Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
(EDO 2023)

Versión del 24 de noviembre de 2023

Víctor Andrés Osores Escalona
Departamento de Matemática, Física y Estadística
Universidad Católica del Maule, Chile

Índice general

Contents

Prefacio

Este libro es el resultado de una exhaustiva investigación y recopilación de recursos disponibles en la red. A lo largo de su proceso de escritura, he consultado una variedad de fuentes en línea, desde documentos académicos hasta tutoriales y ejemplos prácticos. Quiero enfatizar que la base de conocimiento en la que se sustenta este libro es el resultado de la generosidad de la comunidad en línea y de aquellos que han compartido su experiencia y conocimientos libremente.

Agradezco profundamente a todas las personas que han contribuido a la creación de este apunte a través de su valiosa información disponible en la red. Sin su generosidad y el espíritu colaborativo de la era digital, este documento no habría sido posible.

Es importante destacar que, a lo largo del libro, se citarán y referenciarán las fuentes relevantes de manera apropiada. Mi objetivo es proporcionar a los lectores una compilación coherente y útil de información sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, al tiempo que se reconoce y respeta el trabajo de quienes la han compartido en línea.

Introducción

En un mundo lleno de fenómenos cambiantes y sistemas dinámicos, las ecuaciones diferenciales se erigen como un lenguaje universal para entender y modelar el flujo del tiempo y el cambio en todas sus manifestaciones. Desde la física y la ingeniería hasta la biología y la economía, las ecuaciones diferenciales se encuentran en el corazón de innumerables áreas del conocimiento.

Este libro es un testimonio de la omnipresencia y la importancia de las ecuaciones diferenciales en nuestra comprensión del mundo que nos rodea. Aquí, exploraremos esta rama fundamental de las matemáticas desde sus orígenes hasta sus aplicaciones más vanguardistas en la actualidad. Aprovecharemos la riqueza de recursos disponibles en la era digital, combinando la sabiduría acumulada a lo largo de los siglos con los avances más recientes en la teoría y la práctica.

A través de estas páginas, te invitamos a adentrarte en el fascinante mundo de las ecuaciones diferenciales. Comenzaremos por establecer las bases teóricas, explorando conceptos clave como las derivadas, los métodos de resolución y las soluciones exactas y aproximadas a través de un método numérico. A medida que avancemos, nos adentraremos en una amplia variedad de aplicaciones con ejemplos concretos que demuestran cómo las ecuaciones diferenciales pueden revelar los secretos de los sistemas naturales y artificiales que nos rodean.

A lo largo de este viaje matemático, encontrarás ejercicios desafiantes, ejemplos prácticos y visualizaciones que te ayudarán a comprender y aplicar este poderoso conjunto de herramientas. Ya seas un estudiante que se inicia en las ecuaciones diferenciales, un profesional que busca ampliar su conocimiento o simplemente alguien curioso por descubrir cómo las matemáticas dan forma a nuestro mundo, este libro tiene algo valioso que ofrecer.

Así que, sin más preámbulos, ¡comencemos nuestro viaje a través del fascinante mundo de las ecuaciones diferenciales!

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Cálculo diferencial

Teorema 1.1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}$)
Sean $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=0$.

Dem: *Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(a)<0$ y $f(b)>0$. Escojamos $c\in(a,b)$ y de esto se tienen tres casos:*

1. *$f(c)<0$ y nos restringimos al intervalo $[a_1,b_1]$ con $a_1=c$ y $b_1=b$.*
2. *$f(c)=0$ en este caso concluye la demostración.*
3. *$f(c)>0$ y nos restringimos al intervalo $[a_1,b_1]$ con $a_1=a$ y $b_1=c$.*

Para los casos 1. y 3. consideremos intervalos $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]\subset\ldots\subset[a,b]$ tal que $f(a_n)<0$ y $f(b_n)>0$. Escojamos para cada intervalo un c que es punto medio y así cada intervalo es la mitad del anterior. De esta forma, $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ y para $n\to\infty$ se tendrá que $a_n-b_n\to 0$ y $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

Sea $c=\lim_{n\to\infty}a_n$, por ser f continua

$$f(c)=f\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)$$

como $f(a_n)<0$ tenemos que $\lim_{n\to\infty}f(a_n)\leq 0$.
Análogamente si tomamos

$$f(c)=f\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)$$

como $f(b_n)<0$ tenemos que $\lim_{n\to\infty}f(a_n)\geq 0$. Se concluye entonces que $f(c)=0$.

Teorema 1.2 (Teorema del valor intermedio en $\mathbb{R}$)
Sean $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Si $f(a)\neq f(b)$, entonces dado $k\in(f(a),f(b))$ existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=k$.

Dem: *Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(a)<f(b)$. Definamos $g(x)=f(x)-k$ y entonces $g(a)=f(a)-k<0$ y $g(b)=f(b)-k>0$. De acuerdo al teorema 1.1 existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=k$.*

Teorema 1.3 *Sean $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y diferenciable en (a,b). Si f tiene un máximo (o mínimo) en al menos un punto $c\in(a,b)$, entonces $f'(c)=0$.*

Dem: *Haremos la demostración para el caso de máximos. La demostración para el caso de un mínimo es análoga y queda de* tarea.
Si f tiene al menos un máximo en c entonces

$$f(c+h)\leq f(c)\,\forall h \text{ tal que } c+h\in[a,b]$$

De esta forma, $f(c+h) - f(c) \leq 0$.
Tomando $h > 0$ *se tiene que*

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0 \qquad (*)$$

Tomando $h < 0$ *se tiene que*

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0 \qquad (**)$$

De (*) y (**) se concluye que $f'(c) = 0$.

Teorema 1.4 (Teorema de Rolle en $\mathbb{R}$)
Sean $[a, b]$ *cerrado y acotado y* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua y diferenciable. Si* $f(a) = f(b)$*, entonces existe al menos un* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Dem: *Tenemos tres casos posibles:*

1. *Si* $f(c) < f(a)$ *para algún* $c \in (a, b)$*. Entonces, existe* $c \in (a, b)$ *donde* f *alcanza su valor mínimo. De acuerdo al teorema 1.3* $f'(c) = 0$.

2. *Si* $f(a) = f(c)$ $\forall c \in (a, b)$*. Entonces, por ser* f *constante, su derivada es nula en* (a, b) *y se cumple el teorema.*

3. *Si* $f(c) > f(a)$ *para algún* $c \in (a, b)$*. Entonces, existe* $c \in (a, b)$ *donde* f *alcanza su valor máximo. De acuerdo al teorema 1.3* $f'(c) = 0$.

La interpretación geométrica del teorema de Rolle es la siguiente: Si una función continua y derivable cruza dos veces una recta paralela al eje x, entonces existe entre los dos cruces consecutivos un punto donde la tangente al gráfico de la función es paralela al eje x.

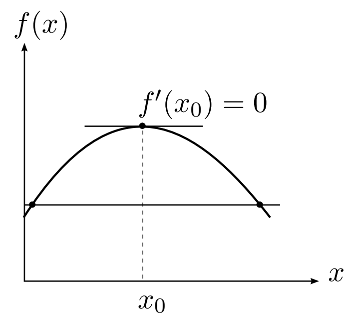


Figura 1.1: Teorema de Rolle.

Teorema 1.5 (Teorema del valor medio en $\mathbb{R}$)
Sean $[a, b]$ *un intervalo cerrado y acotado y* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua y derivable en* (a, b)*. Entonces, existe un punto* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dem: *Definamos*

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

se tiene que g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).
Observemos que $g(a) = f(a)$ y $g(b) = f(a)$ lo que implica $g(a) = g(b)$, por lo tanto podemos aplicar el teorema 1.4. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(x) = 0$ y se tendrá que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La interpretación geométrica del teorema del valor medio es la siguiente: Si trazamos una secante que une dos puntos de una función continua y derivable, entonces existe un punto donde la tangente al gráfico de la función y la secante ya definida son paralelas.

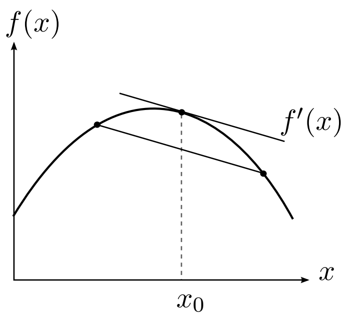


Figura 1.2: Teorema del valor medio.

Teorema 1.6 (Primer teorema fundamental del cálculo)
Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $x \in [a, b]$, entonces la función F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

es derivable en (a, b) y además $F'(x) = f(x)$ en (a, b).

Dem: *Sea $c \in (a, b)$. Debemos demostrar que el límite*

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c + h) - F(c)}{h}$$

existe y vale $f(c)$. Notemos que

$$F(c + h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(x)dx - \int_a^c f(x)dx = \int_c^{c+h} f(x)dx$$

Consideremos por separado los casos $h > 0$ y $h < 0$:

1. *Sea $h > 0$: Como f es continua en $[c, c + h]$, se tiene que existen valores a_1 y b_1 en $[c, c + h]$ tales que*

$$f(a_1) \leq f(c) \leq f(b_1) \qquad \forall x \in [c, c + h]$$

Integrando en $[c, c+h]$

$$f(a_1)h \leq F(c+h) - F(c) \leq f(b_1)h$$

$$f(a_1) \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq f(b_1)$$

Si $h \to 0^+$ *entonces* $a_1 \to c$ *y* $b_1 \to c$*. Como* f *es continua* $f(a_1) \to f(c)$ *y* $f(b_1) \to f(c)$*. Entonces,*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c) \qquad (*)$$

2. *Sea* $h < 0$*: Como* f *es continua en* $[c+h, c]$*, se tiene que existen valores* a_2 *y* b_2 *en* $[c+h, c]$ *tales que*

$$f(a_2) \leq f(c) \leq f(b_2) \qquad \forall x \in [c+h, c]$$

Integrando en $[c+h, c]$

$$f(a_2)(-h) \leq -(F(c+h) - F(c)) \leq f(b_2)(-h)$$

$$f(a_2) \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq f(b_2)$$

Si $h \to 0^-$ *entonces* $a_2 \to c$ *y* $b_2 \to c$*. Como* f *es continua,* $f(a_2) \to f(c)$ *y* $f(b_2) \to f(c)$*. Entonces,*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c) \qquad (**)$$

De (*) y (**) se obtiene

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

Teorema 1.7 (Segundo teorema fundamental del cálculo)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrable. Si existe una función* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua y derivable tal que* $F'(x) = f(x)$ *en* (a, b)*, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dem: *Sea* $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *una partición cualquiera del intervalo* $[a, b]$*, entonces en cada intervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *la función* $F(x)$ *cumple las hipótesis del teorema del valor medio (teorema 1.5), es decir*

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c)(x_i - x_{i-1})$$

Como $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$*, entonces* $F'(c) = f(c)$ *y además*

$$m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq f(c)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

Aplicando $\sum_{i=1}^{n}(\cdot)$ *se obtiene*

$$s(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, P)$$

Como f *es integrable en* $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1.2 Cálculo integral

1.2.1 Integral Indefinida

Definición 1.1 *Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces a su antiderivada general $F(x)+C$ se le denota por*

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{1.2.1}$$

Observación: *La integral indefinida es la "operación inversa" de la derivación. Así, si $F'(x) = f(x)$, tenemos que*

1. $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int f(x)dx\right] = f(x)$.
2. $\displaystyle\int \left[\frac{d(F(x))}{dx}\right] dx = F(x) + C$.

Ejercicio 1.1 *Verifique la igualdad*

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)dx = -x^2\cos(x) + 2x\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) + C.$$

Algunas primitivas básicas

A continuación se presentan algunas primitivas básicas. Como ejercicio al lector queda mostrar que se cumple cada una de las siguientes igualdades.

1. $\displaystyle\int a dx = ax + C, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{R} - \{-1\}$.
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.
4. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, \quad a \neq 1, a > 0$.
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + C$.
7. $\displaystyle\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) + C$.

8. $\displaystyle\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + C$

9. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2(x)du = -\operatorname{cotan}(x) + C$

10. $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + C$

11. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotan}(x)dx = -\operatorname{cosec}(x) + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{Arctan}(x) + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{Arcsen}(x) + C.$

Propiedad 1.1 *El operador* $\int$ *es un operador lineal, es decir*

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \quad y \quad \int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 1.2 *Calcule la siguiente integral indefinida.*

$$\int \left[\sec^2(x)\left(1 + \frac{\tan(x)}{\sec(x)}\right) - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{5x}\right] dx.$$

Condiciones iniciales.

Si bien, como hemos visto, una función tiene infinitas primitivas, si además se conoce algún punto en el plano, entonces la primitiva estará completamente definida. Considere la igualdad

$$y = \int \left(3x^2 - 1\right) dx = x^3 - x + C$$

, para valores específicos de C cada primitiva corresponderá a una solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1.$$

Si conocemos un punto de la curva buscada, obtenemos solo una de las primitivas. A este punto en el plano se le denomina condición inicial.

1.2.2 Técnicas de integración

Cambio de variable.

Sea $f(u)$ una función y $F(u)$ una de sus primitivas. Entonces:

$$u = \varphi(x) \quad \Longrightarrow \quad F(u) = F[\varphi(x)] = G(x).$$

Luego, aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$G'(x) = F'[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

así

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = G(x) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

Observación: *El resultado anterior muestra que podemos utilizar una variable que nos permita visualizar la primitiva si reconocemos la integral como si tuviera la forma* $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$, *obteniendo*

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du = F[\varphi(x)] + C = F(u) + C.$$

Ejercicio 1.3

1. *Obtenga la primitiva de* $\displaystyle\int \frac{\text{Arctan}(x)}{1+x^2}dx$, *utilizando integración por sustitución o cambio de variable,*

$$u = \text{Arctan}(x).$$

2. *Calcule las siguientes integrales indefinidas*

   a) $\displaystyle\int 10ze^{3z^2}dz.$

   b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}}dx.$

   c) $\displaystyle\int \tan(\theta)d\theta.$

   d) $\displaystyle\int \cot(\alpha)d\alpha.$

   e) $\displaystyle\int \sec^3(\theta)\tan(\theta)d\theta.$

   f) $\displaystyle\int \csc(x)dx.$

3. *Calcule la primitiva general de la función* $f(x) = \sec(x)$. *Utilice el siguiente arreglo algebraico*

$$\int \sec(x)dx = \int \frac{\sec(x)[\sec(x)+\tan(x)]}{\sec(x)+\tan(x)}dx,$$

luego use la siguiente sustitución,

$$u = \sec(x) + \tan(x).$$

Integración por partes

Sea $u(x)v(x)$ el producto de dos funciones en la variable x, entonces las reglas de diferenciación de funciones nos dicen que

$$d(u(x)v(x)) = v(x)du + u(x)dv,$$

equivalentemente

$$u(x)dv = d(u(x)v(x)) - v(x)du.$$

Integrando la igualdad anterior obtenemos

$$\int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du.$$

La igualdad anterior se conoce como método de *integración por partes*.

Ejercicio 1.4

1. *Complete el desarrollo que permite calcular* $\int 2xe^{3x}dx$.

   Sol: *Integrando por partes, se tiene*

   $$\begin{aligned} u &= 2x, & dv &= \\ du &= \quad , & v &= \end{aligned}$$

   Luego

   $$\begin{aligned} \int 2xe^{3x}dx = \int udv &= uv - \int vdu \\ &= \\ &= \\ &= \ldots + C. \end{aligned}$$

2. *Calcular*

   $$\int x^2 \operatorname{sen}(2x)dx,$$

   usando integración por partes.

3. *Determine la primitiva general de* $f(t) = e^t \operatorname{sen}(t)$.

4. *Calcule las siguientes integrales*

   a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$.

   b) $\displaystyle\int \ln^2(x)dx$.

   c) $\displaystyle\int (2x+5)\left(x^2+5x+7\right)^4 \ln\left(x^2+5x+7\right)dx$.

   d) $\displaystyle\int \ln(x)dx$.

Integración de funciones trigonométricas

Las siguientes identidades permiten *transformar productos de senos y cosenos en sumas*. Si en la función a integrar aparecen razones trigonométricas de ángulos distintos, un primer paso consiste en pasarlas todas al mismo ángulo. En este caso, las ecuaciones que relacionan los productos de razones trigonométricas de ángulos distintos con sumas de razones trigonométricas son:

1. $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$.
2. $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.
3. $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$.

Ejercicio 1.5 *1. Obtenga la antiderivada de* $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)dx$.

2. Determine la primitiva general de

a) $\displaystyle\int \cos(5x)\cos(2x)dx$.

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(-4x)\operatorname{sen}(5x)dx$.

Si en las integrales aparecen *productos de potencias de seno y coseno*, es decir de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)dx,$$

debe considerar las siguientes dos situaciones.

a) Si m y n son pares, utilizaremos las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

b) Si m o n son impares, utilizaremos la identidad

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Ejercicio 1.6 *1. Determine las siguientes integrales indefinidas.*

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)dx$.

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^3(x)dx$.

Integrales de productos de potencias de tan, sec, cot y csc. Para las integrales de la forma

$$\int \tan^m(x)\sec^n(x)dx, \quad \text{o} \quad \int \cot^m(x)\csc^n(x)dx,$$

se usan las identidades

$$\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha), \quad 1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha).$$

Ejercicio 1.7 1. *Para determinar la primitiva de la función $f(x) = \sec^3(x)$, primero se descompone de la siguiente manera.*

$$I = \int \sec^3(x)dx = \int \sec(x)\sec^2(x)dx.$$

Luego resolvemos mediante integración por parte

$$\begin{aligned} u &= \sec(x), \quad dv = \\ du &= \quad , \qquad\quad v = \end{aligned}$$

Continue...

Análogamente se determina la primitiva de la función $f(x) = \sec^5(x)$.

2. *Determine la integral indefinida de*

$$\int \left(\sec^4(\theta) + \tan^3(\theta)\right) d\theta.$$

Integración por sustitución trigonométricas

Use sustitución trigonométrica para integrar funciones que dependen, por ejemplo, de los radicales:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \text{ o bien } \sqrt{x^2 - a^2} \text{ o bien } \sqrt{x^2 + a^2}.$$

La siguiente tabla muestra la sustitución sugerida:

Expresión	Sustitución	Resultado
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\text{sen}(t)$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(t)$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan(t)$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\tan(t)$	$\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec(t)$

En estas situaciones t toma valores en el dominio de la función trigonométrica inversa correspondiente.

Ejercicio 1.8 1. *Use sustitución trigonométrica para calcular* $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}dx$.

2. *Calcule* $\displaystyle\int \sqrt{9x^2 + 4}dx$.

3. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(9 - x)^2 - 16}}$. *Ojo! Antes de usar sustitución trigonométrica a veces es mejor hacer un cambio de variables primero.*

4. *Determine la primitiva general de*

   a) $f(u) = a^2 - u^2$.

   b) $g(x) = \left(4x^2 - 24x + 27\right)^{3/2}$.

Integración de funciones racionales

Para integrar funciones racionales usaremos la descomposición en suma de fracciones parciales.

Definición 1.2 *Sean $p(x)$ y $d(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $d(x) \neq 0$, llamaremos fracción racional al cuociente: $\frac{p(x)}{d(x)}$.*

Llamaremos fracción propia a la fracción racional $\frac{p(x)}{d(x)}$ cuando $\operatorname{gr}(p(x)) < \operatorname{gr}(d(x))$.

Observación: *Si $\operatorname{gr}(p(x)) \geq \operatorname{gr}(d(x))$, se debe hacer un proceso de división antes de descomponer la función racional. Esto permite escribir*

$$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}, \text{ donde } \operatorname{gr}(r(x)) < \operatorname{gr}(d(x)) \text{ y la fracción } \frac{r(x)}{d(x)} \text{ es una fracción propia.}$$

Teorema 1.8 **[Descomposición en suma de fracciones parciales]** *Cualquier fracción propia $\dfrac{p(x)}{d(x)}$, con $p(x), d(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ se puede descomponer en suma de fracciones parciales como sigue:*

1. *Si $d(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax + b$ (no repetido), entonces la descomposición en fracciones parciales tiene un término de la forma*
$$\frac{A}{ax+b}, \qquad \text{donde } A \text{ es constante.}$$
2. *Si $d(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax + b$, repetido k veces, es decir $(ax + b)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene los términos*
$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}, \qquad A_i, i = 1, 2, \ldots, k \text{ son constantes}$$
3. *Si $d(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible de la forma $ax^2 + bx + c$ (no repetido), entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma*
$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \quad A \text{ y } B \text{ son constantes.}$$
4. *Si $d(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible de la forma $ax^2 + bx + c$, repetido k veces, es decir, $\left(ax^2 + bx + c\right)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene los términos*
$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2} + \frac{A_3x+B_3}{\left(ax^2+bx+c\right)^3} + \cdots + \frac{A_k+B_k}{\left(ax^2+bx+c\right)^k},$$
A_i y $B_i, i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes.

Ejercicio 1.9

1. *Use descomposición en suma de fracciones parciales para calcular*
$$\int \frac{x+1}{\left(x^2+x-2\right)(x-2)} dx.$$

Ind:
$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$
Antes de integrar debe determinar las constantes A, B y C.

2. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{-2x^2+x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx.$

Integración de funciones racionales trigonométricas

Sustitución Universal: Si la función integrando es una función racional que contiene sólo funciones trigonométricas en la variable x, utilizaremos la siguiente *sustitución universal*

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2},$$

luego

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$
$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2z}{1+z^2}$$

Ejercicio 1.10

1. *Calcule*
$$\int \frac{dx}{2+2\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}.$$
Ind: *Use sustitución universal, luego*
$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

2. *Calcule la siguiente integrale indefinida* $\displaystyle\int \frac{dx}{5\sec(x)-3}.$

Integración de fracciones con radicales

El caso en que las funciones irracionales incluyan solamente a monomios en la variable x, donde las raíces que aparecen poseen índices distintos, basta realizar el cambio de variable $x = t^N$ donde N es el mínimo común múltiplo de los índices y, por tanto, $dx = Nt^{N-1}dt$

Ejercicio 1.11

1. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt{x})}dx.$

2. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}dx.$

3. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+2+\sqrt[6]{(x+2)^5}}dx.$

4. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx.$

1.3 Ejercicios

1. Dada la función $y = f(x)$ tal que,
$$f''(x) = 3x^2 - 2.$$
Determine $f(x)$ sabiendo que $f'(-1) = 0$ y $f(1) = 1$.

2. Determine las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\displaystyle\int \tan^3(x)\sec^3(x)dx.$

   b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{8-4x^2-4x}}dx.$

   c) $\displaystyle\int \left(x^2-7\right)\operatorname{sen}(x)dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)+1}.$

   e) $\displaystyle\int \frac{4x^3+5x^2+3x+5}{(x^2+2x+5)(2x+1)^2}dx.$

CAPÍTULO 2

Ecuaciones diferenciales de primer orden

2.1 Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales

2.1.1 Conceptos básicos

Definición 2.1 (Ecuación diferencial)

- *Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas o diferenciales de una o varias variables.*
- *Si la ecuación sólo involucra derivadas respecto a una única variable independiente, diremos que es ordinaria. En otro caso, que es parcial.*
- *Si la ecuación involucra derivadas de orden n, pero no de orden más alto, diremos que la propia ecuación es de orden n.*

Definición 2.2 (Orden) *El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación.*

Simbólicamente podemos expresar una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden con una variable dependiente por la forma general

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{2.1.1}$$

donde F es una función con valores reales de $n+2$ variables: $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. La ecuación diferencial

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

donde f es una función continua con valores reales, se conoce como la *forma normal* de la ecuación EDO de orden n. Así que para nuestros propósitos, usaremos las formas normales cuando sea adecuado

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, y'\right).$$

Definición 2.3 **(EDO lineal)** *Se dice que una ecuación diferencial de n-ésimo orden es lineal si F es lineal en $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n-ésimo orden es lineal cuando la ecuación* (2.1.1) *es de la forma $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1\ (x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$ o*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Las EDO lineales de primer orden $(n = 1)$ y de segundo orden $(n = 2)$:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad y \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Una ecuación diferencial ordinaria no lineal es simplemente una que no es lineal.

Observación: *1. La variable dependiente y y todas sus derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ son de primer grado.*

2. Los coeficientes de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $y, y', \ldots, y^{(n)}$ dependen de la variable independiente x.

Ejemplo 2.1 *Clasifica la siguiente ecuación diferencial enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; si es ordinaria o parcial y si es lineal o no lineal:*

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right)y = 0 \tag{2.1.2}$$

Sol:

1. *Orden 2.*
2. *variable dependiente: y.*
3. *variable independiente: x.*
4. *ED ordinaria.*
5. *EDO lineal*

Ejemplo 2.2 *Clasifica la siguiente ecuación diferencial enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; si es ordinaria o parcial y si es lineal o no lineal:*

$$\frac{dx}{dy} = x^2 + y^2 \tag{2.1.3}$$

Sol:

1. *Orden 1.*
2. *variable dependiente: x.*
3. *variable independiente: y.*
4. *ED ordinaria.*

5. *EDO no lineal.*

Ejemplo 2.3 *Clasifica la siguiente ecuación diferencial enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; si es ordinaria o parcial y si es lineal o no lineal:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2} \tag{2.1.4}$$

Sol:

1. *Orden 1.*
2. *variable dependiente: y.*
3. *variable independiente: x.*
4. *ED ordinaria.*
5. *EDO no lineal.*

Ejemplo 2.4 *Clasifica la siguiente ecuación diferencial enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; si es ordinaria o parcial y si es lineal o no lineal:*

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^3 + u^4 = 1 \tag{2.1.5}$$

Sol:

1. *Orden 2.*
2. *variable dependiente: u.*
3. *variable independiente: t.*
4. *ED ordinaria.*
5. *EDO no lineal.*

Ejemplo 2.5 *Clasifica la siguiente ecuación diferencial enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; si es ordinaria o parcial y si es lineal o no lineal:*

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{2.1.6}$$

Sol:

1. *Orden 2.*
2. *variable dependiente: Y.*

3. *variables independientes:* x, t.

4. *ED parcial.*

5. *EDO lineal.*

Ejemplo 2.6 *Clasifica la siguiente ecuación diferencial enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; si es ordinaria o parcial y si es lineal o no lineal:*

$$\left(x^2 + 2y^2\right) dx + \left(3x^3 - 4y^2\right) dy = 0 \tag{2.1.7}$$

Sol:

1. *Orden 1.*

2. *variable dependiente:* y *(depende).*

3. *variable independiente:* x.

4. *ED ordinaria.*

5. *EDO no lineal.*

Ejemplo 2.7 *Clasifica la siguiente ecuación diferencial enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; si es ordinaria o parcial y si es lineal o no lineal:*

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 5y = e^x \tag{2.1.8}$$

Sol:

1. *Orden 3.*

2. *variable dependiente:* y.

3. *variable independiente:* x.

4. *ED ordinaria.*

5. *EDO no lineal.*

Definición 2.4 *Una constante arbitraria es un valor que es independiente de las variables involucradas en la ecuación.*

Observación: *Generalmente las denotaremos con las primeras letras del alfabeto:*

$$A, B, C, c_1, c_2, \ldots \tag{2.1.9}$$

Ejemplo 2.8 *En la función*

$$y = x^2 + c_1 x + c_2 \tag{2.1.10}$$

los símbolos c_1, c_2 representan constantes arbitrarias.

Ejemplo 2.9 *La relación $y = Ae^{-4x+B}$ se puede reescribir como $y = Ce^{-4x}$. Por lo que sólo involucra una constante arbitraria.*

Observación: *Siempre reduciremos las ecuaciones al número mínimo de constantes arbitrarias, a las que llamaremos esenciales.*

Definición 2.5 *De manera general, una solución general de orden n tiene n parámetros (constantes arbitrarias esenciales) y por tanto, geométricamente representa una familia de curvas $n-$paramétrica.*

De manera reciproca, una relación con n constantes arbitrarias (también llamada primitiva) tiene asociada una ecuación diferencial de orden n (de la cual es solución general), llamada la ecuación diferencial de la familia.

Definición 2.6 (Solución de una ecuación diferencial)

- *Se denomina una solución de la ecuación diferencial en el intervalo a cualquier función ϕ, definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad.*
- *Una solución general de una ecuación diferencial de orden n es aquella que involucra n constantes arbitrarias esenciales.*
- *Una solución particular es aquella que se obtiene de una general, sustituyendo valores específicos en las constantes arbitrarias.*
- *Una solución singular es una aquella que no se puede obtener de la solución general sólo especificando valores para las constantes arbitrarias.*

Ejemplo 2.10 *La ecuación diferencial ordinaria $dy/dx = xy^{1/2}$ tiene por solución general la familia de soluciones uniparamétrica $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ en $(-\infty, \infty)$. $y = \frac{1}{16}x^4$ y $y = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial. Cuando $c = 0$, la solución particular resultante es $y = \frac{1}{16}x^4$. Pero observe que la solución trivial $y = 0$ es una solución singular, ya que no es un miembro de la familia $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ porque no hay manera de asignarle un valor a la constante c para obtener $y = 0$.*

Observación: *No podemos pensar en la solución de una EDO sin pensar simultáneamente en un intervalo. El intervalo I en la definición también se conoce con otros nombres, como son intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez o dominio de la solución y puede ser un intervalo abierto (a, b), un intervalo cerrado $[a, b]$, un intervalo infinito $(a, +\infty)$, etcétera.*

Ejercicio 2.1

1. *Demuestra que* $y = x^2 + c_1x + c_2$ *es una solución general de* $y'' = 2$ *en el intervalo* $(-\infty, +\infty)$.
2. *Verifica que* $y = x^2 - 3x + 2$ *es una solución particular de* $y'' = 2$ *en el intervalo* $(-\infty, +\infty)$.
3. *Muestre que la solución general de* $y = xy' - y'^2$ *es* $y = cx - c^2$.

Observación: *Sin embargo,* $y = \dfrac{x^2}{4}$ *es una solución que no se puede obtener sustituyendo c. Por tanto, es una solución singular.*

Definición 2.7 **(Solución implícita de una EDO)** *Se dice que una relación* $G(x, y) = 0$ *es una solución implicita de una ecuación diferencial ordinaria (4) en un intervalo* I, *suponiendo que existe al menos una función* ϕ *que satisface la relación así como la ecuación diferencial en* I.

Si la solución implicita $G(x, y) = 0$ es simple, podemos ser capaces de despejar a y en términos de x y obtener una o más soluciones explícitas.

Ejemplo 2.11 *Compruebe que la relación* $x^2 + y^2 = 25$ *es una solución implícita de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{2.1.11}$$

en el intervalo abierto $(-5, 5)$.

Sol:*Derivando implícitamente obtenemos*

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25 \quad o \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Resolviendo la última ecuación para dy/dx *se obtiene* (2.1.11). *Además, resolviendo* $x^2 + y^2 = 25$ *para* y *en términos de* x *se obtiene* $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. *Las dos funciones* $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ *y* $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ *satisfacen la relación (que es,* $x^2 + \phi_1^2 = 25$ *) y* $x^2 + \phi_2^2 = 25$ *) y son las soluciones explícitas definidas en el intervalo* $(-5, 5)$.

Observación: *Cualquier relación del tipo* $x^2 + y^2 - c = 0$ *es formalmente satisfactoria* (2.1.11) *para cualquier constante c. Sin embargo, se sobrentiende que la relación siempre tendrá sentido en el sistema de los números reales; asi, por ejemplo, si* $c = -25$, *no podemos decir que* $x^2 + y^2 + 25 = 0$ *es una solución implícita de la ecuación.*

Familia de soluciones El estudio de ecuaciones diferenciales es similar al del cálculo integral. En algunos libros, a una solución ϕ ese le llama a veces *integral de la ecuación* y a su gráfica se le llama *curva integral*. Cuando obtenemos una antiderivada o una integral indefinida en cálculo, usamos una sola constante c de integración. De modo similar, cuando resolvemos una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$, normalmente obtenemos una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro c. Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones llamado familia de soluciones uniparamétrica. Cuando resolvemos una ecuación diferencial de orden n, $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, buscamos una familia de soluciones n-paramétrica $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$. Esto significa que una sola ecuación diferencial puede tener un múmero infinito de soluciones que corresponden a un número ilimitado de elecciones de los parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que está libre de la elección de parámetros se llama solución particular, como se ha enunciado anteriormente.

Ejemplo 2.12 (Solución particular)

a) La familia uniparamétrica $y = cx - x\cos x$ es una solución explícita de la ecuación lineal de primer orden

$$xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$ (compruebelo). La solucion $y = -x\ \cos x$, es una solución particular correspondiente a la elección $c = 0$.

b) La familia de soluciones de dos parámetros $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ es una solución explícita de la ecuación lineal de segundo orden

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Algunas soluciones particulares particulares son: $y = 5xe^x\,(c_1 = 0, c_2 = 5)$, $y = 3e^x\ (c_1 = 3, c_2 = 0)$ y $y = 5e^x - 2xe^x\,(c_1 = 5, c_2 = -2)$, respectivamente.

Ejemplo 2.13 *Verifica si la función dada es una solución de la ecuación diferencial; y en ese caso, determina si la solución es general.*

$$\begin{cases} y' - x + y = 0 \\ y = Ce^{-x} + x - 1 \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Sol:

1. $y' = -Ce^{-x} + 1$
2. $y' - x + y = (-Ce^{-x} + 1) - x + (Ce^{-x} + x - 1) = 0$
3. *C es su único parámetro.*
4. *Por tanto y es solución general.*

Ejemplo 2.14 *Verifica si la relación indicada es una solución de la ecuación diferencial; y en ese caso, determina si la solución es general.*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{3y^2 - x^2} \\ x^2 y - y^3 = c \end{cases} \tag{2.1.13}$$

Sol:

1. *Derivando implícitamente obtenemos*

$$x^2y' + 2xy - 3y^2y' = 0 \tag{2.1.14}$$

2. *Despejando y' obtenemos*

$$y' = \frac{2xy}{3y^2 - x^2} \tag{2.1.15}$$

3. *Como c es el único parámetro, y es una solución general.*

Ejemplo 2.15 *Verifica si la familia de funciones dada es una solución de la ecuación diferencial; y en ese caso, determina si la solución es general.*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2I}{dt^2} + 2\dfrac{dI}{dt} - 3I = 2\cos(t) - 4\sin(t) \\ I = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t) \end{cases} \tag{2.1.16}$$

Sol:

1. $\dfrac{dI}{dt} = c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)$

2. $\dfrac{d^2I}{dt^2} = c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \sin(t)$

3. $$\begin{aligned}\left(c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \sin(t)\right) + 2\left(c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)\right) - 3\left(c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t)\right)& \\ = 2\cos(t) - 4\sin(t)&\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

4. *Como c_1, c_2 son parámetros, entonces I es una solución general.*

Ejemplo 2.16 *Verifica si la familia de funciones dada es una solución de la ecuación diferencial; y en ese caso, determina si la solución es general.*

$$\begin{cases} x^3\left(\dfrac{d^2v}{dx^2}\right)^2 = 2v\dfrac{dv}{dx} \\ v = cx^2 \end{cases} \tag{2.1.18}$$

Sol:

1. $\dfrac{dv}{dx} = 2cx$

2. $\dfrac{d^2v}{dx^2} = 2c$

3. *Sustituimos en el lado izquierdo*

$$x^3(2c)^2 = 4c^2x^3 \tag{2.1.19}$$

4. *Sustituimos en el lado derecho*

$$2\left(cx^2\right)(2cx) = 4c^2x^3 \tag{2.1.20}$$

5. *Entonces v es solución, pero como la ecuación es de grado 2 y c es el único parámetro, no es general.*

2.1.2 Problemas con valores iniciales

Con frecuencia nos interesan problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial en la que que $y(x)$ satisface condiciones prescritas, es decir, condiciones impuestas sobre una $y(x)$ desconocida o sus derivadas. En algún intervalo I que contiene a x_0 el problema de resolver una ecuación diferencial de n-ésimo orden sujeto a las n condiciones que lo acompanan especificadas en x_0:

$$\begin{aligned} &\text{Resolver:} && \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ &\text{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias dadas, se llama *problema con valores iniciales (PVI)* de n-ésimo orden. Los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto x_0, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, se llaman *condiciones iniciales* (CI).

Resolver un problema de valor inicial de n-ésimo orden implica encontrar primero una familia n-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial dada y luego usar las condiciones iniciales en x_0 para determinar las n constantes en esta familia. La solución particular resultante está definida en algún intervalo I que contiene el primer punto x_0.

Interpretación geométrica de los PVI

Los casos para $n = 1$ y $n = 2$ vienen dados por,

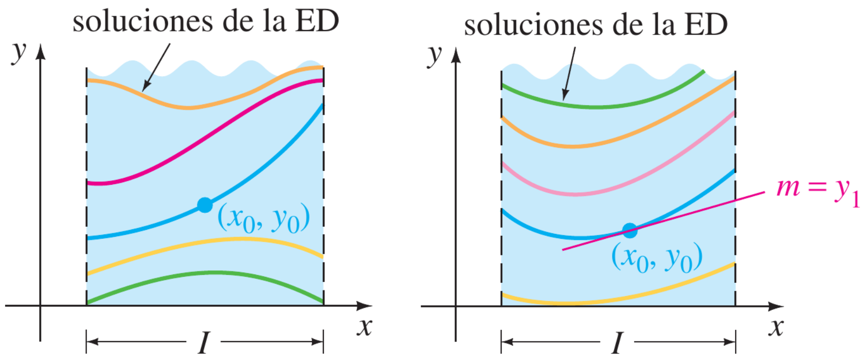
$$\begin{aligned} &\text{Resolver:} && \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ &\text{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

y

$$\begin{aligned} &\text{Resolver:} && \frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, y'\right) \\ &\text{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

son problemas con valores iniciales de primer y segundo orden, respectivamente. Para la ecuación (2.1.22) estamos buscando una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en un intervalo

I que contenga a x_0, de forma que su gráfica pase por el punto dado (x_0, y_0). En la figura 2.1-(a) se muestra en azul una curva solución.



(a) $y(x_0) = y_0$ (b) $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_1$

Figura 2.1: Solución del PVI de primer y segundo orden, respectivamente.

Para la ecuación (2.1.23) queremos determinar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y'' = f(x, y, y')$ en un intervalo I que contenga a x_0 de tal manera que su gráfica no sólo pase por el punto dado (x_0, y_0), sino que también la pendiente a la curva en ese punto sea el número y_1. En la figura 2.1-(b) se muestra en azul una curva solución. Las palabras condiciones iniciales surgen de los sistemas físicos donde la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y_1$ representan la posición y la velocidad respectivamente de un objeto al comienzo o al tiempo inicial t_0.

Ejemplo 2.17 *Determine la solución particular de la ecuación diferencial del problema 2.1.16, tal que satisface las condiciones*

$$I(0) = 2$$
$$I'(0) = -5$$

Sol:

1. $I(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t} + \sin(t)$
2. $I(0) = c_1 + c_2 = 2$
3. $I'(t) = c_1 e^t - 3c_2 e^{-3t} + \cos(t)$
4. $I'(0) = c_1 - 3c_2 + 1 = -5$
5. $c_1 - 3c_2 = -6$
6. $c_1 = 0, c_2 = 1$
7. Por lo tanto, $I(t) = 2e^{-3t} + \sin(t)$

Ejemplo 2.18 *Mostrar que la solución de problema de valor inicial*

$$\begin{cases} Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) = 16e^{-2t} & t \geq 0 \\ Q(0) = 2, Q'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.1.24}$$

es

$$Q(t) = e^{-2t}\left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right)$$

Sol: *Note que* $Q(0) = 2, Q'(0) = 0$ *y además*

$$\begin{aligned} Q'(t) &= e^{-2t}\left(4\cos(4t) - 4\sin(4t)\right) - 2e^{-2t}\left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right) \\ &= e^{-2t}\left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q''(t) &= e^{-2t}\left(-8\sin(4t) - 24\cos(4t)\right) - 2e^{-2t}\left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \\ &= e^{-2t}\left(4\sin(4t) - 28\cos(4t) + 4\right) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) =& e^{-2t}\left(4\sin(4t) - 28\cos(4t) + 4\right) \\ &+ 4e^{-2t}\left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \\ &+ 20e^{-2t}\left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right) \\ =& 16e^{-2t} \end{aligned}$$

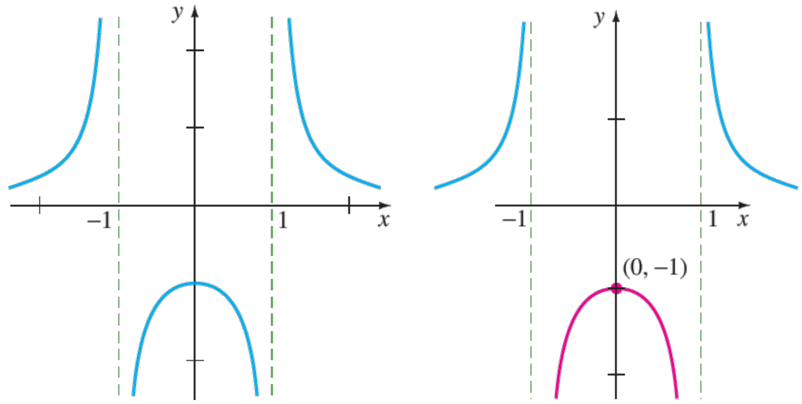
Ejemplo 2.19 *Muestre que una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden* $y' + 2xy^2 = 0$ *es* $y = 1/\left(x^2 + c\right)$. *Note que si se establece la condición inicial* $y(0) = -1$, *entonces al sustituir* $x = 0$ *y* $y = -1$ *en la familia de soluciones, se obtiene* $c = -1$. *Así* $y = 1/\left(x^2 - 1\right)$.

