Попробуем выделить из полинома множитель $z-a$. Разделим $f(z)$ на $\varphi(z)=z-a$. Тогда по формуле (3.2) частное $Q(z)$ будет полиномом $(n-1)$-ой степени со старшим коэффициентом a_0, остаток R – полиномом нулевой степени, то есть постоянным числом:

$$f(z)=(z-a)Q(z)+R. \tag{3.3}$$

Подставим в эту формулу $z=a$ и получим:

$$R=f(a). \tag{3.4}$$

Таким образом, мы доказали теорему Безу:

Теорема 1 (Теорема Безу)

Остаток, получаемый при делении полинома на $(z-a)$, равен значению полинома в точке a.

Следствие

Для того чтобы полином делился на $(z-a)$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы число $z=a$ было корнем полинома.

Доказательство:

Необходимость. Если полином делится на $(z-a)$, то остаток R от деления равен нулю. Значит по теореме Безу $R=f(a)=0$, то есть a – корень полинома.

Достаточность. Если a – корень полинома $f(z)$, то $f(a)=0$. Следовательно, по теореме Безу, остаток $R=f(a)=0$.

■

Итак, если a – корень полинома $f(z)$, то полином представим в виде:

$$f(z)=(z-a)Q(z). \tag{3.5}$$

Для отыскания остальных корней нужно решать уравнение $(n-1)$-ой степени $Q(z)=0$.

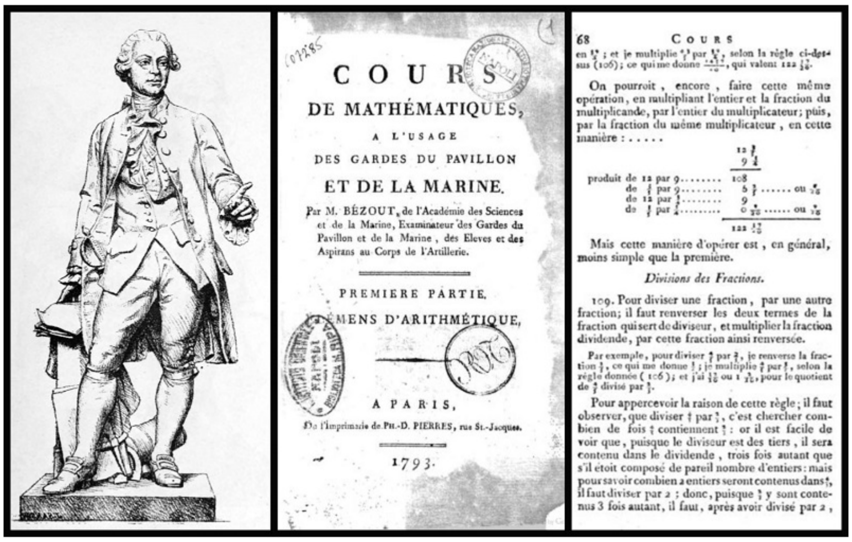

Рис. 15: Слева: Этьен Безу (фр. Etienne Bezout, 1730–1783). По центру: титульный лист оригинальной работы Э. Безу: “Курс по математике”. Справа: страницы из труда (разбор примера)

Теорема 2 (Основная теорема алгебры)

Любой полином степени ≥ 1 имеет по крайней мере один корень (комплексный).

Теорема доказывается в курсе “Теория функций комплексной переменной”.

Теорема 3 (о количестве корней полинома)

Полином n-ой степени не может иметь более n комплексных корней.

Доказательство:

Пусть z_1 – корень. Тогда по формуле (3.5) получим:

$$f(z) = (z - z_1)(a_0 z^{n-1} + (a_1 + a_0 z_1) z^{n-2} + \ldots).$$

По основной теореме алгебры частное тоже имеет корень. Обозначим его за z_2 и воспользуемся формулой (3.5) снова:

$$f(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)(z^{n-2} + \ldots),$$

и так далее:

$$f(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n). \tag{3.6}$$

Таким образом, полином разложился на множители. Заметим, что у него ровно n корней с учетом кратности. ■

Следствие 1

Если известно, что некоторый полином степени $\leq n$ имеет более n различных корней, то все коэффициенты и свободные члены полинома равны нулю.

