

---

# APUNTES DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

(CÁLCULO 2 IMA 2023)

---

Versión del 28 de junio de 2023

Víctor Andrés Osorez Escalona  
Departamento de Matemática, Física y Estadística  
Universidad Católica del Maule, Chile

---

## Índice general

---

<b>Contents</b>	<b>IV</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>2. Cálculo Diferencial en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>6</b>
2.1. Base algebraica y geométrica de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
2.2. Funciones con valores en $\mathbb{R}^m$ . . . . .	9
2.3. Nociones de topología . . . . .	10
2.3.1. Sucesiones . . . . .	11
<b>3. Funciones de <math>\mathbb{R}^n</math> en <math>\mathbb{R}^m</math>: límites y continuidad, la diferencial, derivadas parciales y derivadas direccionales</b>	<b>16</b>
3.1. Funciones reales de $n$ variables . . . . .	16
3.2. Límites y la continuidad . . . . .	17
3.2.1. Conexión entre el espacio $\mathbb{R}^n$ y el espacio vectorial $\mathbb{V}^n$ . . . . .	17
3.2.2. Continuidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ . . . . .	22
3.3. Límites direccionales y la continuidad direccional . . . . .	24
3.4. Derivadas direccionales . . . . .	26
3.4.1. Derivadas parciales . . . . .	28
3.5. Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	31
3.6. Derivadas parciales de orden mayor . . . . .	39
3.7. Algunos teoremas de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ . . . . .	44
3.7.1. La regla de la cadena . . . . .	46
<b>4. Funciones de <math>\mathbb{R}^n</math> en <math>\mathbb{R}^m</math>: aplicaciones</b>	<b>48</b>
4.1. El Teorema de Taylor . . . . .	48

4.2. Funciones implícitas . . . . .	51
4.3. Funciones inversas . . . . .	57
4.4. Extremos de funciones de varias variables . . . . .	61
4.5. Extremos con restricciones y multiplicadores de Lagrange . . . . .	66
<b>5. La integral de Riemann en <math>\mathbb{R}^N</math></b>	<b>70</b>
5.1. Definición y existencia de la integral múltiple de Riemann . . . . .	70
5.2. Evaluación de integrales múltiples de Riemann . . . . .	75
5.3. Cambio de variable en integrales múltiples . . . . .	87
5.3.1. Difeomorfismos . . . . .	87
5.3.2. Integración doble en coordenadas polares . . . . .	92
5.3.3. Integración triple en coordenadas cilíndricas . . . . .	94
5.3.4. Integración triple en coordenadas esféricas . . . . .	97
5.4. Curvas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	99
5.4.1. Extensión de una curva . . . . .	105
5.4.2. Preservación de la orientación de una curva . . . . .	106
5.5. Longitud de arco. . . . .	107
5.5.1. Longitud de arco . . . . .	107
5.6. Integral de línea de un campo escalar . . . . .	110
5.6.1. Integral de línea de un campo vectorial . . . . .	113
5.6.2. Aplicaciones: Masa, centro de masa, momentos y trabajo . . . . .	115
5.6.3. Campos conservativos e independencia de la trayectoria . . . . .	121
5.7. Conjuntos conexos . . . . .	122
5.7.1. Conjuntos convexos . . . . .	123
5.7.2. Conjuntos simplemente conexos y múltiplemente conexos en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	124
5.7.3. El rotor y sus propiedades . . . . .	124
5.7.4. Integral de línea de un campo vectorial independiente de la trayectoria . . . . .	126
5.7.5. Teorema de Green . . . . .	133

# CAPÍTULO 1

## Preliminares

Muchos teoremas en  $\mathbb{R}^n$  tienen una demostración análoga a las del curso de Cálculo en una variable. Daremos algunos de estos.

**Teorema 1.1** (Teorema de Bolzano-Weierstrass en  $\mathbb{R}$ )

Sean  $[a, b]$  un intervalo cerrado y acotado y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos contrarios, entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = 0$ .

**Dem:** Sin pérdida de generalidad supongamos que  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$ . Escojamos  $c \in (a, b)$  y de esto se tienen tres casos:

1.  $f(c) < 0$  y nos restringimos al intervalo  $[a_1, b_1]$  con  $a_1 = c$  y  $b_1 = b$ .
2.  $f(c) = 0$  en este caso concluye la demostración.
3.  $f(c) > 0$  y nos restringimos al intervalo  $[a_1, b_1]$  con  $a_1 = a$  y  $b_1 = c$ .

Para los casos 1. y 3. consideremos intervalos  $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \dots \subset [a, b]$  tal que  $f(a_n) < 0$  y  $f(b_n) > 0$ . Escojamos para cada intervalo un  $c$  que es punto medio y así cada intervalo es la mitad del anterior. De esta forma,  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$  y para  $n \rightarrow \infty$  se tendrá que  $a_n - b_n \rightarrow 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

Sea  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , por ser  $f$  continua

$$f(c) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

como  $f(a_n) < 0$  tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$ .

Análogamente si tomamos

$$f(c) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

como  $f(b_n) > 0$  tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$ . Se concluye entonces que  $f(c) = 0$ .

**Teorema 1.2** (Teorema del valor intermedio en  $\mathbb{R}$ )

Sean  $[a, b]$  un intervalo cerrado y acotado y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $f(a) \neq f(b)$ , entonces dado  $k \in (f(a), f(b))$  existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = k$ .

**Dem:** Sin pérdida de generalidad supongamos que  $f(a) < f(b)$ . Definamos  $g(x) = f(x) - k$  y entonces  $g(a) = f(a) - k < 0$  y  $g(b) = f(b) - k > 0$ . De acuerdo al teorema 1.1 existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = k$ .

**Teorema 1.3** Sean  $[a, b]$  un intervalo cerrado y acotado y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y diferenciable en  $(a, b)$ . Si  $f$  tiene un máximo (o mínimo) en al menos un punto  $c \in (a, b)$ , entonces  $f'(c) = 0$ .

**Dem:** Haremos la demostración para el caso de máximos. La demostración para el caso de un mínimo es análoga y queda de tarea.

Si  $f$  tiene al menos un máximo en  $c$  entonces

$$f(c + h) \leq f(c) \quad \forall h \text{ tal que } c + h \in [a, b]$$

De esta forma,  $f(c + h) - f(c) \leq 0$ .

Tomando  $h > 0$  se tiene que

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0 \quad (*)$$

Tomando  $h < 0$  se tiene que

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0 \quad (**)$$

De (\*) y (\*\*) se concluye que  $f'(c) = 0$ .

**Teorema 1.4** (Teorema de Rolle en  $\mathbb{R}$ )

Sean  $[a, b]$  cerrado y acotado y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y diferenciable. Si  $f(a) = f(b)$ , entonces existe al menos un  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

**Dem:** Tenemos tres casos posibles:

1. Si  $f(c) < f(a)$  para algún  $c \in (a, b)$ . Entonces, existe  $c \in (a, b)$  donde  $f$  alcanza su valor mínimo. De acuerdo al teorema 1.3  $f'(c) = 0$ .
2. Si  $f(a) = f(c) \quad \forall c \in (a, b)$ . Entonces, por ser  $f$  constante, su derivada es nula en  $(a, b)$  y se cumple el teorema.
3. Si  $f(c) > f(a)$  para algún  $c \in (a, b)$ . Entonces, existe  $c \in (a, b)$  donde  $f$  alcanza su valor máximo. De acuerdo al teorema 1.3  $f'(c) = 0$ .

La interpretación geométrica del teorema de Rolle es la siguiente: Si una función continua y derivable cruza dos veces una recta paralela al eje  $x$ , entonces existe entre los dos cruces consecutivos un punto donde la tangente al gráfico de la función es paralela al eje  $x$ .

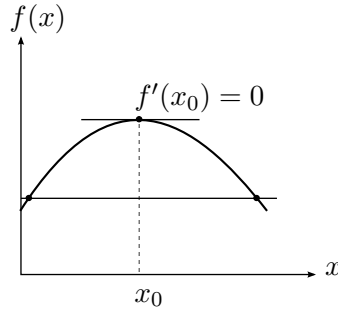


Figura 1.1: Teorema de Rolle.

**Teorema 1.5** (Teorema del valor medio en  $\mathbb{R}$ )

Sean  $[a, b]$  un intervalo cerrado y acotado y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y derivable en  $(a, b)$ . Entonces, existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Dem:** Definamos

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

se tiene que  $g$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ .

Observemos que  $g(a) = f(a)$  y  $g(b) = f(a)$  lo que implica  $g(a) = g(b)$ , por lo tanto podemos aplicar el teorema 1.4. Entonces, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$  y se tendrá que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La interpretación geométrica del teorema del valor medio es la siguiente: Si trazamos una secante que une dos puntos de una función continua y derivable, entonces existe un punto donde la tangente al gráfico de la función y la secante ya definida son paralelas.

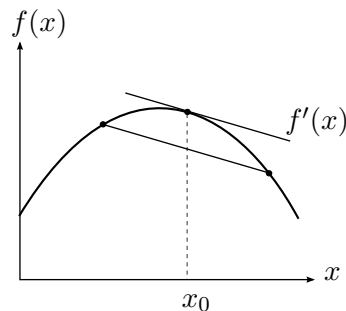


Figura 1.2: Teorema del valor medio.

**Teorema 1.6** (Primer teorema fundamental del cálculo)

Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $x \in [a, b]$ , entonces la función  $F$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

es derivable en  $(a, b)$  y además  $F'(x) = f(x)$  en  $(a, b)$ .

**Dem:** Sea  $c \in (a, b)$ . Debemos demostrar que el límite

$$F'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

existe y vale  $f(c)$ . Notemos que

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(x)dx - \int_a^c f(x)dx = \int_c^{c+h} f(x)dx$$

Consideremos por separado los casos  $h > 0$  y  $h < 0$ :

1. Sea  $h > 0$ : Como  $f$  es continua en  $[c, c+h]$ , se tiene que existen valores  $a_1$  y  $b_1$  en  $[c, c+h]$  tales que

$$f(a_1) \leq f(c) \leq f(b_1) \quad \forall x \in [c, c+h]$$

Integrando en  $[c, c+h]$

$$f(a_1)h \leq F(c+h) - F(c) \leq f(b_1)h$$

$$f(a_1) \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq f(b_1)$$

Si  $h \rightarrow 0^+$  entonces  $a_1 \rightarrow c$  y  $b_1 \rightarrow c$ . Como  $f$  es continua  $f(a_1) \rightarrow f(c)$  y  $f(b_1) \rightarrow f(c)$ .  
Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c) \quad (*)$$

2. Sea  $h < 0$ : Como  $f$  es continua en  $[c+h, c]$ , se tiene que existen valores  $a_2$  y  $b_2$  en  $[c+h, c]$  tales que

$$f(a_2) \leq f(c) \leq f(b_2) \quad \forall x \in [c+h, c]$$

Integrando en  $[c+h, c]$

$$f(a_2)(-h) \leq -(F(c+h) - F(c)) \leq f(b_2)(-h)$$

$$f(a_2) \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq f(b_2)$$

Si  $h \rightarrow 0^-$  entonces  $a_2 \rightarrow c$  y  $b_2 \rightarrow c$ . Como  $f$  es continua,  $f(a_2) \rightarrow f(c)$  y  $f(b_2) \rightarrow f(c)$ .  
Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c) \quad (**)$$

De (\*) y (\*\*) se obtiene

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

**Teorema 1.7** (Segundo teorema fundamental del cálculo)

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Si existe una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y derivable tal que  $F'(x) = f(x)$  en  $(a, b)$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Dem:** Sea  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  una partición cualquiera del intervalo  $[a, b]$ , entonces en cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  la función  $F(x)$  cumple las hipótesis del teorema del valor medio (teorema 1.5), es decir

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c)(x_i - x_{i-1})$$

Como  $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$ , entonces  $F'(c) = f(c)$  y además

$$m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq f(c)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

Aplicando  $\sum_{i=1}^n (\cdot)$  se obtiene

$$s(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, P)$$

Como  $f$  es integrable en  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



## CAPÍTULO 2

### Cálculo Diferencial en $\mathbb{R}^n$

Nos interesa ampliar las herramientas aprendidas en el curso de Cálculo a funciones de varias variables. Para esto debemos introducir, entre otros, los conceptos de derivada parcial y diferencial. Con ambos conceptos podremos entender diversas herramientas que nos permitirán continuar la tarea de maximizar o minimizar funciones que pueden estar sujetas a una o más restricciones.

#### 2.1 Base algebraica y geométrica de $\mathbb{R}^n$

**Definición 2.1** Dotamos al conjunto  $\mathbb{R}^n$  de una estructura de espacio vectorial mediante las siguientes operaciones: Para  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  definimos

Suma:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Producto por escalar:

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

El espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  tiene dimensión  $n$ . Entre las muchas posibles bases de  $\mathbb{R}^n$  nos interesará considerar, por su simplicidad, la llamada base canónica  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ , donde  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  con el uno en la posición  $i$ . Así todo  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se puede representar en términos de la base canónica como

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$$

Habiendo ya definido la estructura algebraica de  $\mathbb{R}^n$  vamos a introducir la estructura geométrica de  $\mathbb{R}^n$  a través del producto interno (o producto punto)

**Definición 2.2** Dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , se define el producto interno o punto de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

La siguiente proposición resume las propiedades básicas del producto interno. Su demostración es muy simple.

**Proposición 2.1.1** (*Propiedades del producto interno*)

1. *Positividad:* Para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se tiene  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  y  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
2. *Linealidad:* Para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$   $\langle \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ .
3. *Simetría:* Para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$   $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ .

La noción de producto interno induce de manera natural la noción de norma o longitud de un vector.

**Definición 2.3** Se define la norma de un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

La siguiente proposición establece una desigualdad entre producto interno y norma de vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Ella nos permite definir la noción de ángulo entre vectores de  $\mathbb{R}^n$ , dejando en evidencia que el producto interno determina la geometría de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 2.1.2** (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*)

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Se tiene la igualdad si y sólo si  $\mathbf{x}$  es múltiplo escalar de  $\mathbf{y}$  o uno de ellos es cero.

**Dem:** Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  y sea  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces por las propiedades del producto interno tenemos que

$$0 \leq \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

Si  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  entonces la desigualdad naturalmente vale. Si  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  entonces notamos que la expresión de arriba determina una función cuadrática que se anula a lo más una vez en  $t \in \mathbb{R}$ . Esto implica que el discriminante debe ser negativo o nulo, es decir,

$$4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq 0$$

de donde se obtiene la desigualdad deseada. Cuando  $\mathbf{x}$  es múltiplo de  $\mathbf{y}$  entonces claramente se tiene la igualdad. Queda de tarea probar la recíproca.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite definir la noción de ángulo entre vectores.

**Definición 2.4** Dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  llamaremos ángulo entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  a:

$$\theta = \arccos \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right)$$

entendemos que  $\theta \in [0, \pi]$ .

Con esta definición podemos hablar de vectores ortogonales cuando el ángulo entre ellos es de  $90^\circ$ , es decir, cuando  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ .

También vemos la validéz del teorema del coseno:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\theta)$$

Cuando los vectores son ortogonales tenemos el teorema de Pitágoras.

Como ya dijimos, el producto interno induce la noción de norma, la que le da a  $\mathbb{R}^n$  su carácter topológico, como ya veremos. Por el momento veamos las propiedades básicas de la norma.

**Proposición 2.1.3** (Propiedades de la norma)

1. Positividad: Para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$   $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  y  $\|\mathbf{x}\| = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
2. Homogeneidad: Para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$   $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ .
3. Desigualdad triangular: Para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$   $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .

**Dem:** 1. y 2. son directas de las propiedades del producto interno y la definición de norma.

La Desigualdad Triangular es una consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  tenemos

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$$

de donde se obtiene

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$$

En  $\mathbb{R}^n$  se definen las siguientes normas.

1. Norma Euclideana:  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ .
2. Norma infinito:  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
3. Norma uno:  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ .

**Nota:** Toda norma sobre un espacio vectorial  $V$  (en nuestro caso  $\mathbb{R}^n$ ) induce una distancia:

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

**Definición 2.5** Dos normas  $\|\cdot\|_*$  y  $\|\cdot\|_\bullet$  sobre un espacio vectorial  $V$  son equivalentes si existen constantes positivas  $c_1$  y  $c_2$  tales que

$$c_1\|\mathbf{x}\|_* \leq \|\mathbf{x}\|_\bullet \leq c_2\|\mathbf{x}\|_* \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

**Teorema 2.1** Todas las normas sobre un espacio de dimensión finita son equivalentes.

**Corolario 2.1** En  $\mathbb{R}^n$ , la norma euclídea, la de la suma y la del máximo, son equivalentes.

## 2.2 Funciones con valores en $\mathbb{R}^m$

**Definición 2.6** Llamaremos a  $f$  función a valores en  $\mathbb{R}^m$  si  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Observamos que el argumento de  $f$  es un vector  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  y que la imagen de  $\mathbf{x}$  es un vector de  $\mathbb{R}^m$ . Así  $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ , donde las funciones  $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i$ , se conocen como funciones coordenadas.

La posibilidad de dibujar en el caso de dimensiones pequeñas, es siempre algo muy útil. Más aún ahora que tenemos programas computacionales (Matlab, Wolfram Mathematica, Gnu Octave, etc.) muy eficientes para esta tarea. A continuación damos alguna terminología.

**Definición 2.7** Llamaremos grafo de una función  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  al conjunto:

$$G(f) = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in D\}$$

Notemos que  $G(f) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ . Este se podrá dibujar cuando  $m = 1$  y  $n = 1$  o  $n = 2$ . En el primer caso el grafo es una curva y en el segundo una superficie.

**Definición 2.8** Cuando  $m = 1$  y dado  $c \in \mathbb{R}$  se define el conjunto de nivel de la función  $f$  como

$$N_c(f) = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = c\}$$

En el caso en que  $n = 2$  y  $n = 3$  el conjunto de nivel  $N_c(f)$  se puede dibujar. Se le conoce como curva de nivel cuando  $n = 2$  y superficie de nivel si  $n = 3$ .

### Ejemplo 2.1

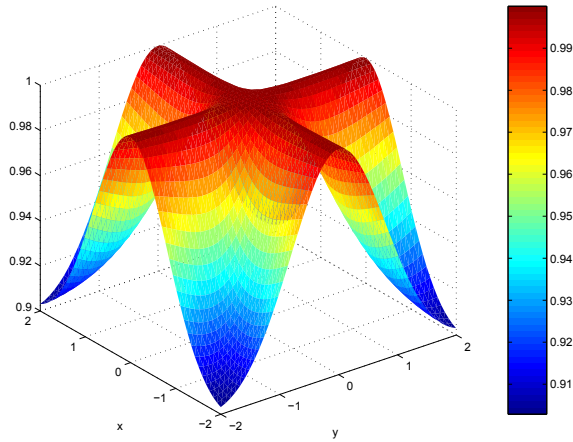


Figura 2.1: Grafo de  $\text{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2+1}\right)$

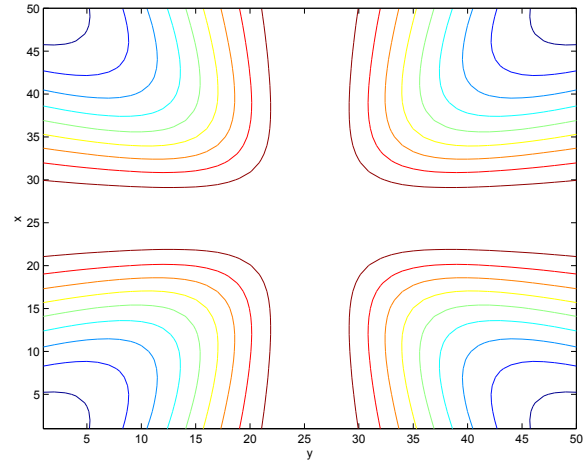


Figura 2.2: Curvas de nivel de  $\text{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2+1}\right)$

## 2.3 Nociones de topología

La noción de límite y continuidad de funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  involucra el carácter topológico de estos espacios, inducido por la norma.

En el estudio de la topología de  $\mathbb{R}^n$ , un rol fundamental es jugado por las bolas abiertas.

**Definición 2.9** Dados  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ , llamaremos bola abierta de centro  $\mathbf{x}^0$  y radio  $r$  al conjunto

$$B(\mathbf{x}^0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < r\}$$

Llamaremos bola cerrada de centro  $\mathbf{x}^0$  y radio  $r$  al conjunto

$$\overline{B}(\mathbf{x}^0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \leq r\}$$

**Definición 2.10** Diremos que  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto si

$$(\forall \mathbf{x}^0 \in A)(\exists r > 0) : B(\mathbf{x}^0, r) \subset A$$

**Ejemplo 2.2**  $\mathbb{R}^n$  y el conjunto vacío  $\emptyset$ , son conjuntos abiertos. Aún cuando  $\mathbb{R}^n$  es obviamente abierto, el caso del conjunto vacío requiere una reflexión. Si  $\emptyset$  no es abierto entonces existe  $\mathbf{x}^0 \in \emptyset$  para el cual  $B(\mathbf{x}^0, r) \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ , para cada  $r > 0$ . Esto es absurdo pues no hay elementos en  $\emptyset$ .

**Ejemplo 2.3** El conjunto  $A = \{(x, y) : x > 1\}$  es un conjunto abierto. En efecto, si  $(x, y) \in A$  entonces

$$B\left((x, y), \frac{x-1}{2}\right) \subset A$$

**Ejemplo 2.4** Si  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$  entonces  $B(\mathbf{x}^0, r)$  es un conjunto abierto. En efecto, si  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^0, r)$  entonces

$$B(\mathbf{x}, r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|) \subset B(\mathbf{x}^0, r)$$

Usando la desigualdad triangular muestre la veracidad de esta última afirmación y haga un dibujo.

**Definición 2.11** Diremos que  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto cerrado si  $A^C$  es abierto.

**Nota:** Los conjuntos  $\mathbb{R}^n$  y  $\emptyset$  son abiertos y cerrados. También existen conjuntos que no son abiertos ni cerrados. Ver ejemplo a continuación.

**Ejemplo 2.5** Sean  $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  y  $B = A \cup \{0\}$ . Entonces:

1.  $A$  no es cerrado. En efecto  $A^C$  no es abierto, pues  $0 \in A^C$  y:  $(\forall r > 0) B(0, r) \not\subset A^C$ . Lo anterior pues cualquiera sea  $r > 0$  se tiene que

$$(\exists n \in \mathbb{N}) \text{ tal que } \frac{1}{n} < r$$

Es decir,  $\frac{1}{n} \in B(0, r)$ .

2.  $A$  no es abierto pues  $1 \in A$ , pero  $(\forall r > 0) B(1, r) \not\subset A$ .
3.  $B$  es cerrado y no es abierto.

### 2.3.1 Sucesiones

Como en el caso de  $\mathbb{R}$  uno puede definir sucesiones de vectores en  $\mathbb{R}^p$ . Se trata de una función de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^p$  tales que  $n \rightarrow \mathbf{x}_n$ . Usualmente se considera la notación  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definición 2.12** Una sucesión  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}^p$  se dice sucesión convergente a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  si:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N}) : \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon \ (\forall n \geq k_0)$$

En el caso que  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^p$  converge a  $\mathbf{x}$  anotamos  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$  o  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ . Notamos que la condición  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$  es equivalente a  $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ .

Es interesante que uno puede caracterizar los conjuntos cerrados mediante el uso de sucesiones que se definen a continuación.

**Proposición 2.3.1**  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  es cerrado si y sólo si:

$$\text{Para toda sucesión } \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A : (\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{x} \in A$$

**Dem:** ( $\Rightarrow$ ): Supongamos que  $A$  es cerrado. Sea  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  una sucesión cualquiera tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ . Queremos demostrar que  $\mathbf{x} \in A$ . Supongamos que no, es decir, que  $\mathbf{x} \in A^C$ . Como  $A$  es cerrado, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset A^C$ . Por otra parte, de la definición de límite, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$  para todo  $n \geq k_0$ , lo que es imposible pues  $\mathbf{x}_n \in A$ .

( $\Leftarrow$ ): Para demostrar la recíproca probemos la contrarrecíproca. Es decir, si  $A$  no es cerrado entonces existe una sucesión  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  que converge a  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x} \notin A$ .

Como  $A$  no es cerrado,  $A^C$  no es abierto, entonces existe un punto  $\mathbf{x} \in A^C$  tal que

$$\text{Para todo } \varepsilon > 0 \text{ se tiene } B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Esta proposición nos permite construir una sucesión  $\{\mathbf{x}_n\} \subset A$  de la siguiente manera: para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  entonces, como  $B(\mathbf{x}, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ , podemos elegir  $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}, \frac{1}{n})$  y  $\mathbf{x}_n \in A$ . Por definición esta sucesión converge a  $\mathbf{x}$ , concluyendo la demostración pues  $\mathbf{x} \notin A$ .

**Definición 2.13 (Subsucesión)** Sea  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{R}^p$ . Consideremos una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente creciente, es decir,  $n < m \Rightarrow f(n) < f(m)$ . Entonces, la nueva sucesión  $\{\mathbf{x}_{f(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  se llama subsucesión de  $\{\mathbf{x}_n\}$ . A menudo se anota  $n_k = f(k)$  y así la subsucesión se anota como  $\{\mathbf{x}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 2.6** Las sucesiones siguientes

$$\left\{ \left( -\frac{1}{2} \right)^{2n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \left\{ \left( -\frac{1}{2} \right)^{2n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ y } \left\{ \left( -\frac{1}{2} \right)^{8n+7} \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

son subsucesiones de  $\left\{ \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

**Teorema 2.2** Sea  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en un espacio normado, en nuestro caso  $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ . Entonces  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\mathbf{x}$  si y sólo si toda subsucesión  $\{\mathbf{x}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\mathbf{x}$

**Dem:** Tarea.

**Ejercicio 2.1** Considere la sucesión  $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$  definida por

$$\mathbf{x}_n = \left( (-1)^n, \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right).$$

Muestre que no converge.

**Propiedad 2.1** Sea  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}^p$ ; se verifica que:

1. Si  $\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p)$  para  $n \in \mathbb{N}$  y si  $\mathbf{l} = (l^1, l^2, \dots, l^p) \in \mathbb{R}^p$ , entonces:

$$\left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{l} \right] \Leftrightarrow \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = l^i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, p \right]$$

2. Si  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente, entonces  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada (es decir, está acotada la sucesión  $(\|\mathbf{x}_n\|)$ , de números reales).
3. Si  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge hacia  $\mathbf{l}$ , entonces también converge hacia  $\mathbf{l}$  toda subsucesión de  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejercicio 2.2** Considere la sucesión de vectores  $\{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/n \\ (2n+1)/(5n+4) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mostrar que  $\{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ . ¿Cuál norma escogió para probar la convergencia?

¿Puede probar la convergencia de la sucesión utilizando una norma diferente?

**Ejercicio 2.3** Sean  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dos sucesiones, de puntos de  $\mathbb{R}^p$ . Pruebe que

$$\left. \begin{array}{l} \lim \mathbf{x}_n = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^p \\ \lim \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim \mathbf{y}_n = \mathbf{l}$$

**Proposición 2.3.2** El límite de una sucesión, cuando existe, es único.

**Dem:** Supongamos que  $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_1$  y  $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_2$ . Tendremos que para todo  $\varepsilon > 0$  existen enteros  $n_1$  y  $n_2$  tales que  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1\| \leq \varepsilon/2$  para todo  $n \geq n_1$  y  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_2\| \leq \varepsilon/2$  para todo  $n \geq n_2$ . Sea  $m = \max\{n_1, n_2\}$  tenemos que

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \leq \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m\| + \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y esta desigualdad es válida para todo  $\varepsilon > 0$ , por lo tanto  $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = 0$  y por las propiedades de la norma concluimos que  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ .

**Nota:** En adelante escribiremos  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$  en lugar de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$  para referirnos al límite de una sucesión.

**Propiedad 2.2** Si  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son dos sucesiones convergentes, de puntos de  $\mathbb{R}^p$ , entonces también son convergentes las sucesiones  $\{\lambda \mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{\|\mathbf{x}_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y se verifica que:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \mathbf{x}_n) = \lambda \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n \right)$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_n \right)$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n \right\|$



**Ejercicio 2.4** Muestre que la sucesión  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , de puntos de  $\mathbb{R}^2$ , cuyo elemento  $n$ -ésimo es

$$x_n = \left( \frac{2n}{n+1} \sin \frac{n\pi}{2}, \frac{n+5}{3n} \cos \frac{n\pi}{2} \right)$$

no converge.

**Definición 2.14** (Sucesión de Cauchy)

Una sucesión  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se dice de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

**Nota:** Las nociones de sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy no cambian según la norma por la equivalencia de estas.

**Proposición 2.3.3** Toda sucesión convergente es sucesión de Cauchy.

**Dem:** Supongamos que  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\mathbf{x}$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existirá  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon/2$  para cualquier  $n \geq n_0$ . Entonces

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

lo cual concluye la demostración.

**Nota:** En general no toda sucesión de Cauchy es convergente por lo que la recíproca de la proposición es falsa.

Continuando con nuestra discusión sobre la topología de  $\mathbb{R}^n$  hacemos algunas nuevas definiciones.

**Definición 2.15** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Entonces:

1.  $\mathbf{x} \in A$  se dice punto interior de  $A$  si  $(\exists \varepsilon > 0) : B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset A$ .
2.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se dice punto adherente de  $A$  si  $(\forall \varepsilon > 0) : B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ .
3.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se dice punto de acumulación de  $A$  si  $(\forall \varepsilon > 0) : (B(\mathbf{x}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap A \neq \emptyset$ .
4.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se dice punto frontera de  $A$  si  $(\forall \varepsilon > 0) : B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap A^C \neq \emptyset$ .

Observamos que un punto adherente de  $A$  no necesita estar en  $A$ , así mismo un punto de acumulación y un punto frontera no necesitan estar en  $A$ .

**Definición 2.16** Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  se definen los siguientes conjuntos:

1. Interior de  $A$ :  $\text{int}(A) = \{x \in A : x \text{ es punto interior de } A\}$ .
2. Adherencia de  $A$ :  $\text{adh}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto adherente de } A\}$ .
3. Derivado de  $A$ :  $\text{der}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto de acumulación de } A\}$ .
4. Frontera de  $A$ :  $\partial A = \text{fr}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto frontera de } A\}$ .

**Ejemplo 2.7** En  $\mathbb{R}$  sea  $A = [1, 2] \cup \{3\}$ . Entonces:  $\text{der}(A) = [1, 2]$ ,  $\text{int}(A) = (1, 2)$ ,  $\text{adh}(A) = [1, 2] \cup \{3\}$  y  $\text{fr}(A) = \{1, 2, 3\}$ .

**Ejercicio 2.5** Para los siguientes conjuntos determinar la adherencia; el interior; el conjunto de los puntos de acumulación y la frontera.

1.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 < y \leq x, x > 0\} \cup \{0\}$ .
2.  $B = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Se obtiene de las definiciones la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.4**  $A$  es abierto si y sólo si  $A = \text{int}(A)$  y  $A$  es cerrado si y sólo si  $A = \text{adh}(A)$ .

**Definición 2.17** Las siguientes proposiciones, que están referidas a un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^p$ , son equivalentes<sup>1</sup> entre sí:

- a) El conjunto  $C \subset \mathbb{R}^p$  es cerrado y está acotado.
- b) Todo **recubrimiento abierto** de  $C \subset \mathbb{R}^p$  admite un **subrecubrimiento finito**; esto es: si  $\mathcal{A} = \{A_i / i \in I\}$  es una familia de conjuntos abiertos tal que  $C \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ , entonces existen unos ciertos  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k} \in \mathcal{A}$  tales que  $C \subset A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}$  pertenece a  $C$ .

Se llaman **conjuntos compactos** de  $\mathbb{R}^p$  a aquellos conjuntos  $C \subset \mathbb{R}^p$  para los que se verifica una cualquiera de las condiciones anteriores.

<sup>1</sup>En general (si, en lugar de  $\mathbb{R}^p$ , se considera un espacio métrico general, cualquiera), las condiciones b) y c) siguen siendo equivalentes, siempre; se llaman conjuntos compactos a los que las satisfacen. En el caso general se demuestra que (como aquí) todo conjunto compacto es cerrado y está acotado, sin que (en el caso general) se verifique necesariamente el recíproco, aunque éste sí que es cierto en  $\mathbb{R}^p$  (teorema de Heine-Borel).

## CAPÍTULO 3

---

### Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ : límites y continuidad, la diferencial, derivadas parciales y derivadas direccionales

---

#### 3.1 Funciones reales de $n$ variables

Empezaremos ahora el análisis de funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado que ambos  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}$  son espacios métricos, todas las definiciones y todos los teoremas del capítulo anterior que se refieren a espacios métricos quedan válidos.

Para el caso particular de una función

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

todavía podemos visualizar la función considerando el conjunto de puntos

$$S_f := \{(x, y, z) : (x, y) \in D(f), z = f(x, y)\}$$

Bajo hipótesis apropiadas,  $S_f$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejemplo 3.1** 1. Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$D(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}, \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Evidentemente,  $S_f$  es el hemisfério superior de una esfera de radio 1.

2. Para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$D(f) = \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy,$$

$S_f$  es un paraboloide hiperbólico.

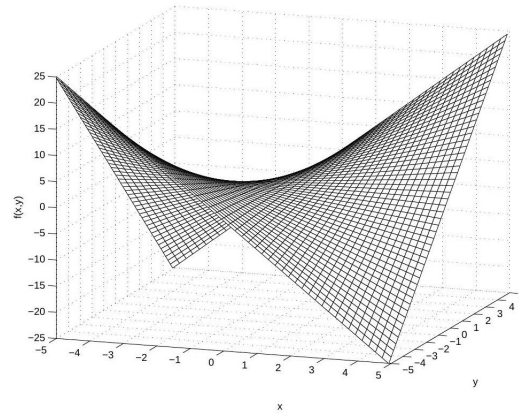


Figura 3.1: Gráfica de la función  $f(x, y) = xy$ .