Ahora enfatizamos en las siguientes tres diferencias:

- *Considerada como una función, el dominio de* $y = 1/\left(x^2 - 1\right)$ *es el conjunto de todos los números reales* x *para los cuales* $y(x)$ *está definida, excepto en* $x = -1$ *y en* $x = 1$.

- *Considerada como una solución de la ecuación diferencial* $y' + 2xy^2 = 0$, *el intervalo* I *de definición de* $y = 1/\left(x^2 - 1\right)$ *podría tomarse como cualquier intervalo en el cual* $y(x)$ *está definida y es derivable. Como se puede ver en la figura* (2.2)-*(a), los intervalos más largos en los que* $y = 1/\left(x^2 - 1\right)$ *es una solución son* $(-\infty, -1), (-1, 1)$ *y* $(1, +\infty)$.

- *Considerada como una solución del problema con valores iniciales* $y' + 2xy^2 = 0, y(0) = -1$, *el intervalo* I *de definición de* $y = 1/\left(x^2 - 1\right)$ *podría ser cualquier intervalo en el cual* $y(x)$ *está definida, es derivable y contiene al punto inicial* $x = 0$; *el intervalo más largo para el cual esto es válido es* $(-1, 1)$. *Vea la curva roja en la figura* (2.2)-*(b).*



(a) función definida para toda x excepto en $x = \pm 1$

(b) solución definida en el intervalo que contiene $x = 0$

Figura 2.2: Función y y Solución del PVI.

Ejercicio 2.2 *Sabiendo que $x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen}(4t)$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la EDO $x'' + 16x = 0$. Determine una solución del problema con valores iniciales*

$$x'' + 16x = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Ejemplo 2.20 *Determine gráficamente una relación entre la solución general*

$$y = cx - c^2$$

y la solución singular $y = \dfrac{x^2}{4}$ de la ecuación diferencial

$$y = xy' - y^2.$$

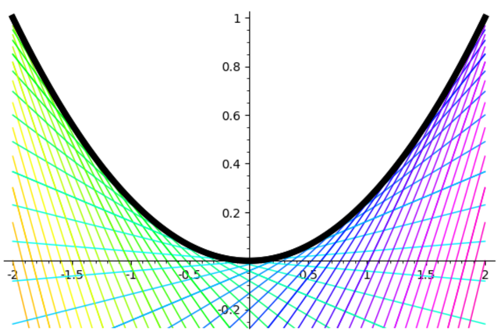


Figura 2.3: La parábola es la envolvente de la familia de lineas rectas.

La envolvente de una familia de curvas

$$G(x, y, c) = 0,$$

si es que existe, puede encontrarse resolviendo simultaneamente las ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_c G(x,y,c) = 0 \\ G(x,y,c) = 0 \end{cases} \tag{2.1.25}$$

Sol:

1. *Calculamos la derivada parcial* $\partial_c G(x,y,c) = -x + 2c$
2. *Resolvemos el sistema de ecuaciones* (2.1.25)

$$\begin{aligned} -x + 2c &= 0 \\ y - cx + c^2 &= 0 \end{aligned}$$

3. *y obtenemos la solución paramética*

$$x = 2c, y = c^2 \tag{2.1.26}$$

4. *La solución se puede reescribir como*

$$y = \frac{x^2}{4}. \tag{2.1.27}$$

Ver Figura 2.3.

Ejemplo 2.21 1. *Trace la gráfica de varios miembros de la familia uniparamétrica*

$$\left\{ y = cx^2 \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

2. *Obtenga la ecuación diferencial de esta familia*

Sol: Inciso (a)

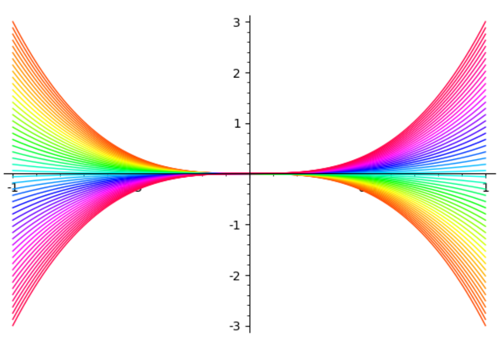


Figura 2.4: Familia uniparamétrica $y = cx^2$

Inciso (b)

1. $y = cx^3 \Rightarrow y' = 3cx^2$, luego $c = \dfrac{y}{x^3}$. Introduciendo en la primera igualdad obtenemos

$$y' = 3\left(\frac{y}{x^3}\right)x^2.$$

Finalmente la EDO buscada viene dada por $y' = \dfrac{3y}{x}$.

Ejemplo 2.22 *Encuentre una ecuación diferencial para la familia biparamétrica de cónicas*

$$ax^2 + by^2 = 1 \tag{2.1.28}$$

Sol:

Supongamos que $b \neq 0$.

1. $2ax + 2byy' = 0$
2. $a = \dfrac{-byy'}{x}$
3. $\left(-\dfrac{byy'}{x}\right)x^2 + by^2 = 1$
4. $-bxyy' + by^2 = 1$
5. $-b\left(xyy'' + xy'^2 + yy'\right) + 2byy' = 0$
6. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$

Ejemplo 2.23 (Un PVI puede tener varias soluciones) *Cada una de las funciones $y = 0$ y $y = \frac{1}{16}x^4$ satisface la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ y la condición inicial $y(0) = 0$, por lo que el problema con valores iniciales*

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0$$

tiene al menos dos soluciones $y = x^4/16$ y $y = 0$ y ambas pasan por el punto $(0, 0)$.

Dentro de los límites de seguridad de un curso formal de ecuaciones diferenciales uno puede confiar en que la mayoría de las ecuaciones diferenciales tendrán soluciones y que las soluciones de los problemas con valores iniciales probablemente serán únicas. Sin embargo, en la vida real no es así. Por lo tanto, antes de tratar de resolver un problema con valores iniciales es deseable saber si existe una solución y, cuando así sea, si ésta es la única solución del problema.

Teorema 2.1 (Existencia de una solución única) *Pensemos en R como una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo $I_0 : (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$, y una función única $y(x)$, definida en I_0, que es una solución del problema con valores iniciales (2.1.22).*

Ejemplo 2.24 *La E.D.O $dy/dx = xy^{1/2}$ tiene al menos dos soluciones cuyas gráficas pasan por el punto $(0,0)$. Analizando las funciones*

$$f(x,y) = xy^{1/2} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

vemos que son continuas en la mitad superior del plano definido por $y > 0$. Por tanto el teorema (2.1) nos permite concluir que a través de cualquier punto (x_0, y_0), $y_0 > 0$ en la mitad superior del plano existe algún intervalo centrado en x_0 en el cual la ecuación diferencial dada tiene una solución única.

Asi, por ejemplo, aún sin resolverla, sabemos que existe algún intervalo centrado en 2 en el cual el problema con valores iniciales $dy/dx = xy^{1/2}, y(2) = 1$ tiene una solución única.

Ejemplo 2.25 (Crecimiento de la población) *Las ecuaciones diferenciales se pueden utilizar para describir o modelar muchos sistemas físicos diferentes. Aquí se supone que un modelo de crecimiento de población de una pequeña comunidad está dado por el problema de valor inicial*

$$\frac{dP}{dt} = 0.15P(t) + 20, \quad P(0) = 100,$$

donde P es el número de personas en la comunidad y el tiempo t se mide en años. ¿Qué tan rápido, es decir, con qué razón está aumentando la población en $t = 0$? ¿Qué tan rápido está creciendo la población cuando la población es de 500?

2.2 Ejemplos de modelado

Antes de adentrarnos en el estudio riguroso de las ecuaciones diferenciales presentamos algunos ejemplos que muestran como éstas aparecen naturalmente al plantear ciertos problemas físicos y químicos. En todos los casos comenzaremos describiendo matemáticamente el sistema que estamos analizando, esto es, creando un modelo, que después podremos resolver utilizando técnicas que veremos en los sucesivos capítulos.

2.2.1 Desintegración de sustancias radiactivas

Nos interesa hallar la masa de un cierto elemento radiactivo en un tiempo t, para ello denotamos por $x(t)$ la masa en función del tiempo; naturalmente, esta será la incógnita de nuestra ecuación.

La clave que nos permite modelar este fenómeno es que la probabilidad de desintegración λ de un átomo es la misma para todos los átomos de la muestra, independientemente de la masa del material. Nos centramos en la tasa de crecimiento (o decrecimiento) *media*, esto es, la tasa de cambio relativa a la cantidad de masa presente:

$$\frac{\Delta x}{x\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{x(t)\Delta t} \approx -\lambda, \quad \lambda > 0,$$

donde la última igualdad se deduce de lo dicho anteriormente. Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, nos queda $x'(t)/x(t) = -\lambda$ para todo t. Esto nos da una ecuación diferencial lineal de primer orden (con coeficientes constantes).

En este caso, x es una masa, por lo que no puede ser negativa, por tanto

$$f(t,x) = -\lambda x$$

con $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Esta ecuación diferencial es resoluble, para ello tomamos primitivas en

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -\lambda \implies \log(x) = -\lambda t + c \implies x = e^c e^{-\lambda t} = ke^{-\lambda t}$$

con lo que nos queda $x = ke^{-\lambda t}$. Llamamos a esta familia de funciones *solución general* de la ecuación, y nos da todo el conjunto de soluciones variando k. En particular, el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de dimensión uno del espacio vectorial $C^1(\mathbb{R})$, que tiene dimensión infinita.

2.2.2 Movimiento armónico simple

Vemos ahora un ejemplo de modelado más complicado, el movimiento del péndulo. Queremos hallar el ángulo del péndulo en un momento determinado, para ello nombramos las magnitudes relevantes. Llamaremos θ al ángulo que forma la cuerda con la vertical, m a la masa puntual colgante y l a la longitud de la cuerda.

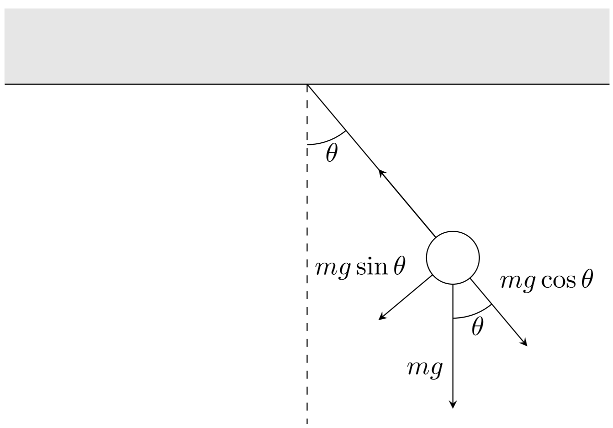


Figura 2.5: Fuerzas que actúan sobre un péndulo

Recordamos que, por la segunda ley de Newton, $F = ma$, donde a es la aceleración. Tenemos entonces que la fuerza que produce la aceleración tangencial es

$$-mg\sin\theta = F = ma = m \cdot l\theta''$$

por tanto

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

puesto que θ aparece dentro del seno, esta ecuación es no lineal y de orden 2, ya que aparece la derivada segunda de θ. En este caso $f(t,\theta,\theta') = -\frac{g}{l}\sin\theta$ y $\Omega = \mathbb{R} \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}$.

Si θ es suficientemente próximo a 0 podemos aproximar $\sin\theta$ a θ con lo que tenemos la ecuación lineal de segundo orden

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta.$$

Esta es la ecuación del movimiento armónico simple. Su solución general, que, recordamos, es el conjunto de todas las soluciones, es

$$\theta(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

donde $\omega^2 = g/l$, como demostraremos más adelante.

Se aprecia que este conjunto de soluciones forma un espacio vectorial de dimensión 2; de hecho, demostraremos que, en general, el conjunto de soluciones de una ecuación lineal de orden n es un espacio vectorial, o afín si la ecuación no es homogénea, de dimensión n.

2.3 Problema de valor inicial (PVI)

En los ejemplos anteriores hemos obtenido soluciones generales para los problemas propuestos, pero si conocemos el valor de x y sus derivadas en un tiempo determinado la solución de la ecuación diferencial está unívocamente determinada, como demostraremos. A este problema se lo conoce como problema de valor inicial.

Definición 2.8 (Problema de valor inicial) *Un problema de valor inicial es una ecuación diferencial*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}),$$

junto al valor que toman la función incógnita y sus derivadas en un tiempo determinado t_0

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ \ldots\ ,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Definición 2.9 (Condición inicial) *Llamaremos condición inicial al valor de x y sus derivadas en un tiempo determinado t_0 en un problema de valor inicial.*

2.3.1 Datación por radiocarbono

Veremos un ejemplo muy importante de modelado que da lugar a un problema de valor inicial. Resolver este problema en este caso particular nos dará un método para datar un objeto conociendo solo la cantidad de carbono presente en el mismo.

Existen diversos isótopos del carbono, entre ellos el carbono-12, el cual es estable, y el carbono-14, el isótopo radiactivo más común. El carbono-14, al ser radiactivo debería desintegrarse y disminuir su concentración en la atmósfera, pero debido a los rayos cósmicos que constantemente alcanzan la tierra la proporción entre estos dos isótopos se mantiene estable en la atmósfera. A través de la fotosíntesis estos isótopos radiactivos pasan a formar parte de las plantas y después, mediante la cadena alimenticia, del resto de seres vivos. Cuando un ser vivo muere, la cantidad de carbono-12 contenida en el mismo se mantiene constante, mientras que la de carbono-14 disminuye hasta hacerse 0, a un ritmo que depende de su *tasa de desintegración* $\lambda \sim \log 2/5730$.

Con esto, analizando la proporción entre carbono-12 y 14 en material orgánico (madera, hueso, etc.) y comparándolo con una muestra viva es posible determinar la edad del resto. La creación de este método de datación valió al químico estadounidense Willard Libby el premio Nobel de química en 1960. Veamos algunos ejemplos concretos de como se puede aplicar esta técnica.

Ejemplo 2.26 *Si la cantidad de carbono-14 en un microorganismo es de* 10^{-6} *gramos ¿Qué cantidad habrá 3000 años después?*

Sol: Se entiende que el ciclo de vida del organismo es despreciable respecto a la edad que debemos datar. Por lo visto arriba sabemos que $x' = -\lambda x$. A tiempo 0, cuando el organismo muere, el valor de x es $x(0) = 10^{-6}$. Se trata de un problema de valor inicial, que tendremos que resolver para poder encontrar $x(3000)$.

Empezamos resolviendo la ecuación diferencial

$$x(t) = ke^{-\lambda t} = ke^{-\frac{\log 2}{5730}t},$$

por lo que hemos visto antes $k = x(0) = 10^{-6}$ con lo que, sin más que sustituir,

$$x(t) = 10^{-6}e^{-\frac{\log 2}{5730}t}.$$

Podemos obtener ahora el resultado pedido $x(3000) = 6,95 \cdot 10^{-7}$ gramos.

Normalmente no sabemos la cantidad total de carbono presente en un organismo antes de su muerte, ni el tiempo transcurrido desde entonces. Veamos ahora un ejemplo más cercano a la realidad.

Ejemplo 2.27 *En una excavación en Nippur, Babilonia, en 1950 el carbón vegetal de la viga de un techo dio* $4,09$ *desintegraciones por minuto y gramo, mientras que la madera viva da* $6,68$ *desintegraciones, también por minuto y gramo. Nos preguntamos en qué año se construyó el edificio.*

Sol: Llamaremos $R(t)$ a la tasa de desintegración total

$$R(t) = \lambda x(t) = \lambda x(0)e^{-\lambda t},$$

donde $x(0)$ es la cantidad de carbono-14 en el trozo de madera cuando fue cortada y t el tiempo transcurrido desde que se corta el árbol hasta 1950. Buscamos entonces el año de construcción, para ello observamos que $R(0) = \lambda x(0)$, de donde el cociente $\frac{R(t)}{R(0)} = e^{-\lambda t}$ no depende de la cantidad de carbono-14 presente en el organismo vivo x_0. Sustituyendo los datos y despejando

$$\frac{4,09}{6,68} = \frac{R(t)}{R(0)} = e^{-\frac{\log 2}{5730}t} \implies t \approx 4055,$$

medido en años. Así, concluimos que el edificio se construyó en el 2105 a.C.

2.4 Campos direccionales

Vimos que si $f(x,y)$ y $\partial f/\partial y$ satisfacen algunas condiciones de continuidad, se pueden responder preguntas cualitativas acerca de la existencia y unicidad de las soluciones. En esta sección veremos otras preguntas cualitativas acerca de las propiedades de las soluciones: ¿Cómo se comporta una solución cerca de un punto dado? ¿Cómo se comporta una solución cuando $x \to +\infty$? Con frecuencia se pueden responder cuando la función f depende sólo de la variable y.

Una derivada dy/dx de una función derivable $y = y(x)$ da las pendientes de las rectas tangentes en puntos de su gráfica.

Pendiente Debido a que una solución $y = y(x)$ de una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

es necesariamente una función derivable en su intervalo de definición I, debe también ser continua en I. Por lo tanto, la curva solución correspondiente en I no tiene cortes y debe tener una recta tangente en cada punto $(x, y(x))$.

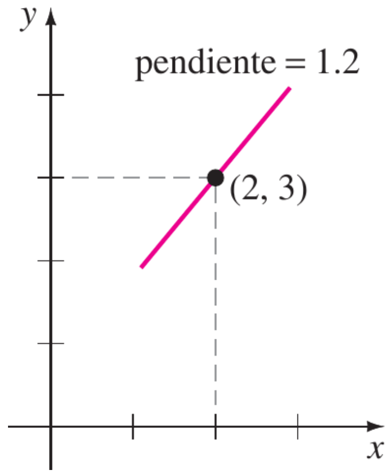
Definición 2.10 *Considere la E.D.O*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{2.4.1}$$

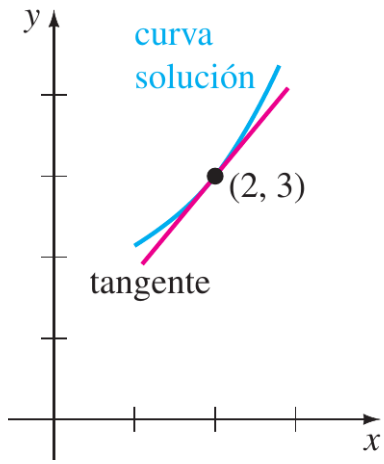
La función f en la forma normal (2.4.1) se llama función pendiente o función razón.

La pendiente de la recta tangente en $(x, y(x))$ en una curva solución es el valor de la primera derivada dy/dx en este punto y sabemos de la ecuación (2.4.1) que es el valor de la función pendiente $f(x, y(x))$. Ahora supongamos que (x, y) representa cualquier punto de una región del plano xy en la que está definida la función f.

Ejemplo 2.28 *Por ejemplo, considere la ecuación $dy/dx = 0.2xy$, donde $f(x,y) = 0.2xy$. En donde consideramos al punto $(2,3)$, la pendiente de un elemento lineal es $f(2,3) = 0.2(2)(3) = 1.2$.*



(a) elemento lineal en un punto.



(b) el elemento lineal es tangente a la curva solución que pasa por el punto.

Figura 2.6: El elemento lineal es tangente a la curva solución en $(2, 3)$.

Campo direccional Si evaluamos sistemáticamente a f en una cuadrícula rectangular de puntos en el plano xy y se dibuja un elemento lineal en cada punto (x, y) de la cuadrícula con pendiente $f(x, y)$, entonces al conjunto de todos estos elementos lineales se le llama *campo direccional* o *campo de pendientes* de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$. Una sola curva solución que pasa por un campo direccional debe seguir el patrón de flujo del campo: el elemento lineal es tangente a la curva cuando intercepta un punto de la cuadrícula.

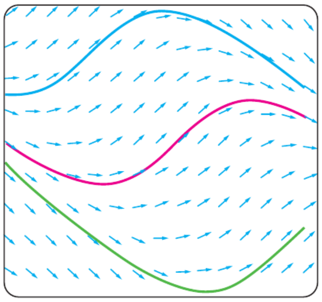


Figura 2.7: Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional.

La figura 2.7 muestra un campo direccional generado por computadora de la ecuación diferencial $dy/dx = \operatorname{sen}(x + y)$ en una región del plano xy. Observe cómo las tres curvas solución que se muestran a color siguen el flujo del campo.

Ejemplo 2.29 *Utilice un campo direccional para dibujar una curva solución aproximada para el problema con valores iniciales* $dy/dx = \operatorname{sen} y, y(0) = -\frac{3}{2}$.

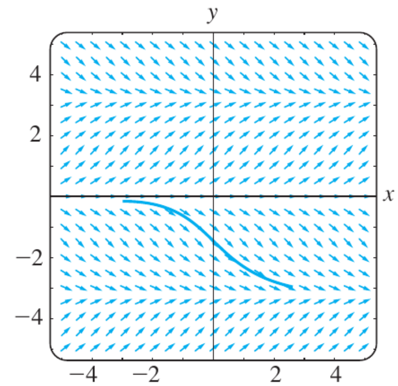


Figura 2.8: Campo direccional

Sol: *Antes de proceder, recuerde que a partir de la continuidad de* $f(x,y) = \operatorname{sen} y$ *y* $\partial f/\partial y = \cos y$ *el teorema 2.1 garantiza la existencia de una curva solución única que pase por un punto dado* (x_0, y_0) *en el plano. Considere una región rectangular* 5×5 *y especificamos puntos (debidos a la condición inicial) en la región con separación vertical y horizontal de* $\frac{1}{2}$ *unidad, es decir, en puntos* (mh, nh), $h = \frac{1}{2}$, m *y* n *enteros tales como* $-10 \leq m \leq 10, -10 \leq n \leq 10$. *El resultado se presenta en la figura 2.8. Puesto que el lado derecho de* $dy/dx = \operatorname{sen} y$ *es 0 en* $y = 0$, *y en* $y = -\pi$, *los elementos lineales son horizontales en todos los puntos cuyas segundas coordenadas son* $y = 0$ *o* $y = -\pi$. *Entonces tiene sentido que una curva solución que pasa por el punto inicial* $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, *tenga la forma que se muestra en la figura.*

Ejercicio 2.3 *Encuentre el campo direccional para la ecuación diferencial* $dy/dx = 0.2xy$. *Defina una malla* 5×5 (mh, nh) *con* m *y* n *enteros, haciendo* $-5 \leq m \leq 5, -5 \leq n \leq 5$, *y* $h = 1$.

Crecimiento/Decrecimiento La interpretación de la derivada dy/dx como una función que da la pendiente desempeña el papel principal en la construcción de un campo direccional. A continuación, se usará otra propiedad contundente de la primera derivada, es decir, si $dy/dx > 0$ (o $dy/dx < 0$) para toda x en un intervalo I, entonces una función derivable $y = y(x)$ es creciente (o decreciente) en I.

2.5 Ecuaciones Diferenciales Autónomas

Definición 2.11 (Ecuación diferencial autónoma de primer orden) *Una ecuación diferencial autónoma de 1er. orden es una ecuación de la forma*

$$y' = F(y) \tag{2.5.1}$$

donde $F(y)$ *es una función dada continua.*

Nota: Si en vez de usar la notación $y = y(x)$ para las soluciones, usamos la notación $x = x(t)$, la ecuación diferencial autónoma de 1er. orden es $\dot{x} = F(x)$ (cuando la variable independiente se denota con t, la derivada respecto de t se denota con un punto, en vez de prima). Usaremos en algunos ejemplos la notación $y = y(x)$ (x variable independiente, y dependiente) y en otros ejemplos la notación $x = x(t)$ (t variable independiente, x dependiente). En general la variable independiente, llámese como se llame, se interpreta como el tiempo.

Ejemplo 2.30 $y' = y^2 - 1$ *es una ecuación diferencial autónoma de 1er. orden. También lo es* $\dot{x} = \sqrt{x}$*. En cambio* $y' = y$ *sen* x *es una ecuación diferencial de 1er. orden no autónoma;* $\dot{x} = x^2 + t^2$ *también es una ecuación diferencial no autónoma.*

Definición 2.12 (Ecuación diferencial autónoma de segundo orden) *Una ecuación diferencial autónoma de 2do. orden es una ecuación de la forma*

$$y'' = F\left(y, y'\right)$$

donde $F\left(y, y'\right)$ *es una función dada continua de dos variables reales.*

Definición 2.13 (Ecuación diferencial autónoma de orden $k \geq 1$) *Sea* $k \geq 1$ *un número natural dado. Una ecuación diferencial autónoma de orden* k *es una ecuación de la forma*

$$y^{(k)} = F\left(y, y', y^{''}, \ldots, y^{(k-1)}\right)$$

donde F *es una función dada continua de* k *variables reales, e* $y^{(k)}, y^{(k-1)}$*, etc, denotan la derivada* k*-ésima,* $(k-1)$*-ésima, etc, respectivamente de una función solución* $y = y(x)$*.*

Ejemplo 2.31 *La ecuación diferencial* $y'' + 4y' + 3y = 0$ *es autónoma de 2 do. orden, pues* $y'' = -3y - 4y' = F\left(y, y'\right)$ *donde la función* F *es* $F(u, v) = -3u - 4v \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$*. La ecuación diferencial* $y'' + 4y = 0$ *también es autónoma de 2 do. orden pues* $y'' = -4y = F\left(y, y'\right)$ *donde* $F(u, v) = -4u \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$*. La ecuación diferencial* $y'' + 4xy' + 3y = 0$ *es lineal de 2 do. orden homogénea, pero es no autónoma porque* $y'' = -3y - 4xy'$ *no puede escribirse como función continua que depende solo de* y *e* y'*, (depende además de* x *).*

Definición 2.14 (Puntos de equilibrio o soluciones estacionarias) *Se llama* punto de equilibrio *o* solución estacionaria *(punto crítico) de una ecuación diferencial a una solución* $y(x) = a$ *constante para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Es decir, las soluciones estacionarias o puntos de equilibrio son aquellas cuyas gráficas son rectas horizontales.*

Ejemplo 2.32 *Para la ecuación diferencial es* $y' = y^2 - 1$*, los puntos de equilibrio son dos:* $y(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ *e* $y(x) = -1 \forall x \in \mathbb{R}$ *porque* $a = 1$ *y* $a = -1$ *son las únicas raíces de la ecuación* $a^2 - 1 = 0$*. La ecuación diferencial* $\dot{x} = x^2 + 1$ *no tiene puntos de equilibrio o soluciones estacionarias, porque la ecuación* $a^2 + 1 = 0$ *no tiene soluciones reales* a*. La ecuación diferencial* $\dot{x} = \sqrt{x}$ *tiene una única solución estacionaria o punto de equilibrio que es* $x(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$*.*

Definición 2.15 *Los puntos de equilibrio o soluciones estacionarias de una ecuación diferencial autónoma de 2do. orden* $y'' = F(y, y')$ *son todas las funciones constantes (de la forma* $y(x) = a$ *constante para todo* x*) tales que la constante real* a *satisface* $F(a, 0) = 0$.

Ejemplo 2.33 *Para la ecuación diferencial es* $y'' = -4y' - 3y$*, el punto de equilibrio es uno solo:* $y(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ *porque* $a = 0$ *es la única raiz de la ecuación* $-4 \cdot 0 - 3a = 0$*. La ecuación diferencial* $y'' = y^2 + 1$ *no tiene puntos de equilibrio o soluciones estacionarias, porque la ecuación* $a^2 + 1 = 0$ *no tiene soluciones reales* a*. La ecuación diferencial* $y'' = y^2 + y' - 1$ *tiene dos soluciones estacionarias o puntos de equilibrio que son* $y(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$*, e* $y(x) = -1 \forall x \in \mathbb{R}$.

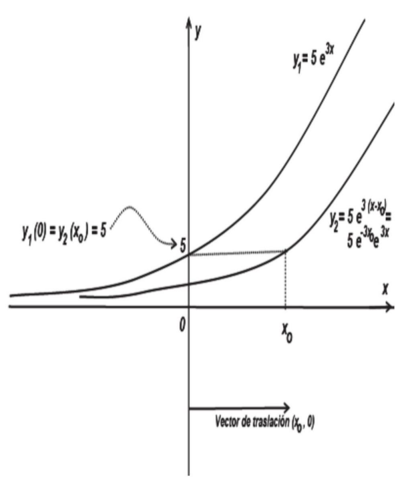
Proposición 2.5.1 (Traslado en el tiempo de las soluciones) *Si* $y_1(x)$ *es una solución particular de una ecuación diferencial autónoma (de cualquier orden* $k \geq 1$ *), entonces para todo* x_0 *real, la función* $y_2(x) = y_1(x - x_0)$ *es otra solución particular de la misma ecuación diferencial. Como consecuencia,* $y_1(0) = y_0$ *si y solo si* $y_2(x_0) = y_0$.

Dem: *Solo lo demostraremos para ecuaciones diferenciales autónomas de 1er. orden. Chequeamos que* $y_2(x)$ *satisface la ecuación (1):*

$$y_2'(x) = \frac{d}{dx} y_1(x - x_0) = y_1'(x - x_0) = F(y_1(x - x_0)) = F(y_2(x)).$$

Finalmente, sustituyendo $x = x_0$ *en la igualdad* $y_2(x) = y_1(x - x_0)$ *se obtiene* $y_2(x_0) = y_1(0)$*, lo que demuestra la última afirmación de la proposición 2.5.1.*

Interpretación: La proposición 2.5.1 tiene la siguiente interpretación. Si la variable independiente x es el tiempo, entonces $y_2(x) = y_1(x - x_0)$ significa trasladar la solución y_1 en el tiempo; es decir, la gráfica de y_2 es la gráfica de y_1 trasladada a lo largo del eje de las x (eje del tiempo) una cantidad $|x_0|$, hacia la derecha si $x_0 > 0$ ó hacia la izquierda si $x_0 < 0$ (ver Figura 1). Todo lo que suceda en el instante inicial $x = 0$ para la solución y_1 sucederá en el instante x_0 para la solución y_2. En efecto, de la igualdad $y_2(x) = y_1(x - x_0)$ deducimos: $y_2(x_0) = y_1(0)$, $\quad y_2'(x_0) = y_1'(0)$.



Podemos identificar cuando una solución no constante $y = y(x)$ de la ecuación (2.5.1) está creciendo o decreciendo determinando el signo algebraico de la derivada dy/dx; en el caso de la ecuación (2.5.1) hacemos esto identificando los intervalos del eje y en los que la función $f(y)$ es positiva o negativa.

Ejemplo 2.34 *La ecuación diferencial*

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP),$$

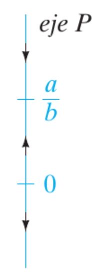


Figura 2.9: Diagrama fase de $dP/dt = P(a - bP)$.

donde a y b son constantes positivas, tiene la forma normal $dP/dt = F(P)$, la de la ecuación (2.5.1) con t y P jugando los papeles de x y y respectivamente y por tanto es autónoma. De $F(P) = P(a-bP) = 0$ vemos que 0 y a/b son puntos críticos de la ecuación, así que las soluciones de equilibrio son $P(t) = 0$ y $P(t) = a/b$. Poniendo los puntos críticos en una recta vertical, dividimos esta recta en tres intervalos definidos por $-\infty < P < 0{,}0 < P < a/b$, $a/b < P < \infty$. Las flechas en la recta que se presenta en la figura 2.9 indican el signo algebraico de $f(P) = P(a - bP)$ en estos intervalos y si una solución $P(t)$ está creciendo o decreciendo en un intervalo. La tabla siguiente explica la figura:

Intervalo	*Signo de $f(P)$*	*$P(t)$*	*Flecha*
$(-\infty, 0)$	*menos*	*decreciente*	*apunta hacia abajo*
$(0, a/b)$	*más*	*creciente*	*apunta hacia arriba*
$(a/b, \infty)$	*menos*	*decreciente*	*apunta hacia abajo*

La figura 2.9 es un diagrama fase unidimensional, o simplemente diagrama fase, de la ecuación diferencial $dP/dt = P(a - bP)$. La recta vertical se llama recta de fase.

Sin resolver una ecuación diferencial autónoma, normalmente podemos decir mucho respecto a su curva solución. Puesto que la función f en la ecuación (2.5.1) es independiente de la variable x, podemos suponer que f está definida para $-\infty < x < \infty$ o para $0 \leq x < \infty$. También, ya que f y su derivada f' son funciones continuas de y en algún intervalo I del eje y, los resultados principales del teorema 2.1 valen en alguna franja o región R en el plano xy correspondiente a I, y así pasa por algún punto (x_0, y_0) en R por el que pasa una curva solución de la ecuación (2.5.1). Supongamos que la ecuación (2.5.1) tiene exactamente dos puntos críticos c_1 y c_2 y que $c_1 < c_2$. Las gráficas de las soluciones $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$ son rectas horizontales y estas rectas dividen la región R en tres subregiones R_1, R_2 y R_3.

Aquí se presentan sin comprobación algunas de las conclusiones que podemos extraer de una solución no constante $y(x)$ de la ecuación (2.5.1):

- Si (x_0, y_0) esta en una subregión $R_i, i = 1, 2, 3$, e $y(x)$ es una solución cuya gráfica pasa a través de este punto, por lo que $y(x)$ permanece en la subregión R_i para toda x. La solución $y(x)$ en R_2 está acotada por debajo con c_1 y por arriba con c_2, es decir, $c_1 < y(x) < c_2$ para toda x. La curva solución está dentro de R_2 para toda x porque la gráfica de una solución no constante de la ecuación (2.5.1) no puede cruzar la gráfica de cualquier solución de equilibrio $y(x) = c_1$ o $y(x) = c_2$.

- Por continuidad de f debe ser $f(y) > 0$ o $f(y) < 0$ para toda x en una subregión $R_i, i = 1, 2, 3$. En otras palabras, $f(y)$ no puede cambiar de signo en una subregión.

- Puesto que $dy/dx = f(x, y(x))$ es ya sea positiva o negativa en una subregión R_i, $i = 1, 2, 3$, una solución $y(x)$ es estrictamente monótona, es decir, $y(x)$ está creciendo o decreciendo en la subregión R_i. Por tanto $y(x)$ no puede oscilar, ni puede tener un extremo relativo (máximo o mínimo).

- Si $y(x)$ está acotada por arriba con un punto crítico c_1 (como en la subregión R_1 donde $y(x) < c_1$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a la gráfica de la solución de equilibrio $y(x) = c_1$ conforme $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Si $y(x)$ está acotada, es decir, acotada por arriba y por debajo por dos puntos críticos consecutivos (como en la subregión R_2 donde $c_1 < y(x) < c_2$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a las gráficas de las soluciones de equilibrio $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$, conforme $x \to +\infty$ en una y $x \to -\infty$ en la otra. Si $y(x)$ está acotada por debajo por un punto crítico (como en la subregión R_3 donde $c_2 < y(x)$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a la gráfica de la solución de equilibrio $y(x) = c_2$ conforme ya sea $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Ejercicio 2.4 *Analice la ecuación diferencial*

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP).$$

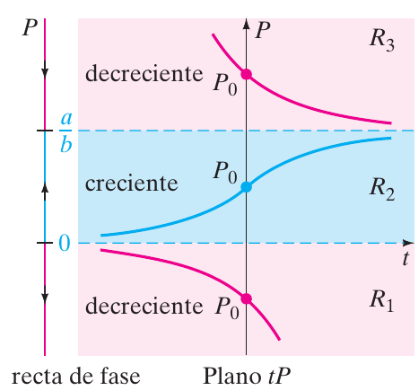


Figura 2.10: Diagrama fase y curvas solución.

Atractores y repulsores Suponga que $y(x)$ es una solución no constante de la ecuación diferencial autónoma dada en (2.5.1) y que c es un punto crítico de la ED. Básicamente hay tres tipos de comportamiento que $y(x)$ puede presentar cerca de c.

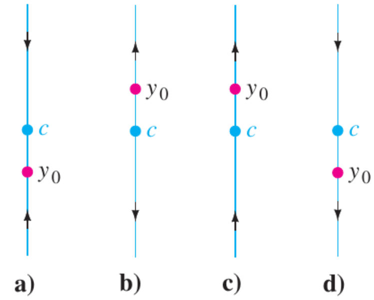


Figura 2.11: El punto crítico c es un atractor en a) y un repulsor en b) y semiestable en c) y d).

En la figura 2.11 hemos puesto a c en las cuatro rectas verticales. Cuando ambas puntas de flecha en cualquier lado del punto c, apuntan hacia c, como se muestra en la figura 2.11(a), todas las soluciones $y(x)$ de la ecuación (2.5.1) que comienzan en el punto inicial (x_0, y_0) suficientemente cerca de c presentan comportamiento asintótico $\lim_{x\to+\infty} y(x) = c$. Por esta razón se dice que el punto crítico c es *asintóticamente estable*. Utilizando una analogía física, una solución que comienza en c se parece a una partícula cargada que, que con el tiempo, se transforma en una partícula de carga contraria y así c también se conoce como un *atractor*. Cuando ambas puntas de flecha a los lados de la flecha del punto c apuntan alejándose de c, como se muestra en la figura 2.11(b), todas las soluciones $y(x)$ de la ecuación (2.5.1) que comienzan en un punto inicial (x_0, y_0) se alejan de c conforme crece x. En este caso se dice que el punto crítico c es *inestable*. Un punto crítico inestable se conoce como un *repulsor*, por razones obvias. En las figuras 2.11(c) y 2.11(d) se muestra el punto crítico c que no es ni un atractor ni un repulsor. Pero puesto que c presenta características tanto de atractor como de repulsor, es decir, una solución que comienza desde un punto inicial (x_0, y_0) que está suficientemente cerca de c es atraída hacia c por un lado y repelida por el otro, este punto crítico se conoce como *semiestable*.

2.6 Métodos para resolver ecuaciones diferenciales

Comenzaremos nuestro estudio de cómo resolver las ecuaciones diferenciales con la más simple de todas las ecuaciones diferenciales: ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables. Debido a que el método que se presenta en esta sección y que muchas de las técnicas para la solución de ecuaciones diferenciales implican integración, consulte capítulo Preliminares para recordar las fórmulas importantes y las técnicas de integración.

2.6.1 ED de variables separable

Definición 2.16 *Se dice que una ecuación diferencial ordinaria es de variables separables si se puede escribir en la forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}. \tag{2.6.1}$$

La ecuacion (2.6.1) se expresa en forma diferencial como

$$g(y)dy = f(x)dx, \tag{2.6.2}$$

y se resuelve integrando ambos miembros de (2.6.2).

Ejemplo 2.35 *Resolver*

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Sol: *Separando las variables resulta*

$$dy = 2xdx$$

e integrando

$$\int dy = \int 2xdx$$

Resolviendo las integrales

$$\begin{aligned} y + c_1 &= x^2 + c_2 \\ y &= x^2 + c_2 - c_1. \end{aligned}$$

Ya que la diferencia de constantes es una constante, podemos escribir $c = c_2 - c_1$, obte- niendo $y = x^2 + c$. Así, al momento de integrar sólo consideraremos una constante de integración.

