APUNTES DE CÁLCULO EN UNA VARIABLE

Versión del 29 de junio de 2023

Víctor Andrés Osores Escalona
Departamento de Matemática, Física y Estadística
Universidad Católica del Maule, Chile

Índice general

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Axiomas, definiciones, lemas, teoremas, corolarios

La estructura de una teoría matemática se resume en un conjunto de axiomas y de teoremas que se deducen de ellos mediante reglas de inferencia lógica. Veamos que es cada una de estas estructuras lógicas de las matemáticas.

Definición 1.1 (**Axioma**) *enunciado cuya veracidad es admitida por todos/as y no necesita demostración.*

Definición 1.2 (**Proposición**) *Enunciado cuya veracidad se ha demostrado.*

Definición 1.3 (**Lema**) *Proposición que es preciso demostrar antes de demostrar un teorema para que la demostración de este último no sea excesivamente larga.*

Definición 1.4 (**Teorema**) *Enunciado en el que, a partir de una suposiciones iniciales (Hipótesis) se consigue demostrar otro enunciado (Tesis).*

Definición 1.5 (**Corolario**) *Son teoremas consecuencia inmediata de otro teorema anterior al que se le considera de mayor importancia.*

Un teorema escrito en la forma H (hipótesis) $\rightarrow$ T (Tesis), se llama *teorema directo* y se lee "si se verifica H, entonces se verificará T". Hay otros teoremas relacionados con el directo:

Teorema contrario: no H $\rightarrow$ no T

Teorema recíproco: T $\rightarrow$ H

Teorema contrarrecíproco: no T $\rightarrow$ no H

Ejemplos:

Directo: Ser madrileño (H) implica ser español (T)

Recíproco: Ser español (T) implica ser madrileño (H): No se verifica, ser español no implica ser madrileño.

Contrario: no ser madrileño (no H) implica no ser español (no T): No se verifica, se puede ser español sin ser madrileño, p.e., siendo andaluz.

Contrarrecíproco: no ser español (no T) implica no ser madrileño (no H): Sí se verifica, si no eres español no puedes ser madrileño.

CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES:

$M \to A$: A es *condición necesaria* para que se cumpla M. Ejemplo: M="ganar la liga de fútbol de primera división", A="jugar en primera división"

$B \to M$: B es *condición suficiente* para que se cumpla M. Ejemplo: M="ganar la liga de fútbol de primera división", B="ser el equipo con más puntos al finalizar la liga".

$C \longleftrightarrow M$: C es *condición necesaria y suficiente* de M. Ejemplo: M="ganar la liga de fútbol de primera división", C=recibir el trofeo de campeón al finalizar la liga".

1.2 Los números reales

El hombre ha necesitado, a través de su historia, de los números naturales para contar, de los enteros para el comercio, de los racionales para sus construcciones. Ya los griegos (escuela pitagórica) se dieron cuenta de que existían otro tipo de números extraños a los que llamaron irracionales, lo que nos lleva a nuestro objetivo de los números reales, base del cálculo.

- *Números naturales* $\mathbb{N}$: 1, 2, 3, ...
- *Números enteros* $\mathbb{Z}$: ... , -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
- *Números racionales* $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z};\ q > 0;\ mcd\ (p, q) = 1 \right\}$. Es decir, son el conjunto de las fracciones irreducibles de números enteros con denominador positivo (no nulo).

Hay números cuya expresión decimal es infinita y no periódica, luego no se pueden expresar como fracción ($\sqrt{2}$ no es racional. Este nuevo tipo de números son los

- *Números Irracionales*: $\pi,\ e,\ \sqrt[3]{5}, ...$

Finalmente

- *Número reales* $\mathbb{R}$: es el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, representaremos por $x + y$ la suma de números reales y por xy el producto.

1.2.1 Axiomas algebraicos

Axioma 1.1 (**Axiomas Algebraicos**) *Responden de las propiedades de la suma y producto de números reales. Son los siguientes:*

- Asociatividad:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (x+y)+z = x+(y+z); \qquad (xy)z = x(yz) \tag{1.2.1}$$

- Conmutatividad:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x+y = y+x; \qquad xy = yx \tag{1.2.2}$$

- Elemento neutro: *Hay dos números reales distintos* 0 *y* 1 *tales que* $\forall x \in \mathbb{R}$ *se verifica:*

$$0+x = x; \qquad 1x = x \tag{1.2.3}$$

- Opuesto e inverso: *Para cada número real* x *hay un número real llamado opuesto de* x, *que representamos por* $-x$ *tal que:*

$$x+(-x) = 0 \tag{1.2.4}$$

  Para cada número real x *distinto de cero,* $x \neq 0$, *hay un número real llamado inverso que representamos por* x^{-1}, *tal que*

$$xx^{-1} = 1 \tag{1.2.5}$$

- Distributividad:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (x+y)z = xz+yz \tag{1.2.6}$$

Propiedad 1.1 *Se verifican las siguientes igualdades:*

$$0x = 0; \qquad (-x)y = -xy; \qquad (-x)(-y) = xy \tag{1.2.7}$$

El símbolo $-x$ debe leerse siempre el inverso aditivo (opuesto) de x y no menos x. No cometas el error de pensar que $-x$ es negativo.

Nota: *Suele escribirse* $x-y$ *en vez de* $x+(-y)$. *También, si* $y \neq 0$, xy^{-1} *se escribe* x/y *o bien* $\frac{x}{y}$.

Teorema 1.1 *Sean* a, b *y* c *números reales cualesquiera:*

1. Ley de Cancelación para la suma: *Si* $a+c = b+c$, *entonces* $a = b$.
2. Ley de Consistencia para la suma: *Si* $a = b$, *entonces* $a+c = b+c$.
3. Ley de Cancelación para el multiplicación: *Si* $a \neq 0$ *y* $ab = ac$, *entonces* $b = c$.
4. Ley de Consistencia para la multiplicación: *Si* $a = b$, *entonces* $ac = bc$.

5. Elemento Absorbente: $a \cdot 0 = 0$.

6. *Si* $ab = 0$, *entonces* $a = 0 \vee b = 0$.

Ejercicio 1.1

1. *Resuelva las siguientes ecuaciones:*

   a) $2(x+1)+3 = x-2$,
   b) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3x}{5} - \dfrac{1}{2}$
   c) $\dfrac{x+1}{6} + \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{1}{3}$
   d) $\dfrac{x+3}{7} + \dfrac{x-1}{14} = \dfrac{x+1}{2}$
   e) $\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{x-2}{35} = 1 - \dfrac{4x-3}{7}$
   f) $\dfrac{x-1}{3} - 1 = \dfrac{x+1}{6} + \dfrac{x}{2}$
   g) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{5x-7}{6} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{3}$

2. *Muestre que: Si* $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, *entonces* $\frac{a-bc}{b} = \frac{a}{b} - c$.
   Indique los axiomas de cuerpo y propiedades que se aplican.

3. *Resuelva las siguientes ecuaciones, simplifique las expresiones e identifique para que valores tienen sentido estas igualdades.*

   a) $\dfrac{1}{y-2} = \dfrac{2y+1}{y^2-4}$
   b) $\dfrac{x+3}{x-2} + \dfrac{1}{3} = 3x - 5$
   c) $\dfrac{2x}{x-2} - 2 = -\dfrac{4}{2-x}$
   d) $\dfrac{3-z}{z-2} = \dfrac{z}{z+2} - 2$
   e) $\dfrac{3+5x}{4} + \dfrac{2}{x-2} = x + 7$
   f) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{x^2-1} = \frac{2}{x-1}$
   g) $\dfrac{6}{3w+9} - \dfrac{4}{2w+6} = 0$
   h) $\dfrac{10-x}{3x} + \dfrac{\frac{10}{x}}{\frac{5}{x^2}} = 2$
   i) $\dfrac{3x}{x-2} = \dfrac{6}{x-2} + 1$
   j) $\dfrac{1}{4x-2} - \dfrac{2}{3x+2} = 2$

1.2.2 Axiomas de orden

Axioma 1.2 (Axiomas de orden) *La ordenación de números reales establece que su representación en una recta consiste en fijar un punto, origen, donde se coloca el* 0 *y los números situados a su derecha son los positivos, representados por* $\mathbb{R}^+$. *Las propiedades del orden son:*

- Ley de tricotomía. *Para cada número real* x *se verifica una sola de las tres siguientes afirmaciones:* $x = 0$, x *es positivo,* $-x$ *es positivo.*

- Estabilidad *de $\mathbb{R}^+$. La suma y producto de números positivos también es un número positivo.*
- Relación de orden. *La ley de Tricotomía en particular dice que el 0 no es positivo ($x > 0$). Por otra parte, como $x + (-x) = 0$, por la ley de estabilidad de $\mathbb{R}^+$ concluimos que $-x$ no es positivo. Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$ se llaman números negativos y son los opuestos a los números positivos.*

Definición 1.6 *Para $x, y \in \mathbb{R}$, escribimos $x < y$ o $y > x$ para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$ y escribimos $x \leq y$ o $y \geq x$ para indicar $y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \mathbb{R}_0^+$*

Notación: $\mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

Propiedad 1.2 *Para todo $x \neq 0$ se verifica que $x^2 > 0$. En particular, $1 > 0$.*

Dem: *Si $x \neq 0$, por la ley de tricotomía o bien x es positivo o bien $-x$ es positivo. Como $x^2 = xx = (-x)(-x)$, concluimos que x^2 es positivo, nos apoyamos en la ley de estabilidad del producto en $\mathbb{R}^+$, ambas leyes de los axiomas de orden de los números reales.. En particular tenemos que $1^2 = 1 > 0$. ¡El 1 es positivo!*

1.2.3 Propiedades topológicas de los números reales

Daremos, sin demostración, las siguientes propiedades de los números reales:

Propiedad 1.3

1. $\mathbb{R}$ *es* arquimediano*:* $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}^+\ \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$. *Geométricamente significa que todo segmento (x), por grande que sea, se puede recubrir con unidades tan pequeñas como se quiera (y). De otro modo, con una regla, por pequeña que sea, se puede cubrir cualquier distancia (basta colocarla sucesivamente las veces que haga falta).*
3. $\mathbb{R}$ *es* denso*:*
   a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *con* $x < y,\ \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$
   b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *con* $x < y,\ \exists \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x < \alpha < y$

1.2.4 Desigualdades

Las desigualdades son un tema muy importante que hay que aprender a manejar correctamente mediante la práctica de muchos ejemplos y ejercicios. Siempre hay que respetar las reglas generales que las gobiernan y se dan en el siguiente teorema.

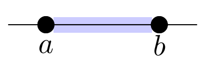
Teorema 1.2 *Sean* $x, y, z \in \mathbb{R}$

1. $x \leq y$ *e* $y \leq z$ *implican que* $x \leq z$
2. $x \leq y$ *e* $y \leq x$ *implican que* $x = y$
3. *Se verifica exactamente una de las tres relaciones:* $x < y$, $x = y$ *o* $y < x$
4. $x < y$ *implica que* $x + z < y + z$
5. $x < y$, $z > 0$ *implican que* $xz < yz$
6. $x < y$, $z < 0$ *implican que* $xz > yz$
7. $xy > 0$ *sí, y solo si,* x *e* y *son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia, si* $x \neq 0$*, entonces* $x^2 > 0$ *y, en particular,* $1 > 0$
8. $z > 0$ *implica que* $\frac{1}{z} > 0$
9. *sean* x *e* y *ambos positivos o ambos negativos, se cumple que si* $x < y$ *, entonces* $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

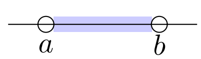
Dem: *Se deja como ejercicio. Lo único que hay que tener en cuenta para demostrar todos los apartados de este teorema son las definiciones de los símbolos* $<$ *y* $>$ *y los axiomas algebraicos y de orden de los números reales.*

1.2.5 Intervalos

Definición 1.7 *Los intervalos son subconjuntos de la recta real que están determinados por dos números que se llaman extremos; en un intervalo se encuentran todos los números comprendidos entre ambos y también pueden estar los extremos. Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados y semiabiertos.*

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ 

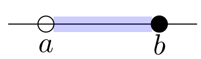
Cerrado

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ 

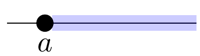
Abierto

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ 

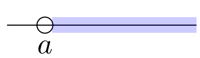
Semiabierto

$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ 

Semiabierto

$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ 

Infinito

$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ 

Infinito

$]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ 

Infinito

$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ 

Infinito

Ejercicio 1.2 *Resuelva las siguientes inecuaciones.*

1. $4x + 1 < 2x$
2. $2x - 1 \geq 0$
3. $\dfrac{2x+1}{x+3} > 3$
4. $\dfrac{10}{2x+5} \geq 0$
5. $9x^2 + 30x > -25$
6. $\dfrac{x+2}{x-6} - \dfrac{x-1}{x-3} \leq 0$
7. $\dfrac{x+3}{x-2} \geq 2$
8. $\dfrac{2x-3}{5x+2} \geq -2$
9. $\dfrac{x+5}{20-5x} \geq 0$
10. $\dfrac{5x+1}{6} > 2 - \dfrac{2x+1}{3}$
11. $\dfrac{x-3}{x+2} < 0$
12. $\dfrac{(x+10)(2x-1)}{x^2+x-2} \geq 0$
13. $\dfrac{5x-2}{x^2+1} \leq 1$
14. $3x \geq 2x^2 - 5$
15. $\dfrac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0$

1.2.6 Ínfimo y Supremo. Axioma de completitud.

Antes de enunciar el último axioma de los números reales, veamos las siguientes definiciones:

Definición 1.8 *Sea $A \subset \mathbb{R}$, entonces*

- *Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$ para todo $a \in A$, entonces x se llama* cota superior *de A y se dice que el conjunto A está* acotado superiormente.
- *Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$ para todo $a \in A$, entonces x se llama* cota inferior *de A y se dice que el conjunto A está* acotado inferiormente.

Definición 1.9 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y supongamos que existe un $a \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes dos condiciones:*

i) *a es una cota superior de A*

ii) *si $b \in \mathbb{R}$ es cota superior de A, entonces $a \leq b$*

Entonces a es el supremo *de A, es* la menor de las cotas superiores.

Definición 1.10 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado inferiormente y supongamos que existe un $a \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes dos condiciones:*

i) *a es una cota inferior de A*

ii) si $c \in \mathbb{R}$ es cota inferior de A, entonces $a \geq c$

Entonces a es el ínfimo *de A, es* la mayor de las cotas inferiores.

Axioma 1.3 **(Axioma de completitud)**

i) Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo.

ii) Todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene ínfimo.

Definición 1.11 *Se dice que un conjunto no vacío de números reales $A \subset \mathbb{R}$, tiene* máximo *si hay un número $M \in A$ que es el mayor de todos los elementos de A, es decir, $x \leq M$, $\forall x \in A$. En este caso escribimos $M = max\, A$. Si $\exists m \in A$: $m \leq x\, \forall x \in A$, m es el* mínimo *de A, $m = min\, A$.*

De otro modo, si el supremo de A está en A, se le llama máximo*. Si el ínfimo de A está en A, se le llama* mínimo*.*

Ejemplo 1.1 *Recordando lo visto en la sección de supremo e ínfimo, en el intervalo $[2,5[, 2$ es el mínimo y 5 el supremo. Además, como $2 \in [2,5[$, el intervalo tiene mínimo y éste es igual a 2. Sin embargo, como $5 \notin [2,5[$, el intervalo no tiene máximo.*

1.2.7 Valor absoluto

Definición 1.12 (Valor Absoluto.) *El valor absoluto de un número real $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Definición 1.13 *Para cada $x \in \mathbb{R}_0^+$, representamos por $\sqrt{x}$ al único número* mayor o igual que cero *cuyo cuadrado es igual a x.*

En consecuencia, $\sqrt{x^2} = |x|$ (En efecto, $|x|^2 = x^2$ y, además, $|x| \geq 0$, por tanto: $\sqrt{x^2} = |x|$)

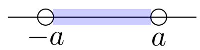
Teorema 1.3 (Propiedades del valor absoluto.)

1. $|-x| = |x|$
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$ <u>*Desigualdad Triangular*</u>

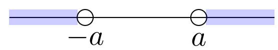
5. $|\,|x| - |y|\,| \le |x - y|$ La igualdad se da solo si $xy \ge 0$

Definición 1.14 (Desigualdades con valor absoluto) *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $a > 0$:*

1. $|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a$



2. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$



3. $|x| = a \quad \Leftrightarrow \quad x = a \;\vee\; x = -a$
4. $|x| < |y| \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < y^2$.

