импликанте только для функции y_3, а вершины остальных функций покрыты другими кубами. Поэтому принадлежность кубов функциям можно записать следующим образом:

$$Y=(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$C_{\min}(Y)=\left(\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6 \end{array}\left\{\begin{array}{cc|ccc} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0 & 0 & X & 1 & 1 \\ X & X & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X \\ 1 & X & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 1 & 1 & X \\ 1 & 1 & 1 & X & X \end{array}\right\}\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_3, y_4 \\ y_1, y_2 \\ y_4 \end{array}\right)$$

Общие термы:

$$z_1=\bar{x}_1\bar{x}_3$$

$$z_2=x_1x_2$$

$$\left\{\begin{array}{ll} z_1 = \bar{x}_1\bar{x}_3 & S_Q^{z_1} = 2 \\ z_2 = x_1x_2 & S_Q^{z_2} = 2 \\ y_1 = x_2x_3 \vee z_2 & S_Q^{y_1} = 4 \\ y_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee z_2 & S_Q^{y_2} = 4 \\ y_3 = x_1x_2x_3 \vee z_1 & S_Q^{y_3} = 5 \\ y_4 = z_1 \vee x_1 & S_Q^{y_4} = 2 \end{array}\right| \quad S_Q^{\Sigma} = 19$$

При введении вспомогательных переменных следует учитывать, что кодирование функций системы влияет на результат минимизации. И для похожих функций следует использовать соседнее кодирование. Так, если функции системы обозначить:

$v_1v_2=00$ y_3
$v_1v_2=01$ y_1
$v_1v_2=10$ y_2
$v_1v_2=11$ y_4,

то после совместной минимизации $S_Q^{\Sigma} = 24$.

При записи минимальных форм сначала выделяются термы, общие для нескольких функций и обозначаются вспомогательными функциями (z_1, z_2 и т.д.).

Далее выписываются минимальные формы для отдельных функций с учетом их собственных термов и общих термов, принадлежащих данной функции.

Если число функций не равно 2^k, где k=1, 2. …, то появляются незадействованные комбинации вспомогательных переменных и все наборы аргументов для них являются безразличными. Безразличные наборы аргументов используются для минимизации.

Пример 3.9. Рассмотрим систему булевых функций**:**

$$\begin{cases} y_1 = \vee(0,1,6,7) \\ y_2 = \vee(0,2,7) \\ y_3 = \vee(3,5,6,7) \end{cases}$$

Введем вспомогательные переменные:

$v_1v_2=00$ y_1
$v_1v_2=01$ y_2
$v_1v_2=10$ y_3
$v_1v_2=11$ d

Выполним совместную минимизацию функций системы на картах Карно (рис. 3.21):

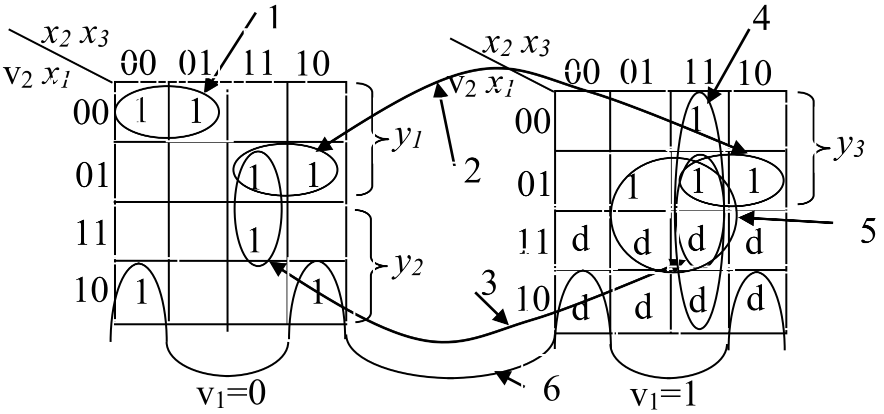


Рис. 3. 21. Минимизация функций системы

$$Y=(y_1, y_2, y_3)$$

$$C_{\min}(Y)=\begin{array}{r}
\\
1\\
2\\
3\\
4\\
5\\
6
\end{array}
\left\{\begin{array}{ccc|ccc}
v_1 & v_2 & & x_1 & x_2 & x_3\\
\hline
0 & 0 & & 0 & 0 & X\\
X & 0 & & 0 & 1 & X\\
X & X & & 1 & 1 & 1\\
1 & X & & X & 1 & 1\\
1 & X & & 1 & X & 1\\
X & 1 & & 0 & X & 0
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\\
y_1\\
y_1, y_3\\
y_1, y_2, y_3\\
y_3\\
y_3\\
y_2
\end{array}$$