## 3.2 Límites y la continuidad

### 3.2.1 Conexión entre el espacio $\mathbb{R}^n$ y el espacio vectorial $\mathbb{V}^n$

Los elementos de ambos espacios son definidos por  $n$  componentes reales, y las fórmulas de la distancia entre dos puntos de  $\mathbb{R}^n$  y entre dos vectores de  $\mathbb{V}^n$  son idénticas. En la literatura es muy común identificar ambos espacios. Pero es importante distinguir entre  $\mathbb{R}^n$  como un espacio de puntos y  $\mathbb{V}^n$  como un espacio de vectores.

Sin embargo, los vectores de  $\mathbb{V}^n$  pueden ser utilizados para la descripción del espacio  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 3.1** Un vector  $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\} \in \mathbb{V}^n$  define una aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{v} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D(\mathbf{v}) = \mathbb{R}^n, \\ x &\mapsto \mathbf{v}(x) = \mathbf{v}((x_1, \dots, x_n)) = (x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n). \end{aligned}$$

Esta aplicación se llama *traslación*.

**Definición 3.2** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{a} \in \text{der}(A)$ . Entonces decimos que  $\mathbf{b}$  es el límite de  $f$  cuando  $\mathbf{x}$  tiende a  $\mathbf{a}$  y escribimos  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) \wedge (\mathbf{x} \in A) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$$

**Nota:** En la anterior definición pedimos que  $\mathbf{a} \in \text{der}(A)$  para que siempre haya puntos cerca de  $\mathbf{a}$ .

A continuación desarrollaremos dos ejemplos en los cuales debemos efectivamente demostrar el valor de un cierto límite. Para ello es necesario dar una fórmula que permita determinar  $\delta$  dado  $\varepsilon$ .

**Ejemplo 3.2** Demuestre usando la definición que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 - 1) = 0$$

**Solución:** En primer lugar vemos que a partir de

$$\|(x, y) - (1, 1)\| < \delta$$

se puede deducir directamente que

$$|x - 1| < \delta \text{ e } |y - 1| < \delta \text{ y entonces } |x - 1| < \delta \text{ y } |x| < \delta + 1 \quad (*)$$

Por otro lado

$$|f(x) - b| = |x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| \quad (**)$$

Así, dado  $\varepsilon > 0$  podemos elegir  $\delta > 0$  de modo que

$$\delta(\delta + 2) < \varepsilon$$

Entonces, si  $\|(x, y) - (1, 1)\| < \delta$ , tenemos (\*), y entonces obtenemos de (\*\*) que

$$(|f(x) - b| < \delta(\delta + 2)) < \varepsilon$$

El ejemplo anterior es bastante simple. La dificultad puede aumentar cuando la función  $f$  es más complicada, por ejemplo si es un cociente.

**Ejemplo 3.3** Demostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1$$

**Solución:** Del curso de Cálculo sabemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1$$

Entonces, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|\alpha| < \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} - 1 \right| < \varepsilon$$

Elijamos ahora  $\delta = \sqrt{\delta_1}$ . Entonces  $\|(x, y) - (0, 0)\| \leq \delta$  implica que  $|x^2 + y^2| \leq \delta_1$  y entonces

$$\left| \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 1 \right| < \varepsilon$$

**Ejercicio 3.1** 1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x-y}\right)}{x^2 + |x| + |y|}$ .

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^6 + y^2}.$$

**Nota:** Notamos que una manera equivalente de escribir la noción de límite es la siguiente: para toda bola abierta  $B(\mathbf{b}, \varepsilon)$  existe una bola abierta  $B(\mathbf{a}, \delta)$  tal que

$$\mathbf{x} \in (B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap A \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{b}, \varepsilon)$$

o equivalentemente

$$f((B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap A) \subset B(\mathbf{b}, \varepsilon)$$

Ahora vamos a desarrollar el concepto de límite estudiando sus principales propiedades. En toda esta sección hacemos notar la analogía que se tiene con el curso de Cálculo, donde se estudio el concepto de límite y continuidad para funciones de una variable real. Es sorprendente que la mayoría de las proposiciones que veremos a continuación tienen una demostración que se obtiene de la análoga de Cálculo reemplazando  $|\cdot|$  por  $\|\cdot\|$ .

**Proposición 3.2.1** (Unicidad del límite)

Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{a} \in \text{der}(A)$ . Si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \text{ y } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$$

Entonces  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$ .

**Dem:** Por hipótesis, dado  $\varepsilon > 0$  existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tales que

$$(0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_1 \wedge \mathbf{x} \in A) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1\| < \varepsilon$$

$$(0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_2 \wedge \mathbf{x} \in A) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\| < \varepsilon$$

Entonces, si  $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$  se tendrá que

$$\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| = \|(f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1) - (f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2)\| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1\| + \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\| < 2\varepsilon$$

Como  $\varepsilon$  puede ser arbitrariamente pequeño, debemos tener que  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$ .

La siguiente proposición es muy útil para estudiar la existencia de un determinado límite. Se usa principalmente para mostrar que una cierta función no tiene límite.

**Proposición 3.2.2** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{a} \in \text{der}(A)$  tal que  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ . Entonces para todo  $B \subseteq A$  tal que  $\mathbf{a} \in \text{der}(B)$  se tiene que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f|_B(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

**Dem:** Tarea.

La contrarrecíproca nos da el siguiente corolario

**Corolario 3.1** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{a} \in \text{der}(A)$  y  $B_1, B_2 \subseteq A$ , de manera que  $\mathbf{a} \in \text{der}(B_1) \cap \text{der}(B_2)$ . Si uno de los límites  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f|_{B_1}(\mathbf{x})$  ó  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f|_{B_2}(\mathbf{x})$  no existe o si  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f|_{B_1}(\mathbf{x}) \neq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f|_{B_2}(\mathbf{x})$  entonces el límite

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

no existe.

**Ejemplo 3.4** Se trata de estudiar el siguiente límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$$

**Solución:** Notemos en primer lugar que  $f(0,0)$  no está definida, sin embargo esto no tiene importancia alguna. Lo que sí importa es que  $(0,0) \in \text{der}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ . Si consideramos los conjuntos  $A = \{(0,y) : y \neq 0\}$  y  $B = \{(x,0) : x \neq 0\}$  entonces tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_A(x,y) = 0 \text{ y } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_B(x,y) = 1$$

Concluimos entonces que el límite bajo estudio no existe, en virtud del corolario.

**Ejercicio 3.2**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + y^2} e^{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + y^2}}$ .

**Nota:** En los ejemplos anteriores hemos considerado solamente funciones a valores reales, es decir, con espacio de llegada  $\mathbb{R}$ . Esto queda justificado en la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.3** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Entonces:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\forall i = 1, \dots, m) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$$

Aquí  $f_i$  es la  $i$ -ésima función coordenada y  $b_i$  es la  $i$ -ésima coordenada de  $\mathbf{b}$ .

Los siguientes tres teoremas resumen las propiedades importantes de los límites.

**Teorema 3.1** Sean  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{a} \in \text{der}(A)$ . Si existen los límites  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$  y  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$ , entonces los siguientes límites existen y pueden calcularse como sigue:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f + g)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \quad (3.2.1)$$

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \quad (3.2.2)$$

**Teorema 3.2** Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g : f(A) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Si existen los límites  $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in A}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  y

$\lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b} \\ \mathbf{y} \in f(A)}} g(\mathbf{y}) = \mathbf{c}$ , entonces existe el límite

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in A}} (g \circ f)(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \quad (3.2.3)$$

**Dem:** Dado  $\varepsilon > 0$ , como el límite de  $g$  en  $f(\mathbf{a})$  existe, entonces existe un valor  $\eta > 0$  tal que

$$0 < \|\mathbf{y} - f(\mathbf{a})\| < \eta \Rightarrow \|g(\mathbf{y}) - g(f(\mathbf{a}))\| < \varepsilon$$

y como el límite de  $f$  en  $\mathbf{a}$  existe, entonces existe un valor  $\delta > 0$  tal que

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \eta$$

De estos dos resultados se concluye

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|g(f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{a}))\| < \varepsilon$$

por lo que  $g \circ f$  tiene límite en  $\mathbf{a}$ .

**Teorema 3.3** Sean  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si existen los límites  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b_1$  y  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b_2$ , entonces los siguientes límites existen y pueden calcularse como sigue:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f \cdot g)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \quad (3.2.4)$$

Si  $f(\mathbf{a}) \neq 0$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \left( \frac{1}{f} \right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})} \quad (3.2.5)$$

**Ejercicio 3.3** 1. Sea  $f(x, y) = xy / (x^2 + y^2)$ . Pruebe que  $f(x, y)$  tiende a cero sobre los ejes  $x$  e  $y$ . A continuación demuestre que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  no existe, mostrando que el límite sobre la recta  $y = x$  es diferente de cero.

2. Demuestre que:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

no existe considerando el límite sobre el eje  $x$ .

3. Sea  $f(x, y) = x^3 / (x^2 + y^2)$  y  $g(x, y) = x^2 / (x^2 + y^2)$ . Utilizando coordenadas polares, demuestre que:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

y que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y)$  no existe. Indicación: pruebe que  $g(x, y) = \cos^2 \theta$  y observe que  $\cos \theta$  sólo puede alcanzar cualquier valor entre  $-1$  y  $1$  cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

4. Evalúe el límite o bien establezca que éste no existe.



$$a) \lim_{(z,w) \rightarrow (-2,1)} \frac{z^4 \cos(\pi w)}{e^{z+w}}$$

$$b) \lim_{(z,w) \rightarrow (-1,2)} (z^2 w - 9z)$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} \frac{y-2}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{1 + y^2}$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

### 3.2.2 Continuidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Ahora que hemos estudiado el concepto de límite estamos preparados para introducir el concepto de continuidad de una función.

**Definición 3.3** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y sea  $\mathbf{y} \in A$ . Decimos que  $f$  es continua en  $\mathbf{y}$  si:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } [\mathbf{x} \in A \wedge \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta] \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$$

o equivalentemente

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } f(B(\mathbf{y}, \delta) \cap A) \subset B(f(\mathbf{y}), \varepsilon)$$

**Definición 3.4** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Decimos que  $f$  es continua en  $A$  si lo es para todo  $\mathbf{x}$  en  $A$ .

**Nota:** Si  $\mathbf{x}^0 \in A$  es un punto aislado de  $A$ , es decir,  $\mathbf{x}^0 \in A \setminus \text{der}(A)$  entonces  $f$  es obviamente continua en  $\mathbf{x}^0$ .

Si  $\mathbf{x}^0 \in \text{der}(A)$  entonces  $f$  es continua en  $\mathbf{x}^0$  si y sólo si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)$$

Como consecuencia de la observación anterior y de la proposición 3.2.3 se tiene que  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua en  $\mathbf{x}^0 \in A$  si y sólo si  $f_i$  es continua en  $\mathbf{x}^0$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ .

**Ejercicio 3.4** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x+y^2} & , x \neq y^2 \\ 0 & , x = y^2 \end{cases}$ . Analizar la continuidad de  $f$ .

Como consecuencia de los teoremas 3.1, 3.2 y 3.3 tenemos también tres resultados sobre funciones continuas cuya demostración es análoga a lo que ya vimos sobre límites.

**Teorema 3.4** Sean  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x}^0 \in A$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces:

1.  $f$  continua en  $\mathbf{x}^0$  implica  $\lambda f$  continua en  $\mathbf{x}^0$ .
2.  $f$  y  $g$  continuas en  $\mathbf{x}^0$  implica  $f + g$  continua en  $\mathbf{x}^0$ .

**Dem:** Tarea.

**Teorema 3.5** Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , con  $f(A) \subseteq B$  y  $\mathbf{x}^0 \in A$ . Entonces  $f$  continua en  $\mathbf{x}^0$  y  $g$  continua en  $f(\mathbf{x}^0)$  implica  $g \circ f$  continua en  $\mathbf{x}^0$ .

**Teorema 3.6** Sean  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x}^0 \in A$ . Entonces  $f$  y  $g$  continuas en  $\mathbf{x}^0$  implica  $f \cdot g$  continua en  $\mathbf{x}^0$ . Agregando el supuesto  $f(\mathbf{x}^0) \neq 0$ ,  $f$  y  $g$  continuas en  $\mathbf{x}^0$  implica  $\frac{1}{f(x)}$  continua en  $\mathbf{x}^0$ .

**Ejemplo 3.5** La función  $f(x, y) = (\frac{x^2}{1+y^2}, x+y, y \cdot \text{sen}(x))$  es continua en todo punto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Solución:** En efecto, sus tres componentes son continuas en todo  $\mathbb{R}^2$ :

$f_1(x, y) = \frac{x^2}{1+y^2}$  lo es pues  $f(x) = x^2$  lo es, al igual que  $g(y) = 1+y^2$  la cual además no se anula. Entonces, por el teorema anterior  $\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{1+y^2}$  también es continua, y nuevamente por el teorema anterior  $x^2 \frac{1}{1+y^2}$  es continua.

$f_2(x, y) = x+y$  es evidentemente continua pues  $f(x) = x$  e  $g(y) = y$  son continuas y la suma de continuas es continua por el teorema anterior.

$f_3(x) = \text{sen}(x)$  es continua,  $g(y) = y$  también lo es, luego por el teorema anterior  $y \cdot \text{sen}(x)$  es continua.

La idea es que con la ayuda de los teoremas 3.4, 3.5 y 3.6 podamos determinar por inspección cuando una función es continua, por ser una combinación de funciones continuas conocidas.

**Ejercicio 3.5**  $f(x, y, z, t) = \text{sen}(t(x^2 + y^2 + z^2))$  es continua en todo punto de  $\mathbb{R}^4$ .

**Definición 3.5** Diremos que  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es una vecindad de  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  si  $\mathbf{x}^0 \in A$  y  $A$  es abierto.

La siguiente proposición da una caracterización de la continuidad en términos de vecindades. Notar que la bola abierta  $B(\mathbf{x}, r)$  es una vecindad de  $\mathbf{x}$ .

**Proposición 3.2.4**  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua en  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  si y sólo si para toda vecindad  $U \subset \mathbb{R}^m$  de  $f(\mathbf{x}^0)$  existe una vecindad  $V \subset \mathbb{R}^n$  de  $\mathbf{x}^0$  tal que  $f(V \cap A) \subset U$ .

**Dem:**

$(\Rightarrow)$ : Sea  $U$  una vecindad de  $f(\mathbf{x}^0)$ . Entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(f(\mathbf{x}^0), \varepsilon) \subset U$ . Usando ahora la continuidad de  $f$  en  $\mathbf{x}^0$ , para este  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \delta \text{ y } \mathbf{x} \in A \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)\| < \varepsilon$$

Es decir

$$\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^0, \delta) \text{ y } \mathbf{x} \in A \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in B(f(\mathbf{x}^0), \varepsilon)$$

Si definimos  $V = B(\mathbf{x}^0, \delta)$ , que es una vecindad de  $\mathbf{x}^0$ , obtenemos de aquí que

$$f(B(\mathbf{x}^0, \delta) \cap A) = f(V \cap A) \subset U$$

( $\Leftarrow$ ): Esta implicación queda de tarea.

**Ejercicio 3.6** Estudiar la continuidad en el origen para las siguientes funciones:

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin[(x^2 + y^2)^2]}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
2.  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = \begin{cases} x^3 + \sin(y^2) & , y \leq x \\ x^2 - xy + y^2 + \cos(y^2) & , y > x \end{cases}$ .

**Ejercicio 3.7** Analizar la continuidad de  $f$  en todo  $\mathbb{R}^2$  si  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1}, & x^2 + y^2 \neq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ .

### 3.3 Límites direccionales y la continuidad direccional

**Definición 3.6** Una dirección en  $\mathbb{R}^n$  es dada por un vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{V}^n$  con  $\|\mathbf{a}\| = 1$ .

Queremos estudiar funciones en una dirección  $\mathbf{a}$  dada. Entonces consideramos  $f$  en una vecindad de un punto interior  $\mathbf{x}^0$  de  $D(f)$  solamente sobre la recta

$$G_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^0) := \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + h\mathbf{a}, h \in \mathbb{R}\}$$

es decir estudiamos la función

$$\varphi(h) = f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{a}) \quad (\mathbf{x}^0 + h\mathbf{a} \in D(f))$$

de parámetro real de la recta  $h$ .

**Definición 3.7** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que en un punto interior  $\mathbf{x}^0 \in D(f)$ , la función  $f$  posee el límite  $g$  en la dirección  $\mathbf{a}$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{a}) = g.$$

Escribimos

$$\mathbf{a}\text{-}\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = g$$

Evidentemente, si una función posee el límite  $g$ , entonces todos sus límites direccionales existen e igualan  $g$ . Se podría pensar que por otro lado, si todos estos límites direccionales existen e igualan  $g$ , entonces  $f$  posee el límite  $g$  en  $\mathbf{x}^0$ . Esto no es así, tal como demuestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.6** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \text{ o } y \neq x^2 \\ 1 & \text{si } y = x^2, x \neq 0. \end{cases}$$

Evidentemente,  $f(0, 0) = 0$  y para cada dirección  $\mathbf{a}$ ,

$$\mathbf{a}\text{-}\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = g$$

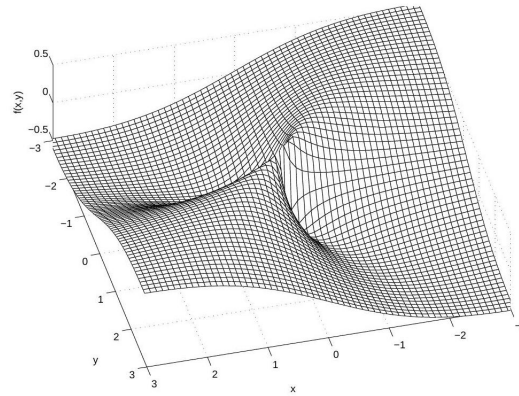


Figura 3.2: Función  $f(x, y)$  definida en el Ejemplo 3.6.

**Definición 3.8** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se llama continua en un punto interior  $\mathbf{x}^0$  de  $D(f)$  en la dirección  $\mathbf{a}$  si

$$\mathbf{a}\text{-}\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0).$$

El Ejemplo 3.6 presenta una función que es discontinua en  $(0, 0)$ , pero que es continua en  $(0, 0)$  en cada dirección, por lo tanto una función que es continua en un punto en cada dirección no necesariamente es continua en este punto.

**Ejemplo 3.7** Considere la función

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esta función no es continua en el punto  $(0, 0)$  dado que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

Pero  $f$  es continua en las direcciones  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  y  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , dado que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(0 + h, 0) = 0; \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(0, 0 + h) = 0.$$

### 3.4 Derivadas direccionales

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Analizaremos primero el comportamiento de  $f$  en la vecindad de un punto interior  $\mathbf{x}^0$  de  $D(f)$  en una dirección. Dado así  $f$  es una función de una variable, podemos describir el crecimiento o el decrecimiento de  $f$  en esta dirección en términos del cálculo diferencial de una variable.

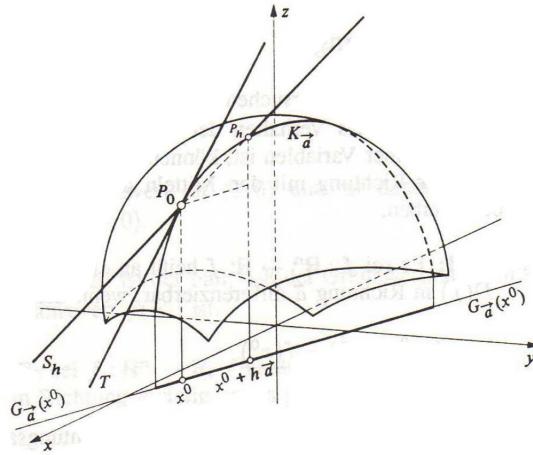


Figura 3.3: Ilustración de la derivada direccional.

**Definición 3.9** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . La función  $f$  se llama diferenciable en un punto interior  $\mathbf{x}^0 \in D(f)$  en la dirección  $\mathbf{a}$  si el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}^0)}{h}$$

existe; si existe, el límite se llama derivada direccional de  $f$  en la dirección  $\mathbf{a}$ , y lo denotamos por

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}^0)$$

Queremos ilustrar el concepto de la derivada direccional para el caso  $n = 2$  (ver Figura 3.3). Sea  $\mathbf{x}^0 = (x_0, y_0)$  y  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ , entonces

$$\mathbf{x}^0 + h\mathbf{a} = (x_0 + ha_1, y_0 + ha_2).$$

En general, el grafo de  $f$  es una “superficie” en  $\mathbb{R}^3$ ; pero si consideramos  $f$  solamente sobre  $G_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^0) \cap D(f)$ , el grafo es una “curva”  $K_{\mathbf{a}}$  en esta superficie. Ahora trataremos de encontrar la tangente  $T$  a la curva  $K_{\mathbf{a}}$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Para tal efecto consideramos la secante  $S_h$  por los puntos  $P_0$  y

$$P_h = (x_0 + ha_1, y_0 + ha_2, f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2)).$$

Esta secante está únicamente determinada por su pendiente

$$\frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}^0)}{h}$$

Ahora, si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}^0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}^0)$$

entonces la recta por  $P_0$  con la pendiente  $\partial f / \partial \mathbf{a}(\mathbf{x}^0)$  -como recta límite de las secantes- es la tangente  $T$  a la curva  $K_{\mathbf{a}}$  deseada.

**Ejemplo 3.8** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 + x \cos y$  (ver Figura 3.4). Queremos calcular la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$  en la dirección  $\mathbf{a} = (1/\sqrt{2})(1, 1)$ . Aquí obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \left( x_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( x_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right) \cos \left( y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right) - x_0^2 - x_0 \cos y_0 \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}hx_0 + \frac{1}{2}h^2}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0}{\sqrt{2}} \frac{\cos \left( y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right) - \cos y_0}{\frac{h}{\sqrt{2}}} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{2}x_0 - \frac{x_0 \sin y_0}{\sqrt{2}} + \frac{\cos y_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

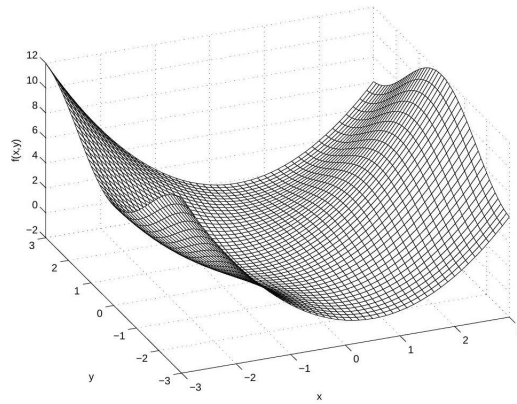


Figura 3.4: Función  $f(x, y) = x^2 + x \cos y$ .

Si cambiamos la orientación de la recta, es decir, si consideramos la dirección  $-\mathbf{a}$ , se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.7** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es diferenciable en  $\mathbf{x}^0$  en la dirección  $\mathbf{a}$ , entonces  $f$  también es diferenciable en  $\mathbf{x}^0$  en la dirección  $-\mathbf{a}$ , y

$$\frac{\partial f}{\partial (-\mathbf{a})}(\mathbf{x}^0) = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}^0)$$

**Dem:** Demostración. Se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial(-\mathbf{a})}(\mathbf{x}^0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + h(-\mathbf{a})) - f(\mathbf{x}^0)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + (-h)\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}^0)}{-h} = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}^0).$$

**Teorema 3.8** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es diferenciable en la dirección  $\mathbf{a}$ , entonces  $f$  es continua en  $\mathbf{x}^0$  en la dirección  $\mathbf{a}$ .

**Dem:** Se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}^0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}^0)}{h} \cdot h \right) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}^0) \cdot 0 = 0,$$

lo que implica la afirmación.

### 3.4.1 Derivadas parciales

Las derivadas direccionales con respecto a los vectores  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , las derivadas parciales, son muy importantes.

**Definición 3.10** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . La función  $f$  se llama parcialmente diferenciable con respecto a  $x_k$  en un punto interior  $\mathbf{x}^0$  de  $D(f)$  si existe la derivada direccional  $(\partial f / \partial \mathbf{e}_k)(\mathbf{x}^0)$ . También escribimos

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_k}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0) = f_{x_k}(\mathbf{x}^0)$$

Esta expresión se llama derivada parcial (de primer orden) de  $f$  con respecto a la variable  $x_k$  en el punto  $\mathbf{x}^0$ .

Comentamos que según la Definición 3.10,

$$\begin{aligned} f_{x_k}(\mathbf{x}^0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}^0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)}{h}, \end{aligned}$$

es decir, podemos obtener esta derivada parcial fijando  $x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0$  y formando la derivada ordinaria con respecto a  $x_k$  en  $x_k^0$ .

### Ejemplo 3.9

1. Consideremos sobre  $\mathbb{R}^2$  la función  $f(x, y) = x^2 + x \cos y$  (ver Figura 3.4). Para  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  se tiene aquí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 + \cos y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -x_0 \sin y_0$$

2. Consideremos nuevamente la función

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aquí obtenemos para  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{2\xi^2\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{2\xi\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2},$$

y para  $(\xi, \eta) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{0^2 + h^2} - 0}{h} = 0$$

es decir, las derivadas parciales existen en cada punto. Por otro lado, ya vimos en el Ejemplo 3.7 que la función no es continua en el punto  $(0, 0)$ . Sin embargo, note que las derivadas parciales no son acotadas en una vecindad de  $(0, 0)$ , puesto que para  $\xi \neq 0$ ,  $\eta \neq 0$  se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \eta) = \frac{1}{\eta}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, 0) = \frac{1}{\xi}$$

Entonces, la existencia de las derivadas parciales aún no implica la continuidad de la función. En el siguiente teorema demostraremos que si todas las derivadas parciales son acotadas, sí podemos concluir que  $f$  es continua.

**Teorema 3.9** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x}^0 \in D(f)$ . Si las derivadas parciales  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  existen en una vecindad  $U_r(\mathbf{x}^0)$  de  $\mathbf{x}^0$  con  $U_r(\mathbf{x}^0) \subset D(f)$  y son acotadas en esta vecindad, entonces  $f$  es continua en  $\mathbf{x}^0$ .

**Dem:** Sea  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + \dots + v_n\mathbf{e}_n$  un vector con  $\|\mathbf{v}\| < r$ . Si definimos

$$\mathbf{v}^0 := \vec{0}; \quad \mathbf{v}^\nu = \sum_{i=1}^{\nu} v_i \mathbf{e}_i, \quad \nu = 1, \dots, n$$

entonces siempre se tiene que

$$\|\mathbf{v}^\nu\| \leq \|\mathbf{v}\| < r$$

y sabemos que

$$\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^\nu \in U_r(\mathbf{x}^0), \quad \nu = 0, 1, \dots, n$$

Ahora consideramos que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0) &= (f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^n) - f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^{n-1})) + (f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^{n-1}) - f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^{n-2})) \\ &\quad + \dots + (f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^1) - f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^0)) \\ &= \sum_{\nu=1}^n (f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^\nu) - f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^{\nu-1})). \end{aligned}$$



Según el Teorema del Valor Intermedio del cálculo diferencial existen puntos  $\xi^\nu \in U_r(\mathbf{x}^0)$  localizados en el segmento lineal que une  $\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^{\nu-1}$  con  $\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^\nu$  tales que

$$f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^\nu) - f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^{\nu-1}) = v_\nu \cdot f_{x_\nu}(\xi^\nu)$$

luego

$$f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0) = \sum_{\nu=1}^n v_\nu \cdot f_{x_\nu}(\xi^\nu).$$

Dado que todas las derivadas parciales son acotadas, existen constantes  $M_\nu > 0$  con  $|f_{x_\nu}(x)| \leq M_\nu$  para todo  $x \in U_r(\mathbf{x}^0)$  y  $\nu = 1, \dots, n$ . Ahora, si  $\varepsilon > 0$  elegimos un  $\delta_\varepsilon$  tal que  $0 < \delta_\varepsilon < r$  y

$$\delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{M_1 + \dots + M_n}.$$

Así, todos los vectores  $\mathbf{v}$  con  $\|\mathbf{v}\| < \delta_\varepsilon$  satisfacen lo siguiente:

$$|f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0)| \leq \sum_{\nu=1}^n |v_\nu| M_\nu < \delta_\varepsilon \sum_{\nu=1}^n M_\nu < \varepsilon$$

Esto implica que  $f$  es continua en  $\mathbf{x}^0$ .

Las derivadas parciales se calculan como las derivadas ordinarias en una variable pero con la siguiente diferencia: para calcular  $f_x$ , considere  $y$  como una constante; y para calcular  $f_y$  considere  $x$  como constante.

### Ejercicio 3.8

1. Calcule las derivadas parciales de  $f(x, y) = x^2 y^5$ .
2. Calcule  $g_x(1, 3)$  y  $g_y(1, 3)$ , donde  $g(x, y) = \frac{y^2}{(1 + x^2)^3}$ .
3. Regla de la cadena para derivadas parciales. Calcule  $\frac{\partial}{\partial x} \sin(x^2 y^5)$ .

Para cada punto  $\mathbf{x}^0 \in D(f)$  donde existen las derivadas parciales  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  existe entonces el vector  $(f_{x_1}(\mathbf{x}^0), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}^0))$ .

**Definición 3.11** Sea la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  parcialmente diferenciable con respecto a cada una de las variables  $x_k, k = 1, \dots, n$ . Entonces el vector

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^0) = (f_{x_1}(\mathbf{x}^0), f_{x_2}(\mathbf{x}^0), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}^0))$$

se llama gradiente de  $f$  en  $\mathbf{x}^0$ . Otra notación es

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \text{grad } f(\mathbf{x}^0)$$

**Propiedad 3.1** Si  $f(\mathbf{x})$  y  $g(\mathbf{x})$  son diferenciables y  $c$  es una constante, entonces:

$$i) \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$$

$$ii) \nabla(cf) = c\nabla f.$$

$$iii) \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

iv) si  $F(t)$  es una función derivable de una variable, entonces:

$$\nabla(F(f(\mathbf{x}))) = F'(f(\mathbf{x}))\nabla f.$$

### Ejercicio 3.9

1. Calcule  $\nabla f(3, -2, 4)$ , donde:

$$f(x, y, z) = ze^{2x+3y}.$$

2. Encuentre el gradiente de:

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^8.$$

Se utiliza regla de la cadena para calcular derivadas de una función compuesta  $f(x, y) = F(g(x, y))$ , donde  $F(u)$  es una función de una variable y  $u = g(x, y)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dF}{du} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dF}{du} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

**Teorema 3.10** Sea  $f(x_1, \dots, x_n)$  una función diferenciable de  $n$  variables. Suponga que cada una de las variables  $x_1, \dots, x_n$  es una función diferenciable de  $m$  variables independientes  $t_1, \dots, t_m$ . Entonces, para  $k = 1, \dots, m$ , se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_k}$$

### Ejercicio 3.10

1. Sea  $f(x, y) = e^{xy}$ . Evalúe  $\partial f / \partial t$  en  $(s, t, u) = (2, 3, -1)$ , donde  $x = st$ ,  $y = s - ut^2$ .

2. Coordenadas polares: Sea  $f(x, y)$  una función de dos variables y sean  $(r, \theta)$  coordenadas polares.

(a) Expresé  $\partial f / \partial \theta$  en términos de  $\partial f / \partial x$  y de  $\partial f / \partial y$ .

(b) Evalúe  $\partial f / \partial \theta$  en  $(x, y) = (1, 1)$  para  $f(x, y) = x^2 y$ .

## 3.5 Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Los conceptos de la derivada direccional y en particular de la derivada parcial aún no corresponden al concepto de la diferenciabilidad de funciones de una variable dado que la derivada direccional no

considera enteramente el comportamiento de la función en una vecindad  $n$ -dimensional. Ya sabemos que la existencia de todas las derivadas direccionales en un punto  $\mathbf{x}^0$  asegura la continuidad de  $f$  en todas las direcciones, pero tal como vimos en el Ejemplo 3.9, esto todavía no nos permite deducir la continuidad de  $f$  en el punto  $\mathbf{x}^0$  (mientras que para las funciones de una variable, la diferenciabilidad sí implica la continuidad). Ahora introduciremos un concepto de diferenciabilidad que considera enteramente la vecindad  $n$  dimensional.

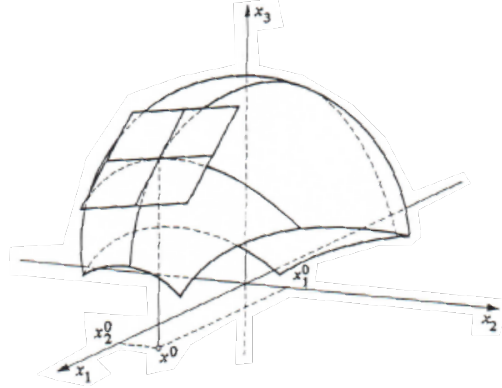


Figura 3.5: La diferenciabilidad de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 3.12** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $\mathbf{x}^0$  un punto interior de  $D(f)$ . La función se llama diferenciable en el punto  $\mathbf{x}^0$  si existen un vector  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$  y una función  $f^0$  definida en una vecindad  $U(\mathbf{x}^0)$  de  $\mathbf{x}^0$  con las siguientes propiedades:

1.  $f^0(\mathbf{x}^0) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f^0(\mathbf{x}) = 0$ .
2.  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) f^0(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)$ .

El vector  $\mathbf{c}$  se llama derivada (o derivada total) de  $f$  en  $\mathbf{x}^0$ .