Si $a < 0$, entonces

- $|x| < a$ *no tiene solución (por ejemplo, $|x| < -1$).*
- $|x| > a$ *tiene por solución todos los reales (por ejemplo, $|x| > -1$).*

Ejercicio 1.3 *Halle el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.*

1. $|9 - 2x| < 3$
2. $|x^2 - 10x| \ge 24$
3. $1 \le |12x - 51| < 4$
4. $\left|\dfrac{3|x| - x}{x + 1}\right| < \dfrac{1}{x + 1}$
5. $4 - |x| \le |\,|2x| - 6\,|$
6. $|x + 2| \ge 5$
7. $\left|\dfrac{x + 2}{x - 6}\right| - \left|\dfrac{x - 1}{x - 3}\right| \le 0$
8. $\left|\dfrac{2}{x} - 3\right| \le 5$
9. $\dfrac{|x^2 - 16|}{x + 4} \le \dfrac{x^2}{|x - 1|}$
10. $|x - 1| \le 2|x - 3|$
11. $\left|\dfrac{2x - 1}{x}\right| > 2$
12. $|x - 1| + |4 - 2x| \le 4$
13. $|x - 2| - |x + 2| = |x|$
14. $|x^2 + 3x| = |x + 3|$
15. $|x - 2|^2 - 5|x - 2| + 6 = 0$

Definición 1.15 *Llamamos* distancia *entre dos números $x, y \in \mathbb{R}$ a*

$$d(x, y) = |y - x| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Propiedad 1.4 *Propiedades de la distancia.*

1. $\forall x \in \mathbb{R}: \; d(x, x) = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \; d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

Definición 1.16 (**Entorno**) *: Sea $a \in \mathbb{R}$, y $r \in \mathbb{R}^+$. Se define el* entorno *de centro a y radio r como todos los números reales cuya distancia a a sea menor que r:*

$$E_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : d(x,a) < r\} =]a-r, a+r[.$$

Se define el entorno reducido *de centro a y radio r como todos los números reales cuya distancia a a sea menor que r, excluyendo al número a:*

$$E_r^*(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < d(x,a) < r\} =]a-r, a+r[-\{a\}.$$

Definición 1.17 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *$x \in A$ se dice punto interior de A si $(\exists \varepsilon > 0)\ :\ E_\varepsilon(x) \subset A$.*
2. *$x \in \mathbb{R}$ se dice punto adherente de A si $(\forall \varepsilon > 0)\ :\ E_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$.*
3. *$x \in \mathbb{R}$ se dice punto de acumulación de A si $(\forall \varepsilon > 0)\ :\ E_\varepsilon^*(x) \cap A \neq \varnothing$.*
4. *$x \in \mathbb{R}$ se dice punto frontera de A si $(\forall \varepsilon > 0)\ :\ E_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing\ \wedge\ E_\varepsilon(x) \cap A^C \neq \varnothing$.*

Observamos que un punto adherente de A no necesita estar en A, así mismo un punto de acumulación y un punto frontera no necesitan estar en A.

Definición 1.18 *Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ se definen los siguientes conjuntos:*

1. *Interior de A: $int(A) = \{x \in A : x$ es punto interior de $A\}$.*
2. *Adherencia de A: $adh(A) = \{x \in \mathbb{R} : x$ es punto adherente de $A\}$.*
3. *Derivado de A: $der(A) = \{x \in \mathbb{R} : x$ es punto de acumulación de $A\}$.*
4. *Frontera de A: $\partial A = fr(A) = \{x \in \mathbb{R} : x$ es punto frontera de $A\}$.*

Ejercicio 1.4 *Para los siguientes conjuntos determinar la adherencia; el interior; el conjunto de los puntos de acumulación y la frontera.*

1. $A = [1,2) \cup \{3\}$
2. $A = [-1,0] \cup \{1\}$
3. $A =]2,3[$
4. $A = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

CAPÍTULO 2

Relaciones y funciones

En general, si se tienen dos conjuntos A y B, una *relación binaria* $\mathcal{R}$ es un subconjunto de $A \times B$, es decir,

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B = \{(a,b) \ : \ a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Dada una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, el *dominio de la relación* es el subconjunto de A que satisface

$$\mathcal{D}om(\mathcal{R}) = \{a \in A \ : \ \exists\, b \in B \ : \ (a,b) \in \mathcal{R}\}.$$

El *recorrido de la relación* es el subconjunto de B formado por

$$\mathcal{R}ec(\mathcal{R}) = \{b \in B \ : \ \exists\, a \in A \ : \ (a,b) \in \mathcal{R}\}.$$

Ejemplo 2.1 *1. Si $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2,3,4,5,\ldots,100\}$, entonces*

a) $\mathcal{R}_1 = \left\{(x,y) \ : \ x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5 \wedge x \text{ es par } \wedge y = x^2\right\} = \{(2,4),(4,16)\}$ *es una relación tal que* $\mathcal{D}om(\mathcal{R}_1) = \{2,4\}$, $\mathcal{R}ec(\mathcal{R}_1) = \{4,16\}$.

b) $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \ : \ x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 4 \wedge y = x+1\} = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$ *es una relación tal que* $\mathcal{D}om(\mathcal{R}_2) = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{R}ec(\mathcal{R}_2) = \{2,3,4,5\}$.

c) *(verlo gráficamente) Si*

$$\mathcal{R}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq |x-1|\right\},$$

entonces

$$\mathcal{D}om(\mathcal{R}_3) = \mathbb{R}, \qquad \mathcal{R}ec(\mathcal{R}_3) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 0\}.$$

d) *(verlo gráficamente) Si*

$$\mathcal{R}_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 < y \ \wedge \ (x-1)^2 \leq -y+2\right\},$$

entonces

$$\mathcal{D}om(\mathcal{R}_4) = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{\sqrt{3}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}, \qquad \mathcal{R}ec(\mathcal{R}_4) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x \leq 2\}.$$

Esto porque la 1ra coordenada de los puntos en $\mathcal{R}_4$ varía desde la primera coordenada del primer punto de intersección de las dos parábolas a la primera coordenada del 2do punto de intersección, sin incluir a los puntos de intersección pues ellos no satisfacen la primera de las condiciones que definen a $\mathcal{R}_4$. La 2da coordenada de los puntos en $\mathcal{R}_4$ varía desde la 2da coordenada del vértice de la primera parábola ($y = x^2$) a la 2da coordenada del vértice de la 2da parábola (sin incluir la 2da coordenada del vértice de la primera parábola).

e) *(verlo gráficamente) Si*

$$\mathcal{R}_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x-2 = 3(y-1)^2\right\},$$

entonces

$$\mathcal{D}om(\mathcal{R}_5) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 2\}, \qquad \mathcal{R}ec(\mathcal{R}_5) = \mathbb{R}.$$

f) *(verlo gráficamente) Si*

$$\mathcal{R}_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2+1\right\},$$

entonces

$$\mathcal{D}om(\mathcal{R}_6) = \mathbb{R}, \qquad \mathcal{R}ec(\mathcal{R}_6) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 1\}.$$

Definición 2.1 *Una relación* $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ *es* función *si y sólo si* $\forall\, a \in \mathcal{D}om(\mathcal{R}) \ :\ \exists !\, b \in B \ :\ (a,b) \in \mathcal{R}$.

De los ejemplos anteriores sólo $\mathcal{R}_1$ $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_6$ son funciones. ¿Cómo demostrar que, por ejemplo, $\mathcal{R}_5$ no es una función?

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_5 \text{ es función } &\Leftrightarrow \forall\, x \in [2,+\infty) \ :\ \exists ! y \in \mathbb{R} \ :\ (x,y) \in \mathcal{R}_5,\\
&\Leftrightarrow \forall\, x \in [2,+\infty) \ :\ \exists ! y \in \mathbb{R} \ :\ x-2 = 3(y-1)^2,\\
&\Leftrightarrow \forall\, x \in [2,+\infty) \ :\ \exists ! y \in \mathbb{R} \ :\ (y-1)^2 = \frac{1}{3}(x-2),\\
&\Leftrightarrow \forall\, x \in [2,+\infty) \ :\ \exists ! y \in \mathbb{R} \ :\ |y-1| = \frac{\sqrt{3(x-2)}}{3},
\end{aligned}$$

lo cual es falso pues para cada $x \in (2,+\infty)$ los valores

$$y_1 = 1 + \frac{\sqrt{3(x-2)}}{3} \qquad y_2 = 1 - \frac{\sqrt{3(x-2)}}{3}$$

son tales que $y_1 \neq y_2$, $(x,y_1) \in \mathcal{R}_5$ y $(x,y_2) \in \mathcal{R}_5$. Si, por ejemplo, $x = 4$, se tiene que los pares ordenados $(4, 1+\frac{\sqrt{6}}{3})$ y $(4, 1-\frac{\sqrt{6}}{3})$ son elementos de $\mathcal{R}_5$.

¿Cómo demostrar que $\mathcal{R}_6$ es función?

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_6 \text{ es función } &\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \ :\ \exists ! y \in \mathbb{R} \ :\ (x,y) \in \mathcal{R}_6,\\
&\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \ :\ \exists ! y \in \mathbb{R} \ :\ y = x^2+1,
\end{aligned}$$

lo cual es verdadero.

Si una relación $f \subseteq A \times B$ es función, para cada $a \in \mathcal{D}om(f)$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$. Cuando f es función, en lugar de denotarla como hasta ahora, lo haremos mediante $f : \mathcal{D}om(f) \longrightarrow B$ y para cada $a \in \mathcal{D}om(f)$ denotaremos al único $b \in B$ que satisface $(a,b) \in f$ mediante $f(a) = b$.

2.1 Funciones reales

A partir de ahora consideraremos funciones reales $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir,

$$f : \mathcal{D}om(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Mediante $f(x)$ denotaremos al número real que f le hace corresponder a cada $x \in \mathcal{D}om(f)$,

$$\mathcal{D}om(f) = \{x \in \mathbb{R} \ :\ f(x) \in \mathbb{R}\}$$

y

$$\mathcal{R}ec(f) = \{y \in \mathbb{R} \ :\ \exists\, x \in \mathcal{D}om(f) \ :\ f(x) = y\}\,.$$

Note que el recorrido de f está formado por los valores $y \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $f(x) = y$ tiene solución en $\mathcal{D}om(f)$.

Definición 2.2 *Cada $x \in \mathcal{D}om(f)$, el número real $y = f(x)$ se denomina* imagen de x por f*, mientras que para cada $y \in \mathcal{R}ec(f)$ los números reales x tales que $f(x) = y$ se denominan* pre-imagen de y por f.

Ejemplo 2.2 *Consideremos las siguientes funciones. De cada una de ellas queremos determinar dominio y recorrido.*

Nota: *Cada una de las funciones siguientes es una cónica o una parte de una cónica. Podemos usar los conocimientos de cónicas para hacer el gráfico de la función y con ayuda del gráfico reconocer dominio y recorrido de la función.*

1. $f : \mathcal{D}om(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:*
   a) $f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$,
   b) $f(x) = x$,
   c) $f(x) = \sqrt{x}$,
   d) $f(x) = x^2$,

2. $f : \mathcal{D}om(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 2 - x$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}om(f) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ 2 - x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \\ Rec(f) &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists\, x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = y\} \end{aligned}$$

   Dado que $f(x) = y \Leftrightarrow 2 - x = y \Leftrightarrow x = 2 - y$ que es un número real para cualquier valor real de y se tiene que el recorrido de esta función es todo el conjunto de los números reales.

3. $f : \mathcal{D}om(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$. *Esta función representa una parábola con vértice en $(-1, 1)$ y distancia entre foco y vértice igual a $p = \frac{1}{4}$. Al hacer su gráfico nos damos cuenta de que su dominio es todo $\mathbb{R}$, mientras que su recorrido es $[1, +\infty[$. Demostrémoslo de manera analítica.*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}om(f) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \\ \mathcal{R}ec(f) &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists\, x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = y\} \end{aligned}$$

   Dado que

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = y, \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = y, \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = y - 1, \\ &\Leftrightarrow y \geq 1 \wedge |x+1| = \sqrt{y-1}, \\ &\Leftrightarrow y \geq 1 \wedge (x = -1 + \sqrt{y-1} \vee x = -1 - \sqrt{y-1}) \end{aligned}$$

   se tiene que

$$\mathcal{R}ec(f) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 1 \wedge (-1 + \sqrt{y-1} \in \mathbb{R} \ \vee \ -1 - \sqrt{y-1} \in \mathbb{R})\} = [1, +\infty[.$$

4. *Considere la hipérbola con centro en $(2,2)$, vértices en $(1,2)$ y $(3,2)$ y un foco en $(\frac{1}{2},2)$. Su ecuación es*

$$(x-2)^2 - \frac{4}{5}(y-2)^2 = 1.$$

Tomemos $f : \mathcal{D}om(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x) = 2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(x-2)^2-1}$$

que son las mitades encima de los vértices de las ramas de la hipérbola. Al hacer el gráfico de la hipérbola nos damos cuenta de que $\mathcal{D}om(f) = [-\infty, 1] \cup [3, +\infty]$ y $\mathcal{R}ec(f) = [2, +\infty]$. Demostrémoslo de manera analítica.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}om(f) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in \mathbb{R}\}, \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x-2)^2 - 1 \geq 0\} = [-\infty, 1] \cup [3, +\infty] =: \mathcal{D}_f.\end{aligned}$$

Además

$$\mathcal{R}ec(f) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists\, x \in [-\infty, 1] \cup [3, +\infty] \ : \ f(x) = y\}.$$

Dado que

$$\begin{aligned} f(x) = y \Leftrightarrow y - 2 &= \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(x-2)^2-1}, \\ &\Leftrightarrow y \geq 2 \wedge (y-2)^2 = \frac{5}{4}\left((x-2)^2 - 1\right), \\ &\Leftrightarrow y \geq 2 \wedge \sqrt{(y-2)^2 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{4}(x-2)^2, \\ &\Leftrightarrow y \geq 2 \wedge (x = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{(y-2)^2 + \frac{5}{4}} \vee x = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{(y-2)^2 + \frac{5}{4}}) \end{aligned}$$

se tiene que

$$\mathcal{R}ec(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 2 \wedge \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{(y-2)^2 + \frac{5}{4}} \in \mathcal{D}_f \vee 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{(y-2)^2 + \frac{5}{4}}) \in \mathcal{D}_f \right) \right\}.$$

Dado que

$$\sqrt{(y-2)^2 + \frac{5}{4}} \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{(y-2)^2 + \frac{5}{4}} \geq 1$$

se tiene que para todo $y \in \mathbb{R}$

$$2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{(y-2)^2 + \frac{5}{4}} \geq 3 \ \wedge \ 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{(y-2)^2 + \frac{5}{4}}) \leq 1.$$

Por tanto, $\mathcal{R}ec(f) = [2, +\infty]$.

Definición 2.3 *Sean $f : \mathcal{D}om(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathcal{D}om(f)$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$. El conjunto*

$$f(X) = \{y \in \mathcal{R}ec(f);: \ \exists\, x \in X \ : \ f(x) = y\}$$

se denomina imagen de X por f. *Note que $f(\mathcal{D}om(f)) = \mathcal{R}ec(f)$. El conjunto*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in \mathcal{D}om(f) \ : \ \exists\, y \in Y \ : \ f(x) = y\} = \{x \in \mathcal{D}om(f) \ : \ f(x) \in Y\}.$$

se denomina pre-imagen de Y por f.