Общие термы:

$$z_1=\bar{x}_1 x_2$$
$$z_2=x_1 x_2 x_3$$

Заметим, что третий куб, покрывающий вершины всех функций системы, на самом деле, соответствует простой импликантам только для функции y_1 и y_2, а вершины функции y_3 покрыты другими кубами.

$$\left\{\begin{array}{ll}
z_1=\bar{x}_1 x_2 & S_Q^{z_1}=2\\
z_2=x_1 x_2 x_3 & S_Q^{z_2}=3\\
y_1=z_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee z_2 & S_Q^{y_2}=5\\
y_2=\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee z_2 & S_Q^{y_3}=4\\
y_3=z_1 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 & S_Q^{y_4}=7
\end{array}\right| \quad S_Q^{\Sigma}=21$$

<u>*Замечание.*</u> Для большого числа функций от многих аргументов применение карт Карно для совместной минимизации выглядит затруднительным. В этом случае можно использовать следующие подходы:

1. применение машинных методов;
2. раздельная минимизация и использование карт Карно;
3. выделение подмножеств из функций системы для их совместной минимизации.

3.12. Факторизация системы булевых функций

Применительно к системе булевых функций ***задача факторизации*** состоит в выделении общих термов или их частей для отдельных функций системы с целью уменьшения цены схемы, реализующей эту систему. Сходная задача уже решается при совместной минимизации функций системы при выделении общих термов для минимальных форм булевых функций системы, когда некоторые кубы покрытия системы являлись общими для нескольких функций, однако, совместная минимизация не исключает применения дальнейшей факторизации. Особенно актуальной задача факторизации становится при раздельной минимизации функций системы. Совместная факторизация функций системы не исключает раздельной факторизации в рамках каждой функции.

Пример 3.10. Выполним факторизацию системы булевых функций**:**

$$\begin{cases} y_1 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 x_4 & S_Q^{y_1} = 8 \\ y_2 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 & S_Q^{y_2} = 8 \end{cases} \quad \Bigg| \; S_Q^{\Sigma} = 16$$

Введем общий терм z:

$$\begin{cases} z = \bar{x}_3 x_4 & S_Q^{z} = 2 \\ y_1 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 z & S_Q^{y_1} = 7 \\ y_2 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_5 z & S_Q^{y_2} = 7 \end{cases} \quad \Bigg| \; S_Q^{\Sigma} = 16$$

Эффект факторизации системы булевых функций – нулевой. Проведем раздельную факторизацию:

$$\begin{cases} z = \bar{x}_3 x_4 & S_Q^{z} = 2 \\ y_1 = x_1 (x_2 x_3 \vee z) & S_Q^{y_1} = 6 \\ y_2 = \bar{x}_5 (x_1 \bar{x}_2 \vee z) & S_Q^{y_2} = 6 \end{cases} \quad \Bigg| \; S_Q^{\Sigma} = 14$$

В результате раздельной факторизации цена схемы уменьшилась на два. Эффект возник в результате того, что в выражениях функций переменные выносились из всех термов и после вынесения появились однобуквенные термы. Заметим, что раздельная факторизация исходной системы эффекта бы не дала.