Para  $n = 1$  este resultado implica que si  $f$  es una función diferenciable en  $x^0$ , entonces en una vecindad de  $x^0$  la función  $f$  puede ser aproximada por una recta  $g$  con  $g(x) = f(x^0) + c(x - x^0)$  de tal manera que la diferencia  $f(x) - g(x)$  desaparece de por lo menos primer orden cuando  $x \rightarrow x^0$ , es decir,

$$\frac{f(x) - g(x)}{|x - x^0|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow x^0$$

Podemos ofrecer una interpretación análoga para funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (ver Figura 3.5). Aquí

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \\ &= f(x_1^0, x_2^0) + c_1(x_1 - x_1^0) + c_2(x_2 - x_2^0) \end{aligned}$$

representa un plano en  $\mathbb{R}^3$  por  $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$ . Ahora, la diferenciabilidad en  $\mathbf{x}^0$  significa que en una vecindad de  $\mathbf{x}^0$  podemos aproximar  $f$  por un plano, el plano tangencial, de tal manera que la

diferencia  $f(x) - g(x)$  desaparece de por lo menos primer orden cuando  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0$ , es decir

$$\frac{f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2)}{d((x_1, x_2), (x_1^0, x_2^0))} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } (x_1, x_2) = \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0).$$

Ahora demostraremos que la diferenciabilidad en  $\mathbf{x}^0$  implica la existencia de las derivadas parciales  $f_{x_1}(\mathbf{x}^0), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}^0)$ .

**Teorema 3.11** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y sea  $f$  diferenciable en  $\mathbf{x}^0$ . Entonces todas las derivadas parciales de primer orden existen en  $\mathbf{x}^0$ , y

$$f_{x_k}(\mathbf{x}^0) = c_k, \quad k = 1, \dots, n$$

es decir,

$$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^0)$$

**Dem:** Dado que la función  $f$  es diferenciable, se tiene en una vecindad de  $\mathbf{x}^0$  que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) f^0(\mathbf{x}).$$

Para un índice  $k, 1 \leq k \leq n$ , sea  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + h\mathbf{e}_k$  con algún  $h \neq 0$ . Obtenemos  $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = hc_k$  y  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = |h|$ , por lo tanto

$$\frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}^0)}{h} = c_k + \frac{|h|}{h} f^0(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{e}_k)$$

Concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( c_k + \frac{|h|}{h} f^0(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{e}_k) \right) = c_k.$$

■

Más generalmente, la diferenciabilidad implica la existencia de las derivadas direccionales en todas las direcciones. En el teorema siguiente demostraremos, además, como podemos calcular las derivadas direccionales de las derivadas parciales.

**Teorema 3.12** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $\mathbf{x}^0$ . Entonces  $f$  es diferenciable en  $\mathbf{x}^0$  en cada dirección  $\mathbf{a}$ , y se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}^0) &= (\nabla f(\mathbf{x}^0)) \cdot \mathbf{a}, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}^0) \right| &\leq \|\nabla f(\mathbf{x}^0)\|. \end{aligned}$$

**Dem:** 1. Según el Teorema 3.11,

$$f(x) = f(x^0) + c \cdot (x - x^0) + d(x, x^0) f^0(x)$$

en una vecindad de  $x^0$ , donde  $c = \nabla f(x^0)$ . Si definimos  $x = x^0 + ha$  y elegimos  $|h| = d(x, x^0) \neq 0$  suficientemente pequeño, se tiene que

$$f(x^0 + ha) - f(x^0) = hc \cdot a + |h| f^0(x^0 + ha),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a}(x^0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + ha) - f(x^0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( c \cdot a + \frac{|h|}{h} f^0(x^0 + ha) \right) = c \cdot a = (\nabla f(x^0)) \cdot a. \end{aligned}$$

2. Utilizando la desigualdad de Schwarz obtenemos

$$|(\nabla f(x^0)) \cdot a| \leq \|\nabla f(x^0)\| \cdot \|a\| = \|\nabla f(x^0)\|$$

Comentamos que si  $\nabla f(x^0) = \vec{0}$ , entonces la fórmula (2.1) implica que

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x^0) = 0 \quad \text{para toda dirección } a.$$

Por otro lado, si  $\nabla f(x^0) \neq \vec{0}$ , entonces

$$a_0 = \frac{1}{\|\nabla f(x^0)\|} \nabla f(x^0)$$

define una dirección en  $\mathbb{R}^n$ . Para la derivada direccional de  $f$  en  $x^0$  en la dirección  $a_0$  obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial a_0}(x^0) = (\nabla f(x^0)) \cdot a_0 = \frac{\nabla f(x^0) \cdot \nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|} = \|\nabla f(x^0)\|.$$

Esto significa que  $a_0$  es una dirección extremal, dado que según la fórmula (2.2),

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a}(x^0) \right| \leq \|\nabla f(x^0)\| = \frac{\partial f}{\partial a_0}(x^0)$$

para cualquier dirección  $a$ . En otras palabras,  $a_0$  es la dirección del mayor crecimiento de  $f$  en el punto  $x^0$

Si  $f$  es diferenciable en un punto  $x^0$ , entonces la existencia de las derivadas direccionales (garantizada por el Teorema 3.12) en  $x^0$  asegura que  $f$  es continua en  $x^0$  en todas las direcciones. Sin embargo, esto no nos permite concluir que  $f$  es continua en  $x^0$ . Pero en el siguiente teorema demostraremos que si  $f$  es diferenciable en  $x^0$  (en el sentido de la Definición 3.12),  $f$  es continua en  $x^0$ . Para tal efecto demostraremos primero el siguiente teorema.

**Teorema 3.13** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y sea  $f$  diferenciable en  $\mathbf{x}^0$ . Entonces para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in D(f)$  con  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \delta$  se tiene que

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \leq M d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$$

con la constante

$$M = \|\nabla f(\mathbf{x}^0)\| + \varepsilon$$

**Dem:** Dado que la función  $f$  es diferenciable, existe una vecindad  $U(\mathbf{x}^0)$  de  $\mathbf{x}^0$  donde

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) f^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^0).$$

Ahora, para  $\varepsilon > 0$  elegimos un  $\delta > 0$  tal que  $\mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{x}^0)$  y  $|f^0(\mathbf{x})| < \varepsilon$  para todo  $\mathbf{x}$  tal que  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \delta$ . Utilizando la desigualdad de Schwarz, obtenemos para  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \delta$  lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| &\leq |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)| + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) |f^0(\mathbf{x})| \\ &\leq \|\mathbf{c}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) |f^0(\mathbf{x})| \\ &\leq (\|\nabla f(\mathbf{x}^0)\| + \varepsilon) d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \end{aligned}$$

Con la ayuda del Teorema 3.13 podemos demostrar ahora la continuidad de  $f$ .

**Teorema 3.14** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $\mathbf{x}^0$ . Entonces  $f$  es continua en  $\mathbf{x}^0$ .

**Dem:** Sea  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $D(f)$  con  $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Según el Teorema 3.13 existe una constante  $M$  tal que para cada  $k$  suficientemente grande

$$|f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^0)| \leq M d(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^0)$$

Esto implica que  $f(\mathbf{x}^k) \rightarrow f(\mathbf{x}^0)$ .

Si todas las derivadas parciales de una función  $f$  existen en un punto  $\mathbf{x}^0$ , no necesariamente  $f$  debe ser diferenciable en  $\mathbf{x}^0$ , dado que en este caso ni siquiera podemos concluir que  $f$  es continua en  $\mathbf{x}^0$ . Pero demostraremos bajo una hipótesis adicional la siguiente inversión del Teorema 3.11.

**Teorema 3.15** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si en una vecindad  $U(\mathbf{x}^0)$  de  $\mathbf{x}^0$  las derivadas parciales  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  existen y son continuas en  $\mathbf{x}^0$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $\mathbf{x}^0$ .

**Dem:** Existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $U_{\varepsilon_0}(\mathbf{x}^0) \subset U(\mathbf{x}^0) \subset D(f)$ . Elegimos  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{v}$  con  $0 \leq \|\mathbf{v}\| < \varepsilon_0$ , donde

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$$

además definimos

$$\mathbf{v}^0 := \vec{0}; \quad \mathbf{v}^\nu = \sum_{i=1}^{\nu} v_i \mathbf{e}_i, \quad \nu = 1, \dots, n$$

entonces siempre se tiene que

$$\|\mathbf{v}^\nu\| \leq \|\mathbf{v}\| < \varepsilon_0$$

y sabemos que

$$\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^\nu \in U_{\varepsilon_0}(\mathbf{x}^0), \quad \nu = 0, 1, \dots, n$$

Tal como en la demostración del Teorema 3.9, existen ciertos puntos  $\xi^\nu$  en el segmento lineal que une  $\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^{\nu-1}$  con  $\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^\nu$  tales que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}) &= f(\mathbf{x}^0) + \sum_{\nu=1}^n (f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^\nu) - f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^{\nu-1})) \\ &= f(\mathbf{x}^0) + \sum_{\nu=1}^n v_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) + \sum_{\nu=1}^n v_\nu \left( \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) \right) \\ &= f(\mathbf{x}^0) + \sum_{\nu=1}^n v_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) + \|\mathbf{v}\| \sum_{\nu=1}^n \frac{v_\nu}{\|\mathbf{v}\|} \left( \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) \right) \end{aligned}$$

Para demostrar el teorema solamente hay que demostrar que la siguiente función es continua en  $\mathbf{x}^0$  :

$$f^0(x) = f^0(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}) = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^n \frac{v_\nu}{\|\mathbf{v}\|} \left( \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) \right) & \text{si } \mathbf{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \mathbf{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Dado que las derivadas parciales  $\partial f / \partial x_\nu$  son continuas en  $\mathbf{x}^0$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta_\varepsilon(\nu)$  con  $0 < \delta_\varepsilon(\nu) < \varepsilon_0$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) \right| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{para todo } x \text{ con } d(x, \mathbf{x}^0) < \delta_\varepsilon(\nu)$$

Ahora elegimos

$$\delta_\varepsilon = \min \{ \delta_\varepsilon(1), \dots, \delta_\varepsilon(n) \}$$

Así, para todo  $x$  con  $d(x, \mathbf{x}^0) < \delta_\varepsilon$  también se tiene

$$d(\xi^\nu, \mathbf{x}^0) \leq \|\mathbf{v}\| < \delta_\varepsilon$$

y finalmente llegamos a

$$|f^0(x)| \leq \sum_{\nu=1}^n \frac{|v_\nu|}{\|\mathbf{v}\|} \left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) \right| \leq \sum_{\nu=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) \right| < \varepsilon,$$

es decir,  $f^0$  es continua en  $\mathbf{x}^0$ .

**Ejemplo 3.10** Consideremos nuevamente la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^2 + x \cos y$ . Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin y$$

son continuas en cada punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , por lo tanto  $f$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ . Ahora, si nuevamente nos ponemos la tarea de calcular la derivada direccional de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  en la dirección  $\mathbf{a} = (1/\sqrt{2})(1, 1)$ , obtenemos aplicando el resultado del Teorema 3.12

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(x_0, y_0) &= (\nabla f(x_0, y_0)) \cdot \mathbf{a} = (2x_0 + \cos y_0, -x_0 \sin y_0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\right) \\ &= \sqrt{2}x_0 + \frac{\cos y_0}{\sqrt{2}} - \frac{x_0 \sin y_0}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

lo que reconfirma el resultado del Ejemplo 3.8 por una computación mucho más compacta.

### Ejercicio 3.11 Ejercicio tipo prueba.

$$1. \text{ Sea } f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(xyz)}{x^2 + y^2 + |z|} & , (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & , (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}.$$

Muestre que  $f$  es diferenciable en el origen.

$$2. \text{ Sea } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Mostrar que  $f$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ .

b) Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de  $f$  en  $(1, 2, 5 \sin(\frac{1}{5}))$ .

$$3. \text{ Sea } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Probar que  $f$  es de clase  $C^1$  en todo  $\mathbb{R}^2$ .

$$4. \text{ Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}$  en cada punto donde exista.

b) Decidir si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  es continua en el punto  $(0, 0)$  y si  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

$$5. \text{ Sea } f_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f_p(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 y}{|x|^p + |y|^p} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

¿Para qué valores de  $p$  la función  $f_p$  es diferenciable en el origen?

$$6. \text{ Sea } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f(X) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}, \text{ con } p \geq 1.$$

a) Analizar la diferenciabilidad de  $f$  en el origen.

b) ¿Para qué direcciones  $f$  admite derivada direccional en el origen?

c) ¿Qué ocurre en a) y b) si  $f(X) = \max\{|x_i|\}$ ?



**Teorema 3.16 (Interpretación del gradiente)** Suponga que  $\nabla f_P \neq \mathbf{0}$ . Sea  $\mathbf{u}$  un vector unitario formando un ángulo  $\theta$  con  $\nabla f_P$ . Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \|\nabla f_P\| \cos \theta$$

1.  $\nabla f_P$  apunta en la dirección y sentido de la tasa máxima de crecimiento de  $f$  en  $P$ .
2.  $-\nabla f_P$  apunta en la dirección y sentido de la tasa máxima de decrecimiento en  $P$ .
3.  $\nabla f_P$  es normal a la curva de nivel (o superficie) de  $f$  en  $P$ .

**Ejercicio 3.12** 1. Sea  $f(x, y) = x^4 y^{-2}$  y  $P = (2, 1)$ . Halle el vector unitario que apunta en la dirección y sentido de la máxima tasa de crecimiento en  $P$ .

2. La altitud de una montaña en  $(x, y)$  es:

$$f(x, y) = 2500 + 100(x + y^2)e^{-0,3y^2}$$

donde  $x$  e  $y$  vienen dadas en unidades de 100 m.

- a) Halle la derivada direccional de  $f$  en  $P = (-1, -1)$  en la dirección del vector unitario  $\mathbf{u}$  que forma un ángulo  $\theta = \frac{\pi}{4}$  con el gradiente.
- b) ¿Cuál es la interpretación de esta derivada?

Otro uso del gradiente es para hallar vectores normales a una superficie de ecuación  $F(x, y, z) = k$ , siendo  $k$  una constante. Sea  $P = (a, b, c)$  y suponga que  $\nabla F_P \neq \mathbf{0}$ . Entonces  $\nabla F_P$  es normal a la superficie de nivel  $F(x, y, z) = k$ . La ecuación del plano tangente en  $P$  es:

$$\nabla F_P \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0$$

Expandiendo el producto escalar, se obtiene:

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

**Ejemplo 3.11** Halle una ecuación del plano tangente a la superficie  $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 16$  en  $P = (2, 1, 3)$ . Sea  $F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 - z^2$ . Entonces:

$$\nabla F = (8x, 18y, -2z) \quad \nabla F_P = \nabla F(2, 1, 3) = (16, 18, -6).$$

El vector  $(16, 18, -6)$  es normal a la superficie  $F(x, y, z) = 16$ , por lo que la ecuación del plano tangente en  $P$  es:

$$16(x - 2) + 18(y - 1) - 6(z - 3) = 0 \quad \text{o} \quad 16x + 18y - 6z = 32$$

### 3.6 Derivadas parciales de orden mayor

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que para un índice  $k(1 \leq k \leq n)$  la derivada parcial  $f_{x_k}$  existe sobre un dominio  $D(f_{x_k}) \subset D(f)$ . En este caso, podemos tratar de formar en un punto interior  $\mathbf{x}^0 \in D(f_{x_k})$  para un índice  $l(1 \leq l \leq n)$  la derivada parcial

$$(f_{x_k})_{x_l} = f_{x_k x_l}$$

Ahora, si a su vez  $f_{x_k x_l}$  existe sobre  $D(f_{x_k x_l}) \subset D(f_{x_k})$ , podemos tratar de formar la derivada parcial

$$(f_{x_k x_l})_{x_m} = f_{x_k x_l x_m} \quad (1 \leq m \leq n),$$

etc. Esta consideración nos lleva a la siguiente definición.

**Definición 3.13** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si en un punto interior

$$\mathbf{x}^0 \in D(f_{x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_{l-1}}})$$

existe para un  $k_l$  con  $l > 1$  la derivada parcial

$$(f_{x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_{l-1}}})_{x_{k_l}}(\mathbf{x}^0) \quad (1 \leq k_i \leq n \text{ para } i = 1, \dots, l),$$

entonces esta derivada parcial se llama derivada parcial del orden  $l$  de  $f$  en el punto  $\mathbf{x}^0$ . También usamos la notación

$$f_{x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_l}}(\mathbf{x}^0) \quad \text{o} \quad \frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_l}}(\mathbf{x}^0).$$

**Definición 3.14** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Sea  $k \geq 0$  un número entero. Escribimos  $f \in C^k(X)$  si sobre  $X$  todas las derivadas de  $f$  del orden  $k$  existen y son continuas.

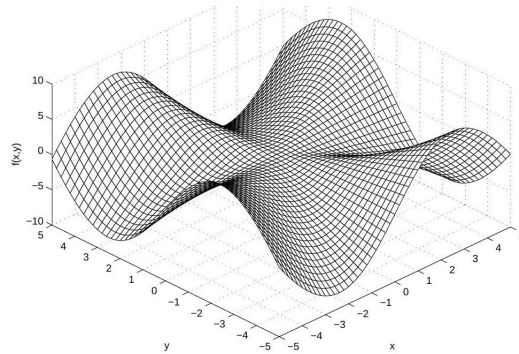


Figura 3.6: La función  $f(x, y)$  del Ejemplo 3.13

**Ejemplo 3.12** Consideremos sobre  $\mathbb{R}^3$  la función

$$f(x, y, z) = 4xyz - x^2 + y^2.$$

Aquí obtenemos las derivadas parciales

$$\begin{aligned} f_x &= 4yz - 2x, & f_{xx} &= -2, & f_{xy} &= f_{yx} = 4z, \\ f_y &= 4xz + 2y, & f_{yy} &= 2, & f_{xz} &= f_{zx} = 4y, \\ f_z &= 4xy, & f_{zz} &= 0, & f_{yz} &= f_{zy} = 4x. \end{aligned}$$

En este ejemplo obtenemos  $f_{xy} = f_{yx}$ ,  $f_{xz} = f_{zx}$  y  $f_{yz} = f_{zy}$ . La pregunta es si siempre podemos intercambiar el orden de las derivaciones parciales. Pero esto no es válido en general, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.13** Consideremos sobre  $\mathbb{R}^2$  la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ver Figura 3.6. Aquí obtenemos las derivadas parciales en  $(0, 0)$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = 0, \quad f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - 0}{h} = 0,$$

y para  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$f_x(x, y) = y \cdot \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = x \cdot \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

luego

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ h \cdot \frac{-h^4}{(h^2)^2} \right] = -1, \quad f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ h \cdot \frac{h^4}{(h^2)^2} \right] = 1.$$

Observamos que las segundas derivadas parciales  $f_{xy}(0, 0)$  y  $f_{yx}(0, 0)$  existen, pero sus valores son diferentes. En este caso, ambas funciones  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son discontinuas en  $(0, 0)$ . Para ver eso, calculamos primero para  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3}$$

Para la sucesión

$$\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

obtenemos

$$f_{xy}(x_k, y_k) = f_{yx}(x_k, y_k) = 0$$

es decir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{xy}(x_k, y_k) = 0 \neq f_{xy}(0, 0) = -1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_{yx}(x_k, y_k) = 0 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$$

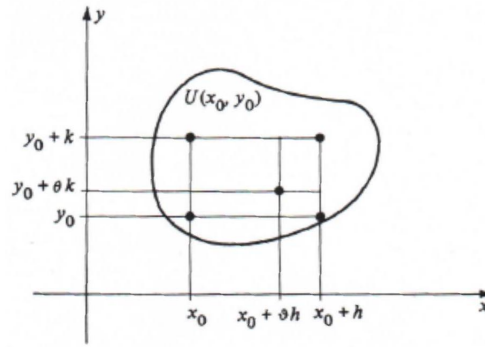


Figura 3.7: Ilustración de la demostración del Teorema 3.17.

En lo siguiente queremos analizar bajo qué condiciones podemos intercambiar el orden de las derivadas parciales. Para tal efecto demostraremos primeramente el siguiente teorema.

**Teorema 3.17 (Schwarz)** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $U(x_0, y_0)$  una vecindad abierta. Supongamos que la derivada parcial  $f_{xy}$  existe en  $U(x_0, y_0)$  y es continua en  $(x_0, y_0)$ ; además supongamos que  $f_y(x, y_0)$  existe para todo  $(x, y_0) \in U(x_0, y_0)$ . Entonces también existe  $f_{yx}(x_0, y_0)$ , y se tiene que

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

**Dem:** Tenemos que demostrar que la función

$$F(h) := \frac{1}{h} (f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0))$$

satisface

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Si elegimos  $h \neq 0$  tal que  $(x_0 + h, y_0) \in U(x_0, y_0)$  (ver Figura 3.7), entonces se tiene que

$$f_y(x_0 + h, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k},$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Utilizando la abreviatura

$$G(h, k) := \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]}{hk}$$

notamos que

$$F(h) = \lim_{k \rightarrow 0} G(h, k).$$

Ahora sea  $k \neq 0$  fijo y  $(x_0, y_0 + k) \in U(x_0, y_0)$ , y sea

$$\varphi(x) := f(x, y_0 + k) - f(x, y_0).$$

De la existencia de  $f_{xy}$  sigue la existencia de  $f_x$ , por lo tanto según el Teorema del Valor Intermedio del cálculo diferencial existe un número  $\vartheta \in (0, 1)$  tal que

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x_0 + \vartheta h)$$

es decir,

$$G(h, k) = \frac{f_x(x_0 + \vartheta h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \vartheta h, y_0)}{k}.$$

Además sea

$$\psi(y) := f_x(x_0 + \vartheta h, y).$$

La existencia de  $f_{xy}$  en  $U(x_0, y_0)$  implica la existencia de  $\psi'$ , y existe un número  $\theta = \theta(k) \in (0, 1)$  (ver Figura 3.7) tal que

$$\psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta k) = kf_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \theta k),$$

es decir

$$G(h, k) = f_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \theta k).$$

Puesto que  $f_{xy}$  es continua en  $(x_0, y_0)$ , existe para  $\varepsilon > 0$  un  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que

$$|f_{xy}(x, y) - f_{xy}(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo  $(x, y)$  con  $d((x_0, y_0), (x, y)) < \delta$ . Esto implica que para todo  $h$  y  $k$  con  $|h|$  y  $|k|$  suficientemente pequeño

$$|G(h, k) - f_{xy}(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y obtenemos

$$|F(h) - f_{xy}(x_0, y_0)| = \lim_{k \rightarrow 0} |G(h, k) - f_{xy}(x_0, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Pero esto significa que

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

En particular, las hipótesis del Teorema 3.17 están satisfechas si  $f \in C^2(U(x_0, y_0))$  para una vecindad abierta  $U(x_0, y_0)$  de  $(x_0, y_0)$ .

Si ambas derivadas parciales  $f_{xy}(x_0, y_0)$  y  $f_{yx}(x_0, y_0)$  existen, estos dos valores pueden ser diferentes, según el Teorema 3.17, solamente si ambas funciones  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son discontinuas en  $(x_0, y_0)$ . Esto sucede en el Ejemplo 3.13.

**Teorema 3.18** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Para un  $k \geq 1$  sea  $f \in C^k(X)$ ; además sea  $\nu_i \in \{1, \dots, k\}$  para  $1 \leq i \leq k$  - Entonces para cada permutación  $\mu_1, \dots, \mu_k$  de los números  $\nu_1, \dots, \nu_k$  y todo  $\mathbf{x}^0 \in X$  se tiene que

$$f_{x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_k}}(\mathbf{x}^0) = f_{x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k}}(\mathbf{x}^0)$$

**Dem:** Dado que cada permutación  $\nu_1, \dots, \nu_k$  puede ser generada por un número finito de permutaciones de solamente dos elementos consecutivos, el enunciado del teorema es una consecuencia del Teorema 3.17.

**Ejemplo 3.14** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - 2y^2}{4x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

¿Se puede aplicar el Teorema de Schwarz para  $f$  en el punto  $(x_0 = 0, y_0 = 0)$  ? Solución sugerida.

Para resolver el problema se requiere calcular las derivadas parciales. Sea  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Aquí obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^2 - 2y^2}{4x^2 + y^2} + xy \frac{2x(4x^2 + y^2) - (x^2 - 2y^2) \cdot 8x}{(4x^2 + y^2)^2}$$

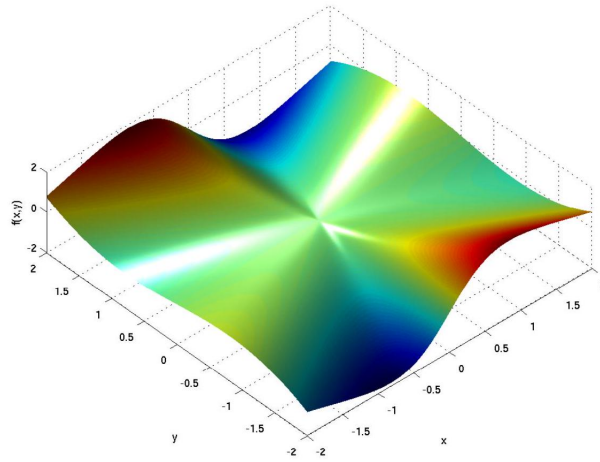


Figura 3.8: Función  $f(x, y)$  del Ejemplo 3.14.

$$\begin{aligned} &= y \frac{x^2 - 2y^2}{4x^2 + y^2} + x^2 y \frac{8x^2 + 2y^2 - 8x^2 + 16y^2}{(4x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^2 - 2y^2}{4x^2 + y^2} + \frac{18x^2 y^3}{(4x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(4x^2 y + y^3)(x^2 - 2y^2) + 18x^2 y^3}{(4x^2 + y^2)^2} = y \frac{4x^4 + 11x^2 y^2 - 2y^4}{(4x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \frac{x^2 - 2y^2}{4x^2 + y^2} - \frac{18x^3 y^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{(4x^3 + xy^2)(x^2 - 2y^2) - 18x^3 y^2}{(4x^2 + y^2)^2} \\ &= x \frac{4x^4 - 2y^4 - 25x^2 y^2}{(4x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, para  $(x, y) = 0$  obtenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

Entonces, concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

es decir las primeras derivadas existen en  $(0,0)$ . Luego calculamos para  $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{4x^4 + 11x^2y^2 - 2y^4}{(4x^2 + y^2)^2} \\ &+ y \frac{(-8y^3 + 22x^2)(4x^2 + y^2) - 4y(4x^4 + 11x^2y^2 - 2y^4)}{(4x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

lo que significa que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4}{16x^4} = \frac{1}{4}$$

por otro lado

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( h \cdot \frac{-2h^4}{h^4} \right) = -2 \neq \frac{1}{4}.$$

Concluimos que  $f_{xy}$  no es continua en  $(0,0)$ , por lo tanto el Teorema de Schwarz no puede ser aplicado.

### 3.7 Algunos teoremas de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Ahora consideraremos aplicaciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Tales aplicaciones mapean un punto  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D(f)$  a un punto  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in B(f) \subset \mathbb{R}^m$ . Cada coordenada  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , depende de  $(x_1, \dots, x_n)$ , es decir  $f$  es definida por  $m$  funciones:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \quad D(f_1) = D(f); \quad y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ f_m : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \quad D(f_m) = D(f); \quad y_m = f_m(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Escribimos  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , donde  $f_i$  es la  $i$ -ésima función de coordenadas.

**Teorema 3.19** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . La función  $f$  es continua en  $\mathbf{x}^0 \in D(f)$  si y sólo si cada función  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , es continua en  $\mathbf{x}^0$ .

**Ejemplo 3.15** Un ejemplo importante son las aplicaciones lineales, donde  $D(f) = \mathbb{R}^n$  y existen constantes  $a_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$  tales que

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

También para funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definiremos ahora el concepto de la diferenciabilidad. En analogía al caso de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  aquí la diferenciabilidad en un punto  $\mathbf{x}^0$  significa que en una vecindad de  $\mathbf{x}^0$  podemos aproximar  $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)$  hasta un error de primer orden por una aplicación lineal.

**Definición 3.15** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{x}^0$  un punto interior de  $D(f)$ . La función  $f = (f_1, \dots, f_m)$  se llama diferenciable en  $\mathbf{x}^0$  si existen una matriz

$$C = (c_{\mu\nu})_{\substack{\mu=1,\dots,m \\ \nu=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

y una aplicación  $f^0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida en una vecindad  $U(\mathbf{x}^0)$  de  $\mathbf{x}^0$  tales que para  $\mu = 1, \dots, m$  se tiene que

1.  $f_\mu^0(\mathbf{x}^0) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f_\mu^0(\mathbf{x}) = 0$
2.  $f_\mu(\mathbf{x}) = f_\mu(\mathbf{x}^0) + \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} (x_\nu - x_\nu^0) + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) f_\mu^0(\mathbf{x})$ .

Según esta definición, una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en un punto si cada función coordenada  $f_i$  es diferenciable. Observamos que

$$c_{\mu\nu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0), \quad \mu = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

**Definición 3.16** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si existen las derivadas parciales  $\partial f_\mu / \partial x_\nu(\mathbf{x}^0)$  para  $\mu = 1, \dots, m$  y  $\nu = 1, \dots, n$  en un punto interior  $\mathbf{x}^0 \in D(f)$ , entonces la matriz

$$\frac{df}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0) = J_f(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}^0) = \left( \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) \right)$$

se llama *matriz funcional de Jacobi* o *matriz Jacobiana* de  $f$  en  $\mathbf{x}^0$ .

**Ejemplo 3.16** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $f = (f_1, f_2, f_3)$  con

$$f_1(x, y) = 2x + y, \quad f_2(x, y) = 3x^2 + y^2, \quad f_3(x, y) = xy.$$

Aquí obtenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = x.$$

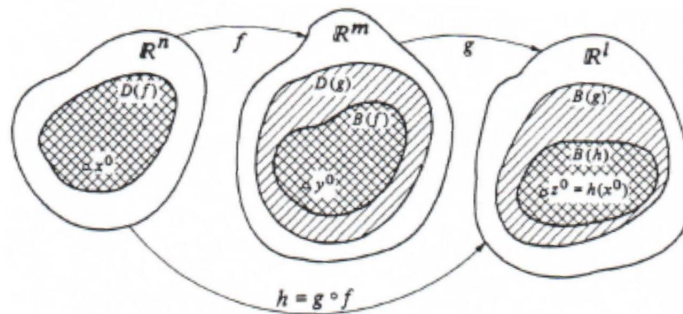


Figura 3.9: Ilustración del Teorema 3.20.



Para el punto  $(1, -2)$  obtenemos

$$\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x, y)}(1, -2) = J_f((1, -2)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 3.17** Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f_1(x, y) = x \cos y, \quad f_2(x, y) = x \sin y$$

Entonces

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x, y)}(x, y) = J_f(x, y) = \begin{bmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{bmatrix}.$$

### 3.7.1 La regla de la cadena

**Teorema 3.20** (Regla de la cadena) Se consideran las dos funciones

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \supset D(f) \ni x &\mapsto f(x) \in B(f) \subset \mathbb{R}^m, \\ g : \mathbb{R}^m \supset D(g) \ni y &\mapsto g(y) \in B(g) \subset \mathbb{R}^l, \end{aligned}$$

donde sea  $B(f) \subset D(g)$  y  $h = g \circ f$ . Además, sean  $\mathbf{x}^0$  un punto interior de  $D(f)$  e  $\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0)$  un punto interior de  $D(g)$ . Sea la función  $g$  diferenciable en  $\mathbf{y}^0$ . En este caso se tiene lo siguiente.

1. Si  $df/d\mathbf{x}(\mathbf{x}^0)$  existe, también existe  $dh/d\mathbf{x}(\mathbf{x}^0)$ , y

$$\frac{dh}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0) = \frac{dg}{d\mathbf{y}}(\mathbf{y}^0) \cdot \frac{df}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0).$$

2. Si  $f$  es diferenciable en  $\mathbf{x}^0$ , también  $h$  es diferenciable en  $\mathbf{x}^0$ .

Comentamos que la ecuación que aparece en el Teorema 3.20,

$$\frac{dh}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0) = \frac{dg}{d\mathbf{y}}(\mathbf{y}^0) \cdot \frac{df}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0)$$

es una ecuación matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial x_1} & \frac{\partial h_l}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial y_1} & \frac{\partial g_l}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial y_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

donde la primera y la tercera matriz deben ser evaluadas en  $\mathbf{x}^0$  y la segunda en  $\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0)$ .