Ejemplo 2.3 *1. Sea $f : \mathcal{D}om(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2+1$. Entonces $\mathcal{D}om(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2+1 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$ y $f(\mathbb{R}) = \mathcal{R}ec(f)$ es*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}ec(f) &= \left\{y \in \mathbb{R} \,:\, \exists x \in \mathbb{R} \,:\, y = x^2+1\right\},\\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \,:\, \exists x \in \mathbb{R} \,:\, y-1 = x^2\right\},\\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \,:\, y-1 \geq 0 \;\wedge\; \exists x \in \mathbb{R} \,:\, \sqrt{y-1} = |x|\right\},\\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \,:\, y \geq 1 \;\wedge\; \left(\sqrt{y-1} \in \mathbb{R} \vee -\sqrt{y-1} \in \mathbb{R}\right)\right\},\\
&= \{y \in \mathbb{R} \,:\, y \geq 1\}.
\end{aligned}$$

Sea $X = [3,\, 4] \subset \mathcal{D}om(f)$, $f(X)$ es el subconjunto del recorrido de f que satisface

$$\begin{aligned}
f(X) &= \left\{y \in \mathcal{R}ec(f) \,:\, \exists x \in X \,:\, y = x^2+1\right\},\\
&= \left\{y \in \mathcal{R}ec(f) \,:\, \exists x \in X \,:\, y-1 = x^2\right\},\\
&= \left\{y \in \mathcal{R}ec(f) \,:\, \exists x \in X \,:\, \sqrt{y-1} = |x|\right\},\\
&= \left\{y \in \mathcal{R}ec(f) \,:\, \left(\sqrt{y-1} \in X \vee -\sqrt{y-1} \in X\right)\right\},\\
&= \left\{y \in \mathcal{R}ec(f) \,:\, 3 \leq \sqrt{y-1} \leq 4\right\},\\
&= \{y \in \mathcal{R}ec(f) \,:\, 9 \leq y-1 \leq 16\},\\
&= \{y \in \mathcal{R}ec(f) \,:\, 10 \leq y \leq 17\}.
\end{aligned}$$

Sea $Y = (-1,\, 2) \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(Y) &= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists y \in Y \,:\, y = x^2+1\right\},\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, -1 < x^2+1 < 2\right\},\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2+1 < 2\right\},\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 < 1\right\},\\
&= \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| < 1\} =]-1,\, 1[.
\end{aligned}$$

Sea $Y = (1,\, 4] \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(Y) &= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists y \in Y \,:\, y = x^2+1\right\},\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 1 < x^2+1 \leq 4\right\},\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x^2 \leq 3\right\},\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 0 \wedge |x| \leq \sqrt{3}\right\},\\
&= [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] - \{0\}.
\end{aligned}$$

Note que si $Y \cap \mathcal{R}ec(f) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(Y)$ es el conjunto vacío.

Propiedad 2.1 *Los conjuntos $f(X)$ y $f^{-1}(Y)$ satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $f^{-1}(\mathcal{R}ec(f)) = \mathcal{D}om(f)$,
2. $\tilde{X} \subseteq X \Rightarrow f(\tilde{X}) \subset f(X)$,
3. $\tilde{Y} \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(\tilde{Y}) \subseteq f^{-1}(Y)$,
4. $f(X \cup \tilde{X}) = f(X) \cup f(\tilde{X})$,
5. $f^{-1}(Y \cup \tilde{Y}) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(\tilde{Y})$,
6. $f(X \cap \tilde{X}) \subseteq f(X) \cap f(\tilde{X})$,
7. $f^{-1}(Y \cap \tilde{Y}) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(\tilde{Y})$,
8. $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

Definición 2.4 *Dadas las funciones $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiremos, si es posible, las funciones:*

1. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, se define $\lambda\, f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\lambda\, f)(x) = \lambda\, f(x)$,*
2. *$f \pm g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$,*
3. *$fg : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(fg)(x) = f(x)g(x)$,*
4. *$\dfrac{f}{g} : (A \cap B) - \{x \in B \ : \ g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$,*
5. *$f\, o\, g : \{x \in B \ : g(x) \in A\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f\, o\, g)(x) = f(g(x))$,*
6. *$g\, o\, f : \{x \in A \ : \ f(x) \in B\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(g\, o\, f)(x) = g(f(x))$.*

En los casos en que el dominio de la nueva función que queremos definir sea el conjunto vacío no es posible definir la función.

Ejemplo 2.4 *Sean $f : [-8, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x) = |x + 8|, \qquad g(x) = \sqrt{x - 1}.$$

Entonces

1. *$2f : [-8, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $(2f)(x) = 2f(x) = 2|x + 8|$,*
2. *$f + g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = |x + 8| + \sqrt{x - 1}$,*
3. *$f\, o\, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $(f\, o\, g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x - 1}) = |\sqrt{x - 1} + 8| = \sqrt{x - 1} + 8$ donde*

$$A = \{x \in [1, +\infty[\, : \ \sqrt{x - 1} \geq -8\} = [1, +\infty[.$$

4. $g\,o\,f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $(g\,o\,f)(x) = g(f(x)) = g(|x+8|) = \sqrt{|x+8|-1}$ *donde*

$$B = \{x \in [-8, +\infty[:\ |x+8| \geq 1\}$$

Dado que

$$|x+8| \geq 1 \Leftrightarrow x+8 \geq 1 \vee x+8 \leq -1 \Leftrightarrow x \geq -7 \vee x \leq -9$$

se tiene que

$$B = [-8, +\infty[\cap (]-\infty, -9] \cup [-7, +\infty[) = [-7, +\infty[.$$

Ejercicio 2.1 *Defina la composición de los pares de funciones dadas*

1. $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \dfrac{x-3}{2+x}$, $h : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $h(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$.
2. $f : A \subseteq B \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $f(x) = \sqrt{5-\sqrt{x}}$, $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $g(x) = x+8$.
3. $f : A \subseteq B \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $g(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}+1}$.

Dados dos conjuntos A y B, una función $f : A \longrightarrow B$ hace corresponder a cada $x \in A$ un único $y \in B$, pero no necesariamente a cada $y \in B$ un $x \in A$, puede ocurrir

1. no existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ (f no es sobreyectiva) o
2. existen al menos dos elementos $x_1, x_2 \in A$ distintos entre sí y tales que $f(x_1) = f(x_2) = y$ (f no es inyectiva).

Definición 2.5 *Una función* $f : A \longrightarrow B$ *es* sobreyectiva *si y sólo si* $f(A) = B$*, es decir, para cada* $y \in B$ *existe al menos un* $x \in A$ *tal que* $f(x) = y$*. Una función* $f : A \longrightarrow B$ *es* inyectiva *si y sólo si para cada* $y \in \mathcal{R}ec(f)$ *existe un único* $x \in A$ *tal que* $f(x) = y$*. Equivalentemente,*

$$\forall\, a, b \in A, \quad f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b.$$

Una función $f : A \longrightarrow B$ *es* biyectiva *si y sólo si* f *es inyectiva y sobreyectiva.*

Ejemplo 2.5 *Sea* $f : [0, 5] \longrightarrow [1, 11]$ *con* $f(x) = 2x+1$*. Demostremos que* f *es inyectiva y sobreyectiva.*

$$x_1, x_2 \in [0, 5],$$
$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Esto significa que f *es inyectiva. Además, para cada* $y \in [1, 11]$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x+1 = y \Leftrightarrow 2x = y-1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2},$$

y

$$1 \leq y \leq 11 \Leftrightarrow 0 \leq y - 1 \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{y-1}{2} \leq 5$$

es decir, para cada $y \in [1,\, 11]$ la ecuación $f(x) = y$ tiene solución en $[0,\, 5]$, es decir, para cada $y \in [1,\, 11]$ encontramos al menos un $x \in [0,\, 5]$ tal que $f(x) = y$ (en verdad encontramos uno solo, pero eso no es importante cuando se analiza la sobreyectividad). Con esto sabemos que f es sobreyectiva. Si tomamos, por ejemplo, $y = 1$, $x = 0$ es el único elemento en $[0,\, 5]$ para el cual $f(x) = 1$. Si tomamos $y = 7$, $x = 3$ es el único elemento en $[0,\, 5]$ para el cual $f(x) = 7$.

Del ejemplo anterior podríamos entonces definir $g : [1,\, 11] \longrightarrow [0,\, 5]$ de modo que

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y,$$

así $g(7) = 3$, $g(1) = 0$ y, en general $g(y) = \frac{y-1}{2}$. Esta función g (que es la única con dominio igual a B y recorrido igual a A que satisface $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$) se denomina *inversa de f* y se denota f^{-1}. En este caso

$$f^{-1} : [1,\, 11] \longrightarrow [0,\, 5] \qquad \text{con } f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Definición 2.6 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función biyectiva, su inversa se denota por f^{-1} y es tal que*

$$f^{-1} : B \longrightarrow A \qquad \textit{con } g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

¿Qué pasa si f no es biyectiva? ¿Podremos modificar f de modo que sí lo sea? Sí podemos. Dar ejemplo en clases.

Esto queremos hacerlo ahora con funciones reales. Sea $f : A \to B$. Si f no es inyectiva, debemos restringir su dominio de modo que lo sea, es decir, debemos encontrar $C \subset A$ de modo que la función $f|_C : C \longrightarrow B$ sea inyectiva. Si $\mathcal{R}ec(f|_C) = B$, $f|_C$ es sobreyectiva y, por tanto, biyectiva. De lo contrario, debemos calcular $D = f|_C(C)$ y definir una nueva función $\tilde{f} : C \longrightarrow D$ tal que $\forall\, x \in C \ :$ $\tilde{f}(x) = f(x)$ que es biyectiva. Esta nueva función tiene inversa y es

$$\tilde{f}^{-1} : D \longrightarrow C \quad \text{tal que} \quad \forall\, y \in D \ : \ \tilde{f}^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f|_C(x) = y$$

Ejercicio 2.2 *De las siguientes funciones determine dominio, recorrido, inversa (si es posible, de no ser posible, restringir) y componer algunas de ellas.*

$$f : \mathcal{D}om(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x-3}{2+x},$$
$$g : \mathcal{D}om(g) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2-1},$$

Definición 2.7 *Una función que satisfaga $\forall\, x \in \mathcal{D}om(f), -x \in \mathcal{D}om(f)$ es* par *si y sólo si*

$$\forall\, x \in \mathcal{D}om(f) \;:\; f(x) = f(-x).$$

Ella es impar *si y sólo si*

$$\forall\, x \in \mathcal{D}om(f) \;:\; f(x) = -f(-x).$$

Ejemplo 2.6 *Note que*

1. $f(x) = x$ *es impar pues*
$$f(-x) = -x = -f(x).$$

2. $f(x) = x^2$ *es par*
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Note que una función f puede ser ni par ni impar, por ejemplo, $f(x) = x^2 + 2x - 1$ es tal que

$$f(-x) = x^2 - 2x - 1 \neq f(x), \quad f(-x) = x^2 - 2x - 1 \neq -f(x).$$

Pero toda función f con la propiedad mencionada antes puede escribirse como suma de una función par y una función impar pues

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{h(x)}.$$

Ejercicio 2.3 *Muestre que $g(x)$ es par y $h(x)$ es impar.*

En la función del ejemplo anterior, $f(x) = x^2 + 2x - 1$ se tiene que $f(x) = g(x) + h(x)$ con

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{x^2 + 2x - 1 + x^2 - 2x - 1}{2} = x^2 - 1$$

que es una función par y

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x + 1}{2} = 2x$$

que es una función impar.

Propiedad 2.2

1. *Si f es par, entonces f no es inyectiva.*

2. *El gráfico de una función par es simétrico con respecto al eje Y.*

3. *El gráfico de una función impar es simétrico con respecto al origen.*

Una propiedad importante de una función es su monotonía. Considerar el siguiente ejemplo de manera gráfica: Si, por ejemplo, una cierta función describe el comportamiento de la ganancia de producir cierto producto en dependencia del número de unidades producidas de él, sería bueno saber cuál es el número de unidades que debe producirse del producto para tener una ganancia máxima. Al analizar la monotonía de la función determinaríamos en cuáles subintervalos de su dominio ella crece y en cuáles decrece y, con ayuda de esta información, podríamos determinar los puntos del dominio de la función donde ella alcanza valores máximos y mínimos. La primera derivada de una función (que se verá en Cálculo I) es una mejor herramienta para determinar estos puntos.

Definición 2.8 *Sea $f : \mathcal{D}om(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathcal{D}om(f)$. f es* monótona creciente *en A si para todo par de valores $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. f es* estrictamente creciente *en A si para todo par de valores $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. De manera similar, f es* monótona decreciente *en A si para todo par de valores $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. f es* estrictamente decreciente *en A si para todo par de valores $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.*

Ejemplo 2.7 *La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es monótona decreciente en $]-\infty, 0]$ y monótona creciente en $[0, +\infty[$ pues*

- $x_1, x_2 \in]-\infty, 0], x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2,$
- $x_1, x_2 \in]0, +\infty], x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2,$

CAPÍTULO 3

Funciones $\exp_a$ y $\log_a$

Definamos primero qué significa a^x si $a \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{Q}$.

Si $x \in \mathbb{N}$:

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{x \text{ veces}},$$

Por ejemplo,

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4, \quad (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

Note que si $a \geq 0$, entonces $a^x \geq 0$. Si $a < 0$ y x es par, entonces $a^x > 0$. Sólo si $a < 0$ y x es impar, $a^x < 0$.

Si $x \in \mathbb{Z}$:

$$a^x = \begin{cases} \text{como se definió antes}, & \text{si } x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ a^x = a^{-y} = \left(\frac{1}{a}\right)^y, & x = -y, \quad y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

De nuevo ocurre que sólo cuando $a < 0$ y $|x|$ es impar, $a^x < 0$.

Potencia $x = \frac{1}{q}$, $(q \in \mathbb{Z})$ de un número real $a > 0$: Supongamos ahora que $a > 0$

- si $q \in \mathbb{N}$, se define $a^{\frac{1}{q}}$ (o $\sqrt[q]{a}$) como el único número real $b > 0$ tal que $b^q = a$. Por ejemplo,
$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \text{ pues } 2^2 = 4, \quad 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ pues } 3^3 = 27.$$
- si $q < 0, q = -p$ con $p \in \mathbb{N}$ y $a^{\frac{1}{q}} = a^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{p}}}$ y $a^{\frac{1}{p}}$ es como en el punto anterior. Por ejemplo,
$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}, \quad 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}.$$

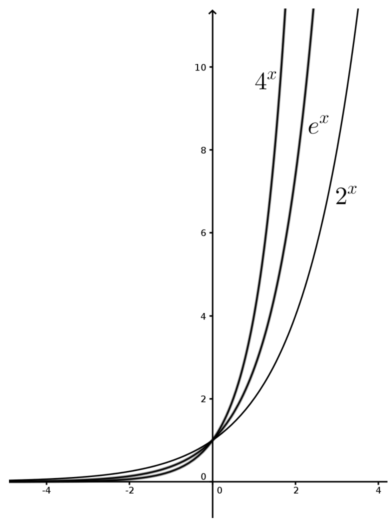


Figura 3.1: Función $\exp_a$ con $a > 1$.

Para $a > 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ se define entonces *la potencia con exponente racional de* a como

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, también es posible definir a^x, pero esta definición está fuera de los objetivos de este curso. Sin embargo, sí veremos las propiedades de a^x siendo $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ y $x \in \mathbb{R}$[1].

3.1 Función $\exp_a,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$

Dado $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$, la función

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

es tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}\ :\ \exp_a(x) = a^x$.

En la figura 3.2 se muestran los gráficos de algunas de estas funciones con $0 < a < 1$ y $a > 1$. El número e que aparece en los gráficos es un número real especial que se denomina *número de Euler*. Por el momento lo más importante a saber de él es que $2 < e < 3$.

Observe que:

1. el dominio de las funciones $\exp_a$ es todo el conjunto de los números reales,
2. el recorrido de ellas es $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x > 0\}$,
3. el punto $(0, 1)$ pertenece al gráfico de todas ellas, es decir, $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$ se cumple que $a^0 = 1$,

[1]Si $a = 1$, entonces $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se tiene que $a^x = 1^x = 1$.

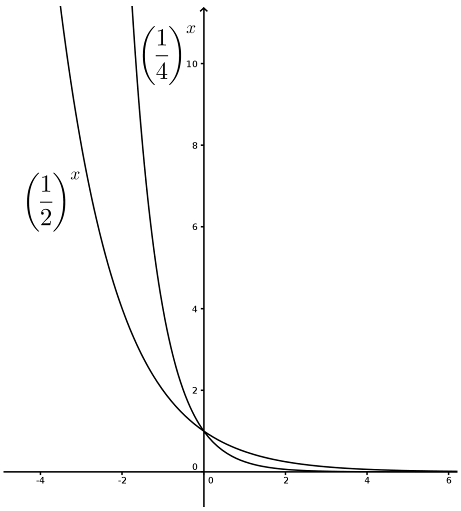


Figura 3.2: Función $\exp_a$ con $0 < a < 1$.

4. si $a > 1$, las funciones $\exp_a$ son estrictamente crecientes (a medida que x crece, crecen los valores de $\exp_a(x)$), es decir,
$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \exp_a(x_1) < \exp_a(x_2).$$
5. si $0 < a < 1$, entonces $b = \frac{1}{a} > 1$ y $a^x = \frac{1}{b^x}$. Como la función b^x es estrictamente creciente, a^x es estrictamente decreciente, es decir,
$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \exp_a(x_1) > \exp_a(x_2).$$
6. si $a > 1$,
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$
Si $0 < a < 1$, entonces $b = \frac{1}{a} > 1$ y $a^x = \frac{1}{b^x}$ con lo que
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{b^x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{b^x} = +\infty,$$
lo cual significa que si $a > 1$, a medida que x crece también crecen los valores de a^x y no existe $M \in \mathbb{R},\ M > 0$ tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}\ :\ a^x < M$. Además, a medida que x decrece, los valores de a^x se acercan a cero. Si $0 < a < 1$, ocurre lo contrario, es decir, a medida que x crece, los valores de a^x se acercan a cero y a medida que x decrece, crecen los valores de a^x y no existe $M \in \mathbb{R},\ M > 0$ tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}\ :\ a^x < M$.
7. las funciones son biyectivas, es decir, es posible definir su inversa.

