Набор задач для подготовки к контрольной работе №1.

Комплексные числа. Предел последовательности. Предел функции

1. Изобразить на комплексной плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих условию: $\begin{cases} 1 < |z+1| \le 3 \\ \dfrac{3\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$.

2. Вычислить все значения корня и изобразить их на комплексной плоскости: $\sqrt[9]{-9}$.

3. а) Дана последовательность $x_n = \dfrac{3n+9}{7n+1}$. Докажите, используя определение предела, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{7}$.

б) Дана последовательность $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3n-11}}$. Докажите, используя определение предела, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

4. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \forall n > N: \ \ x_n < \varepsilon$$

и такой, что: **а)** она не имеет предела; **б)** она имеет предел.

5. Докажите, используя определение предела по Коши, что

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}, \quad a > 0.$$

Вычислите, используя арифметические свойства пределов, замечательные пределы и следствия из них:

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n \right)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2} \left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}} - 1 \right)$

8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$

9. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}(2x)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

11. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)^x$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+2\operatorname{arctg}(3x)+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+10x}-\sqrt[3]{1+3x}}{\arcsin(3x+x^2)-\operatorname{sh}(2x+x^3)}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln\frac{x}{2}\right)$