Por otro lado, en las aplicaciones frecuentemente se presenta la situación  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . En este caso, la aplicación  $h = g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  esta definida por

$$h(x) = g(y_1, \dots, y_m)$$

donde

$$y_1 = f_1(x), \dots, y_m = f_m(x).$$

Aquí la regla de la cadena asume la forma

$$\frac{dh}{dx}(x^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(\mathbf{y}^0) & \dots & \frac{\partial g}{\partial y_m}(\mathbf{y}^0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx}(x^0) \\ \vdots \\ \frac{df_m}{dx}(x^0) \end{bmatrix} = \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_\mu}(\mathbf{y}^0) \cdot \frac{df_\mu}{dx}(x^0).$$

**Ejemplo 3.18** Sea

$$h(x) = g(y_1, y_2) = e^{y_1 y_2}, \quad y_1 = f_1(x) = x \cos x, \quad y_2 = f_2(x) = x \sin x.$$

Queremos calcular  $h'(x^0)$  para  $x^0 = \pi$ . Poniendo

$$\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0) = (f_1(x^0), f_2(x^0)) = (-\pi, 0)$$

obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} = y_2 e^{y_1 y_2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1^0, y_2^0) = 0; \quad \frac{\partial g}{\partial y_2} = y_1 e^{y_1 y_2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y_2}(y_1^0, y_2^0) = -\pi$$

además se tiene que

$$\frac{df_1}{dx} = \cos x - x \sin x, \quad \frac{df_1}{dx}(x^0) = -1; \quad \frac{df_2}{dx} = \sin x + x \cos x; \quad \frac{df_2}{dx}(x^0) = -\pi.$$

Estos valores nos permiten calcular

$$h'(\pi) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1^0, y_2^0) \frac{df_1}{dx}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y_1^0, y_2^0) \frac{df_2}{dx}(x^0) = \pi^2.$$

**Ejemplo 3.19** La regla de la cadena se usa mucho para derivar funciones que provienen de otras funciones a través de una sustitución de variables. Por ejemplo, sea dada la función  $f(x, y)$ . Introduciendo las llamadas coordenadas polares planas

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

podemos convertir  $f(x, y)$  en una función  $F(r, \varphi)$  :

$$F(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

La regla de la cadena nos entrega la siguiente relación entre  $\partial F / \partial r, \partial F / \partial \varphi, \partial f / \partial x$  y  $\partial f / \partial y$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \varphi) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \cos \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \sin \varphi) = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi. \end{aligned}$$

## CAPÍTULO 4

### Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ : aplicaciones

#### 4.1 El Teorema de Taylor

Recordemos primeramente el Teorema de Taylor para funciones de una variable (Cálculo I). Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $I$  un intervalo arbitrario, sean  $x_0 \in I$  y  $m \in \mathbb{N}_0$ , y sea la función  $f$  por lo menos  $m + 1$  veces continuamente diferenciable sobre  $I$ . Entonces para todo  $x \in I$  es válida la fórmula de Taylor

$$f(x) = T_m(x) + R_m(x, x_0)$$

con el polinomio de Taylor

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

y el término residual en su forma de Lagrange:

$$R_m(x, x_0) = \frac{f^{(m+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}$$

para un  $\vartheta \in (0, 1)$ .

Trataremos ahora una generalización del Teorema de Taylor para funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Para tal efecto definimos ahora el concepto de un polinomio de  $n$  variables.

**Definición 4.1** Un polinomio de  $n$  variables es una función  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\text{Dom}(p) = \mathbb{R}^n$  y

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n=0}^N a_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$$

donde  $\nu_1, \dots, \nu_n, N \in \mathbb{N}_0$  y  $a_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \in \mathbb{R}$ . El mayor de los números  $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$  con  $a_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \neq 0$  se llama el grado de  $p$ .

**Definición 4.2** Sea  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$  un vector de  $\mathbb{R}^n$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $f \in C^k(X)$  para un conjunto  $X \subset D(f)$ . Entonces definimos el operador diferencial  $(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k$  mediante

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k f(x) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k=1}^n h_{\nu_1} h_{\nu_2} \dots h_{\nu_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{\nu_1} \partial x_{\nu_2} \dots \partial x_{\nu_k}}(x)$$

para  $k > 0$  formalmente

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla f)^0(x) = f(x)$$

**Ejemplo 4.1** Consideremos el caso  $n = 2, k = 2$ . En este caso el operador diferencial  $(\mathbf{h} \cdot \nabla)^2$  para una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sobre un conjunto  $X \subset D(f)$  con  $f \in C^2(X)$  está (según la Definición 4.2) dado por

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \cdot \nabla f)^2(x) &= \left( h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 (x_1, x_2) \\ &= h_1 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} (x_1, x_2) + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1, x_2) \\ &\quad + h_2 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} (x_1, x_2) + h_2 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} (x_1, x_2) \\ &= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x_1, x_2) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1, x_2) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (x_1, x_2), \end{aligned}$$

donde utilizamos la siguiente relación (la cual es válida según el Teorema 3.17, puesto que  $f \in C^2(X)$ )

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

**Teorema 4.1 (Teorema de Taylor)** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $X \subset D(f)$  abierto, y para un  $m \in \mathbb{N}_0$  sea  $f \in C^{m+1}(X)$ . Además sean  $\mathbf{x}^0 \in X$  y  $\mathbf{x} \in X$ , y sea el segmento lineal  $\overline{\mathbf{x}^0, \mathbf{x}}$  contenido en  $X$ . Entonces los siguientes enunciados se tienen para  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$  :

1. La función  $f$  puede ser representada por la fórmula de Taylor

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^m \frac{(\mathbf{h} \cdot \nabla f)^k(\mathbf{x}^0)}{k!} + R_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0).$$

2. El término residual  $R_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$  es de la siguiente forma, donde  $\vartheta \in (0, 1)$  :

$$R_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \frac{(\mathbf{h} \cdot \nabla f)^{m+1}(\mathbf{x}^0 + \vartheta \mathbf{h})}{(m+1)!}$$

En el caso  $m = 0$ , es decir, para  $f \in C^1(X)$ , obtenemos para un  $\vartheta \in (0, 1)$  apropiado

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^0 + \vartheta \mathbf{h})$$

Esto es el enunciado del Teorema del Valor Intermedio. Entonces, también aquí el Teorema de Taylor es una generalización del Teorema del Valor Intermedio.

Para una función  $f(x, y)$  definida en  $\mathbb{R}^2$  y  $m = 1$ , la fórmula de Taylor escrita detalladamente es la

siguiente:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) \\ &= \frac{1}{0!} f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left( h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 (x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) \\ &= f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2} (h^2 f_{xx}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) + 2hk f_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) + k^2 f_{yy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)). \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.2** Sea la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y, z) = e^x \sin y \cos z$$

- Determinar el polinomio de Taylor  $T_2(x, y, z)$  de  $f$  correspondiente al punto de desarrollo  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ .
- Determinar el termino residual  $R_2(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$  correspondiente.
- Sea

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -\pi/4 \leq y \leq \pi/4, -\pi/4 \leq z \leq \pi/4\}.$$

Determinar una constante  $C > 0$  tal que

$$\max_{(x,y,z) \in B} |R_2(x, y, z, x_0, y_0, z_0)| \leq C.$$

*Solución sugerida.* a) Aquí calculamos las derivadas en  $(0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} f &= 0 \\ f_{xy} &= e^x \cos y \cos z|_{(0,0,0)} = 1 \\ f_x &= e^x \sin y \cos z|_{(0,0,0)} = 0, \quad f_{xz} = -e^x \sin y \sin z|_{(0,0,0)} = 0, \\ f_y &= e^x \cos y \cos z|_{(0,0,0)} = 1, \quad f_{yz} = -e^x \cos y \sin z|_{(0,0,0)} = 0, \\ f_z &= -e^x \sin y \sin z|_{(0,0,0)} = 0, \quad f_{yy} = -e^x \sin y \cos z|_{(0,0,0)} = 0, \\ f_{xx} &= e^x \sin y \cos z|_{(0,0,0)} = 0, \quad f_{zz} = -e^x \sin y \cos z|_{(0,0,0)} = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} T_2(x, y, z) &= f(0, 0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) \\ &+ \frac{1}{2} \left[ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0, 0) + 2xz \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0, 0, 0) \right. \\ &\left. + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0, 0, 0) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0, 0) + z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0, 0, 0) \right] \\ &= + \frac{1}{2} \cdot 2xy = y + xy \end{aligned}$$

b) En una notación simplificada obtenemos aquí las terceras derivadas

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= e^x \sin y \cos z, & f_{xzz} &= -e^x \sin y \cos z, \\ f_{xxy} &= e^x \cos y \cos z, & f_{yyy} &= -e^x \cos y \cos z, \\ f_{xxz} &= -e^x \sin y \sin z, & f_{yyz} &= e^x \sin y \sin z, \\ f_{xyy} &= -e^x \sin y \cos z, & f_{yzz} &= -e^x \cos y \cos z, \\ f_{xyz} &= -e^x \cos y \sin z, & f_{zzz} &= e^x \sin y \sin z. \end{aligned}$$

El término residual es, en este caso,

$$\begin{aligned} R_2(x, y, z, x_0, y_0, z_0) \\ = \frac{1}{6} (x^3 f_{xxx} + y^3 f_{yyy} + z^3 f_{zzz} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} \\ + 3x^2 z f_{xxz} + 3xz^2 f_{xzz} + 3y^2 z f_{yyz} + 3yz^2 f_{yzz} + 6xyz f_{xyz}), \end{aligned}$$

donde las terceras derivadas son evaluadas en algún punto  $(\xi, \eta, \zeta)$  con  $0 \leq \xi \leq x$ ,  $0 \leq \eta \leq y$  y  $0 \leq \zeta \leq z$ , es decir

$$\begin{aligned} R_2(x, y, z, x_0, y_0, z_0) \\ = \frac{e^\xi}{6} (x^3 \sin \eta \cos \zeta - y^3 \cos \eta \cos \zeta + z^3 \sin \eta \sin \zeta \\ + 3x^2 y \cos \eta \cos \zeta - 3xy^2 \sin \eta \cos \zeta - 3x^2 z \sin \eta \sin \zeta \\ - 3xz^2 \sin \eta \cos \zeta + 3y^2 z \sin \eta \sin \zeta - 3yz^2 \cos \eta \cos \zeta \\ - 6xyz \cos \eta \sin \zeta). \end{aligned}$$

c) Tomando en cuenta que  $|\sin \alpha| \leq 1/\sqrt{2}$  para  $-\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/4$ , podemos acotar  $R_2$  sobre  $B$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |R_2(x, y, z, x_0, y_0, z_0)| \\ \leq \frac{e}{6} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi^3}{64} + \frac{\pi^3}{128} + \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi^2}{16\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi^2}{16\sqrt{2}} + \frac{3\pi^3}{128} + \frac{3\pi^3}{64} + \frac{6\pi^2}{16\sqrt{2}} \right) \\ = \frac{e}{6} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{9\pi}{8} + \frac{(9\sqrt{2}+6)\pi^2}{32} + \frac{3\pi^3}{32} \right) \leq 5,855. \end{aligned}$$

## 4.2 Funciones implícitas

Queremos ahora estudiar la solución de sistemas de ecuaciones, empezando con elementos de la teoría de sistemas lineales. Sea  $n > m$  y un sistema lineal dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m &= 0. \end{aligned}$$

Suponemos que el rango de la matriz  $(a_{\mu\nu})$  es  $m$ , es decir, después de un posible cambio de numeración de las variables,

$$\det (a_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,m} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.2.1)$$

En este caso podemos despejar  $x_1, \dots, x_m$  del sistema lineal, es decir, existen coeficientes  $c_\mu$  y  $c_{\mu\nu}$  tales que

$$x_1 = c_1 + \sum_{\nu=m+1}^n c_{1\nu}x_\nu, \dots, x_m = c_m + \sum_{\nu=m+1}^n c_{m\nu}x_\nu.$$

Queremos generalizar ahora este problema y consideremos en  $\mathbb{R}$  un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ &\vdots \\ f_m(x) &= f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

donde suponemos que las funciones  $f_\mu$  están todas definidas en una vecindad  $n$ -dimensional  $U(\mathbf{x}^0)$  de un punto  $\mathbf{x}^0$ , es decir,

$$U(\mathbf{x}^0) \subset \bigcap_{\mu=1}^m D(f_\mu)$$

Ahora buscamos todos los puntos  $x \in U(\mathbf{x}^0)$  que son soluciones del sistema de ecuaciones. El siguiente ejemplo demuestra que un tal punto no necesariamente debe existir.

**Ejemplo 4.3** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_3^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Aquí  $n = 3, m = 2$ . El sistema de ecuaciones no está satisfecho para ningún punto.

Para avanzar tenemos que exigir que por lo menos para un punto  $x \in U(\mathbf{x}^0)$  el sistema no lineal esté satisfecho. Además necesitaremos alguna otra condición que se convierte en la condición (4.2.1) para el caso especial de un sistema lineal.

**Teorema 4.2 (Teorema Principal de Funciones Implícitas)** Sean dadas las funciones  $f_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  para  $\mu = 1, \dots, m$  con  $m < n$ . Sean  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto;  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in X$ ;  $f_\mu \in C^1(X)$  para  $\mu = 1, \dots, m$ , y

$$\begin{aligned} f_1(x_1^0, \dots, x_n^0) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1^0, \dots, x_n^0) &= 0. \end{aligned}$$

Además, sea la matriz

$$F(\mathbf{x}^0) = \left( \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) \right)_{\mu, \nu=1, \dots, m} \quad (4.2.2)$$

no singular. En este caso, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ &\vdots \\ f_m(x) &= f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

es localmente resoluble para  $x_1, \dots, x_m$ . Esto significa lo siguiente: existen una vecindad abierta  $Y$  del punto  $\xi^0 = (x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^{n-m}$  y  $m$  funciones unicamente definidas  $\varphi_\mu : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R} (\mu = 1, \dots, m)$  de las variables  $x_{m+1}, \dots, x_n$ ,

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_m &= \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

todas de ellas definidas sobre  $Y$ . Estas funciones satisfacen lo siguiente:

1.  $\varphi_\mu \in C^1(Y)$  para  $\mu = 1, \dots, m$ .
2. Para todo  $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in Y$  se tiene que

$$\begin{aligned} f_1(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

3. Las matrices

$$\phi(\xi^0) = \left( \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}(\xi^0) \right)_{\substack{\mu=1, \dots, m \\ \nu=m+1, \dots, n}} \quad y \quad \tilde{F}(\mathbf{x}^0) = \left( \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) \right)_{\substack{\mu=1, \dots, m \\ \nu=m+1, \dots, n}}$$

satisfacen la relación

$$\phi(\xi^0) = - (F(\mathbf{x}^0))^{-1} \cdot \tilde{F}(\mathbf{x}^0)$$

**Dem:** La demostración se realizará por inducción sobre  $\mu$ , es decir, el número de ecuaciones. Primeramente notamos que después de posiblemente reenumerar las funciones  $f_\mu$  y las  $m$  primeras variables  $x_1, \dots, x_m$  podemos suponer que todos los subdeterminantes principales de (4.2.2) satisfacen

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}(\mathbf{x}^0) \end{array} \right| \neq 0, \quad \mu = 1, \dots, m.$$



1. Sea  $\mu = 1$ . Según hipótesis,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) \neq 0$$

sin pérdida de la generalidad podemos suponer que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) > 0$$

a) En virtud de la hipótesis  $f_1 \in C^1(X)$  existe un  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f_1(x_1^0 - \varepsilon, x_2^0, \dots, x_n^0) < 0, \quad f_1(x_1^0 + \varepsilon, x_2^0, \dots, x_n^0) > 0$$

además existe un  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  apropiado tal que para cada selección de  $x_\nu$  con  $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta$  ( $\nu = 2, \dots, n$ ) se tiene que

$$f_1(x_1^0 - \varepsilon, x_2, \dots, x_n) < 0, \quad f_1(x_1^0 + \varepsilon, x_2, \dots, x_n) > 0.$$

Eligiendo  $\varepsilon$  y  $\delta$  aún más pequeños si fuera necesario, podemos suponer que en el entero intervalo  $n$ -dimensional

$$|x_1 - x_1^0| < \varepsilon, \quad |x_\nu - x_\nu^0| < \delta \quad (\nu = 2, \dots, n)$$

se tiene que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) > 0$$

Ahora sea elegido  $(x_2, \dots, x_n)$  tal que  $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta$  para  $\nu = 2, \dots, n$ . Entonces, dado que  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una función monótona creciente de  $x_1$  en el intervalo  $|x_1 - x_1^0| < \varepsilon$ , existe exactamente un valor  $x_1 = \varphi_1(x_2, \dots, x_n)$  tal que

$$f_1(\varphi_1(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = 0$$

Esto define sobre  $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta$  ( $\nu = 2, \dots, n$ ) una función  $\varphi_1(x_2, \dots, x_n)$ . Según la construcción, siempre se tiene que

$$|x_1 - x_1^0| = |\varphi_1(x_2, \dots, x_n) - \varphi_1(x_2^0, \dots, x_n^0)| < \varepsilon$$

Puesto que la misma demostración puede ser realizada para un  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeño, esto implica la continuidad de  $\varphi_1$  en  $(x_2^0, \dots, x_n^0)$ . Para cualquier otro punto  $(x_2, \dots, x_n)$  tal que  $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta$  para  $\nu = 2, \dots, n$  resulta la continuidad si repetimos la misma demostración remplazando  $\mathbf{x}^0$  por  $(\varphi_1(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ . b) El enunciado  $\varphi_1 \in C^1$  es una consecuencia del Teorema del Valor Intermedio para  $f_1$  aplicado a los puntos  $(x_2^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)$  y  $(x_2^0, \dots, x_k^0 + h, \dots, x_n^0)$ , donde suponemos  $|h| < \delta$  para asegurar que también el segundo punto pertenezca al dominio de  $\varphi_1$ . Ahora, si escribimos detalladamente en el argumento  $(x_2, \dots, x_n)$  solamente la  $k$ -ésima componente y definimos  $x_1^h := \varphi_1(\dots, x_k^0 + h, \dots)$ , se tiene con un  $\vartheta \in (0, 1)$  que

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1^h, \dots, x_k^0 + h, \dots) - f_1(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^0 + \vartheta(x_1^h - x_1^0), \dots, x_k^0 + \vartheta h, \dots)(x_1^h - x_1^0) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x_1^0 + \vartheta(x_1^h - x_1^0), \dots, x_k^0 + \vartheta h, \dots)h. \end{aligned}$$

Después de dividir por  $h$  y tomando el límite  $h \rightarrow 0$  obtenemos

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} (x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} (x_2^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_k} (x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)$$

Esto implica la existencia de la derivada parcial de  $\varphi_1$  con respecto a  $x_k$  ( $k = 2, \dots, n$ ) en el punto  $(x_2^0, \dots, x_n^0)$ . Para cualquier otro punto podemos proceder como en (a). Entonces el enunciado  $\varphi_1 \in C^1$  es una consecuencia de la presuposición  $f_1 \in C^1$ .

2. Supongamos ahora que el teorema haya sido demostrado para  $\mu - 1$ , donde  $2 \leq \mu \leq m$ . Según la presuposición sabemos que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{\mu-1}}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_{\mu-1}}(\mathbf{x}^0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Según la hipótesis de inducción las primeras  $\mu - 1$  ecuaciones del sistema son localmente resolubles, es decir existen un  $\tilde{\delta} > 0$  y  $\mu - 1$  funciones

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{\varphi}_1(x_\mu, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_{\mu-1} &= \tilde{\varphi}_{\mu-1}(x_\mu, \dots, x_n) \end{aligned}$$

las que son definidas, continuas y pertenecen a  $C^1$  para  $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$  para  $\nu = \mu, \dots, n$ , de modo que allí se tiene que

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{\varphi}_1(x_\mu, \dots, x_n), \dots, \tilde{\varphi}_{\mu-1}(x_\mu, \dots, x_n), x_\mu, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{\mu-1}(\tilde{\varphi}_1(x_\mu, \dots, x_n), \dots, \tilde{\varphi}_{\mu-1}(x_\mu, \dots, x_n), x_\mu, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Tomando la derivada parcial de cada una de estas ecuaciones con respecto a  $x_\mu$  obtenemos para todo punto  $(x_\mu, \dots, x_n)$  con  $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$  para  $\nu = \mu, \dots, n$  las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_\mu} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_{\mu-1}} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{\mu-1}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_\mu} + \dots + \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_{\mu-1}} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{\mu-1}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_\mu} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Consideremos ahora para  $(x_\mu, \dots, x_n)$  con  $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$  ( $\nu = \mu, \dots, n$ ) la  $\mu$ -ésima ecuación del sistema, donde reemplazamos  $x_1, \dots, x_{\mu-1}$  por las funciones  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{\mu-1}$ :

$$\tilde{f}_\mu(x_\mu, \dots, x_n) = f_\mu(\tilde{\varphi}_1(x_\mu, \dots, x_n), \dots, \tilde{\varphi}_{\mu-1}(x_\mu, \dots, x_n), x_\mu, \dots, x_n) = 0$$

Por supuesto, esta ecuación no está automáticamente satisfecha para puntos arbitrarios  $(x_\mu, \dots, x_n)$  con  $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$  ( $\nu = \mu, \dots, n$ ); más bien hay que despejar  $x_\mu$  de esta ecuación.

Para tal efecto, y para poder aplicar el paso (1) de esta demostración, debemos demostrar primeramente que

$$\frac{\partial \tilde{f}_\mu}{\partial x_\mu}(x_\mu^0, \dots, x_n^0) \neq 0 \quad (4.2.4)$$

Pero para  $(x_\mu, \dots, x_n)$  con  $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta} (\nu = \mu, \dots, n)$  se tiene que

$$\frac{\partial \tilde{f}_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_\mu} + \dots + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_{\mu-1}} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{\mu-1}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}.$$

Si esta expresión desapareciera al insertar  $(x_\mu^0, \dots, x_n^0)$ , tendríamos junto con las ecuaciones (4.2.3) un sistema de ecuaciones homogéneo con un determinante no nulo pero con la solución no trivial

$$\left( \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_\mu}(x_\mu^0, \dots, x_n^0), \dots, \frac{\partial \tilde{\varphi}_{\mu-1}}{\partial x_\mu}(x_\mu^0, \dots, x_n^0), 1 \right),$$

una contradicción. Entonces (4.2.4) es válido, y existen un  $\delta \in (0, \tilde{\delta})$  y una función

$$x_\mu = \varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n) \quad (4.2.5)$$

la cual está definida, continua, y pertenece a  $C^1$  para  $(x_{\mu+1}, \dots, x_n)$  con  $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$  para  $\nu = \mu + 1, \dots, n$  tal que

$$\begin{aligned} f_\mu(\tilde{\varphi}_1(\varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), x_{\mu+1}, \dots, x_n), \dots, \\ \tilde{\varphi}_{\mu-1}(\varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), x_{\mu+1}, \dots, x_n), \varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), x_{\mu+1}, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

Si todavía definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{\varphi}_1(\varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), x_{\mu+1}, \dots, x_n) =: \varphi_1(x_{\mu+1}, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_{\mu-1} &= \tilde{\varphi}_{\mu-1}(\varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), x_{\mu+1}, \dots, x_n) =: \varphi_{\mu-1}(x_{\mu+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

hemos encontrado junto con (4.2.5) las soluciones buscadas.

La afirmación  $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu \in C^1$  sigue de las propiedades correspondientes sobre las funciones  $\varphi_\mu$  y  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{\mu-1}$  mediante la aplicación de la regla de la cadena. Asimismo, la afirmación (3) del teorema es una consecuencia de la regla de la cadena.

**Ejemplo 4.4** Consideremos la ecuación

$$f(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$$

y queremos resolverla para  $z$  en una vecindad de  $(0, e, 2)$ . Para la matriz  $F$  obtenemos aquí

$$\det F = \frac{\partial f}{\partial z}(0, e, 2) = (x + 2z - e^z)|_{(0, e, 2)} = 4 - e^2 \neq 0.$$

Según el Teorema (4.2.1), esta ecuación puede ser resuelta en una vecindad de  $(0, e)$  en la forma  $z = z(x, y)$  de tal manera que  $z(0, e) = 2$ .

Queremos calcular las derivadas  $\partial z/\partial x(0, e)$  y  $\partial z/\partial y(0, e)$ . Aplicando la regla de la cadena a  $f(x, y, z) = 0$  obtenemos por "derivación implícita" con respecto a  $x$  e  $y$  las ecuaciones

$$0 = z + x \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - e^z \frac{\partial z}{\partial x}, \quad 0 = 2y + x \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \frac{\partial z}{\partial y} - e^z \frac{\partial z}{\partial y}$$

es decir,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x + 2z - e^z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x + 2z - e^z}.$$

Insertando  $x = 0$ ,  $y = e$  y  $z = z(0, e) = 2$  obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, e) = -\frac{2}{4 - e^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, e) = -\frac{2e}{4 - e^2}.$$

Note que ha sido posible calcular estas derivadas parciales sin conocer explícitamente la función  $z(x, y)$ ; solamente necesitamos conocer el valor de  $z(x, y)$  en el punto  $(0, e)$ .

**Ejemplo 4.5** Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_3 + x_2 x_4^2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_4^3 + x_2^2 x_3^6 = 0. \end{aligned}$$

Evidentemente el sistema está satisfecho en el punto

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) = (0, 1, 0, 0).$$

Queremos analizar si podemos resolver el sistema para  $x_3 = x_3(x_1, x_2)$ ,  $x_4 = x_4(x_1, x_2)$ . Aquí obtenemos

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 2x_2 x_4 \\ 6x_2^2 x_3^5 & 3x_1 x_4^2 \end{bmatrix}.$$

Para el punto considerado,

$$\det F = 3x_1^2 x_4^2 - 12x_2^3 x_3^5 x_4 = 0.$$

En este caso, el Teorema Principal de Funciones Implícitas (Teorema (4.2)) no nos entrega ninguna información acerca de la existencia y unicidad de una solución del sistema en una vecindad del punto considerado.

## 4.3 Funciones inversas

El siguiente teorema representa una de las aplicaciones más importantes del Teorema Principal de Funciones Implícitas.

**Teorema 4.3 (Teorema Principal de las Funciones Inversas)** Se considera una aplicación  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $X \subset D(f)$  un conjunto abierto, y sea  $f \in C^1(X)$ . En el punto  $x^0$  el Jacobiano de  $f$  sea regular, es decir,

$$\det \left( \frac{df}{dx}(x^0) \right) \neq 0.$$

1. En este caso existen una vecindad abierta  $U(\mathbf{x}^0)$  de  $\mathbf{x}^0$  y una vecindad abierta  $V(\mathbf{y}^0)$  de  $\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0)$  tales que  $U(\mathbf{x}^0)$  es mapeado de manera biyectiva a  $V(\mathbf{y}^0)$ , es decir sobre  $V(\mathbf{y}^0)$  existe la aplicación inversa  $f^{-1}$ .

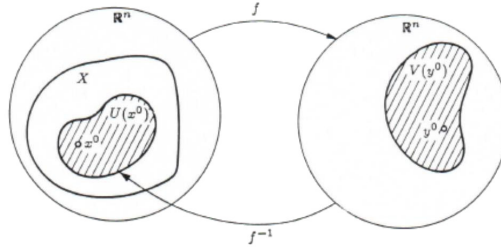


Figura 4.1: Ilustración del Teorema (4.3).

2. Esta aplicación inversa satisface  $f^{-1} \in C^1(V(\mathbf{y}^0))$ , y para  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in V(\mathbf{y}^0)$  se tiene la siguiente relación entre los Jacobianos  $df/d\mathbf{x}$  y  $df^{-1}/d\mathbf{y}$  :

$$\frac{df^{-1}}{d\mathbf{y}} = \left( \frac{df}{d\mathbf{x}} \right)^{-1}$$

**Dem:** Escribimos la aplicación dada

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

como un sistema de ecuaciones en  $\mathbb{R}^{2n}$ , donde ponemos  $y_1 = x_{n+1}, \dots, y_n = x_{2n}$  y  $y_1^0 = x_{n+1}^0, \dots, y_n^0 = x_{2n}^0$  :

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_{2n}) &= f_1(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1} = 0, \\ &\vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_{2n}) &= f_n(x_1, \dots, x_n) - x_{2n} = 0. \end{aligned}$$

En el punto  $(x_1^0, \dots, x_{2n}^0)$  el sistema de ecuaciones está satisfecho; además, en una vecindad de este punto  $F = (F_1, \dots, F_n)$  pertenece a  $C^1$ , y se tiene que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} (x_1^0, \dots, x_{2n}^0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} (x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0.$$

Esto significa que localmente podemos despejar  $x_1, \dots, x_n$ , es decir existen un  $\delta > 0$  y funciones

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1^{-1}(x_{n+1}, \dots, x_{2n}), \\ &\vdots \\ x_n &= f_n^{-1}(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \end{aligned}$$

definidas, continuas y  $C^1$  sobre  $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta$  ( $\nu = n+1, \dots, 2n$ ), las cuales allí satisfacen (3.7). Si nuevamente definimos  $y_\nu = x_{n+\nu}$  y  $y_\nu^0 = x_{n+\nu}^0$  para  $\nu = 1, \dots, n$  esto significa que para  $(y_1, \dots, y_n)$  tales que  $|y_\nu - y_\nu^0| < \delta$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) hemos encontrado funciones tales que

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(f_1^{-1}(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)), \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(f_1^{-1}(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)). \end{aligned}$$

La derivación parcial nos entrega

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial y_\nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial f_i^{-1}}{\partial y_\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

Esto demuestra el enunciado (2) según la definición del producto matricial.

**Ejemplo 4.6** Consideremos la aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1^2, \quad y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Aquí

$$\left| \frac{df}{d\mathbf{x}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x_1.$$

Consideremos un punto  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ , entonces

$$\left| \frac{df}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0) \right| \neq 0$$

si y sólo si  $x_1^0 \neq 0$ , es decir si  $\mathbf{x}^0$  está localizado o en el semiplano izquierdo o en el semiplano derecho.

Supongamos primero que  $x_1^0 > 0$ . En este caso la aplicación inversa  $f_R^{-1}$  de  $f$  está definida por

$$x_1 = \sqrt{y_1}, \quad x_2 = y_2 - \sqrt{y_1}.$$

El dominio de  $f_R^{-1}$  es el semiplano derecho; la imagen igualmente es el semiplano derecho. Para  $x_1^0 < 0$ , obtenemos la función inversa  $f_L^{-1}$  de  $f$  definida por

$$x_1 = -\sqrt{y_1}, \quad x_2 = y_2 + \sqrt{y_1}.$$

Nuevamente, el dominio de  $f_L^{-1}$  es el semiplano derecho; la imagen ahora es el semiplano izquierdo.

**Ejemplo 4.7** Sea la función  $f := (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$u = u(x, y) = x \cos y, \quad v = v(x, y) = x \sin y$$

sobre  $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ . Aquí queremos analizar la invertibilidad de  $f$ . Para tal efecto notamos que aquí el Jacobiano está dado por

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{bmatrix}$$

con el determinante

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = x \cos^2 y + x \sin^2 y = x.$$

Según el Teorema 4.3 podemos concluir que  $f$  es invertible en una vecindad de cada punto  $(x_0, y_0)$  con  $x_0 \neq 0$ . Pero  $f$  no es invertible globalmente, dado que

$$u(x_0, y_0 + 2\pi) = x_0 \cos(y_0 + 2\pi) = x_0 \cos y_0 = u(x_0, y_0)$$

$$v(x_0, y_0 + 2\pi) = x_0 \sin(y_0 + 2\pi) = x_0 \sin y_0 = v(x_0, y_0)$$

así que la imagen de los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_0, y_0 + 2\pi)$  siempre es la misma.

**Ejercicio 4.1** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $g(0) = 1$ . Considere la función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = \left( \int_x^y g(t) dt, \int_y^{x^2} g(t) dt \right)$ . Demuestre que esta función tiene una inversa  $F^{-1}$  definida en una bola  $B$  del origen de coordenadas. Determine  $J_{F^{-1}}$ .

**Ejercicio 4.2** Considere la función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(u, v) = (u^2 + v^3, u^2 + uv)$ . Donde se tiene que  $f(1, 2) = (9, 3)$ . Analice la existencia de la inversa.

**Ejercicio 4.3** Considere la función  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $f(u, v, w) = (u + v + e^w, u + w + e^{2v}, v + w + e^3u)$ . Donde  $f(0, 0, 0) = (1, 1, 1)$ . Analice la existencia de la función inversa en torno a  $(1, 1, 1)$ . Calcule  $J_{f^{-1}}(1, 1, 1)$ .

**Ejercicio 4.4** Considere la función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(u, v) = (e^{u+v}, e^{u-v})$ . Analice la existencia de la función inversa en torno a  $(x_0, y_0)$ .

**Ejercicio 4.5** Considere las funciones

$$f_1(x, y, u, v) = x + y + (u + v)(u - v),$$

$$f_2(x, y, u, v) = 2x - y + (u^2 - 1) \cos v + 1.$$

Sea  $P = (x_0 = 0, y_0 = 0, u_0 = 0, v_0 = 0)$ .

- a) Analizar si en una vecindad de  $P$ , existen funciones  $g_1 = g_1(u, v)$  y  $g_2 = g_2(u, v)$  tales que las variables  $x = g_1(u, v)$  e  $y = g_2(u, v)$  pueden ser despejadas de

$$f_1(x, y, u, v) = 0,$$

$$f_2(x, y, u, v) = 0.$$

Si es posible, calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial g_1}{\partial u}(0, 0), \quad \frac{\partial g_1}{\partial v}(0, 0), \quad \frac{\partial g_2}{\partial u}(0, 0), \quad \frac{\partial g_2}{\partial v}(0, 0).$$

- b) Analizar si en una vecindad de  $P$ , existen funciones  $h_1 = h_1(x, y)$  y  $h_2 = h_2(x, y)$  tales que las variables  $u = h_1(x, y)$  y  $v = h_2(x, y)$  pueden ser despejadas. Si es posible, calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial h_1}{\partial y}(0, 0), \quad \frac{\partial h_2}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial h_2}{\partial y}(0, 0)$$

## 4.4 Extremos de funciones de varias variables

**Teorema 4.4** Sea la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  parcialmente diferenciable con respecto a cada variable en un punto interior  $\mathbf{x}^0$  de  $D(f)$ . Si  $f$  posee un extremo relativo en  $\mathbf{x}^0$ , entonces se tiene que

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}.$$

A estos  $\mathbf{x}^0$  se le conoce como puntos estacionarios o puntos críticos.

**Dem:** El enunciado sigue inmediatamente del hecho que  $f$  posee en  $\mathbf{x}^0$  un extremo en cada dirección de coordenada  $\mathbf{e}_i$  como función de la variable escalar  $x_i$ , lo que implica  $f_{x_i}(\mathbf{x}^0) = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ .

**Ejercicio 4.6** Pruebe que  $f(x, y) = 11x^2 - 2xy + 2y^2 + 3y$  tiene un punto crítico. Use Geogebra para determinar si éste corresponde a un máximo o a un mínimo local.