Ejemplo 2.36 *Resolver*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \tag{2.6.3}$$

Sol: *Separando variables la ecuación se escribe como*

$$ydy = xdx$$

integrando

$$\int ydy = \int xdx$$

y calculando las integrales, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + c_1 \\ y^2 &= x^2 + 2c_1. \end{aligned}$$

Como el producto de constantes es una constante tenemos

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + c \\ y &= \sqrt{x^2 + c} \text{ o } y = -\sqrt{x^2 + c}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.5 *Resuelva las siguientes ED de variables separables*

1. $\dfrac{dy}{dx} + 4xy = 0.$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{1-2y}.$
3. $(yx - y)dy - (y+1)dx = 0.$
4. $\left(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2\right)dy = \left(1+y^2\right)dx.$

Ejercicio 2.6 *Resolver el problema de valor inicial*

1. $e^y\cos x + \cos x + (e^y \operatorname{sen} x + e^y)\, y' = 0, \quad y(\pi) = 0.$
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = k\dfrac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(a-x)}.$
3. $1 + e^{-3x}y' = 0$ *sujeto a* $y(0) = 1.$
4. $y' + y^2 - y = 0, \quad y(2) = 4.$

2.6.2 Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Definición 2.17 *La función $f(x,y)$ se llama homogénea de grado n con respecto a las variables x, y si para todo t se verifica que*

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y).$$

Ejemplo 2.37 *Diga si la función dada es homogénea y determine su grado.*

a) $f(x,y) = 2x^3 - 5xy^2 + 4y^3.$

b) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$

c) $f(x,y) = y + x(\ln x - \ln y - 1).$

Sol: *a) En este caso*

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= 2(tx)^3 - 5(tx)(ty)^2 + 4(ty)^3 \\ &= 2t^3x^3 - 5t^3xy^2 + 4t^3y^3 \\ &= t^3\left(2x^3 - 5xy^2 + 4y^3\right) \\ &= t^3 f(x,y) \end{aligned}$$

lo cual muestra que la función $f(x,y) = 2x^3 - 5xy^2 + 4y^3$ es una función homogénea de grado tres.

b) Tenemos ahora que

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \frac{t^2x^2 - t^2y^2}{(tx)(ty)} \\ &= \frac{t^2\left(x^2-y^2\right)}{t^2xy} \\ &= t^0\frac{x^2-y^2}{xy} \\ &= t^0 f(x,y) \end{aligned}$$

Así, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ *es homogénea de grado cero.*

c) Se tiene que

$$f(x,y) = y + x\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right)$$

por lo cual

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= ty + tx\left(\ln\frac{tx}{ty} - 1\right) \\ &= t\left[y + x\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right)\right] \\ &= tf(x,y). \end{aligned}$$

Lo cual muestra que $f(x,y)$ *si es una función homogénea y de grado uno.*

Ejercicio 2.7 *Diga si la función dada es homogénea o no y en caso afirmativo determine su grado.*

a) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5+y^5}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^3+x^2y+x}{y^3}$.

c) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{y^2}{2x^2} + e^{y/x} + 3$

Definición 2.18 *Se dice que la ecuación diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es homogénea si las funciones M *y* N *son homogéneas y del mismo grado.*

Note que la ecuación diferencial

$$y' = f(x,y)$$

será homogénea si f es una función homogénea de grado cero.

Método de Solución: Una ecuación diferencial homogénea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, se resuelve reduciéndola a una ecuación de variables separables, usando cualquiera de las sustituciones $v = y/x$ o bien $v = x/y$, donde v es una nueva variable.

Observación: *Aunque en teoría cualquiera de las dos sustituciones anteriores reduce una ecuación homogénea a una separable, en la práctica sugerimos utilizar*

- $y = xv$ *si* N *es de estructura "más simple" que* M *y,*
- $x = yv$ *si* M *es de estructura "más simple" que* N*.*

El tomar en cuenta esta observación, conduce a integrales más fáciles de calcular al resolver la ecuación diferencial separable que se obtiene.

Ejemplo 2.38 *Resolver*

$$\left(x^3 + y^3\right) dx - xy^2 dy = 0. \tag{2.6.4}$$

Sol: *Como*

$$M(x, y) = x^3 + y^3 \quad y \quad N(x, y) = -xy^2$$

son funciones homogéneas ambas de grado tres, la ecuación dada es homogénea. Además N *es de estructura algebraica más simple que* M*, por lo cual, la sustitución más conveniente es* $y = xv$ *para reducir* (2.6.4) *a una ecuación de variables separables.*

Hacemos

$$\begin{aligned} y &= xv \\ dy &= xdv + vdx. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.6.4) *obtenemos*

$$\begin{aligned} \left[x^3 + (xv)^3\right] dx - x(xv)^2(xdv + vdx) &= 0 \\ \left(x^3 + x^3v^3\right) dx - x^3v^2(xdv + vdx) &= 0 \\ x^3\left(1 + v^3\right) dx - x^3v^2(xdv + vdx) &= 0 \\ \left(1 + v^3\right) dx - v^2(xdv + vdx) &= 0 \\ dx + v^3dx - xv^2dv - v^3dx &= 0 \\ dx &= xv^2dv \\ \frac{dx}{x} &= v^2dv \end{aligned}$$

Integrando

$$\ln|x| + \ln|c| = \frac{v^3}{3}$$

de donde

$$v^3 = 3\ln|cx|.$$

Reemplazando $v = \frac{y}{x}$ *y simplificando encontramos que*

$$\begin{aligned} \frac{y^3}{x^3} &= 3\ln|cx| \\ y &= x\sqrt[3]{3\ln|cx|}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.39 *Resolver*

$$2xydx + \left(y^2 - 3x^2\right) dy = 0.$$

Sol: *En este caso la estructura de $M(x,y)$ es más simple que la de $N(x,y)$, por lo cual proponemos*

$$\begin{aligned} x &= yv \\ dx &= ydv + vdy. \end{aligned}$$

Entonces

$$2vy^2(ydv + vdy) + \left(y^2 - 3y^2v^2\right) dy = 0$$

o bien

$$\begin{aligned} 2vydv + \left(1 - v^2\right) dy &= 0 \\ \frac{2v}{1-v^2}dv + \frac{dy}{y} &= 0 \end{aligned}$$

Integrando

$$\ln|y| - \ln\left|1 - v^2\right| = \ln|c_1|$$

y usando $v = \frac{x}{y}$, obtenemos como solución implícita

$$c\left(y^2 - x^2\right) = y^3.$$

Ejercicio 2.8 *Resolver*

1. $y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy.$
2. $\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right) dx - xdy = 0.$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2}{xy}.$
4. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(y-p)\frac{dy}{dx} - x = 0.$

2.6.3 Ecuaciones Diferenciales Exactas

Definición 2.19 *Si $z = f(x,y)$ es una función con derivadas parciales de primer orden continuas en una región rectangular R del plano xy, entonces su diferencial total, denotada por dz o df, se define como*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Ahora bien si $f(x,y) = c$, donde c es una constante, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

de modo que la solución de la ecuación diferencial $df = 0$ está dada implícitamente por $f(x,y) = c$.

Ejemplo 2.40 *Si* $f(x,y)=x^4+3x^2y^2+y^3=c$, *entonces* $df=0$, *es decir*

$$\left(4x^3+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+3y^2\right)dy=0$$

o bien

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^3+6xy^2}{6x^2y+3y^2}.$$

Note que la ecuación diferencial no es separable ni tampoco homogénea, decimos que es exacta y su solución es $x^4+3x^2y^2+y^3=c$.

De manera general hacemos la siguiente definición.

Definición 2.20 *Se dice que una ecuación diferencial*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2.6.5}$$

es exacta si puede escribirse en la forma $df=0$, *es decir*

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

Equivalentemente, la ecuación diferencial (2.6.5) *es exacta si existe una función* f *tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y). \tag{2.6.6}$$

A la función f que cumple las ecuaciones (2.6.6) se le denomina *función potencial*, mientras que a la función vectorial

$$\mathbf{F}(x,y)=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j} \tag{2.6.7}$$

se le llama *campo vectorial conservativo*. En este contexto, resolver la ecuación diferencial exacta (2.6.5) es equivalente a encontrar la función potencial del campo (2.6.7).

Teorema 2.2 *Sean las funciones* M, N, M_y *y* N_x *continuas en la región rectangular* R. *Entonces la ecuación*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

es exacta en R *si y sólo si*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \tag{2.6.8}$$

para todo punto (x,y) *en* R.

dem: *(Prueba de la necesidad) Suponemos que* $M(x,y)$ *y* $N(x,y)$ *tienen primeras derivadas parciales continuas para todo* (x,y). *Ahora, si la expresión* $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ *es exacta, existe alguna función* f *tal que para toda* x *en* R,

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Por tanto,

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La igualdad de las parciales mixtas es una consecuencia de la continuidad de las primeras derivadas parciales de $M(x,y)$ y $N(x,y)$ (ver Teorema de Clairaut).

La parte de suficiencia del Teorema 2.2 consiste en mostrar que existe una función f para la que $\partial f/\partial x = M(x,y)$ y $\partial f/\partial y = N(x,y)$ siempre que la ecuación (2.6.8) sea válida. La construcción de la función f en realidad muestra un procedimiento básico para resolver ecuaciones exactas.

Método de resolución: Dada una ecuación en la forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, determine si la igualdad de la ecuación (2.6.8) es válida. Si es así, entonces existe una función f para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y).$$

Podemos determinar f integrando $M(x,y)$ respecto a x mientras y se conserva constante:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y), \tag{2.6.9}$$

donde la función arbitraria $g(y)$ es la "constante" de integración. Ahora derivando a (2.6.9) con respecto a y y suponiendo que $\partial f/\partial y = N(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y).$$

Se obtiene

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx. \tag{2.6.10}$$

Por último, se integra la ecuación (2.6.10) respecto a y y se sustituye el resultado en la ecuación (2.6.9). La solución implicita de la ecuación es $f(x,y) = c$.

Hacen falta algunas observaciones. Primero, es importante darse cuenta de que la expresión $N(x,y) - (\partial/\partial y)\int M(x,y)dx$ en (2.6.10) es independiente de x, ya que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

En segundo lugar, pudimos iniciar bien el procedimiento anterior con la suposición de que $\partial f/\partial y = N(x,y)$. Después, integrando N respecto a y y derivando este resultado, encontrariamos las ecuaciones que, respectivamente, son análogas a las ecuaciones (2.6.9) y (2.6.10),

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x) \quad \text{y} \quad h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy.$$

En cualquier caso no se debe memorizar ninguna de estas fórmulas.

Ejemplo 2.41 *Resuelva la siguiente EDO*

$$ydx + \left(x + \frac{2}{y}\right) dy = 0. \tag{2.6.11}$$

Sol: *Verifiquemos, primero, que* (2.6.11) *es una ecuación diferencial exacta. Aquí tenemos que*

$$M(x,y) = y \quad y \quad N(x,y) = x + \frac{2}{y}$$

y como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

afirmamos que (2.6.11) *es una ecuación diferencial exacta. Luego, existe una función* $f(x,y)$ *tal que la ecuación* (2.6.11) *se puede escribir en la forma* $df(x,y) = 0$. *Es decir, que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) = y, \tag{2.6.12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y) = x + \frac{2}{y}. \tag{2.6.13}$$

Para determinar f *integramos* (2.6.12) *con respecto de* x, *resulta*

$$f(x,y) = \int ydx$$

o bien

$$f(x,y) = xy + \phi(y) \tag{2.6.14}$$

donde $\phi(y)$ *es una función de* y, *ya que integramos con respecto de* x. *Derivando* (2.6.14) *parcialmente con respecto a* y *se obtiene*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \phi'(y) \tag{2.6.15}$$

pero como deseamos que también se satisfaga (2.6.13), *igualando* (2.6.15) *con* (2.6.13), *se sigue que*

$$x + \phi'(y) = x + \frac{2}{y}.$$

Luego

$$\phi'(y) = \frac{2}{y}$$

Integrando ahora ambos lados respecto a y *obtenemos*

$$\phi(y) = 2\ln y + c_1,$$

con c_1 *una constante arbitraria. Sustituimos* $\phi(y)$ *en* (2.6.14) *y se tiene que*

$$f(x,y) = xy + 2\ln y + c_1.$$

Finalmente, igualamos $f(x,y)$ con una constante k para obtener la siguiente solución de (2.6.11), definida implícitamente

$$\begin{aligned} xy + 2\ln y + c_1 &= k \\ xy + 2\ln y &= k - c_1. \end{aligned}$$

Renombrando $c = k - c_1$, resulta la solución

$$xy + 2\ln y = c.$$

Ejemplo 2.42 *Resuelva*

$$\left(3y^2 + x\cos xy\right)\frac{dy}{dx} + \left(3x^2 + y\cos xy\right) = 0. \tag{2.6.16}$$

Sol: *Escribamos (2.6.16) en su forma diferencial*

$$\left(3x^2 + y\cos xy\right)dx + \left(3y^2 + x\cos xy\right)dy = 0.$$

En este caso

$$M(x,y) = 3x^2 + y\cos xy, \quad N(x,y) = 3y^2 + x\cos xy$$

y dado que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -xy \operatorname{sen} xy + \cos xy = \frac{\partial N}{\partial x},$$

tenemos que (2.6.16) es una ecuación diferencial exacta, por lo que existe f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x\cos xy$$

Integrando esta ecuación respecto a y obtenemos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int \left(3y^2 + x\cos xy\right)dy \\ &= y^3 + \operatorname{sen} xy + \phi(x). \end{aligned}$$

Derivando parcialmente con respecto a x resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos xy + \phi'(x)$$

Recordando que $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y\cos xy$ e igualando con la expresión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} y\cos xy + \phi'(x) &= 3x^2 + y\cos xy \\ \phi'(x) &= 3x^2 \\ \phi(x) &= x^3 + c_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo $\phi(x)$ tenemos

$$f(x,y) = y^3 + \operatorname{sen} xy + x^3 + c_1.$$

La solución está dada por

$$y^3 + \operatorname{sen} xy + x^3 + c_1 = k.$$

o bien

$$y^3 + \operatorname{sen} xy + x^3 = c.$$

Ejercicio 2.9 *De las siguientes ecuaciones resuelva aquéllas que sean exactas.*

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^3y^2 - 3x^2y}{x^3 - 2x^4y}$
2. $\left(e^{2x}y^2 - 2x\right)dx + e^{2x}ydy = 0$
3. $\left(y - 3x^2\right)dx + (x-1)dy = 0$
4. $\left(x + 3x^3 \operatorname{sen} y\right)dx + x^4 \cos y dy = 0$
5. $\left(\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$
6. $y\cos t + 2te^y + \left(\operatorname{sen} t + t^2e^y + 2\right)\frac{dy}{dt} = 0$
7. $\left(\frac{1}{x} + ye^{xy}\right)dx + \left(\frac{1}{y} + xe^{xy}\right)dy = 0 \quad$ *con* $\quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$
8. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2x\right)dx + \sqrt{1+x^2}dy = 0 \quad$ *con* $\quad y(0) = 6$
9. $\left(y - \frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\right)dx + \left(x + \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)dy = 0$
10. $e^x\cos y dx - xe^x \operatorname{sen} y dy = 0 \quad$ *con* $\quad y(0) = \pi$

2.6.4 Factores Integrantes

Definición 2.21 *Si la ecuación diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.6.17}$$

no es exacta, pero existe una función $\mu(x,y)$*, tal que al multiplicar* (2.6.17) *por* $\mu(x,y)$*, la ecuación resultante*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{2.6.18}$$

es exacta, entonces se dice que $\mu(x,y)$ *es un factor integrante de la ecuación diferencial* (2.6.17).

Debemos observar que la solución de (2.6.18) es la solución de (2.6.17) y que en general no es fácil encontrar un factor integrante para una ecuación no exacta de la forma (2.6.17). Sin embargo, si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ cumplen ciertas condiciones entonces los factores integrantes son conocidos. Veamos algunos casos.

CASO I. Factor integrante dependiente de x. Suponga que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

es una función que depende únicamente de x, la cual denotaremos por $g(x)$. Entonces, un factor integrante para la ecuación dada es

$$\mu(x) = e^{\int g(x)dx}.$$

CASO II. Factor integrante dependiente de y. Si se tiene que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

es una función de y únicamente, denotada por $h(y)$, entonces

$$\mu(y)=e^{\int h(y)dy}$$

es un factor integrante para la ecuación diferencial (2.6.17).

CASO III.Factores de integración de la forma $x^m y^n$. Si existen m y n tales que

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=m\frac{N}{x}-n\frac{M}{y}$$

entonces

$$\mu(x,y)=x^m y^n$$

es un factor integrante para (2.6.17).

CASO IV. Si existen funciones $P(x)$ y $Q(y)$ que satisfacen

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N(x,y)P(x)-M(x,y)Q(y)$$

entonces un factor integrante para (2.6.17) es

$$\mu(x,y)=e^{\int P(x)dx}e^{\int Q(y)dy}.$$

Obsérvese que el Caso IV incluye a los Casos I, II y III si tomamos $Q(y)=0, P(x)=0$ y $P(x)=\frac{m}{x}, Q(y)=\frac{n}{y}$; respectivamente. También queremos advertir que al aplicar las fórmulas anteriores estamos interesados en obtener solamente un factor integrante, por lo cual después de calcular las integrales indefinidas implicadas en dichas expresiones basta considerar un valor fijo de la constante de integración; cero por simplicidad.

Ejemplo 2.43 *Resuelva*

$$\left(2xy+y^4\right)dx+\left(3x^2+6xy^3\right)dy=0. \tag{2.6.19}$$

Sol: *En este caso*

$$\begin{aligned} M(x,y)&=2xy+y^4, & N(x,y)&=3x^2+6xy^3,\\ \frac{\partial M}{\partial y}&=2x+4y^3, & \frac{\partial N}{\partial x}&=6x+6y^3. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$, tenemos que (2.6.19) no es una ecuación diferencial exacta. Buscaremos un factor integrante para (2.6.19) investigando si M y N cumplen con las condiciones mencionadas en el Caso I.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}&=\frac{2x+4y^3-6x-6y^3}{3x^2+6xy^3}\\ &=\frac{-\left(2y^3+4x\right)}{3x^2+6xy^3} \end{aligned}$$

Esta expresión no es una función exclusivamente de x. Por lo que investigaremos si M y N son funciones que cumplen con la condición mencionada en el Caso II.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M} &= \frac{6x+6y^3-2x-4y^3}{2xy+y^4}\\ &= \frac{2\left(y^3+2x\right)}{y\left(y^3+2x\right)}\\ &= \frac{2}{y}.\end{aligned}$$

Esta expresión si es una función exclusivamente de y, luego un factor integrante es de la forma

$$e^{\int \frac{2}{y}dy}=e^{2\ln y}=e^{\ln y^2}=y^2.$$

Así

$$\mu(y)=y^2.$$

Con este factor integrante, multiplicamos dicha ecuación por y^2 y procedemos a resolver la ecuación diferencial resultante, cuya solución es igual a la de (2.6.19). Tenemos

$$\begin{aligned}y^2\left(2xy+y^4\right)dx+y^2\left(3x^2+6xy^3\right)dy=0\\ \left(2xy^3+y^6\right)dx+\left(3x^2y^2+6xy^5\right)dy=0\end{aligned}\tag{2.6.20}$$

Ahora se tiene en (2.6.20) que

$$\begin{aligned}M(x,y)&=2xy^3+y^6, & N(x,y)&=3x^2y^2+6xy^5\\ \frac{\partial M}{\partial y}&=6xy^2+6y^5, & \frac{\partial N}{\partial x}&=6xy^2+6y^5.\end{aligned}$$

Luego, (2.6.20) ya es una ecuación diferencial exacta, cuya solución está definida implícitamente en la ecuación

$$x^2y^3+xy^6=c.$$

Ejemplo 2.44 *Resuelva*

$$\left(6y-24xy^5\right)dx+\left(9x-56x^2y^4\right)dy=0.\tag{2.6.21}$$

Sol: *Ya que*

$$\begin{aligned}M(x,y)&=6y-24xy^5, & N(x,y)&=9x-56x^2y^4\\ \frac{\partial M}{\partial y}&=6-120xy^4, & \frac{\partial N}{\partial x}&=9-112xy^4\end{aligned}$$

es claro que (2.6.21) no es una ecuación diferencial exacta. Determinemos un factor integrante. El Caso I no puede aplicarse, puesto que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial y}}{N}=\frac{-3-8xy^4}{x\left(9-56xy^4\right)}$$

no es función exclusivamente de x. Por otra parte

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{3+8xy^4}{6y\left(1-4xy^4\right)}$$

no es una función exclusivamente de y, por lo que tampoco podemos aplicar el Caso II. Busquemos un factor integrante de la forma

$$\mu(x,y) = x^m y^n$$

el cual se puede construir sólo si existen constantes m y n, tales que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} &= m\frac{N}{x} - n\frac{M}{y} \\
6 - 120xy^4 - 9 + 112xy^4 &= m\frac{9x - 56x^2y^4}{x} - n\frac{6y - 24xy^5}{y} \\
-3 - 8xy^4 &= 9m - 56mxy^4 - 6n + 24nxy^4
\end{aligned}$$

Esto nos lleva al sistema

$$\begin{aligned}
9m - 6n &= -3 \\
-56m + 24n &= -8,
\end{aligned}$$

cuya solución es $m = 1$ y $n = 2$. De modo que $\mu(x,y) = xy^2$ es un factor integrante para (2.6.21). Por lo que al resolver la ecuación

$$xy^2\left(6y - 24xy^5\right)dx + xy^2\left(9x - 56x^2y^4\right)dy = 0,$$

obtenemos la solución de (2.6.21). Su solución y está definida implícitamente en la ecuación

$$3x^2y^3 - 8x^3y^7 = c$$

Ejercicio 2.10 *Resuelva*

$$\left(2x^2 + e^{-y}\right)dx + \left(x^3 + xy\right)dy = 0.$$

Ind: *Busque un factor integrante de la forma*

$$\mu(x,y) = e^{\int P(x)dx + \int Q(y)dy}.$$

Proposición 2.6.1 *Las ecuaciones diferenciales de la forma*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

donde $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ $\quad (i = 1, 2)$, se denominan cuasi-homogéneas y se reducen a homogéneas, haciendo el cambio de variables

$$x = X + h, \quad y = Y + k,$$

siendo h y k las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}
a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \\
a_2h + b_2k + c_2 &= 0
\end{aligned}$$

Si el sistema no tiene solución, es decir

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$$

la ecuación diferencial puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda\,(a_1x+b_1y)+c_2}\right) \\ &= F\,(a_1x+b_1y)\,, \end{aligned}$$

la cual se reduce a separable con la sustitución

$$z = a_1x + b_1y$$

Ejemplo 2.45 *Resuelve la ecuación diferencial cuasi-homogénea*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$$

Sol: *Hacemos*

$$x = X + h, \quad y = Y + k.$$

Entonces

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$$

y sustituyendo en la ecuación, se tiene

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3Y-7X-7h+3k+7}{3X-7Y+3h-7k-3}$$

Para que esta ecuación diferencial sea homogénea es necesario que

$$\begin{aligned} -7h+3k+7&=0 \\ 3h-7k-3&=0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones lineales es

$$h = 1, \quad k = 0.$$

Con estos valores de h y k la ecuación diferencial se reduce a

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3Y-7X}{3X-7Y}$$

que es homogénea. Luego

$$V = \frac{Y}{X} \Longleftrightarrow Y = XV$$

Sustituyendo, se obtiene

$$X\frac{dV}{dX} + V = \frac{3V-7}{3-7V}$$

o bien, separando variables

$$\frac{3-7V}{V^2-1}dV - 7\frac{dX}{X} = 0$$

e integrando resulta

$$2\ln|V-1| + 5\ln|V+1| + 7\ln|X| = \ln|c|.$$

Regresando a las variables originales

$$V = \frac{Y}{X}, \quad Y = y, \quad X = x - 1,$$

obtenemos como solución general de la ecuación diferencial

$$(y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = c.$$

El siguiente ejemplo es una ecuación diferencial de segundo orden, pero una vez más, utilizando un cambio de variable se transforma en una ecuación diferencial de primer orden que además es cuasi-homogénea.

Ejemplo 2.46 *Resuelva*

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(y - p)\frac{dy}{dx} - x = 0 \tag{2.6.22}$$

donde p es una constante.

Sol: *Haciendo $w = \frac{dy}{dx}$ se escribe como*

$$xw^2 - 2(y - p)w - x = 0$$

De donde obtenemos una parábola en w, por lo que despejando w, obtenemos

$$w = \frac{2(y - p) \pm \sqrt{4(y - p)^2 + 4x^2}}{2x}$$

o bien,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - p}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y - p}{x}\right)^2 + 1} \tag{2.6.23}$$

la cual como sabemos es una ecuación cuasi-homogénea. Si ponemos $v = \frac{y-p}{x}$, $\quad vx = y - p$ y naturalmente,

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{dy}{dx}. \tag{2.6.24}$$

Ahora bien, si usamos (2.6.23) *y seleccionamos el signo más, la ecuación* (2.6.24) *se reduce a*

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{v^2 + 1}$$

Usando separación de variables e integración obtenemos.

$$\frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left(v + \sqrt{v^2 + 1}\right) = \ln x + c$$

$$v + \sqrt{v^2 + 1} = e^c x$$

$$\left(\frac{y - p}{x}\right) + \sqrt{\left(\frac{y - p}{x}\right)^2 + 1} = Ax, \quad A = e^c.$$

La gráfica de la solución obtenida es una parábola. Para verlo, despejemos la raíz

$$\sqrt{\left(\frac{y-p}{x}\right)^2+1} = Ax - \left(\frac{y-p}{x}\right)$$

elevamos al cuadrado y simplificamos para obtener

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y-p}{x}\right)^2+1 &= A^2x^2 - 2Ax\left(\frac{y-p}{x}\right) + \left(\frac{y-p}{x}\right)^2\\
1 &= A^2x^2 - 2A(y-p)\\
1 - A^2x^2 &= -2A(y-p)\\
\frac{1-A^2x^2}{-2A} &= y-p\\
\frac{A^2x^2-1}{2A} + p &= y\\
y &= \frac{A^2x^2+2Ap-1}{2A}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.11 *Mediante un factor integrante adecuado resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.*

1. $\left(2x^2+y\right)dx + \left(x^2y-x\right)dy = 0$
2. $\left(4x^2+3\cos y\right)dx - x\operatorname{sen} y dy = 0$
3. $\left(1+\frac{e^y}{x}\right)dx - (x+3e^y)\,dy = 0$
4. $\left(2xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx + 4x^2ydy = 0$
5. $y(1+\ln xy+2x)dx + \left(x-2y^2\right)dy = 0$
6. $\left(6x^2y^2-4y^4\right)dx + \left(2x^3y-4xy^3\right)dy = 0$
7. $\left(\frac{y}{x}\cos xy + \frac{1}{x^2}\operatorname{sen} xy + 3y^3\right)dx + \left(\cos xy + 3xy^2\right)dy = 0$
8. $\frac{1}{y^2}(1+\ln xy)dx + \left(\frac{x}{y^3}-3\right)dy = 0$
9. $\left(x+x^3\operatorname{sen} 2y\right)dy - 2ydx = 0$
10. $\cos ydx + \left(2x\operatorname{sen} y - \cos^3 y\right)dy = 0$

2.6.5 Ecuaciones Diferenciales Lineales

Definición 2.22 *Una ecuación diferencial de primer orden de la forma*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \tag{2.6.25}$$

se dice que es una ecuación lineal en la variable dependiente y.

Forma normal Dividiendo entre $a_1(x)$, resulta la forma mas útil

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{2.6.26}$$

Es fácil verificar que la ecuación diferencial (2.6.26) tiene como factor integrante a la función

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Si multiplicamos la ecuación (2.6.26) por $\mu(x)$, se sigue que

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)] = \mu(x)q(x)$$

e integrando ambos miembros de esta última igualdad, obtenemos la solución general de la ecuación.

Solución de una ecuación lineal de primer orden

i) Recuerde poner la ecuación lineal en la forma estándar (2).

ii) Identifique de la identidad de la forma estándar $P(x)$ y después determine el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$. No se necesita utilizar una constante para evaluar la integral indefinida $\int P(x)dx$

iii) Multiplique la forma estándar de la ecuación por el factor integrante. El lado izquierdo de la ecuación resultante es automáticamente la derivada del factor integrante y y :

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x).$$

iv) Integre ambos lados de esta última ecuación y resuelva para y.

Observación: *Al escribir la ecuación (2.6.25) en la forma normal $y' = F(x,y)$, podemos identificar $F(x,y) = -P(x)y + f(x)$ y $\partial F/\partial y = -P(x)$. De la continuidad de P y f en el intervalo I vemos que F y $\partial F/\partial y$ son también continuas en I. Con el teorema 2.1 como justificación, concluimos que existe una y sólo una solución del problema con valores iniciales*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

definida en algún intervalo I_0 que contiene a x_0.

Ejemplo 2.47 *Resuelva $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.*

Sol:*Dividiendo entre x, obtenemos la forma estándar*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x.$$

En esta forma identificamos a $P(x) = -4/x$ y $f(x) = x^5e^x$ y además vemos que P y f son continuas en $(0,\infty)$. Por tanto el factor integrante es

$$e^{-4\int \frac{1}{x}dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

donde usamos $\ln x$ *en lugar de* $\ln|x|$ *ya que* $x>0$*. Ahora multiplicamos la ecuación diferencial por* x^{-4} *y reescribimos*

$$x^{-4}\frac{dy}{dx}-4x^{-5}y=xe^{x} \quad \text{como} \quad \frac{d}{dx}\left[x^{-4}y\right]=xe^{x}.$$

De la integración por partes se tiene que la solución general definida en el intervalo $(0,\infty)$ *es* $x^{-4}y=xe^{x}-e^{x}+c$ *o* $y=x^{5}e^{x}-x^{4}e^{x}+cx^{4}$.

Ejemplo 2.48 *Determine la solución general de* $\left(x^{2}-9\right)\frac{dy}{dx}+xy=0$. **Sol:***Escribimos la ecuación diferencial en la forma estándar*

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{x^{2}-9}y=0$$

e identificando $P(x)=x/\left(x^{2}-9\right)$*. Aunque* P *es continua en* $(-\infty,-3)$,$(-3,3)$ *y* $(3,+\infty)$*, resolveremos la ecuación en el primer y tercer intervalos. En estos intervalos el factor integrante es*

$$e^{\int xdx/\left(x^{2}-9\right)}=e^{\frac{1}{2}\int 2xdx/\left(x^{2}-9\right)}=e^{\frac{1}{1}\ln\left|x^{2}-9\right|}=\sqrt{x^{2}-9}.$$

Después multiplicando la forma estándar por este factor, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^{2}-9}y\right]=0.$$

Integrando ambos lados de la última ecuación se obtiene $\sqrt{x^{2}-9}y=c$*. De este modo, ya sea para* $x>3$ *o* $x<-3$ *la solución general de la ecuación es*

$$y=\frac{c}{\sqrt{x^{2}-9}}.$$

Ejemplo 2.49 *Resuelva e identifique el intervalo de definición*

$$(x+1)\frac{dy}{dx}-2y=(x+1)^{4}$$

Sol:*La ecuación es lineal. Escribamos primero la ecuación diferencial como*

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{3}$$

Un factor integrante es

$$\begin{aligned}\mu(x)&=e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}\\&=e^{\ln(x+1)^{-2}}\\&=(x+1)^{-2}\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $(x+1)^{-2}$*, podemos escribir la ecuación como*

$$(x+1)^{-2}\frac{dy}{dx}-2(x+1)^{-3}y=x+1,$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dx}\left[(x+1)^{-2}y\right]=x+1$$

e integrando

$$(x+1)^{-2}y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + c.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + c(x+1)^2$$

Ejemplo 2.50 *Resuelva e identifique el intervalo de definición*

$$(x\ln x)y' + (1+\ln x)y + \frac{1}{2}\sqrt{x}(2+\ln x) = 0. \tag{2.6.27}$$

Sol: *Escribimos la ecuación diferencial en la forma*

$$y' + \frac{1+\ln x}{x\ln x}y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}\frac{2+\ln x}{x\ln x}.$$

Un factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1+\ln x}{x\ln x}dx} = x\ln x.$$

Multiplicamos por $\mu(x) = x\ln x$

$$(x\ln x)y' + (1+\ln x)y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}(2+\ln x)$$
$$\frac{d}{dx}[(x\ln x)y] = -\frac{1}{2}\sqrt{x}(2+\ln x)$$

Así que

$$(x\ln x)y = -\frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(4+3\ln x) + c.$$

La solución general es

$$y = -\frac{\sqrt{x}}{9\ln x}(4+3\ln x) + \frac{c}{x\ln x}.$$

Ejercicio 2.12 *Diga si la ecuación diferencial dada es lineal en* y *o en* x. *En caso de serlo determine su solución general (e identifique el intervalo de definición).*

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$
2. $x\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x+1}y = x - 1$
3. $\left(1+x^2\right)dy + \left(xy + x^3 + x\right)dx = 0$
4. $xy' = 3y + x^4\cos x, \quad y(2\pi) = 0$
5. $ydx + (xy + 2x - ye^y)\,dy = 0$ 6. $y' = \frac{y}{2y\ln y - x}$
6. $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$
7. $\operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0, \quad y(-\pi/2) = 1$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}$
9. $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y - 1 = 0, \quad y(0) = -3$

2.6.6 Ecuación de Bernoulli

A una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n \tag{2.6.28}$$

con n un número real, se le llama ecuación de Bernoulli.

Si $n = 0$ o $n = 1, (2.6.28)$ es una ecuación diferencial lineal. Además si $n = 1$, la ecuación se puede resolver mediante separación de variables. Así que nos concentramos en el caso en que $n \neq 0, 1$.

Método para resolver una ecuación de Bernoulli. Consiste en transformarla en una ecuación diferencial lineal mediante un cambio de variable, veamos.

Dividiendo ambos lados de (2.6.28) por y^n, resulta

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x) \tag{2.6.29}$$

Sea

$$w = y^{1-n} \tag{2.6.30}$$

entonces

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

por lo cual

$$\frac{1}{1-n}\frac{dw}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{2.6.31}$$

Sustituyendo (2.6.30) y (2.6.31) en la ecuación diferencial (2.6.29) obtenemos

$$\frac{1}{1-n}\frac{dw}{dx} + P(x)w = f(x)$$
$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x)$$

que es una ecuación diferencial lineal.

Ejemplo 2.51 *Resuelva* $x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2$.

Sol: *Primero reescribimos la ecuación como*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

al dividir entre x*. Con* $n = 2$ *tenemos* $u = y^{-1}$ *o* $y = u^{-1}$*. Entonces sustituimos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} \quad \leftarrow \text{ Regla de la cadena}$$

en la ecuación dada y simplificando. El resultado es

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x$$

El factor integrante para esta ecuación lineal en, digamos, $(0, \infty)$ *es*

$$e^{-\int dx/x} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}.$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-1}u\right] = -1$$

Al integrar se obtiene $x^{-1}u = -x + c$ *o* $u = -x^2 + cx$*. Puesto que* $u = y^{-1}$*, tenemos que* $y = 1/u$*, así, una solución de la ecuación dada es* $y = 1/\left(-x^2 + cx\right)$*.*

Ejemplo 2.52 *Resuelva*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^3x^2}$$

Sol:*Note que*

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x + y^3x^2}\\ &= \frac{y}{x\left(1 + y^3x\right)}\end{aligned}$$

luego la ecuación no es de Bernoulli en la variable y*, pero si la escribimos como*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^3x^2}{y},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{x}{y} + \frac{y^3}{y}x^2\\ \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x &= y^2x^2\end{aligned}$$

la cual es una ecuación diferencial de Bernoulli en x*. Dividiendo por* x^2*, resulta*

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^{-1} = y^2$$

Sea $w = x^{-1}$*, entonces* $\frac{dw}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy}$*. Sustituyendo resulta*

$$-\frac{dw}{dy} - \frac{1}{y}w = y^2$$

y resolviendo la ecuación diferencial lineal en w *obtenemos*

$$w = \frac{-y^4 + c}{4y}.$$

Ya que $w = x^{-1}$*, se tiene*

$$x^{-1} = \frac{-y^4 + c}{4y}$$

de donde

$$x = \frac{4y}{c - y^4}.$$

Ejercicio 2.13 *Resuelva* $dy/dx = (-2x+y)^2 - 7$, $y(0) = 0$.

Ind: *Use proposición 2.6.1.*

Ejercicio 2.14 *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli.*

1. $2x^3y' = y\left(y^2 + 3x^2\right)$
2. $2x^2 + 2xyy' = x^2 + y^2$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$
4. $xy' + 6y = 3xy^{\frac{4}{3}}$
5. $y^2y' + 2xy^3 = 6x$
6. $y^2dx + \left(2xy - 5x^3\right)dy = 0$
7. $\left(1 - x^2\right)y' - xy = 7xy^2$
8. $y^3y' + 4xy^4 = 8x$
9. $(y\ln x - 2)ydx = xdy$
10. $y'\left(x^2y^3 + xy\right) = 1$

2.6.7 Ecuación de Riccati

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{2.6.32}$$

se llama *ecuación de Ricatti*.

Método de solución: Se propone que para resolver (2.6.32) se conoce, o bien puede calcularse, una solución particular de la ecuación. Sea y_1 una solución particular de (2.6.32), entonces es fácil mostrar que la relación

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \tag{2.6.33}$$

define una familia de soluciones de la ecuación de Ricatti, donde v satisface cierta ecuación diferencial lineal, como veremos a continuación.

Derivando (2.6.33) con respecto a x obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx}.$$

Sustituyendo esta expresión junto con (2.6.33) en (2.6.32) tenemos

$$y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx} = p(x)\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2 + q(x)\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + r(x)$$

o equivalentemente

$$y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx} = p(x)y_1^2 + 2\frac{p(x)y_1}{v} + \frac{p(x)}{v^2} + q(x)y_1 + \frac{q(x)}{v} + r(x). \tag{2.6.34}$$

Ahora bien, ya que que y_1 es solución de la ecuación diferencial, por lo que se cumple que

$$y_1'(x) = p(x)y_1^2(x) + q(x)y_1(x) + r(x),$$

lo cual reduce (2.6.34) a

$$\begin{aligned}
-v^{-2}\frac{dv}{dx} &= \frac{2p(x)y_1}{v} + \frac{p(x)}{v^2} + \frac{q(x)}{v}\\
\frac{dv}{dx} &= -\left[2p(x)y_1v + p(x) + q(x)v\right]\\
\frac{dv}{dx} &= -\left[2p(x)y_1 + q(x)\right]v - p(x)
\end{aligned}$$

Es decir, v satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dx} + \left[2p(x)y_1 + q(x)\right]v(x) = -p(x),$$

que efectivamente es una ecuación diferencial lineal.

Ejemplo 2.53 *Resuelva sabiendo que $y_1 = 1/x$ es una solución particular de,*

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \tag{2.6.35}$$

Sol:*Es claro que* (2.6.35) *es una Ecuación de Ricatti con $p(x) = 1, q(x) = -1/x, r(x) = -1/x^2$. En este caso la ecuación para v toma la forma*

$$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right)v = -1$$

esto es

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -1$$

Un factor integrante para esta ecuación lineal es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = x.$$

Multiplicando la ecuación lineal por $\mu(x)$ y resolviendo, encontramos que

$$\begin{aligned}
x\frac{dv}{dx} + v &= -x\\
\frac{d}{dx}(xv) &= -x\\
xv &= -\frac{x^2}{2} + c_1\\
v &= -\frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} = \frac{c - x^2}{2x}
\end{aligned}$$

donde $c = 2c_1$. Por lo tanto, de acuerdo con (2.6.33)

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{c - x^2}$$

es una familia de soluciones de la ecuación diferencial (2.6.35).

Ejercicio 2.15 *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Ricatti, utilizando la solución particular y_1 indicada.*

1. $\frac{dy}{dx} = -y^2 + xy + 1, \quad y_1 = x$
2. $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 - 2e^x)\, y + y^2, \quad y_1 = e^x$
3. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2, \quad y_1 = \frac{2}{x}$

2.6.8 Ecuación de Clairaut

La ecuación diferencial de la forma

$$y = xy' + f\left(y'\right) \tag{2.6.36}$$

con f una función arbitraria, se llama *ecuación de Clairaut*.

Mostraremos que las rectas

$$y = cx + f(c) \tag{2.6.37}$$

con c un número real, constituyen una familia de soluciones de la ecuación de Clairaut y que además dicha ecuación posee la siguiente solución definida en forma paramétrica por las ecuaciones

$$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t). \tag{2.6.38}$$

En primer lugar, derivando (2.6.37) con respecto a x se sigue que

$$y' = c$$

y sustituyendo en (2.6.36) vemos que ésta se reduce a la identidad

$$cx + f(c) = xc + f(c)$$

lo cual muestra que (2.6.37) es una solución de (2.6.36) para todo c. Obsérvese que la expresión (2.6.37) de esta familia de soluciones se obtiene trivialmente poniendo $y' = c$ en el lado derecho de (2.6.36).

Por otra parte, de las ecuaciones (2.6.38) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -f''(t)\\
\frac{dy}{dt} &= f'(t) - f'(t) - tf''(t) = -tf''(t)\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -tf''(t)\left(\frac{1}{-f''(t)}\right) = t
\end{aligned}$$

Sustituyendo y y $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación diferencial de Clairaut llegamos a la identidad

$$f(t) - tf'(t) = -f'(t)t + f(t)$$

De modo que efectivamente (2.6.38) definen otra solución de (2.6.36).

A la solución paramétrica se le llama *solución singular* y requiere que $f''(t) \neq 0$. Note además que esta solución no se puede obtener de la familia de rectas (2.6.37).