Antes de definir la inversa de la función $\exp_a$, veamos cómo resolver ecuaciones e inecuaciones que involucren a la función $\exp_a$ usando las propiedades antes mencionadas y las siguientes:

1. $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ :\ a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$,

2. $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ :\ \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$,

3. $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ :\ (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$.

Ejemplo 3.1 *Resuelva las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{R}$:*

1. $2^{x-2} = \frac{1}{4}$,

$$2^{x-2} = 2^{-2} \Leftrightarrow 2^{x-2} = \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow 2^{x-2} = 2^{-2}$$

y, como la función $\exp_2$ *es inyectiva, esta igualdad se cumple si y sólo si*

$$x - 2 = -2 \Leftrightarrow x = 0.$$

2. $2^x - 4 = -2^{2-x}$,

$$2^x - 4 = -2^{2-x} \Leftrightarrow 2^x - 2^2 = -\frac{2^2}{2^x} \Leftrightarrow 2^x 2^x - 2^x 2^2 = -2^2 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Denotemos $y = 2^x$, *entonces* $y > 0$ *y*

$$y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2.$$

Por tanto, x *es tal que* $2^x = 2$, *es decir,* $x = 1$.

3. $2^{x+1} - 2 = 2^{2-x}$,

$$2^{x+1} - 2 = 2^{2-x} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x - 2 = \frac{2^2}{2^x} \Leftrightarrow 2(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x = 4 \Leftrightarrow 2(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 4 = 0.$$

Nuevamente, si $y = 2^x$, *entonces* $y > 0$ *y*

$$2y^2 - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow (2y-4)(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \ \vee\ y = -1.$$

Como $y > 0$, *entonces* $y = 2$ *y* x *es tal que*

$$2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

4. $3^{x^2-4x+2} = \frac{1}{9}$,

$$3^{x^2-4x+2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x^2-4x+2} = \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow 3^{x^2-4x+2} = 3^{-2},$$

y, como la función $\exp_3$ *es inyectiva, la igualdad anterior se cumple si y sólo si,*

$$x^2 - 4x + 2 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

5. $\exp_2(x) - \exp_2(-x) \geq 3\left(1 + \exp_2(-x)\right)$,
   Esta inecuación es
   $$2^x - 2^{-x} \geq 3\left(1 + 2^{-x}\right) \Leftrightarrow 2^x - \frac{1}{2^x} \geq 3\left(1 + \frac{1}{2^x}\right) \Leftrightarrow \frac{(2^x)^2 - 1}{2^x} \geq 3\left(\frac{2^x + 1}{2^x}\right)$$
   Multiplicando la inecuación anterior por 2^x *(que es mayor que cero para todo* $x \in \mathbb{R}$*) se tiene que* x *es tal que*
   $$(2^x)^2 - 1 \geq 3 \cdot 2^x + 3 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 \geq 0$$
   Denotemos $y = 2^x$*, entonces* $y > 0$ *y*
   $$y^2 - 3y - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (y-4)(y+1) \geq 0 \Leftrightarrow (y \leq -1) \vee (y \geq 4).$$
   Pero como $y > 0$*, se tiene* $y \geq 4$*, es decir,* x *es tal que*
   $$2^x \geq 4 \Leftrightarrow 2^x \geq 2^2$$
   y, como la función $\exp_2$ *es estrictamente creciente, esta desigualdad se cumple si y sólo si* $x \geq 2$.

3.2 Función $\log_a$

Denotemos por $\log_a := \exp_a^{-1}$, es decir,
$$\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } a^x = y \Leftrightarrow \log_a(y) = x.$$
Estas nuevas funciones satisfacen, por tanto,

1. $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a(1) = 0$.
2. $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a(a) = 1$.
3. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a^{x_1} = y_1$ y $a^{x_2} = y_2$, lo que significa que $\log_a(y_1) = x_1$ y $\log_a(y_2) = x_2$. De las propiedades de las potencias base a de un número real se obtienen las siguientes propiedades para el logaritmo base a de un número real mayor que cero:
   - El logaritmo de un producto de números positivos es la suma de los logaritmos de esos números:
     $$a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \Leftrightarrow y_1y_2 = a^{x_1+x_2} \Leftrightarrow \log_a(y_1y_2) = x_1 + x_2 = \log_a(y_1) + \log_a(y_2).$$
     Se ha probado que
     $$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ se cumple } \log_a(y_1y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2).$$
   - El logaritmo del cociente entre dos números positivos es la diferencia entre los logaritmos de esos números:
     $$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2} \Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = a^{x_1-x_2} \Leftrightarrow \log_a\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = x_1 - x_2 = \log_a(y_1) - \log_a(y_2).$$
     Se ha probado que
     $$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ se cumple } \log_a\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log_a(y_1) - \log_a(y_2).$$

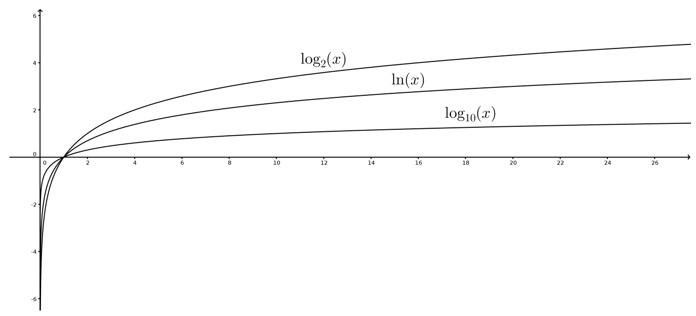


Figura 3.3: Función $\log_a$ con $a > 1$.

- El logaritmo de un número de positivo elevado a un número real es el número real multiplicado por el logaritmo del número positivo:

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2} \Rightarrow y_1^{x_2} = a^{x_1 x_2} \Rightarrow \log_a(y_1^{x_2}) = x_1 x_2 = x_2 x_1 = x_2 \log_a(y_1)$$

  Se ha probado que

$$\forall y > 0, x \in \mathbb{R} \text{ se cumple } \log_a(y^x) = x \log_a(y).$$

- La siguiente regla permite cambiar la base de un logaritmo pues:

$$\log_b(y_1) = \log_b(a^{\log_a(y_1)}) = \log_a(y_1)\log_b(a) \Rightarrow \log_a(y_1) = \frac{\log_b(y_1)}{\log_b(a)}.$$

4. Ya sabemos que si $a > 1$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \,:\, x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$.

   Sean ahora $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$, $y_1 < y_2$. Como $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$, existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a^{x_1} = y_1$ ($x_1 = \log_a(y_1)$), $a^{x_2} = y_2$ ($x_2 = \log_a(y_2)$).

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a(y_1) < \log_a(y_2).$$

   Es decir, si $a > 1$, $\log_a$ es una función estrictamente creciente en todo su dominio.

5. De manera similar puede verse que si $0 < a < 1$, $\log_a$ es una función estrictamente decreciente en su dominio.

   En la figura 3.4 se muestran los gráficos de algunas de estas funciones con $0 < a < 1$ y $a > 1$. En ella la función $\log_e(x)$ se ha denotado mediante $\ln(x)$.

Ejercicio 3.1 *Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas.*

1. $\log_3(2x + 1) = 4$.
2. $\log_3(2x - 3) + \log_3(x + 6) = 3$.
3. $\log(2x + 6) - \log(x - 9) = \log 4$.
4. $\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) < -2$.

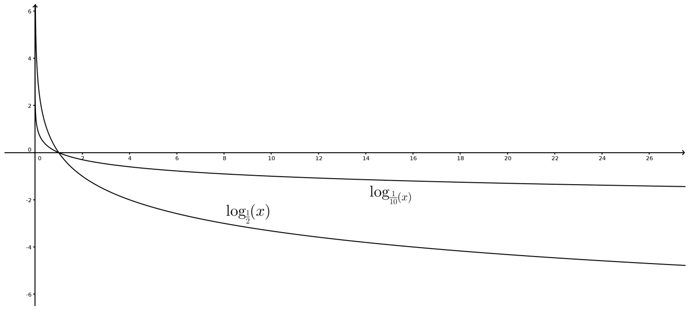


Figura 3.4: Función $\log_a$ con $0 < a < 1$.

Ejercicio 3.2 *Inecuaciones exponenciales y logarítmicas.*

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^x \geq 1$.
2. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-x} \geq 1$.
3. $\log_3(3x+9) > 4$.

Ejercicio 3.3 *Considere la función $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_2(4x^2 - 1)$.*

Ejemplo 3.2 1. *Suponga que un Banco me ofrece hacer un depósito a plazo fijo de K_0 pesos por 2 años con una tasa de interés del 11.4 porciento ($q = 0.114$) . Después de 2 años tendré entonces $K_1 = K_0(1+q)$ pesos. Si decido dejar mi dinero en el depósito a plazo fijo por 2 años más, tendré luego de esos 2 años*

$$K_2 = K_1(1+q) = K_0(1+q)^2$$

pesos. Si esto se repite m veces, después de $2m$ años, mi capital será de $K_m = K_0(1+q)^m$. Ahora quiero calcular cuántas veces debo renovar mi depósito a plazo si quiero esperar hasta que mi capital inicial de K_0 pesos se haya duplicado. Quiero entonces encontrar m_0 ($m_0 - 1$ veces debo renovar mi depósito) de modo que $K_{m_0} = K_0(1+q)^{m_0} = 2K_0$.

$$K_0(1+q)^{m_0} = 2K_0 \Leftrightarrow (1+q)^{m_0} = 2 \Leftrightarrow \log_{1+q}(2) = m_0 \Leftrightarrow m_0 = \frac{\log_2(2)}{\log_2(1+q)}.$$

Con el valor de q dado antes ($q = 0.114$) se obtiene $m_0 = 6.4206 \Rightarrow m_0 - 1 = 5.4206 < 6$, es decir, debo renovar mi depósito 6 veces para duplicar mi capital, esto significa que debo dejar los K_0 pesos iniciales un total de 12 años en el banco.

2. *La vida media del Argón 39 es de 4 minutos. Esto significa que, dada cierta cantidad inicial A_0 de Argón 39, después de 4 minutos la mitad de esa cantidad inicial ha desaparecido. Entonces, si A_t denota la cantidad de Argón 39 después de $4t$ minutos se tiene que*

$$A_0,\ A_1 = \frac{1}{2}A_0,\ A_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A_0,\ \ldots,\ A_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t A_0.$$

¿Qué ocurre con la cantidad de Argón 39 a medida que $t \to +\infty$*? ¿Cuántos minutos deben transcurrir para que la cantidad restante de Argón 39 sea* $\frac{1}{10}$ *de la cantidad original?*

$$A_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t A_0 = \frac{1}{10}A_0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{10} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10}$$

Es decir, desde los $4\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10}$ *minutos la cantidad de Argón 39 será un décimo de la cantidad original. Aquí, supongamos que nuestra calculadora no permite calcular logaritmo base* $\frac{1}{2}$ *de un número real positivo. Podemos hacer uso de la propiedad de cambio de base para averiguar el valor de* $4\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10}$ *pues*

$$4\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10} = 4\frac{\log_2 \frac{1}{10}}{\log_2 \frac{1}{2}} = -4\log_2 \frac{1}{10} \approx 13.3,$$

es decir, después de 14 minutos la cantidad de Argón restante es seguramente menor a un décimo de la cantidad original.

3. *Se ha determinado que un trabajador de un almacén farmacéutico puede, después de* t *meses de trabajo, ordenar*

$$M(t) = 300 - 250e^{-0.05\,t}$$

cajas de medicamentos por hora. Veamos qué signfica esto.

¿Cuántas cajas puede ordenar en una hora una persona sin experiencia?

$$M(0) = 300 - 250 = 50.$$

¿Qué ocurre con $M(t)$ *a medida que* $t \to +\infty$*?*

¿A los cuántos meses de trabajo es la persona capaz de ordenar 280 cajas de medicamentos en una hora?

$$M(t) = 280 \Leftrightarrow 20 = 250e^{-0.05\,t} \Leftrightarrow e^{0.05\,t} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow t = \frac{100}{5}\ln\frac{25}{2} \approx 50.5146.$$

4. *Determine los valores de* $x \in \mathbb{R}$ *para los cuales se cumple que:*

   a) $\log_3(x^2 - 1) = 0,$
   Dado que $\mathcal{D}om(\log_3) = \mathbb{R}^+$, x *debe ser tal que* $x^2 - 1 > 0$, *es decir,* $x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. *Además*

$$\log_3(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x^2-1) = \log_3 3^0 \Leftrightarrow \log_3(x^2-1) = \log_3(1)$$

   Como $\log_3$ *es una función inyectiva, la igualdad anterior se cumple si y sólo si*

$$x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \,\vee\, x = -\sqrt{2}.$$

   Tanto $\sqrt{2}$ *como* $-\sqrt{2}$ *pertenecen al conjunto* $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, *el conjunto solución de esta ecuación es*

$$S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}.$$

b) $\log_2(x^2+3) = 1 + \log_2|x+3|$,
Para todo $x \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $x^2+3 > 0$. *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$ *se cumple que* $|x+3| > 0$. *Por tanto,* x *debe ser distinto de* -3. *Además*

$$\begin{aligned}\log_2(x^2+3) = 1 + \log_2|x+3| &\Leftrightarrow \log_2(x^2+3) = \log_2(2^1) + \log_2|x+3| \\ &\Leftrightarrow \log_2(x^2+3) = \log_2(2|x+3|) \Leftrightarrow x^2+3 = 2|x+3|.\end{aligned}$$

El conjunto solución de esta ecuación es: $\{3, -1\}$.

c) $\log_{2x}(8) = 2$,
x *debe ser mayor que cero y distinto de* $\frac{1}{2}$ *para que* $2x > 0$ *y* $2x \neq 1$. *Entonces,*

$$\log_{2x}(8) = 2 \Leftrightarrow \log_{2x}(8) = \log_{2x}(2x)^2 \Leftrightarrow 8 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \ \vee \ x = -\sqrt{2}.$$

De estas dos soluciones de la ecuación $x^2 = 2$ *sólo una es solución de la ecuación original y el conjunto solución de esta ecuación es* $\{\sqrt{2}\}$.

d) $\log_2(x^2-4) \geq 2$,
x *debe ser tal que* $x^2-4 > 0$, *es decir,* $|x| > 2$. *Además*

$$\log_2(x^2-4) \geq 2 \Leftrightarrow \log_2(x^2-4) \geq \log_2(2^2).$$

Como la función $\log_2$ *es creciente, la desigualdad anterior se cumple si y sólo si*

$$x^2-4 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 \geq 14 \Leftrightarrow |x| > 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[\subset]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[.$$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación dada es $]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$.

3.3 Funciones Trigonométricas

Consideremos la circunferencia unitaria (centro en origen de coordenadas y radio 1). Su perímetro es igual a 2π.

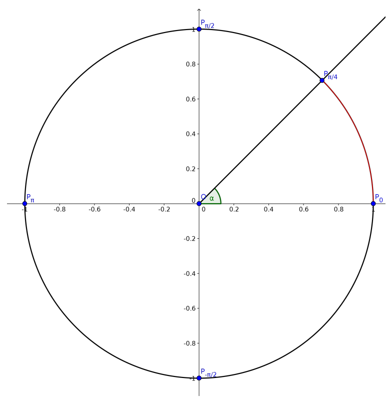


Figura 3.5: $P_{\pi/4}$ representa a $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Dado un $\alpha > 0$, identificaremos con $P(\alpha)$ al punto sobre la circunferencia unitaria que se obtiene luego de recorrer un arco de longitud α sobre ella comenzando en $(1,0)$ y en sentido anti-horario. Dado un $\alpha < 0$, identificaremos con $P(\alpha)$ al punto sobre la circunferencia unitaria que se obtiene luego de recorrer un arco de longitud α sobre ella comenzando en $(1,0)$ y en sentido horario. Si, por ejemplo, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, se obtiene el punto que se indica en la figura 3.5. Note que, si α representa el ángulo correspondiente a una longitud de arco l_α, se tiene que

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{l_\alpha}{2\pi} \Rightarrow \alpha = 180\frac{l_\alpha}{\pi}$$

con lo que si $l_\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 45^o$. Los puntos P_0, $P_{\pi/2}$, P_π y $P_{-\pi/2}$ en 3.5 corresponden a $P(0), P\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $P(\pi)$ y $P\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ respectivamente. Dado que hay una correspondencia 1-1 entre una longitud de arco y un ángulo, a menudo nos referiremos a los ángulos como valores en radianes en lugar de valores en grados.