Comentamos que la condición indicada en el Teorema 4.4,  $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ , es una condición necesaria, pero no suficiente para la existencia de un extremo relativo. Para ilustrar eso, consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D(f) = \mathbb{R}^2$  y  $f(x, y) = xy$  (ver Figura 3.1). Aquí obtenemos las derivadas parciales  $f_x(x, y) = y$  y  $f_y(x, y) = x$ , por lo tanto  $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$  si y sólo si  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Sin embargo, la función  $f$  no posee un extremo relativo en  $(0, 0)$  dado que en cada vecindad de  $(0, 0)$  existen valores de  $f$  positivo y negativos.

Aquellos puntos  $\mathbf{x}^0$  de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  donde se tiene que  $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$  pero que no son extremos relativos se llaman **puntos de silla**.

Para la formulación de condiciones suficientes para la existencia de extremos locales de funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  necesitamos estudiar formas cuadráticas.

**Definición 4.3** Sea  $A = (a_{ik})_{i,k=1,\dots,n}$  una matriz simétrica.

1. El polinomio  $Q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$Q_A(\mathbf{x}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_i x_k, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

se llama la **forma cuadrática** asociada con  $A$ .

2. La matriz  $A$  o la función  $Q_A$  se llama **semidefinida positiva** si  $Q_A(\mathbf{x}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y **semidefinida negativa** si  $Q_A(\mathbf{x}) \leq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
3. La matriz  $A$  o la función  $Q_A$  se llama **definida positiva** si  $Q_A(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq (0, \dots, 0)$ , y **definida negativa** si  $Q_A(\mathbf{x}) < 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq (0, \dots, 0)$ .
4. La matriz  $A$  o la función  $Q_A$  se llama **indefinida** si no es semidefinida ni positiva ni negativa.

**Teorema 4.5** Sea  $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica; y sea  $-A = (-a_{ik})$ .



1. La matriz  $A$  es **semidefinida positiva** si y sólo si  $-A$  es **semidefinida negativa**.
2. La matriz  $A$  es **definida positiva** si y sólo si  $-A$  es **definida negativa**.

**Dem:** Las afirmaciones son una consecuencia inmediata de

$$Q_A(\mathbf{x}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k = - \sum_{i,k=1}^n (-a_{ik}) x_i x_k = -Q_{(-A)}(\mathbf{x})$$

**Teorema 4.6** La matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

es

- **semidefinida positiva** si y sólo si  $ad - b^2 \geq 0, a \geq 0, d \geq 0$ ,
- **semidefinida negativa** si y sólo si  $ad - b^2 \geq 0, a \leq 0, d \leq 0$ ,
- **definida positiva** si y sólo si  $ad - b^2 > 0, a > 0$ ,
- **definida negativa** si y sólo si  $ad - b^2 > 0, a < 0$ ,
- **indefinida** si y sólo si  $ad - b^2 < 0$ .

En general es muy difícil decidir si una matriz es definida; los métodos especializados son tópicos del álgebra lineal. Aquí mencionamos el siguiente criterio útil (sin demostración).

**Teorema 4.7** Se considera la matriz simétrica  $A = (a_{ik})$  con las submatrices principales

$$A_\nu = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Sea  $\det A_\nu$  el determinante de  $A_\nu$ . Entonces

1.  $A$  es **definida positiva** si y sólo si

$$\det A_\nu > 0 \quad \text{para } \nu = 1, \dots, n$$

2.  $A$  es **definida negativa** si y sólo si

$$(-1)^\nu \det A_\nu > 0 \quad \text{para } \nu = 1, \dots, n.$$

Además, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.8** Se considera la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $\mathbf{x}^0 \in D(f)$ , y para una vecindad  $U(\mathbf{x}^0)$  de  $\mathbf{x}^0$  sea  $f \in C^2(U(\mathbf{x}^0))$ . Además, sea  $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ , y consideremos la matriz

$$A(\mathbf{x}^0) = (f_{x_i x_k}(\mathbf{x}^0))_{i,k=1,\dots,n}$$

Entonces se tiene lo siguiente.

1. Si  $A(\mathbf{x}^0)$  es definida positiva, entonces  $f$  posee un mínimo local en  $\mathbf{x}^0$ . Si  $A(\mathbf{x}^0)$  es definida negativa, entonces  $f$  posee un máximo local en  $\mathbf{x}^0$ .
2. Si  $f$  posee un mínimo relativo en  $\mathbf{x}^0$ , entonces  $A(\mathbf{x}^0)$  es semidefinida positiva. Si  $f$  posee un máximo relativo en  $\mathbf{x}^0$ , entonces  $A(\mathbf{x}^0)$  es semidefinida negativa.
3. Si  $A(\mathbf{x}^0)$  es indefinida, entonces  $f$  no posee en  $\mathbf{x}^0$  ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.

**Ejemplo 4.8** Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D(f) = \mathbb{R}^3$  y

$$f(x, y, z) = 35 - 6x + 2z + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2.$$

Aquí obtenemos las derivadas parciales

$$f_x = -6 + 2x - 2y, \quad f_y = -2x + 4y + 2z, \quad f_z = 2 + 2y + 6z.$$

Esto implica que  $(x_0, y_0, z_0) = (8, 5, -2)$  es el único punto donde  $\nabla f = \mathbf{0}$ . En este punto se tiene que

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = -2, \quad f_{yy} = 4, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yz} = 2, \quad f_{zz} = 6$$

es decir, la matriz  $A(x_0, y_0, z_0)$  está dada por

$$A(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Los determinantes de las submatrices principales son

$$|2| = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 16.$$

Todos estos determinantes son positivos. Concluimos que según el Teorema 4.7 la matriz  $A(x_0, y_0, z_0)$  es definida positiva, por lo tanto la función  $f$  posee en  $(x_0, y_0, z_0) = (8, 5, -2)$  un mínimo local.

Consideremos ahora el caso particular de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 4.9** Se considera la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $(x_0, y_0) \in D(f)$ , y para una vecindad  $U(x_0, y_0)$  de  $(x_0, y_0)$  sea  $f \in C^2(U(x_0, y_0))$ . Sea  $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ , y el discriminante  $\delta(x_0, y_0)$  definido por

$$\delta(x_0, y_0) := f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

1. Si  $\delta(x_0, y_0) > 0$ , entonces  $f$  posee un extremo en  $(x_0, y_0)$ . Se trata de un máximo relativo si  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  y de un mínimo relativo si  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ .
2. Si  $\delta(x_0, y_0) < 0$ , entonces  $f$  no posee ningún extremo en  $(x_0, y_0)$ .

**Ejemplo 4.9** Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = xy + x - y + 1, \quad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Aquí obtenemos las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = y + 1, \quad f_y(x, y) = x - 1, \quad f_{xy}(x, y) = 1, \quad f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = 0.$$

Los únicos candidatos a ser extremos de  $f$  son aquellos puntos  $(x_0, y_0)$  donde se tiene que  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ ; en este caso el único punto con esta propiedad es  $(1, -1)$ . Pero

$$\delta(1, -1) = f_{xx}(1, -1)f_{yy}(1, -1) - (f_{xy}(1, -1))^2 = -1 < 0,$$

entonces según el Teorema 4.9,  $f$  no posee ningún extremo.

**Ejercicio 4.7** 1. Halle los puntos críticos de la función  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$  y analícelos utilizando el criterio de la segunda derivada.

2. Analice los puntos críticos de  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12xy$ .

**Ejemplo 4.10** Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3, \quad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Aquí obtenemos las derivadas parciales

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 - 12y, & f_y(x, y) &= -12x + 24y^2 \\ f_{xy}(x, y) &= -12, & f_{xx}(x, y) &= 6x, & f_{yy}(x, y) &= 48y. \end{aligned}$$

Los puntos extremos  $(x_0, y_0)$  de  $f$  deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_0^2 - 12y_0 &= 0 \\ -12x_0 + 24y_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

La primera ecuación implica que

$$y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$$

Insertando esto en la segunda ecuación se tiene que

$$-12x_0 + \frac{24}{16}x_0^4 = 0 \iff x_0^4 - 8x_0 = 0$$

Esta ecuación tiene solamente las soluciones  $x_0^{(1)} = 0$  y  $x_0^{(2)} = 2$ , es decir los únicos puntos que hay que examinar son  $(0, 0)$  y  $(2, 1)$ . Pero

$$\delta(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = -144 < 0$$

por lo tanto  $f$  no posee un extremo en  $(0, 0)$ , mientras que

$$\delta(2, 1) = f_{xx}(2, 1)f_{yy}(2, 1) - (f_{xy}(2, 1))^2 = 432 > 0$$

es decir,  $f$  posee un extremo local en  $(2, 1)$ ; puesto que  $f_{xx}(2, 1) = 12 > 0$ , se trata de un mínimo local.

**Teorema 4.10** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre un dominio cerrado y acotado  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces:

- i)  $f$  alcanza un valor máximo y uno mínimo sobre  $D$ .
- ii) Los valores extremos ocurren o bien en los puntos críticos en el interior de  $D$ , o bien en los puntos de la frontera de  $D$ .

**Ejercicio 4.8** Halle el valor máximo de  $f(x, y) = 2x + y - 3xy$  sobre el cuadrado unidad  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ .

**Ejemplo 4.11** Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2, \quad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Queremos determinar todos los extremos de  $f$  sobre el conjunto

$$M = \{(x, y) \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq -x + 3\}.$$

Obtenemos aquí las siguientes condiciones necesarias para un extremo:

$$\begin{aligned} f_x &= y(3 - y - 2x) = 0, \\ f_y &= x(3 - x - 2y) = 0. \end{aligned}$$

Las únicas soluciones de este sistema de ecuaciones son los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(3, 0)$  y  $(1, 1)$ . Se tiene que  $f(1, 1) = 1$ . Los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$  y  $(3, 0)$  están localizados en la frontera de  $M$ , donde  $f(x, y) \equiv 0$ . Obtenemos que  $f$  posee un máximo relativo en  $(1, 1)$ . Dado que  $M$  no puede contener ningún otro máximo de  $f$ , este máximo incluso es el máximo absoluto de  $f$  sobre  $M$ , es decir

$$0 \leq f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2 \leq 1 \quad \text{para todo } (x, y) \in M.$$

Este ejemplo muestra que a veces es posible determinar todos los extremos de  $f$  utilizando solamente la condición necesaria  $\nabla f = \mathbf{0}$  y la forma analítica de  $f$ .

**Ejercicio 4.9** Halle el volumen máximo de la caja inscrita en el tetraedro limitado por los planos de coordenadas y el plano  $\frac{1}{3}x + y + z = 1$ .

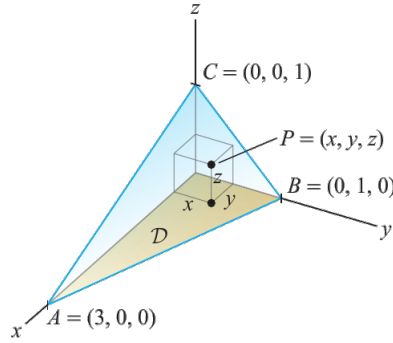


Figura 4.2: El triángulo sombreado es el dominio de  $V(x, y)$ .

## 4.5 Extremos con restricciones y multiplicadores de Lagrange

Volveremos a la discusión de los extremos de una función de varias variables. El Teorema de las Funciones Implícitas nos permite el tratamiento de extremos de funciones sujetos a restricciones. En muchas aplicaciones se presenta el problema de que no solamente queremos estudiar una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sino que se plantan una o varias restricciones adicionales a las cuales las variables están sujetas. Las restricciones están dadas en la forma de un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= g_1(\mathbf{x}) = 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= g_m(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

o brevemente

$$g(\mathbf{x}) = 0, \quad g = (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Se dice que la función  $f$  posee en  $\mathbf{x}^0$  un máximo local sujeto a las restricciones definidas por la función  $g$  si existe una vecindad  $U(\mathbf{x}^0)$  de  $\mathbf{x}^0$  tal que se tiene que  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$  para todo  $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)$  tal que  $g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0$ . Una definición análoga es válida para un mínimo sujeto a una restricción.

Para la determinación de los extremos de una función diferenciable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sin restricción nos interesan solamente aquellos puntos  $\mathbf{x}^0$  que satisfacen  $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ . Hay una caracterización similar de aquellos puntos que son candidatos a ser extremo de  $f$  sujeto a la restricción  $g(\mathbf{x}) = 0$ .

**Teorema 4.11** *Se consideran las funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g = (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $m < n$ . Sea  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D(f) \cap D(g)$ , y sobre una vecindad  $U(\mathbf{x}^0)$  de  $\mathbf{x}^0$  sea  $f \in C^1(U(\mathbf{x}^0))$  y  $g_\mu \in C^1(U(\mathbf{x}^0))$  para  $\mu = 1, \dots, m$ . Sea el rango de la matriz*

$$\left( \frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) \right)_{\substack{\mu=1, \dots, m \\ \nu=1, \dots, n}}$$

*igual  $m$ . Supongamos que la función  $f$  posee un extremo local en  $\mathbf{x}^0$  bajo la restricción  $g(\mathbf{x}) = 0$ . Entonces existen constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , llamadas **multiplicadores de Lagrange**, tales que*

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}^0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}^0)$$

**Dem:** 1. Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(\mathbf{x}^0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.5.1)$$

Esto significa que según el Teorema 4.2 podemos localmente despejar  $x_1, \dots, x_m$  del sistema de ecuaciones

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Entonces, existen un  $\delta > 0$  y  $m$  funciones

$$x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

que pertenecen a  $C^1$  para  $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta$  ( $\nu = m+1, \dots, n$ ) y que son solución del sistema (3.13), es decir

$$g_1(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$g_m(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$$

$$(4.5.2)$$

Insertando estas funciones en  $f$ , obtenemos una función de las variables  $x_{m+1}, \dots, x_n$ :

$$F(x_{m+1}, \dots, x_n) := f(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Según la hipótesis, esta función posee un extremo local en  $\xi^0 = (x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ , por lo tanto se tiene que

$$\nabla F(\xi^0) = \mathbf{0}$$

Utilizando la regla de la cadena obtenemos que la siguiente ecuación es válida en  $\xi^0$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(\xi^0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}(\xi^0) + \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) = 0, \quad \nu = m+1, \dots, n. \quad (4.5.3)$$

2. a) Debido a (4.5.1), el sistema

$$\sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0), \quad i = 1, \dots, m \quad (4.5.4)$$

posee una solución única  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .

b) De (4.5.2) obtenemos derivando la  $\mu$ -ésima ecuación con respecto a  $x_\nu$ :

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}(\xi^0) + \frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) = 0, \quad (4.5.5)$$

$$\nu = m+1, \dots, n, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

De (4.5.3) y (4.5.4) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) &= -\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}(\xi^0) \\ &= -\sum_{i=1}^m \left( \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}(\xi^0) \\ &= -\sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}(\xi^0) \right).\end{aligned}$$

En virtud de (4.5.5), esto implica que

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) = \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0), \quad \nu = m+1, \dots, n.$$

Resumiendo (a) y (b) obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0) = \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^0), \quad \nu = 1, \dots, n,$$

lo que significa que

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu \nabla g_\mu(\mathbf{x}^0)$$

Comentamos que este teorema entrega solamente un criterio necesario. Es decir, con su ayuda podemos solamente determinar aquellos puntos  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  donde podría existir un extremo local de  $f$  sujeto a la restricción

$$\begin{aligned}g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= 0.\end{aligned}\tag{4.5.6}$$

Para tal efecto se forman las  $n + m$  ecuaciones

$$\begin{aligned}g_\mu(x_1^0, \dots, x_n^0) &= 0, \quad \mu = 1, \dots, m \\ \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_1^0, \dots, x_n^0) &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_\nu}(x_1^0, \dots, x_n^0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_\nu}(x_1^0, \dots, x_n^0), \quad \nu = 1, \dots, n\end{aligned}$$

la cuales permiten determinar  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  y  $x_1^0, \dots, x_n^0$ .

Sin embargo, para el tratamiento de extremos con restricciones no existen criterios simples suficientes (tales como para problemas de extremos sin restricciones) para poder decidir si en un punto  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  efectivamente se tiene un extremo local de  $f$  sujeto a la restricción (4.5.6). Hay que decidir esto considerando la forma particular de  $f$  o utilizando consideraciones geométricas.

**Ejercicio 4.10** Halle los valores extremos de  $f(x, y) = 2x + 5y$  sobre la elipse de ecuación:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.$$

**Ejemplo 4.12** Queremos estudiar los extremos de la función

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

bajo las restricciones

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0.$$

Según el Teorema 4.11, los puntos críticos (candidatos a extremo) son aquellos puntos  $(x_0, y_0, z_0)$  que satisfacen

$$g_1(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$g_2(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0, y_0, z_0)$$

Aquí obtenemos las cinco ecuaciones

$$x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0, \quad (4.5.7)$$

$$x_0 + z_0 - 1 = 0, \quad (4.5.8)$$

$$1 = \lambda_1 \cdot 2x_0 + \lambda_2 \cdot 1, \quad (4.5.9)$$

$$1 = \lambda_1 \cdot 2y_0 + \lambda_2 \cdot 0, \quad (4.5.10)$$

$$1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1. \quad (4.5.11)$$

De estas ecuaciones debemos determinar  $x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2$ . De (4.5.11) obtenemos  $\lambda_2 = 1$ , por lo tanto (4.5.9) entrega que  $2\lambda_1 x_0 = 0$  y (4.5.10) implica que  $2\lambda_1 y_0 = 1$ , es decir  $\lambda_1 \neq 0$  y por lo tanto  $x_0 = 0$ , luego  $y_0 = \sqrt{2}$  o  $y_0 = -\sqrt{2}$  y  $z_0 = 1$ . Los puntos críticos son  $(0, \sqrt{2}, 1)$  y  $(0, -\sqrt{2}, 1)$ . En este caso, el punto  $(0, \sqrt{2}, 1)$  corresponde a un máximo y el punto  $(0, -\sqrt{2}, 1)$  a un mínimo.



# CAPÍTULO 5

## La integral de Riemann en $\mathbb{R}^N$

La integral de Riemann en  $\mathbb{R}^N$  es una extensión de la integral de Riemann en  $\mathbb{R}$ . Por esta razón, es necesario generalizar algunos conceptos, definiciones y teoremas para obtener otros similares a los ya conocidos en el contexto de la integral de Riemann para funciones de una variable real.

### 5.1 Definición y existencia de la integral múltiple de Riemann

**Definición 5.1 (Rectángulo en  $\mathbb{R}^N$ )** Sean  $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, N$ , tales que  $a_i \leq b_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ . Llamamos rectángulo en  $\mathbb{R}^N$  a cualquier conjunto  $R$  de la forma

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N].$$

Un rectángulo  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$ , suele denotarse por

$$R = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : a_i \leq x_i \leq b_i : i = 1, 2, \dots, N\}$$

donde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$  y  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ . Es usual referirse a los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  como los extremos del rectángulo.

**Definición 5.2 (Medida de un rectángulo en  $\mathbb{R}^N$ )** Sean  $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, N$ , tales que  $a_i \leq b_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ . Llamamos medida o volumen del rectángulo  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$  al valor

$$m(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_N - a_N).$$

**Definición 5.3 (Partición de un rectángulo en  $\mathbb{R}^N$ )** Sean  $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, N$ , tales que  $a_i \leq b_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ . Una partición rectangular  $\vec{\mathcal{P}}$  del rectángulo  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$  es un conjunto de la forma  $\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{1,n_1} \times \mathcal{P}_{2,n_2} \times \dots \times \mathcal{P}_{N,n_N}$ , donde

$$\mathcal{P}_{i,n_i} = \{a_i = x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{i(n_i-1)}, x_{in_i} = b_i\}$$

es una partición de  $[a_i, b_i]$ , para algún  $n_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, N$ .

Notemos que toda partición rectangular  $\vec{\mathcal{P}}$  de un rectángulo  $R$  determina

$$n_0 = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_N$$

rectángulos  $R_j, j = 1, 2, \dots, n_0$ , tales que

$$R = \bigcup_{j=1}^{n_0} R_j \quad e \quad \text{int}(R_j) \cap \text{int}(R_k) = \emptyset \quad \forall j \neq k,$$

donde  $\text{int}(R_j)$  corresponde al producto cartesiano de los intervalos abiertos cuyos extremos son los mismos que aquellos de los intervalos cerrados que definen al producto cartesiano  $R_j$ , para cada  $j = 1, 2, \dots, n_0$ .

**Definición 5.4** (Norma de una partición rectangular de un rectángulo en  $\mathbb{R}^N$ ) Sean  $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, N$ , tales que  $a_i \leq b_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ . La norma de la partición rectangular  $\vec{\mathcal{P}}$  del rectángulo  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$  corresponde al valor

$$\|\vec{\mathcal{P}}\| = \max \{ \|\mathcal{P}_{1,n_1}\|_\infty, \|\mathcal{P}_{2,n_2}\|_\infty, \dots, \|\mathcal{P}_{N,n_N}\|_\infty \}$$

donde  $\|\mathcal{P}_{i,n_i}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n_i} \{x_{ij} - x_{i(j-1)}\}, i = 1, 2, \dots, N$ .

**Definición 5.5** (Sumas de Riemann) Sea  $R$  un rectángulo en  $\mathbb{R}^N$ , sea  $\vec{\mathcal{P}}$  una partición rectangular de  $R$ , y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Si  $\{R_i\}_{i=1}^{n_0}$  es la descomposición de  $R$  determinada por  $\vec{\mathcal{P}}$ . Llamamos:

i) Suma de Riemann para la función  $f$  respecto de la partición rectangular  $\vec{\mathcal{P}}$  del rectángulo  $R$ , a una suma de la forma

$$\sigma(f, \vec{\mathcal{P}}, T_{\vec{\mathcal{P}}}) = \sum_{i=1}^{n_0} f(\mathbf{c}_i) m(R_i)$$

donde  $T_{\vec{\mathcal{P}}} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{n_0}\}$ , con  $\mathbf{c}_i \in R_i, i = 1, 2, \dots, n_0$ .

ii) Suma superior de Riemann para la función  $f$  respecto de la partición rectangular  $\vec{\mathcal{P}}$  del rectángulo  $R$ , al valor

$$S(f, \vec{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n_0} f(\mathbf{x}_i^{**}) m(R_i)$$

donde  $f(\mathbf{x}_i^{**}) = \max_{\mathbf{x} \in R_i} \{f(\mathbf{x})\}$ .

iii) Suma inferior de Riemann para la función  $f$  respecto de la partición rectangular  $\vec{\mathcal{P}}$  del rectángulo  $R$ , al valor

$$s(f, \vec{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n_0} f(\mathbf{x}_i^*) m(R_i)$$

donde  $f(\mathbf{x}_i^*) = \min_{\mathbf{x} \in R_i} \{f(\mathbf{x})\}$

**Definición 5.6** (Integral superior e inferior de Riemann) Sea  $R$  un rectángulo en  $\mathbb{R}^N$  y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Llamamos:

i) Integral superior de Riemann de la función  $f$  al valor real

$$\overline{\int_R} f = \inf_{\vec{P} \in \mathbf{P}(R)} \{S(f, \vec{P})\},$$

ii) Integral inferior de Riemann de la función  $f$  al valor real

$$\underline{\int_R} f = \sup_{\vec{P} \in \mathbf{P}(R)} \{s(f, \vec{P})\}$$

donde  $\mathbf{P}(R) = \{\vec{P} : \vec{P} \text{ es una partición rectangular de } R\}$ .

**Definición 5.7 (Integral de Riemann)** Sea  $R$  un rectángulo en  $\mathbb{R}^N$  y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Decimos que  $f$  es Riemann-integrable en  $R$  si

$$\overline{\int_R} f = \underline{\int_R} f.$$

Este último valor se denomina integral de Riemann de  $f$  en el rectángulo  $R$  y se denota simplemente por

$$\int_R f.$$

**Teorema 5.1** Sea  $R$  un rectángulo en  $\mathbb{R}^N$  y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Las siguientes propiedades son equivalentes:

i)  $f$  es Riemann-integrable sobre  $R$

ii)  $f$  satisface la condición de Riemann en  $R$ ; es decir

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \vec{P} \in \mathbf{P}(R)) \text{ tal que } (S(f, \vec{P}) - s(f, \vec{P}) < \varepsilon)$$

**Teorema 5.2** (Integrabilidad de funciones continuas sobre rectángulos) Sea  $R$  un rectángulo en  $\mathbb{R}^N$  y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre su dominio. Entonces  $f$  es integrable sobre  $R$ .

**Ejemplo 5.1** (La integral de Riemann en  $\mathbb{R}^2$ ) Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  el rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Consideremos también la partición  $\mathcal{P}_{1,m}$  de  $[a, b]$  y la partición  $\mathcal{P}_{2,n}$  de  $[c, d]$  dadas respectivamente por

$$\mathcal{P}_{1,m} = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$$

y

$$\mathcal{P}_{2,n} = \{c = y_0, y_1, y_2, \dots, y_n = d\}$$

Pongamos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

y

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Entonces, se determinan  $mn$  rectángulos contenidos en  $R$ , los que denotamos por  $R_{ij}$ , donde

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

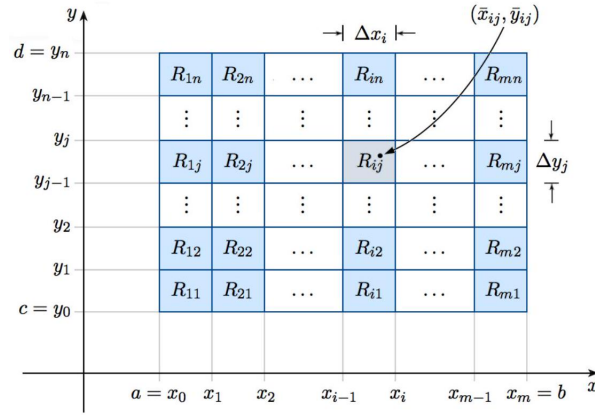


Figura 5.1: Partición rectangular  $\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{1,m} \times \mathcal{P}_{2,n}$  del rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , donde  $\mathcal{P}_{1,n} = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$  y  $\mathcal{P}_{2,m} = \{c = y_0, y_1, y_2, \dots, y_n = d\}$ .

Por lo tanto, obtenemos la partición rectangular  $\vec{\mathcal{P}}$  de  $R$ , dada por

$$\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{1,m} \times \mathcal{P}_{2,n}$$

la cual determina una división de la región  $R$  en rectángulos más pequeños, de manera que

$$R = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m R_{ij} \quad \text{con } \text{int}(R_{ij}) \cap \text{int}(R_{lk}) = \emptyset \text{ si } ij \neq lk.$$

Ahora, sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y positiva, y sea  $S$  el sólido limitado superiormente por la superficie correspondiente a la gráfica de  $f$  e inferiormente por el rectángulo  $R$  en el plano  $xy$ . Entonces la partición  $\vec{\mathcal{P}}$  antes mencionada divide al sólido  $S$  en  $mn$  sólidos, los cuales denotamos por

$$S_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

En particular, el sólido  $S_{ij}$  tiene por “base” al rectángulo  $R_{ij}$  en el plano  $xy$ , y por “techo” a la superficie correspondiente a la gráfica de  $f$  asociada al rectángulo  $R_{ij}$ , siendo sus caras laterales regiones planas perpendiculares al plano  $xy$ .

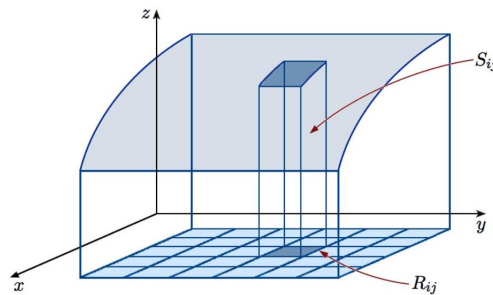


Figura 5.2: El sólido  $S$  se divide en  $mn$  sólidos, denominados  $S_{ij}$ , asociados a los rectángulos  $R_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

A continuación, para cada  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ , consideramos un punto  $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \in R_{ij}$  (y por lo tanto  $\bar{x}_{ij} \in [x_{i-1}, x_i], \forall j$ , y  $\bar{y}_{ij} \in [y_{j-1}, y_j], \forall i$ ), y ponemos

$$T_{\vec{P}} = \{(\bar{x}_{11}, \bar{y}_{11}), (\bar{x}_{12}, \bar{y}_{12}), \dots, (\bar{x}_{mn}, \bar{y}_{mn})\}$$

Por otro lado, recordemos que  $\vec{P}$  tiene norma dada por el valor

$$\|\vec{P}\| = \max \{ \|\mathcal{P}_{1,m}\|_{\infty}, \|\mathcal{P}_{2,n}\|_{\infty} \}$$

donde  $\|\mathcal{P}_{1,m}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \{\Delta x_i\}$  y  $\|\mathcal{P}_{2,n}\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} \{\Delta y_j\}$ . Luego, es claro que si  $\|\vec{P}\|$  es muy pequeña, entonces el paralelepípedo rectangular recto de base  $R_{ij}$  y altura  $f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})$  posee un volumen  $\Lambda_{ij}$  que se aproxima al volumen  $V_{ij}$  del sólido  $S_{ij}$ . Es decir,  $\Lambda_{ij} \sim V_{ij}$ , o bien

$$V_{ij} \sim f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

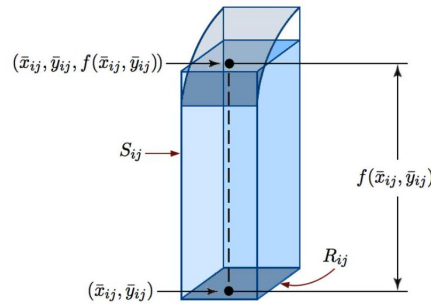


Figura 5.3: El sólido  $S$  se divide en  $mn$  sólidos, denominados  $S_{ij}$ , asociados a los rectángulos  $R_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ .

De esta forma, el volumen total  $V$  del sólido  $S$  es aproximado por la suma de todos los volúmenes  $V_{ij}$  de los sólidos  $S_{ij}$ , a saber

$$V \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \sigma(f, \vec{P}, T_{\vec{P}})$$

donde  $\sigma(f, \vec{P}, T_{\vec{P}})$  es precisamente la suma de Riemann para la función  $f$  respecto de la partición rectangular  $\vec{P}$  del rectángulo  $R$ , para la elección de puntos  $T_{\vec{P}}$ . Aquí, la medida de los rectángulos  $R_{ij}$  está dada por  $m(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$ . Es claro que mientras menor es la norma de la partición  $\vec{P}$ , mejor será la aproximación del volumen  $V$  del sólido  $S$  mediante sumas de Riemann.

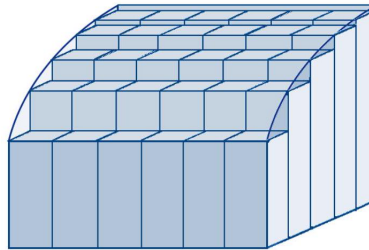


Figura 5.4: Mientras menor es la norma de la partición  $\vec{P}$ , mejor será la aproximación del volumen  $V$  mediante sumas de Riemann. En este caso, observamos una suma inferior de Riemann.

Para  $\mathbb{R}^2$ , damos una definición del valor de una integral definida (integral de Riemann).

**Definición 5.8** (Valor de la integral de una función sobre un rectángulo) Sea  $R = [a, b] \times [c, d]$  y para  $n, m \in \mathbb{N}$  dados, consideremos  $\mathcal{P}_{1,m} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_m = b\}$  una partición de  $[a, b]$  y  $\mathcal{P}_{2,n} = \{c = y_0, y_1, \dots, y_n = d\}$  una partición de  $[c, d]$ , tales que  $\|\mathcal{P}_{1,m}\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  y  $\|\mathcal{P}_{2,n}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Luego, la partición  $\vec{\mathcal{P}}$  de  $R$ , definida por

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(m, n) = \mathcal{P}_{1,m} \times \mathcal{P}_{2,n}$$

verifica que  $\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$ , pues  $\|\vec{\mathcal{P}}\| = \max \{\|\mathcal{P}_{1,m}\|_\infty, \|\mathcal{P}_{2,n}\|_\infty\}$ . Escojamos ahora arbitrariamente puntos  $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \in R_{ij}$  donde  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ , para  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ , y consideremos una función  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  que sea acotada e integrable sobre  $R$ . Entonces, la integral de  $f$  sobre  $R$  es el número real

$$\int_R f = \iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

En integrales dobles es usual usar la notación  $dA$  en vez de la notación  $dy \, dx$  (o  $dx \, dy$ ), en alusión a que estamos integrando sobre una región que posee área.

En general, no parece práctico tratar de obtener el valor de la integral de una función usando la definición. Esto ya sucedía para la integración de funciones de una sola variable, donde fuimos capaces de evaluar integrales de forma sencilla solo cuando probamos el Teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrows (segundo Teorema fundamental del cálculo), los cuales relacionaban el valor de una integral definida (la integral de Riemann), con la antiderivada de la función que estábamos integrando.

## 5.2 Evaluación de integrales múltiples de Riemann

A continuación, vamos a enunciar un resultado que establece una forma simple y directa de evaluar integrales de ciertas funciones integrables sobre rectángulos. Este método consiste en expresar la integral como una integral iterada (vea la Definición 1.1.1). El método se puede extender a dimensiones mayores que 2 como veremos más adelante.