Пример 3.11. Для функции примера 3.8. проведем факторизацию функции y_3. Получим:

$$\begin{cases} z_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 & S_Q^{z_1} = 2 \\ z_2 = x_1 x_2 & S_Q^{z_2} = 2 \\ y_1 = x_2 x_3 \vee z_2 & S_Q^{y_1} = 4 \\ y_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee z_2 & S_Q^{y_2} = 4 \\ y_3 = z_2 x_3 \vee z_1 & S_Q^{y_3} = 4 \\ y_4 = z_1 \vee x_1 & S_Q^{y_4} = 2 \end{cases} \quad \Bigg| \; S_Q^{\Sigma} = 18$$

Замечание. Порядок проведения двух видов факторизации совместной и раздельной в большинстве случаев безразличен.

3.13. Декомпозиция системы булевых функций

Декомпозиция системы булевых функций – представляет собой выражение одних функций через другие. В некоторых случаях декомпозиция позволяет уменьшить цену комбинационной схемы дополнительно к решению задач минимизации и факторизации

Пример 3.12. Синтезировать комбинационную схему одноразрядного сумматора с однофазными входами.

Одноразрядный комбинационный сумматор выполняет функцию сложения одноименных двоичных разрядов многоразрядных слагаемых. Сложение в каждом k-ом разряде n-разрядных слагаемых осуществляется с учетом переноса из предыдущего (k - 1)-го младшего разряда (k=1, 2, …, n-1). Результатами сложения одноразрядных двоичных чисел являются значение суммы в k-ом разряде и переноса из k-ого разряда в следующий (k+1)-ый старший разряд.

Обобщенное представление одноразрядного комбинационного сумматора приведено на рис.3.18.

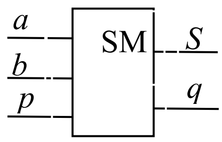


Рис.3.18. Условно-графическое изображение одноразрядного сумматора

Входными переменными сумматора являются:
a, b – слагаемые и p – перенос из предыдущего разряда.
Выходными переменными являются:
S – сумма и q – перенос в следующий разряд.

Замечание. Для младшего разряда сумматора при отсутствии в нем цепи циклического переноса, которая передает перенос из старшего разряда сумматора в младший и используется при сложении в обратном коде, вход p может отсутствовать, либо на него подается значение p=0.

Закон функционирования одноразрядного сумматора представляется в виде следующей системы булевых функций:

$$\begin{cases} S = S(a,b,p) \\ q = q(a,b,p) \end{cases}$$

В соответствии с принципами двоичного сложения составим таблицу истинности синтезируемой схемы (табл. 3.1).

a	*b*	*p*	*S*	*q*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Таблица 3.1. Таблица истинности одноразрядного сумматора

Прежде чем показать преимущества применения декомпозиции, предварительно решим задачи минимизации и факторизации применительно к системе функций.

Раздельная минимизация

На рис. 3.19 показаны результаты раздельной минимизации функций системы на картах Карно.

S

$a \backslash bp$	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

q

$a \backslash bp$	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

Рис. 3.19. Раздельная минимизация функций системы

$$\begin{cases} S = \bar{a}\bar{b}p \vee \bar{a}b\bar{p} \vee a\bar{b}\bar{p} \vee abp & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{S} = 16 \\ q = bp \vee ap \vee ab & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{q} = 9 \end{cases} \quad \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 25$$

Раздельная факторизация

Решим задачу факторизации применительно к функциям системы, вынося общие термы (в данном примере они однобуквенные) за скобки:

$$\begin{cases} S = p(\bar{a}\bar{b} \vee ab) \vee \bar{p}(\bar{a}b \vee a\bar{b}) & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{S} = 18 \\ q = p(a \vee b) \vee ab & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{q} = 8 \end{cases} \quad \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 26$$

За счет раздельной факторизации цена схемы, реализующей функцию переноса – q, уменьшилась на единицу, а цена схемы, реализующей функцию суммы – S, увеличилась на два, так что для системы функций $\{S, q\}$ факторизация оказалась невыгодна. Тем не менее, факторизованная функция S позволяет применить к ней декомпозицию (по аналогии с примером 3.5 в разделе 3.9), так как выражения в скобках взаимно инверсны.