Ejemplo 2.54 *Resuelva*

$$y = xy' + 1 - \ln y'.$$

Sol: *La familia de soluciones es*

$$y = cx + 1 - \ln c.$$

Identificando $f(y') = 1 - \ln y'$, *la solución singular está dada por*

$$\begin{aligned} x &= -f'(t) \\ y &= f(t) - tf'(t) \end{aligned}$$

y como

$$f(t) = 1 - \ln t; \quad f'(t) = -\frac{1}{t}$$

resulta

$$\begin{aligned} x &= -\left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \\ y &= 1 - \ln t - t\left(-\frac{1}{t}\right) = 2 - \ln t = 2 - \ln\frac{1}{x} \end{aligned}$$

de donde, $y = 2 + \ln x$ *es la solución singular.*

Ejercicio 2.16 *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales*

1. $y = xy' - (y')^3$
2. $y = xy' - \tan y'$
3. $y - xy' = \ln y'$
4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x+a)y' - y = 0$; *con* a *una constante.*

2.7 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

2.7.1 Ley de enfriamiento de Newton

Este modelo permite conocer como evoluciona la temperatura de un objeto.

Principio: "La razón de cambio de la temperatura $T = T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_A del medio ambiente"

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A).$$

Ejercicio 2.17 *Supóngase que una habitación se mantiene a una temperatura constante de* $70°$ *y que un objeto se enfría de* $350°$ *a* $150°$ *en 45 minutos. ¿Qué tiempo se necesita para enfriar dicho objeto a una temperatura de* $80°$ *?.*

2.7.2 Mezclas

Vamos a considerar ahora los problemas relacionados con mezclas, en los cuales se supone que una sustancia S fluye hacia una mezcla en un recipiente, con una cierta rapidez, y la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación. Además, la mezcla uniforme sale del recipiente y pasa a otro. Nos interesa determinar la cantidad de la sustancia S presente en la mezcla para el tiempo t.

Si denotamos por $A(t)$ la cantidad de S al tiempo t, entonces la derivada $\frac{dA}{dt}$ es la razón de cambio de A con respecto a t. Si R_1 indica la razón, rapidez o tasa con la que S entra a la mezcla y R_2 representa la razón con la que sale, tenemos la ecuación diferencial lineal básica

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2$$

de la cual determinaremos la cantidad $A(t)$ de S en el tiempo t. A continuación presentaremos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.55 *Un gran tanque está parcialmente lleno con 200 gal de agua en las cuales se disuelven* $20lb$ *de sal. Una salmuera que contiene* $2lb$ *de sal por galón (concentración), se bombea al tanque con una rapidez de* $6gal/min$ *(flujo) y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.*

a) Halle el número de libras de sal en el tanque en cualquier tiempo.

b) ¿Cuánta sal está presente después de 30 min?

c) ¿Cuánta sal estará presente después de un tiempo largo?

Sol: *Denotemos con $A(t)$ el número de libras de sal en el tanque después de t minutos. Entonces $\frac{dA}{dt}$ mide la tasa de cambio de $A(t)$ con respecto al tiempo.*

Por conservación de masa, tenemos que

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2$$

donde R_1 y R_2 son la rapidez (o razón de entrada) con que entra y sale la sal del tanque, respectivamente. Sean G_1 y G_2 el flujo volumétrico de las soluciones de entrada y salida al tanque y C_1, C_2 sus concentraciones de sal. Entonces

$$\begin{aligned} R_1 = C_1G_1 &= \left(2\frac{lb}{gal}\right)\left(6\frac{gal}{min}\right) = 12\frac{\text{lb}}{\text{mín}} \\ R_2 = C_2G_2 &= \left(\frac{A(t)}{200}\frac{lb}{gal}\right)\left(6\frac{gal}{min}\right) = \frac{3}{100}A(t)\frac{\text{lb}}{\text{mín}} \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación se reduce a

$$\frac{dA}{dt} = 12 - \frac{3}{100}A$$

o equivalentemente

$$\frac{dA}{dt} + \frac{3}{100}A = 12$$

la cual resolvemos sujeta a la condición inicial $A(0) = 20$.

a) La solución a este problema de valor inicial es

$$A(t) = 400 - 380e^{-\frac{3}{100}t}$$

que nos da la cantidad de sal al tiempo t (en minutos).

b) Después de 30 minutos la cantidad de sal es

$$A(30) = 400 - 380e^{-\frac{9}{10}} = 245.50\text{lb}.$$

c) Después de un tiempo largo, esto es, cuanto t tiende a infinito, vemos que A se aproxima al valor de 400lb.

Ejemplo 2.56 *Suponga ahora que en el ejemplo anterior la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera a una tasa de* $4gal/min$. *Determine* $A(t)$.

Sol: *El volumen* $V(t)$ *de la solución en el tanque varía a una razón de*

$$(G_1 - G_2)\, gal/min = 2gal/min.$$

luego

$$V(t) = 200 + 2t$$

así que

$$R_1 = 12\frac{lb}{\text{mín}}$$
$$R_2 = \left(\frac{A(t)}{V(t)}\frac{lb}{gal}\right)\left(4\frac{gal}{\text{mín}}\right) = 4\frac{A(t)}{200+2t} = \frac{2}{100+t}\ \text{A}.$$

Por consiguiente tenemos ahora

$$\frac{dA}{dt} = 12 - \frac{2}{100+t}A$$

o bien

$$\frac{dA}{dt} + \frac{2}{100+t}A = 12$$

junto con la condición inicial $A(0) = 20$. *Resolviendo obtenemos*

$$A(t) = 4(100+t) - \frac{3800000}{(100+t)^2}$$

2.7.3 Modelo de crecimiento logístico

Sea $P = P(t)$ el número de individuos de una determinada población en el tiempo t. Este modelo establece que "la población crece a una tasa que es proporcional al producto del tamaño de dicha población con la diferencia entre el tamaño máximo M de individuos posible de la población y el tamaño de dicha población".

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$$

Ejercicio 2.18 *La población de una ciudad crece de acuerdo al modelo logístico y está limitada a 800.000 habitantes. Si la población en 1995 era de 400000 y en el 2000 de 500000 , ¿cuál era la población en el año 2005?*

2.7.4 Circuito RC de corriente continua

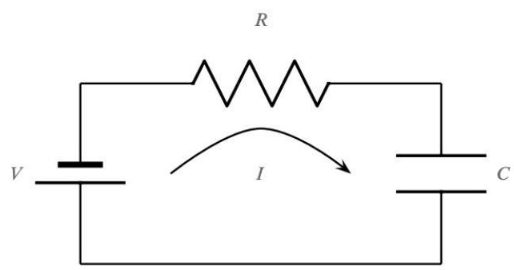


Figura 2.12: Circuito RC.

En esta figura se muestra un circuito RC de corriente continua, el cual está formado por una malla simple con: una fuente de voltaje V constante, un resistor R, y un capacitor C. Cuando se conecta la fuente, las caídas de potencial ocurren en el resistor RI y en el capacitor $Q = C$.

Segunda Ley de Kirchhoff. La suma algebraica de todas las caídas de potencial en cualquier camino cerrado de un circuito eléctrico es igual a cero.

Convención. La corriente fluye del lado positivo (+) de la batería o generador a través del circuito hacia el lado negativo (-).

De acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff de voltaje, se tiene que

$$V = RI + \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

y como $I = \frac{dQ}{dt}$ se obtiene el siguiente modelo para un circuito RC:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

Ejercicio 2.19

1. *Comprueba que la solución de la ED anterior viene dada por*

$$Q(t) = VC\left(1 - e^{-t/(RC)}\right)$$

.

2. *Verifique que la corriente que circula por el circuito viene dada por*

$$I = \frac{V}{C}e^{-t/(RC)}.$$

3. *Considere un circuito RC con* $R = 120\Omega$ *y* $C = \frac{1}{1200}$ *farads* (F)*. Al tiempo* $t = 0$ *se conecta una fuente de voltaje constante* $V = 120V$*. Si inicialmente el capacitor estaba descargado:*

a) Plantear la EDO que modela esta situación. No olvidar la condición inicial.

Sol.: $Q' + 10Q = 1.$

b) Determinar cómo cambia la carga en el capacitor $Q(t)$.

Sol.: $Q(t) = 0.1\left(1 - e^{-10t}\right).$

c) Determinar la corriente que circula por el circuito.

Sol.: $I(t) = e^{-10t}.$

d) Si se desconecta la fuente cuando la carga es de $0.008C$, determinar cómo cambia la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito después de desconectar la fuente.

Sol.: $Q(t) = 0.008e^{-10t}, \quad I = -0.08e^{-10t}.$

2.7.5 Circuito RL de corriente continua

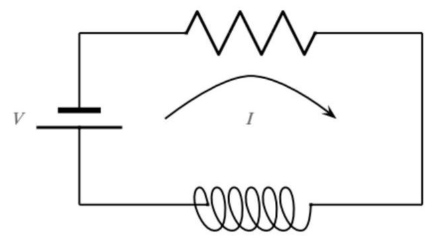


Figura 2.13: Circuito RL

En la figura anterior se muestra un circuito RL de corriente continua. Este circuito está formado por una malla simple con una fuente de voltaje V constante, una resistencia R y una inductancia L. Cuando se conecta la fuente, la caída de potencial en la resistencia es RI y en el inductor es $L\frac{dI}{dt}$. De acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff de voltaje:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V.$$

Ejercicio 2.20 *1. Se conectan un resistor $R = 40\Omega$ y un inductor $L = 0.1$ henry (H) en serie con una fuente de voltaje $V = 110$ V. Si originalmente no existe corriente sobre el circuito, determinar la corriente en el tiempo.*

Sol.: $I(t) = \frac{11}{4}\left(1 - e^{-400t}\right).$

2. Después de mucho tiempo, ¿a qué valor se acerca la corriente?

3. Se conecta en serie un resistor de 10Ω con un inductor de $2H$ y una fuente de voltaje directa de 50 V formando un circuito RL. Determinar la corriente en el tiempo t, suponiendo que inicialmente no circula corriente por el circuito. ¿Cuál es la máxima corriente que circula por el circuito? ¿En qué tiempo se alcanza la mitad de la corriente máxima?

Sol.: $I(t) = 5 - 5e^{-5t}, \quad I_{\text{máx}} = 5, \quad t = 0.1386.$

CAPÍTULO 3

Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

3.1 Conceptos básicos

Definición 3.1 **(Dependencia e independencia lineal)** *Se dice que un conjunto de funciones* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *es linealmente dependiente (l.d) en un intervalo* I *si existen constantes* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *no todas cero, tales que*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

para toda x *en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente (l.i). Es decir, la igualdad*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0,$$

para todo $x \in I$ *implica que* $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$.

Es fácil entender las definiciones anteriores, por ejemplo, si f y g son l.d en un intervalo I, entonces existen constantes c_1, c_2, no ambas nulas tales que

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c_1 \neq 0$, de modo que

$$f(x) = -\frac{c_2}{c_1} g(x)$$

Esto es, si dos funciones son l.d. en un intervalo I, entonces una es simplemente un múltiplo constante de la otra, para todo x en I. Recíprocamente si para alguna constante c_2 se tiene que $f(x) = c_2 g(x), x \in I$, entonces

$$(-1) \cdot f(x) + c_2 g(x) = 0$$

para todo x en I. Por lo tanto, las funciones f y g son l.d. en I puesto que al menos una de las constantes es diferente de cero ($c_1 = -1$).

Concluimos entonces que dos funciones son l.i. en un intervalo I cuando ninguna es un múltiplo constante de la otra en I.

Ejemplo 3.1 *Muestre que las siguientes parejas de funciones son l.d. en* $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x, g(x) = -2x$.

b) $f(x) = e^x, g(x) = \frac{1}{3}e^x$.

c) $f(x) = x^2, g(x) = -\sqrt{2}x^2$.

Sol: *En cada inciso, las parejas de funciones son claramente l.d. en* $\mathbb{R}$ *ya que una es un múltiplo escalar de la otra. En efecto, tenemos que*

a) $g(x) = -2f(x)$, *o equivalentemente* $2f(x) + g(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$, *ó* $\frac{1}{3}f(x) + (-1)g(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

c) $g(x) = -\sqrt{2}f(x)$, *ó* $\sqrt{2}f(x) + g(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2 *Compruebe que las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ son l.i. en $\mathbb{R}$.*

Sol:*Supóngase por contradicción que f y g son l.d. en $\mathbb{R}$, es decir que existen constantes c_1 y c_2 no simultáneamente nulas tales que*

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si derivamos con respecto a x obtenemos

$$c_1 + 2c_2 x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Luego, el sistema de ecuaciones lineales resultante tiene una solución no nula ($c_1 \neq 0$ ó $c_2 \neq 0$). De álgebra sabemos que para un sistema homogéneo, ésto es posible solamente si el determinante del sistema es cero. Así que

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 = 0$$

para todo x en $\mathbb{R}$.

Por consiguiente, la suposición de que las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ son l.d. en $\mathbb{R}$ nos llevó a concluir que $x^2 = 0$ para todo x en $\mathbb{R}$, lo cual claramente es falso. Esto nos muestra que f y g son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

Definición 3.2 *Sean f y g funciones derivables en el intervalo I. A la función definida por el determinante*

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x),$$

se le llama el wronskiano de $f(x)$ y $g(x)$ y se denota por $W(f,g)$. El valor de $W(f,g)$ en el punto x se indicará por $W(f,g)(x)$ o simplemente $W(x)$.

Teorema 3.1 *Sean f y g funciones derivables en un intervalo I. Si el wronskiano $W(f,g)$ es diferente de cero en por lo menos un punto x_0 del intervalo I, entonces f y g son linealmente independientes en I.*

Dem: *Por contradicción. Supongamos que $W(f,g)(x_0) \neq 0$ para algún x_0 fijo en el intervalo I y que f y g son linealmente dependientes en I. Entonces existen constantes c_1 y c_2 no ambas cero tales que*

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0,$$

para todo x en I. Derivando resulta

$$c_1 f'(x) + c_2 g'(x) = 0.$$

Luego, el sistema de ecuaciones tiene una solución diferente de la trivial para cada x en I, por lo cual

$$W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0,$$

para todo x en I. Esto contradice la hipótesis de que $W(f,g)(x_0) \neq 0$. Por lo tanto se concluye que f y g son linealmente independientes en I.

Ejemplo 3.3 *Demuestre que las funciones $f(x)=e^{x}$ y $g(x)=e^{-x}$ son l.i. en $\mathbb{R}$.*

Sol: *Ya que*

$$W\left(e^{x}, e^{-x}\right)=\left|\begin{array}{cc} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{array}\right|=-e^{x} e^{-x}-e^{x} e^{-x}=-2 \neq 0,$$

para todo x en $\mathbb{R}$, del Teorema se concluye que f y g son l.i. en $\mathbb{R}$.

En general,

Definición 3.3 *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$, funciones que tienen al menos $n-1$ derivadas en un intervalo abierto I. Para x en I, el determinante*

$$W\left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right)=\left|\begin{array}{cccc} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1^{\prime}(x) & f_2^{\prime}(x) & \cdots & f_n^{\prime}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{array}\right|$$

se denomina el wronskiano *de dichas funciones.*

Definición 3.4 *Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n es una ecuación que puede expresarse de la forma*

$$a_n(x) y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1(x) y^{\prime}(x)+a_0(x) y(x)=g(x), \tag{3.1.1}$$

donde las funciones $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ y $g(x)$ dependen solamente de la variable x, y $a_n(x)$ es una función no idénticamente nula.

Si $g(x) \neq 0$ la ecuación diferencial lineal de orden n es no homogénea y si haciendo $g(x)=0$ la ecuación es homogénea. Es decir, una ecuación diferencial lineal de orden n homogénea viene dada por

$$a_n(x) y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1(x) y^{\prime}(x)+a_0(x) y(x)=0. \tag{3.1.2}$$

Definición 3.5 *Para una ecuación diferencial lineal de orden n, un problema con valores iniciales de n-ésimo orden viene dado por*

$$\begin{aligned} & a_n(x) \frac{d^n y}{d x^n}+a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}+\cdots+a_1(x) \frac{d y}{d x}+a_0(x) y=g(x) \\ & y\left(x_0\right)=y_0, \quad y^{\prime}\left(x_0\right)=y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_{n-1}. \end{aligned}$$

Teorema 3.2 (Teorema de existencia y unicidad de solución) *Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x en este intervalo. Si $x=x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución $y(x)$ del problema con valores iniciales existe en el intervalo y es única.*

Teorema 3.3 (Principio de superposición de solución) *Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces la combinación lineal*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x),$$

donde las $c_i, i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

Teorema 3.4 *Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en el intervalo I. El conjunto de soluciones es linealmente independiente en I si y sólo si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, para algún x_0 del intervalo I.*

Teorema 3.5 (Conjunto fundamental de soluciones) *Cualquier conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluciones linealmente independientes (l.i) de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo.*

Teorema 3.6 *Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I.*

Teorema 3.7 *Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$, un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea* (3.1.2) *en un intervalo I. Entonces la solución general de* (3.1.2) *está dada por*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x), \quad x \in I,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Dem: *Caso cuando $n = 2$. Sea y una solución e y_1 y y_2 soluciones linealmente independientes de $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ en un intervalo I. Suponga que $x = t$ es un punto en I para el cual $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$. Suponga también que $y(t) = k_1$ y $y'(t) = k_2$. Si examinamos las ecuaciones*

$$\begin{aligned} c_1y_1(t) + c_2y_2(t) &= k_1 \\ c_1y_1'(t) + c_2y_2'(t) &= k_2, \end{aligned}$$

se tiene que podemos determinar c_1 y c_2 de manera única, a condición de que el determinante de los coeficientes satisfaga

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pero este determinante es simplemente el Wronskiano evaluado en $x = t$ y por suposición, $W \neq 0$. Si se define $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se observa que $g(x)$ satisface la ecuación diferencial puesto que es una superposición de dos soluciones conocidas; $g(x)$ satisface las condiciones iniciales

$$g(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = k_1 \quad \text{y} \quad g'(t) = c_1y_1'(t) + c_2y_2'(t) = k_2;$$

e $y(x)$ satisface la misma ecuación lineal y las mismas condiciones iniciales. Debido a que la solución de este problema con valores iniciales lineal es única, se tiene $y(x) = g(x)$ o $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

Definición 3.6 *Sea y_p una solución dada de la ecuación diferencial no homogénea en el intervalo I y sea*

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

la solución general de la ecuación homogénea asociada (3.1.2) *en el intervalo I . Entonces la solución general de* (3.1.1) *viene dada por*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

Teorema 3.8 (Principio de superposición: ecuaciones no homogéneas) *Sean $y_{p_1}, y_{p2}, \ldots, y_{p_k}$, k soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I que corresponde, a su vez, a k funciones diferentes $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Es decir, se supone que y_{p_i} denota una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x),$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x)$$

es una solución particular de

$$\begin{aligned} &a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \\ &= g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4 *Note que: $y_{p_1} = -4x^2$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8$, $y_{p_2} = e^{2x}$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$, $y_{p_3} = xe^x$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2xe^x - e^x$. Se tiene por teorema anterior que la superposición de y_{p_1}, y_{p_2}, y y_{p_3},*

$$y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = -4x^2 + e^{2x} + xe^x,$$

es una solución de

$$y'' - 3y' + 4y = \underbrace{-16x^2 + 24x - 8}_{g_1(x)} + \underbrace{2e^{2x}}_{g_2(x)} + \underbrace{2xe^x - e^x}_{g_3(x)}.$$

3.1.1 Método de Reducción de Orden

Dada una solución $y_1(x)$ de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.1.3}$$

puede determinarse una segunda solución $y_2(x)$ que sea linealmente independiente con $y_1(x)$, de la forma $v(x)y_1(x)$, para cierta función $v(x)$ distinta de una constante. Luego, sea $y(x) = y_1(x)v(x)$, entonces

$$\begin{aligned} y' &= y_1v' + y_1'v \\ y'' &= y_1v'' + 2y_1'v' + y_1''v. \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores para y, y' y y'' en (3.1.3) y simplificando resulta

$$\left(y_1v'' + 2y_1'v' + y_1''v\right) + p(x)\left(y_1v' + y_1'v\right) + q(x)y_1(x)v = 0$$
$$v\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + v'\left(2y_1' + p(x)y_1\right) + y_1v'' = 0.$$

Y como y_1 es una solución de (3.1.3), el primer término en el lado izquierdo de la igualdad anterior es igual a cero. Así que

$$y_1v'' + \left(2y_1' + p(x)y_1\right)v' = 0$$

o bien

$$v'' + \left(p(x) + \frac{2y_1'}{y_1}\right)v' = 0 \tag{3.1.4}$$

Luego, para que la función $y_1(x)v(x)$ sea una solución de la ecuación diferencial (3.1.3), $v(x)$ debe satisfacer la ecuación diferencial de segundo orden (3.1.4). Nótese que haciendo la sustitución $u(x) = v'(x)$ entonces $u'(x) = v''(x)$ y (3.1.4) se reduce a la ecuación

$$u' + \left(p(x) + \frac{2y_1'}{y_1}\right)u = 0 \tag{3.1.5}$$

la cual es ahora de primer orden para la función incógnita u. Es por esta razón que al método que estamos desarrollando para calcular y_2 se le conoce como *Método de Reducción de Orden*.

La ecuación (3.1.5) es lineal en u y también de variables separables. Separando variables tenemos

$$\begin{aligned}\frac{du}{u} &= -\left(p(x) + \frac{2y_1'}{y_1}\right)\\ &= -p(x) - 2\frac{d}{dx}\left(\ln y_1\right)\end{aligned}$$

e integrando y simplificando, obtenemos

$$\ln u = -\int p(x)dx - 2\ln y_1 + \ln c$$
$$\ln u = \ln cy_1^{-2} - \int p(x)dx,$$

donde c es una constante arbitraria. Aplicando exponencial a ambos lados de la última igualdad encontramos que

$$u(x) = \frac{c}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$$

Por consiguiente

$$v(x) = c\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx.$$

Tomando $c = 1$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.9 *Si $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

entonces una segunda solución $y_2(x)$ de (4.14) linealmente independiente con $y_1(x)$ es

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx. \tag{3.1.6}$$

Ejemplo 3.5 *Dado que* $y_1(x) = x^{-2}$ *es solución de la ecuación diferencial*

$$x^2y'' - 7xy' - 20y = 0, \tag{3.1.7}$$

encuentre su solución general en el intervalo $(0, \infty)$.

Sol: *Verifiquemos que* $y_1(x)$ *es solución de la ecuación diferencial* (3.1.7). *Tenemos que*

$$y_1'(x) = -2x^{-3}, \quad y_1''(x) = 6x^{-4}.$$

Sustituyendo en (3.1.7) *resulta*

$$\begin{aligned} x^2y'' - 7xy' - 20y &= x^2 6x^{-4} - 7x\left(-2x^{-3}\right) - 20x^{-2} \\ &= 6x^{-2} + 14x^{-2} - 20x^{-2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, efectivamente y_1 *es una solución de* (3.1.7). *Usando el resultado* (3.1.6) *del teorema anterior para determinar una segunda solución de la ecuación diferencial, l.i. con* y_1.

Primero, reescribimos (3.1.7) *en la forma*

$$y'' - \frac{7}{x}y' - \frac{20}{x^2}y = 0$$

de aquí que en este caso $p(x) = -\frac{7}{x}$ *y entonces*

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx &= \int \frac{e^{-\int -\frac{7}{x}dx}}{(x^{-2})^2}dx = \int \frac{e^{7\ln x}}{x^{-4}}dx \\ &= \int \frac{x^7}{x^{-4}}dx = \int x^{11}dx = \frac{x^{12}}{12} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y_2(x) = x^{-2}\frac{x^{12}}{12} = \frac{x^{10}}{12}$$

Note que una segunda solución l.i. con $y_1(x)$ *es simplemente* $\tilde{y}_2(x) = x^{10}$. *De modo que la solución general en* $(0, \infty)$ *de la ecuación diferencial* (3.1.7) *es*

$$y(x) = c_1x^{-2} + c_2x^{10}.$$

Ejercicio 3.1 *Verifique si la función* y_1 *indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. En caso de serlo determine la solución general de la ecuación.*

1. $y'' - 9y = 0, \quad y_1 = e^{3x}$
2. $y'' + 9y = 0, \quad y_1 = \cos 3x$
3. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x$
4. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, \quad y_1 = x^2$

5. $x^3y'' + x^2y' + xy = 0, \quad y_1 = \operatorname{sen}(\ln x)$
6. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y_1 = x^2$
7. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0, \quad y_1 = x$
8. $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0, \quad y_1 = x + 1$
9. $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0, \quad y_1 = x$
10. $x^2y'' + 3xy' = 0, \quad y_1 = 1$
11. $x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad y_1 = x^2$
12. $\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x$
13. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad y_1 = x^{-1/2}\cos x$
14. $x^2y'' + xy' = 0, \quad y_1 = 1$
15. $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y_1 = x \ln x$
16. $(4\cot x)y'' + (4 - \operatorname{sen} x)y' - y = 0, \quad y_1 = \operatorname{sen} x$

3.1.2 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n homogéneas a coeficientes constantes

Consideraremos la ecuación diferencial a coeficientes constantes de orden n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{3.1.8}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales.

Es fácil ver que una función exponencial de la forma

$$y = e^{rx}$$

es solución de (3.1.8) si y sólo si r es una raíz de la ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial (3.1.8),

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0. \tag{3.1.9}$$

No podemos hacer un análisis general de las raíces de la ecuación auxiliar ya que pueden aparecer muchas combinaciones si n es mayor que dos. Por ejemplo una ecuación de quinto grado puede tener cinco raíces reales diferentes, tres raíces reales diferentes y dos raíces complejas, una raíz real y cuatro complejas, cinco raíces reales e iguales, cinco raíces reales con tres de ellas iguales, y así sucesivamente. En su lugar mencionaremos los siguientes tres casos.

Caso 1. Si todas las raíces de (3.1.9), $r_1, r_2, \ldots, r_n$, son reales y distintas entonces la solución general de (3.1.8) es

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \ldots + c_ne^{r_nx}.$$

Caso 2. Si r_1 es una raíz de multiplicidad k de (3.1.9), es decir k raíces son iguales a r_1, entonces correspondiendo a esta raíz se tienen las siguientes k soluciones l.i. de (3.1.8)

$$e^{r_1x}, xe^{r_1x}, x^2e^{r_1x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_1x}$$

y la solución general de (3.1.8) debe contener la combinación lineal

$$c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_1x} + c_3x^2e^{r_1x} + \cdots + c_{k-1}x^{k-1}e^{r_1x}.$$

Caso 3. Cuando $r_1 = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de multiplicidad k de (3.1.9), su conjugado $r_2 = \alpha - i\beta$ es también raíz de multiplicidad k. En este caso, la solución general de la ecuación diferencial (3.1.8) debe contener una combinación lineal de las siguientes $2k$ soluciones l.i.

$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x. \end{gathered}$$

Caso particular $n = 2$: Estudiaremos la ecuación diferencial de la forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.1.10}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Al igual que antes, para estas ecuaciones se propone una solución de la forma

$$y(x) = e^{rx},$$

luego

$$y'(x) = re^{rx}, \quad y''(x) = r^2e^{rx}$$

y sustituyendo en la ecuación resulta

$$\begin{aligned} ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0 \\ e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) &= 0. \end{aligned}$$

Si r es una raíz de la ecuación *ecuación auxiliar*

$$ar^2 + br + c = 0,$$

según sean las raíces de esta ecuación: reales y distintas, reales e iguales o complejas se tienen los siguientes casos.

Caso 1. Si r_1 y r_2 son raíces reales y distintas entonces $y_1(x) = e^{r_1x}$ y $y_2(x) = e^{r_2x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (3.1.10), de donde su solución general viene dada por

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}.$$

Caso 2. Si las raíces son reales e iguales entonces $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} = r$. Así que, una solución de (3.1.10) es $y_1(x) = e^{rx}$.

Podemos encontrar una segunda solución y_2 linealmente independiente con y_1 empleando la fórmula (3.1.6), del método de reducción de orden estudiado en la sección anterior. 'Tememos

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx \\
&= e^{-\frac{b}{2a}x}\int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{\left(e^{-\frac{b}{2a}x}\right)^2}dx \\
&= e^{-\frac{b}{2a}x}\int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{-\frac{b}{a}x}}dx \\
&= xe^{-\frac{b}{2a}} \\
&= xy_1(x)
\end{aligned}$$

Luego, para obtener una segunda solución linealmente independiente con $y_1(x)$, basta con multiplicar $y_1(x)$ por x.

Así, la solución general de (3.1.10) en este caso viene dada por

$$y(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}.$$

Caso 3. Supongamos finalmente que las raíces son complejas y denotémoslas por

$$r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

Entonces dos soluciones l.i. de la ecuación diferencial son

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Sin embargo, estamos interesados en encontrar soluciones con valores reales. Tenemos que $y(x) = k_1e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2e^{(\alpha-i\beta)x}$, es solución de la ecuación diferencial, para cualesquier constantes k_1 y k_2. Pero, de la fórmula de Euler se sigue que

$$\begin{aligned}
y(x) &= k_1e^{\alpha x+i\beta x} + k_2e^{\alpha x-i\beta x} \\
&= k_1e^{\alpha x}e^{i\beta x} + k_2e^{\alpha x}e^{-i\dot{\beta} x} \\
&= e^{\alpha x}\left(k_1e^{i\beta x} + k_2e^{-i\beta x}\right) \\
&= e^{\alpha x}\left[k_1(\cos\beta x + i\operatorname{sen}\beta x) + k_2(\cos\beta x - i\operatorname{sen}\beta x)\right] \\
&= e^{\alpha x}\left[(k_1+k_2)\cos\beta x + (k_1-k_2)\,i\operatorname{sen}\beta x\right]
\end{aligned}$$

Ahora bien, si en particular tomamos $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$, obtenemos que la función

$$y_1(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + 0) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

es una solución de la ecuación de variable real con valores reales. Análogamente, si $k_1 = -\frac{i}{2}; \quad k_2 = \frac{i}{2}$ resulta la función

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\left[0 + \left(-\frac{i}{2} - \frac{i}{2}\right)i\operatorname{sen}\beta x\right] = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,$$

que también es una solución de la ecuación que toma valores reales. Por lo tanto, dos soluciones de la ecuación diferencial linealmente independientes con valores reales son

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x; \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

Así, la solución general de (3.1.10) viene dada por

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\operatorname{sen}\beta x\right).$$

Ejemplo 3.6 *Resuelva*

$$y'' - 3y = 0$$

Sol: *La ecuación auxiliar de la ED viene dada por*

$$r^2 - 3 = 0.$$

Las raíces características son $r_1 = \sqrt{3}$, $\quad r_2 = -\sqrt{3}$, *de donde, dos soluciones 1.i. de la ecuación son*

$$y_1(x) = e^{\sqrt{3}x}, \quad y_2(x) = e^{-\sqrt{3}x}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1e^{\sqrt{3}x} + c_2e^{-\sqrt{3}x}.$$

Ejemplo 3.7 *Resuelva*

$$y'' - 16y' + 64y = 0.$$

Sol: *La ecuación auxiliar es*

$$r^2 - 16r + 64 = 0.$$

Sus raíces son $r_1 = r_2 = 8$. *Por lo tanto, dos soluciones linealmente independientes son*

$$y_1(x) = e^{8x}, \quad y_2(x) = xe^{8x}.$$

Así , la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = (c_1 + c_2x)\,e^{8x}.$$

Ejemplo 3.8 *Resuelva*

$$y'' + y' + y = 0.$$

Sol: *La ecuación auxiliar es*

$$r^2 + r + 1 = 0$$

cuyas raíces son

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

De donde, dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Caso particular $n > 2$:

Ejemplo 3.9 *Resuelva*

$$y^{(4)} - y''' - 7y'' + y' + 6y = 0. \tag{3.1.11}$$

Sol: *La ecuación auxiliar de* (3.1.11) *es*

$$\begin{gathered} r^4 - r^3 - 7r^2 + r + 6 = 0 \\ (r-1)(r+1)(r+2)(r-3) = 0 \end{gathered}$$

cuyas raíces son

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2, \quad r_4 = 3.$$

Luego, cuatro soluciones linealmente independientes de la ecuación son

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = e^{-2x}, \quad y_4(x) = e^{3x}$$

y la solución general de (3.1.11) *es*

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x} + c_4e^{3x}.$$

Ejemplo 3.10 *Resuelva*

$$y^{(6)} - 8y^{(5)} + 17y^{(4)} + 6y''' - 44y'' + 8y' + 32y = 0. \tag{3.1.12}$$

Sol: *La ecuación auxiliar de* (3.1.12) *es*

$$\begin{gathered} r^6 - 8r^5 + 17r^4 + 6r^3 - 44r^2 + 8r + 32 = 0 \\ (r-2)^3(r-4)(r+1)^2 = 0. \end{gathered}$$

De la última expresión es claro que las raíces de la ecuación auxiliar, con sus respectivas multiplicidades son

$$\begin{aligned} r_1 &= 2, && \textit{de multiplicidad tres;} \\ r_2 &= 4, && \textit{de multiplidad uno (raíz simple)} \\ r_3 &= -1, && \textit{de multiplicidad dos (raíz doble)} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta cada raíz y sus multiplicidades respectivas, tenemos las siguientes soluciones l.i. de (3.1.12)

$$\begin{array}{rll} e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x} & \textit{correspondientes a la raíz} & r_1 = 2, \\ e^{4x} & \textit{correspondiente a la raíz} & r_2 = 4, \\ e^{-x}, xe^{-x} & \textit{correspondientes a la raíz} & r_3 = -1 \end{array}$$

Por consiguiente la solución general de (3.1.12) *es*

$$y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right)e^{2x} + c_4e^{4x} + \left(c_5 + c_6x\right)e^{-x}.$$

Ejemplo 3.11 *Resuelva*

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0. \tag{3.1.13}$$

Sol: *La ecuación auxiliar es*

$$\begin{aligned} r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 &= 0 \\ (r-1)^2\left(r^2+1\right) &= 0 \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \quad \text{de multiplicidad dos;} \\ r_2 &= i, \quad \text{de multiplicidad uno;} \\ r_3 &= -i, \quad \text{de multiplicidad uno.} \end{aligned}$$

De donde, la solución general de (3.1.13) *es*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x.$$

Ejercicio 3.2

1. $y''' - y = 0$
2. $y^{(4)} - 16y = 0$
3. $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$ 5. $y^{(4)} + 32y'' + 256y = 0$
4. $y''' - 3y'' - 10y' = 0$
5. $y''' + y'' + y' - 3y = 0$
6. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$ *con* $y(0) = 1;$ $y'(0) = 2;$ $y''(0) = -1$
7. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$ *con* $y(0) = 3;$ $y'(0) = 0;$ $y''(0) = 0;$ $y'''(0) = -3$

3.1.3 Método de Coeficientes Indeterminados

Este método nos permite encontrar una solución particular $y_p(x)$ para las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de la forma

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{3.1.14}$$

donde a, b, c son constantes y

$$g(x) = \begin{cases} b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0 & \text{función polinomial} \\ e^{ax} & \text{función exponencial} \\ \operatorname{sen}(bx) & \text{función seno} \\ \cos(bx) & \text{función coseno} \end{cases}$$

El método es aplicable también cuando la función $g(x)$ en (3.1.14) consiste de una suma y productos finitos de funciones polinomiales, exponenciales, seno y coseno. Asimismo, pueden considerarse ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes de orden superior.

Observación: *El enfoque del método de coeficientes indeterminados que presentamos en esta sección se basa esencialmente en tres principios u observaciones que la práctica de derivación de funciones nos ha enseñado.*

1. *Cuando derivamos un polinomio, el grado de éste disminuye en uno.*

   Si $g(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ *entonces* $g'(x) = kb_k x^{k-1} + (k-1)b_{k-1}x^{k-2} + \cdots + b_1$. *Evidentemente si derivamos dos veces* g*, su grado disminuye en dos.*

2. *Al derivar una función exponencial, la función çasi no cambia". Si* $g(x) = e^{ax}$ *entonces* $g'(x) = ae^{ax} = ag(x)$. *La derivada es casi la función* g *(salvo por la constante multiplicativa* a *).*

3. *Si derivamos* $g(x) = \operatorname{sen} mx$ *pasamos al coseno:* $g'(x) = m\cos mx$.

   Si derivamos $g(x) = \cos mx$ *pasamos al seno:* $g'(x) = -m \operatorname{sen} mx$.

   Si derivamos dos veces $g(x) = \operatorname{sen} mx$ *regresamos casi a* $g(x), g''(x) = -m^2 \operatorname{sen} mx$.

   Si derivamos dos veces $g(x) = \cos mx$ *regresamos casi a* $g(x), g''(x) = -m^2 \cos mx$.

Luego, es razonable pensar que una solución particular de (3.1.14) *tendrá la misma forma que* $g(x)$*, excepto cuando* g *es una solución de la ecuación homogénea.*

En esencia, el método consiste en proponer una solución particular de (3.1.14) que contenga uno o más coeficientes desconocidos. Entonces sustituimos esta solución propuesta en la ecuación diferencial y escogemos los coeficientes de tal manera que la función efectivamente satisfaga la ecuación.

A continuación discutiremos algunos casos para hallar una solución particular de (3.1.14), dependiendo de la forma de $g(x)$.

Caso I. $g(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

En este caso la ecuación diferencial (3.1.14) toma la forma

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{3.1.15}$$

Proponemos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0.$$

Sustituyendo y_p, y_p' y y_p'' en (3.1.15) resulta

$$\begin{aligned} &a\left[n(n-1)A_n x^{n-2} + \cdots + 2A_2\right] + b\left[nA_n x^{n-1} + \cdots + A_1\right] + \\ &\quad c\left(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$cA_n x^n + \left(cA_{n-1} + nbA_n\right)x^{n-1} + \cdots + \left(cA_0 + bA_1 + 2aA_2\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{3.1.16}$$

y comparando coeficientes obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} cA_n &= a_n \\ nbA_n + cA_{n-1} &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ 2aA_2 + bA_1 + cA_0 &= a_0. \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$ de la primera ecuación determinamos A_n y de las restantes los demás coeficientes.

Si $c = 0$ pero $b \neq 0$, el polinomio en el miembro izquierdo de (3.1.16) es de grado $n-1$ y dicha ecuación no puede satisfacerse. Así que si $c = 0$ proponemos

$$y_p(x) = x\left(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_2x^2 + A_1x + A_0\right),$$

y procedemos como antes para determinar $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$. Nótese además que si $c = 0$ una constante es solución de la ecuación diferencial homogénea.

Si tanto $b = 0$ como $c = 0$ (1 y x son soluciones de la homogénea), se propone

$$y_p(x) = x^2\left(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_2x^2 + A_1x + A_0\right),$$

aunque ahora la ecuación diferencial puede integrarse directamente.