Доказательство:

Вынесем из полинома множители, соответствующие n корням. Тогда он примет вид (3.6). Обращение полинома в ноль еще в одной точке означает, что коэффициент $a_0 = 0$, то есть полином равен нулю тождественно.

■

Следствие 2

Если значения двух полиномов степени $\leq n$ совпадают более чем при n различных значениях z, то эти полиномы тождественно равны.

Доказательство:

Если $f_1(z) = f_2(z)$, то z – корень полинома $f_1(z) - f_2(z)$. Таким образом, у полинома $f_1(z) - f_2(z)$ более n корней. Значит по следствию 1 он тождественно равен нулю, то есть $f_1(z) \equiv f_2(z)$. ■

Теорема 4 (Единственность разложения полинома на множители)

Разложение полинома на множители единственно.

Доказательство:

От противного. Пусть есть два разложения:

$$a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n) = f(z) = b_0(z - z_1')(z - z_2') \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n').$$

При $z = z_1$ левая часть уравнения обращается в нуль, а значит и правая часть равна нулю. Следовательно, среди чисел z_k' есть $z_k' = z_1$ (пусть для определенности $z_1' = z_1$). Сократим левую и правую части равенства на $(z - z_1)$:

$$a_0(z - z_2) \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n) = b_0(z - z_2') \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n'). \tag{3.7}$$

Отметим, что равенство (3.7) справедливо при всех z кроме $z = z_1$ (поскольку мы поделили уравнение на $(z - z_1)$.) А нам бы хотелось получить тождественное равенство (то есть во всех точках). Но поскольку точек, где выполнено равенство бесконечно много (все точки комплексной плоскости кроме одной: $z = z_1$), то по следствию 2 полиномы равны тождественно.

Повторим операцию для $z = z_2$ и так далее, пока не дойдем до равенства констант: $a_0 = b_0$. То есть разложения полиномов на множители совпали. ■

Соберём в разложении на множители полинома
$f(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n)$ одинаковые множители:

$$f(z) = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_m)^{k_m},$$

где корни $z_1, \ z_2, \ \ldots, \ z_m$ различны и $k_1 + k_2 + \ \ldots \ + k_m = n$. Степень k_s множителя $(z - z_s)^{k_s}$ определяет кратность корня z_s.

Определение

Корень $z = a$ полинома $f(z)$ имеет кратность k, если $f(z)$ делится на $(z - a)^k$ и не делится на $(z - a)^{k+1}$.

3.2 Полиномы с вещественными коэффициентами

Пусть коэффициенты полинома

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{3.8}$$

есть вещественные числа. Предположим также, что комплексное число $z = a + ib$ (где $b \neq 0$) – корень полинома кратности k, то есть:

$$f(z) = (z - (a + ib))^k \varphi(z), \tag{3.9}$$

где $\varphi(z)$ – полином степени $n-k$ (для которого $a+ib$ не является корнем).

Замечание

Если z является переменной величиной, то будем обозначать ее как:

$z = x + iy$, в то время как $a + ib$ – это одно из значений переменной z. Возьмем комплексное сопряжение от полинома $f(z)$ в формуле (3.8):

$$\overline{f(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ \dots \ + a_n} = \overline{a_0} \cdot \overline{z^n} + \overline{a_1} \cdot \overline{z^{n-1}} + \ \dots \ + \overline{a_n} =$$

$$\Big/ \text{поскольку } a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n \text{ – вещественные числа } \Big/$$

$$= a_0 \overline{z}^n + a_1 \overline{z}^{n-1} + \ \dots \ + a_n = f(\overline{z}). \tag{3.10}$$

Так как по предположению $z = a + ib$ является корнем полинома, то выполнено:

$$f(a+ib) = 0 = \overline{f(a+ib)} = \Big/ \text{формула (3.10)} \Big/ = f(\overline{a+ib}) = f(a-ib).$$

Следовательно, $a - ib$ – тоже корень полинома $f(z)$, а значит и $\varphi(z)$ (по формуле (3.9)). В итоге из полинома $f(z)$ будет вынесено два множителя, произведение которых есть полином с вещественными коэффициентами:

$$(z - (a+ib))(z - (a-ib)) = (z-a)^2 + b^2.$$

Таким образом,

$$f(z) = (z^2 - 2az + a^2 + b^2) f_1(z),$$

где $f_1(z)$ – полином с вещественными коэффициентами (по правилу деления полиномов в столбик коэффициенты частного получаются с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, при которых из вещественных чисел комплексные появиться не могут).