Обозначим первую скобку в скобочной форме функции S вспомогательной переменной z. С учетом того, что вторая скобка представляет собой инверсию переменной z, выражение для системы функций $\{S, q\}$ примет вид:

$$\left\{\begin{array}{ll} z = \bar{a}\bar{b} \vee ab, \quad (\bar{z} = \bar{a}b \vee a\bar{b}) & S_Q^{z_1, z_2} = 7 \\ S = pz \vee \bar{p}\bar{z} & \mathrm{S_Q^S} = 6 \\ q = p(a \vee b) \vee ab & \mathrm{S_Q^q} = 8 \end{array}\right| \mathrm{S_Q^\Sigma} = 21 \qquad (3)$$

По сравнению с результатом раздельной факторизации функций системы $\{S, q\}$ последняя декомпозиция функции S позволила существенно уменьшить цену схемы.

Нетрудно заметить, что в системе функций (3) имеются:

- во-первых, общий член ab для вспомогательной функции z и функции переноса – q;
- во-вторых, во вспомогательной функции z имеется конъюнктивный терм $a \vee b$, содержащийся также в функции q.

С учетом этого введем еще две вспомогательные функции: $z_1 = ab$ и $z_2 = \bar{a}\bar{b}$, переобозначив переменную z из системы (3) на z_3. В результате система функций (3) приводится к следующему виду:

$$\left\{\begin{array}{ll} z_1 = ab & \mathrm{S_Q^{z_1}} = 2 \\ z_2 = \bar{a}\bar{b} \quad \bar{z}_2 = a \vee b & \mathrm{S_Q^{z_2\bar{z}_2}} = 3 \\ z_3 = z_1 \vee z_2 \quad \bar{z}_3 = \bar{z}_1\bar{z}_2 & \mathrm{S_Q^{z_3\bar{z}_3}} = 3 \\ S = pz_3 \vee \bar{p}\bar{z}_3 & \mathrm{S_Q^S} = 6 \\ q = p\bar{z}_2 \vee z_1 & \mathrm{S_Q^q} = 4 \end{array}\right| \mathrm{S_Q^\Sigma} = 18 \qquad (4)$$

В результате проведенных действий цена комбинационной схемы уменьшилась до 18.

Декомпозиция системы булевых функций

Из таблицы истинности и карт Карно видно, что функции S и q принимают различные значения на всех наборах аргументов, кроме двух (000) и (111). Причем, на нулевом наборе они равны нулю, а на единичном наборе – единице.

Таким образом, для шести наборов аргументов справедливо:

$S = \bar{q}$, то есть можно выразить более сложную по схемной реализации функцию S через более простую по реализации функцию q.

Для того, чтобы учесть равенство нулю значений функций на нулевом наборе аргументов, необходимо сделать конъюнктивное дополнение функции S конституентой нуля для нулевого набора:

$$S = \bar{q}(a \vee b \vee p) \qquad (5)$$

За счет такого дополнения на нулевом наборе аргументов конституена нуля $a \vee b \vee p$ принимает значение , равное нулю, и значение функции S также будет равно нулю. Для остальных наборов аргументов конституена $a \vee b \vee p$ будет равна единице и, следовательно, $S = \bar{q}$, что справедливо для всех оставшихся наборов аргументов, кроме (111).

Для исправления значения функции S на единичном наборе необходимо в выражении (5) сделать дизъюнктивное дополнение функции конституентой единицы abp для единичного набора.

Таким образом применение декомпозиции позволяет представить систему функций (S, q) в следующем виде:

$$\begin{cases} q = p(a \vee b) \vee ab & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{q} = 8 \\ S = \bar{q}(a \vee b \vee p) \vee abp & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{S} = 11 \end{cases} \quad \Bigg| \; \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 19$$

.

Выполним совместную факторизацию функций системы:

$$\begin{cases} z_1 = a \vee b & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{z_1} = 2 \\ z_2 = ab & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{z_2} = 2 \\ q = pz_1 \vee z_2 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{q} = 4 \\ S = \bar{q}(z_1 \vee p) \vee z_2 p & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{S} = 9 \end{cases} \quad \Bigg| \; \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 17$$

Цена схемы по сравнению с выражением (4) уменьшилась на единицу.

Построим схему одноразрядного сумматора на элементах булева базиса с однофазными входами (рис.3.20).