Ejemplo 3.12 *Resolver*

$$y'' + 3y' + 2y = 3x^2 - x + 1. \tag{3.1.17}$$

Sol: *La solución general de* (3.1.17) *tiene la forma* $y = y_c + y_p$, *donde* y_c *es la solución general de la ecuación homogénea*

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \tag{3.1.18}$$

y y_p *es una solución particular de* (3.1.17). *La ecuación auxiliar de la ED viene dada por* $r^2+3r+2=0$, *cuyas raíces son* $r_1 = -1$ *y* $r_2 = -2$. *Luego*

$$y_c(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}.$$

Por otra parte, proponemos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

ya que el lado derecho de (3.1.17) *es un polinomio de grado 2 y 0 no es raíz característica. Tenenemos que* $y_p' = B + 2Ax, y_p'' = 2A$ *y sustituyendo en* (3.1.17), *resulta*

$$\begin{aligned} 2A + 3(2Ax + B) + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) &= 3x^2 - x + 1 \\ 2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C &= 3x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

Comparando coeficientes en la última igualdad obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$2A = 3$$
$$6A + 2B = -1$$
$$2A + 3B + 2C = 1$$

del cual se sigue que

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -5, \quad C = \frac{13}{2}.$$

Así que

$$y_p(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{13}{2}$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{13}{2}.$$

Caso II. $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Tenemos ahora la ecuación

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = e^{\alpha x} P_n(x) \tag{3.1.19}$$

Son posibles los siguientes subcasos.

a) α no es una raíz de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$. En este caso, es preciso hallar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = \left(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0\right) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x}.$$

En efecto, introduciendo y_p, y_p' y y_p'' en (4.32) y dividiendo por $e^{\alpha x}$ se sigue que

$$aQ_n''(x) + (2a\alpha + b)Q_n'(x) + \left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) Q_n(x) = P_n(x). \tag{3.1.20}$$

Ya que $\operatorname{grad}(Q_n(x)) = n$, $\operatorname{grad}(Q_n'(x)) = n - 1$ y $\operatorname{grad}(Q_n''(x)) = n - 2$, los polinomios en ambos miembros de (3.1.20) son de grado n. Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x se obtiene un sistema de $n + 1$ ecuaciones que determina los valores de $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$.

b) α es una raíz simple de la ecuación auxiliar. En este caso $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, de modo que en lado izquierdo de (3.1.19) se tiene un polinomio de grado $n - 1$ y dicha igualdad no puede satisfacerse sin importar cuales sean los valores de $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$. Debido a esto, ahora buscamos una solución particular en la forma de un polinomio de grado $n + 1$ sin término independiente (pués éste se anula durante la derivación) por $e^{\alpha x}$. Así hacemos

$$y_p(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

c) α es una raíz doble de la ecuación auxiliar. Entonces $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, y $2a\alpha + b = 0$ ($\alpha = -b/2a$ es la raíz doble), de manera que el lado izquierdo de (3.1.19) se reduce a $aQ_n''(x)$ y para satisfacer la igualdad se requiere buscar una solución particular de la forma de producto de $e^{\alpha x}$ por un polinomio de grado $n + 2$. Los términos independiente y lineal se anulan al derivar dos veces, por lo que pueden omitirse en la forma de y_p. Por consiguiente en este caso proponemos

$$y_p(x) = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}$$

Ejemplo 3.13 *Resuelva*

$$y'' + 4y' + 4y = e^{3x} \tag{3.1.21}$$

Sol: *En este caso la ecuación característica es $r^2 + 4r + 4 = 0$ y tiene las raíces $r_1 = r_2 = -2$, por lo que*

$$y_c(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

es la solución general de la ecuación homogénea $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Buscamos ahora una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ae^{3x}.$$

Al derivar y sustituir en (3.1.21) tenemos

$$\begin{aligned} 9Ae^{3x} + 12Ae^{3x} + 4Ae^{3x} &= e^{3x} \\ 25Ae^{3x} &= e^{3x}, \end{aligned}$$

por lo cual $A = \frac{1}{25}$

$$y_p(x) = \frac{1}{25} e^{3x}$$

y la solución general de (3.1.21) es

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{25} e^{3x}.$$

Caso III. $g(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Podemos examinar este caso en forma análoga al caso II, usando que

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \operatorname{sen} \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} g(x) &= P(x)e^{\alpha x} \left(\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \right) + Q(x) e^{\alpha x} \left(\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \right) \\ &= \left[\frac{1}{2} P(x) + \frac{1}{2i} Q(x) \right] e^{(\alpha + i\beta)x} + \left[\frac{1}{2} P(x) - \frac{1}{2i} Q(x) \right] e^{(\alpha - i\beta)x}. \end{aligned}$$

Y considerando de manera independiente las partes real e imaginaria, podemos hallar soluciones que no contengan números complejos de la siguiente forma:

a) Si $\alpha + i\beta$ no es raíz de la ecuación auxiliar, buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = u(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + v(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \tag{3.1.22}$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son polinomios cuyo grado es igual al mayor de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.

b) Si $\alpha + i\beta$ es raíz de la ecuación auxiliar, hacemos

$$y_p(x) = x \left[u(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + v(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \right] \tag{3.1.23}$$

con $u(x)$ y $v(x)$ como antes. Un caso particular es cuando $g(x)$ tiene la forma

$$g(x) = a\cos\beta x + b\,\mathrm{sen}\,\beta x, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

es decir $P(x)$ y $Q(x)$ son de grado cero y $\alpha = 0$. Entonces los resultados anteriores se reducen a los siguientes:

a.1) Si βi no es una raíz de la ecuación auxiliar, buscamos una solución de la forma

$$y_p(x) = A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x$$

b.1) Si βi es una raíz de la ecuación auxiliar, proponemos

$$y_p(x) = x(A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x).$$

Finalmente enfatizamos que las formas propuestas (3.1.22) y (3.1.23), para la solución particular, también son válidas cuando $P(x) = 0$ o $Q(x) = 0$ y en el caso particular cuando $a = 0$ o $b = 0$.

Ejemplo 3.14 *Resuelva*

$$y'' + y' = \cos 2x \tag{3.1.24}$$

Sol: *La ecuación característica $r^2 + r = 0$ tiene por raíces $r_1 = 0, r_2 = -1$, por lo que*

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-x}$$

En este caso se propone

$$y_p = A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\,2x.$$

Sustituyendo y_p, y_p' y y_p'' en (3.1.24) encontramos que

$$\begin{aligned}(-4A\cos 2x - 4B\,\mathrm{sen}\,2x) + (-2A\,\mathrm{sen}\,2x + 2B\cos 2x) &= \cos 2x\\ (-4A + 2B)\cos 2x + (-2A - 4B)\,\mathrm{sen}\,2x &= \cos 2x,\end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}-4A + 2B &= 1\\ -2A - 4B &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{1}{10}.$$

En consecuencia

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}\,2x$$

y la solución general de (3.1.24) es

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-x} - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}\,2x.$$

Ejercicio 3.3 *Encuentre las solución general de la ecuación diferencial*

1. $y'' + 25y = 10\,\mathrm{sen}\,5x.$
2. $y'' - 2y' - 3y = xe^{3x} + \mathrm{sen}\,x.$

3.1.4 Método de Variación de Parámetros

Este es un método general para determinar una solución particular de una ecuación diferencial lineal. Sin pérdida de generalidad, consideremos la ecuación lineal de segundo orden escrita como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{3.1.25}$$

El método consiste en buscar una solución de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{3.1.26}$$

donde y_1 y y_2 son dos soluciones l.i de la ecuación diferencial homogénea asociada, y u_1, u_2 son dos funciones a determinar de modo que (3.1.26) sea una solución de (3.1.25) y satisfagan una condición arbitraria, pero seleccionada de tal forma que se simplifiquen los cálculos.

Derivando (3.1.26) se tiene que

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ &= \left(u_1y_1' + u_2y_2'\right) + \left(u_1'y_1 + u_2'y_2\right). \end{aligned}$$

Podemos simplificar esta expresión, imponiendo a u_1 y u_2 la condición de que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

En tal caso

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'$$

y por consiguiente

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''.$$

Sustituyendo las expresiones de y_p, y_p', y_p'' en (3.1.25), y usando el hecho de que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial homogénea, resulta

$$\begin{aligned} u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + p\left(u_1y_1' + u_2y_2'\right) + q\left(u_1y_1 + u_2y_2\right) &= g(x) \\ u_1\left(y_1'' + py_1' + qy_1\right) + u_2\left(y_2'' + py_2' + qy_2\right) + u_1'y_1' + u_2'y_2' &= g(x) \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= g(x) \end{aligned}$$

Así, buscamos una solución particular de la forma (3.1.26), con u_1, u_2 funciones que satisfacen las ecuaciones

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0, \tag{3.1.27}$$

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x). \tag{3.1.28}$$

Es fácil resolver el sistema de ecuaciones (3.1.27)-(3.1.28) para las incognitas u_1' y u_2', empleando la regla de Cramer. Obtenemos

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}, \quad u_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)} \tag{3.1.29}$$

donde $W(x)$ denota al wronskiano $W\left(y_1, y_2\right)(x)$. Finalmente, integrando las expresiones (3.1.29) resulta

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx, \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx \tag{3.1.30}$$

Sustituyendo (3.1.30) en (3.1.26) se obtiene la solución particular deseada.

Ejemplo 3.15 *Resuelva la siguiente ED*

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x \tag{3.1.31}$$

Sol: *Deteminamos primero la solución general de la ecuación homogénea asociada a* (3.1.31)*, a saber*

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{3.1.32}$$

La ecuación característica de (3.1.32) *es*

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

y sus raíces son $r_1 = 1 + i$ *y* $r_2 = 1 - i$*. En consecuencia*

$$y_c = e^x \left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right).$$

Denotemos por

$$y_1 = e^x \cos x, \quad y_2 = e^x \operatorname{sen} x$$

Luego

$$W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \operatorname{sen} x \\ (\cos x - \operatorname{sen} x)e^x & (\cos x + \operatorname{sen} x)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Buscamos una solución particular de (3.1.31) *de la forma* $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$*, donde las funciones* u_1 *y* u_2 *se calculan utilizando las ecuaciones* (3.1.30)*. Se tiene que*

$$u_1(x) = -\int \frac{\left(e^x \operatorname{sen} x\right)\left(e^x \sec x\right)}{e^{2x}} dx = -\int \tan x dx = \ln|\cos x|$$

y

$$u_2(x) = \int \frac{\left(e^x \cos x\right)\left(e^x \sec x\right)}{e^{2x}} = \int dx = x$$

Luego

$$y_p = \left(\ln|\cos x|\right)\left(e^x \cos x\right) + x e^x \operatorname{sen} x$$

y por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial no homogénea (3.1.31) *está dada por*

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= e^x \left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right) + \left(\ln|\cos x|\right)\left(e^x \cos x\right) + x e^x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Ejemplo 3.16 *Resuelva la siguiente ecuación diferencial*

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}, \quad x > 0 \tag{3.1.33}$$

Sol: *Puesto que la ecuación característica es*

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$$

se sigue que

$$y_c(x) = k_1 e^{-2x} + k_2 x e^{-2x}.$$

Sean $y_1 = e^{-2x}$ *y* $y_2 = xe^{-2x}$. *Entonces*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}.$$

Usando las expresiones (3.1.30) *obtenemos*

$$u_1(x) = -\int \frac{\left(xe^{-2x}\right)\left(x^{-2}e^{-2x}\right)}{e^{-4x}} dx = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln x$$

y

$$u_2(x) = \int \frac{e^{-2x}\left(x^{-2}e^{-2x}\right)}{e^{-4x}} dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}.$$

Así que

$$\begin{aligned} y_p &= -(\ln x)e^{-2x} - \left(\frac{1}{x}\right) xe^{-2x} \\ &= -(\ln x)e^{-2x} - e^{-2x} \end{aligned}$$

Por consiguiente la solución general de (3.1.33) *es*

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= (k_1 + k_2 x)\, e^{-2x} - (\ln x)e^{-2x} - e^{-2x}. \end{aligned}$$

Ya que k_1 *es una constante arbitraria, nótese que podemos escribir la solución de* (3.1.33) *simplemente como*

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-2x} - (\ln x)e^{-2x},$$

siendo $c_1 = k_1 - 1$ *y* $c_2 = k_2$ *constantes arbitrarias.*

Ejercicio 3.4 *Para la ecuación diferencial*

$$xy'' + 2y' - xy = 2e^{2x}. \tag{3.1.34}$$

a) Compruebe que las funciones $y_1 = x^{-1}e^{x}, y_2 = x^{-1}e^{-x}$, *forman un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo* $(0, \infty)$ *de la ecuación diferencial homogénea correspondiente.*

b) Obtenga la solución general de la ecuación no homogénea dada.

Ejercicio 3.5 *1. En los problemas 1 a 12, obtenga una solución particular de la ecuación diferencial dada, utilizando el método de variación de parámetros. Escriba la solución general de la ecuación diferencial.*

1. $y'' + y = \tan x$

2. $y'' + y = \csc x$

3. $y'' + 4y' + 3y = \frac{1}{1+e^x}$

4. $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$

5. $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^2}$

6. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \arctan x$

7. $y'' - 3y' + 2y = e^{x} \operatorname{sen} 2x$

8. $y'' + 5y' + 6y = \operatorname{sen} e^{x}$

9. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \ln x$

10. $y'' + y = x \operatorname{sen} x$

11. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2+1}$

12. $9y'' - 12y' + 4y = \frac{e^{\frac{2}{3}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

2. *En los problemas 13 a 15 determine la solución general de la ecuación diferencial no homogénea dada, usando que la función y_1 indicada es una solución de la ecuación homogénea correspondiente.*

13. $x^2y'' - 2y = x^2 \ln x, \quad y_1 = x^2$

14. $x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x}, \quad y_1 = x$

15. $x^2y'' + xy' + y = \tan \ln x, \quad y_1 = \cos \ln x$

3.2 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

3.2.1 Movimiento Armónico Simple

Supónga que un cuerpo de masa m está sujeto al extremo de un resorte flexible (de peso despreciable), suspendido de un soporte rígido. Cuando el peso está en reposo, describimos su posición como la posición de equilibrio. Si el cuerpo se desplaza hacia abajo una cierta distancia y luego se suelta, estará bajo un movimiento vibratorio alrededor de la posición de equilibrio (ver figura 5.1). Nuestro propósito es estudiar el movimiento del cuerpo, conocido como movimiento armónico simple, en el cual se ignora cualquier fuerza de fricción con el medio que lo rodea.

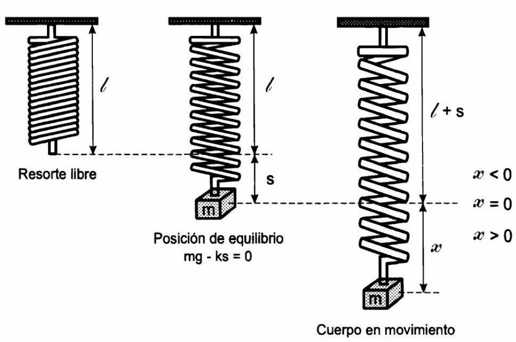


Figura 3.1: Sistema masa-resorte.

En este caso, las únicas fuerzas que actúan son:

- Una fuerza de restitución, f_r, opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional a su magnitud (Ley de Hooke). En términos simples $f_r = kd$, donde k es una constante de proporcionalidad y d la magnitud del alargamiento.

- El peso del cuerpo, dado por $W = mg$.

Adoptaremos la siguiente convención. Todas las cantidades (desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza), medidas hacia abajo desde la posición de equilibrio se considerarán como positivas. Las que se miden hacia arriba, son negativas.

En la posición de equilibrio

$$mg - ks = 0$$

Ahora, al desplazar el cuerpo de esta posición en una magnitud x y soltarla, de la Segunda Ley de Newton se sigue que

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= mg - k(s+x) \\ &= mg - ks - kx \end{aligned}$$

y usando la condición de equilibrio, resulta

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3.2.1}$$

El signo negativo indica que la fuerza de restitución del resorte actúa en dirección opuesta a la del movimiento.

Podemos escribir la ecuación (3.2.1) en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{3.2.2}$$

donde $\omega^2 = k/m$.

La ecuación (3.2.2) es la *ecuación diferencial del movimiento armónico simple* o *movimiento vibratorio no amortiguado*. Hay dos condiciones iniciales asociadas con (3.2.2), a saber

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$

que representan el deplazamiento y velocidad iniciales, respectivamente. Por ejemplo, si $x_0 < 0$ y $v_0 > 0$ entonces el movimiento se inicia en un punto que está $|x_0|$ unidades arriba de la posición de equilibrio y con una velocidad inicial dirigida hacia abajo. Si $x_0 > 0$ y $v_0 = 0$, la masa está inicialmente en reposo a x_0 unidades abajo de la posición de equilibrio.

La ecuación auxiliar de (3.2.2) es

$$r^2 + \omega^2 = 0,$$

cuyas raíces son imaginarias puras

$$r_1 = \omega i, \quad r_2 = -\omega i.$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial (3.2.2) es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t, \tag{3.2.3}$$

donde c_1 y c_2 son constantes que dependen de x_0 y v_0.

Nótese que independientemente de los valores de c_1 y c_2, la ecuación del movimiento armónico simple (3.2.3), define una función periódica de periodo $T = 2\pi/\omega$ y describe un movimiento ideal en el que el cuerpo se mueve alternadamente hacia arriba y hacia abajo de la posición de equilibrio, infinitas veces.

El periodo T es el tiempo necesario para que se complete un ciclo y su recíproco $f = 1/T$ se llama la frecuencia. El desplazamiento máximo del cuerpo, medido desde la posición de equilibrio, se llama la amplitud.

Ejemplo 3.17 *Se encontró experimentalmente que un peso de 4 lb estira un resorte 1/2 ft. Si el peso se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 4 pulg/s, determina:*

a) La ecuación diferencial y condiciones iniciales que describen el movimieno.

b) La ecuación del movimiento.

c) La posición, velocidad y aceleración del peso 2 segundos después.

d) El periodo, la frecuencia y la gráfica de la solución.

Sol: *Segun la Ley de Hooke tenemos que*

$$4 = (k)\left(\frac{1}{2}\right)$$

de donde

$$k = 8\frac{lb}{ft}.$$

Además $m = W/g = 4/32 = 1/8$ slug.

a) Luego, de (3.2.2), la ecuación diferencial que describe el movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{8}{1/8}x = 0$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 \tag{3.2.4}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = \frac{1}{3}.$$

b) La ecuación auxiliar de (3.2.4) es $r^2 + 64 = 0$, cuyas raíces son $r = \pm 8i$. En consecuencia la solución general de (3.2.4) viene dada por

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t.$$

La condición incial $x(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$, mientras que $x'(0) = 1/3$ conduce a $8c_2 = 1/3$. De modo que $c_1 = 0, c_2 = 1/24$ y la solución requerida es

$$x(t) = \frac{1}{24}\operatorname{sen} 8t$$

c) La posición, velocidad y aceleración del peso 2 segundos después, están dadas, respectivamente por

$$\begin{aligned} x(2) &= \frac{1}{24}\operatorname{sen} 16 = -0.011996 \\ x'(2) &= \frac{1}{3}\cos 16 = -0.31922, \\ x''(2) &= -\frac{8}{3}\operatorname{sen} 16 = 0.76774, \end{aligned}$$

lo cual indica que el cuerpo se encuentra a 0.011996ft *arriba de la posición de equilibrio moviéndose hacia arriba.*

d) El periodo y la frecuencia son

$$T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}, \quad f = \frac{4}{\pi}.$$

Claramente, la amplitud es de $1/24\text{ft}$. *La solución muestra que una vez que el sistema se pone en movimiento, permanece en tal estado con la masa desplazándose alternadamente* $1/24\text{ft}$ *hacia cada lado de la posición de equilibrio $x = 0$. La gráfica se muestra en la figura 5.2.*

3.2.2 Movimiento Vibratorio Amortiguado

En la sección anterior se supuso que no actúan fuerzas retardadoras sobre la masa en movimiento, lo cual no es cierto a menos que se encuentre suspendida en un vacío perfecto.

Vamos a considerar ahora el efecto de la resistencia del medio sobre la masa. Supongamos que sobre el cuerpo actúa una fuerza amortiguadora, dada por un múltiplo constante de la velocidad $\frac{dx}{dt}$. De la segunda ley de Newton, en ausencia de fuerzas externas, se sigue que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

donde β es una constante de amortiguación positiva y el signo se debe a que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta al movimiento. Obtenemos así la ecuación diferencial del movimiento vibratorio amortiguado libre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{3.2.5}$$

con $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$. La ecuación auxiliar de (3.2.5) es

$$r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$$

cuyas raíces están dadas por

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \tag{3.2.6}$$

Dependiendo del valor de $\lambda^2 - \omega^2$, distinguimos los tres casos siguientes.

Caso 1. Movimiento Sobre-Amortiguado. Si $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, las raíces (3.2.6) son reales y distintas, y en consecuencia la solución general de (3.2.5) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right) \tag{3.2.7}$$

que representa un movimiento suave y no oscilatorio.

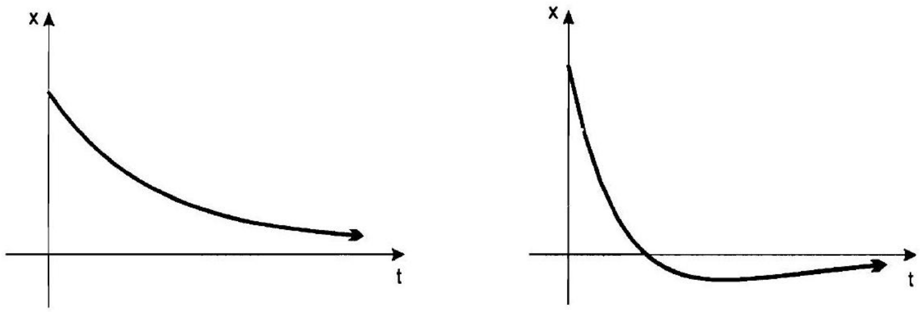


Figura 3.2: Movimiento sobreamortiguado.

Caso 2. Movimiento Críticamente Amortiguado. Si $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ la solución general de (3.2.5) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t) \tag{3.2.8}$$

puesto que $r_1 = r_2 = -\lambda$.

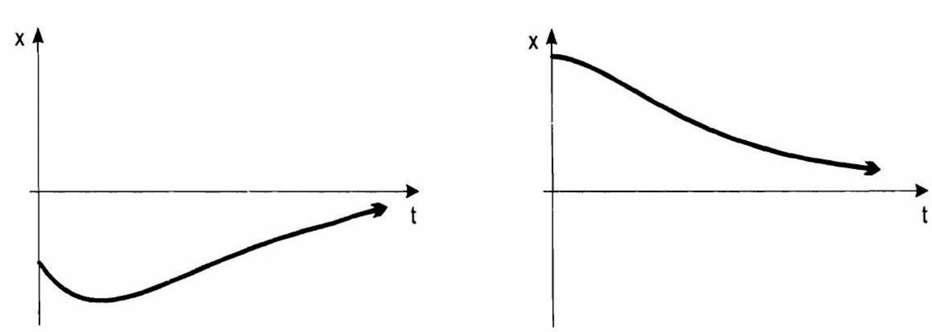


Figura 3.3: Movimiento críticamente amortiguado.

Un examen de las derivadas de las soluciones (3.2.7) y (3.2.8), de los casos 1 y 2 respectivamente, permite ver que estas funciones pueden tener a lo más un máximo relativo o un mínimo relativo para $t > 0$, por lo que el cuerpo puede pasar a lo más una vez por la posición de equilibrio.

Caso 3. Movimiento Subamortiguado. Si $\lambda^2 - \omega^2 < 0$, las raíces (3.2.6) son complejas y se pueden escribir como

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i, \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i,$$

de modo que la solución general de (3.2.5) es en este caso

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t\right). \tag{3.2.9}$$

Ahora, el movimiento es oscilatorio, pero la amplitud de las oscilaciones tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Ejemplo 3.18 *Se encontró experimentalmente que un cuerpo de 4 lb estira un resorte 6 pulgadas. El medio ofrece una resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a 2.5 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso se desplaza 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta.*

Sol: *La ecuación diferencial del movimiento es*

$$\frac{4}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 2.5\frac{dx}{dt}$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0 \tag{3.2.10}$$

Las condiciones iniciales son

$$x(0) = \frac{1}{3}, \quad x'(0) = 0.$$

La ecuación auxiliar de (3.2.10) *es* $r^2 + 20r + 64 = 0$ *y sus raíces son* $r_1 = -4, r_2 = -16$*, de modo que*

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t}.$$

La condición $x(0) = 1/3$ *implica que*

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{3} \tag{3.2.11}$$

en tanto que $x'(0) = 0$ *nos lleva a*

$$-4c_1 - 16c_2 = 0 \tag{3.2.12}$$

Resolviendo el sistema (3.2.11)-(3.2.12) *obtenemos los valores*

$$c_1 = \frac{4}{9}, \quad c_2 = -\frac{1}{9}.$$

Por lo tanto

$$x(t) = \frac{4}{9}e^{-4t} - \frac{1}{9}e^{-16t}$$

Grafique. Como se observa no ocurren oscilaciones ya que el peso tiene tanto amortiguamiento que sólo retorna gradualmente a la posición de equilibrio sin pasar por esta. Se trata de un movimiento sobreamortiguado.

CAPÍTULO 4

Transformada de Laplace

4.1 Definiciones y ejemplos

Definición 4.1 *Dada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ se llama transformada de Laplace de f a la función*

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

que asocia a $s \in \mathbb{R}$ el valor $\mathcal{L}[f](s)$ cuando la integral converge. Si la transformada de Laplace de una función existe para $s > c$, a la mínima cota "c" se le llama asíntota de la transformada.

Veamos algunos ejemplos para funciones conocidas:

Ejemplo 4.1 *Primero $f(t) = 1$. Claramente, si $s \leq 0$ la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$ no converge. Si $s > 0$ entonces*

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{s} e^{-st}\Big|_0^b = \frac{1}{s}.$$

Luego $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ para $s > 0$ (la asíntota es $c = 0$).

Ejercicio 4.1 *Calcule $\mathcal{L}[t](s)$, $\mathcal{L}[e^{-3t}](s)$ y $\mathcal{L}[e^{5t}](s)$.*

Ejercicio 4.2 *Generalice $\mathcal{L}[e^{at}](s)$ para $a \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 4.2 *Analicemos ahora $f(t) = e^{at}$ con $a \in \mathbb{C}$. Al igual que antes, es evidente que si $s \leq \mathrm{Re}(a)$ entonces la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}dt$ no converge. Si $s > \mathrm{Re}(a)$,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t}\Big|_0^b \\
&= \frac{1}{s-a}.
\end{aligned}$$

De allí, $\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s) = \dfrac{1}{s-a}$ para $s > \mathrm{Re}(a)$ (la asíntota es $c = \mathrm{Re}(a)$).

Ejemplo 4.3 *Recordemos ahora que $\cos(wt) + i\,\mathrm{sen}(wt) = e^{iwt}$, de manera que $\mathrm{Re}\left(e^{iwt}\right) = \cos wt$ e $\mathrm{Im}\left(e^{iwt}\right) = \mathrm{sen}\, wt$ son la parte real e imaginaria de e^{iwt}, respectivamente. Del ejemplo anterior tenemos que*

$$\mathcal{L}\left[e^{iwt}\right](s) = \frac{1}{s-iw} = \frac{s+iw}{s^2+w^2} \qquad para \qquad s > 0$$

En virtud de la definición de la transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}[\mathrm{Re}(f)] = \mathrm{Re}\,\mathcal{L}[f] \qquad e \qquad \mathcal{L}[\mathrm{Im}(f)] = \mathrm{Im}\,\mathcal{L}[f]$$

con lo cual

$$\mathcal{L}[\cos wt](s) = \frac{s}{s^2+w^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}[\operatorname{sen} wt](s) = \frac{w}{s^2+w^2} \quad \text{para} \quad s > 0.$$

De la linealidad de la integral tenemos la siguiente propiedad:

Propiedad 4.1 *La transformada de Laplace es un operador lineal. Es decir, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y si f y g son funciones de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ tales que $\mathcal{L}[f](s)$ y $\mathcal{L}[g](s)$ existen, entonces*

$$\mathcal{L}[f + \lambda g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \lambda \mathcal{L}[g](s)$$

Ejemplo 4.4 *Recordemos que* $\cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ *y* $\operatorname{senh}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$. *Para $s > 1$ tenemos que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cosh(t)](s) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^t\right](s) + \mathcal{L}\left[e^{-t}\right](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \\
&= \frac{s}{s^2-1}, \\
\text{y} \quad \mathcal{L}[\operatorname{senh}(t)](s) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^t\right](s) - \mathcal{L}\left[e^{-t}\right](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) \\
&= \frac{1}{s^2-1}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.3 *Calcule* $\mathcal{L}[4e^{3t} + 3\cos(2t)](s)$.

Una función f tiene una discontinuidad de salto en $a \in \operatorname{Dom}(f)$ si los límites laterales $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existen, son finitos y distintos.

Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ se dice continua por pedazos si tiene un número finito o numerable de discontinuidades de salto en $[0, +\infty)$, pero sobre cada subintervalo acotado de $[0, +\infty)$ tiene a lo más un número finito de éstas.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4.5 *La función*

$$f(t) = (-1)^{[t]} = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

extendida periódicamente a $[0, \infty)$ con período 2 , se llama onda cuadrada *y es continua por pedazos.*

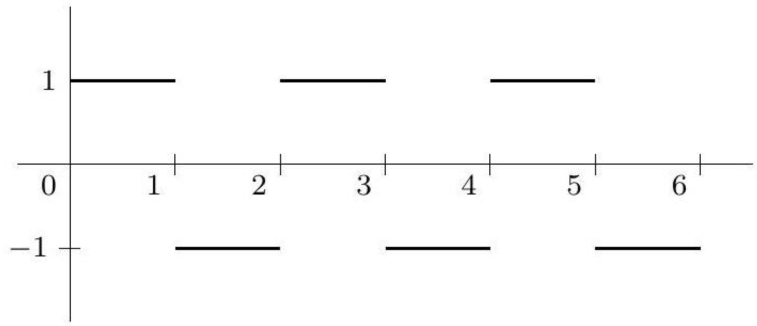


Figura 4.1: Gráfico de la onda cuadrada.

Ejemplo 4.6 *La función $f(t) = t - [t]$ o bien $f(t) = t, 0 \leq t < 1$ extendida periódicamente a $[0, \infty)$ con período 1, llamada onda de dientes de sierra, es continua por pedazos.*

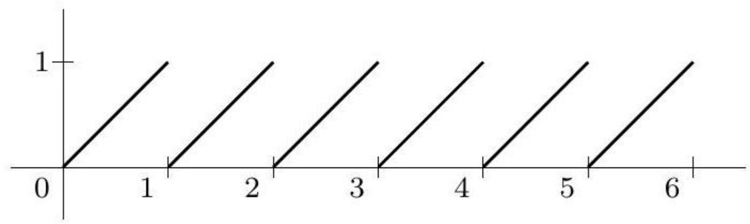


Figura 4.2: Gráfico de la onda de dientes de sierra.

Ejemplo 4.7 *La función $f(t) = \tan(t)$ no es continua por pedazos pues*

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = -\infty \qquad y \qquad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = +\infty$$

Ejemplo 4.8 *La función*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

tampoco es continua por pedazos.

Definición 4.2 *Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$. Al menor de tales α se le llama orden exponencial de f. Gráficamente, el hecho de tener orden exponencial significa que la función está encerrada entre $Me^{\alpha t}$ y $-Me^{\alpha t}$.*

Definición 4.3 *El espacio $\mathcal{C}_\alpha$ es el conjunto de las funciones $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que son continuas por pedazos y de orden exponencial α. Es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$.*

Observemos que si $f' \in \mathcal{C}_\alpha$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \int_0^x \left|f'(s)\right| ds \\ &\leq |f(0)| + \frac{M}{\alpha} e^{\alpha x} \\ &\leq \widetilde{M} e^{\alpha x}, \end{aligned}$$

de modo que $f \in \mathcal{C}_\alpha$.

Propiedad 4.2 *Si $f \in \mathcal{C}_\alpha$ entonces para todo $s > \alpha$, existe $\mathcal{L}[f](s)$ (y converge absolutamente). Además*

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \frac{M}{s-\alpha}$$

para todo $s > \alpha$. En particular, $\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f(t)](s) = 0$.

Dem: *Recordemos que si la integral converge absolutamente, entonces converge. Con esto basta probar que*

$$\int_0^{+\infty} \left|e^{-st} f(t)\right| dt \leq \frac{M}{s-\alpha}$$

para todo $s > \alpha$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left|e^{-st} f(t)\right| dt &= \int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)| dt \\ &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt \\ &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &\leq M \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{-s+\alpha} e^{(-s+\alpha)t}\Big|_0^b \\ &\leq \frac{C}{s-\alpha} \end{aligned}$$

Teorema 4.1 (Transformada de Laplace de algunas funciones básicas)

a) $\mathcal{L}[1](s) = \dfrac{1}{s}$

b) $\mathcal{L}[t^n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a}$

d) $\mathcal{L}[\operatorname{sen} kt](s) = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

e) $\mathcal{L}[\cos kt](s) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

f) $\mathcal{L}[\operatorname{senh} kt](s) = \dfrac{k}{s^2 - k^2}$

g) $\mathcal{L}[\cosh kt](s) = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$

Ejercicio 4.4 *Demostrar que* $t^k, k \in \mathbb{N}$, *tiene transformada de Laplace y que* $\mathcal{L}\left[t^k\right](s) = \dfrac{k!}{s^{k+1}}, s > 0.$

La función *escalón de Heaviside* se define como

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

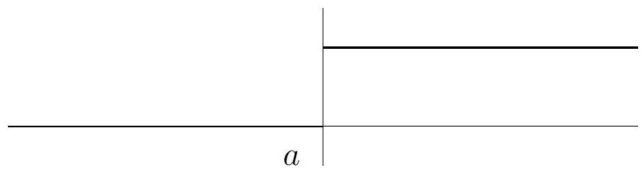


Figura 4.3: Función escalón de Heaviside $H_a(t)$.

Observemos que si $a \geq 0$, entonces $H_a(t) = H_0(t-a)$. La transformada de Laplace de H_a, con $a \geq 0$ es

$$\mathcal{L}\left[H_a\right](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} H_a(t) dt = \int_a^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-as}$$

para $s > 0$. Si $a < b$ definimos el pulso entre a y b como

$$P_{ab}(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a \leq t < b \\ 0 & t \geq b \end{cases}$$

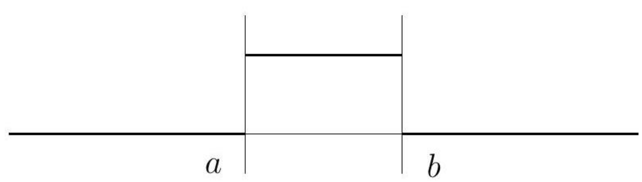


Figura 4.4: Pulso entre a y b.

Notar que $P_{ab}(t) = H_a(t) - H_b(t)$. Luego, su transformada de Laplace para $0 \leq a < b$ será

$$\mathcal{L}\left[P_{ab}(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[H_a(t) - H_b(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[H_a(t)\right](s) - \mathcal{L}\left[H_b(t)\right](s).$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\left[P_{ab}(t)\right](s) = \frac{1}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right) \qquad \text{para} \qquad s > 0.$$

4.2 Propiedades básicas de la transformada de Laplace

En esta sección estudiaremos reglas operacionales que serán útiles para aplicar la transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones lineales de orden superior y sistemas lineales de primer orden.

4.2.1 Transformada de una derivada

Sea $f \in \mathcal{C}_\alpha$ derivable. Calculemos la transformada de Laplace de su derivada para $s > \alpha$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f'\right](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt \\
&= s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt + e^{-st} f(t)\Big|_0^{+\infty} \\
&= s\mathcal{L}[f](s) + \lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) - \lim_{t\to 0^+} e^{-st} f(t)
\end{aligned}$$

Como f es de orden exponencial α, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{-st} f(t)\right| \leq \lim_{t\to\infty}\left|e^{-st} e^{\alpha t}\right| = \lim_{t\to\infty} e^{-(s-\alpha)t} = 0$$

pues $s > \alpha$. Llamando $f\left(0^+\right) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$ tenemos que

$$\mathcal{L}\left[f'\right](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f\left(0^+\right) \qquad \text{para} \qquad s > \alpha$$

Para la segunda derivada, si $s > \alpha$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f''\right](s) &= s\mathcal{L}\left[f'\right](s) - f'\left(0^+\right) \\
&= s\left(s\mathcal{L}[f](s) - f\left(0^+\right)\right) - f'\left(0^+\right) \\
&= s^2\mathcal{L}[f](s) - sf\left(0^+\right) - f'\left(0^+\right).
\end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento obtenemos, para $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^k f^{(n-k)}\left(0^+\right).$$

Teorema 4.2 (Transformada de una derivada) *Si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0,\infty)$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0,\infty)$, entonces*

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$.

Solución de EDO lineales Es evidente del resultado general dado anteriormente en el que $\mathcal{L}\left\{d^n y/dt^n\right\}$ depende de $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y las $n-1$ derivadas de $y(t)$ evaluadas en $t = 0$. Esta propiedad hace que la transformada de Laplace sea adecuada para resolver problemas lineales con valores iniciales en los que la ecuación diferencial tiene coeficientes constantes. Este tipo de ecuación diferencial es simplemente una combinación lineal de términos $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = g(t),$$
$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

donde las $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ y $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes. Por la propiedad de linealidad la transformada de Laplace de esta combinación lineal es una combinación lineal de transformadas de Laplace:

$$a_n \mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1}\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_0\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}. \tag{4.2.1}$$

Luego la ecuación (4.2.1) se convierte en

$$\begin{aligned} &a_n\left[s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)\right] \\ &\quad + a_{n-1}\left[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)\right] + \cdots + a_0Y(s) = G(s), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$. En otras palabras, la transformada de Laplace de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se convierte en una ecuación algebraica en $Y(s)$. Si se resuelve la ecuación transformada general para $Y(s)$, primero se obtiene $P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$ y después se escribe

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)},$$

donde $P(s) = a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0$, $Q(s)$ es un polinomio en s de grado menor o igual a $n-1$ que consiste en varios productos de los coeficientes $a_i, i = 1, \ldots, n$ y las condiciones iniciales prescritas $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ y $G(s)$ es la transformada de Laplace de $g(t)$. Normalmente se escriben los dos términos de la ecuación sobre el mínimo común denominador y después se descompone la expresión en dos o más fracciones parciales. Por último, la solución $y(t)$ del problema con valores iniciales original es $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, donde la transformada inversa se hace término a término.

4.2.2 Transformada inversa

Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es decir, $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ se dice entonces que $f(t)$ es la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ y se escribe $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Teorema 4.3 *Algunas transformadas inversas*

a) $1 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$

b) $t^n = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]$

d) $\operatorname{sen} kt = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{k}{s^2+k^2}\right]$

e) $\cos kt = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+k^2}\right]$

f) $\operatorname{senh} kt = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{k}{s^2-k^2}\right]$

g) $\cosh kt = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2-k^2}\right]$

h) $H_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}e^{-as}\right]$

Ejemplo 4.9 *Evalúe*

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+7}\right\}$.

Sol: *a) Se identifica* $n+1=5$ *o* $n=4$ *y luego se multiplica y divide entre* $4!$*:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24}t^4.$$

b) Para que coincida con la forma dada en las tablas, identificamos $k^2=7$ *y, por tanto,* $k=\sqrt{7}$*. Se arregla la expresión multiplicando y dividiendo entre* $\sqrt{7}$ *:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}\sqrt{7}t.$$

$\mathcal{L}^{-1}$

Nota: La transformada de Laplace inversa es también una transformada lineal para las constantes α y β

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\},$$

donde F y G son las transformadas de algunas funciones f y g.

Ejercicio 4.5 *Evalúe*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right)$$

Ejemplo 4.10 *Use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales*

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13\operatorname{sen} 2t, \quad y(0)=6.$$

Sol: *Primero se toma la transformada de cada miembro de la ecuación diferencial.*

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right]+3\mathcal{L}[y]=13\mathcal{L}[\operatorname{sen} 2t]$$

Luego $\mathcal{L}[dy/dt]=sY(s)-y(0)=sY(s)-6$, *y* $\mathcal{L}[\operatorname{sen} 2t]=2/\left(s^2+4\right)$, *por lo que la ecuación es igual que*

$$sY(s)-6+3Y(s)=\frac{26}{s^2+4} \quad o \quad (s+3)Y(s)=6+\frac{26}{s^2+4}.$$

Resolviendo la última ecuación para $Y(s)$, *obtenemos*

$$Y(s)=\frac{6}{s+3}+\frac{26}{(s+3)\left(s^2+4\right)}=\frac{6s^2+50}{(s+3)\left(s^2+4\right)}.$$

Puesto que el polinomio cuadrático s^2+4 *no se factoriza usando números reales, se supone que el numerador en la descomposición de fracciones parciales es un polinomio lineal en* s :

$$\frac{6s^2+50}{(s+3)\left(s^2+4\right)}=\frac{A}{s+3}+\frac{Bs+C}{s^2+4}.$$

Poniendo el lado derecho de la igualdad sobre un común denominador e igualando los numeradores, se obtiene $6s^2+50=A\left(s^2+4\right)+(Bs+C)(s+3)$. *Haciendo* $s=-3$ *se obtiene inmediatamente que* $A=8$. *Puesto que el denominador no tiene más raíces reales, se igualan los coeficientes de* s^2 *y* $s: 6=A+B$ *y* $0=3B+C$. *Si en la primera ecuación se usa el valor de* A *se encuentra que* $B=-2$, *y con este valor aplicado a la segunda ecuación, se obtiene* $C=6$. *Por lo que,*

$$Y(s)=\frac{6s^2+50}{(s+3)\left(s^2+4\right)}=\frac{8}{s+3}+\frac{-2s+6}{s^2+4}.$$

Aún no se termina porque la última expresión racional se tiene que escribir como dos fracciones.

$$y(t)=8\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right](t)-2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right](t)+3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right](t).$$

Es necesario entonces conocer la inversa de la transformada de Laplace (Se deduce que la solución del problema con valores iniciales es $y(t)=8e^{-3t}-2\cos 2t+3\operatorname{sen} 2t$.*)*

Ejemplo 4.11 *Un cohete despega con velocidad inicial* v_0 *desde la Tierra en forma vertical. Luego de algunos segundos, se activan los motores de emergencia, por lo que adquiere una aceleración* $a>0$ *durante un intervalo de tiempo breve. Si la gravedad de la Tierra es* g, *encuentre la ecuación de movimiento del cohete suponiendo que tiene masa* m *y* (t_1,t_2) *es el intervalo en el que funcionan los motores de emergencia, con* $t_2>t_1$.

