

$$= \operatorname{Im} e^{i\frac{n+1}{2}\varphi} \cdot \frac{e^{i\frac{n}{2}\varphi} - e^{-i\frac{n}{2}\varphi}}{2i} \cdot \frac{2i}{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \cdot \operatorname{Im} e^{i\frac{n+1}{2}\varphi} = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \sin \frac{n+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Задачи

Вычислить суммы:

1) $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos n\varphi$

Ответ: $\frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{n+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$

2) $\sin \varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \dots + \sin(2n-1)\varphi$

Ответ: $\frac{\sin^2 n\varphi}{\sin \varphi}.$

1.4 Многочлены и алгебраические уравнения

Многочленом (полиномом) n -ой степени называется функция вида

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (1.8)$$

где $z \in \mathbb{C}$, a_0, a_1, \dots, a_n — коэффициенты (вообще говоря, комплексные), причем $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Уравнение

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0, \quad (1.9)$$

называется алгебраическим уравнением n -ой степени.

Основная теорема алгебры

Всякий многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень (вообще говоря, комплексный).

Число z_0 является корнем многочлена $p_n(z)$ в том и только в том случае, когда $p_n(z)$ делится без остатка на бином $z - z_0$, то есть представим в виде:

$$p_n(z) = (z - z_0)q_{n-1}(z),$$

где $q_{n-1}(z)$ — многочлен $(n-1)$ -й степени. Если $p_n(z)$ делится без остатка на $(z - z_0)^k$, $k \geq 1$, но не делится на $(z - z_0)^{k+1}$, то z_0 называется *корнем кратности k* многочлена $p_n(z)$. При этом $p_n(z)$ можно представить в виде:

$$p_n(z) = (z - z_0)^k q_{n-k}(z), \quad \text{где } q_{n-k}(z) \neq 0.$$

Следствие из основной теоремы алгебры

Многочлен n -й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Если коэффициенты многочлена (1.8) – вещественные числа и

$z_0 = x_0 + iy_0$ – его комплексный корень, то сопряженное число

$\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ – также корень этого многочлена, причем корни z_0 и \bar{z}_0 имеют одинаковую кратность.

Пусть многочлен $p_n(z)$ имеет корни z_1, z_2, \dots, z_m ($m \leq n$) кратностей, соответственно k_1, k_2, \dots, k_m ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$). Тогда его можно разложить на линейные множители, то есть будет справедливо тождество:

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - z_m)^{k_m}.$$

Если при этом коэффициенты многочлена – вещественные числа, то, объединяя скобки, соответствующие комплексно сопряженным корням, можно разложить этот многочлен в произведение линейных и квадратичных множителей с вещественными коэффициентами.

Пример

Найдем корни многочлена $z^6 + 2z^3 + 1$ и разложим его на множители.

Так как $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$, то корнями этого многочлена являются корни 3-й степени из -1 :

$$z_1 = -1;$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При этом каждый корень имеет кратность $k = 2$. Разложение этого многочлена на множители имеет вид:

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z + 1)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2$$

Объединяя последние две скобки в один сомножитель, получим разложение на множители с вещественными коэффициентами:

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z + 1)^2(z^2 - z + 1)^2.$$

Задачи

Решить уравнения:

1) $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0.$

Ответ: $-2 + i$, $-3 + i$.

2) $z^3 - 1 = 0$.

Ответ: 1 , $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$.

Ответ: $\pm i$, $\pm\sqrt{3}i$.

4) $z^6 + 4z^3 + 3 = 0$.

Ответ: $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, -1 , $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, $-\sqrt[3]{3}$.

1.5 Элементарные функции комплексной переменной

В этом параграфе мы будем рассматривать следующие функции комплексной переменной:

1) Степенная функция $f(z) = z^n$ (n – натуральное число).

2) Показательная функция:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

3) Тригонометрические функции:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

4) Гиперболические функции (гиперболический синус, косинус, тангенс, котангенс):

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

5) Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$ (где $z \neq 0$):

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi k i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Эта функция является многозначной. Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется её значение при $k = 0$:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$