Для полинома $f_1(z)$ число $z = a+ib$ будет корнем кратности $k-1$. Из него также можно вынести пару сомножителей: $(z-(a+ib))(z-(a-ib))$. И так далее повторяем процедуру k раз. Следовательно, мы нашли корень $a - ib$ кратности не меньше k. Но больше k кратности быть не может, так как в этом случае кратность корня $a + ib$ тоже станет большей, что противоречит исходным предположениям. Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 5 (о комплексной сопряженности корней)

Если полином с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $z = a + ib$, то он имеет и сопряжённый корень $a - ib$ той же кратности.

Следствие

Полином с вещественными коэффициентами раскладывается на вещественные множители:

$$f(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t},$$

где $x_1, \ \ldots, \ x_r$ – вещественные корни. Множитель второй степени происходит из пар комплексно сопряжённых корней кратности $l_1, \ \ldots, \ l_t$.

3.3 Зависимость между корнями уравнения и его коэффициентами

Разложим полином на множители:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) =$$

$$= a_0(z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-2} + \ldots + (-1)^kS_kz^{n-k} + \ldots + (-1)^nS_n),$$

где S_k – сумма всевозможных произведений из чисел z_s по k сомножителей в каждом. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем:

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad S_2 = \frac{a_2}{a_0}, \ \ldots\ldots, \ S_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0},$$

то есть доказали теорему Виета:

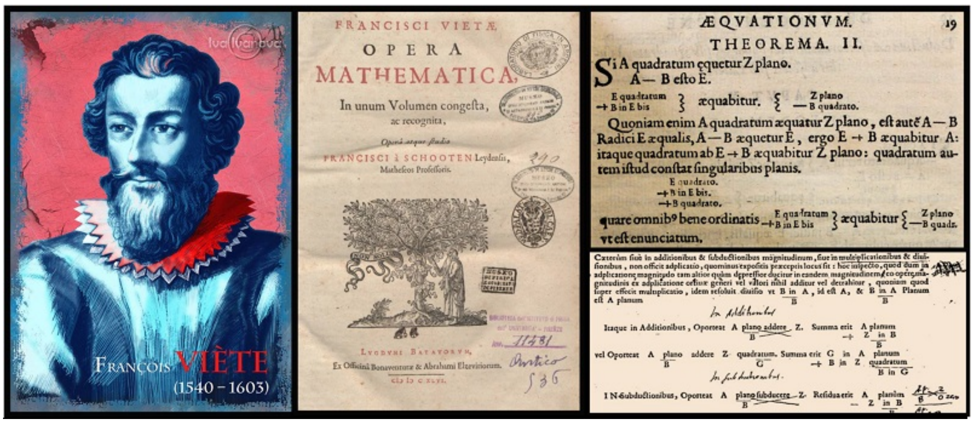

Рис. 16: Слева: Франсуа Виет (фр. Fransois Viete, 1540–1603). По центру: титульный лист оригинальной работы Ф. Виета: “Математика”. Справа: страницы из труда (теорема)

Теорема 6 (Теорема Виета)

Пусть $z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots z_n$ – корни полинома $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$. Тогда имеет место соотношение:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + \ \ldots\ldots \ + z_n = -\frac{a_1}{a_0}, \\ z_1 \cdot z_2 + \ldots + z_1 \cdot z_n + z_2 \cdot z_3 + \ldots + z_2 \cdot z_n + \ \ldots\ldots \ + z_{n-1}z_n = \frac{a_2}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 \cdot z_2 \cdot \ \ldots\ldots \ \cdot z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \end{cases} \tag{3.11}$$