De la sumatoria de fuerzas obtenemos

$$m\frac{d^2}{dy^2}y(t)=-mg+ma\left(P_{t_1t_2}(t)\right)$$

donde $y(t)$ *es la posición del cohete con respecto a la Tierra. Las condiciones iniciales del cohete son* $y(0)=0$ *y* $y'(0)=v_0$. *Eliminando* m *a ambos lados y aplicando* $\mathcal{L}$ *se obtiene la ecuación*

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right](s)=a\mathcal{L}\left[P_{t_1t_2}(t)\right](s)-g\mathcal{L}[1](s)$$

recordando las expresiones para $\mathcal{L}\left[y''(t)\right](s), \mathcal{L}\left[P_{t_1 t_2}(t)\right](s)$ *y* $\mathcal{L}[1](s)$, *la expresión queda*

$$s^2\mathcal{L}[y](s) - sy\left(0^+\right) - y'\left(0^+\right) = \frac{a}{s}\left(e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s}\right) - \frac{g}{s}$$

Pero $y\left(0^+\right) = 0$ *y* $y'\left(0^+\right) = v_0$. *Luego*

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{v_0}{s^2} + \frac{a}{s^3}e^{-t_1 s} - \frac{a}{s^3}e^{-t_2 s} - \frac{g}{s^3}$$

En breve veremos cómo recuperar una función a partir de su transformada. Continuaremos este cálculo mas tarde.

4.2.3 Traslaciones

Una traslación en el dominio de Laplace corresponde a un factor exponencial en el dominio temporal.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s-a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t)dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st}e^{a} f(t)dt \\ &= \mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right](s).\end{aligned}$$

Teorema 4.4 (Primer teorema de traslación) *Si* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ *y* a *es cualquier número real, entonces*

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a).$$

Ejercicio 4.6 *Evalúe* $\mathcal{L}[e^{3t}t^3]$ *y* $\mathcal{L}[e^{-2t}\cos(4t)]$.

Forma inversa del teorema: Para calcular la inversa de $F(s-a)$, se debe reconocer $F(s)$, para encontrar $f(t)$ obteniendo la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ y después multiplicar $f(t)$ por la función exponencial e^{at}.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t),$$

donde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Ejercicio 4.7 *Evalúe*

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\}$.

Traslación en el eje t.

Definición 4.4 **(Función escalón unitario)** *La función escalón unitario $\mathcal{U}(t-a)$ se define como*

$$\mathcal{U}(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t\ge a\end{cases}$$

Observe que se define $\mathcal{U}(t-a)$ sólo en el eje t no negativo, puesto que esto es todo lo que interesa en el estudio de la transformada de Laplace. En un sentido más amplio, $\mathcal{U}(t-a)=0$ para $t<a$.

Cuando una función f definida para $t\ge 0$ se multiplica por $\mathcal{U}(t-a)$, la función escalón unitario "desactiva" una parte de la gráfica de esa función.

Ejemplo 4.12 *Considere la función $f(t)=2t-3$. Para "desactivar" la parte de la gráfica de f para $0\le t<1$, simplemente formamos el producto $(2t-3)\mathcal{U}(t-1)$. En general, la gráfica de $f(t)\mathcal{U}(t-a)$ es 0 (desactivada) para $0\le t<a$ y es la parte de la gráfica de f (activada) para $t\ge a$.*

La función escalón unitario también se puede usar para escribir funciones definidas por tramos en una forma compacta. Por ejemplo, si consideramos $0\le t<2$, $2\le t<3$, y $t\ge 3$ y los valores correspondientes de $\mathcal{U}(t-2)$ y $\mathcal{U}(t-3)$, debe ser evidente que la función definida por tramos que se muestra en la siguiente figura

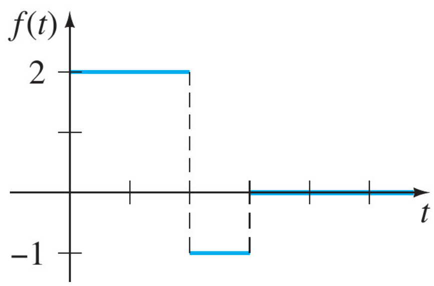


Figura 4.5: La función $f(t)=2-3\mathcal{U}(t-2)+\mathcal{U}(t-3)$.

es igual que $f(t)=2-3\mathcal{U}(t-2)+\mathcal{U}(t-3)$. También, una función general definida por tramos del tipo

$$f(t)=\begin{cases}g(t), & 0\le t<a\\ h(t), & t\ge a\end{cases}$$

es la misma que

$$f(t)=g(t)-g(t)\mathcal{U}(t-a)+h(t)\mathcal{U}(t-a).$$

Análogamente, una función del tipo

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ g(t), & a\le t<b\\ 0, & t\ge b\end{cases}$$

puede ser escrita como

$$f(t)=g(t)[\mathcal{U}(t-a)-\mathcal{U}(t-b)].$$

Ejemplo 4.13 *Exprese* $f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}$ *en términos de funciones escalón unitario. Trace la gráfica.*

Resp. $f(t) = 20t - 20t\mathcal{U}(t-5)$.

Considere una función general $y = f(t)$ definida para $t \ge 0$. La función definida por tramos

$$f(t-a)\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ f(t-a), & t \ge a \end{cases}$$

juega un papel importante en la explicación que sigue. Vimos que un múltiplo exponencial de $f(t)$ da como resultado una traslación de la transformada $F(s)$ en el eje s. Como una consecuencia del siguiente teorema, se ve que siempre que $F(s)$ se multiplica por una función exponencial $e^{-as}, a > 0$, la transformada inversa del producto $e^{-as}F(s)$ es la función f desplazada a lo largo del eje t.

Teorema 4.5 (Segundo teorema de traslación) *Si* $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ *y* $a > 0$, *entonces*

$$\mathcal{L}[f(t-a)\mathcal{U}(t-a)] = e^{-as}F(s).$$

Ejercicio 4.8 *Demuestre el Teorema 4.5.*

Con frecuencia se desea encontrar la transformada de Laplace de sólo una función escalón unitario. Si se identifica $f(t) = 1$ en el teorema 4.5, entonces $f(t-a) = 1, F(s) = \mathcal{L}[1] = 1/s$ y por tanto,

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Ejercicio 4.9 *Encuentre la transformada de Laplace de la función* $f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3)$.

Forma inversa del Teorema Si $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, la forma inversa del teorema, $a > 0$, es

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right] = f(t-a)\mathcal{U}(t-a).$$

Ejemplo 4.14 *Evalúe*

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\}$.

Sol: *a) De acuerdo con las identidades* $a = 2, F(s) = 1/(s-4)$ *y* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{4t}$, *se tiene que*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\} = e^{4(t-2)}\mathcal{U}(t-2).$$

b) Con $a=\pi/2, F(s)=s/\left(s^2+9\right)$ *y* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\cos 3t$, *se obtiene*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\}=\cos 3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

La última expresión se puede simplificar un poco con la fórmula adicional para el coseno. Compruebe que el resultado es igual a $-\operatorname{sen} 3t\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$.

Teorema 4.6 (Forma alternativa del segundo teorema de traslación) *Si* $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ *y* $a>0$, *entonces*

$$\mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t-a)]=e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)].$$

Ejercicio 4.10 *Calcule* $\mathcal{L}[\cos(t)\mathcal{U}(t-\pi)]$.

Ejemplo 4.15 *Resuelva* $y'+y=f(t), y(0)=5$, *donde* $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leq t<\pi\\ 3\cos t, & t\geq\pi\end{cases}$

Sol: *La función* f *se puede escribir como* $f(t)=3\cos t\mathcal{U}(t-\pi)$, *y entonces por linealidad, y por teorema de descomposición en fracciones parciales, se tiene*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{y'\right\}+\mathcal{L}\{y\}&=3\mathcal{L}\{\cos t\mathcal{U}(t-\pi)\}\\ sY(s)-y(0)+Y(s)&=-3\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\\ (s+1)Y(s)&=5-\frac{3s}{s^2+1}e^{-\pi s}\\ Y(s)&=\frac{5}{s+1}-\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{s+1}e^{-\pi s}+\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}+\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right].\end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}e^{-\pi s}\right\}=e^{-(t-\pi)}\mathcal{U}(t-\pi),\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\}=\operatorname{sen}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi),$$
$$y\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\}=\cos(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi).$$

Por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}y(t)&=5e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}\mathcal{U}(t-\pi)-\frac{3}{2}\operatorname{sen}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)-\frac{3}{2}\cos(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)\\ &=5e^{-t}+\frac{3}{2}\left[e^{-(t-\pi)}+\operatorname{sen} t+\cos t\right]\mathcal{U}(t-\pi)\quad\leftarrow\ \textit{identidades trigonométricas}\\ &=\begin{cases}5e^{-t}, & 0\leq t<\pi\\ 5e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}+\frac{3}{2}\operatorname{sen} t+\frac{3}{2}\cos t, & t\geq\pi\end{cases}\end{aligned}$$

Ejercicio 4.11 *La ecuación diferencial para la carga instantánea* $q(t)$ *en el capacitor en un circuito* RCL *en serie está dada por*

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t).$$

Use la transformada de Laplace para encontrar $q(t)$ *cuando* $L = 1$ h, $R = 20\Omega$, $\mathrm{C} = 0.005\mathrm{f}$, $E(t) = 150$ V, $t > 0$, $q(0) = 0$ *e* $i(0) = 0$. *¿Cuál es la corriente* $i(t)$ *?*

Ejercicio 4.12 *Traslación en el eje s.*

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^3}\right\}$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^4}\right\}$
3. $\mathcal{L}\left\{te^{10t}\right\}$
4. $\mathcal{L}\left\{te^{-6t}\right\}$
5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-6s+10}\right\}$
6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+2s+5}\right\}$
7. $\mathcal{L}\left\{t^3e^{-2t}\right\}$
8. $\mathcal{L}\left\{t^{10}e^{-7t}\right\}$
9. $\mathcal{L}\left\{t\left(e^t+e^{2t}\right)^2\right\}$
10. $\mathcal{L}\left\{e^{2t}(t-1)^2\right\}$
11. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right\}$
12. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}\right\}$
13. $\mathcal{L}\left\{e^t \operatorname{sen} 3t\right\}$
14. $\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cos 4t\right\}$
15. $\mathcal{L}\left\{\left(1-e^t+3e^{-4t}\right)\cos 5t\right\}$
16. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^2}\right\}$
17. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s}{(s-2)^2}\right\}$
18. $\mathcal{L}\left\{e^{3t}\left(9-4t+10\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}\right)\right\}$
19. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\}$

20. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\}$

Ejercicio 4.13 *Traslación en el eje t.*

1. $\mathcal{L}\{(t-1)\mathcal{U}(t-1)\}$
2. $\mathcal{L}\left\{e^{2-t}\mathcal{U}(t-2)\right\}$
3. $\mathcal{L}\{t\mathcal{U}(t-2)\}$
4. $\mathcal{L}\{(3t+1)\mathcal{U}(t-1)\}$
5. $\mathcal{L}\{\cos 2t\mathcal{U}(t-\pi)\}$
6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$
7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\left(1+e^{-2s}\right)^2}{s+2}\right\}$
8. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$
9. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4}\right\}$
10. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$
11. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}\right\}$

4.2.4 Derivadas de transformadas

La transformada de Laplace del producto de una función $f(t)$ con t se puede encontrar derivando la transformada de Laplace de $f(t)$. Para motivar este resultado, se supone que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe y que es posible intercambiar el orden de la derivada y de la integral. Entonces

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st}f(t)\right]dt = -\int_0^{+\infty} e^{-st}tf(t)dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\};$$

es decir

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Se puede usar el último resultado para encontrar la transformada de Laplace de $t^2 f(t)$:

$$\mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\} = \mathcal{L}\{t\cdot tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Teorema 4.7 *Derivadas de transformadas Si* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *y* $n = 1, 2, 3, \ldots,$ *entonces*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Ejercicio 4.14 *Calcule* $\mathcal{L}[t\,\mathrm{sen}(kt)](s)$ *y* $\mathcal{L}[t\cos(kt)](s)$.

Ejemplo 4.16 *Resuelva* $x'' + 16x = \cos 4t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

Sol: *El problema con valores iniciales podría describir el movimiento forzado, no amortiguado y en resonancia de una masa en un resorte. La masa comienza con una velocidad inicial de 1 pie/s en dirección hacia abajo desde la posición de equilibrio. Transformando la ecuación diferencial, se obtiene*

$$\left(s^2 + 16\right) X(s) = 1 + \frac{s}{s^2 + 16} \qquad o \qquad X(s) = \frac{1}{s^2 + 16} + \frac{s}{\left(s^2 + 16\right)^2}.$$

Aplicando transformada inversa se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2 + 16}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{\left(s^2 + 16\right)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,4t + \frac{1}{8}t\,\mathrm{sen}\,4t \end{aligned}$$

4.2.5 Transformada de integrales

Convolución: Si las funciones f y g son continuas por tramos en $[0, +\infty)$, entonces un producto especial, denotado por $f * g$, se define mediante la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

y se llama convolución de f y g. La convolución de $f * g$ es una función de t.

Ejemplo 4.17

$$e^t * \mathrm{sen}\, t = \int_0^t e^\tau \,\mathrm{sen}(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{sen}\, t - \cos t + e^t\right).$$

Ejercicio 4.15 *Demuestre que*

$$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

es decir, $f * g = g * f$. *Esto significa que la convolución de dos funciones es conmutativa.*

Teorema 4.8 (Teorema de convolución) *Si* $f(t)$ *y* $g(t)$ *son funciones continuas por tramos en* $[0, +\infty)$ *y de orden exponencial, entonces*

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

Dem: *Sea* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau$ *y*

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s\beta} g(\beta) d\beta.$$

Procediendo formalmente, tenemos

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-s\beta} g(\beta) d\beta\right) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau) g(\beta) d\tau d\beta \\ &= \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+\beta)} g(\beta) d\beta. \end{aligned}$$

Conservando τ *fija, hacemos* $t = \tau + \beta, dt = d\beta$*, por lo que*

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-st} g(t-\tau) dt.$$

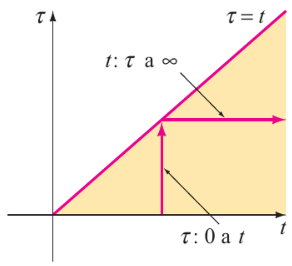


Figura 4.6: Cambio del orden de integración de primero t a primero τ.

En el plano $t\tau$ *se realiza la integración en la región sombreada. Puesto que* f *y* g *son continuas por tramos en* $[0, +\infty)$ *y de orden exponencial, es posible intercambiar el orden de integración:*

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau\right\} dt = \mathcal{L}\{f * g\}$$

Ejercicio 4.16 *Aplique el teorema anterior para calcular* $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t e^{\tau} \operatorname{sen}(t-\tau) d\tau\right\}$.

Nota: El teorema de convolución en ocasiones es útil para encontrar la transformada de Laplace inversa del producto de dos transformadas de Laplace.

Ejemplo 4.18 *Evalúe* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\}$.

Sol: *Sea* $F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2+k^2}$ *por lo que*

$$f(t) = g(t) = \frac{1}{k}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \frac{1}{k} \operatorname{sen} kt.$$

En este caso

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{k^2}\int_0^t \operatorname{sen} k\tau \operatorname{sen} k(t-\tau)d\tau.$$

Con la ayuda de la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

y las sustituciones $A = k\tau$ *y* $B = k(t-\tau)$ *se puede realizar la integración en (6):*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} &= \frac{1}{2k^2}\int_0^t [\cos k(2\tau - t) - \cos kt]d\tau \\ &= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{2k}\operatorname{sen} k(2\tau - t) - \tau\cos kt\right]_0^t \\ &= \frac{\operatorname{sen} kt - kt\cos kt}{2k^3}.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $2k^3$*, se obtiene la forma inversa.*

4.2.6 Transformada de una integral

Cuando $g(t) = 1$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = 1/s$, el teorema de convolución implica que la transformada de Laplace de la integral de f es

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

La forma inversa,

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\},$$

se puede usar en lugar de las fracciones parciales cuando s^n es un factor del denominador y $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ es fácil de integrar. Por ejemplo, se sabe para $f(t) = \operatorname{sen} t$ que $F(s) = 1/(s^2+1)$ y por tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/(s^2+1)}{s}\right\} = \int_0^t \operatorname{sen}\tau d\tau = 1 - \cos t \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/s(s^2+1)}{s}\right\} = \int_0^t (1-\cos\tau)d\tau = t - \operatorname{sen} t \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/s^2(s^2+1)}{s}\right\} = \int_0^t (\tau - \operatorname{sen}\tau)d\tau = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t\end{aligned}$$

etcétera.

Ejemplo 4.19 *Resuelva* $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}d\tau$ *para* $f(t)$

Sol: *En la integral se identifica* $h(t-\tau) = e^{t-\tau}$ *por lo que* $h(t) = e^t$*. Se toma la transformada de Laplace de cada término; en particular, por el teorema anterior la transformada de Laplace es el producto de*

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *y* $\mathcal{L}\left\{e^t\right\} = 1/(s-1)$.

$$F(s) = 3 \cdot \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+1} - F(s) \cdot \frac{1}{s-1}.$$

Después de resolver la última ecuación para $F(s)$ *y realizar la descomposición en fracciones parciales, se encuentra*

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}.$$

La transformada inversa entonces da

$$\begin{aligned} f(t) &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}. \end{aligned}$$

Teorema 4.9 (Transformada de una función periódica) *Si* $f(t)$ *es continua por tramos en* $[0,\infty)$*, de orden exponencial y periódica con periodo* T*, entonces*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Dem: *Escriba la transformada de Laplace de* f *como dos integrales:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

Cuando se hace $t = u + T$*, la última integral se convierte en*

$$\int_T^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(u+T)} f(u+T)du = e^{-sT} \int_0^{+\infty} e^{-su} f(u)du = e^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Resolviendo la ecuación de la última línea para $\mathcal{L}\{f(t)\}$ *se demuestra el teorema.*

Ejemplo 4.20 *Encuentre la transformada de Laplace de la función periódica onda cuadrada con periodo* $T = 2$ $E(t)$.

Sol:*En el intervalo* $0 \le t < 2, E(t)$ *se puede definir por*

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

y fuera del intervalo por $E(t+2) = E(t)$*. Por teorema anterior*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{E(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} E(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} \cdot 1dt + \int_1^2 e^{-st} \cdot 0dt\right] \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \frac{1-e^{-s}}{s} \leftarrow 1 - e^{-2s} = \left(1+e^{-s}\right)\left(1-e^{-s}\right) \\ &= \frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)}. \end{aligned}$$

4.2.7 Delta de Dirac

Impulso unitario Los sistemas mecánicos suelen ser afectados por una fuerza externa (o fuerza electromotriz en un circuito eléctrico) de gran magnitud que actúa sólo por un periodo muy corto. Por ejemplo, podría caer un rayo en el ala vibrante de un avión, un martillo de bola podría golpear con precisión una masa en un resorte. La gráfica de la función definida por partes

$$\delta_a\left(t-t_0\right)=\begin{cases} 0, & 0\leq t<t_0-a \\ \frac{1}{2a}, & t_0-a\leq t<t_0+a \\ 0, & t\geq t_0+a, \end{cases}$$

$a>0, t_0>0$, podría servir como modelo para tal fuerza. Para un valor pequeño de $a, \delta_a\left(t-t_0\right)$ es en esencia una función constante de gran magnitud que está "activada" sólo durante un periodo muy corto, alrededor de t_0. La función $\delta_a\left(t-t_0\right)$ se llama *impulso unitario* porque tiene la propiedad de integración $\int_0^{+\infty}\delta_a\left(t-t_0\right)dt=1$.

La delta de Dirac En la práctica es conveniente trabajar con otro tipo de impulso unitario, una "función" que aproxima a $\delta_a\left(t-t_0\right)$ y se define por el límite

$$\delta\left(t-t_0\right)=\lim_{a\to 0}\delta_a\left(t-t_0\right).$$

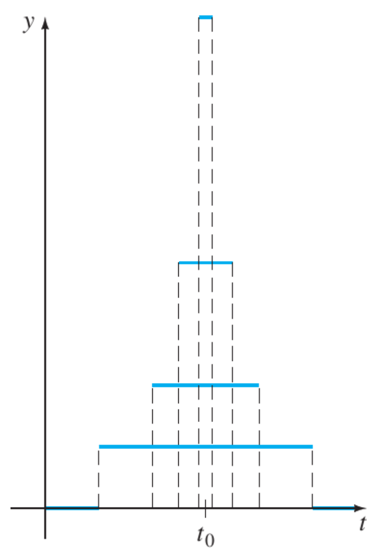


Figura 4.7: Comportamiento de δ_a conforme $a\to 0$.

La última expresión, que no es una función en absoluto, se puede caracterizar por las dos propiedades

i) $\delta\left(t-t_0\right)=\begin{cases} \infty, & t=t_0 \\ 0, & t\neq t_0 \end{cases}$ y ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\delta\left(t-t_0\right)dt=1.$

El impulso unitario $\delta\left(t-t_0\right)$ se llama *función delta de Dirac*. Es posible obtener la transformada de Laplace de la función delta de Dirac con la suposición formal de que $\mathcal{L}\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\}=\lim_{a\to 0}\mathcal{L}\left\{\delta_a\left(t-t_0\right)\right\}$.

Teorema 4.10 (Transformada de la función delta de Dirac) *Para* $t_0 > 0$,

$$\mathcal{L}\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\} = e^{-st_0}.$$

Dem: *Para empezar se puede escribir* $\delta_a\left(t-t_0\right)$ *en términos de la función escalón unitario*

$$\delta_a\left(t-t_0\right) = \frac{1}{2a}\left[\mathcal{U}\left(t-\left(t_0-a\right)\right) - \mathcal{U}\left(t-\left(t_0+a\right)\right)\right].$$

Por linealidad, la transformada de Laplace de esta última expresión es

$$\mathcal{L}\left\{\delta_a\left(t-t_0\right)\right\} = \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{-s(t_0-a)}}{s} - \frac{e^{-s(t_0+a)}}{s}\right] = e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right).$$

Luego, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\mathcal{L}\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\} = \lim_{a\to 0}\mathcal{L}\left\{\delta_a\left(t-t_0\right)\right\} = e^{-st_0}\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right) = e^{-st_0}.$$

Ahora cuando $t_0 = 0$, *se puede concluir que*

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

El último resultado enfatiza el hecho de que $\delta(t)$ *no es el tipo usual de función que se ha estado considerando, puesto que se espera que* $\mathcal{L}\{f(t)\} \to 0$ *conforme* $s \to +\infty$.

Ejercicio 4.17 *Resuelva los siguientes PVI* $y'' + y = 4\delta(t-2\pi)$ *sujeta a*

a) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

b) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

CAPÍTULO 5

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Cuando se especifican las condiciones iniciales, la transformada de Laplace de cada ecuación en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes reduce el sistema de ED a un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas en las funciones transformadas.

Resortes acoplados

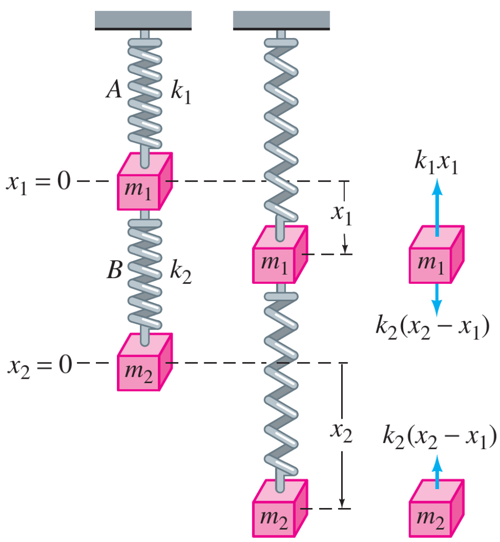


Figura 5.1: Resortes acoplados.

El modelo que describe el movimiento del sistema acoplado se representa por el sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden

$$
\begin{aligned}
m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\
m_2 x_2'' &= -k_2 (x_2 - x_1) .
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.1 *Resuelva el sistema de resortes acoplados considerando $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y que las masas comienzan desde sus posiciones de equilibrio con velocidades unitarias opuestas.*

Redes El modelo que describe las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ de la red que se muestra en la figura con un inductor, un resistor y un capacitor, estaban gobernadas por el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 &= E(t) \\ RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0. \end{aligned}$$

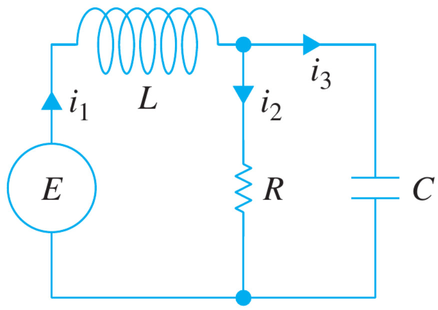


Figura 5.2: Red electrica.

Ejercicio 5.1 *Resuelva el sistema anterior bajo las condiciones* $E(t) = 60$ V, $L = 1$ h, $R = 50\Omega$, $C = 10^{-4}$f *y al inicio las corrientes* i_1 *e* i_2 *son cero.*

5.1 Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

En este capítulo estudiaremos sistemas de ED de primer orden, casos particulares de sistemas que tienen la forma normal

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \end{aligned}$$

Un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden se llama *sistema de primer orden*. Cuando cada una de las funciones $g_1, g_2, \ldots, g_n$ es lineal en las variables dependientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se obtiene la forma normal de un sistema de ecuaciones lineales de primer orden.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned}$$

Se supone que los coeficientes a_{ij} así como las funciones f_i son continuas en un intervalo común I. Cuando $f_i(t) = 0, i = 1, 2, \ldots, n$, se dice que el sistema lineal es homogéneo; de otro modo es no homogéneo.

Forma matricial. Si $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, y $\mathbf{F}(t)$ denotan las matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

respectivamente, entonces el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se puede escribir como

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}.$$

Si el sistema es homogéneo, su forma matricial es entonces

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}.$$

Definición 5.1 (Vector solución) *Un vector solución en un intervalo I es cualquier matriz columna*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son funciones derivables que satisfacen el sistema en el intervalo I.

Un vector solución del sistema es, por supuesto, equivalente a n funciones escalares $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ y se puede interpretar desde el punto de vista geométrico como un conjunto de ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio. En el caso importante $n = 2$, las ecuaciones $x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t)$ representan una curva en el plano x_1x_2. Es práctica común llamar *trayectoria* a una curva en el plano y llamar *plano fase* al plano x_1x_2.

Ejemplo 5.2 *Compruebe que en el intervalo $(-\infty, \infty)$*

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

son soluciones de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} \tag{5.1.1}$$

Sol: *De* $\mathbf{X}_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$ *y* $\mathbf{X}_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$ *vemos que*

$$\mathbf{AX}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_1',$$

$$\mathbf{AX}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_2'.$$

Problema con valores iniciales. Sea t_0 que denota un punto en un intervalo I y

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

donde las $\gamma_i, i = 1, 2, \ldots, n$ son las constantes dadas. Entonces el problema

Resolver: $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$

Sujeto a: $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$

es un problema con valores iniciales en el intervalo.

Teorema 5.1 (Existencia y unicidad de solución) *Sean los elementos de las matrices $\boldsymbol{A}(t)$ y $\boldsymbol{F}(t)$ funciones continuas en un intervalo común I que contiene al punto t_0. Entonces existe una solución única del problema con valores iniciales en el intervalo.*

En las siguientes definiciones y teoremas se consideran sólo sistemas homogéneos. Sin afirmarlo, siempre se supondrá que las a_{ij} y las f_i son funciones continuas de t en algún intervalo común I.

Teorema 5.2 (Principio de superposición de solución) *Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo en un intervalo I. Entonces la combinación lineal*

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_k\mathbf{X}_k$$

donde las $c_i, i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, es también una solución en el intervalo.

Ejemplo 5.3 *Compruebe que los dos vectores*

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Y por el principio de superposición la combinación lineal

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

es otra solución del sistema.

Definición 5.2 **(Dependencia/independencia lineal)** *Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo en un intervalo I. Se dice que el conjunto es linealmente dependiente en el intervalo si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$, no todas cero, tales que*

$$c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_k\mathbf{X}_k = \mathbf{0}$$

para toda t en el intervalo. Si el conjunto de vectores no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente.

Teorema 5.3 (Criterio para las soluciones linealmente independientes)

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

n vectores solución del sistema homogéneo en un intervalo I. Entonces el conjunto de vectores solución es linealmente independiente en I si y sólo si el Wronskiano

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

para toda t en el intervalo.

Se puede demostrar que si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ son vectores solución del sistema homogéneo, entonces para toda t en I ya sea $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) \neq 0$ o $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) = 0$. Por tanto, si se puede demostrar que $W \neq 0$ para alguna t_0 en I, entonces W $\neq 0$ para toda t y, por tanto, las soluciones son linealmente independientes en el intervalo.

Ejemplo 5.4 *En el ejemplo anterior vimos que* $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ *y* $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ *son soluciones del sistema* (5.1.1). *Es evidente que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente independientes en el intervalo* $(-\infty, \infty)$ *puesto que ningún vector es un múltiplo constante del otro. Además, se tiene*

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{vmatrix} = 8e^{4t} \neq 0$$

para todos los valores reales de t.

Definición 5.3 (Conjunto fundamental de soluciones) *Cualquier conjunto* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ *de* n *vectores solución linealmente independientes del sistema homogéneo en un intervalo* I *se dice que es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo.*

Teorema 5.4 (Existencia de un conjunto fundamental) *Existe un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo en un intervalo* I*.*

Teorema 5.5 (Solución general, sistemas homogéneos) *Sea* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ *un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo en un intervalo* I*. Entonces la solución general del sistema en el intervalo es*

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n,$$

donde las $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$ *son constantes arbitrarias.*

Ejemplo 5.5 *Los vectores*

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Además,

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t & e^t & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t & 0 & -\operatorname{sen} t + \cos t \end{vmatrix} = e^t \neq 0$$

para todos los valores reales de t*. Se concluye que* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ *y* $\mathbf{X}_3$ *forman un conjunto fundamental de soluciones en* $(-\infty, \infty)$*. Por lo que la solución general del sistema en el intervalo es la combinación lineal* $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$*; es decir,*

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.6 (Solución general: sistemas no homogéneos) *Sea* $\mathbf{X}_p$ *una solución dada del sistema no homogéneo en un intervalo* I *y sea*

$$\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n$$

que denota la solución general en el mismo intervalo del sistema homogéneo asociado. Entonces la solución general del sistema no homogéneo en el intervalo es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$$

La solución general $\mathbf{X}_c$ *del sistema homogéneo asociado se llama* función complementaria *del sistema no homogéneo.*

5.2 Sistemas lineales homogéneos

Vimos en el ejemplo anterior que la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Ya que los vectores solución $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ tienen la forma

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2,$$

donde $k_1, k_2, \lambda_1 \text{y} \lambda_2$ son constantes, nos inquieta preguntar si siempre es posible hallar una solución de la forma

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{K} e^{\lambda t} \tag{5.2.1}$$

para la solución del sistema lineal homogéneo general de primer orden

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$ de constantes.

Eigenvalores y eigenvectores: Si (5.2.1) es un vector solución del sistema homogéneo lineal, entonces $\mathbf{X}' = \mathbf{K}\lambda e^{\lambda t}$, por lo que el sistema se convierte en $\mathbf{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{AK}e^{\lambda t}$. Después de dividir entre $e^{\lambda t}$ y reacomodando, obtenemos $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$ o $\mathbf{AK} - \lambda\mathbf{K} = \mathbf{0}$. Ya que $\mathbf{K} = \mathbf{IK}$, la última ecuación es igual a

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}. \tag{5.2.2}$$

La ecuación matricial es equivalente a las ecuaciones algebraicas simultáneas

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\, k_1 + \quad a_{12}k_2 + \cdots + \quad a_{1n}k_n &= 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)\, k_2 + \cdots + \quad a_{2n}k_n &= 0 \\ a_{n1}k_1 + \quad a_{n2}k_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)\, k_n &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que para encontrar soluciones $\mathbf{X}$ del sistema homogéneo, necesitamos primero encontrar una solución no trivial del sistema anterior; en otras palabras, debemos encontrar un vector no trivial $\mathbf{K}$ que satisfaga a (5.2.2). Pero para que (5.2.2) tenga soluciones que no sean la solución obvia $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, se debe tener

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Esta ecuación polinomial en λ se llama *ecuación característica* de la matriz A. Sus soluciones son los eigenvalores de $\mathbf{A}$. Una solución $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ de (5.2.2) correspondiente a un eigenvalor λ se llama eigenvector de $\mathbf{A}$. Entonces una solución del sistema homogéneo es $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$.

En el siguiente análisis se examinan tres casos: eigenvalores reales y distintos (es decir, los eigenvalores no son iguales), eigenvalores repetidos y, por último, eigenvalores complejos.

Teorema 5.7 *Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n eigenvalores reales y distintos de la matriz de coeficientes* $\mathbf{A}$ *del sistema homogéneo y sean* $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ *los eigenvectores correspondientes. Entonces la solución general del sistema homogéneo en el intervalo $(-\infty, \infty)$ está dada por*

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}.$$

Ejercicio 5.2 *Resuelva*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Ejercicio 5.3 *Resuelva*

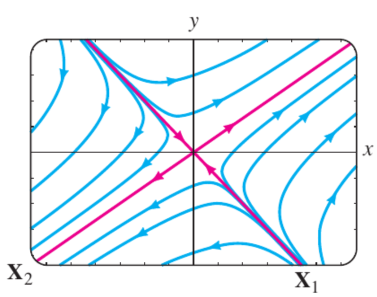
$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= \quad -4x + y + z \\ \tfrac{dy}{dt} &= \quad x + 5y - z \\ \tfrac{dz}{dt} &= \quad y - 3z. \end{aligned}$$

Diagrama de fase Si sumamos los vectores en el lado derecho del ejercicio resuelto, se obtiene la expresión

$$x = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t}, \quad y = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t}.$$

Se pueden interpretar estas ecuaciones como ecuaciones paramétricas de curvas en el plano xy o *plano fase*. Cada curva, que corresponde a elecciones específicas de c_1 y c_2, se llama *trayectoria*.

Al conjunto de trayectorias representativas en el plano fase, como se muestra en la figura se le



llama *diagrama fase* para un sistema lineal dado. Lo que parecen dos rectas rojas en la figura son en realidad cuatro semirrectas definidas paramétricamente en el primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes con las soluciones $\mathbf{X}_2, -\mathbf{X}_1, -\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_1$, respectivamente. Por ejemplo, las ecuaciones cartesianas $y = \frac{2}{3}x$, $x > 0$ y $y = -x$, $x > 0$, de las semirrectas en el primer y cuarto cuadrantes se obtuvieron eliminando el parámetro t en las soluciones $x = 3e^{4t}$, $y = 2e^{4t}$ y $x = e^{-t}$, $y = -e^{-t}$, respectivamente. Además, cada eigenvector se puede visualizar como un vector bidimensional que se encuentra a lo largo de una de estas semirrectas. El eigenvector $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ se encuentra junto con $y = \frac{2}{3}x$ en el primer cuadrante y $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ se encuentra junto con $y = -x$ en el cuarto cuadrante. Cada vector comienza en el origen; $\mathbf{K}_2$ termina en el punto $(2, 3)$ y $\mathbf{K}_1$ termina en $(1, -1)$.

El origen no es sólo una solución constante $x = 0, y = 0$ de todo sistema lineal homogéneo $2\times 2, \mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, sino también es un punto importante en el estudio cualitativo de dichos sistemas. Si pensamos en términos físicos, las puntas de flecha de cada trayectoria en la figura indican la dirección con que una partícula en el tiempo t se mueve conforme aumenta el tiempo. Si imaginamos que el tiempo va de $-\infty$ a ∞, entonces examinando la solución $x = c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t}$, $y = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t}$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ muestra que una trayectoria o partícula en movimiento "comienza" asintótica a una de las semirrectas definidas por $\mathbf{X}_1$ o $-\mathbf{X}_1$ (ya que e^{4t} es despreciable para $t \to -\infty$) y "termina" asintótica a una de las semirrectas definidas por $\mathbf{X}_2$ y $-\mathbf{X}_2$ (ya que e^{-t} es despreciable para $t \to \infty$).

Observe que la figura representa un diagrama de fase que es característico de todos los sistemas lineales homogéneos 2×2 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ con eigenvalores reales de signos opuestos. Además, los diagramas de fase en los dos casos cuando los eigenvalores reales y distintos tienen el mismo signo son característicos de esos sistemas 2×2; la única diferencia es que las puntas de flecha indican que una partícula se aleja del origen en cualquier trayectoria cuando λ_1 y λ_2 son positivas y se mueve hacia el origen en cualquier trayectoria mientras $t \to \infty$ cuando λ_1 y λ_2 son negativas. Por lo que al origen se le llama *repulsor* en el caso $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y *atractor* en el caso $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. El origen en la figura no es repulsor ni atractor. La investigación del caso restante cuando $\lambda = 0$ es un eigenvalor de un sistema lineal homogéneo de 2×2 se deja como ejercicio.

Eigenvalores repetidos: No todos los n eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ deben ser distintos, es decir, algunos de los eigenvalores podrían ser repetidos. Por ejemplo, la ecuación característica de la matriz de coeficientes en el sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

se demuestra fácilmente que es $(\lambda + 3)^2 = 0$, y por tanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ es una raíz de multiplicidad dos. Para este valor se encuentra el único eigenvector

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

es una solución del problema. Pero como es obvio que tenemos interés en formar la solución general del sistema, se necesita continuar con la pregunta de encontrar una segunda solución.

En general, si m es un entero positivo y $(\lambda - \lambda_1)^m$ es un factor de la ecuación característica, mientras que $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ no es un factor, entonces se dice que λ_1 es un eigenvalor de multiplicidad $\boldsymbol{m}$.

i) Para algunas matrices $\mathbf{A}$ de $n \times n$ sería posible encontrar m eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_m$, correspondientes a un eigenvalor λ_1, de multiplicidad $m \leq n$. En este caso la solución general del sistema contiene la combinación lineal

$$c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_m\mathbf{K}_me^{\lambda_1 t}.$$

ii) Si sólo hay un eigenvector propio que corresponde al eingenvalor λ_1 de multiplicidad m, entonces siempre se pueden encontrar m soluciones linealmente independientes de la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= \mathbf{K}_{11}e^{\lambda_1 t}\\
\mathbf{X}_2 &= \mathbf{K}_{21}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{K}_{22}e^{\lambda_1 t}\\
&\vdots\\
\mathbf{X}_m &= \mathbf{K}_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{K}_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + \cdots + \mathbf{K}_{mm}e^{\lambda_1 t},
\end{aligned}$$

donde las $\mathbf{K}_{ij}$ son vectores columna.

Ejemplo 5.6 *Eigenvalores repetidos*

Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\mathbf{X}$

Sol: *Desarrollando el determinante en la ecuación característica*

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 2 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

se obtiene $-(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$. *Se ve que* $\lambda_1=\lambda_2=-1$ *y* $\lambda_3=5$. *Para* $\lambda_1=-1$, *con la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene de inmediato*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I}\mid\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 2 & 0\\ -2 & 2 & -2 & 0\\ 2 & -2 & 2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[\text{entre renglones}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

El primer renglón de la última matriz indica que $k_1-k_2+k_3=0$ *o* $k_1=k_2-k_3$. *Las elecciones* $k_2=1, k_3=0$ *y* $k_2=1, k_3=1$ *producen, a su vez,* $k_1=1$ *y* $k_1=0$. *Por lo que dos eigenvectores correspondientes a* $\lambda_1=-1$ *son*

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Puesto que ningún eigenvector es un múltiplo constante del otro, se han encontrado dos soluciones linealmente independientes,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{-t} \quad y \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-t},$$

que corresponden al mismo eigenvalor. Por último, para $\lambda_3=5$ *la reducción*

$$(\mathbf{A}+5\mathbf{I}\mid\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -2 & 2 & 0\\ -2 & -4 & -2 & 0\\ 2 & -2 & -4 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[\text{entre renglones}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

implica que $k_1 = k_3$ y $k_2 = -k_3$. Al seleccionar $k_3 = 1$, se obtiene $k_1 = 1, k_2 = -1$; por lo que el tercer eigenvector es

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Concluimos que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Obs: Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es simétrica si su transpuesta $\mathbf{A}^T$ es igual que $\mathbf{A}$, es decir, si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Se puede demostrar que si la matriz $\mathbf{A}$ del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ es simétrica y tiene elementos reales, entonces siempre es posible encontrar n eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$, y la solución general de ese sistema es como se muestra en el teorema 5.7. Como se muestra en el ejemplo, este resultado se cumple aun cuando estén repetidos algunos de los eigenvalores.