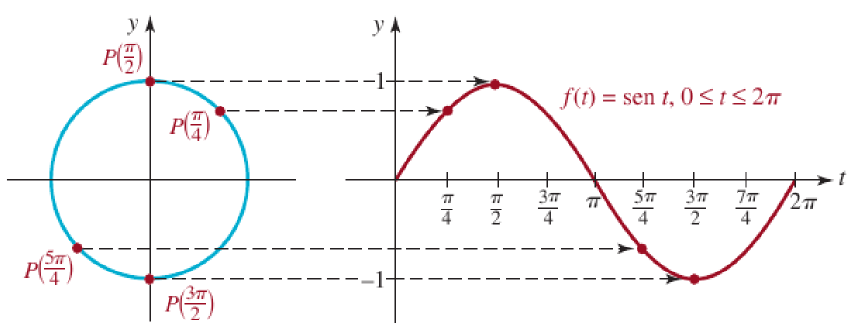
Definición 3.1 *Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se define $\cos(\alpha)$ como el valor de la primera coordenada del punto $P(\alpha)$ y como $\sin(\alpha)$ al valor de la segunda coordenada del punto $P(\alpha)$. De este modo*

1. $P(0) = (1,0) \Rightarrow \cos(0) = 1, \sin(0) = 0,$
2. $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$
3. $P(\pi) = (-1,0) \Rightarrow \cos(\pi) = -1, \sin(\pi) = 0,$
4. $P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = P\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0,-1) \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$

De la definición se desprende las siguientes propiedades.

Propiedad 3.1

1. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \;:\; \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1,$
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \;:\; -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ *y* $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1,$
3. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \;:\; \forall\, k \in \mathbb{Z} \;:\; \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$ *y* $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$ *(las funciones* $\sin$ *y* $\cos$ *son periódicas de período* 2π*).*



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\operatorname{sen}(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Cuadro 3.1: Tabla de valores: Función seno.

Por otra parte, usando la periodicidad y la imparidad de la función seno ($\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$), que significa simetría con respecto al origen, se obtiene la siguiente gráfica para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$:

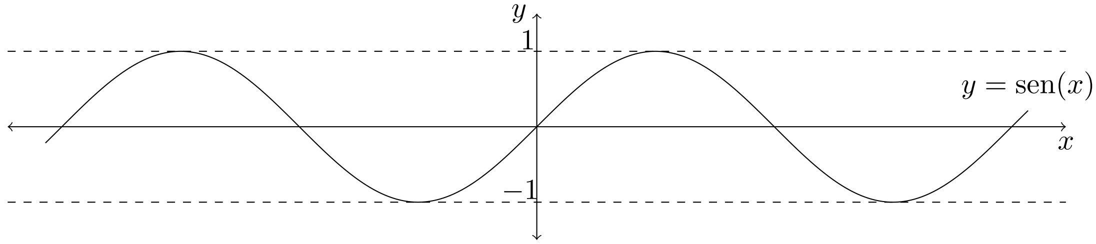


Figura 3.6: Representación gráfica de la función seno en $\mathbb{R}$.

Se define la función inversa del seno en el intervalo restringido $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, por:

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ tal que}$$
$$y = f(x) = \operatorname{Arcsen}(x) \Longleftrightarrow x = \operatorname{sen}(y).$$

Note que $\operatorname{Dom}(\operatorname{Arcsen}) = [-1, 1]$ y $\operatorname{Rec}(\operatorname{Arcsen}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

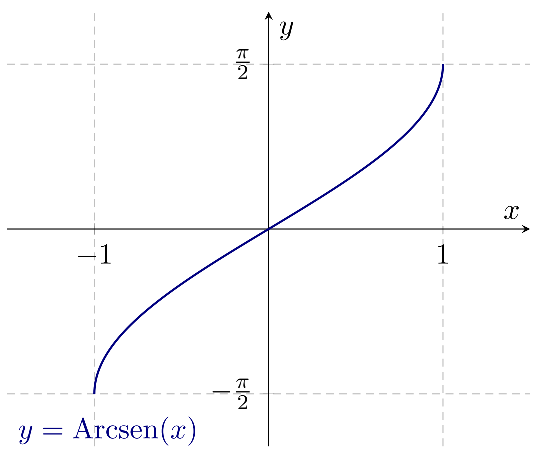


Figura 3.7: Representación gráfica de la función $y = \operatorname{Arcsen}(x)$.

En forma análoga, para la función $y = \cos(x)$, los valores para $x \in [0, 2\pi]$ se pueden obtener a partir de la relación $\cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Cuadro 3.2: Tabla de valores: Función coseno.

Usando la periodicidad y la paridad de la función coseno, esto es: $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\cos(x + 2n\pi) = \cos(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, respectivamente, se obtiene la gráfica de $y = \cos(x)$.

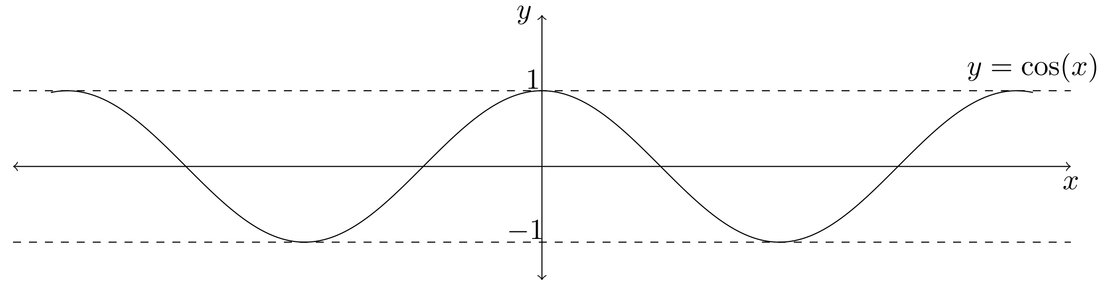


Figura 3.8: Representación gráfica de la función coseno en $\mathbb{R}$

Se define la función inversa del coseno en el intervalo restringido $[0, \pi]$, por:

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi]\,, \text{ tal que} \\ y = f(x) = \operatorname{Arccos}(x) &\Longleftrightarrow x = \cos(y). \end{aligned}$$

Note que $\operatorname{Dom}(\operatorname{Arccos}) = [-1, 1]$ y $\operatorname{Rec}(\operatorname{Arcsen}) = [0, \pi]$.

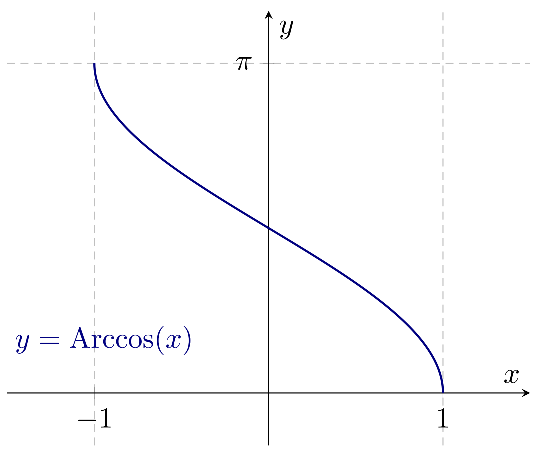


Figura 3.9: Representación gráfica de la función $y = \operatorname{Arccos}(x)$.

Desde la gráfica de estas funciones podemos extraer las siguientes propiedades.

Propiedad 3.2

1. *El dominio de* $f(x) = \text{sen}(x)$ *y el dominio de* $g(x) = cos(x)$ *es el conjunto de números reales, es decir,* $(-\infty, +\infty)$.

2. *El recorrido de* $f(x) = \text{sen}(x)$ *y de* $g(x) = \cos(x)$ *es el intervalo* $[-1, 1]$ *(eje* y*).*

3. *Los ceros de* $f(x) = \text{sen}(x)$ *son* $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. *Los ceros de* $g(x) = \cos(x)$ *son* $x = (2n+1)\pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. *La gráfica de* $f(x) = \text{sen}(x)$ *es simétrica con respecto al origen. La gráfica de* $g(x) = \cos(x)$ *es simétrica con respecto al eje* y.

5. *Las funciones* $f(x) = \text{sen}(x)$ *y* $g(x) = \cos(x)$ *son continuas en su dominio.*

En lo que refiere a la función tangente se hará un análisis más formal:

a) Dominio: Como $\tan(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, $\cos(x) \neq 0$ entonces $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$. Luego

$$\text{Dom}(\tan) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \ ; \ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Rec(tan)= $\mathbb{R}$

c) Intersecciones con los ejes:

   i) Eje Y: Si $x = 0 \Longrightarrow \text{sen}(0) = 0$, $\cos(0) = 1$. Luego $\tan(0) = 0$, es decir, la gráfica de la función pasa por el origen.

   ii) Eje X: Si $y = 0$, entonces $\tan(x) = 0 \Longrightarrow \text{sen}(x) = 0$. $x = 0, \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \ldots\ (x = n\pi;\ n \in \mathbb{Z})$. Es decir, la gráfica de la función corta el eje X en infinitos puntos.

d) Simetría:

   i) Con respecto al origen: Como $\tan(-x) = \dfrac{\text{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\text{sen}(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$
   Luego la función tangente es una función impar (es decir, su gráfica es simétrica con respecto al origen).

e) Asíntotas: Para obtener las asíntotas verticales se hace $\cos(x) = 0$, obteniéndose $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, que corresponde a las ecuaciones de dichas asíntotas. En cambio, asíntotas horizontales no existen, puesto que Rec(tan)= $\mathbb{R}$.

f) Periocidad: $\tan(x + n\pi) = \tan(x)$.

g) Tabla de valores:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Indeterminado

Cuadro 3.3: Tabla de valores: Función tangente.

Aprovechando que la función $y = \tan(x)$ es simétrica con respcto al origen y periódica de periodo π, se tiene que la gráfica es

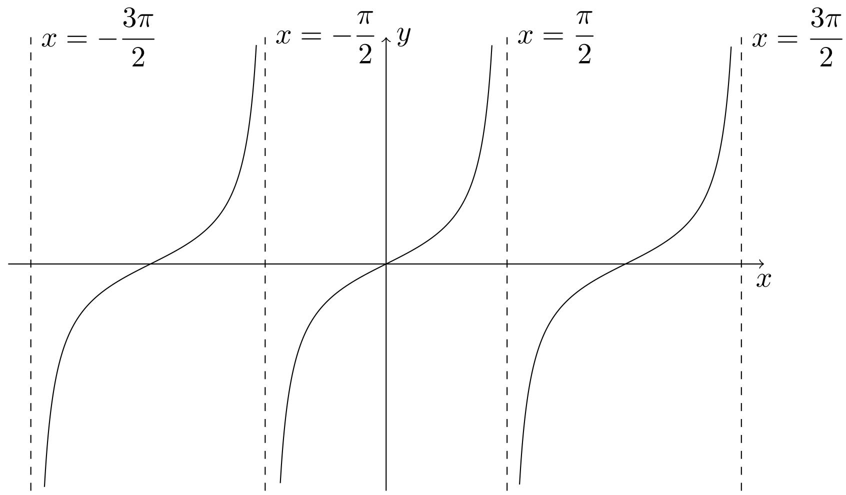


Figura 3.10: Representación gráfica de la función tangente, $y = \tan(x)$.

Se define la función inversa de la tangente en el intervalo restringido $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, por:

$$f :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ tal que}$$
$$y = f(x) = \text{Arctan}(x) \Longleftrightarrow x = \tan(y).$$

Note que $\text{Dom(Arctan)} =]-\infty, \infty[$ y $\text{Rec(Arctan)} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

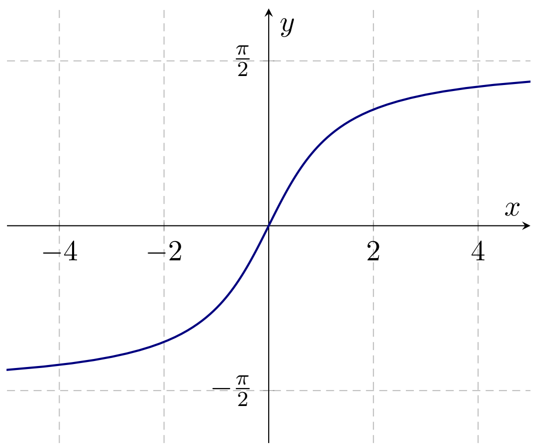


Figura 3.11: Representación gráfica de la función $y = \text{Arctan}(x)$.

Haciendo un análisis similar es posible obtener las gráficas de restantes funciones trigonométricas:

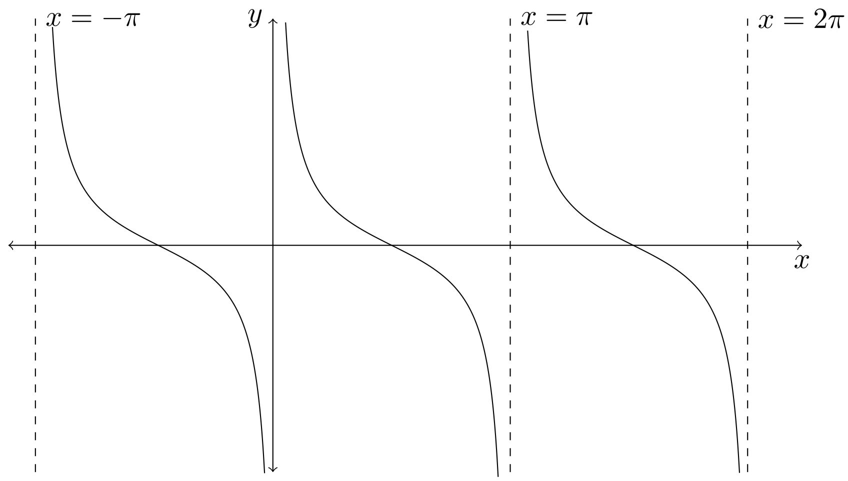


Figura 3.12: Representación gráfica de la función cotantenge, $y = \cot(x)$.

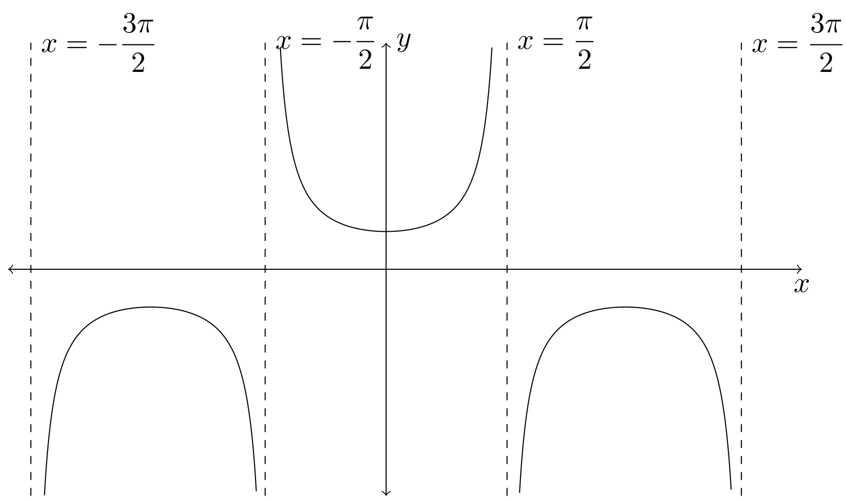


Figura 3.13: Representación gráfica de la función secante, $y = \sec(x)$.

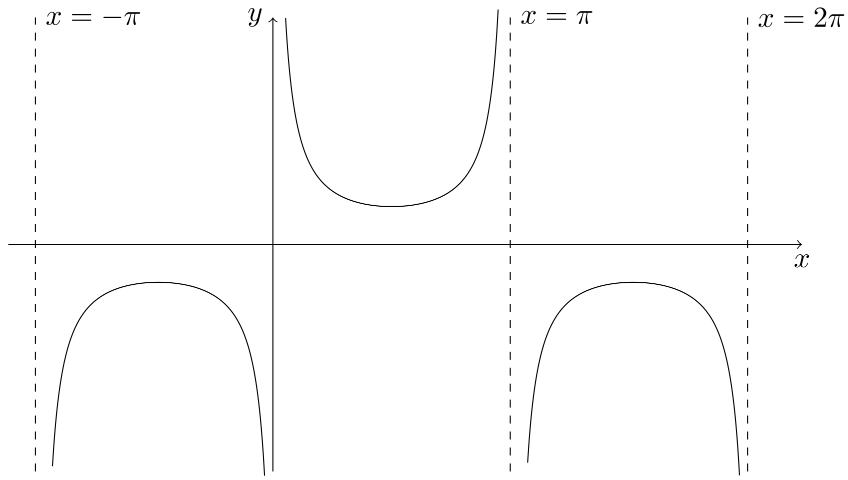


Figura 3.14: Representación gráfica de la función cosecante, $y = \csc(x)$.