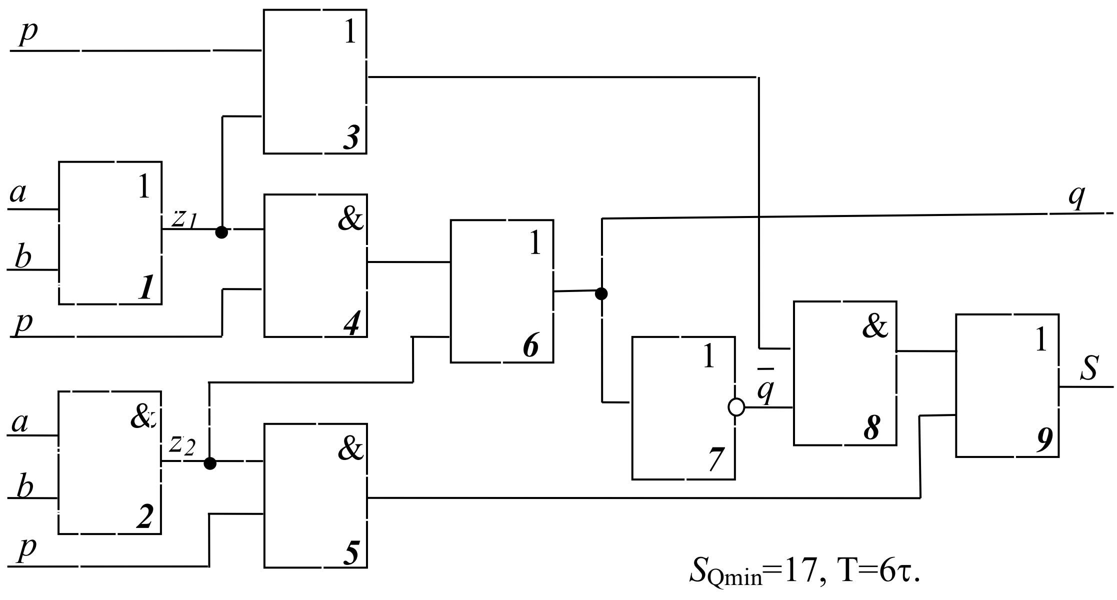


Рис.3.20. Схема одноразрядного комбинационного сумматора

Сформулируем общие принципы декомпозиции применительно к двум функциям y_1 и y_2, входящим в некоторую систему функций.

1. Применение декомпозиции, которая сводится к выражению одной функции через другую, может оказаться целесообразным только в том случае, если функции y_1 и y_2 оказываются либо очень похожими (принимают одинаковые значения почти на всех наборах аргументов), либо практически противоположными (принимают одинаковые значения на небольшом множестве наборов аргументов).

2. За исходную функцию из двух следует выбирать ту, которая обладает меньшей ценой схемной реализации (в дальнейшем будем считать, что такой функцией является y_2).

3. Для похожих функций исходным является равенство $y_1 = y_2$, а для почти противоположных – равенство $y_1 = \bar{y}_2$.

4. Для исправления исходного равенства на значение $y_1 = 0$ для наборов аргументов X_0 производится конъюнктивное дополнение правой части исходного равенства конституентами нуля для этих наборов.

5. Для исправления исходного равенства на значение $y_1 = 1$ для наборов аргументов X_1 производится дизъюнктивное дополнение правой части исходного равенства конституентами единицы для этих наборов.

Пример 3.13. Функции y_1 и y_2 от четырех переменных принимают одинаковые значения на всех наборах аргументов, кроме (0011), (0101) и (1110), причем функция y_1 на первом из них равна единице, на двух других равна нулю. Выразить функцию y_1 через y_2 и функцию y_2 через y_1.