Segunda solución: Suponga que λ_1 es un valor propio de multiplicidad dos y que sólo hay un eigenvector asociado con este valor. Se puede encontrar una segunda solución de la forma

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{K} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P} e^{\lambda_1 t}$$

donde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Para ver esto sustituya en el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ y simplifique:

$$(\mathbf{AK} - \lambda_1 \mathbf{K})\, t e^{\lambda_1 t} + (\mathbf{AP} - \lambda_1 \mathbf{P} - \mathbf{K})\, e^{\lambda_1 t} = \mathbf{0}.$$

Puesto que la última ecuación es válida para todos los valores de t, debemos tener

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\, \mathbf{K} = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\, \mathbf{P} = \mathbf{K}.$$

De estas ecuaciones se establece que $\mathbf{K}$ debe ser un vector característico de $\mathbf{A}$ asociado con λ_1. Al resolver, se encuentra una solución $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K} e^{\lambda_1 t}$. Para encontrar la segunda solución $\mathbf{X}_2$, sólo se necesita resolver el sistema adicional para obtener el vector $\mathbf{P}$.

Ejercicio 5.4 *Encuentre la solución de*

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Sol: $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right].$

Eigenvalor de multiplicidad tres: Cuando la matriz de coeficientes A tiene sólo un eigenvector asociado con un eigenvalor λ_1 de multiplicidad tres, podemos encontrar una segunda solución tal como antes y una tercera solución de la forma

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{K}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{Q}e^{\lambda_1 t},$$

donde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Al sustituir en el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, se encuentra que los vectores columna $\mathbf{K}, \mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ deben satisfacer

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\,\mathbf{K} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\,\mathbf{P} &= \mathbf{K} \\ (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\,\mathbf{Q} &= \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Por supuesto, las soluciones de la primera y la segunda igualdad se pueden usar para formar las soluciones $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$.

Ejemplo 5.7 *Eigenvalores repetidos*

Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

Sol: *La ecuación característica* $(\lambda - 2)^3 = 0$ *demuestra que* $\lambda_1 = 2$ *es un eigenvalor de multiplicidad tres. Al resolver* $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$, *se encuentra el único eigenvector*

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A continuación se resuelven primero el sistema $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}$ *y después el sistema* $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P}$ *y se encuentra que*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Así la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}\right] + c_3\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}e^{2t}\right].$$

5.2.1 Eigenvalores complejos

Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i, \beta > 0, i^2 = -1$ son eigenvalores complejos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, entonces se puede esperar de hecho que sus eigenvectores correspondientes también tengan entradas complejas. Por ejemplo, la ecuación característica del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 6x - y\\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 4y\end{aligned}$$

es $\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$. De la fórmula cuadrática se encuentra $\lambda_1 = 5 + 2i, \lambda_2 = 5 - 2i$. Ahora para $\lambda_1 = 5 + 2i$ se debe resolver

$$\begin{aligned}(1-2i)k_1 - \quad k_2 &= 0\\ 5k_1 - (1+2i)k_2 &= 0.\end{aligned}$$

Puesto que $k_2 = (1-2i)k_1$, la elección $k_1 = 1$ da el siguiente eigenvector y el vector solución correspondiente:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t}.$$

De manera similar, para $\lambda_2 = 5 - 2i$ encontramos

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}.$$

Podemos comprobar por medio del Wronskiano que estos vectores solución son linealmente independientes y por tanto la solución general es

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}.$$

Observe que las entradas en $\mathbf{K}_2$ correspondientes a λ_2 son los conjugados de las entradas en $\mathbf{K}_1$ correspondientes a λ_1. El conjugado de λ_1 es, por supuesto, λ_2. Esto se escribe como $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ y $\mathbf{K}_2 = \overline{\mathbf{K}}_1$.

Teorema 5.8 (Soluciones correspondientes a un eigenvalor complejo) *Sea A una matriz de coeficientes que tiene entradas reales del sistema homogéneo y sea $\mathbf{K}_1$ un eigenvector correspondiente al eigenvalor complejo $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \alpha$ y β reales. Entonces*

$$\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} \quad y \quad \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}$$

son soluciones del sistema.

Sea $\mathbf{K}_1$ un eigenvector característico de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ (con elementos reales) que corresponden al eigenvalor complejo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Entonces los vectores solución del teorema 5.8 se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} &= \mathbf{K}_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} = \mathbf{K}_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)\\ \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} &= \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t).\end{aligned}$$

Por el principio de superposición, los siguientes vectores también son soluciones:

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1\right) e^{\alpha t}\cos\beta t - \frac{i}{2}\left(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1\right) e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$
$$\mathbf{X}_2 = \frac{i}{2}\left(-\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}\right) = \frac{i}{2}\left(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1\right) e^{\alpha t}\cos\beta t + \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1\right) e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$

Tanto $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = a$ como $\frac{1}{2}i(-z+\bar{z}) = b$ son números reales para cualquier número complejo $z = a+ib$. Por tanto, los elementos de los vectores columna $\frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1\right)$ y $\frac{1}{2}i\left(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1\right)$ son números reales. Definir

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \frac{i}{2}\left(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1\right), \tag{5.2.4}$$

conduce al siguiente teorema.

Teorema 5.9 (Soluciones reales que corresponden a un eigenvalor complejo) *Sea $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ un eigenvalor complejo de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en el sistema homogéneo y sean $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ los vectores columna definidos en* (5.2.4)*. Entonces*

$$\mathbf{X}_1 = [\mathbf{B}_1\cos\beta t - \mathbf{B}_2\operatorname{sen}\beta t]\, e^{at}$$
$$\mathbf{X}_2 = [\mathbf{B}_2\cos\beta t + \mathbf{B}_1\operatorname{sen}\beta t]\, e^{at}$$

son soluciones linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$*.*

Ejemplo 5.8 *Resuelva el problema con valores iniciales*

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sol:*Primero se obtienen los eigenvalores a partir de*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0.$$

los eigenvalores son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -2i$. Para λ_1 el sistema

$$(2-2i)k_1 + 8k_2 = 0$$
$$-k_1 + (-2-2i)k_2 = 0$$

da $k_1 = -(2+2i)k_2$. Eligiendo $k_2 = -1$, se obtiene

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora de formamos

$$\mathbf{B}_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{B}_2 = \operatorname{Im}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\alpha = 0$, se tiene que la solución general del sistema es

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= c_1\left[\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cos 2t-\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right]+c_2\left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\cos 2t+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right]\\ &= c_1\begin{pmatrix}2\cos 2t-2\operatorname{sen} 2t\\-\cos 2t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\cos 2t+2\operatorname{sen} 2t\\-\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ahora la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, *de forma equivalente* $x(0) = 2$ *y* $y(0) = -1$ *produce el sistema algebraico* $2c_1 + 2c_2 = 2, -c_1 = -1$, *cuya solución es* $c_1 = 1, c_2 = 0$. *Así la solución para el problema es* $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}2\cos 2t-2\operatorname{sen} 2t\\-\cos 2t\end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.5 *Resuelva los siguientes sistemas de ED*

1. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}-1&1&0\\1&2&1\\0&3&-1\end{pmatrix}\mathbf{X}$

2. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\mathbf{X}$

3. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}-1&-1&0\\\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}&3\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\mathbf{X}$

4. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}-1&4&2\\4&-1&-2\\0&0&6\end{pmatrix}\mathbf{X}$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}5&-4&0\\1&0&2\\0&2&5\end{pmatrix}\mathbf{X}$

6. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\mathbf{X}$

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\mathbf{X}$

8. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}4&1&0\\0&4&1\\0&0&4\end{pmatrix}\mathbf{X}$

9. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=z\\\frac{dy}{dt}&=-z\\\frac{dz}{dt}&=y\end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=2x+y+2z\\\frac{dy}{dt}&=3x+6z\\\frac{dz}{dt}&=-4x-3z\end{aligned}$$

11. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\mathbf{X}$

12. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}4&0&1\\0&6&0\\-4&0&4\end{pmatrix}\mathbf{X}$

CAPÍTULO 6

Sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales

Análisis cualitativo de sistemas no lineales

Muchos fenómenos de la naturaleza se comportan de forma un poco más complicada que un sistema de ecuaciones lineales. Por ejemplo, se suele utilizar la aproximación de la Ley de Hooke $F = -kx$ para modelar resortes, aunque en realidad esta fuerza suele tener otras componentes de orden no lineal, pero que habitualmente son despreciables. En general estas ecuaciones presentan grandes desafíos, pues es bastante complicado encontrarles soluciones explícitas. Sin embargo, muchas veces se puede hacer un estudio cualitativo de las soluciones, que nos indique sobre el comportamiento general del sistema no lineal. Por otro lado tenemos la opción de diseñar métodos numéricos que nos permitan encontrar una solución aproximada.

Dados un intervalo abierto I y una función $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con condición inicial $X_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t_0 \in I$:

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)), t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Si la función F no es lineal con respecto a la varible X, se dirá que es un *sistema no lineal* al cual nos referirémos usando (SNL).

Ejemplo 6.1 *Modelo SIR*

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I, \end{aligned}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
S &= \textit{Número de individuos susceptibles,} \\
I &= \textit{Número de individuos infectados,} \\
R &= \textit{Número de individuos recuperados,} \\
N &= S + I + R \quad (\textit{tamaño total de la población}), \\
\beta &= \textit{Tasa de contacto efectiva de la enfermedad,} \\
\gamma &= \textit{Tasa de recuperación.}
\end{aligned}
$$

Si además la función F no depende explícitamente de la variable t, se dirá que es un *sistema no lineal autónomo* al cual nos referiremos usando $(SNLA)$. Generalmente un $(SNLA)$ corresponde en el caso mecánico a un movimiento sin forzamiento externo. Estos sitemas son invariantes bajo traslaciones temporales (variable t). En particular, si $X : I \to \mathbb{R}^n$ es una solución del sistema entonces la función $X_c : I_c \to \mathbb{R}^n$ definida por $X_c(t) = X(t - c)$ también lo es. Aquí I_c denota el intervalo I desplazado hacia la derecha en c.

Definición 6.1 *El vector $X(t) \in \mathbb{R}^n$, que es la solución del sistema en un punto $t \in I$, se llama vector de estado.*

Observación: *Dada una función $h : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, toda ecuación de orden superior de la forma*

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)} = h\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \\
&y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}
\end{aligned}
$$

se puede llevar, mediante un cambio de variables, a la forma (SNL). Claramente, si h no depende explícitamente de t, se puede llevar a la forma $(SNLA)$.

Ejemplo 6.2 *(El péndulo simple amortiguado). Un péndulo simple sometido a un ambiente con roce (por ejemplo aire, agua, aceite, etc.) y a una fuerza externa, queda descrito por la siguiente ecuación de movimiento de segundo orden:*

$$
\begin{aligned}
m\theta'' + c\theta' + \frac{mg}{L}\operatorname{sen}(\theta) &= f(t) \\
\theta(0) &= \theta_0 \\
\theta'(0) &= \theta_0'
\end{aligned}
$$

donde θ es el ángulo que forma el péndulo con respecto a la vertical y c el coeficiente de roce, producto de una fuerza de roce viscoso lineal: $\boldsymbol{F}_{roce} = -c\boldsymbol{v}$, donde $v = L\theta'$. Haciendo el cambio de variables: $x = \theta$, $y = \theta'$, la ecuación anterior toma la forma de (SNL) :

$$
\begin{aligned}
x' &= y \\
y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{m}f(t).
\end{aligned}
$$

La no linealidad se aprecia claramente en el término $\operatorname{sen}(\theta)$ *pues*

$$\operatorname{sen}(\lambda\theta_1 + \theta_2) \neq \lambda \operatorname{sen}(\theta_1) + \operatorname{sen}(\theta_2)$$

El (SNLA) del péndulo corresponde al caso en que no hay forzamiento externo:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 6.3 *Atractor de Lorenz. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales fue un modelo desarrollado por Lorenz, que en principio se proponía tratar de comprender los fenómenos meteorológicos. El modelo que utilizó Lorenz consiste en una atmósfera bidimensional rectangular, cuyo extremo inferior está a una temperatura mayor que el superior. De esta manera el aire caliente subirá y el aire frío bajará creándose corrientes que harán un intercambio de calor por convección. Las ecuaciones que describen este proceso son:*

$$\begin{cases} x' = s(y-x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

donde x *que representa el flujo convectivo;* y*, la distribución horizontal de temperaturas; y* z *la distribución vertical de temperaturas. Además, tenemos tres parámetros que intervienen en las ecuaciones:* s *es el cuociente entre la viscosidad y la conductividad térmica;* r*, la diferencia de temperaturas entre la capas inferior y superior; y* b *el cuociente entre la altura y el ancho del rectángulo. Este es un modelo muy importante que tiene muchas propiedades interesantes, pero por ahora sólo notamos que es un sistema autónomo, pero no lineal, pues aparecen los términos* xy *y* xz*.*

6.1 Sistemas no lineales y sistemas linealizados

De aquí en adelante nos restringiremos a problemas en dos dimensiones y autónomos de la forma $(SNLA)$:

$$\begin{cases} x' = F(x,y), \quad x(t_0) = x_0 \\ y' = G(x,y), \quad y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con F y G funciones continuamente diferenciables. Bajo estas condiciones se garantiza que siempre tendremos una única solución local.

Definición 6.2 *Decimos que* $(\bar{x},\bar{y})$ *es un punto crítico o de equilibrio del (SNLA) si*

$$\begin{cases} F(\bar{x},\bar{y}) = 0 \\ G(\bar{x},\bar{y}) = 0. \end{cases}$$

Definición 6.3 *Se llama nulclina en* x *a la curva definida por* $F(x,y) = 0$ *y nulclina en* y *a la curva definida por* $G(x,y) = 0$*.*

Los puntos críticos son las intersecciones de las nulclinas. El conjunto de puntos críticos del sistema se denota por

$$\mathcal{C} = \left\{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\right\}$$

Ejercicio 6.1 *Considere que un modelo para la competencia de dos poblaciones de animales (conejos y ovejas) que luchan por recursos en un hábitat reducido viene dado por*

$$\begin{cases} x' = 60x - 3x^2 - 4xy \\ y' = 42y - 3y^2 - 2xy \end{cases}$$

donde x es la población de conejos e y la de ovejas. Encuentre los puntos críticos de este sistema.

Si hacemos una expansión de Taylor en el $(SNLA)$ en torno a un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$, resulta:

$$F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}) + h_F(r)$$
$$G(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}) + h_G(r)$$

donde $r = (x, y) - (\bar{x}, \bar{y})$ (recordemos que $F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0$). Además

$$\lim_{r\to 0} \frac{h_F(r)}{\|r\|} = 0 \quad y \quad \lim_{r\to 0} \frac{h_G(r)}{\|r\|} = 0.$$

Para simplificar la notación definimos

$$a = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}), \quad b = \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}), \quad c = \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) \quad \text{y} \quad d = \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})$$

constantes que dependen del punto crítico. Notamos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \end{pmatrix} = J(\bar{x},\bar{y})$$

donde J es la matriz Jacobiana de la función

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix}$$

evaluada en el punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$. Ahora, si reemplazamos en $(SNLA)$ queda:

$$(SNLA) \quad \begin{cases} x' = a(x-\bar{x}) + b(y-\bar{y}) + h_F(r) \\ y' = c(x-\bar{x}) + d(y-\bar{y}) + h_G(r). \end{cases}$$

Consideramos el sistema linealizado

$$(SL) \quad \begin{cases} x' = a(x-\bar{x}) + b(y-\bar{y}) \\ y' = c(x-\bar{x}) + d(y-\bar{y}) \end{cases}$$

Definición 6.4 *Un sistema $(SNLA)$ es degenerado en torno a $(\bar{x},\bar{y})$ si $|J(\bar{x},\bar{y})| = 0$. Un punto crítico $(\bar{x},\bar{y})$ de $(SNLA)$ es aislado si existe $\delta > 0$ tal que no hay ningún otro punto crítico en la bola de centro $(\bar{x},\bar{y})$ y radio δ. De lo contrario se dice que los puntos críticos son densos en torno a $(\bar{x},\bar{y})$.*

Propiedad 6.1 *Sea $(\bar{x},\bar{y})$ un punto crítico de (SNLA).*

1. *Si $|J(\bar{x},\bar{y})| \neq 0$, entonces $(\bar{x},\bar{y})$ es el único punto crítico de (SL). En particular es aislado para (SL).*
2. *Si $|J(\bar{x},\bar{y})| = 0$, entonces los puntos críticos de (SL) son densos en torno a $(\bar{x},\bar{y})$. Más precisamente, el conjunto $\mathcal{C}$ es una recta que contiene a $(\bar{x},\bar{y})$ si $J(\bar{x},\bar{y}) \neq \theta_{2\times 2}$ y es todo el plano si $J(\bar{x},\bar{y}) = \theta_{2\times 2}$.*
3. *Si $|J(\bar{x},\bar{y})| \neq 0$, entonces $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto crítico aislado de (SNLA).*

Dem: *Primero observemos que (x,y) es punto crítico de (SL) si, y sólo si,*

$$\begin{cases} a(x-\bar{x}) + b(y-\bar{y}) = 0 \\ c(x-\bar{x}) + d(y-\bar{y}) = 0. \end{cases}$$

Es decir, si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = V_0$$

donde V_0 es un vector constante que depende de $(\bar{x},\bar{y})$.

1. Si $|J(\bar{x},\bar{y})| \neq 0$ el sistema tiene solución única $(\bar{x},\bar{y})$.

2. Si $|J(\bar{x},\bar{y})| = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones, que forman una recta si $J(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$ y todo el plano si $J(\bar{x},\bar{y}) = 0$.

3. Por contradicción, supongamos que para cada $\delta > 0$ existe otro punto crítico $(\bar{w},\bar{z})$ de $(SNLA)$ tal que $|(\bar{x},\bar{y}) - (\bar{w},\bar{z})| < \delta$. Por definición,

$$\begin{cases} a(\bar{w}-\bar{x}) + b(\bar{z}-\bar{y}) + h_F(\bar{r}) = 0 \\ c(\bar{w}-\bar{x}) + d(\bar{z}-\bar{y}) + h_G(\bar{r}) = 0 \end{cases}$$

donde $\bar{r} = (\bar{w},\bar{z}) - (\bar{x},\bar{y})$. De manera equivalente,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}-\bar{x} \\ \bar{z}-\bar{y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} h_F(\bar{r}) \\ h_G(\bar{r}) \end{pmatrix}$$

Si $|J(\bar{x},\bar{y})| \neq 0$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} \bar{w}-\bar{x} \\ \bar{z}-\bar{y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_F(\bar{r}) \\ h_G(\bar{r}) \end{pmatrix}$$

Tomando norma y acotando obtenemos

$$\begin{aligned} \|\bar{r}\| &\leq \left\|J(\bar{x},\bar{y})^{-1}\right\| \sqrt{h_F(\bar{r})^2 + h_F(\bar{r})^2} \\ 1 &\leq \left\|J(\bar{x},\bar{y})^{-1}\right\| \sqrt{\left(\frac{h_F(\bar{r})}{\|\bar{r}\|}\right)^2 + \left(\frac{h_F(\bar{r})}{\|\bar{r}\|}\right)^2}. \end{aligned}$$

Pero el lado derecho tiende a cero cuando $\bar{r} \to 0$, con lo que llegamos a una contradicción.

En resumen, un sistema que no es degenerado en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$ cumple que $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico aislado de $(SNLA)$ y es el único punto crítico de (SL).

Ejemplo 6.4 *Conejos y ovejas. Un modelo para la competencia de dos poblaciones de animales que luchan por recursos en un hábitat reducido viene dado por:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 60x - 3x^2 - 4xy \\ y' = 42y - 3y^2 - 2xy \end{array} \right.$$

donde x es la población de conejos e y la de ovejas. Del ejemplo anterior tenemos que $\mathcal{C} = \{(0,0)$ $, (0,14), (20,0), (12,6)\}$, conjunto que muestra las posibilidades de equilibrio entre ambas poblaciones. El único caso en que pueden coexistir ambas especies es $(\bar{x}, \bar{y}) = (12,6)$. En los demás casos, al menos una de las especies se extingue. Aun así, todas son soluciones de equilibrio. El Jacobiano en este caso está dado por:

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 60 - 6\bar{x} - 4\bar{y} & -4\bar{x} \\ -2\bar{y} & 42 - 6\bar{y} - 2\bar{x} \end{array} \right)$$

Evaluando el Jacobiano en cada punto crítico encontramos los respectivos sistemas linealizados:

1. $J(0,0) = \left(\begin{array}{cc} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{array} \right)$ *es invertible. El sistema linealizado alrededor de $(0,0)$ es*

$$(SL)_1 \left\{ \begin{array}{l} x' = 60(x-0) + 0(y-0) \\ y' = 0(x-0) + 42(y-0) \end{array} \right.$$

2. $J(20,0) = \left(\begin{array}{cc} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{array} \right)$ *también es invertible* y

$$(SL)_2 \left\{ \begin{array}{ll} x' & = -60(x-20) - 80(y-0) \\ y' & = 0(x-20) + 2(y-0) \end{array} \right.$$

3. $J(0,14) = \left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{array} \right)$ *también lo es y*

$$(SL)_3 \left\{ \begin{array}{ll} x' & = 4(x-20) + 0(y-0) \\ y' & = -28(x-20) - 42(y-0) \end{array} \right.$$

4. *Finalmente,* $J(12,6) = \left(\begin{array}{cc} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{array} \right)$ *es invertible y*

$$(SL)_4 \left\{ \begin{array}{l} x' = -36(x-12) - 48(y-6) \\ y' = -12(x-12) - 18(y-6). \end{array} \right.$$

Así, el modelo no es degenerado en torno a cada uno de sus puntos críticos.

Ejemplo 6.5 *Habíamos visto que las ecuaciones de un péndulo sin forzamiento están dadas por*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

Sus puntos críticos satisfacen

$$\begin{cases} 0 = \bar{y} \\ 0 = -\frac{c}{m}\bar{y} - \frac{g}{L}\operatorname{sen}(\bar{x}) \end{cases}$$

de donde

$$\mathcal{C} = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

El Jacobiano viene dado por

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}(-1)^k & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$$

que es invertible. El sistema linealizado en torno al origen es

$$(SL) \begin{cases} x' = 0(x-0) + 1(y-0) \\ y' = -\dfrac{g}{L}(x-0) - \dfrac{c}{m}y \end{cases}$$

Ejemplo 6.6 *Consideremos el sistema*

$$\begin{cases} x' = x^3 \\ y' = y^3 \end{cases}$$

Vemos que $(0,0)$ es un punto crítico aislado de este sistema. Sin embargo

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde} \quad J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, este sistema es degenerado en torno al $(0,0)$. Si intentamos hacer la linealización en torno a $(0,0)$ obtenemos

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

cuyos puntos críticos son $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$, como asegura la Proposición punto 3.

Ejemplo 6.7 *Consideremos el $(SNLA)$*

$$\begin{cases} x' = 3x + x^2 + 2y + y^2 \\ y' = 6x - x^2 + 4y + y^2 \end{cases}$$

Claramente el punto $(0,0)$ es un punto crítico. Para ver que es el único (y por tanto es aislado) se puede tratar de resolver explícitamente el sistema, pero esto resulta un poco engorroso. Dado que cada ecuación representa una cónica, otra forma de buscar puntos críticos es analizar el gráfico. Si completamos cuadrados obtenemos

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{13}{4}$$
$$-(x-3)^2 + (y+2)^2 = -5$$

que corresponden a una circunferencia y una hipérbola, respectivamente. El bosquejo del gráfico se puede ver en la Figura.

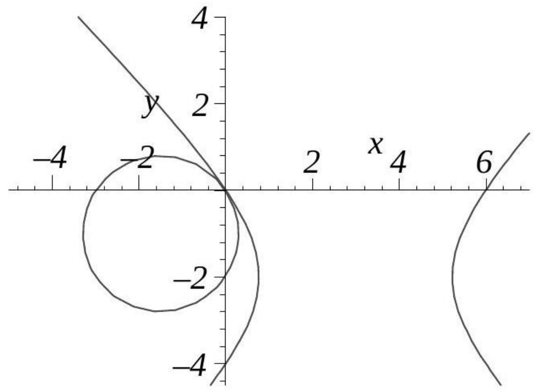


Figura 6.1: Intersección de Cónicas.

Para ver que en $(0,0)$ *la dos curvas efectivamente son tangentes como sugiere el gráfico, calculemos la derivada en dicho punto:*

$$3+2x+2y'+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{3+2x}{2(1+y)} \quad \Rightarrow \quad y'(0)=-\frac{3}{2}$$
$$6-2x+4y'+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x-3}{2+y} \quad \Rightarrow \quad y'(0)=-\frac{3}{2}$$

La matriz jacobiana está dada por

$$J(x,y)=\begin{pmatrix} 3+2x & 2+2y \\ 6-2x & 4+2y \end{pmatrix} \quad \textit{y luego} \quad J(0,0)=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

que no es invertible. Por lo tanto el sistema es degenerado. El sistema linealizado en torno a $(0,0)$ *es*

$$\begin{cases} x'=3x+2y \\ y'=6x+4y \end{cases}$$

cuyos puntos críticos son $\mathcal{C}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=-\frac{3}{2}x\right\}$. *Aquí el punto* $(0,0)$ *tampoco es aislado.*

6.2 Diagramas de fase y de flujo

Dado el $(SNLA)$

$$\begin{cases} x'=F(x,y) \\ y'=G(x,y) \end{cases}$$

con condición inicial $(x(t_0),y(t_0))=(x_0,y_0)$, a la solución del problema de Cauchy se le llama trayectoria que parte de (x_0,y_0). Más precisamente, es la función

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: I_0 &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t),y(t)), \end{aligned}$$

donde I_0 es su intervalo máximo de existencia (que por supuesto contiene al que entrega el Teorema de Existencia y Unicidad). El recorrido $\mathcal{R}$ de esta trayectoria es el conjunto imagen de la función $\mathcal{T}$. Es decir,

$$\mathcal{R} = \left\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I_0\right\}$$

Claramente dos trayectorias distintas pueden tener el mismo recorrido.

Un diagrama de fases de este sistema autónomo es a una colección de recorridos de las trayectorias para un número representativo de condiciones iniciales. El plano donde se grafica el diagrama de fases se llama plano de fase. El interés de los diagramas de fase es que al eliminar el tiempo de las ecuaciones, obtenemos gráficos en 2 dimensiones en lugar de 3 , lo que hace más fácil su estudio. Por otra parte, al señalar el sentido de recorrido podemos conocer muchas propiedades, en particular asintóticas, de las trayectorias.

Una consecuencia del Teorema de Existencia y Unicidad es la siguiente

Proposición 6.2.1 *Si dos trayectorias se intersectan sus recorridos coinciden.*

Dem: *Si dos trayectorias $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ se intersectan, entonces existen t_1, t_2 tales que*

$$(x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2))$$

Denotamos este punto por (x_0, y_0). La trayectoria $\mathcal{T}_3$ definida por

$$(x_3(t), y_3(t)) = (x_2(t + t_2 - t_1), y_2(t + t_2 - t_1))$$

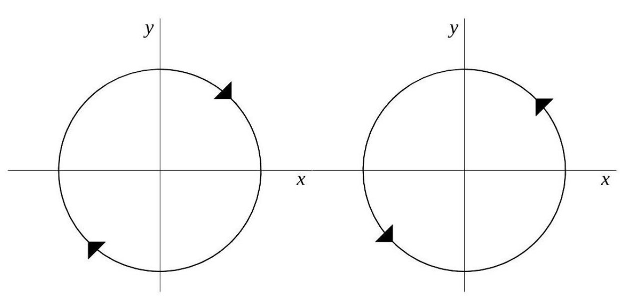
tiene el mismo recorrido que $\mathcal{T}_2$ porque es una traslación en tiempo y el sistema es autónomo. Pero también tiene el mismo recorrido que $\mathcal{T}_1$ porque es solución del mismo problema de Cauchy.

Esto nos dice que las curvas en el diagrama de fase no se intersectan, de modo que una situación como la presentada es imposible.

Lo que sí se puede dar para dos trayectorias distintas, es que sus recorridos se confundan. Por ejemplo, tomemos la trayectorias:

$$\begin{aligned}
(x_1(t), y_1(t)) &= (\operatorname{sen}(t), \cos(t)) \text{ con } \quad (x(0), y(0)) = (0, 1) \\
(x_2(t), y_2(t)) &= (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \text{ con } \quad (x(0), y(0)) = (1, 0).
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado cada componente y sumando vemos que ambas trayectorias satisfacen $x^2+y^2 = 1$. También es fácil ver que recorren toda la circunferencia. Sin embargo lo hacen en sentidos opuestos, como se ilustra en la figura. Si queremos hacer que las dos trayectorias



recorran la curva en el mismo sentido basta modificar una a

$$(\widetilde{x}_2(t), \widetilde{y}_2(t)) = (\cos(t), -\operatorname{sen}(t)) \quad \text{con} \quad (x(0), y(0)) = (1, 0)$$

El diagrama de flujo se construye al graficar en una colección de puntos (x, y) representativos el vector $(F(x, y), G(x, y))$. Por regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \text{y luego} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$$

Por lo tanto el recorrido de la trayectoría es tangente al flujo.

6.3 Clasificación de los puntos críticos

Los puntos críticos de un $(SNLA)$ pueden ser de diferentes naturalezas. Un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ es estable si para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ de manera que $\|(x(t), y(t)) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \varepsilon$ para todo t, siempre que $\|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta$. De lo contrario se dice que es inestable. En palabras, un punto crítico es estable si las trayectorias que parten cerca de él se mantienen cerca.

Por otra parte, un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ es asintóticamente estable si es estable y además existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y}), \quad \text{siempre que} \quad \|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta.$$

Notemos que no todo punto estable es asintóticamente estable.

Ejemplo 6.8 *Consideremos el sistema*

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -ky \end{cases}$$

donde k es una constante no nula, con condiciones iniciales: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, que tiene como solución:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_0 e^{-kt} \end{cases}$$

Así tenemos una solución $(x(t), y(t))$ que depende de (x_0, y_0). Para distintos valores de k, esta solución tiene distintas formas.

Si tomamos $k = 1$, resultan las soluciones

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_0 e^{-t} \end{cases}$$

Dividiendo las ecuaciones

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_0}{y_0} \Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{x_0} x(t)$$

que representan rectas de pendiente $\frac{y_0}{x_0}$, cuyo gráfico en el plano XY queda ilustrado en la Figura 6.3

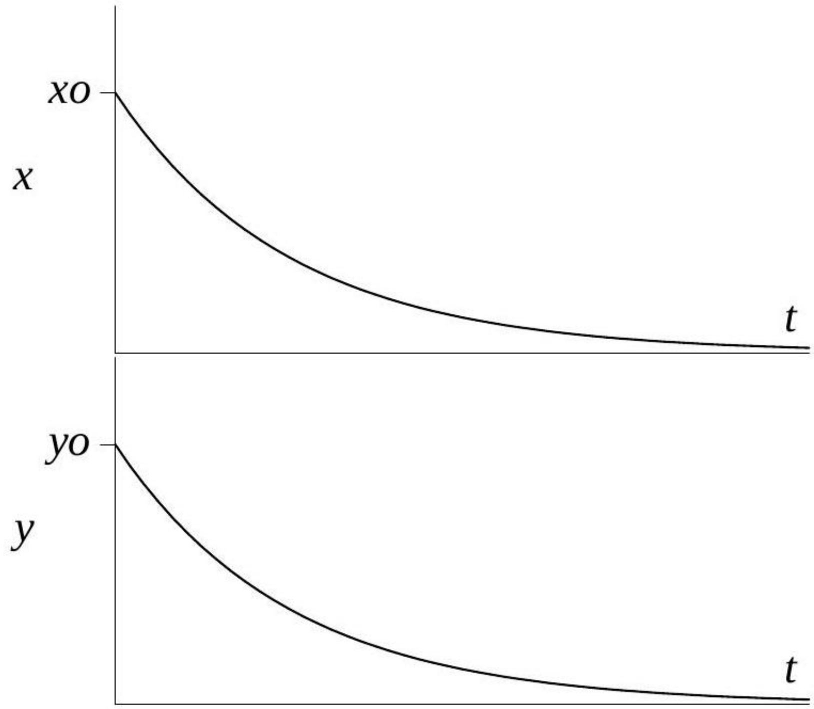


Figura 6.2: Soluciones de para $k > 0$.

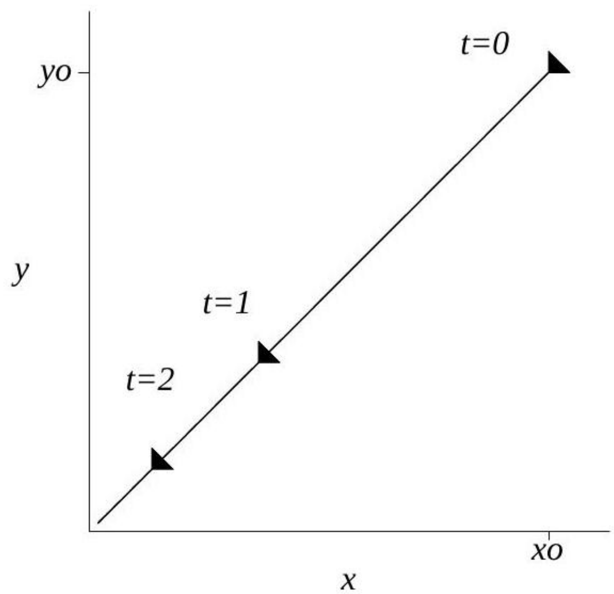


Figura 6.3: Solución del sistema para una condición inicial en el plano de fases XY.

donde las flechas indican el sentido positivo del tiempo. Cuando $t \to \infty$ *tenemos que* $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$.

Si graficamos las soluciones para diferentes valores positivos y negativos de x_0 y de y_0 construimos el diagrama de fase, donde se aprecia claramente que todas las soluciones concurren al origen. Esta característica hace que este punto crítico sea asintóticamente estable.

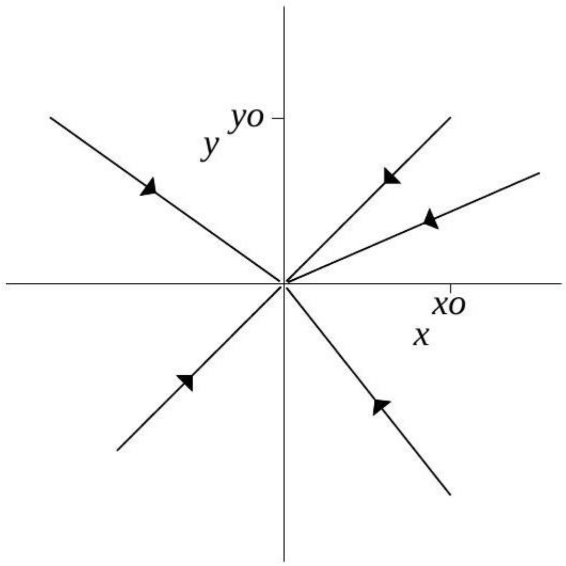


Figura 6.4: Diagrama de fase completo para $k = 1$.

Ahora, si cambiamos el parámetro a $k = 2$, resulta

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_0 e^{-2t} \end{cases}$$

Cuando $t \to \infty$ las soluciones también se acercan al origen. Elevando al cuadrado la primera ecuación y reemplazando en la segunda vemos que

$$y(t) = \frac{y_0}{x_0^2} x^2(t)$$

El diagrama de fases se muestra en la Figura 6.5. Las soluciones se mueven a lo largo de parábolas y el origen sigue siendo asintóticamente estable.

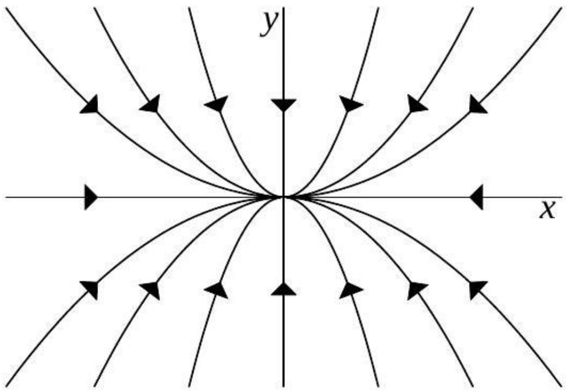


Figura 6.5: Diagrama de fase para $k = 2$.

Analicemos ahora el caso $k = -1$. Esta vez

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_o e^{t} \end{cases}$$

Al multiplicar ambas ecuaciones y despejar y obtenemos

$$y = \frac{x_0 y_0}{x}$$

de modo que las soluciones se mueven a lo largo de hipérbolas cuando $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$. Además notamos que cuando $t \to \infty x \to 0$, mientras que $y \to \pm\infty$ según el signo de y_0. En este caso el origen deja de ser estable.

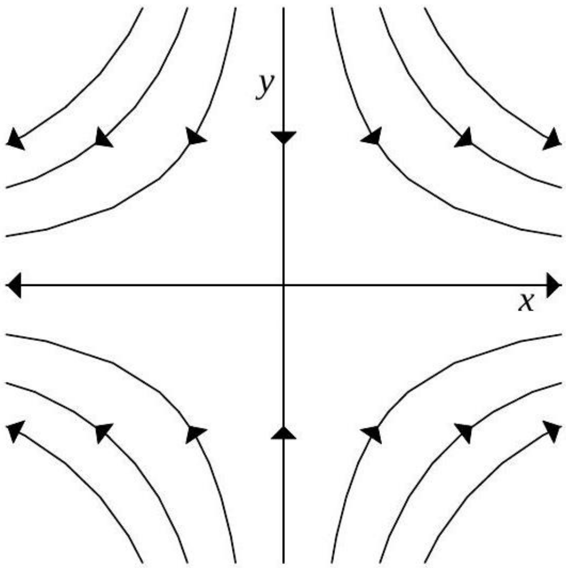


Figura 6.6: Diagrama de fase para $k = -1$.

Se dice que una trayectoria $t \mapsto (x(t), y(t))$ converge o tiende al punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ cuando $t \to \infty$

si

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \bar{y}.$$

Análogamente se define la convergencia cuando $t \to -\infty$.

Las trayectorias pueden converger de distintas formas. Si además de converger al punto $(\bar{x}, \bar{y})$ cuando $t \to +\infty$, la trayectoria es tal que existe

$$l = \lim_{t\to\infty} \frac{y(t) - \bar{y}}{x(t) - \bar{x}}$$

entonces se dice que la trayectoria entra al punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ tangente a una semirrecta de pendiente l cuando $t \to \infty$. De la misma forma, si además de converger al punto $(\bar{x}, \bar{y})$ cuando $t \to -\infty$ la trayectoria es tal que existe

$$l = \lim_{t\to-\infty} \frac{y(t) - \bar{y}}{x(t) - \bar{x}}$$

se dice que la trayectoria sale del punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ tangente a una semirrecta de pendiente l cuando $t \to -\infty$.

Definición 6.5 *Un punto crítico aislado $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama nodo si todas las trayectorias vecinas, o bien entran al punto $(\bar{x}, \bar{y})$, o bien salen de él.*

Ejemplo 6.9 *Para el sistema*

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

ya sabemos que las trayectorias convergen a $(0,0)$. Además, cualquier trayectoria vecina que tenga una condición inicial (x_0, y_0), tendremos que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_0 e^{-t} - 0}{x_0 e^{-t} - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$

de modo que entra tangente a una semirrecta de pendiente y_0/x_0 (vertical si $x_0 = 0$). Por lo tanto $(0,0)$ es efectivamente un nodo.

Ejemplo 6.10 *En el sistema*

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases}$$

también se tiene que el punto crítico $(0,0)$ es un nodo. Todas las trayectorias entran al nodo con pendiente $l = 0$ salvo aquellas que parten de algún punto sobre el eje OY, que entran con pendiente vertical.

Definición 6.6 *Un punto crítico aislado $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama punto silla si existen dos trayectorias que entran a él tangentes a semirrectas opuestas y dos que salen de la misma forma. Las restantes trayectorias no convergen a $(\bar{x}, \bar{y})$ y tienen como asíntotas a las semirrectas antes mencionadas.*

Ejemplo 6.11 *En el sistema*

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

el origen es punto silla (ver Figura 6.7).

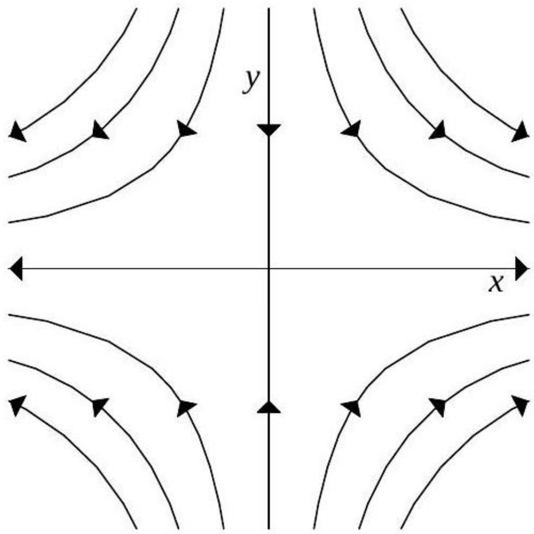


Figura 6.7: Punto de silla.