Las funciones $\cot(x)$, $\sec(x)$ y $\csc(x)$ también tienen inversas, cuando se restringe su dominio en forma adecuada.

Propiedad 3.3

1. $\text{Arcsen}(\text{sen}(x)) = x$ *si* $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
2. $\text{sen}(\text{Arcsen}(x)) = x$ *si* $-1 \leq x \leq 1$.
3. $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$ *si* $0 \leq x \leq \pi$.
4. $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$ *si* $-1 \leq x \leq 1$.
5. $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$ *si* $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
6. $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$ *si* $-\infty < x < +\infty$.

Gráfica de variaciones de las funciones seno y coseno

Se considerarán las gráficas de funciones del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} y &= A\,\text{sen}(Bx + C) \\ y &= A\cos(Bx + C) \end{aligned}$$

siendo, A, B y C constantes, pudiendo ser algunas iguales a cero. Estas constantes producen el efecto de trasladar, ampliar, reflejar o reducir las gráficas básicas de $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$. Si la primera ecuación se escribe en la forma:

$$y = A\,\text{sen}\left[B\left(x + \frac{C}{B}\right)\right]$$

se tiene:

A : Amplía verticamente si $A > 1$,

B : Amplía horizontalmente si $0 < B < 1$,

$\dfrac{C}{B}$: Traslada hacia la izquierda si $\dfrac{C}{B} > 0$.

Ejemplo 3.3 *Comparar las gráficas de* $y = \operatorname{sen}(x)$ *e* $y = 3\operatorname{sen}(x)$*.*

Se observa en la figura 3.15 que la diferencia radica en los recorridos, mientras que el recorrido de $y = \operatorname{sen}(x)$ *es* $[-1, 1]$*, el recorrido de* $y = 3\operatorname{sen}(x)$ *es* $[-3, 3]$*. En general, para la gráfica de* $y = A\operatorname{sen}(x)$*, se tiene que* $|A|$ *es su valor máximo. La constante* $|A|$ *se llama* amplitud *de onda senoidal.*

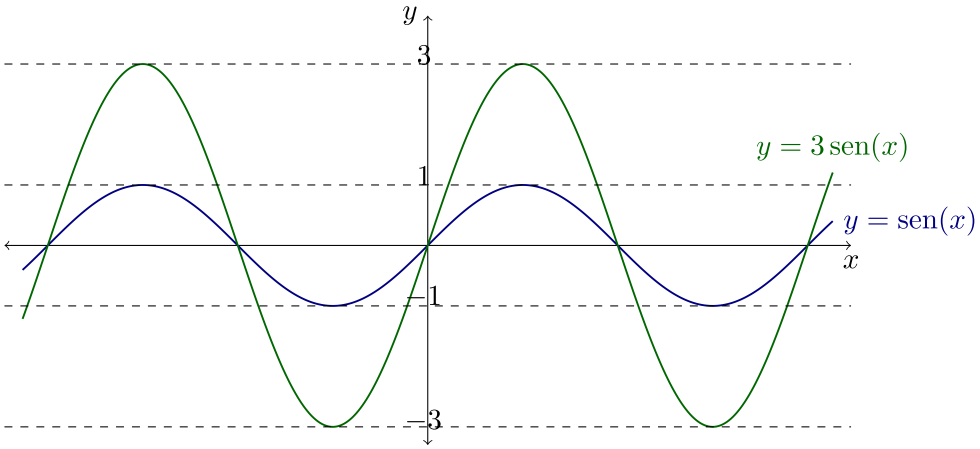


Figura 3.15: Representación gráfica de las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = 3\operatorname{sen}(x)$.

- *Si* $A > 1$ *la gráfica de* $y = A\operatorname{sen}(x)$ *corresponde a una ampliación vertical de la gráfica de* $y = \operatorname{sen}(x)$*.*

- *Si* $0 < A < 1$ *la gráfica de* $y = A\operatorname{sen}(x)$ *corresponde a una reducción vertical de la gráfica de* $y = \operatorname{sen}(x)$*.*

- *Si* $A < 0$ *la gráfica de* $y = A\operatorname{sen}(x)$ *corresponde a una reflexión vertical de la gráfica de* $y = \operatorname{sen}(x)$ *respecto del eje* X *(amplíada o reducida verticalmente).*

Ejemplo 3.4 *Comparar las gráficas de* $y = \operatorname{sen}(x)$ *e* $y = \operatorname{sen}(3x)$*.*

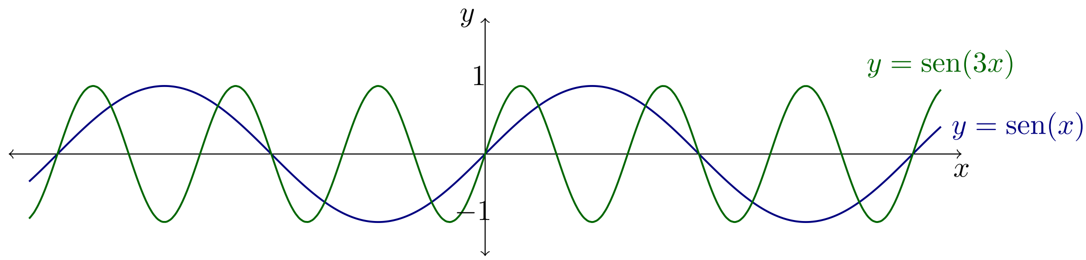


Figura 3.16: Representación gráfica de las funciones $y = \text{sen}(x)$, $y = \text{sen}(3x)$.

Se observa que la diferencia radica en los períodos, mientras que el período de $y = \text{sen}(x)$ *es* 2π *se tiene que el período de* $y = \text{sen}(3x)$ *es de* $\dfrac{2\pi}{3}$. *En general, para la gráfica de* $y = \text{sen}(Bx)$, *se tiene que* $Bx = 0$ *y cuando* $Bx = 2\pi$ *entonces* $x = \dfrac{2\pi}{B}$, *siendo éste valor su período.*

Note que:

- *Si* $B > 1$ *la gráfica de* $y = \text{sen}(Bx)$ *corresponde a una reducción horizontal de la gráfica de* $y = \text{sen}(x)$.
- *Si* $0 < B < 1$ *la gráfica de* $y = A\,\text{sen}(x)$ *corresponde a una ampliación horizontal de la gráfica de* $y = \text{sen}(x)$.

Ejemplo 3.5 *Comparar las gráficas de* $y = \text{sen}(x)$ *e* $y = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

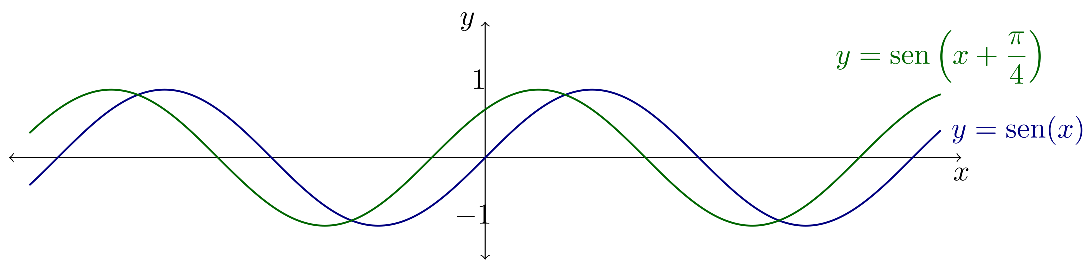


Figura 3.17: Representación gráfica de las funciones $y = \text{sen}(x)$, $y = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Se observa que la diferencia radica en que la gráfica de $y = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ *coincide con la gráfica de* $y = \text{sen}(x)$ *desplazada* $\dfrac{\pi}{4}$ *unidades hacia la izquierda. En general, la gráfica de* $y = \text{sen}(x + C)$, *corresponde a un desplazamiento de la gráfica de* $y = \text{sen}(x)$ *en* C *unidades, hacia la izquierda si* $C > 0$ *y hacia la derecha si* $C < 0$. *La constante* C *se llama* desface *o* ángulo fase.

La combinación de los 3 casos anteriores se puede presentar por $y = A\,\mathrm{sen}(Bx + C)$, donde

$$\begin{array}{rcl} |A| & : & \text{Amplitud} \\ \dfrac{2\pi}{B} & : & \text{Período} \\ \dfrac{C}{B} & : & \text{Ángulo de fase} \end{array}$$

ya que

$$y = A\,\mathrm{sen}(Bx + C) = A\,\mathrm{sen}\left[B\left(x + \frac{C}{B}\right)\right]$$

Ejemplo 3.6 *Graficar* $y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

En este caso, se tiene:

- $|A| = \dfrac{1}{2}$, *lo que implica una reducción vertical de la gráfica de* $y = \mathrm{sen}(x)$.
- $B = 2$, *lo que implica una reducción horizontal de la gráfica de* $y = \mathrm{sen}(x)$.
- $\dfrac{C}{B} = \dfrac{-\pi/4}{2} = -\dfrac{\pi}{8}$, *lo que implica un desplazamiento hacia la derecha de la gráfica de* $y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}(x)$.

Además el período es: $P = \dfrac{2\pi}{B} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Esta información conduce al siguiente gráfico.

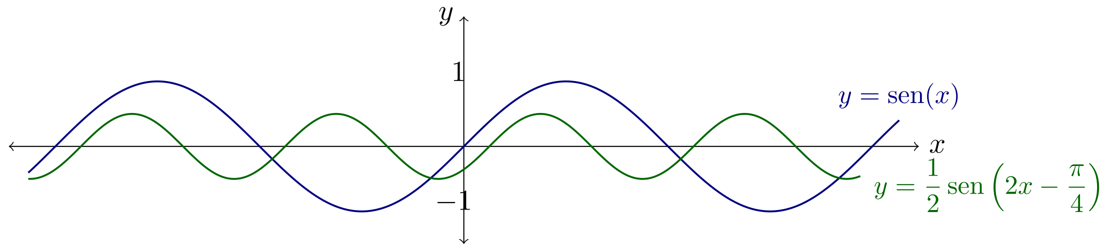


Figura 3.18: Representación gráfica de la función $y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Remark 3.3.1 *La gráfica de* $y = A\cos(Bx + C)$ *se puede obtener como la gráfica de una curva sinusoidal desplazada.*

Ejercicio 3.4 1. *Graficar las siguientes funciones para* $x \in [0, 2\pi]$

a) $g(x) = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $h(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

2. *El proceso rítmico de la respiración de un paciente consiste en períodos alternantes de inalación y exhalación, están representado por la función:*

$$F(t) = 3 + 2\,\mathrm{sen}\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$$

donde t indica la cantidad de segundo, y F respresenta el flujo de aire en el tiempo t medido en decilitros por segundos.

a) *¿Después de dos segundos cuál será el flujo de aire?*

b) *¿En cuánto tiempo el flujo es de 3 decilitros por segundos?*

c) *Gráfique la función, indicando claramente los puntos exactos donde se producen las principales característica para un ciclo completo, considerando los valores de t para los cuales el argumento del seno están entre 0 y 2π.*

d) *Obtenga en el ciclo encontrado en (c) los valores máximos y mínimos.*

CAPÍTULO 4

Sucesiones y series

4.1 Sucesiones

Suponga que deja caer una pelota de goma desde la azotea de un edificio de 60 metros de altura. Al golpear el suelo y rebotar, vuelve a subir una distancia igual a tres cuartos de la altura que cayó la última vez.

Por ejemplo, si n representa el número de descensos y h representa la distancia que recorre la pelota en el n-ésimo descenso, se tiene que

$$\begin{aligned}
n = 1 \quad &\Longrightarrow \quad h = 60 \\
n = 2 \quad &\Longrightarrow \quad h = 60 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 45 \\
n = 3 \quad &\Longrightarrow \quad h = 45 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{134}{4} \\
n = 4 \quad &\Longrightarrow \quad h = \frac{134}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{405}{46}
\end{aligned}$$

¿Cómo podemos expresar en forma general la distancia que recorre la pelota al n-ésimo descenso?

Definición 4.1 *Una sucesión real es una función*

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
n &\longmapsto f(n)
\end{aligned}$$

Notación: Para denotar una sucesión y diferenciarla de las demás funciones, usaremos las letras: s, u, v, w, etc. Mientras que a la imagen de n, $s(n)$, la denotaremos como s_n. Es decir $s(n) = s_n$.

Observaciones:

1. En lugar de escribir

$$\begin{aligned}
s : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
n &\longmapsto s(n)
\end{aligned}$$

escribiremos $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o bien, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2. El valor s_n se llama término general de la sucesión.

3. Se acepta que algunos términos de la sucesión no estén definidos, es decir, que su dominio no sea exactamente $\mathbb{N}$.

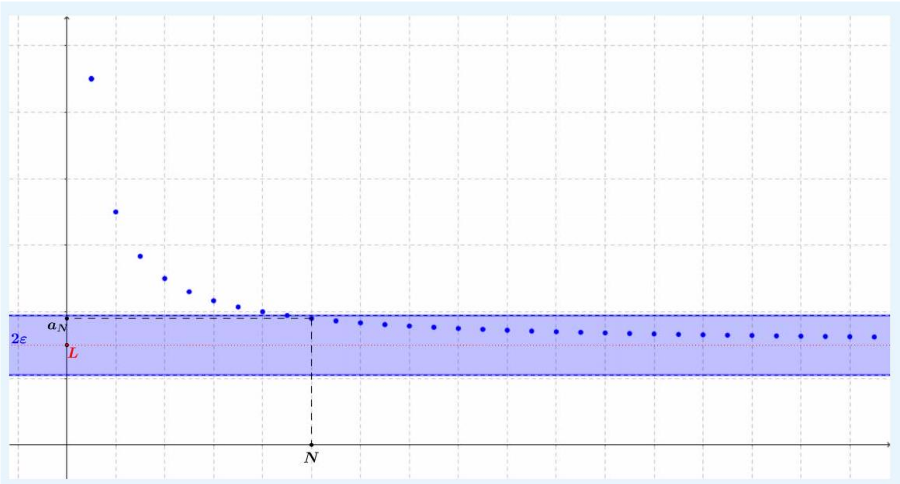
Ejercicio 4.1 *Determine los 5 primeros términos de la sucesión cuyo término general es*

1. $a_n = 2n + 3$.
2. $b_n = \dfrac{2n-1}{n^2}$.
3. $c_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
4. $r_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.
5. s_n *definida recursivamente por:* $s_1 = 1, s_2 = 1, s_n = s_{n-1} + s_{n-2}, n \geq 3$.

Definición 4.2 *Sea s_n una sucesión real y sea $l \in \mathbb{R}$. Diremos que s_n converge a l, o bien que los términos s_n tienden a l (lo que se denota $s_n \longrightarrow l$), si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |s_n - l| < \varepsilon.$$

Es decir, a partir de N, todos los términos de la sucesión están en el intervalo $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$.



Ejemplo 4.1 *Consideremos la sucesión s_n definida por $s_n = \frac{1}{n}$. Es evidente que al crecer n, los valores de s_n se parecen cada vez más a 0. Esto nos sugiere que esta sucesión tiende a $l = 0$.*

Para verificar esto, consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario y analicemos cuáles términos de la sucesión quedan dentro del intervalo $]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[$ y cuáles quedan fuera. Notemos que

$$\begin{aligned} |s_n - l| < \varepsilon \Longrightarrow & \quad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \\ \Longrightarrow & \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \\ \Longrightarrow & \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Luego, tomando $N = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1$, se tiene que $n \geq N \Longrightarrow |s_n - l| < \varepsilon$.

Note que, si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, entonces desde $N = 3$ en adelante, los términos s_n estarán en el intervalo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. En cambio, si $\varepsilon = \frac{1}{10}$, entonces desde $N = 11$ en adelante, los términos s_n estarán en el intervalo $]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}[$.