**Teorema 5.3** (Teorema de Fubini, Primera forma) Sea  $R = [a, b] \times [c, d]$  y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que para cada  $x \in [a, b]$ , existe  $\int_c^d f(x, y) dy$ . Entonces la función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(x, y) \mapsto F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

es integrable sobre  $[a, b]$ . Más aún, se verifica que

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy \, dx.$$

**Corolario 5.1** Sea  $R = [a, b] \times [c, d]$  y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que para cada  $x \in [a, b]$  existe  $\int_c^d f(x, y) dy$ , y para cada  $y \in [c, d]$  existe  $\int_a^b f(x, y) dx$ . Entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

**Corolario 5.2** Sea  $R = [a, b] \times [c, d]$  y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Si  $f$  es continua sobre  $R$ , excepto tal vez en un conjunto de medida cero, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

**Ejemplo 5.2** Sea  $R = [0, 1] \times [0, 1]$  y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Calcula

$$\iint_R f(x, y) dA$$

**Solución:** Notemos que  $f$  es acotada en  $\mathbb{R}$ , pues

$$-1 \leq f(x, y) \leq 1^2 + 1^2 = 2 \quad \forall (x, y) \in R$$

y que  $f$  es continua sobre  $R$ , excepto en el conjunto de medida cero

$$E = \left\{ (x, y) \in R : x = \frac{1}{2} \right\}$$

Luego,  $f$  es integrable sobre  $R$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left( \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} x \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**Observación:**

1. Notemos que si  $R = [a, b] \times [c, d]$ , entonces: El área de la región rectangular  $R$  viene dada por

$$A(R) = \int_a^b \int_c^d 1 dy dx = (d - c)(b - a) = m(R).$$

2. Sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre  $R$ . El volumen del sólido  $S$  limitado por la superficie  $z = f(x, y)$ , con  $(x, y) \in R$ , y el plano  $xy$ , el cual corresponde al volumen limitado superiormente por la superficie  $z = |f(x, y)| \geq 0$ , con  $(x, y) \in R$ , sobre el plano  $xy$ , y limitado lateralmente por una superficie perpendicular al plano  $xy$ , viene dado por

$$V(S) = \int_a^b \int_c^d |f(x, y)| dy dx.$$

En particular, si  $z = h$ , con  $h > 0$ , entonces el sólido  $S'$  con base  $R$  y altura  $h$  tiene volumen

$$V(S') = \int_a^b \int_c^d h dy dx = h A(R)$$

**Ejemplo 5.3** Calcula el volumen del sólido limitado por la superficie  $z = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$ , los planos  $x = 3, y = 2$  y los planos coordenados.

**Solución:** En primer lugar, notemos que la región  $R$  sobre la cual vamos a integrar corresponde al rectángulo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2\} = [0, 3] \times [0, 2]$$

Consideremos ahora la función  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$$

Entonces,  $f$  resulta ser positiva y acotada sobre  $R$ , pues

$$0 < 4 - \frac{1}{9}(3^2) - \frac{1}{16}(2^2) \leq f(x, y) \leq 4 \quad \forall (x, y) \in R$$

y continua sobre  $R$ . Luego,  $z = |f(x, y)| = f(x, y) \geq 0$  en  $R$ , así que el volumen del sólido limitado por la superficie  $z = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$ , los planos  $x = 3, y = 2$  y los planos coordenados está dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2\right) dy dx = \int_0^3 \left(4y - \frac{1}{9}x^2y - \frac{1}{48}y^3\right) \Big|_0^2 dx \\ &= \int_0^3 \left(8 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{6}\right) dx \\ &= 8x - \frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{6}x \Big|_{x=0}^{x=3} \\ &= 24 - 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{43}{2} \end{aligned}$$

## Evaluación de integrales dobles sobre dominios más generales

**Proposición 5.2.1** Sean  $u, v \in C([a, b])$  tales que

$$c \leq u(x) \leq v(x) \leq d \quad \forall x \in [a, b]$$



sea  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge u(x) \leq y \leq v(x)\}$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada, que además es continua sobre  $D$  salvo tal vez en un conjunto de medida cero. Entonces  $f$  es integrable sobre  $D$  y se verifica que

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy dx.$$

**Ejemplo 5.4** Sea  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge x \leq y \leq 2x\}$  y sea  $f$  una función integrable sobre la región  $D$ . Cambia el orden de integración para la siguiente integral

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx$$

**Solución:**

1. Trazamos la gráfica de la región  $D$  en el plano  $xy$ , señalando claramente las curvas que la limitan.

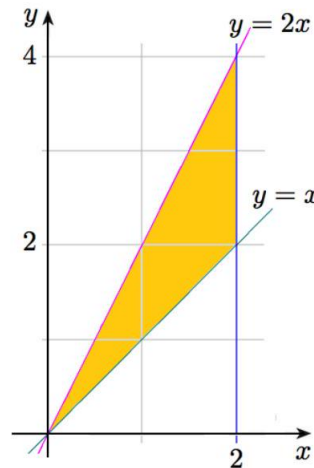


Figura 5.5: Gráfica de la región  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge x \leq y \leq 2x\}$ .

2. Ahora intercambiamos los ejes y volvemos a trazar la gráfica de la región  $D$ , dividiéndola, de ser necesario, en apropiadas subregiones. El eje horizontal será el eje  $y$ , y  $x$  será la variable dependiente. Señalamos claramente las curvas que limitan las subregiones.

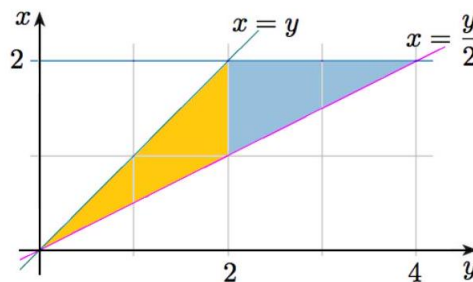


Figura 5.6: Gráfica de la región  $D$ , donde se han intercambiado los ejes  $x$  e  $y$ .

3. Desde la figura previa, podemos poner

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2 \wedge \frac{y}{2} \leq x \leq y \right\}$$

y

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq y \leq 4 \wedge \frac{y}{2} \leq x \leq 2 \right\}$$

entonces  $D = D_1 \cup D_2$ , donde  $D_1$  y  $D_2$  son regiones acotadas tales que  $m(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = 0$ .

4. Finalmente, obtenemos

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx dy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx dy.$$

### Ejercicio 5.1

1. Calcula, si es posible, el valor de

$$\int_{-1}^1 \int_0^{y^2} (x^2 + y) dx dy.$$

2. Sea  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4 \wedge \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq 2\sqrt{x} \right\}$  y sea  $f$  una función integrable sobre la región  $D$ . Cambia el orden de integración y reescribe la integral

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy dx.$$

3. Calcula, si es posible, el valor de

$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} (x-1) \sqrt{1+e^{2y}} dy dx.$$

**Observación:** Sean  $u, v \in C([a, b])$  tales que

$$c \leq u(x) \leq v(x) \leq d \quad \forall x \in [a, b].$$

Sea  $R = [a, b] \times [c, d]$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge u(x) \leq y \leq v(x)\}$ . Entonces:

1. El área de la región  $D$  viene dada por

$$A(D) = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} 1 dy dx.$$

2. El volumen del sólido  $S$  limitado por la superficie  $z = f(x, y)$ , con  $(x, y) \in D$ , y el plano  $xy$ , el cual corresponde al volumen limitado superiormente por la superficie  $z = |f(x, y)| \geq 0$ , con  $(x, y) \in D$ , sobre el plano  $xy$ , y limitado lateralmente por una superficie perpendicular al plano  $xy$ , viene dado por

$$V(S) = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} |f(x, y)| dy dx.$$

En particular, si  $z = h$ , con  $h > 0$ , entonces el sólido  $S'$  con base  $D$  y altura  $h$  tiene volumen

$$V(S') = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} h \, dy \, dx = h A(D)$$

### Ejercicio 5.2

- Mediante el uso de una integral doble, calcula el volumen de un cilindro circular recto de radio  $r$  y altura  $h$ .
- Sea  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } (x, y) \in D_1 = \{(x, y) \in D : x > 2y\} \\ -1 - y & \text{si } (x, y) \in D_2 = \{(x, y) \in D : x \leq 2y\}. \end{cases}$$

Halla el volumen del sólido limitado por la superficie  $z = f(x, y)$ , con  $(x, y) \in D$ , y el plano  $xy$ .

**Teorema 5.4** (Teorema de Fubini, segunda forma) Sea  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$ , sea  $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$  fijo, y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable sobre  $R$  tal que para cada  $z \in [a_{i_0}, b_{i_0}]$  existe

$$\int_{\tilde{R}_{i_0}} f(x_1, x_2, \dots, x_{i_0-1}, z, x_{i_0+1}, \dots, x_N) \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_{i_0-1} \, dx_{i_0+1} \dots dx_N,$$

donde  $\tilde{R}_{i_0} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_{i_0-1}, b_{i_0-1}] \times [a_{i_0+1}, b_{i_0+1}] \times \dots \times [a_N, b_N]$ . Entonces la función  $F : \tilde{R}_{i_0} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(z) = \int_{\tilde{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_{i_0-1}, z, x_{i_0+1}, \dots, x_N) \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_{i_0-1} \, dx_{i_0+1} \dots dx_N$$

es integrable sobre  $[a_{i_0}, b_{i_0}]$ . Más aún, se verifica que

$$\int_{a_{i_0}}^{b_{i_0}} F(z) \, dz = \int_{a_{i_0}}^{b_{i_0}} \int_{\tilde{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_{i_0-1}, z, x_{i_0+1}, \dots, x_N) \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_{i_0-1} \, dx_{i_0+1} \dots dx_N \, dz.$$

El Teorema 5.4 de Fubini, segunda forma, no solo nos da un criterio para evaluar integrales múltiples, sino que también nos habilita para realizar cambios arbitrarios en el de orden de integración tal como lo establece el siguiente corolario.

**Corolario 5.3** Sea  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$  y sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable sobre  $R$  tal que para cada  $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$  y para cada  $z \in [a_{i_0}, b_{i_0}]$  existe

$$\int_{\tilde{R}_{i_0}} f(x_1, x_2, \dots, x_{i_0-1}, z, x_{i_0+1}, \dots, x_N) \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_{i_0-1} \, dx_{i_0+1} \dots dx_N,$$

donde  $\tilde{R}_{i_0} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_{i_0-1}, b_{i_0-1}] \times [a_{i_0+1}, b_{i_0+1}] \times \dots \times [a_N, b_N]$ . Entonces

$$\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_N) \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_N = \int_R f(x_1, x_2, \dots, x_N) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \dots d\alpha_N,$$

donde la  $N$ -upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  es una permutación arbitraria en el orden de aparición de las componentes de la  $N$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ .

**Ejemplo 5.5** *Calcula la integral múltiple*

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) (ze^w) dx dy dz dw.$$

**Solución:** Claramente, la función  $f$  definida por  $f(x, y, z, w) = (x^2 + y^2) (ze^w)$  es una función continua en  $\mathbb{R}^4$ , y por lo tanto también lo es sobre el rectángulo  $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ , que es cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^4$ . Luego,  $f$  es integrable en  $R$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) (ze^w) dx dy dz dw &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \left( \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) (ze^w) dx \right) dy dz dw \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \left( \frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right) (ze^w) \Big|_{x=-1}^{x=1} dy dz dw \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \int_0^2 \left( \frac{2}{3} + 2y^2 \right) (ze^w) dy \right) dz dw \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{2}{3} y + \frac{2}{3} y^3 \right) (ze^w) \Big|_{y=0}^{y=2} dz dw \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \frac{4}{3} + \frac{16}{3} \right) (ze^w) dz \right) dw \\ &= \frac{10}{3} \int_0^1 (z^2 e^w) \Big|_{z=0}^{z=1} dw \\ &= \frac{10}{3} \int_0^1 e^w dw \\ &= \frac{10}{3} (e - 1). \end{aligned}$$

El Teorema a continuación nos permitirá reducir nuestro trabajo para calcular el valor de una integral cuando la función a integrar puede reescribirse en variables separables en ciertas subregiones rectangulares de la región rectangular original.

**Teorema 5.5** (Integración sobre un producto de rectángulos) *Sea  $R_1$  un rectángulo en  $\mathbb{R}^{N_1}$ , sea  $R_2$  un rectángulo en  $\mathbb{R}^{N_2}$  y sea  $f : R_1 \times R_2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable sobre  $R_1 \times R_2$ . Si  $E \subset \mathbb{R}^{N_1}$  es un conjunto de medida cero y si para todo  $x \in R_1 \setminus E$  existe  $\int_{R_2} f(x, y) dy$ , entonces la función  $F_1 : R_1 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$x \mapsto F_1(x) = \int_{R_2} f(x, y) dy_1 dy_2 \dots dy_{N_2},$$

*es integrable sobre  $R_1$ . Más aún, se verifica que*

$$\int_{R_1} F_1 = \int_{R_1} \left( \int_{R_2} f(x, y) dy_1 dy_2 \dots dy_{N_2} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_{N_1} = \int_{R_1 \times R_2} f.$$

**Corolario 5.4** Sean  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tales que  $N_1 + N_2 = N$ , sean  $R_1$  y  $R_2$  rectángulos en  $\mathbb{R}^{N_1}$  y  $\mathbb{R}^{N_2}$  respectivamente, y sean  $g : R_1 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h : R_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones integrables sobre sus respectivos dominios. Entonces, la función  $f : R_1 \times R_2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x})h(\mathbf{y}) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_1 \times R_2$$

es integrable sobre  $R_1 \times R_2$  y además se cumple que

$$\int_{R_1 \times R_2} f = \left( \int_{R_1} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_{N_1} \right) \left( \int_{R_2} h(\mathbf{y}) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 \dots d\mathbf{y}_{N_2} \right).$$

**Ejemplo 5.6** Calcula la siguiente integral múltiple usando el Corolario 2.2.4:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) (ze^w) dx dy dz dw$$

**Solución:** Procedemos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) (ze^w) dx dy dz dw &= \left( \int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy \right) \left( \int_0^1 z dz \right) \left( \int_0^1 e^w dw \right) \\ &= \left( \int_0^2 \left( \frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_{x=-1}^{x=1} dy \right) \left( \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1} \right) \left( e^w \Big|_{w=0}^{w=1} \right) \\ &= \left( \int_0^2 \left( \frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy \right) \left( \frac{1}{2} \right) (e - 1) \\ &= \left( \left( \frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 \right) (e - 1) \\ &= \frac{10}{3}(e - 1). \end{aligned}$$

El siguiente resultado extiende al caso  $N = 3$  la Proposición 5.2.1 que fue dada para el caso  $N = 2$ .

**Proposición 5.2.2** Sean  $u, v : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas sobre  $[a_1, b_1]$  tales que

$$a_2 \leq u(x) \leq v(x) \leq b_2 \quad \forall x \in [a_1, b_1].$$

Sea  $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq b_1 \wedge u(x) \leq y \leq v(x)\}$  y sean  $\phi, \psi : D' \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas sobre  $D'$  tales que

$$a_3 \leq \phi(x, y) \leq \psi(x, y) \leq b_3 \quad \forall (x, y) \in D'.$$

Sea  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq b_1 \wedge u(x) \leq y \leq v(x) \wedge \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada, que además es continua sobre  $D$  salvo tal vez en un conjunto de medida cero. Entonces  $f$  es integrable sobre  $D$  y verifica que

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

**Observación:** En integrales triples es usual usar la notación  $dV$  en vez de la notación  $dz dy dx$  (o  $dx dy dz$  o ...), en alusión a que estamos integrando sobre una región que posee volumen.

**Ejemplo 5.7** Sea  $D$  la región acotada por los cilindros parabólicos  $z = -y^2$  y  $z = x^2$ , y los planos  $x = 1, y = 0$  e  $y = x$ . Calcula

$$\iiint_D (x+1) dx dy dz$$

**Solución.**

1. Partimos buscando los límites de integración de una variable que dependa de las otras. De acuerdo a la información disponible, nos conviene partir identificando los límites de la variable  $z$ . Como  $-y^2 \leq 0 \leq x^2$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ , si ponemos

$$\phi(x, y) = -y^2 \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = x^2, \quad (5.2.1)$$

obtenemos que la variable  $z$  queda limitada de la siguiente forma

$$\phi(x, y) = -y^2 \leq z \leq x^2 = \psi(x, y).$$

2. Ahora buscamos los límites de integración de las restantes variables, en este caso  $x$  e  $y$ , los cuales deducimos a partir de la proyección de la región  $D$  sobre el plano  $xy$  (o equivalentemente, el plano  $z = 0$ ). Notemos que las proyecciones de los planos  $x = 1, y = 0$  e  $y = x$  sobre el plano  $xy$  son, respectivamente, las rectas  $x = 1, y = 0$  e  $y = x$ . Notemos también que las rectas  $x = 1$  e  $y = x$  se intersecan en el punto  $(1, 1)$ , las rectas  $x = 1$  e  $y = 0$  se intersecan en el punto  $(1, 0)$ , y las rectas  $y = 0$  e  $y = x$  se intersecan en el punto  $(0, 0)$ . Así que ahora podemos determinar los límites asociados a  $x$  e  $y$  sobre esta región.

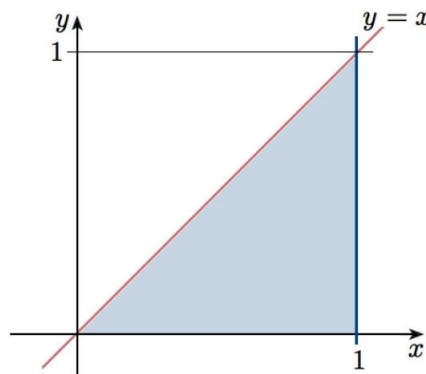


Figura 5.7: Gráfico de las rectas  $x = 1, y = 0$  e  $y = x$  en el plano  $xy$ . Se observa que  $0 \leq y \leq x$  y  $0 \leq x \leq 1$ .

Considerando

$$u(x) = 0 \quad \text{y} \quad v(x) = x,$$

obtenemos que la variable  $y$  queda limitada de la siguiente forma

$$u(x) = 0 \leq y \leq x = v(x), \quad (5.2.2)$$

mientras que la variable  $x$  queda limitada de la siguiente forma

$$0 \leq x \leq 1. \quad (5.2.3)$$

3. Desde (5.2.1), (5.2.2) y (5.2.3) podemos identificar la región  $D$  sobre la que vamos a integrar, como el conjunto de puntos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tales que

$$\begin{cases} -y^2 \leq z \leq x^2 \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

4. Finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned} \iiint_D (x+1) dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^x \int_{-y^2}^{x^2} (x+1) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x z(x+1) \Big|_{z=-y^2}^{z=x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (x^3 + x^2 + y^2 x + y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( x^3 y + x^2 y + \frac{y^3 x}{3} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left( x^4 + x^3 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} \right) dx \\ &= \frac{4}{3} \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.8** Sea  $D$  la región acotada por los paraboloides circulares  $z = 3 - x^2 - y^2$  y  $z = x^2 + y^2 - 5$ , y la región donde  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Calcula

$$\iiint_D y dx dy dz.$$

**Solución:**

1. Partimos buscando los límites de integración de una variable que dependa de las otras. De acuerdo a la información disponible, nos conviene partir identificando los límites de la variable  $z$ . Sin embargo, a diferencia del ejemplo anterior, no parece tan directo determinar los límites superior e inferior de  $z$ . Una forma de proceder en estos casos consiste en estudiar un corte transversal de la región  $D$  en  $\mathbb{R}^3$  que contenga al eje  $z$ . Por ejemplo, podemos considerar el corte asociado al plano  $y = 0$  (o equivalentemente, al plano  $xz$ ).

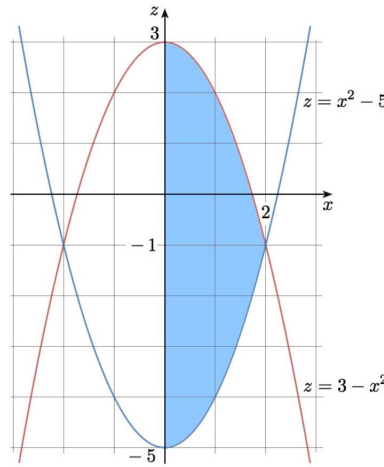


Figura 5.8: Gráfico del corte transversal de la región  $D$  cuando  $y = 0$ . Es decir, en el plano  $xz$  consideramos la región entre las gráficas de las funciones  $z = 3 - x^2$  y  $z = x^2 - 5$ . Este gráfico nos permitirá establecer adecuadamente los límites de integración de la variable  $z$ .

El gráfico previo nos muestra qué función acota a  $z$  por abajo y qué función acota a  $z$  por arriba. Considerando

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 5 \quad y \quad \psi(x, y) = 3 - x^2 - y^2,$$

obtenemos que la variable  $z$  queda limitada de la siguiente forma

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 5 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2 = \psi(x, y). \quad (5.2.4)$$

2. Ahora buscamos los límites de integración de las restantes variables, en este caso  $x$  e  $y$ , los cuales deducimos a partir de la proyección de la región  $D$  sobre el plano  $xy$  (o equivalentemente, el plano  $z = 0$ ). La proyección deseada corresponde a la sombra directa sobre el plano  $xy$  de aquel corte transversal de la región  $D$ , que sea paralelo al plano  $xy$ , y que posea mayor área. Observemos que este corte debe producirse justo donde se intersecan los paraboloides circulares

$$z = x^2 + y^2 - 5 \quad y \quad z = 3 - x^2 - y^2.$$

Como

$$x^2 + y^2 - 5 = 3 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

y

$$(x^2 + y^2) - 5 \leq 3 - (x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$$

al proyectar sobre el plano  $xy$  tal corte transversal, y considerando solo la zona donde  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ , obtenemos el cuarto del círculo

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

que está ubicado en el primer cuadrante del plano  $xy$ , pudiendo ahora determinar los límites asociados a  $x$  e  $y$  sobre esta región.



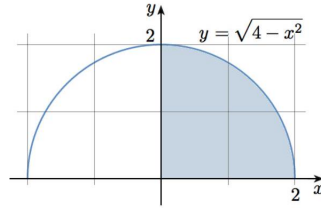


Figura 5.9: Gráfico de la proyección de la región  $D$  sobre el plano  $xy$ . Es decir, en el plano  $xy$  consideramos la región entre las gráficas de las funciones  $y = 0$  y  $y = \sqrt{4 - x^2}$ , obteniéndose los límites para  $y$ , y finalmente para  $x$ , aquí  $0 \leq x \leq 2$ .

Considerando

$$u(x) = 0 \quad y \quad v(x) = \sqrt{4 - x^2},$$

obtenemos que la variable  $y$  queda limitada de la siguiente forma

$$u(x) = 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} = v(x), \quad (5.2.5)$$

mientras que la variable  $x$  queda limitada de la siguiente forma

$$0 \leq x \leq 2 \quad (5.2.6)$$

3. Desde (5.2.4), (5.2.5) y (5.2.6) podemos identificar la región  $D$  sobre la que vamos a integrar, como el conjunto de puntos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tales que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

4. Finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned} \iiint_D y \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2-5}^{3-x^2-y^2} y \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} yz \Big|_{z=x^2+y^2-5}^{z=3-x^2-y^2} dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (8y - 2x^2y - 2y^3) dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left( 4y^2 - x^2y^2 - \frac{y^4}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_0^2 \left( 8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx \\ &= \left( 8x - 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{x=0}^{x=2} \\ &= \frac{128}{15}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 5.3** Sea  $D$  la región del primer octante acotada por el plano  $3x + y + z = 2$ . Calcula

$$\iiint_D x \, dx \, dy \, dz.$$

**Observación:** Sean  $u, v \in C([a_1, b_1])$  tales que

$$a_2 \leq u(x) \leq v(x) \leq b_2 \quad \forall x \in [a_1, b_1],$$

sea  $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq b_1 \wedge u(x) \leq y \leq v(x)\}$ , sean  $\phi, \psi \in C(\overline{D'})$  tales que

$$a_3 \leq \phi(x, y) \leq \psi(x, y) \leq b_3 \quad \forall (x, y) \in D',$$

y sea  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq b_1 \wedge u(x) \leq y \leq v(x) \wedge \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$ . Entonces, el volumen de  $D$  viene dado por

$$V(D) = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1 \, dz \, dy \, dx.$$

## 5.3 Cambio de variable en integrales múltiples

### 5.3.1 Difeomorfismos

Aquí consideramos aplicaciones de la forma  $\mathbf{T} : D^* \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  cuya imagen es una región  $D$  contenida en  $\mathbb{R}^N$ . Es decir,  $\mathbf{T}(D^*) = D$ . Sobre esta clase de aplicaciones, algunas propiedades adicionales serán consideradas posteriormente.

**Ejemplo 5.9** Sea  $D^* \subset \mathbb{R}^2$  el rectángulo definido por

$$D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

y sea  $\mathbf{T} : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación definida por

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{T} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Encuentra  $D = \mathbf{T}(D^*)$ .

**Solución.** En la búsqueda de la región  $D$ , estudiamos los bordes del rectángulo  $D^*$ , interpretando cómo se transforma cada uno de ellos mediante  $\mathbf{T}$ .

Lado I

$$\theta = 0 \wedge 0 \leq r \leq 1 (r \text{ creciendo}) \Rightarrow \mathbf{T} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el Lado I se transforma en el segmento de recta ubicado en el eje  $x$  (en la recta  $y = 0$ ) con  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x$  creciendo.

Lado II

$$0 \leq \theta \leq 2\pi (\theta \text{ creciendo}) \wedge r = 1 \Rightarrow \mathbf{T} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el Lado II se transforma en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  (recorrida en sentido antihorario).

Lado III

$$\theta = 2\pi \wedge 0 \leq r \leq 1 (r \text{ decreciendo}) \Rightarrow \mathbf{T} \begin{pmatrix} r \\ 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el Lado III se transforma en el segmento de recta ubicado en el eje  $x$  (en la recta  $y = 0$ ) con  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x$  decreciendo.

Lado IV

$$0 \leq \theta \leq 2\pi (\theta \text{ decreciendo}) \wedge r = 0 \Rightarrow \mathbf{T} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el Lado IV se transforma en el origen, es decir en el punto  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

En conclusión, se observa que

$$D = \mathbf{T}(D^*) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

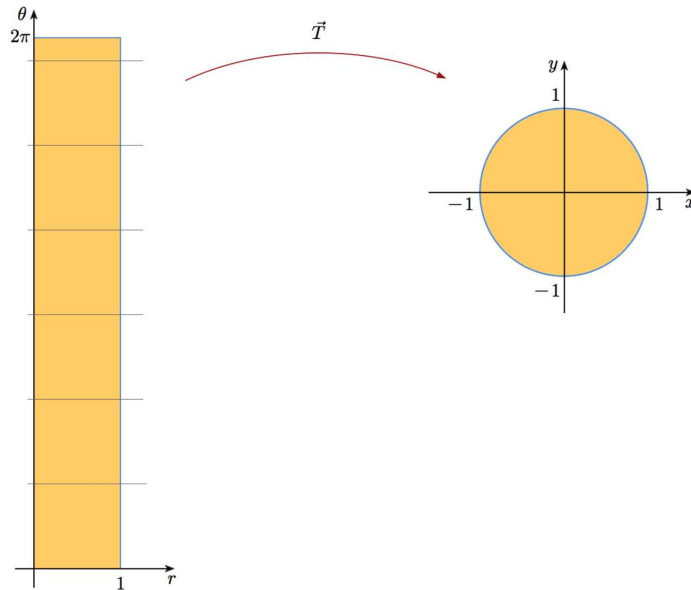


Figura 5.10: La aplicación  $\mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$  transforma el rectángulo  $D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  en el círculo  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Observemos que la transformación  $\mathbf{T}$  del ejemplo previo no conserva el área. Es decir,  $A(D) \neq A(D^*)$ .

**Definición 5.9** Una función  $\mathbf{T} : D^* \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es inyectiva en  $G$  si

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D^*) (\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{T}(\mathbf{v}))$$

o, equivalentemente

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D^*) (\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{T}(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v})$$

donde  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ .

**Ejercicio 5.4** Muestre que la aplicación  $\mathbf{T} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{T} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

no es inyectiva, pero sí lo es su restricción a  $]0, 1] \times ]0, 2\pi]$ .

**Definición 5.10** Sea  $U$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\mathbf{T} : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  una aplicación de clase  $C^1$  definida por  $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$

i) Llamamos matriz jacobiana de la aplicación  $\mathbf{T}$ , a la matriz  $D\mathbf{T}(\mathbf{u})$  dada por

$$D\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_N} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_N}{\partial u_1} & \frac{\partial x_N}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_N}{\partial u_N} \end{bmatrix}.$$

ii) Llamamos jacobiano de la aplicación  $\mathbf{T}$  en  $\mathbf{u}$ , al valor  $J_{\mathbf{T}}(\mathbf{u})$ , que corresponde al determinante de la matriz  $D\mathbf{T}(\mathbf{u})$ , esto es:

$$J_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) = \det(D\mathbf{T}(\mathbf{u})).$$

Las notaciones más usadas para referirse al jacobiano de una aplicación  $\mathbf{T}$  tal que  $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ , cuando éste existe, son

$$J_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) = \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_N)} = J \left( \frac{x_1, x_2, \dots, x_N}{u_1, u_2, \dots, u_N} \right).$$

Por otro lado, cuando no resulta confuso, es usual escribir solo  $J_{\mathbf{T}}$ .

**Definición 5.11** Sean  $U$  y  $V$  dos conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^N$ . Una aplicación  $\mathbf{T} : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$  si  $\mathbf{T}$  es biyectiva y tanto  $\mathbf{T}$  como  $\mathbf{T}^{-1}$  son aplicaciones de clase  $C^1$ .

**Teorema 5.6** Sea  $U$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\mathbf{T} : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  una aplicación de clase  $C^1$ . Entonces,  $\mathbf{T} : U \rightarrow \mathbf{T}(U)$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$  si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

i)  $\mathbf{T}$  es inyectiva.

ii)  $J_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in U$ .

**Ejemplo 5.10** Sea  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación definida por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{T} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v \\ u + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pruebe que  $\mathbf{T}$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Solución:** Notemos que  $p(u, v) = u - v$  y  $q(u, v) = u + v$  son polinomios de primer grado en  $\mathbb{R}^2$ , luego  $\mathbf{T} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= \mathbf{T} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_1 + v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 - v_2 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} u_1 - v_1 = u_2 - v_2 \\ u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 2u_1 = 2u_2 \wedge 2v_1 = 2v_2 \\ &\Rightarrow u_1 = u_2 \wedge v_1 = v_2 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathbf{T}$  es inyectiva.

Notemos también que dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , el sistema

$$\begin{cases} u - v = x \\ u + v = y \end{cases}$$

siempre tiene solución  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , pues el determinante asociado al sistema es distinto de 0, lo cual indica que  $\mathbf{T}$  es sobreyectiva. Por lo tanto,  $\mathbf{T}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ .

Finalmente, obtenemos

$$J_{\mathbf{T}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

En consecuencia, desde el Teorema (5.6) concluimos que  $\mathbf{T}$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 5.5** Sea  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación definida por

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u \cos v \\ e^u \sin v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pruebe que  $\mathbf{T}$  no es un difeomorfismo de clase  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Lema 5.1** Sean  $U$  y  $V$  dos conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\mathbf{T} : U \rightarrow V$  un difeomorfismo.

- i)  $U' \subset U$  es abierto si y solo si el conjunto  $\mathbf{T}(U') \subset V$  es abierto.
- ii)  $K \subset U$  es compacto si y solo si el conjunto  $\mathbf{T}(K) \subset V$  es compacto.
- iii) Sea  $K$  un conjunto compacto contenido en  $U$ . Entonces,  $K$  es medible si y solo si el conjunto  $\mathbf{T}(K)$  es medible.
- iv)  $E \subset U$  tiene medida cero si y solo si el conjunto  $\mathbf{T}(E) \subset V$  tiene medida cero.

Sean  $U$  y  $V$  dos conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\mathbf{T} : U \rightarrow V$  un difeomorfismo. El Lema 5.1 anterior indica que si  $K \subset U$  es un conjunto compacto medible en  $\mathbb{R}^N$ , entonces se verifica que

$$\text{Fr}(\mathbf{T}(K)) = \mathbf{T}(\text{Fr}(K)).$$

Este hecho es de mucha utilidad. Por ejemplo, si una región abierta y acotada en  $\mathbb{R}^2$ , está limitada por ciertas curvas suaves  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , entonces las imágenes  $\mathbf{T}(\gamma_1), \mathbf{T}(\gamma_2), \dots, \mathbf{T}(\gamma_n)$  conformarán la frontera de la región  $\mathbf{T}(K)$ . Aquí y en el resto de este apunte,  $\text{Fr}(A)$  denota la frontera topológica de un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^N$ .

**Definición 5.12 (Conjuntos de medida cero)** Sea  $E \subset \mathbb{R}^N$ . Decimos que  $E$  tiene medida cero o medida nula en  $\mathbb{R}^N$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe una sucesión de rectángulos  $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$  tales que

$$i) \quad E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i.$$

$$ii) \quad \sum_{i=1}^{\infty} m(R_i) < \varepsilon.$$

**Definición 5.13 (Conjuntos de contenido cero)** Sea  $E^* \subset \mathbb{R}^N$ . Decimos que  $E^*$  tiene contenido cero en  $\mathbb{R}^N$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto finito de rectángulos  $\{R_i\}_{i=1}^n$  tales que:

$$i) \quad E^* \subset \bigcup_{i=1}^n R_i.$$

$$ii) \quad \sum_{i=1}^n m(R_i) < \varepsilon.$$

**Definición 5.14** Sea  $D$  un conjunto en  $\mathbb{R}^N$ . Decimos que  $D$  es medible Jordan en  $\mathbb{R}^N$  si  $D$  es acotado y su frontera  $\text{Fr}(D)$  tiene contenido cero.

**Teorema 5.7** (Teorema del cambio de variable) Sean  $U$  y  $V$  dos conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^N$ , sea  $\mathbf{T} : U \rightarrow V$  un difeomorfismo de clase  $C^1$ , sea  $D$  un conjunto abierto contenido en  $V$  o un conjunto compacto y medible Jordan contenido en  $V$ , y pongamos  $D^* = \mathbf{T}^{-1}(D)$  (o equivalentemente  $\mathbf{T}(D^*) = D$ ). Si

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable sobre  $D$ , entonces existe

$$\int_{D^*} f(\mathbf{T}(\mathbf{u})) |J_{\mathbf{T}}(\mathbf{u})| du_1 du_2 \dots du_N,$$

y se verifica que

$$\int_{\mathbf{T}(D^*)} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \int_{D^*} f(\mathbf{T}(\mathbf{u})) |J_{\mathbf{T}}(\mathbf{u})| du_1 du_2 \dots du_N,$$

donde  $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ , con  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  y  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ .

**Ejercicio 5.6** Usa el cambio de variable

$$x = u - \frac{(u+v)^2}{4} \wedge y = \frac{u+v}{2}$$

para calcular  $\iint_D x dx dy$  donde  $D$  es la región limitada por las curvas

i)  $x = 2 - y^2 - 2y$ .

ii)  $x = -y^2$ .

iii)  $x = 2y - y^2$ .

Adicionalmente, grafica la transformación de la región  $D$  originada por el cambio de variable.

### 5.3.2 Integración doble en coordenadas polares

La aplicación

$$\mathbf{T} : [0, \infty[ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{T} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

transforma coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

La restricción  $\mathbf{T} : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbf{T}(]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[)$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Un punto  $(x, y)$  del plano cartesiano puede ser representado en coordenadas polares por el par ordenado  $(r, \theta)$  cuya primera coordenada es igual a la distancia del punto al origen, esto es,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y cuya segunda coordenada es igual al ángulo formado entre el eje horizontal y el trazo que une el origen con el punto dado, por lo tanto se verifica que

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

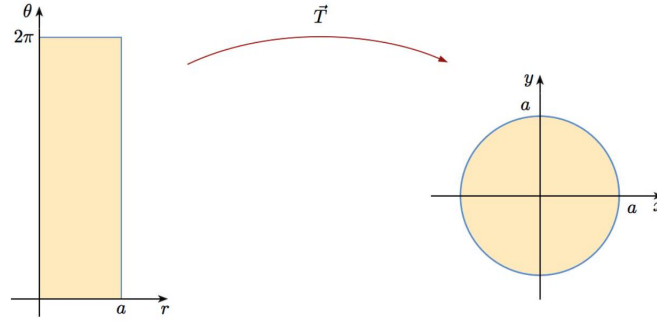


Figura 5.11: La aplicación  $\mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$  transforma el rectángulo en coordenadas polares dado por  $D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq a \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , en el círculo en coordenadas rectangulares dado por  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$

Como estamos interesados en calcular integrales usando este cambio de variable, necesitamos calcular el jacobiano asociado a la restricción de  $\mathbf{T}$  :

$$J_{\mathbf{T}}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Luego, por el Teorema 5.7 del cambio de variable, para toda función continua e integrable  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $D = \mathbf{T}(D^*)$ , se tiene que

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

**Ejemplo 5.11** Sea  $D$  una corona circular de radio menor  $a_1$  y radio mayor  $a_2$ , ubicada entre los ángulos  $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \pi$ , y sea  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre su dominio. Establece una fórmula para la integral  $\iint_D f(x, y) dA$ , usando el cambio de variable de coordenadas polares a rectangulares.

**Sol:** Se tiene que

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

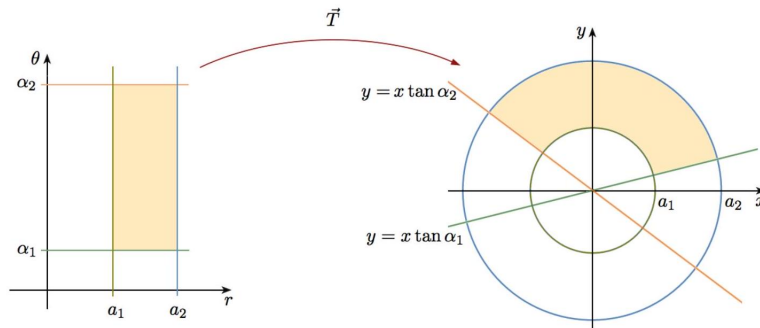


Figura 5.12: La aplicación  $\mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$  transforma el conjunto  $D^* = \{(r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi] : a_1 \leq r \leq a_2 \wedge \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2\}$ ,  $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \pi$ , en el conjunto  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq a_2^2 \wedge y \geq x \tan \alpha_1 \wedge y \leq x \tan \alpha_2\}$



**Ejercicio 5.7** Sea  $D$  el círculo de radio  $a$  y centro en  $(x_0, y_0)$ , y sea  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en su dominio. Establece una fórmula para la integral  $\iint_D f(x, y) dA$ , usando el cambio de variable de coordenadas polares a rectangulares.

**Ejercicio 5.8** Sea  $D$  es el círculo de radio  $a$  y centro en el origen. Calcula  $\iint_D (x^2 + y^2) dA$ .

### 5.3.3 Integración triple en coordenadas cilíndricas

La aplicación

$$\mathbf{T} : [0, \infty[ \times [0, 2\pi] \times ]-\infty, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{T} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

transforma coordenadas cilíndricas en rectangulares.

La restricción  $\mathbf{T} : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]-\infty, \infty[ \rightarrow \mathbf{T}([0, \infty[ \times [0, 2\pi] \times ]-\infty, \infty[)$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Un punto  $(x, y, z)$  del espacio en coordenadas rectangulares puede ser representado en coordenadas cilíndricas por el trío  $(r, \theta, z)$  cuya primera coordenada es igual a la distancia entre la proyección del punto en el plano  $xy$  y el origen, esto es,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

cuya segunda coordenada  $\theta$  es igual al ángulo formado entre el eje  $x$  y el trazo que une la proyección del punto sobre el plano  $xy$  con el origen, por lo tanto se verifica que

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

y cuya tercera coordenada es igual a la tercera coordenada rectangular, esto es,

$$z = z.$$

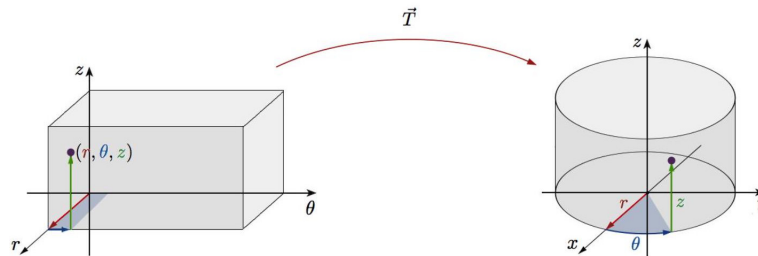


Figura 5.13: La aplicación  $\mathbf{T}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) = (x, y, z)$  transforma el rectángulo en coordenadas cilíndricas dado por  $D^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq r_0 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq z_0\}$ , en el cilindro en coordenadas rectangulares dado por  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2 : 0 \leq z \leq b\}$ .

Como estamos interesados en calcular integrales usando este cambio de variable, necesitamos calcular el jacobiano asociado a la restricción de  $\mathbf{T}$  :

$$J_{\mathbf{T}}(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Luego, por el Teorema 5.7 del cambio de variable, para toda función continua e integrable  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $D$  es la imagen por  $\mathbf{T}$  de  $D^*$ , se tiene que

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

**Ejemplo 5.12** Calcula el volumen del sólido encerrado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  y el cilindro  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ , al interior del cilindro.

**Sol:** Sea  $\mathbf{T}(D^*) = D$  la región encerrada por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  y el cilindro  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ , donde  $\mathbf{T}$  es la aplicación de coordenadas cilíndricas a rectangulares.

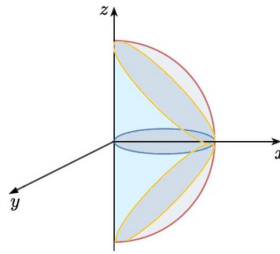


Figura 5.14: Gráfica de la región  $D$  acotada por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  y el cilindro  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ .

1. Partimos transformando las ecuaciones que encierran la región. Primero transformamos la ecuación de la esfera. Tenemos,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow r^2 + z^2 = 16.$$

Transformamos ahora la ecuación del cilindro. Tenemos

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + y^2 &= 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ &\Rightarrow r^2 = 4r \cos \theta \\ &\Rightarrow r = 4 \cos \theta \end{aligned}$$

2. A continuación buscamos límites de integración adecuados para la región  $D^*$ , que es la región que está dada en coordenadas cilíndricas.

- Tomando en cuenta los cálculos previos, obtenemos para  $z$  :

$$\begin{aligned} r^2 + z^2 &= 16 \Rightarrow z^2 = 16 - r^2 \\ &\Rightarrow z = \pm \sqrt{16 - r^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que la variable  $z$  queda limitada de la siguiente forma

$$\phi(r, \theta) = -\sqrt{16 - r^2} \leq z \leq \sqrt{16 - r^2} = \psi(r, \theta)$$

- Determinemos ahora el rango de variación de las variables  $r$  y  $\theta$ . Para esto, estudiamos la proyección del cuerpo  $D$  sobre el plano  $xy$  (o bien plano  $z = 0$ ). Es fácil chequear que esta proyección corresponde al círculo

$$(x - 2)^2 + y^2 \leq 4$$

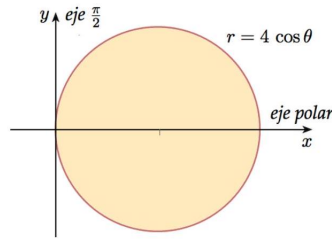


Figura 5.15: Gráfica de  $r = 4 \cos \theta$ .

Según podemos apreciar, la variable  $r$  queda limitada de la siguiente forma

$$u(\theta) = 0 \leq r \leq 4 \cos \theta = v(\theta)$$

mientras que la variable  $\theta$  queda limitada de la siguiente forma

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

En resumen, la región  $D^*$  sobre la cual vamos a integrar está limitada por:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 4 \cos \theta \\ -\sqrt{16 - r^2} \leq z \leq \sqrt{16 - r^2}. \end{cases}$$

Por lo tanto, si  $V$  es el volumen de la región  $\mathbf{T}(D^*) = D$ , donde  $\mathbf{T}$  es la aplicación que transforma

coordenadas cilíndricas a rectangulares, obtenemos

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D dx \, dy \, dz = \iiint_{D^*} r \, dr \, d\theta \, dz \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} \int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} r z \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{16-r^2}} dr \, d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} r \sqrt{16-r^2} \, dr \, d\theta \\
 &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} (16-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=4 \cos \theta} d\theta \\
 &= -\frac{4 \cdot 64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1-\cos^2 \theta) \sin \theta - 1) d\theta \\
 &= -\frac{4 \cdot 64}{3} \left( -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} - \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{128}{9} (3\pi - 4). \square
 \end{aligned}$$

### 5.3.4 Integración triple en coordenadas esféricas

La aplicación

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} : [0, \infty[ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} &\rightarrow \mathbf{T} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \sin \phi \\ \rho \sin \theta \sin \phi \\ \rho \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

transforma coordenadas esféricas en rectangulares.

La restricción  $\mathbf{T} : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \rightarrow \mathbf{T}([0, \infty[ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi])$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Un punto  $(x, y, z)$  del espacio en coordenadas rectangulares puede ser representado en coordenadas esféricas por el trío  $(\rho, \theta, \phi)$  cuya primera coordenada es igual a la distancia entre el punto y el origen, esto es,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

cuya segunda coordenada  $\theta$  es igual al ángulo formado entre el eje  $x$  y el trazo que une la proyección del punto sobre el plano  $xy$  con el origen, por lo tanto se verifica que

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

y cuya tercera coordenada es igual al ángulo entre el eje  $z$  y el trazo que une el punto con el origen, por lo tanto se verifica que

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

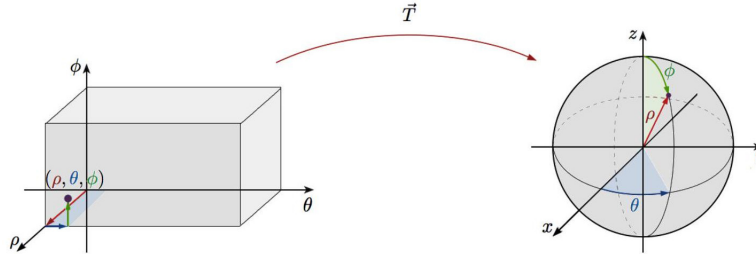


Figura 5.16: La aplicación  $\mathbf{T}(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) = (x, y, z)$  transforma el rectángulo en coordenadas esféricas dado por  $D^* = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq r_0 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \phi \leq \pi\}$ , en la bola en coordenadas rectangulares dada por  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ .

Como estamos interesados en calcular integrales usando este cambio de variable, necesitamos calcular el jacobiano asociado a la restricción de  $\mathbf{T}$  :

$$J_{\mathbf{T}}(\rho, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \phi.$$

Luego, por el Teorema 5.7 del cambio de variable, para toda función continua e integrable  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $D$  es la imagen por  $\mathbf{T}$  de  $D^*$ , y dado que  $\sin \phi > 0$  si  $\phi \in ]0, \pi[$ , se tiene que

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

**Ejemplo 5.13** Calcule el volumen del sólido encerrado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$  y el cono  $x^2 + y^2 = z^2$ , contenido en la región  $z \geq 0$ , al interior del cono.

**Sol:** Observemos que la región de integración es un cono invertido cuya tapa superior es una semiesfera. Usando coordenadas esféricas obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z^2 \wedge z \geq 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2z^2 \\ &\Rightarrow \rho^2 = 2\rho^2 \cos^2 \phi \\ &\Rightarrow \cos^2 \phi = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 4z &\Rightarrow \rho^2 = 4\rho \cos \phi \\ &\Rightarrow \rho = 4 \cos \phi. \end{aligned}$$

Luego, la región  $D^*$  sobre la cual vamos a integrar está limitada por

$$\begin{cases} 0 < \rho \leq 4 \cos \phi \\ 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0 < \phi \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Por lo tanto, si  $V$  es el volumen de la región  $\mathbf{T}(D^*) = D$ , donde  $\mathbf{T}$  es la aplicación que transforma coordenadas esféricas a rectangulares, obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx \, dy \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{4 \cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3} \sin \phi \bigg|_{\rho=0}^{\rho=4 \cos \phi} d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{64 \cos^3 \phi}{3} \sin \phi \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{64 \cos^3 \phi}{3} \sin \phi \right) \theta \bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\phi \\ &= \frac{2\pi \cdot 64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \phi \sin \phi \, d\phi \\ &= -\frac{2\pi \cdot 64}{3} \left( \frac{\cos^4 \phi}{4} \right) \bigg|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} \\ &= 8\pi. \square \end{aligned}$$

## 5.4 Curvas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

En esta sección reduciremos nuestro estudio a dimensiones 2 y 3.

**Definición 5.15 (Representación paramétrica de una curva)** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ . Una curva  $\gamma$  en  $\mathbb{R}^N$  es un conjunto dirigido de puntos de  $\mathbb{R}^N$  para los cuales existe una función continua  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que  $\mathbf{r}([a, b]) = \gamma$ . La función continua  $\mathbf{r}$  se denomina parametrización o trayectoria de la curva  $\gamma$ . El conjunto es dirigido en el sentido que  $\mathbf{r}$  establece un orden en el cual aparecen los puntos  $\mathbf{r}(t) \in \gamma$  cuando  $t$  varía desde  $a$  hasta  $b$ . El punto  $\mathbf{r}(a)$  se denomina punto inicial de la curva, mientras que el punto  $\mathbf{r}(b)$  se denomina punto terminal.

**Definición 5.16** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ , sea  $\gamma$  una curva en  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una parametrización de  $\gamma$ . Decimos que

- $\mathbf{P}_0 \in \mathbb{R}^N$  pertenece a la curva  $\gamma$  si  $\exists t_0 \in [a, b]$  tal que  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ .
- El conjunto  $\{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^N : \exists t \in [a, b] \text{ tal que } \mathbf{P} = \mathbf{r}(t)\}$  es la traza de la curva  $\gamma$ .
- $\gamma$  es una curva cerrada si  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ .
- $\mathbf{P} \in \gamma$  es un punto múltiple si existe más de un valor  $t \in ]a, b[$  tal que  $\mathbf{P} = \mathbf{r}(t)$ .
- $\gamma$  es una curva simple si no tiene puntos múltiples. Es decir,  $\gamma$  es simple si  $\mathbf{r}$  es inyectiva en  $]a, b[$ .
- $\gamma$  es una curva suave si posee una parametrización  $\mathbf{r} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ , en cuyo caso también decimos que  $\mathbf{r}$  es suave.
- $t_0 \in [a, b]$  es un punto singular de  $\mathbf{r}$  si

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) \right\| = 0$$

- $t_0 \in [a, b]$  es un punto regular de  $\mathbf{r}$  si

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) \right\| \neq 0$$

- $\gamma$  es una curva regular si admite una parametrización  $\mathbf{r}$  tal que cada  $t \in [a, b]$  es un punto regular de  $\mathbf{r}$ , en cuyo caso también decimos que la parametrización  $\mathbf{r}$  es regular.
- $\gamma$  es seccionalmente regular o regular a trozos si admite una parametrización regular, salvo un número finito de puntos singulares.

**Observación:** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ .

- Si  $\gamma$  es una curva de trayectoria  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , tal que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) \neq \mathbf{0}$$

entonces la recta tangente a la curva  $\gamma$  en el punto  $\mathbf{r}(t_0)$ , es la recta que pasa por  $\mathbf{r}(t_0)$ , que es paralela al vector

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0).$$

- Con el fin de garantizar que una curva regular  $\gamma$  tenga rectas tangentes que varíen continuamente sobre cada punto de su trayectoria asociada  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , es necesario que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \neq \mathbf{0} \quad \forall t \in [a, b]$$

En otras palabras, una curva regular no posee "puntas" (esquinas o cúspides).

- Una curva seccionalmente regular (regular a trozos) está formada por un número finito de curvas regulares que se han unido una tras otra por sus extremos (el punto terminal de una es el punto inicial de la otra).

- Las definiciones presentadas son las que se usan en estos apuntes y no siempre coinciden con las definiciones dadas en otros textos. La principal diferencia es acerca del significado de curva regular. En algunos textos, y en nuestro lenguaje, ésta se define como una curva que admite una parametrización regular y suave; mientras que en otros se define como una curva que admite una parametrización simple, regular y suave. De esta forma, al comparar los resultados aquí expuestos, se deben tener en cuenta estas diferencias.

**Ejemplo 5.14** Muestra que la recta  $\gamma$  en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  en la dirección del vector  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , con  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , es una curva simple, suave y no cerrada. ¿Bajo qué condiciones la parametrización encontrada es regular?

**Sol:** Notemos que la recta  $\gamma$  puede ser parametrizada mediante la función vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \mathbf{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}. \end{aligned}$$

- $\gamma$  es simple. En efecto,  $\mathbf{r}$  es inyectiva, pues

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) &\Rightarrow (x_0, y_0, z_0) + t_1\mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0) + t_2\mathbf{v} \\ &\Rightarrow t_1 = t_2. \end{aligned}$$

- $\gamma$  es suave. En efecto,  $\mathbf{r}$  es  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$  pues

$$x(t) = x_0 + tv_1, \quad y(t) = y_0 + tv_2 \quad \text{y} \quad z(t) = z_0 + tv_3$$

representan funciones afines de una variable real, que son cada una de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- $\gamma$  no es cerrada pues no tiene punto de inicio ni de término. En efecto,  $\mathbf{r}$  es inyectiva en  $\mathbb{R}$ , así que  $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$  para todo  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $t_1 \neq t_2$ , y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{r}(t) \neq \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{r}(t) \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\mathbf{r}(t)\| = +\infty.$$

- La parametrización  $\mathbf{r}$  de la recta  $\gamma$  es regular, pues

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Ejemplo 5.15** Muestre que la circunferencia de radio  $a$  y centro en el origen, y recorrida en sentido antihorario en el plano  $xy$ , es simple, suave y cerrada. ¿Bajo qué condiciones la parametrización encontrada es regular?

**Sol:** Notemos que la circunferencia  $\gamma$  puede ser parametrizada mediante la función vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t). \end{aligned}$$



- $\gamma$  es simple. En efecto,  $\mathbf{r}$  es inyectiva en  $[0, 2\pi[$ , pues para  $t_1, t_2 \in [0, 2\pi[$ , uno tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) &\Rightarrow \cos t_1 = \cos t_2 \wedge \sin t_1 = \sin t_2 \\ &\Rightarrow \sin t_1 \cos t_2 = \sin t_2 \cos t_1 \wedge \sin t_1 = \sin t_2 \\ &\Rightarrow \sin(t_1 - t_2) = 0 \wedge \sin t_1 = \sin t_2 \\ &\Rightarrow t_1 = t_2.\end{aligned}$$

- $\gamma$  es suave. En efecto,  $\mathbf{r}$  es  $C^1([0, 2\pi]; \mathbb{R}^2)$  pues

$$x(t) = a \cos t \quad e \quad y(t) = a \sin t$$

representan funciones de una variable real, que son cada una de clase  $C^1$  en  $[0, 2\pi]$  y

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

- $\gamma$  es cerrada. En efecto,

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi) = (a, 0)$$

- La parametrización  $\mathbf{r}$  de la circunferencia  $\gamma$  es regular pues  $a > 0$  implica que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = (-a \sin t, a \cos t) \neq \mathbf{0} \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

**Definición 5.17** Una cicloide en el plano  $xy$  describe la trayectoria que sigue un punto  $\mathbf{P}$  fijo respecto a un círculo de radio  $R$  y a distancia  $a$  de su centro, cuando tal círculo rueda sobre una línea recta. En particular, la curva de trayectoria

$$\begin{aligned}\mathbf{r} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \mathbf{r}(t) = (Rt - a \sin t, R - a \cos t)\end{aligned}$$

representa una cicloide normal o simplemente cicloide si  $R = a$ , representa una cicloide acortada si  $R > a$ , y representa una cicloide alargada si  $R < a$ .

**Ejercicio 5.9** Muestra que la cicloide es simple y suave, y que no es cerrada. ¿Para qué valores de  $t$  es regular?

**Sol:** Consideremos la cicloide  $\gamma$  cuya parametrización está dada por la función vectorial

$$\begin{aligned}\mathbf{r} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \mathbf{r}(t) = (at - a \sin t, a - a \cos t).\end{aligned}$$

1.  $\gamma$  es simple. En efecto,  $\mathbf{r}$  es inyectiva, pues para  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , uno tiene que

$$\begin{aligned}a - a \cos t_1 = a - a \cos t_2 &\Rightarrow 0 = \cos t_1 - \cos t_2 \\ &\Rightarrow 0 = -2 \sin \left( \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \sin \left( \frac{t_1 - t_2}{2} \right) \\ &\Rightarrow t_1 + t_2 = 2k\pi \vee t_1 - t_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} at_1 - a \operatorname{sen} t_1 &= at_2 - a \operatorname{sen} t_2 \Rightarrow (t_1 - t_2) = \operatorname{sen} t_1 - \operatorname{sen} t_2 \\ \Rightarrow t_1 - t_2 &= 2 \cos \left( \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{t_1 - t_2}{2} \right) \\ \Rightarrow \begin{cases} 2k\pi = 0 & \text{si } t_1 - t_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{t_1 - t_2}{2} = \operatorname{sen} \left( \frac{t_1 - t_2}{2} \right) & \text{si } \frac{t_1 + t_2}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \text{ par}, \\ \frac{t_2 - t_1}{2} = \operatorname{sen} \left( \frac{t_1 - t_2}{2} \right) & \text{si } \frac{t_1 + t_2}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \text{ impar.} \end{cases} \\ \Rightarrow t_1 &= t_2. \end{aligned}$$

Luego, para  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$$

2.  $\gamma$  es suave. En efecto,  $\mathbf{r}$  es  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$  pues

$$x(t) = at - a \operatorname{sen} t \quad e \quad y(t) = a - a \cos t$$

representan funciones de una variable real, que son cada una de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

3.  $\gamma$  no es cerrada pues no tiene punto de inicio ni de término. En efecto, al ser  $\mathbf{r}$  inyectiva en todo  $\mathbb{R}$ , entonces  $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$  para todo  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $t_1 \neq t_2$  y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty \neq +\infty = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$$

4. Veamos ahora para qué valores de  $t$  la parametrización  $\mathbf{r}$  de la cicloide  $\gamma$  es regular. Tenemos,

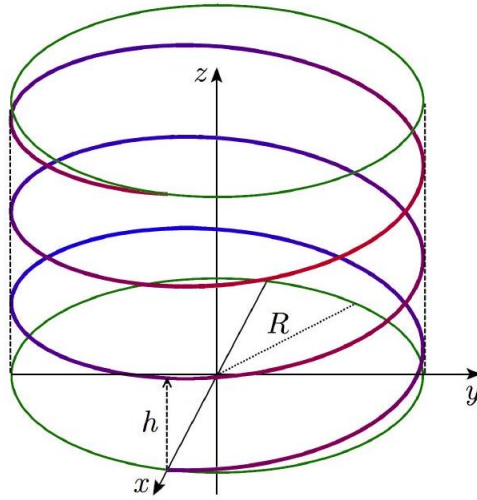
$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| &= 0 \Leftrightarrow (a - a \cos t)^2 + (a \operatorname{sen} t)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = a \cos t \wedge a \operatorname{sen} t = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos t = 1 \wedge \operatorname{sen} t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la parametrización  $\mathbf{r}$  de la cicloide es regular para cada  $t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 5.18** Una hélice circular recta en el espacio  $xyz$  describe la trayectoria que sigue un punto que asciende (o desciende) a través de la superficie de un cilindro de radio  $R$ , con ángulo de elevación (o de depresión) constante, y cuya distancia que sube (o baja) el punto al dar una vuelta completa alrededor del cilindro es  $h$ . El valor  $R$  usualmente es denominado como el radio de la hélice, mientras que el valor  $h$  usualmente es denominado como la altura de paso de la hélice. En particular, la curva de trayectoria

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \mathbf{r}(t) = \left( R \cos t, R \operatorname{sen} t, \frac{h}{2\pi} t \right) \end{aligned}$$

representa una hélice circular recta de radio  $R$ , altura de paso  $h$  y que pasa por el punto  $(R, 0, 0)$ .



**Ejemplo 5.16** Considera una hélice circular recta en el espacio  $xyz$  de radio  $R$  y altura de paso  $h$ , que pasa por el punto  $(R, 0, 0)$ . Prueba que esta curva es simple y suave, y que no es cerrada. ¿Para qué valores de  $t$  es regular?

**Sol:** Denotemos por  $H_{R,h}$  a la hélice circular recta de radio  $R$  y altura de paso  $h$ , que pasa por  $(R, 0, 0)$  y cuya trayectoria corresponde al caso particular considerado en la definición previa.

- $H_{R,h}$  es simple. En efecto,  $\mathbf{r}$  es inyectiva, pues para  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , uno tiene que  $z(t) = \frac{h}{2\pi}t$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , es inyectiva.
- $H_{R,h}$  es suave. En efecto,  $\mathbf{r}$  es  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$  pues

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t \quad y \quad z(t) = \frac{h}{2\pi}t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

representan funciones de una variable real, que son cada una de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- $\gamma$  no es cerrada pues no tiene punto de inicio ni de término. En efecto, al ser  $\mathbf{r}$  inyectiva en todo  $\mathbb{R}$ , entonces  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$  para todo  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $t_1 \neq t_2$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = +\infty \neq -\infty = \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t)$$

- Veamos ahora para qué valores de  $t$  la parametrización  $\mathbf{r}$  de la hélice circular recta  $H_{R,h}$  es regular. Tenemos,

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| = \sqrt{R^2 + \left( \frac{h}{2\pi} \right)^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto la hélice circular recta  $H_{R,h}$  es regular en  $\mathbb{R}$ .

### 5.4.1 Extensión de una curva

Dado un conjunto de curvas  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  tales que el punto terminal de  $\gamma_i$  coincide con el punto inicial  $\gamma_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, k-1$  escribimos

$$\gamma = \sum_{i=1}^k \gamma_i$$

para representar a la curva que resulta de la unión por los extremos correspondientes de las  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Claramente  $\gamma$  extiende a cada una de las curvas  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  y representa la curva obtenida al recorrer en forma correlativa a las curvas  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ .

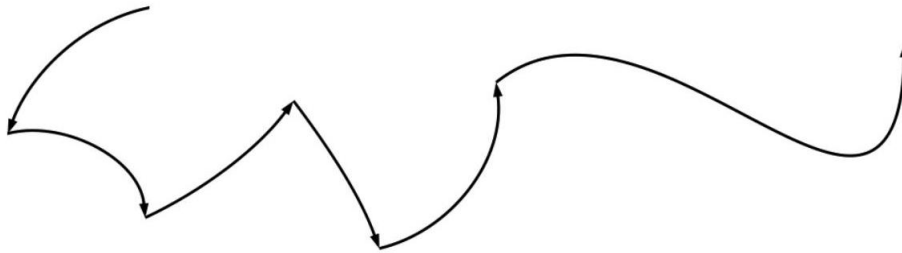


Figura 5.17: Curva formada por la unión de  $k$  curvas unidas por sus puntos terminales e iniciales.

**Definición 5.19 (Extensión de una curva)** Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $c < d$ . Sean  $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una  $C^1$ -parametrización de una curva  $\gamma_1$  simple y regular y sea  $\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una  $C^1$ -parametrización de una curva  $\gamma_2$  simple y regular, tales que verifican  $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(c)$ . Llamaremos extensión de las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  a la curva  $\gamma_1 + \gamma_2$  cuya trayectoria viene dada por la función vectorial  $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 : [a, b + (d - c)] \rightarrow \mathbb{R}^N$  definida por

$$t \mapsto (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \mathbf{r}_2(t - (b - c)) & \text{si } t \in [b, b + (d - c)] \end{cases}$$

**Ejemplo 5.17** Considera las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de trayectorias dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \mathbf{r}_1(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2}) \quad t \rightarrow \mathbf{r}_2(t) = (t, -\sqrt{1 - t^2}) \end{aligned}$$

respectivamente. Determina una fórmula para la extensión  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ , de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ .

**Sol:** Notemos que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  representan dos semicircunferencias tales que el punto terminal de la primera es el punto inicial de la segunda. Así,  $\gamma_1 + \gamma_2$  resulta ser la circunferencia de trayectoria

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : [-1, 3] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \mathbf{r}(t) = \begin{cases} (-t, \sqrt{1 - t^2}) & \text{si } t \in [-1, 1] \\ (t - 2, -\sqrt{1 - (t - 2)^2}) & \text{si } t \in [1, 3]. \end{cases} \end{aligned}$$

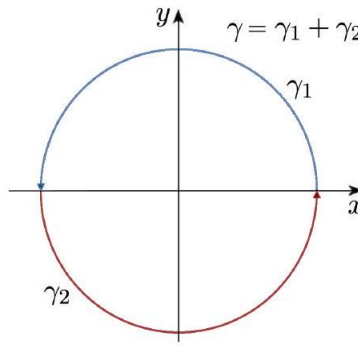


Figura 5.18: Circunferencia  $\gamma$  obtenida al unir por el extremo común las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  que poseen forma de semicircunferencia.

### 5.4.2 Preservación de la orientación de una curva

**Definición 5.20 (Reparametrización)** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ , sea  $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una parametrización de una curva  $\gamma$  simple y regular, y sea  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  una función biyectiva de clase  $C^1$ . Llamamos reparametrización de  $\mathbf{r}_1$  a la función compuesta  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \circ \varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Si  $\varphi$  es estrictamente creciente ( $\varphi' > 0$ ), entonces decimos que la reparametrización preserva la orientación; en cambio si  $\varphi$  es estrictamente decreciente ( $\varphi' < 0$ ), decimos que la reparametrización invierte la orientación.

**Ejemplo 5.18** Sean  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\gamma_3$  las curvas cuyas respectivas trayectorias están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 : [-1, 0] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \mathbf{r}_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \mathbf{r}_1(t) &= (-t, \sqrt{1-t^2}), & \theta \rightarrow \mathbf{r}_2(\theta) &= (\cos \theta, \sin \theta) \\ y \\ \mathbf{r}_3 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ 0 \rightarrow \mathbf{r}_3(t) &= (t, \sqrt{1-t^2}). \end{aligned}$$

Escribe:

i)  $\mathbf{r}_2$  como una reparametrización de  $\mathbf{r}_1$ . ¿Preserva la orientación?

ii)  $\mathbf{r}_3$  como una reparametrización de  $\mathbf{r}_1$ . ¿Preserva la orientación?

**Sol:** i)  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \circ \varphi$ , donde  $\varphi(\theta) = -\cos \theta \in C^1([0, \frac{\pi}{2}])$ , que es creciente y biyectiva en  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ; pues  $(\varphi'(\theta) = \sin \theta > 0$  en  $[0, \frac{\pi}{2}])$ . Por lo tanto,  $\mathbf{r}_2$  es una reparametrización de  $\mathbf{r}_1$  que preserva orientación.

ii)  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \circ \varphi$ , donde  $\varphi(t) = -t \in C^1([0, 1])$ , que es decreciente y biyectiva, pues  $\varphi'(t) = -1 < 0$ . Por lo tanto,  $\vec{\mathbf{r}}_3$  es una reparametrización de  $\mathbf{r}_1$  que invierte la orientación.

**Observación:** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ . Si  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una parametrización de la curva  $\gamma$ , y la función

$$\begin{aligned} \varphi : [-b, -a] &\rightarrow [a, b] \\ t \rightarrow \varphi(t) &= -t \end{aligned}$$

es biyectiva, decreciente y de clase  $C^1$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_* : [-b, -a] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\rightarrow \mathbf{r}_*(t) = (\mathbf{r} \circ \varphi)(t) = \mathbf{r}(-t) \end{aligned}$$

es una parametrización de  $\gamma$  que invierte la orientación.