1. Дополним правую часть исходного равенства $y_1 = y_2$ конституентами нуля для наборов (0101) и (1110) и конституентой единицы для набора (0011). Получим:

$$y_1 = y_2(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4.$$

2. Дополним правую часть исходного равенства $y_2 = y_1$ конституентами нуля для набора (0011) и конституентами единицы для наборов (0101) и (1110). Получим:

$$y_2 = y_1(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4.$$

Контрольные вопросы и задачи

1. В чем состоит отличие между комбинационной и последовательностной логическими схемами? (2 балла)
2. В чем состоит отличие между позитивным и негативным кодированием двоичного сигнала? (2 балла)
3. Дать оценку нижней и верхней границы цены по Квайну для схемы с однофазными входами, построенной на элементах базиса (ИЛИ, НЕ) по минимальной КНФ. (Примечание: оценка должна содержать цены минимального покрытия – S^a и S^b.) (5 баллов)
4. В отношении минимального нулевого покрытия сформулировать условия, при которых цена схемы с однофазными входами, построенная на элементах булева базиса по минимальной КНФ, будет совпадать с ценой покрытия S^b. (4 балла)
5. Применительно к минимальной ДНФ сформулировать условия, при которых схема с однофазными входами, построенная на элементах базиса (И, НЕ) по этой форме, будет иметь задержку T = 3t, где t – задержка на одном логическом элементе. (4 балла)
6. В отношении минимальной КНФ сформулировать условия, при которых схема с однофазными входами, построенная на элементах булева базиса по этой форме будет иметь задержку T = 3t, где t – задержка на одном логическом элементе. (4 балла)
7. Сформулировать условия, при которых вынесение одной буквы за скобки из термов минимальной КНФ приводит к уменьшению цены схемы, (5 баллов) и проиллюстрировать их примерами. (2 балла за каждый пример)
8. В любом ли случае вынесение за скобки двух букв из двух термов минимальной ДНФ приводит к уменьшению цены схемы? Ответ обосновать и сопроводить поясняющими примерами. (6 баллов)
9. Построить схему, реализующую функцию равнозначности $(y = x_1 \sim x_1)$ на элементах ИЛИ-НЕ и обладающую минимальной ценой. (3 балла)
10. Построить схему с однофазными входами, реализующую функцию $y = (x_1 \vee \overline{x_3})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_3} \vee x_5)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$ на элементах базиса (ИЛИ, НЕ) и обладающую минимальной ценой. (5 баллов) Определить цену и задержку схемы. (1 балл)
11. Построить схему с парафазными входами, реализующую функцию из вопроса 10 на элементах базиса (И, НЕ) и обладающую минимальной задержкой. (4 балла) Определить цену и задержку схемы. (1 балл)

12. Построить схему с однофазными входами, реализующую функцию $y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \cdot \overline{x_5}$ на двухвходовых элементах И-НЕ и содержащую минимальное количество элементов. (5 баллов)

13. Построить схему, реализующую конъюнкцию шести переменных на двухвходовых элементах ИЛИ-НЕ. (5 баллов)

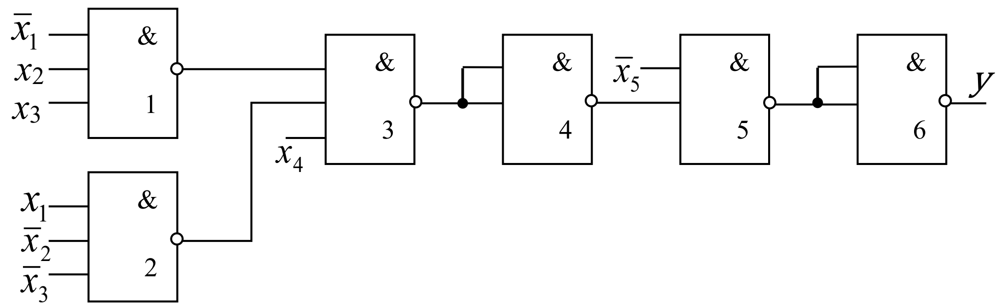
14. Применительно к схеме с парафазными входами, построенной на элементах булева базиса, сформулировать условия, при которых эквивалентное преобразование в базис И-НЕ приводит к изменению цены схемы. (3 балла)

15. Построить схему с парафазными входами, реализующую систему булевых функций от трех переменных:

$y_1 = \vee(1, 2, 5, 6, 7), y_2 = \vee(1, 3, 4, 5, 6), y_3 = \vee(0, 1, 2, 4, 6), y_4 = \vee(0, 2, 5, 6, 7)$ на элементах булева базиса и обладающую минимальной ценой по Квайну. (15 баллов) Определить цену и задержку схемы (2 балла)

16. Булевы функции $y_1 = f^4(x)$ и $y_2 = f^4(x)$ принимают противоположные значения на всех наборах аргументов, кроме (1110) и (1100), на которых значения функций совпадают и равны единице и нулю соответственно. Решить задачу декомпозиции применительно к системе функций (y_1, y_2), выразив функцию y_1 через y_2, (2 балла) а также y_2 через y_1. (2 балла)

17. Определить функцию, реализуемую схемой. (4 балла)



Определить реакцию схемы на входной набор (10101). (2 балла) Преобразовать схему к двухвходовому базису (ИЛИ-НЕ) с минимальной ценой. (6 баллов)

18. Булева функция $y=f^4(x)$ принимает значение, равное нулю, на наборах (3, 5, 8, 10, 13) и безразличное значение – на наборах (1, 4, 7, 14). Построить схему с парафазными входами, реализующую данную функцию на элементах базиса И-НЕ и обладающую минимальной ценой. (20 баллов) Определить реакцию схемы на одном из безразличных наборов и пояснить ее. (3 балла)

Вопросы к рубежному контролю

1. Что понимается под свойством симметричности отношения? Привести пример антисимметричного отношения, на котором показать наличие этого свойства.
2. Является ли отношение равенства двух треугольников транзитивным? Утверждение доказать.
3. Записать законы поглощения. В чем состоит свойство их дуальности? Доказать один из них.
4. Записать законы склеивания. В чем состоит свойство их дуальности? Доказать один из них.
5. Для множества $\boldsymbol{B}=\{0, 1\}$ найти $\boldsymbol{B}^3$ – третью декартову степень.
6. Записать дистрибутивные законы для операции прямого произведения множеств.
7. Что понимается под конституентой единицы? (2). Записать все конституенты единицы для функции $y = x_1 \mid \bar{x}_2$.
8. Действуют ли дистрибутивные законы в алгебре Жегалкина (для операций конъюнкции и сложения по модулю два)? Ответ обосновать.
9. Что понимается под сокращенной ДНФ (СДНФ) булевой функции? Найти СДНФ функции $y=f^3(x)=\&(0, 2, 5)$. Является ли найденная СДНФ и минимальной ДНФ? Ответ обосновать.
10. Что понимается под самодвойственной булевой функцией? Перечислить все несамодвойственные базовые булевы функции .
11. В чем состоит отличие между комбинационной и последовательностной схемами?
12. Действует ли сочетательный закон в отношении операции сумма по модулю два, стрелка Пирса?
13. Действует ли распределительный закон в алгебре Жегалкина?
14. Как выглядят законы тавтологии и законы с константами в различных базисах?
15. Можно ли построить двоичную алгебру на основе единственной операции импликации?
16. Является ли выражение $X_1 \vee \overline{X}_2 \vee \overline{X}_3$ нормальной формой и, если является, то какай (ДНФ или КНФ)? Можно ли рассматривать это выражение в качестве канонической формы и, если можно, то какой (КДНФ или ККНФ) и при каких условиях?
17. Сформулировать условия (в отношении покрытия), а также соответствующей ему нормальной формы, при которых:
a) $S_Q = S^a$;
b) $S_Q = S^b$;
c) $S^a < S_Q < S^b$.
18. Может ли СДНФ совпадать с КДНФ и, если может, то при каких условиях?