Ejercicio 4.2 *Sabiendo que la sucesión $b_n = \frac{2n+5}{3n-1}$ converge a $l = \frac{2}{3}$, determine el valor de N si $\varepsilon = 0.035$.*

Definición 4.3

1. *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión, se llama sucesión telescópica a la sucesión de término general*
$$s_n = a_{n+1} - a_n.$$
2. *Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a ℓ, entonces ℓ se llama límite de la sucesión, lo cual se denotará*
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell.$$
3. *$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$.*
4. *$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente si $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \geq s_{n+1}$.*
5. *$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente si $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \leq s_{n+1}$.*

Ejercicio 4.3 *Para la sucesión $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ demuestre que es telescópica, es decreciente y que converge a $l = 0$.*

Propiedad 4.1

1. *Toda sucesión convergente es acotada.*
2. *Toda sucesión acotada superiormente y creciente es convergente.*
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - l) = 0.$
4. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$, $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:*

   i) $\lim\limits_{n\to+\infty} (s_n + t_n) = s + t.$

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n\cdot t_n)=st.$

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha s_n)=\alpha s.$

iv) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{s_n}{t_n}=\dfrac{s}{t}$, *siempre que* $t\neq 0$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ *y* b_n *es acotada, entonces* $\lim_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n)=0.$

6. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=0$, *entonces la sucesión de término general* $a_n=\frac{1}{s_n}$, *de estar bien definida, es no acotada y en consecuencia no converge.*

Propiedad 4.2 1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^k}=0 \quad ,k\in\mathbb{N}.$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0 \quad ,a\in\mathbb{R}.$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n=e^a \quad ,a\in\mathbb{R}-\{0\}.$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{a^n}=\begin{cases}0 & si \quad a>1\\ +\infty & si \quad 0<a<1\end{cases}$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_pn^p+a_{p-1}n^{p-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_qn^q+b_{q-1}n^{q-1}+\cdots+b_1n+b_0}=\begin{cases}0 & si \quad p<q\\ \frac{a_p}{b_q} & si \quad p=q\\ \pm\infty & si \quad p>q\end{cases}$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=\begin{cases}0 & si \quad 0<a<1\\ 1 & si \quad a=1\\ \infty & si \quad a>1\end{cases}$

8. *Si* $q_n\longrightarrow q$, *entonces* $\begin{cases}(q_n)^n\longrightarrow 0 & si \quad 0<q<1\\ (q_n)^n \ \textit{debe estudiarse} & si \quad q=1\\ (q_n)^n\longrightarrow\infty & si \quad q>1\end{cases}$

9. $\sqrt[n]{a}\longrightarrow 1, \quad \forall a\in\mathbb{R}^+$

10. *Si* $a_n\longrightarrow a\in\mathbb{R}^+$, *entonces* $\sqrt[n]{a_n}\longrightarrow 1.$

Teorema 4.1 *Si* $f(x)$ *es una función continua y* $\lim_{n\longrightarrow+\infty}a_n=l$, *entonces:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}f(a_n)=f(\lim_{n\longrightarrow+\infty}a_n)=f(l).$$

Dicho de otro modo, se puede "pasar al límite dentro de una función continua."

Ejercicio 4.4 *Determine los siguientes límites*

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-5n+4}{2n^2-7n}$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{4n^2-4n+1}{n^2+3}}$.
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-3}{3n+7}\right)^3$.
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

Definición 4.4 *Dada una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se llama sucesión de sumas parciales a la sucesión*

$$\{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

con

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots, s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Ejercicio 4.5 *Considere la sucesión $\left\{\frac{3}{10^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. a) Encuentre la suseción de sumas parciales. b) Encuentre el n-ésimo término de la sucesión de sumas parciales s_n. c) Calcule $\lim_{n\to+\infty} s_n$.*

4.2 Series

Cuando expresamos un número real en notación decimal, cada dígito tiene un valor según la posición que ocupa, por ejemplo, $S = 3.456$ significa 3 enteros más 4 décimas más 5 centésimas más 6 milésimas, es decir,

$$3.456 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000}$$

Por lo que, a este número lo podemos expresar como una suma finita de números reales. Sin embargo, cuando representamos de esta manera $\frac{1}{3}$, por el algoritmo de la división sabemos que tiene una representación decimal infinita periódica

$$\frac{1}{3} = 0.3333\bar{3}$$

Lo cual significa,

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots$$

Así pues, este número se expresa como una suma infinita de números reales, lo que corresponde a una serie numérica que definiremos a continuación.

Informalmente, una **serie** es simplemente una suma de infinitos términos

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 + \cdots$$

la que se puede representar por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n.$$

Los términos μ_n pueden ser números, caso en que hablamos de *series numéricas*, o pueden ser, en general, funciones, en cuyo caso hablamos de *serie de funciones*. En particular si una serie de funciones es de tipo polinomial

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

hablamos de *serie de potencias.*

Ejemplo 4.2

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n-1} = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \cdots$

Ejercicio 4.6 *Exprese el número* $\frac{1}{3} = 0.3333\bar{3}$ *como una serie numérica.*

En el estudio de las series tiene especial interés averiguar si la suma de sus términos es un valor finito (*series convergentes*), o si no existe un valor determinado o es infinito (*series divergentes*).

Definición 4.5 *Dada una sucesión de números a_n, una expresión de la forma*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

es una serie infinita. *El número a_n es el n-ésimo término de la serie. La sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida como*

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

es la sucesión de sumas parciales *de la serie, donde el número s_n es la n-ésima suma parcial. Si la sucesión de sumas parciales converge a un límite L, decimos que la serie* converge *y que su suma es L. En este caso, escribimos*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Si la sucesión de sumas parciales de la serie no converge, decimos que la serie diverge.

Ejercicio 4.7 *Determine la convergencia o divergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

suponiendo la sucesión de sumas parciales con término n-ésimo s_n.

(a) $\dfrac{5sen^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 - cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.

(b) $s_n = \left(\dfrac{3n^2 + 2n + 1}{2n^2 + 1}\right)^n$.

Teorema 4.2 (**Linealidad de las series infinitas**) *Si las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergen, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm b_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ también convergen (c cualquier constante) y se verifica:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad c \text{ cualquier constante).}$$

Teorema 4.3 (**Criterio de la divergencia**) *Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.*

El teorema anterior es útil para probar que una serie no converge, pues si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Ejercicio 4.8 *Pruebe que las siguientes series son divergentes.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{8^n} - 2^n\right)$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{1/n}$.

4.2.1 Serie Geométrica

A partir de la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, obtenemos la sucesión de sumas parciales

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} r^k = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Definición 4.6 *La serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1},$$

se llama serie geométrica *y es convergente para* $|r| < 1$ *y es divergente para* $|r| \geq 1$.

Obs:

i) Si la serie Geométrica es convergente, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

ii) En general se puede demostrar que

$$\sum_{k=a}^{N} r^k = \frac{r^a - r^{N+1}}{1-r}.$$

Ejercicio 4.9

(a) Determine el valor de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

(b) Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{1-2n}}{2^n}.$$

es convergente o divergente, en caso de ser convergente determine su valor.

Definición 4.7 **(Serie telescópica)** *Las series de la forma*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}),$$

$a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *se llaman* series telescópicas *En este caso,* $u_n = a_n - a_{n+1}$ *y la sucesión de sumas parciales es* $\{s_n\}_n \in \mathbb{N}$, *viene dada por*

$$s_n = a_1 - a_{n+1},$$

$n \in \mathbb{N}$.

Para la suma de la serie se obtiene

$$\begin{aligned} S = & \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1}) \\ = & \lim_{n\to+\infty} s_n \\ = & a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} \\ = & a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_n. \end{aligned}$$

La serie converge si $\lim_{n\to\infty} a_n$, existe.

Ejercicio 4.10 *Determine si la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

es convergente o divergente, en caso de ser convergente determine su valor.

4.3 Criterios de Convergencia para series

4.3.1 Series de términos no negativos

Teorema 4.4 (**Convergencia de p-series**) *La serie infinita*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p},$$

converge si $p > 1$ *y diverge en cualquier otro caso.*

Teorema 4.5 (**Criterio de comparación**) *Suponga que existe* $M > 0$ *tal que* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para* $n \geq M$.

(i) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *es convergente, entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *también es convergente.*

(ii) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *es divergente, entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *también es divergente.*

Ejercicio 4.11 *Determine si las series son convergentes o divergentes.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6^{n+1}+1}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ln(n)}{n+4}$.

Teorema 4.6 **(Criterio de comparación (por paso al límite del cociente))** *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de términos positivos. Suponga que el siguiente límite existe:*

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

- *Si $L > 0$ y $L \neq +\infty$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.*
- *Si $L = 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*
- *Si $L = +\infty$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente.*

Ejercicio 4.12 *Determine si las series son convergentes o divergentes.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{4n^2+3n+2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}4^{2n}}{5n-3}$

Teorema 4.7 **(Criterio del cociente)** *Considere la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, con $a_n \geq 0$ y suponga que el siguiente límite existe:*

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(i) *Si $\rho < 1$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.*

(ii) *Si $\rho > 1$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente.*

(iii) *Si $\rho = 1$, entonces no hay conclusión.*

Teorema 4.8 (**Criterio de la raíz**) *Considere la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*, con* $a_n \geq 0$ *y suponga que el siguiente límite existe:*

$$L = \lim_{n \to +\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

(i) Si $L < 1$*, entonces la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *es convergente.*

(ii) Si $L > 1$*, entonces la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *es divergente.*

(iii) Si $L = 1$*, entonces no hay conclusión.*

Ejercicio 4.13 *Determine si las series son convergentes o divergentes.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^{n-1}+2}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n3^n}{n!}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{ln(n)}{n}\right)^n$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^{n+2}}$.

Serie de términos positivos y negativos

Consideremos las series de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, con $u_n \in \mathbb{R}$.

Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n,$$

la serie correspondiente de valores absolutos $\sum_{n=1}^{+\infty} \mid u_n \mid$ es una serie de términos no negativos y por lo tanto se le pueden aplicar todos los criterios anteriores.

En particular, el criterio de la razón (o el de la raíz). Por ejemplo, si

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho < 1,$$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mid u_n \mid$$

es convergente.

Definición 4.8 (**Convergencia absoluta**) *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *es* ***absolutamente convergente*** *si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ *es convergente.*

Definición 4.9 *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *es* ***condicionalmente convergente*** *si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge pero* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ *diverge.*

Ejercicio 4.14 *Muestre que la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *es absolutamente convergente.*

Teorema 4.9 (**Criterio de Leibniz para series alternadas**) *Suponga que* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de términos positivos que es estrictamente decreciente y que converge a* 0*. Entonces, la serie alternada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

es convergente.

Ejercicio 4.15 *Muestre que la serie alternante* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *es convergente.*

Teorema 4.10 (**Convergencia absoluta implica convergencia**) *Si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *converge, entonces* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

Ejercicio 4.16 *El recíproco del teorema anterior no es cierto. Muestre que la serie alternante* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *es convergente, pero la serie de valores absolutos no lo es.*

Ejercicio 4.17 *Determine si las series son absolutamente convergentes, convergentes o divergentes.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$

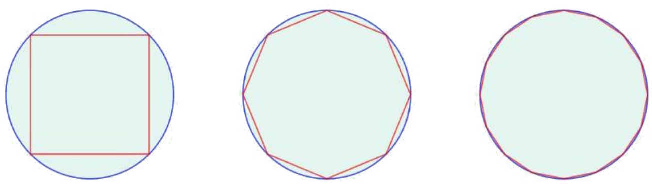
(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{e^n - e^{-n}}$

CAPÍTULO 5

Límite y continuidad de funciones

5.1 Motivación.

En geometría plana podemos determinar áreas de rectángulos y triángulos por medio de fórmulas; pero, ¿qué hay de regiones con fronteras curvas, como un círculo? Arquímedes tuvo esta idea hace más de dos mil años. Imagine polígonos regulares inscritos en un círculo, como lo muestra la figura.



Arquímedes determinó el área de un polígono regular con n lados, y tomando el polígono cada vez con más lados fue capaz de aproximar el área de un circulo a cualquier nivel de precisión. En otras palabras, el área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos inscritos cuando n (el número de polígonos) aumenta tanto como se quiera.

5.1.1 Noción intuitiva

Considere la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Observe que no está definida en $x = 1$. Sin embargo, aún podemos preguntarnos (informalmente) qué le está sucediendo a $f(x)$ cuando x se aproxima a 1. Con mayor precisión, ¿cuándo x se aproxima a 1, $f(x)$ se está aproximando a algún número específico? Para obtener la respuesta podemos calcular algunos valores de $f(x)$ para x cercana a 1 .

x	0.25	0.9	0.99	0.999	$\rightarrow$ 1 $\leftarrow$	1.001	1.01	1.1	1.25
$y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$									

Toda la información que hemos reunido parece apuntar a la misma conclusión: $f(x)$ se aproxima a 3 cuando x se aproxima a 1. En símbolos matemáticos, escribimos

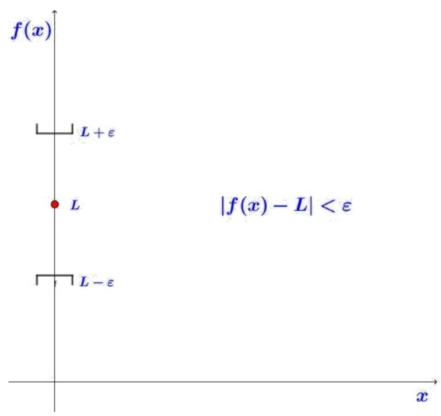
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$$

Esto se lee "el límite de $(x^3-1)/(x-1)$ cuando x tiende a 1 es 3". En otras palabras, decir que $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ significa que $f(x)$ puede hacerse tan cercana como se desee a 3 siempre que x sea suficientemente cercano, pero no igual a 3.

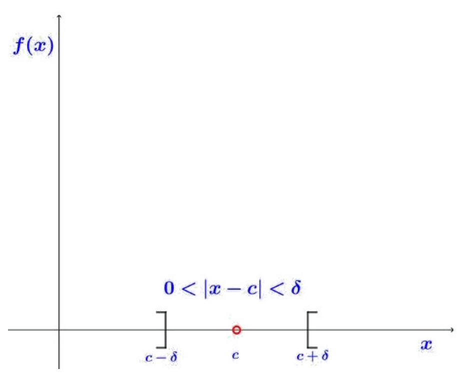
5.1.2 Acercamiento a la definición de límite

Seguimos la tradición al utilizar las letras griegas ε (épsilon) y δ (delta) para representar números positivos arbitrarios (por lo regular pequeños).

Decir que $f(x)$ difiere de L en menos que ε, significa que $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$, o de forma equivalente, $|f(x)-L| < \varepsilon$. Esto significa que $f(x)$ se encuentra en el intervalo abierto $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.



Ahora, decir que x está suficientemente cerca pero diferente de c es decir que, para alguna δ, x pertenece al intervalo abierto $]c-\delta, c+\delta[y$ a la vez c no pertenece a dicho intervalo. Tal vez la mejor forma de decir esto es escribir $0 < |x-c| < \delta$.



5.2 Límite de funciones reales

Definición 5.1 (Límite) *Sea*

$$\begin{aligned} f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

una función y $c \in \mathbb{R}$. Decir que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L, que se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

significa que para cada $\varepsilon > 0$ dada (no importa que tan pequeña) existe una correspondiente $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esto quiere decir que para todo $x \in]c-\delta, c+\delta[$, sus imágenes deben pertenecer al intervalo $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, como se muestra en el siguiente applet que puede acceder desde su computador ingresando el link

`https://ggbm.at/p8fsxasx`

Observación: *Cabe señalar que el número real ε se debe dar primero; el número δ debe encontrarse y por lo regular depende de ε.*

Ejercicio 5.1 *Dada la función $f(x) = 3x - 7$.*

1. *Encuentre un número positivo δ tal que:*

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < 0.01$$

2. *Encuentre un número positivo δ tal que:*

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < 0.00003$$

3. *Para todo $\varepsilon > 0$, encuentre un número positivo δ, tal que:*

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \epsilon$$

Ejercicio 5.2 *Utilice la definición para probar que*

1. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2.$

2. $\displaystyle\lim_{x \to 6} \frac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} = 7.$

Teorema 5.1 (Álgebra de Límites) *Sean n un entero positivo, k una constante y f y g funciones, tales que*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x\to c} g(x) = L_2$$

Entonces

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L_1 + L_2$
4. $\lim\limits_{x\to c} \alpha \cdot f(x) = \alpha \lim\limits_{x\to c} f(x) = \alpha \cdot L_1$
5. $\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L_1 \cdot L_2$
6. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, *con* $L_2 \neq 0$
7. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n = (L_1)^n$
8. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{L_1} & , \textit{si } n \textit{ sea par y } L_1 > 0 \\ \sqrt[n]{L_1} & , \textit{si } n \textit{ sea impar.} \\ \nexists & , \textit{en otro caso.} \end{cases}$

5.2.1 Limite de funciones trascendentes

1. Función Polinomial.

   Si $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio, entonces $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$.