Definición 6.7 *Diremos que un punto crítico es punto espiral si todas las trayectorias en una vecindad del punto convergen pero no entran cuando* $t \to \infty$, *o convergen pero no salen cuando* $t \to -\infty$. *Un punto crítico es un centro si todas las trayectorias en una vecindad del punto son cerradas y existen trayectorias arbitrariamente cerca del punto.*

Ejemplo 6.12 *Consideremos el sistema*

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = -\beta x + \alpha y, \end{cases}$$

con condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ *dadas, que tiene claramente el único punto crítico* $(0,0)$. *Este es un sistema lineal de matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda = \alpha \pm i\beta$. *Finalmente, la solución del sistema es*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \operatorname{sen}(\beta t) \\ -\operatorname{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Para bosquejar los diagramas de fase del sistema, sólo es necesario considerar los signos de α *y* β. *La trayectoria se aleja del origen si* $\alpha > 0$ *pues* $e^{\alpha t}$ *es creciente. Si* $\alpha < 0$, *la trayectoria se acerca. Por* *otra parte, la rotación ocurre en sentido horario si $\beta > 0$ y antihorario si $\beta < 0$ (ver Figuras 6.8, 6.9 y 6.10).*

Si $\alpha = 0$ el módulo de $(x(t), y(t))$ permanece constante por lo que la trayectoria define circunferencias. Si $\beta = 0$ no hay rotación y las soluciones se mueven a lo largo de rectas por el origen.

Las Figuras 6.8, 6.9 y 6.10 nos dicen también las características de estabilidad del punto crítico $(0, 0)$: si $\alpha < 0$ es un punto espiral asintóticamente estable; si $\alpha > 0$ es un punto espiral inestable; si $\alpha = 0$ es un centro estable. Si $\beta = 0$ es un nodo (estable o inestable según el signo de α).

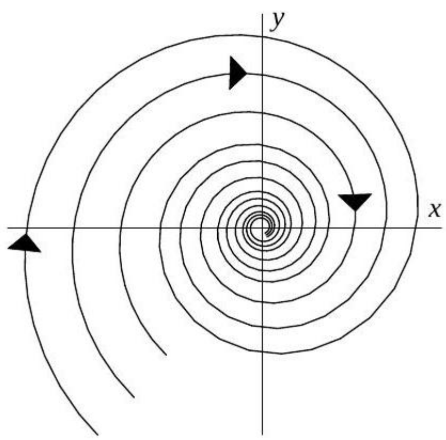


Figura 6.8: Diagrama de fase del sistema. A la izquierda $\alpha < 0, \beta > 0$, y a la derecha $\alpha > 0, \beta < 0$.

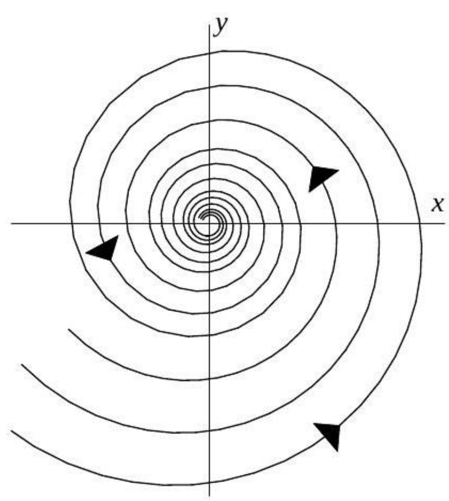


Figura 6.9: Diagrama de fase del sistema. A la izquierda $\alpha < 0, \beta < 0$, y a la derecha $\alpha > 0, \beta > 0$.

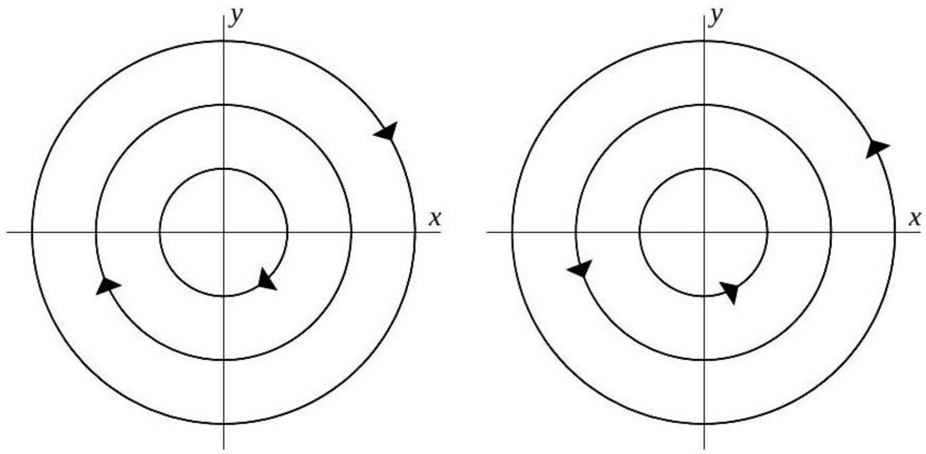


Figura 6.10: Diagrama de fase del sistema para $\alpha = 0$. A la izquierda $\beta > 0$, y a la derecha $\beta < 0$.

Antes de continuar notemos que: es posible definir una matriz exponencial e^{At} tal que

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}$$

es una solución del sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Aquí $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$ de constantes y $\mathbf{C}$ es una matriz columna $n \times 1$ de constantes arbitrarias. Observe que la matriz $\mathbf{C}$ se multiplica por la derecha a $e^{\mathbf{A}t}$ porque queremos que $e^{\mathbf{A}t}$ sea una matriz $n \times n$. Una forma de definir $e^{\mathbf{A}t}$ se basa en la representación en serie de potencias de la función exponencial escalar e^{at} :

$$e^{at} = = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + a^k\frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\frac{t^k}{k!}.$$

La serie converge para toda t. Si se usa esta serie, con la matriz identidad I en vez de 1 y la constante a se reemplaza por una matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ de constantes, se obtiene una definición para la matriz $n \times n, e^{\mathbf{A}t}$.

Definición 6.8 *Matriz exponencial Para cualquier matriz $\mathbf{A}n \times n$,*

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!}.$$

La serie converge a una matriz $n \times n$ para todo valor de t.

Ejercicio 6.2 *Una matriz $n \times n$, $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal si todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero, es decir,*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Muestre que

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado notemos que la derivada de la matriz exponencial es similar a la propiedad de derivación de la exponencial escalar $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$,

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t},$$

derivamos término por término:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} &= \frac{d}{dt}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!} + \cdots\right] = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^3 t^2 + \cdots \\ &= \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots\right] = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}. \end{aligned}$$

Ahora se puede probar que $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}$ es una solución de $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ para todo vector $n \times 1$, $\mathbf{C}$ de constantes:

$$\mathbf{X}' = \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} = \mathbf{A}\left(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}\right) = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

Uso de la transformada de Laplace para el calculo de $e^{\mathbf{A}t}$ Vimos que $\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}$ es una solución de $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. De hecho, puesto que $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$, $\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}$ es una solución de problema con valores iniciales

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}.$$

Si $\mathbf{x}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{X}(t)\} = \mathcal{L}\left\{e^{\mathbf{A}t}\right\}$, entonces la transformada de Laplace es

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) \quad \text{ o } \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{I}.$$

Multiplicando la última ecuación por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ se tiene que $\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{I} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. En otras palabras, $\mathcal{L}\left\{e^{\mathbf{A}t}\right\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$o

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}.$$

Ejemplo 6.13 *Use la transformada de Laplace para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.* **Sol:***Primero calcule la matriz $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ y determine su inversa:*

$$\begin{aligned} s\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s+2 \end{pmatrix}, \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s(s+1)} & \frac{-1}{s(s+1)} \\ \frac{2}{s(s+1)} & \frac{s-1}{s(s+1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, descomponiendo las entradas de la última matriz en fracciones parciales:

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{s}-\frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s}-\frac{2}{s+1} & -\frac{1}{s}+\frac{2}{s+1} \end{pmatrix}.$$

Se deduce que la transformada de Laplace inversa proporciona el resultado deseado,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} 2-e^{-t} & -1+e^{-t} \\ 2-2e^{-t} & -1+2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbf{P}$ una matriz cuyas columnas son eigenvectores $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ que corresponden a eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$. Entonces se puede demostrar que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, donde $\mathbf{D}$ se define por

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{6.3.1}$$

Ejercicio 6.3

1. *Suponga que* $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$*, donde* $\mathbf{D}$ *se define como en* (6.3.1)*. Demuestre que* $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}$.
2. *Si* $\mathbf{D}$ *se define como en* (6.3.1)*, entonces encuentre* $e^{\mathbf{D}t}$.
3. *Use los resultados previos para resolver los siguientes sistemas*
   a) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X}$
   b) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

6.4 Puntos críticos de sistemas lineales

Nos interesa estudiar ahora con profundidad los sistemas linealizados, puesto que Henri Poincaré demostró que bajo las hipótesis adecuadas, si se logra clasificar cualitativamente un punto crítico, por ejemplo en términos de nodo, espiral, etc., entonces estas mismas características se mantendran en el sistema original no lineal. Y por otra parte, Alexander Liapunov demostró que bajo ciertas hipótesis, se conservaba la estabilidad asintótica de los puntos críticos al linealizar. Por esta razón, ahora nos concentraremos en los sistemas lineales y pospondremos un momento el enunciado exacto de estos teoremas.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer como punto crítico $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ (si este no fuera el caso, basta efectuar una traslación), y entonces consideramos el sistema lineal:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$, y con $ad - bc \neq 0$, para que de esta forma el punto $(0,0)$ sea el único punto crítico del sistema (y sea aislado).

Tomamos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con valores propios λ_1, λ_2. Recordemos que una matriz invertible no tiene al cero como valor propio. Luego $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Pueden ocurrir los siguientes casos:

Casos Principales:

1. λ_1, λ_2 reales distintos pero de igual signo.
2. λ_1, λ_2 reales distintos y de distinto signo.
3. λ_1, λ_2 complejos (conjugados), con parte real no nula.

Casos Frontera:

1. λ_1, λ_2 reales e iguales.
2. λ_1, λ_2 imaginarios puros (conjugados).

Examinaremos por separado cada uno de los casos descritos arriba.

6.4.1 Casos Principales:

En todos estos casos los valores propios son distintos, por ende la matriz es diagonalizable, es decir, se puede escribir de la forma $A = PDP^{-1}$, con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} v_1 & | \, v_2 \end{pmatrix}$$

donde v_1, v_2 son los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente. De esta forma la solución del sistema lineal es

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De esta forma, el problema se desacopla en estas nuevas coordenadas $\tilde{x}, \tilde{y}$ introducidas por las direcciones de los vectores propios (llamadas también direcciones propias). Resulta simplemente

$$\begin{cases} \widetilde{x} = e^{\lambda_1 t} \widetilde{x}_0 \\ \widetilde{y} = e^{\lambda_2 t} \widetilde{y}_0 \end{cases}$$

Observemos que si, por ejemplo, $\lambda_1 < 0$, entonces

$$\lim_{t \to \infty} \widetilde{x} = \lim_{t \to \infty} e^{\lambda_1 t} \widetilde{x}_0 = 0.$$

Si $\lambda_1 > 0$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \widetilde{x} = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t}\widetilde{x}_0 = \pm\infty$$

donde el signo de $\pm\infty$ está dado por el signo de la condición inicial. El mismo argumento es válido para λ_2.

Si queremos estudiar el diagrama de fase, eliminamos la variable t de las ecuaciones anteriores y obtenemos

$$\widetilde{y} = c_0 \widetilde{x}^{\lambda_2/\lambda_1},$$

donde $c_0 = \frac{\widetilde{y}_0}{\widetilde{x}_0^{\lambda_2/\lambda_1}}$ es una constante.

λ_1, λ_2 reales distintos de igual signo.

Sólo hay dos casos: $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ o $\lambda_2/\lambda_1 < 1$. El bosquejo del diagrama de fases para el caso $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ se tiene en la Figura (6.11). En el gráfico de la izquierda, para $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ se tiene estabilidad asintótica, mientras que en el de la derecha, para $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, el origen es inestable.

Para el caso $\lambda_2/\lambda_1 < 1$, se tiene la Figura (6.12). En el gráfico de la izquierda, para $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ se tiene estabilidad asintótica, mientras que en el de la derecha, para $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, el origen es inestable.

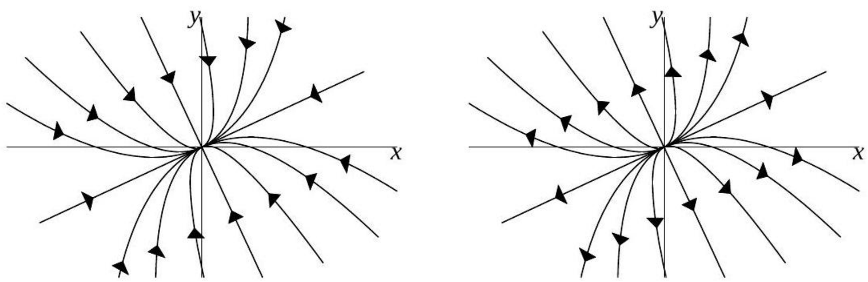


Figura 6.11: Diagramas de fase para $\lambda_2/\lambda_1 > 1$.

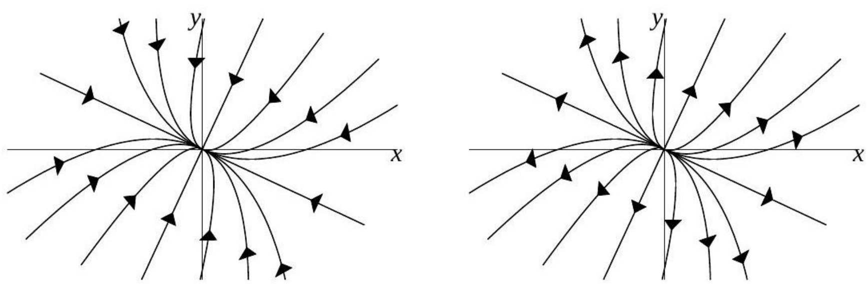


Figura 6.12: Diagramas de fase para $\lambda_2/\lambda_1 < 1$.

Como conclusión tenemos que en ambos casos el punto $(0,0)$ es un nodo. Si los valores propios son negativos, es asintóticamente estable; si son positivos, entonces es inestable. Además, vemos que en general para el caso de valores propios reales distintos de igual signo, los recorridos de las trayectorias son siempre tangentes a la recta dada por la dirección del vector propio asociado al valor propio de menor módulo.

En efecto:

- $|\lambda_1| < |\lambda_2| \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1 \Rightarrow$ recorrido tangente a v_1.
- $|\lambda_2| < |\lambda_1| \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1 \Rightarrow$ recorrido tangente a v_2.

λ_1, λ_2 reales con distinto signo.

Los diagramas de fase serán los de la Figura 6.13. El punto crítico es un punto silla, que por supuesto es inestable. Las trayectorias entran en la dirección propia asociada al valor propio negativo y salen en la dirección propia asociada al valor propio positivo.

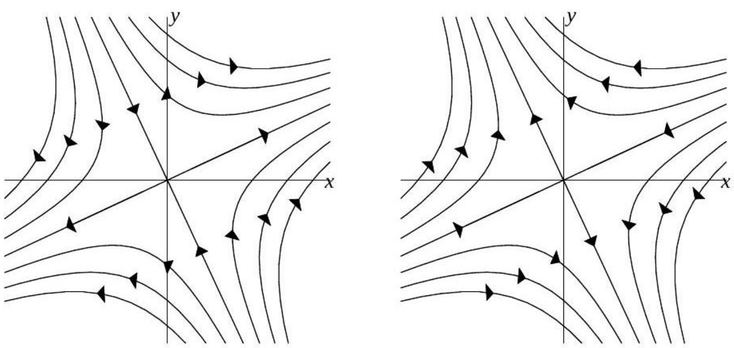


Figura 6.13: Diagramas de fase para λ_2 y λ_1 de signos distintos.

Ejemplo 6.14 *(Continuación de conejos y ovejas). Volvamos al ejemplo de los conejos compitiendo con las ovejas:*

$$\begin{cases} x' = 60x - 3x^2 - 4xy \equiv F(x,y) \\ y' = 42y - 3y^2 - 2xy \equiv G(x,y) \end{cases}$$

Sabemos que

$$\mathcal{C} = \{(0,0), (0,14), (20,0), (12,6)\}$$

Vimos que este sistema no era degenerado entorno a ninguno de estos cuatro puntos críticos, que ahora clasificaremos con respecto al sistema linealizado. Ya habíamos evaluado el jacobiano en cada punto crítico:

1. $J(0,0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$. *Sus valores propios son* $\lambda_1 = 60$y $\lambda_2 = 42$, *por lo que se trata de un nodo inestable. Los vectores propios asociados son*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Los recorridos de las trayectorias son tangentes a la dirección v_2 *(salvo los 2 que son tangentes a* v_1 *).*

2. $J(20,0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Sus valores propios son* $\lambda_1 = -60$ *y* $\lambda_2 = 2$*, por lo que éste es un punto silla. Los vectores propios asociados son*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 80 \\ -62 \end{pmatrix}$$

respectivamente. El eje de las trayectorias convergentes es la dirección v_1.

3. $J(0,14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$. *Sus valores propios son* $\lambda_1 = 4$ *y* $\lambda_2 = -42$*, por lo que éste también es un punto silla. Los vectores propios asociados son*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 46 \\ -28 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. El eje de las trayectorias convergentes es la dirección v_2.

4. $J(12,6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$. *Sus valores propios son* $\lambda_1 = -27 - 3\sqrt{73} \approx -52{,}6$ *y* $\lambda_2 = -27 + 3\sqrt{73} \approx -1{,}4$ *por lo que el punto crítico* $(12,6)$ *es un nodo asintóticamente estable. Los vectores propios asociados son*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3+\sqrt{73} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3-\sqrt{73} \end{pmatrix}$$

respectivamente. Los recorridos de trayectorias son tangentes a la dirección v_2 *(salvo los 2 que son tangentes a* v_1 *).*

En conclusión tenemos que en el punto $(0,0)$ *donde ambas especies desaparecen es inestable, al igual que cuando una sola especie sobrevive en los puntos* $(20,0)$ *y* $(0,14)$*. El punto* $(12,6)$ *es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo que si tomamos cualquier condición inicial que no sean los otros puntos críticos, tendremos que en un tiempo suficientemente extenso se dará la coexistencia de conejos y ovejas en las vecindades del punto* $(12,6)$*. Podemos hacer ahora un esbozo del diagrama de fases.*

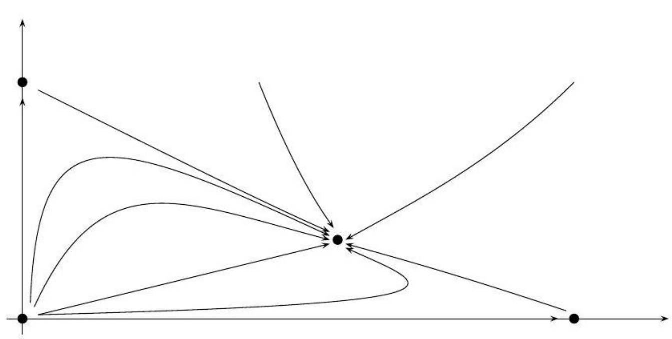


Figura 6.14: Diagrama de fases del modelo de conejos y ovejas.

λ_1, λ_2 complejos conjugados con parte real no nula

Esto es

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_1 = \alpha - i\beta, \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0 \quad \text{y} \quad \beta \neq 0$$

Esto es equivalente (con un cambio de base) al sistema

$$\begin{cases} \tilde{x} & = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} \\ \tilde{y} & = -\beta\tilde{x} + \alpha\tilde{y} \end{cases}$$

pues las matrices $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, tienen igual polinomio característico. Ya habíamos analizado este caso. Vimos que el origen es un punto espiral asintóticamente estable si $\alpha < 0$ y un espiral inestable si $\alpha > 0$.

Ejemplo 6.15 *(Péndulo no lineal). Ahora que tenemos más herramientas, seguiremos con el ejemplo del péndulo no lineal. El sistema*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

tiene puntos críticos $\mathcal{C} = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, y el Jacobiano respectivo es:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x) & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \Rightarrow J(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}(-1)^k & -\frac{c}{m} \end{pmatrix},$$

por tanto los valores propios dependerán de la paridad de k.

k impar: Tenemos que $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda - \frac{g}{L} = 0$, de donde

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} + \frac{g}{L}}$$

Puesto que todas las contantes son positivas tenemos dos valores propios reales de distinto signo. Los puntos críticos resultan ser puntos sillas inestables.

k par: Aquí $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{g}{L} = 0$ y luego

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{g}{L}}$$

Analicemos por casos el signo de la cantidad subradical:

1. Sobreamortiguado: El caso $\frac{c^2}{4m^2} > \frac{g}{L}$ nos entrega dos valores propios reales distintos, ambos negativos, por lo que los puntos críticos $(k\pi, 0)$ resultan nodos asintóticamente estables.

2. Subamortiguado: El caso $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{L}$ nos entrega dos valores propios complejos conjugados, por lo que los puntos críticos $(k\pi, 0)$ resultan puntos espirales, que además son asintóticamente estables pues $\alpha = -\frac{c}{2m} < 0$.

Este caso corresponde al más común, que ocurre cuando el coeficiente de roce es pequeño (notar que $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{L}$ si, y sólo si, $c < 2m\sqrt{\frac{g}{L}}$).

Notemos que si el péndulo está en posición vertical hacia arriba, que corresponde a los puntos k impar, está en un equilibrio inestable. Intuitivamente, si en esta posición lo perturbamos ligeramente, el péndulo oscila hasta la posición vertical hacia abajo, que son los puntos espirales asintóticamente estables con k par.

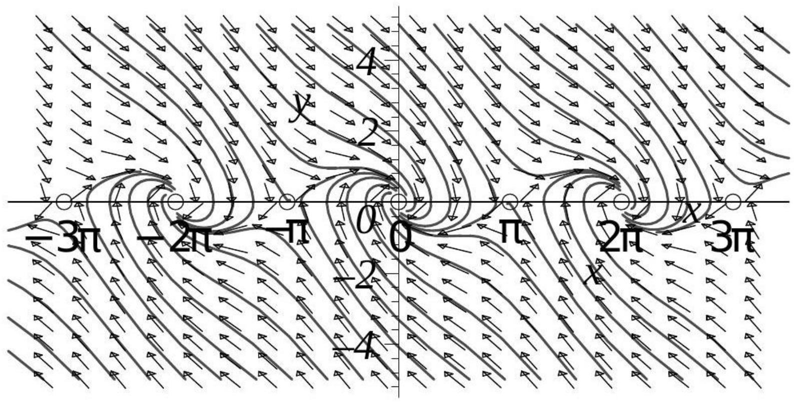


Figura 6.15: Diagramas de fase del péndulo subamortuguado.

3. Críticamente amortiguado: El caso $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{L}$ nos entrega un sólo valor propio real negativo. Este caso aún no lo hemos analizado, por lo que lo pospondremos momentáneamente.

6.4.2 Casos Frontera.

Un sólo valor propio λ con multiplicidad 2

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

con la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ no es necesariamente diagonalizable (pues tiene el valor propio repetido), pero siempre se puede llevar a su forma canónica de Jordan $A = PJP^{-1}$, donde J puede tener uno o dos bloques. En el caso de tener dos bloques, la matriz es diagonalizable, con

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y de aquí} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Luego, la ecuación en las nuevas coordenadas dadas por los vectores propios generalizados v_1, v_2 es:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}_0 \\ \widetilde{y}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{x} = e^{\lambda t}\widetilde{x}_0 \\ \widetilde{y} = e^{\lambda t}\widetilde{y}_0 \end{cases}.$$

El diagrama de fase de este caso ya es bien conocido del comienzo del capítulo (para caso $\lambda < 0$). El punto crítico será un nodo asintóticamente estable si el valor propio es negativo y un nodo inestable si es positivo.

Si la matriz no es diagonalizable, tenemos:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y entonces} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

De esta forma el sistema en las nuevas coordenadas dadas por los vectores propios generalizados v_1, v_2, es:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = e^{\lambda t}\tilde{x}_0 + te^{\lambda t}\tilde{y}_0 \\ \tilde{y} = e^{\lambda t}\tilde{y}_0 \end{cases}.$$

De aquí se tiene que si $\lambda < 0$ resulta un nodo asintóticamente estable, y si $\lambda > 0$, es un nodo inestable. De hecho, de la segunda ecuación se puede despejar $t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0}\right)$. Reemplazando en la primera obtenemos

$$\tilde{x} = \tilde{y}\left(\frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0}\right)\right)$$

Si ahora derivamos con respecto a $\tilde{y}$, vemos que

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} = \left(\frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0}\right)\right) + \frac{1}{\lambda} = \frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + t + \frac{1}{\lambda}$$

Resulta claro que $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} \to \infty$ cuando $t \to \infty$, de modo que todas las trayectorias entran tangentes a una recta horizontal.

λ_1, λ_2 imaginarios puros conjugados

Esto equivale (con un cambio de base) al sistema

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \beta\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = -\beta\tilde{x} \end{cases}$$

se tiene que el punto crítico es un centro.

Ahora que ya sabemos como se comporta el sistema lineal en función de sus valores propios, podemos enunciar de forma completa los teoremas de Poincaré y Liapunov:

Teorema 6.1 (Poincaré) . *Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de un (SNLA) no degenerado y sean λ_1, λ_2 los valores propios de $J(\bar{x}, \bar{y})$. El punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ en el (SNLA) será:*

(i) Un nodo si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son distintos y tienen el mismo signo. En este caso además todas los trayectorias (excepto dos) son tangentes en $(\bar{x}, \bar{y})$ a la dirección propia asociada al valor propio de módulo menor. Las otras dos, están sobre la otra dirección propia.

(ii) Un punto silla si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tienen distinto signo. En este caso además hay dos trayectorias convergentes a $(\bar{x}, \bar{y})$ en la dirección propia asociada al valor propio negativo, y dos divergentes en la dirección propia asociada al valor propio positivo. Las demás, tienen como asíntotas las direcciones propias.

(iii) Un punto espiral si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, con partes real e imaginaria distintas de cero.

Teorema 6.2 *Liapunov Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de un (SNLA) no degenerado y sean λ_1, λ_2 los valores propios de $J(\bar{x}, \bar{y})$. El punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ en el (SNLA) será:*

(i) Asintóticamente estable si las partes reales son negativas.

(ii) Inestable si alguno tiene parte real positiva.

Obs: Por simplicidad en los teoremas anteriores se ha hecho referencia a las trayectorias pero las afirmaciones de tipo geométrico se refieren en realidad a sus recorridos.

Los resultados anteriores son la base del análisis de los sistemas no lineales, pero no nos dicen nada en los casos en que los valores propios toman los valores frontera. Por ejemplo, en el caso del péndulo críticamente amortiguado en que $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{L}$, el sistema linealizado tenía un sólo valor propio negativo, lo que correspondería a un nodo asintóticamente estable en el sistema lineal, pero esto no nos permite saber exactamente qué comportamiento tiene el sistema no lineal.

6.5 El enfoque traza - determinante

Consideremos el sistema lineal $X'(t) = AX(t)$, donde $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es una matriz invertible. El origen es el único punto crítico del sistema. Veremos cómo clasificarlo de acuerdo con las relaciones entre la traza y el determinante de A. Para simplificar la notación introducimos las variables

$$x = \mathrm{tr}(A) \quad \text{e} \quad y = \det(A)$$

que determinan el plano traza - determinante. El polinomio característico de la matriz A es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

Sus raíces son

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Las raíces son reales sobre la parábola $4\det(A) = \mathrm{tr}(A)^2$. Con la notación dada arriba esto es $4y = x^2$.

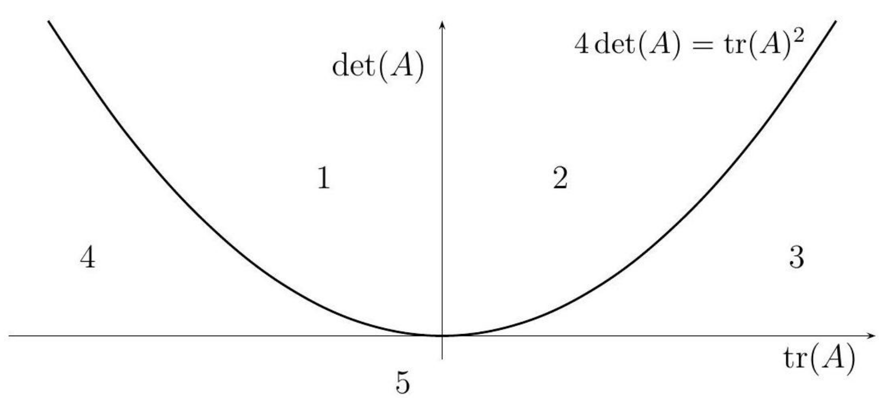


Figura 6.16: Plano traza - determinante.

Cuando estemos en el caso $4y > x^2$ (por encima de la parábola), tendremos el caso de raíces complejas conjugadas. Si $\operatorname{tr}(A) < 0$ (región 1) tendremos un punto espiral inestable; Si $\operatorname{tr}(A) = 0$ (eje OY), un centro; y si $\operatorname{tr}(A) > 0$ (región 2), un punto espiral estable.

En el semiplano $\det(A) < 0$ (región 5) las raíces son reales y tienen distinto signo, por lo que tendremos sólo puntos sillas inestables.

Veamos qué pasa entre la parábola $4y = x^2$ y la recta $y = 0$. Si $\operatorname{tr}(A) > 0$ (región 3) hay dos raíces reales negativas, por lo que tenemos un nodo asintóticamente estable; si *si* $\operatorname{tr}(A) < 0$ (región 4), hay dos raíces reales positivas y tenemos un nodo inestable.

Sobre la parábola tenemos una raíz real con multiplicidad 2. Se tienen nodos inestables si $\operatorname{tr}(A) < 0$ y nodos asintóticamente estables si $\operatorname{tr}(A) > 0$.

Hemos concluido así una forma que nos permite tener una idea general del punto crítico de un sistema sólo viendo la traza y determinante de la matriz, sin tener que calcular valores y vectores propios explícitamente. Sin embargo, si queremos un gráfico preciso del diagrama de fases es inevitable calcular los vectores propios, pues indican las direcciones de tangencia de las trayectorias, para el caso que corresponda.

6.6 Funciones de Liapunov y estabilidad

Un concepto útil en física para clasificar los puntos de equilibrio de un sistema es el de energía, gracias al siguiente principio:

"En sistemas conservativos, un punto crítico es estable si es un mínimo local de la energía total."

A grandes rasgos una función de Liapunov es una energía, en un sentido amplio. En breve daremos una definicón más precisa.

Retomemos el ejemplo del péndulo. Supongamos primero que $c = 0$, lo que significa que no hay roce. El sistema es

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

La energía cinética de este sistema es $K = \frac{1}{2}mL^2\theta'^2 = \frac{1}{2}mL^2y^2$, y la energía potencial $U = mgL(1 - \cos(\theta)) = mgL(1 - \cos(x))$, entonces la energía total es

$$V(x, y) = K + U = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x))$$

Si derivamos esta función con respecto al tiempo usando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = mgL\operatorname{sen}(x)x' + mL^2yy'$$

Pero reemplazando x', y' de las ecuaciones del sistema no lineal, tenemos que $V'(t) = 0$ para todo t, lo que significa que $V(t) = V_0$ para todo t. Es decir, la energía se mantiene constante, por lo que se dice que el sistema es conservativo. Por otra parte, los mínimos locales de V son efectivamente los puntos críticos del sistema: $\{(2k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Si el sistema parte de uno de estos puntos, permanece en él; pero si parte de un punto distinto las trayectorias no pueden tender a ningún punto crítico pues ellas se mantienen a niveles constantes de energía. Esto dice que ningún punto crítico puede ser asintóticamente estable.

Consideremos ahora el péndulo con roce:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\dfrac{c}{m}y - \dfrac{g}{L}\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

Las ecuaciones para la energía son exactamente las mismas, por lo que todavía $V(x,y) = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1-\cos(x))$, pero si derivamos y luego reemplazamos x', y' obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = -cL^2y^2 \leq 0$$

La energía disminuye con el paso del tiempo y se dice que el sistema es disipativo. En este caso la pérdida o disminución de energía se debe al roce y es natural pensar que entonces debe tener más posibilidad de evolucionar hacia un punto de equilibrio estable. Es más, antes ya vimos que la posición vertical hacia abajo es punto de equilibrio asintóticamente estable.

Dado un punto $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, una corona alrededor de $(\bar{x},\bar{y})$ es un conjunto $\mathcal{D}_r$ de la forma

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\| < r\right\}$$

Notemos que si a $\mathcal{D}_r$ le agregamos el punto $(\bar{x},\bar{y})$ obtenemos la bola abierta $B_r(\bar{x},\bar{y})$. Una vecindad perforada de $(\bar{x},\bar{y})$ es un abierto que no contiene a $(\bar{x},\bar{y})$ pero contiene a una corona alrededor de $(\bar{x},\bar{y})$.

Consideremos el $(SNLA)$

$$\begin{cases} x' = F(x,y), & x(t_0) = x_0 \\ y' = G(x,y), & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde F y G son funciones continuamente diferenciables. Sean $(\bar{x},\bar{y})$ un punto crítico aislado del$(SNLA)$ y $\mathcal{D}_r$ una corona alrededor de $(\bar{x},\bar{y})$. Una función continuamente diferenciable $V : B_r(\bar{x},\bar{y}) \to \mathbb{R}$ es una función de Liapunov para el sistema en torno al punto crítico $(\bar{x},\bar{y})$ si satisface las siguientes condiciones:

1. Se anula en $(\bar{x},\bar{y})$ y es positiva en todo $\mathcal{D}_r$.
2. $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \leq 0$ en $\mathcal{D}_r$.

Si la igualdad en (2) es siempre estricta, decimos que V es una función de Liapunov estricta.

Observemos que, a lo largo de las soluciones del sistema, la función de Liapunov decrece. Más precisamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}y'(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}F(x(t),y(t)) + \frac{\partial V}{\partial y}G(x(t),y(t)) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

De esta manera se hace evidente la analogía entre las funciones de Liapunov y la energía.

Teorema 6.3 (Estabilidad por funciones de Liapunov) *Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico aislado del (SNLA).*

1. Si existe una función de Liapunov en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$, entonces el punto crítico es estable.

2. Si además la función de Liapunov es estricta, el punto es asintóticamente estable.

3. Por el contrario, si existe una función con las mismas características pero con $\frac{\partial V}{\partial x} F + \frac{\partial V}{\partial y} G > 0$ en $\mathcal{D}_r$, entonces el punto crítico es inestable.

Dem: *1. Sea $\varepsilon > 0$. Para probar la estabilidad debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ entonces $(x(t), y(t)) \in B_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ para todo $t > 0$. Como V es continua existe*

$$\min\left\{V(x, y) \mid (x, y) \in \partial \bar{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})\right\} = m > 0$$

donde $\bar{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ es la bola cerrada de centro $(\bar{x}, \bar{y})$ y radio ε y $\partial \bar{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ denota su frontera (que es cerrada y acotada). Por la continuidad de V existe $\delta \in (0, r)$ tal que $V(x, y) < m/2$ para todo $(x, y) \in \bar{B}_\delta(\bar{x}, \bar{y})$. En t_0 tomemos la condición inicial $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$, y la trayectoria asociada $(x(t), y(t))$. Sabemos que $V(x_0, y_0) < m/2$. Además

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = V_x F + V_y G \leq 0$$

de donde

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) < m/2 \quad \text{para todo} \quad t \geq 0$$

Como $(x(t), y(t))$ es una función continua, la curva que describe no intersecta $\partial \bar{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ para ningún t pues allí V vale m. Concluimos que $(\bar{x}, \bar{y})$ es estable.

2. Para la establidad asintótica debemos $\delta > 0$ de manera que si $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ entonces $\lim_{t \to \infty}(x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$. Como la función

$$t \mapsto V(x(t), y(t))$$

es positiva y decreciente para cualquier condición inicial, ella tiene un límite L cuando $t \to \infty$. Si $L = 0$, la continuidad de V asegura que $\lim_{t \to \infty}(x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$ que es el único punto donde V se anula. Probaremos ahora que L no puede ser positivo. En efecto, si $L > 0$ entonces $V(x(t), y(t)) \geq L$ para todo t. Por otro lado, siempre se tiene que $V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0)$. Además, el punto 1 dice que $(\bar{x}, \bar{y})$ es estable, de modo que existe $\delta > 0$ tal que si $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ entonces $(x(t), y(t)) \in B_{r/2}(\bar{x}, \bar{y})$. En virtud de la continuidad de V el conjunto

$$\mathcal{K} = \left\{(x, y) \in \bar{B}_{r/2}(\bar{x}, \bar{y}) \mid L \leq V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0)\right\}$$

es cerrado y acotado. Además contiene a la trayectoria y no contiene a $(\bar{x}, \bar{y})$. Luego

$$\max\left\{\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \mid (x(t), y(t)) \in \mathcal{K}\right\} = -k < 0.$$

Tenemos entonces que

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) - kt$$

cantidad que tiende a $-\infty$ cuando $t \to \infty$. Esto es imposible puesto que V no toma valores negativos.

3. Se deja como ejercicio al lector.

Para el ejemplo del péndulo sin roce la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x))$$

claramente se anula en los puntos críticos, y es estrictamente positiva en todos los otros puntos, y vimos que $\frac{dV}{dt} \equiv 0$, por lo que por el Teo. anterior, tenemos que los puntos críticos son estables, que es la misma conclusión que obtuvimos con el análisis de linealización del sistema.

Para el sistema amortiguado, si tomamos la misma función V anterior, tenemos que se cumplen las hipótesis del teorema, pero como $\frac{dV}{dt} = -cLy^2 \leq 0$, sólo podemos concluir que el origen es estable, aunque en realidad sabemos que es asintóticamente estable. En un sistema cualquiera, la función de Liapunov es una herramienta muy útil, pero el problema es que hay que probar con diferentes funciones y tratar de encontrar una que sirva. En el caso de sistemas físicos conservativos, la energía total del sistema en una buena función a considerar, pero ya notamos que en el caso del péndulo amortiguado quizá pueda hacerse algo mejor.

En el péndulo amortiguado, tomemos $\frac{c}{m} = \frac{g}{L} = 1$ para facilitar los cálculos. Probemos con la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

que claramente cumple con la condición de anularse sólo en el punto $(x, y) = (0, 0)$, es continuamente diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G &= (x + y + 2x)y - (x + y + y)(y + \operatorname{sen}(x)) \\ &= 2xy - y^2 - (x + 2y)\operatorname{sen}(x).\end{aligned}$$

Pero del teorema de Taylor sabemos que

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{\cos(\xi)}{3}x^3$$

para algún $\xi \in (0, x)$. Como para usar el teorema basta encontrar una vecindad del origen, consideremos $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, con lo que $0 < \cos(\xi) < 1$. Reemplazando esto vemos que

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -\left(x^2 + y^2\right) + \frac{\cos(\xi)}{3}x^3(x + 2y)$$

No es directo establecer si esta expresión cambia de signo o no, pero si hacemos el cambio a coordenadas polares: $x = r\cos(\theta), y = r\operatorname{sen}(\theta)$, obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -r^2 + \frac{\cos(\xi)}{3}r^4\left(\cos(\theta)^4 + 2\cos(\theta)^3\sin(\theta)\right)$$

Claramente

$$-1 < \cos(\theta)^4 + 2\cos(\theta)^3\operatorname{sen}(\theta) < 3$$

y entonces

$$-\frac{1}{3} < \frac{\cos(\xi)}{3}\left(\cos(\theta)^4 + 2\cos(\theta)^3\operatorname{sen}(\theta)\right) < 1$$

Luego, tomando $r < 1$, se tiene

$$\left| r^2 \frac{\cos(\xi)}{3} \left(\cos(\theta)^4 + 2\cos(\theta)^3 \operatorname{sen}(\theta)\right)\right| < 1$$

de donde vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} F + \frac{\partial V}{\partial y} G &= -r^2 \left\{ 1 + r^2 \left(\frac{\cos(\xi)}{3} \left(\cos(\theta)^4 + 2\cos(\theta)^3 \operatorname{sen}(\theta)\right)\right)\right\} \\ &< 0 \end{aligned}$$

en una vecindad del origen. El teorema de estabilidad por funciones de Liapunov nos dice que el origen es un punto crítico asintóticamente estable.

Índice alfabético