19.Можно ли считать, что СДНФ является МДНФ и, если можно, то, при каких условиях?
20.Может ли КДНФ являться МДНФ и, если может, то при каких условиях?
21.Привести примеры булевой функции от трех или четырех переменных для которых:
a) МДНФ совпадает с КДНФ, а МКНФ не совпадает с ККНФ;
b) МКНФ совпадает с ККНФ, а МДНФ не совпадает с КДНФ;
c) Обе формы совпадают с каноническими.
22.Сформулировать условия, при которых схема вырождается в одноуровневую.
23.Оценить нижнюю и верхнюю границу цены схемы с однофазными входами, построенную по МНФ.
24.Сформулировать условия, приводящие к вырожденным случаям T=1t и T=2t.
25.Может ли задержка схемы после применения однократной факторизации быть такой же, как и до факторизации (условия и пример)?
26.Сформулировать условия целесообразности вынесения за скобки одной или двух букв из двух термов.
27.Сформулировать условия целесообразности вынесения за скобки одной или двух букв из произвольного числа термов.

Литература

О с н о в н а я

1. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматгиз, 1962.–476 с.
2. Миллер Р. Теория переключательных схем. Т.1. Комбинационные схемы: Пер. с англ. – М. Мир, 1970. – 416 с.
3. Савельев А.Я. Прикладная теория цифровых автоматов. – М.: Высш. шк., 1987. – 272 с.
4. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем. – М.: “Энергия”, 1974. – 368 с.
5. Скорубский В.И. Арифметические и логические основы цифровых машин: учебн. пособие. – Л.: Лен. ин-т точной механики и оптики, 1980. – 60 с.
6. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Дискретная математика. Учебник/ Под ред. В.М.Курейчика. – Таганрог: Изд. ТТИ ЮФУ, 2011. –494 с.
7. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. Изд.6, стереотипное Учебное пособие. 6-е изд., стер. — СПб.: Изд. «Лань», 2009. – 400 с.

Д о п о л н и т е л ь н а я

1. Проектирование цифровых вычислительных машин / С.А. Майоров, Г.И.Новиков, О.Ф. Немолочнов и др.: Под ред. С.А. Майорова. – М.: Высш.шк., 1972. – 344 с.
2. Лысиков Б.Г. Арифметические и логические основы цифровых автоматов. – Минск: Вышэйшая школа, 1980. – 386 с.
3. Майоров С.А., Новиков Г.И. Структура цифровых вычислительных машин. – Л.: Машиностроение, 1970. – 375 с.
4. Баранов С.И. Синтез микропрограммных автоматов. – Л.: “Энергия”, 1974. – 216 с.
5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. 3-е изд. СПб.:Питер, 2009.–383 с.
6. Мальцев И.А. Дискретная математика. СПб.:Изд. "Лань", 2011. – 304 с.
7. Шевелев Ю.П. Дискретная математика. СПб.:Изд. "Лань", 2008. – 592 с.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Кафедра вычислительной техники СПбГУ ИТМО создана в 1937 году и является одной из старейших и авторитетнейших научно-педагогических школ России. Заведующими кафедрой в разное время были выдающиеся деятели науки и техники М.Ф. Маликов, С.А. Изенбек, С.А. Майоров, Г.И. Новиков. Многие поколения студентов и инженеров в Советском Союзе и за его пределами изучали вычислительную технику по учебникам С.А. Майорова и Г.И. Новикова, О.Ф. Немолочного, С.И. Баранова, В.В. Кириллова и А.А. Приблуды, Б.Д.Тимченко и др.

Основные направления учебной и научной деятельности кафедры в настоящее время включают в себя встроенные управляющие и вычислительные системы на базе микропроцессорной техники, информационные системы и базы данных, сети и телекоммуникации, моделирование вычислительных систем и процессов, обработка сигналов.

Выпускники кафедры успешно работают не только в разных регионах России, но и во многих странах мира: Австралии, Германии, США, Канаде, Германии, Индии, Китае, Монголии, Польше, Болгарии, Кубе, Израиле, Камеруне, Нигерии, Иордании и др. Выпускник, аспирант и докторант кафедры ВТ Аскар Акаев был первым президентом Киргизии.

Павел Семенович Довгий
Владимир Иванович Поляков
Владимир Иванович Скорубский

Основы теории множеств и приложение булевой алгебры к синтезу комбинационных схем

Учебное пособие по дисциплине
«Дискретная математика»

В авторской редакции
Дизайн В.И. Поляков
Верстка В.И. Поляков
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати
Заказ №
Тираж 250 экз.
Отпечатано на ризографе