2. Función Seno.

   Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \operatorname{sen}(c)$.

3. Función Coseno.

   Si $f(x) = \cos(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \cos(c)$.

4. Función Exponencial.

   Si $f(x) = e^x$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = e^c$.

5. Función Logaritmo.

   Si $f(x) = \ln(x)$ y $c > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ln(c)$.

Ejercicio 5.3 *Utilice las propiedades para encontrar,*

1. $\lim\limits_{x\to 1}(4x+3)$.

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

Teorema 5.2 (Teorema del Sandwich) *Sean f, g y h funciones tales que*

$$\forall x \in]c-\delta, c+\delta[, \; f(x) \le g(x) \le h(x),$$

salvo, tal vez, en c. Si

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to c} g(x) = L.$$

Ejercicio 5.4 *Sabiendo que*

$$\cos(x) \le \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \le 1, x \in]-1, 1[-\{0\}$$

determine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Teorema 5.3 (Límite de una función compuesta) *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siendo $f(A) \subset B$. Si f y g son dos funciones tales que*

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \quad \text{y} \quad \lim_{x\to l} g(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x\to c} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to c} g(f(x)) = L.$$

Ejercicio 5.5 *Encuentre*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(\dfrac{3x-1}{x^2+1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt{\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}$.

Observación: (Límites importantes) *Usando el teorema del Sandwich y desigualdades conocidas, se establece la existencia de los siguientes limites importantes, fuera de los dominios de las respectivas funciones:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Ejercicio 5.6 *Encuentre*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x+2xe^{x}}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$.

5.2.2 Límites laterales

En caso de que la función tenga expresiones diferentes a la izquierda y a la derecha del punto de interés x_0, se hace necesario analizar el límites desde ambas direcciones.

Definición 5.2 *Sean* $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}yc \in \mathbb{R}$

- *Límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c *por la derecha, denotado por* $\displaystyle\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ *si y sólo si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - c < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

- *Límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c *por la izquierda, denotado por* $\displaystyle\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ *si y sólo si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : -\delta < x - c < 0 \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

- *El límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c *existe y es* L *si y sólo si ambos límites laterales existen y son iguales a* L.

Ejercicio 5.7 *Considere la función*

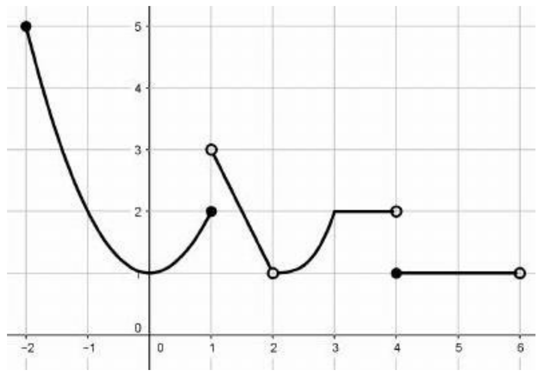
$$\begin{aligned} f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \leq -1, \\ x^3 & si \quad -1 < x < 1, \\ 3x-2 & si \quad x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Determine $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$.

Ejercicio 5.8 *Dada la función* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & si \quad -2 \leq x < 1 \\ 2, & si \quad x = 1 \\ 5-2x, & si \quad 1 < x < 2 \\ (x-2)^3+1, & si \quad 2 < x \leq 3 \\ 2, & si \quad 3 < x < 4 \\ 1, & si \quad 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

cuya gráfica viene dada por



encuentre (si acaso existe) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

5.2.3 Límites infinitos y hacia el infinito

Extenderemos el concepto de límite al caso en que $x \longrightarrow +\infty$ o bien $x \longrightarrow -\infty$. Para que las definiciones de esta sección sean coherentes, necesitaremos considerar funciones con dominios no acotados.

Definición 5.3 *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$, fijo. Entonces,*

1. *Si A no es acotado superiormente, diremos que límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es L, que se escribe*
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$
si y sólo si
$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

2. *Si A no es acotado inferiormente, diremos que limite de $f(x)$ cuando x tiende* a $-\infty$ *es L, que se escribe*
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$
si y sólo si
$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R} : x < m \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Teorema 5.4 (Álgebra de Límites) *Si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones tales que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = L_2$ y $A \cap B$ es un conjunto no acotado superiormente, entonces:*

$$\lim_{x\to +\infty} (f+g)(x) = L_1 + L_2$$
$$\lim_{x\to +\infty} (f-g)(x) = L_1 - L_2$$
$$\lim_{x\to +\infty} (f\cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$$
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$$

Teorema 5.5 (Teorema del Sandwich) *Si tres funciones f, g, h con dominios A, B, C respectivamente, son tales que $\exists m$, tal que $\forall x \in B \cap [m, +\infty[$ se cumple $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Entonces, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$, se tiene que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$*

Propiedad 5.1 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

2. $$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & si \quad n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & si \quad n = m \\ \nexists & si \quad n > m \end{cases}$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$, *cuando* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty.$

Observación: *Los límites mencionados anteriormente, al igual que el teorema del Sandwich, también se verifican al considerarlos hacia menos infinito.*

Ejercicio 5.9 *Calcule, si fuese posible,* $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

Ejercicio 5.10 *Calcule, si fuese posible,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1-x}$.

Definición 5.4 *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, fijo. Diremos que el limite de $f(x)$ cuando x tiende a c es $\pm\infty$, que se escribe*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$$

si y sólo si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) > \epsilon.$$

Ejercicio 5.11 *Determine el valor de*

$$\lim_{x\to-3} \frac{x-3}{x^2-9}.$$

5.3 Continuidad

5.3.1 Continuidad en un punto

Considere las siguientes gráficas

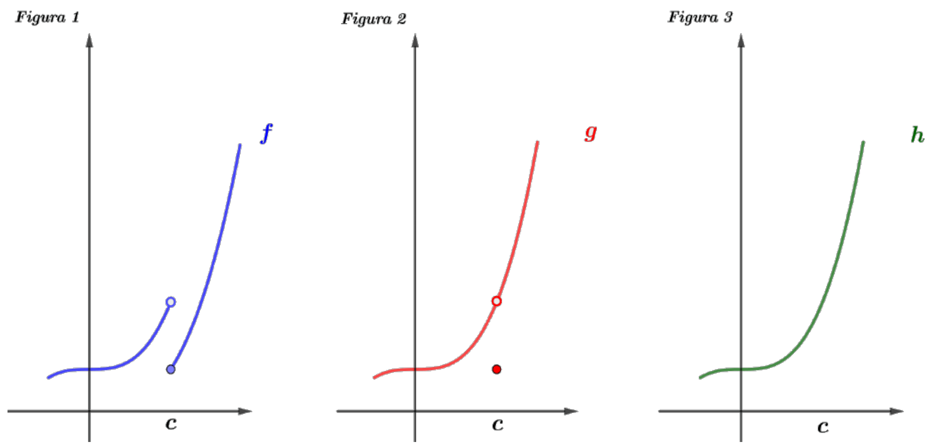


Figura 5.1: Figura 1: $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe, Figura 2: $\lim_{x\to c} g(x)$ existe, pero $\lim_{x\to c} g(x) \neq g(c)$, Figura 3: $\lim_{x\to c} h(x) = h(c)$.

Observación:

- *En la figura 1, podemos observar que la función f no tiene límite en c. Es cierto que sus límites laterales existen, pero son diferentes, por lo que se trata de un salto en la gráfica. La función f no es continua en c.*
- *En la figura 2, la función g tiene un límite en c, pero el valor del límite es diferente a la imagen de c por g, de modo que se trata de una interrupción en la gráfica, por lo que g no es continua en c.*
- *En la figura 3, la función h tiene un límite en c. Además, el límite allí tiene el mismo valor que la imagen de c por h. No se presenta interrupción en la gráfica, por lo que la función h es continua en c.*

Definición 5.5 *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c. Decimos que f es continua en c si*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

De lo anterior se desprende:

1. Que $\lim_{x\to c} f(x)$ exista (es decir, $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$),
2. Que $f(c)$ exista (es decir, c está en el dominio de f) y
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Si cualquiera de estas tres condiciones no se cumple, entonces f es discontinua en c.

Ejercicio 5.12 *Estudie la continuidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x < 2 \\ \frac{1}{x} & 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{x}{x^2-x+4} & , \quad x > 4 \end{cases}$$

en $x_0 = 2$ *y en* $x_0 = 4$.

5.3.2 Tipos de discontinuidad.

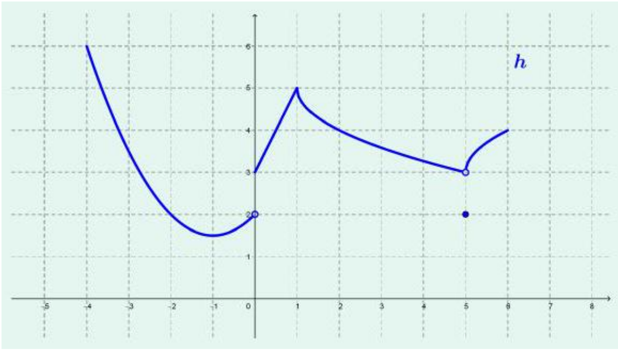
Las discontinuidades caen en dos categorías: removible (evitables) y no removibles (no evitables).

1. Discontinuidad removible: un punto de discontinuidad c se denomina removible, cuando el límite es un número real, pero no coincide con $f(c)$. Podemos redefinir la función, de modo que sea continua en $x = c$, considerando
$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$$
2. Discontinuidad no removible: un punto de discontinuidad c se denomina no removible cuando $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe. En este caso, no es posible redefinir f de modo que pueda hacerse continua en c.

Ejercicio 5.13 *Considere la función* $h : [-4, 6] \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{3}{2}, & -4 \leq x < 0 \\ 2x+3, & 0 \leq x < 1 \\ -\sqrt{x-1} + 5, & 1 \leq x < 5 \\ 2 & x = 5 \\ \sqrt{x-5} + 3 & 5 < x \leq 6. \end{cases}$$

cuya gráfica viene dada por



Determine, justificadamente, si la función h es continua en x_0, si no lo es indique el tipo de discontinuidad y redefinala si es posible.

(a) $x_0 = 0$.

(b) $x_0 = 1$.

(c) $x_0 = 5$.

Definición 5.6

- *f es continua por la izquierda en un punto $c \in \mathrm{Dom}(f)$ si*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

- *f es continua por la derecha en un punto $c \in \mathrm{Dom}(f)$ si*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

- *Sea $I = [a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Diremos que f es continua en I si lo es en $]a,b[$ (todos los puntos al interior del intervalo) y además lo es por la derecha en a y por la izquierda en b.*

Proposición 5.3.1 *f es continua en $c \in \mathrm{Dom}(f)$ si y sólo si lo es por la izquierda y por la derecha.*

Ejercicio 5.14 *Estudie la continuidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+1}{1-x} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{3}{x} & , \quad 1 \leq x \leq 7 \\ \dfrac{\sqrt{x-3}}{x-8} & , \quad 7 < x < 8 \end{cases}$$

en su dominio.

Observación:

- *Continuidad de funciones polinomiales y racionales. Una función polinomial es continua en todo número real c en su dominio. Una función racional es continua en todo número real c en su dominio; es decir, para todos los números excepto en donde su denominador es cero.*

- *Continuidad de las funciones raíz n-ésima. Si n es impar, la función raíz n-ésima es continua en todo número real c; si n es par, la función raíz n-ésima es continua en todo número real positivo.*

Ejemplo 5.1 *La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua por la derecha en $x = 0$, pues*

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0),$$

por lo que f es continua en todo su dominio; es decir, $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty[$.

5.3.3 Operaciones con funciones continuas

Teorema 5.6 *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, continuas en $x = c \in A$, entonces:*

1. *$f + g$ y fg son funciones continuas en $x = c$.*
2. *Si $g(x) \neq 0 \forall x \in A$, entonces f/g es continua en $x = c$. (caso particular: $1/g$ es continua en $x = c$.)*

Corolario 5.1 *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, continuas en $a \in A$, entonces: $f - g$ es continua en a.*

Teorema 5.7 *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, y $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to R$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Si f es continua en $a \in A$ y g es continua en $b = f(a)$, entonces la composición $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en a.*

Ejercicio 5.15 *¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ es continua la función $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{\sqrt{x+1}}$?*

En ocaciones, la expresión que define una función f no tiene sentido en un punto $x = c$. No obstante, podría ser posible ampliar el dominio de f, para incluir $x = c$, creando una nueva función que sea continua en $x = c$.

Ejemplo 5.2 *La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es continua en todos los puntos de su dominio.*

Por otra parte recordamos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

por lo que podemos extender el dominio de la función para incluir el punto $x = 0$ de modo que la función ampliada sea continua en $x = 0$.

Definimos la nueva función como

$$f^{\star}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5.16

1. *Extienda, si acaso es posible, la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ a una función continua para todo número real.*
2. *Considere la función por tramos*

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 & , \quad x \leq -3 \\ ax + b & , \quad -3 < x < 2 \\ 12x - 9 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentre valores reales para a y b, si acaso existen, para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

Teorema 5.8 (Weierstrass) *Si f es continua en $[a, b]$ alcanza al menos una vez el máximo y el mínimo en $[a, b]$.*

Teorema 5.9 (Del valor intermedio) *Si f es continua en $[a, b]$, toma todos sus valores intermedios entre sus valores en los extremos del intervalo, es decir, para cada $\beta \in [m, M]$ existe al menos un punto α tal que $f(\alpha) = \beta$.*

5.3.4 Una consecuencia para encontrar raíces.

Una solución de la ecuación $f(x) = 0$ se denomina raíz de la ecuación o cero de la función f. Por el teorema del valor intermedio, sabemos que si f es una función continua, entonces, cualquier intervalo donde f cambie de signo contendrá un cero de la función.

Lo anterior se resume en el siguiente resultado conocido como Teorema de Bolzano.

Teorema 5.10 (Bolzano) *Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y f tiene distintos signos en los extremos del intervalo, entonces existe por lo menos un número c en (a, b) tal que $f(c) = 0$.*

Ejercicio 5.17 *Sea $f(x) = x^2 - 9$ y el intervalo $[-2, 4]$. Encuentre $c \in]-2, 4[$ tal que satisfaga el teorema de Bolzano.*

Ejercicio 5.18 *1. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en sus respectivos dominios:*

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+4}{x-2}, & ,x \neq 2 \\ 0 & ,x = 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)} & ,-\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ x + \frac{2}{3} & ,0 \leq x < 3 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , \quad x \leq -1 \\ \frac{|x+1|}{x^2-1} & , \quad -1 < x < 1 \\ \frac{2x-4}{2} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

2. *Considere la función $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & ,x \leq -1 \\ Ax + B & ,-1 < x < 1 \\ x^2 + 2x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

Que valores deben asumir $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ para que la función sea continua en $\boldsymbol{x = 1}$ y $\boldsymbol{x = 1}$

3. *Determine valores de $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, en caso que existan, de modo que la función siguiente sea continua en todo su dominio.*

$$f(x) = \begin{cases} (x+b)^2 + 4b & , \quad x < -2 \\ ax + b & , \quad -2 \leq x < 1 \\ x - 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

4. *Determine si la función siguiente es continua en el intervalo* $[\mathbf{-3}, \mathbf{2}]$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{4x+\pi} & , \quad x < -\frac{\pi}{4} \\ x^2 & , \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0 \\ \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{4-\cos(x)} - 2 & \quad x > 0 \end{cases}$$

5. *Considere la función* f

$$f(x) = \begin{cases} \log_{1/4}\left(x^2 - 1\right) & , \quad -5 \leq x < -1 \\ 0 & , \quad x = -1 \\ e^{\frac{x}{x+1}} & , \quad -1 < x < 0 \\ 1 - x^2 & , \quad 0 \leq x < 2 \\ -1 & , \quad x = 2 \\ x - 5 & , \quad 2 < x < 6 \end{cases}$$

(a) *Determine los puntos de discontinuidad de* $\boldsymbol{f}$ *en* $[\mathbf{-5}, \mathbf{6}[$.

(b) *Clasifique dichos puntos.*

(c) *En los puntos que sea posible, redefina la función para que sea continua.*

6. *Halle y clasifique los puntos de discontinuidad de la función*

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{\left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)(x - 3)}$$

7. *Halle y clasifique los puntos de discontinuidad de la función*

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}.$$

Índice alfabético