**Definición 5.21 (Curvas paramétricamente equivalentes)** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ , y sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos curvas simples y regulares de trayectorias  $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  y  $\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$  respectivamente. Decimos que  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son paramétricamente equivalentes si  $\mathbf{r}_2$  es una reparametrización de  $\mathbf{r}_1$  que preserva la orientación; y decimos que  $\gamma_2$  es la negativa de  $\gamma_1$  si  $\mathbf{r}_2$  es una reparametrización de  $\mathbf{r}_1$  que invierte la orientación, en este caso escribimos  $\gamma_2 = \gamma_1^-$ .

### Observación:

- $\gamma$  es seccionalmente regular si admite una parametrización seccionalmente regular.
- Una parametrización suave de una curva  $\gamma$  es una  $C^1$ -parametrización de  $\gamma$ .

Un resultado interesante que podemos destacar aquí es el siguiente:

**Teorema 5.8** Sea  $\gamma$  una curva simple, regular y suave. Entonces todas las parametrizaciones simples, regulares y suaves de  $\gamma$  son equivalentes.

**Observación:** Si  $\gamma$  es una curva seccionalmente simple, regular y suave, entonces todas las parametrizaciones simples, regulares y suaves de  $\gamma$  resultan equivalentes seccionalmente. En efecto, basta aplicar el teorema a cada sección simple, regular y suave de  $\gamma$  que posea una  $C^1$ -parametrización.

## 5.5 Longitud de arco.

Hasta el momento hemos visto que dadas dos curvas cuyas parametrizaciones coinciden en el punto terminal de una e inicial de la otra, es posible definir una nueva curva que las extiende. También hemos definido lo que entendemos por curvas que preservan la orientación y por curvas paramétricamente equivalentes.

### 5.5.1 Longitud de arco

Sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , con  $N = 2$  o  $N = 3$ , una  $C^1$  - parametrización de una curva  $\gamma$  seccionalmente simple, regular y suave. Consideremos la partición  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  dada por  $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b\}$  (recordemos que esto implica que  $a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = b$ ), y pongamos

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$$

y sea

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}).$$

Si  $P_n$  es la poligonal que se obtiene al unir los puntos  $\mathbf{r}(t_i)$  con  $\mathbf{r}(t_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , entonces mientras más pequeño es  $\|\mathcal{P}\|$ , mejor aproximamos la longitud de la curva  $\gamma$  mediante la longitud de la poligonal  $P_n$

$$\begin{aligned} \ell(P_n) &= \sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| \Delta t_i. \end{aligned}$$

Luego, considerando  $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos que la longitud de la curva  $\gamma$  está dada por

$$\ell(P_n) \xrightarrow{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \ell(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

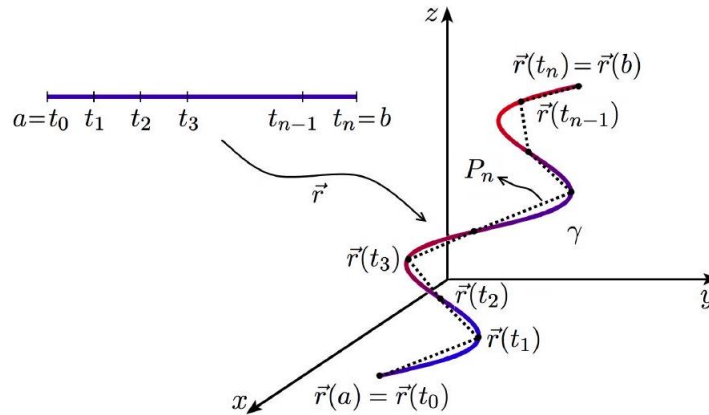


Figura 5.19: Aproximación del arco de una curva en  $\mathbb{R}^3$  mediante una poligonal.

**Definición 5.22 (Longitud de arco de una curva)** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$  y sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una  $C^1$ -parametrización de una curva  $\gamma$  seccionalmente simple, suave y regular. Entonces la longitud de arco  $\ell(\gamma)$  de la curva  $\gamma$  esta dada por la fórmula

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ . La definición de longitud de arco de una curva es correcta pues ella no depende de la  $C^1$ -parametrización seccionalmente simple y regular escogida. En efecto, sean  $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  y  $\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , dos  $C^1$ -parametrizaciones de una curva  $\gamma$  seccionalmente simple y regular, entonces

por el Teorema 5.8  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son paramétricamente equivalentes. Luego, existe  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , una  $C^1$ -biyección creciente, tal que:  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \circ \varphi$ .

$$\begin{aligned} \int_c^d \left\| \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}(t) \right\| dt &= \int_c^d \left\| \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \circ \varphi)(t) \right\| dt \\ &= \int_c^d \left\| \frac{d\mathbf{r}_1}{d\varphi}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \right\| dt \\ &= \int_c^d \left\| \frac{d\mathbf{r}_1}{d\varphi}(\varphi(t)) \right\| |\varphi'(t)| dt \quad \varphi(c) = a \quad \varphi(d) = b \\ &= \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}_1}{d\xi}(\xi) \right\| d\xi \\ \xi &= \varphi(t) \Rightarrow d\xi = \varphi'(t) dt \\ \varphi'(t) &= |\varphi'(t)| \quad \text{pues } \varphi' > 0 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.19** *Calcula la longitud de arco de la curva  $\gamma$  de trayectoria  $\mathbf{r}(t) = (t, 2t^2, 3t - 4)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .*

**Sol:** *Tenemos,*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) &= (1, 4t, 3) \Rightarrow \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| = \sqrt{16t^2 + 10} \\ &= 4\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}}. \end{aligned}$$

*Así que conviene realizar una sustitución trigonométrica. Ponemos,*

$$\tan \theta = \frac{t}{\sqrt{\frac{5}{8}}}$$

*y obtenemos*

$$dt = \sqrt{\frac{5}{8}} \sec^2 \theta d\theta$$

*y*

$$\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}} \sec \theta$$

*Como,*

$$\begin{aligned} 4 \int \sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} dt &= 4 \int \frac{5}{8} \sec^3 \theta d\theta \\ &= \frac{5}{2} \left( \sec \theta \tan \theta - \int \sec \theta \tan^2 \theta d\theta \right) \\ &= \frac{5}{2} \left( \sec \theta \tan \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta \right), \quad \begin{cases} u = \sec \theta \\ du = \sec \theta \tan \theta d\theta \\ dv = \sec^2 \theta d\theta \\ v = \tan \theta \\ \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \end{cases} \end{aligned}$$



se sigue que

$$\begin{aligned}\int \sec^3 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \left( \sec \theta \tan \theta + \int \sec \theta d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|).\end{aligned}$$

Retornando a la variable  $t$ , se sigue que

$$4 \int \sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} dt = \frac{5}{4} \left( \frac{\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}}}{\sqrt{\frac{5}{8}}} \cdot \frac{t}{\sqrt{\frac{5}{8}}} + \ln \left| \frac{\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} + t}{\sqrt{\frac{5}{8}}} \right| \right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= 4 \int_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} dt = \frac{5}{4} \left( \frac{\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}}}{\sqrt{\frac{5}{8}}} \cdot \frac{t}{\sqrt{\frac{5}{8}}} + \ln \left| \frac{\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} + t}{\sqrt{\frac{5}{8}}} \right| \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{5}{4} \left( \frac{\sqrt{26} \cdot 2}{5} + \ln \left| \frac{\sqrt{26} + 4}{\sqrt{10}} \right| \right).\end{aligned}$$

**Ejercicio 5.10** Calcula la longitud de arco de la espiral de la hélice  $H_{a,h}$  determinada por la trayectoria  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, \frac{ht}{2\pi})$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

## 5.6 Integral de línea de un campo escalar

**Definición 5.23** (Integral de línea de un campo escalar) Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ , sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$ , sea  $\gamma$  una curva simple, regular y suave en  $\Omega$ , sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una  $C^1$ -parametrización simple y regular de  $\gamma$ , y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces, se define la integral de línea de  $f$  sobre  $\gamma$  como

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

**Observación:** La integral de línea no depende de la  $C^1$ -parametrización simple y regular escogida. En efecto, sean  $\mathbf{r}_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, 2$ , dos  $C^1$ -parametrizaciones simples y regulares de  $\gamma$ . Entonces  $\mathbf{r}_1$  es equivalente a  $\mathbf{r}_2$ ; es decir

$$\exists \varphi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1] \quad C^1\text{-biyección creciente, tal que} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \circ \varphi$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{r}_2(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}(t) \right\| dt &= \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{r}_1(\varphi(t))) \left\| \frac{d(\mathbf{r}_1 \circ \varphi)}{dt}(t) \right\| dt \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{r}_1(\varphi(t))) \left\| \frac{d\mathbf{r}_1}{d\varphi}(\varphi(t)) \varphi'(t) \right\| dt \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{r}_1(\varphi(t))) \left\| \frac{d\mathbf{r}_1}{d\varphi}(\varphi(t)) \right\| \varphi'(t) dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{r}_1(\xi)) \left\| \frac{d\mathbf{r}_1}{d\xi}(\xi) \right\| d\xi. \end{aligned}$$

**Observación:** La definición 3.4.1 se puede extender a curvas  $\gamma$  seccionalmente regulares, que es cuando existen curvas  $\gamma_i$  simples, regulares y suaves, para  $i = 1, 2, \dots, k$ , tales que  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$ . En este caso, obtenemos

$$\int_{\gamma} f \, ds = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f \, ds$$

**Observación:** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$ , sea  $\gamma$  una curva simple, regular y suave en  $\Omega$ , sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una  $C^1$ -parametrización simple y regular de  $\gamma$ , con punto inicial en  $\mathbf{A} = \mathbf{r}(a)$  y punto terminal en  $\mathbf{B} = \mathbf{r}(b)$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua.

1. Una notación alternativa para indicar que queremos calcular la integral de línea de  $f$  sobre  $\gamma$  es:

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} f \, ds$$

2. Si  $\mathbf{A} = \mathbf{r}(a) = \mathbf{B} = \mathbf{r}(b)$ , entonces la curva es cerrada y ponemos

$$\oint_{\gamma} f \, ds \quad \text{en vez de} \quad \int_{\gamma} f \, ds.$$

**Ejemplo 5.20** Sea  $\gamma$  la curva en  $\mathbb{R}^2$  de ecuación  $x^2 + y^2 - \lambda x = 0$ , recorrida en sentido antihorario. Calcula

$$\oint_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$$

**Sol:** Notemos que

$$x^2 + y^2 - \lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2.$$

Luego, podemos usar la parametrización

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\lambda}{2} \cos t + \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} \sin t\right) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Se sigue que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \left(-\frac{\lambda}{2} \sin t, \frac{\lambda}{2} \cos t\right) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

y

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| = \frac{\lambda}{2} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Así, desde la ecuación  $x^2 + y^2 = \lambda x$ , obtenemos que  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  equivale a

$$f(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{\lambda \left( \frac{\lambda}{2} \cos t + \frac{\lambda}{2} \right)} \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds &= \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\cos t + 1}{2}} \, dt \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right| \, dt \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \left( \int_0^{\pi} \cos \left( \frac{t}{2} \right) \, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \left( \frac{t}{2} \right) \, dt \right) \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \left( 2 \operatorname{sen} \left( \frac{t}{2} \right) \Big|_{t=0}^{t=\pi} - 2 \operatorname{sen} \left( \frac{t}{2} \right) \Big|_{t=\pi}^{t=2\pi} \right) \\ &= 2\lambda^2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.21** Sea  $\lambda > 0$  y sea  $\gamma$  la curva en  $\mathbb{R}^3$  de ecuaciones paramétricas  $x = \lambda t, y = \frac{\lambda}{2} t^2, z = \frac{\lambda}{3} t^3$  para  $t \geq 0$ . Determina el valor de

$$\int_{(0,0,0)}^{(\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3})} \sqrt{\frac{2y}{\lambda}} \, ds$$

**Sol:** Ponemos

$$\mathbf{r}(t) = \left( \lambda t, \frac{\lambda t^2}{2}, \frac{\lambda t^3}{3} \right) \quad \forall t \geq 0$$

Luego,  $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0), \mathbf{r}(1) = (\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3})$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = (\lambda, \lambda t, \lambda t^2) \quad \forall t \in [0, 1]$$

y

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| = \lambda \sqrt{1 + t^2 + t^4} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Por otro lado, si ponemos  $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{\lambda}}$ , entonces

$$f(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{t^2} = t \quad \forall t \in [0, 1].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3})} \sqrt{\frac{2y}{\lambda}} ds &= \lambda \int_0^1 t \sqrt{1+t^2+t^4} dt \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} du \quad \text{donde } u = t^2 + \frac{1}{2} \text{ y } du = 2t dt \\ &= \frac{\lambda}{4} \left( u \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \ln \left( u + \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} \right) \right) \Big|_{u=\frac{1}{2}}^{u=\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{8} \left( (3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right) \right). \end{aligned}$$

### 5.6.1 Integral de línea de un campo vectorial

**Definición 5.24** (Integral de línea de un campo vectorial) Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ , sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$ , sea  $\gamma$  una curva simple, regular y suave en  $\Omega$ , sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , una  $C^1$ -parametrización simple y regular de  $\gamma$  y sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  un campo vectorial continuo. Entonces se define la integral de línea de  $\mathbf{F}$  sobre  $\gamma$  como

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt.$$

#### Observación:

1. Se puede probar que la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva no depende de la parametrización simple, regular y suave escogida de la curva. Sin embargo, sí depende de la orientación de tal curva.
2. La definición 5.24 se puede extender a curvas  $\gamma$  seccionalmente regulares, que es cuando existen  $\gamma_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ , curvas simples, regulares y suaves tales que  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$ . En este caso, obtenemos

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_i$$

donde las parametrizaciones  $\mathbf{r}_i$  de las respectivas curvas  $\gamma_i$  son suaves.

**Notación:** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$ , sea  $\gamma$  una curva simple, regular y suave en  $\Omega$ , sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una  $C^1$ -parametrización simple y regular de  $\gamma$ , con punto inicial en  $\mathbf{A} = \mathbf{r}(a)$  y punto terminal en  $\mathbf{B} = \mathbf{r}(b)$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Notaciones alternativas para indicar que queremos calcular la integral de línea de  $\mathbf{F}$  sobre  $\gamma$  son:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{o bien} \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma} F_i dx_i.$$

En particular,

1. Si  $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es tal que  $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ , se usa

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy$$

2. Si  $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es tal que  $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , se usa

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz$$

3. Si  $\mathbf{A} = \mathbf{r}(a) = \mathbf{B} = \mathbf{r}(b)$ , entonces la curva es cerrada y ponemos

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{en vez de} \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

**Ejemplo 5.22** Sea  $\gamma$  la curva de trayectoria  $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$ ,  $t \in [0, \frac{7\pi}{2}]$ . Evalúa la integral de línea

$$\int_{\gamma} \sin z \, dx + x^{\frac{1}{3}} \, dy - (xy)^{\frac{1}{3}} \, dz$$

**Sol:** Notemos que,  $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin z, x^{\frac{1}{3}}, -(xy)^{\frac{1}{3}})$ , de donde

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\sin t, \cos t, -\cos t \sin t)$$

Además,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t, 1).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sin z \, dx + x^{\frac{1}{3}} \, dy - (xy)^{\frac{1}{3}} \, dz &= \int_0^{\frac{7\pi}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{7\pi}{2}} (\sin t, \cos t, -\cos t \sin t) \cdot (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{\frac{7\pi}{2}} (-3 \cos^2 t \sin^2 t + 3 \sin^2 t \cos^2 t - \cos t \sin t) dt \\ &= - \int_0^{\frac{7\pi}{2}} \cos t \sin t \, dt \\ &= - \left( \frac{1}{2} \sin^2 t \right) \Big|_0^{\frac{7\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### Ejercicio 5.11

1. Calcula la integral de línea

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

si  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + (xz - y)\hat{k}$  y  $\gamma$  es la curva de trayectoria  $\mathbf{r}(t) = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + 4t^2\hat{k}$  que une el punto  $(0, 0, 0)$  con el punto  $(1, 2, 4)$ .

2. Calcula la integral de línea

$$\int_{\gamma} xy^2 dx + x^2y dy$$

si  $\gamma$  es el arco parabólico  $x = y^2$  desde el punto  $(0, 0)$  hasta el punto  $(-1, 1)$ , usando

a)  $x$  como parámetro,

b) la parametrización  $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \cos(2t) + 1), t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ .

3. Calcula la integral

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{|x| + |y|} (dx + dy)$$

donde  $\gamma$  es el contorno del cuadrado de vértices  $\mathbf{A} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{B} = (0, 1)$ ,  $\mathbf{C} = (-1, 0)$  y  $\mathbf{D} = (0, -1)$  recorrido en sentido antihorario.

4. Calcula la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$  sobre la curva  $\gamma$  que es el contorno del trozo de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$  y  $z \geq 0$ , recorrido de modo que la cara exterior del trozo de la esfera queda a la izquierda.

5. Evalúa

$$\int_{\gamma} (x^2 + y) dx + (y^2 + z) dy + (z^2 + x) dz$$

sobre la curva cerrada  $\gamma$  que resulta de la unión entre la curvas  $\gamma_1 : x + z = 1, 0 \leq x \leq 1, y = 0$ ;  $\gamma_2 : x + y = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0$ ; y  $\gamma_3 : y^2 + z^2 = 1, y \geq 0, z \geq 0, x = 0$ ; recorrida de modo tal que la parte exterior de la superficie continua y acotada por esta curva queda a la izquierda de un observador sobre el plano  $xy$  que está a gran distancia del origen.

## 5.6.2 Aplicaciones: Masa, centro de masa, momentos y trabajo

**Definición 5.25 (Masa)** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ , sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$ , sea  $\gamma$  una curva simple, regular y suave en  $\Omega$ , sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una  $C^1$ -parametrización simple y regular de  $\gamma$ , y sea  $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Si  $\gamma$  representa un alambre, cuerda o varilla ( si  $N = 2$  ) o resorte ( si  $N = 3$  ), y  $\delta$  la densidad de masa lineal sobre  $\gamma$ , entonces la masa total del alambre, cuerda o varilla ( si  $N = 2$  ) o resorte ( si  $N = 3$  ), está dada por

$$M = \int_{\gamma} \delta ds = \int_a^b \delta(\mathbf{r}(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt$$

### Momentos estáticos en $\mathbb{R}^3$

El primer momento de masa con respecto a un plano de una partícula en el espacio cuya masa es  $m[kg]$ , corresponde al producto entre la masa  $m$  de la partícula y su respectiva distancia  $r$  - que considera el signo - a tal plano. De esta forma, es razonable pensar que si tenemos  $n$  partículas, entonces el primer momento de masa total debe ser la suma de los primeros momentos de masa de cada una de las partículas. Luego, el primer momento total debe ser

$$M_{\text{plano}} = \sum_{i=1}^n r_i m_i$$

A partir de este hecho y teniendo en cuenta que la distancia de un punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  al plano  $x = 0$ , o bien plano  $yz$ , considerando el signo es  $\text{sgn}(x)\sqrt{x^2} = \text{sgn}(x)|x| = x$ , podemos establecer que el primer momento respecto al plano  $yz$  de un trozo de alambre, cuerda o resorte en el espacio, representado por una curva simple, regular y suave  $\gamma$ , que posee una densidad de masa lineal igual a  $\delta(x, y, z)$ , está dado por

$$M_{yz} = \int_{\gamma} x \delta(x, y, z) ds$$

Similarmente, podemos establecer que el primer momento respecto al plano  $y = 0$ , o bien plano  $xz$  es

$$M_{xz} = \int_{\gamma} y \delta(x, y, z) ds$$

y que el primer momento respecto al plano  $z = 0$ , o bien plano  $xy$  es

$$M_{xy} = \int_{\gamma} z \delta(x, y, z) ds$$

### Centro de masa en $\mathbb{R}^3$

La situación es análoga al caso  $N = 2$ , de manera que el centro de masa de un alambre, cuerda o resorte delgado  $\gamma$  en el espacio, que posee una densidad de masa lineal igual a  $\delta(x, y, z)$ , es el punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$  de coordenadas

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left( \frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M} \right).$$

**Ejemplo 5.23** Un alambre enrollado en forma de hélice circular recta (o alambre helicoidal) posee una densidad de masa lineal igual a  $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  medida en  $\left[\frac{gr}{m}\right]$ . Si la hélice tiene radio 1 y altura de paso  $2\pi$ , ¿cuál es la masa total del trozo de alambre que da una vuelta completa?

**Sol:** La parametrización de la hélice de radio 1 y altura de paso  $2\pi$  está dada por  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Luego, para calcular la masa total del trozo de alambre que da una vuelta completa, consideramos  $t \in [0, 2\pi]$ . Obtenemos,

$$\begin{aligned} M &= \int_{\gamma} \delta ds \\ &= \int_0^{2\pi} \delta(\mathbf{r}(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \|(-\sin t, \cos t, 1)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} (1 + t^2) dt \\ &= \sqrt{2} \left( t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2). \end{aligned}$$

Luego, la masa total solicitada es  $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2) \left[ \frac{g}{m} \right]$ .

**Ejemplo 5.24** Un alambre helicoidal (o resorte) posee una densidad de masa lineal igual a  $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  medida en  $\left[ \frac{g}{m} \right]$ . Si la hélice tiene radio 1 y altura de paso  $2\pi$ , ¿cuál es el centro de masa del trozo de alambre que da una vuelta completa?

**Sol:** La parametrización de la hélice de radio 1 y altura de paso  $2\pi$  está dada por  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Luego, para calcular el centro de masa del trozo de alambre que da una vuelta completa, consideramos  $t \in [0, 2\pi]$ . Notemos que la masa total  $M$  ya fue obtenida en el Ejemplo 3.5.1.

1. Calculamos  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_{\gamma} x \delta ds \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}\pi (3 + 4\pi^2)} \int_0^{2\pi} x(t) \delta(\mathbf{r}(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}\pi (3 + 4\pi^2)} \int_0^{2\pi} \cos t (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \|(-\sin t, \cos t, 1)\| dt \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\pi (3 + 4\pi^2)} \int_0^{2\pi} \cos t (1 + t^2) dt \\ &= \frac{3}{2\pi (3 + 4\pi^2)} \left( \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} t^2 \cos t dt \right). \end{aligned}$$



Ahora, integramos  $I$  por partes,

$$\left. \begin{array}{l} u = t^2 \\ du = 2t \, dt \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \cos t \, dt \\ v = \sin t \end{array} \right\} \Rightarrow I = t^2 \sin t \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} t \sin t \, dt$$

y nuevamente integrando por partes,

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{u} = t \\ d\tilde{u} = dt \end{array} \quad \begin{array}{l} d\tilde{v} = \sin t \, dt \\ \tilde{v} = -\cos t \end{array} \right\} \Rightarrow I = 2t \cos t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 4\pi.$$

Luego,

$$\bar{x} = \frac{6}{(3 + 4\pi^2)}$$

2. Ahora calculamos  $\bar{y}$ .

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{M} \int_{\gamma} y \delta \, ds \\ &= \frac{3}{2\pi(3 + 4\pi^2)} \left( \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t \, dt}_{-\cos t \Big|_0^{2\pi}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} t^2 \sin t \, dt}_I \right). \end{aligned}$$

Integrando  $I$  por partes, se obtiene

$$\left. \begin{array}{l} u = t^2 \\ du = 2t \, dt \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \sin t \, dt \\ v = -\cos t \end{array} \right\} \Rightarrow I = \underbrace{-t^2 \cos t \Big|_0^{2\pi}}_{-4\pi^2} + 2 \int_0^{2\pi} t \cos t \, dt$$

y nuevamente integrando por partes,

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{u} = t \\ d\tilde{u} = dt \end{array} \quad \begin{array}{l} d\tilde{v} = \cos t \, dt \\ \tilde{v} = \sin t \end{array} \right\} \Rightarrow I = -4\pi^2 + t \sin t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t \, dt$$

Luego,

$$\bar{y} = \frac{-6\pi}{(3 + 4\pi^2)}$$

3. Finalmente calculamos  $\bar{z}$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{M} \int_{\gamma} z \delta ds \\ &= \frac{3}{2\pi(3+4\pi^2)} \int_0^{2\pi} t(1+t^2) dt \\ &= \frac{3}{2\pi(3+4\pi^2)} \left( \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{3\pi(1+2\pi^2)}{(3+4\pi^2)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masa es

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{3}{3+4\pi^2} (2, -2\pi, \pi(1+2\pi^2)).$$

**Definición 5.26 (Trabajo)** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ , sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$ , sea  $\gamma$  una curva simple, regular y suave en  $\Omega$ , sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una  $C^1$ -parametrización simple y regular de  $\gamma$  y sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  un campo vectorial continuo. Si  $\gamma$  representa un alambre, cuerda o varilla (si  $N = 2$ ) o resorte (si  $N = 3$ ), y  $\mathbf{F}$  representa un campo de fuerzas continuo sobre  $\gamma$ , entonces el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  sobre el alambre, cuerda o varilla (si  $N = 2$ ) o resorte (si  $N = 3$ ) está dado por

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt$$

**Ejemplo 5.25** Calcula el trabajo del campo  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{F}(x, y) = (3x + 4y, 2x + 3y^2)$  sobre la circunferencia  $\gamma$  de ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  recorrida una vez en sentido antihorario respecto de la parte positiva del eje  $x$ .

**Sol:** Para la circunferencia  $\gamma$  de ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  recorrida una vez en sentido antihorario consideramos la parametrización simple, regular y suave  $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
W &= \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (3 \cos t + 4 \sin t, 2 \cos t + 3 \sin^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-3 \cos t \sin t - 4 \sin^2 t + 2 \cos^2 t + 3 \sin^2 t \cos t) dt \\
&= \left( -t + \sin^3 t + \frac{3 \cos 2t}{2} + 3 \cos t \sin t \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= -2\pi. \quad \square
\end{aligned}$$

**Ejemplo 5.26** Considera el campo de fuerzas  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -y, z)$  y la curva  $\gamma$  de trayectoria  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0), t \in [0, 2\pi]$ . Calcula el trabajo de  $\mathbf{F}$  sobre  $\gamma$ .

**Sol:** El trabajo es

$$\begin{aligned}
W &= \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2 \cos t, -2 \sin t, 0) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

**Ejemplo 5.27** Considera el campo de fuerzas  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -y, -z)$  y sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  las curvas de trayectorias  $\mathbf{r}_1(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in [0, 2\pi]$ , y  $\mathbf{r}_2(t) = (1, 0, t), t \in [0, 2\pi]$ , respectivamente. Calcula el trabajo  $W_1$  de  $\mathbf{F}$  sobre  $\gamma_1$  y el trabajo  $W_2$  de  $\mathbf{F}$  sobre  $\gamma_2$ .

**Sol:** Tenemos,

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t, -\sin t, -t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t - \cos t \sin t - t) dt \\
&= -2\pi^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 \\
 &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (1, 0, -t) \cdot (0, 0, 1) dt \\
 &= - \int_0^{2\pi} t dt \\
 &= -2\pi^2. \square
 \end{aligned}$$

### Observación:

1. En el Ejemplo 5.25 y en el Ejemplo 5.26 hemos calculado el trabajo sobre curvas cerradas. En el Ejemplo 5.25 el trabajo fue distinto de cero, mientras que en el Ejemplo 5.26 el trabajo fue cero. Entonces, surge la siguiente pregunta

Si la curva es cerrada ¿Bajo qué condiciones podemos asegurar que el trabajo es igual a 0?

2. En el Ejemplo 5.27 hemos calculado el trabajo sobre curvas cerradas diferentes que tienen los mismos puntos inicial y terminal, obteniendo que el trabajo es el mismo. Entonces, surge la siguiente pregunta

Si las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tienen el mismo punto inicial y también el mismo punto terminal ¿Bajo qué condiciones podemos asegurar que la integral de trabajo sobre  $\gamma_1$  es igual a la integral de trabajo sobre  $\gamma_2$ ?

Más adelante daremos condiciones precisas sobre el campo vectorial y su dominio que permitirán responder apropiadamente a nuestras interrogantes.

### 5.6.3 Campos conservativos e independencia de la trayectoria

#### Función potencial. Campos conservativos

**Definición 5.27** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$ . Decimos que un campo vectorial continuo  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  es un campo vectorial gradiente o campo conservativo si existe un campo escalar  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$  en  $\Omega$ . El campo escalar  $f$  recibe el nombre de función potencial de  $\mathbf{F}$ .

**Ejemplo 5.28** Prueba que el campo vectorial  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por  $\mathbf{F}(x, y) = (x + y^2, 2xy)$  es un campo conservativo determinando explícitamente su función potencial.

**Sol:** Deseamos construir un campo escalar  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que

Observemos ahora que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y^2 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y^2 \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + \varphi_1(y)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy \Rightarrow f(x, y) = xy^2 + \varphi_2(x)$$

para ciertas funciones  $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R})$ . Finalmente, considerando

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

obtenemos que  $\mathbf{F} = \nabla f$ , y por lo tanto  $\mathbf{F}$  es conservativo y  $f$  es su función potencial.

**Ejemplo 5.29** ¿Es  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, -\frac{xy}{z^2}\right)$  un campo conservativo sobre su dominio?

**Sol:** Notemos que  $\text{Dom}(\mathbf{F}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0 \wedge z \neq 0\}$ . Deseamos construir un campo escalar  $f : \text{Dom}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{xy}{z^2}.$$

Observemos ahora que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z} \Rightarrow f(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + \varphi_1(y, z), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{xy}{z} - \frac{x}{y} + \varphi_2(x, z) \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{xy}{z^2} \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{xy}{z} + \varphi_3(x, y)$$

para ciertas funciones  $\varphi_i \in C^1(D_i)$ , donde  $D_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge z \neq 0\}$ ,  $D_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z \neq 0\}$  y  $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ . Finalmente, considerando

$$f(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } y \neq 0 \text{ y } z \neq 0$$

obtenemos que  $\mathbf{F} = \nabla f$  es conservativo en su dominio.

## 5.7 Conjuntos conexos

**Definición 5.28** Sea  $\Omega$  un conjunto en  $\mathbb{R}^N$ . Decimos que  $\Omega$  es desconexo si existen conjuntos  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^N$  tales que

$$A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad A \cup B = \Omega, \quad y \quad \bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$$

Si  $\Omega$  no es desconexo, decimos que  $\Omega$  es conexo.

**Definición 5.29** Sea  $\Omega$  un conjunto en  $\mathbb{R}^N$ . Decimos que  $\Omega$  es arco-conexo si para cada par de puntos  $A, B \in \Omega$  existe una función continua  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \Omega$  tal que

$$\mathbf{r}(a) = A \quad y \quad \mathbf{r}(b) = B$$

**Teorema 5.9** (Caracterización de los conjuntos abiertos conexos en  $\mathbb{R}^N$ ) Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$ . Entonces,  $\Omega$  es conexo si y solo si  $\Omega$  es arco-conexo.

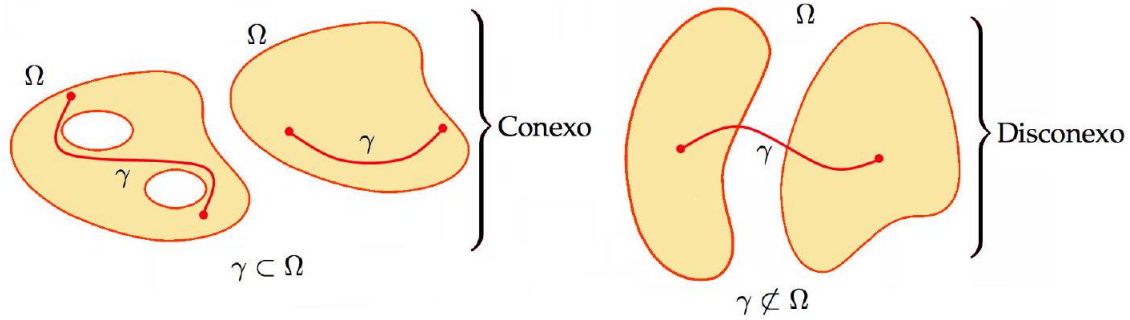


Figura 5.20: Conjuntos conexos y disconexos (no conexos) en  $\mathbb{R}^N$ .

### 5.7.1 Conjuntos convexos

**Definición 5.30** Sea  $\Omega$  un conjunto en  $\mathbb{R}^N$ . Decimos que  $\Omega$  es convexo si dados dos puntos cualesquiera de  $\Omega$ , el segmento de recta que los une queda totalmente contenido en  $\Omega$ ; es decir, si

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega) ( \text{la combinación convexa } ((1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \in \Omega ) (\forall \lambda \in [0, 1]).$$

El siguiente resultado es evidente.

**Proposición 5.7.1** Todo conjunto convexo en  $\mathbb{R}^N$  es conexo en  $\mathbb{R}^N$ .

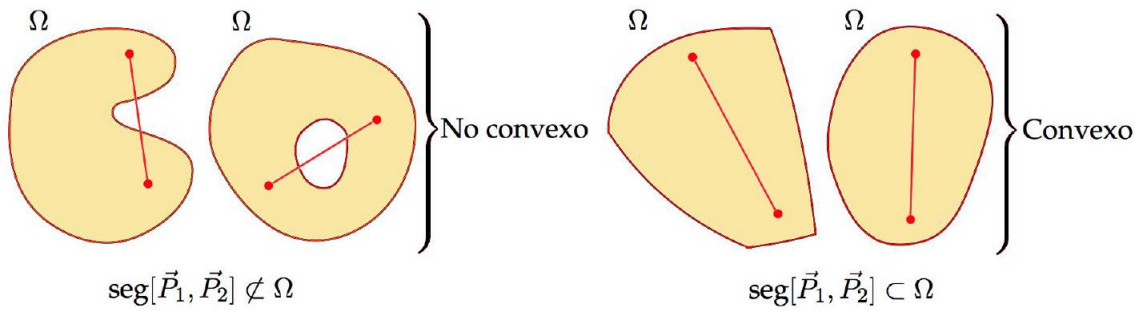


Figura 5.21: Conjuntos convexos y no convexos en  $\mathbb{R}^N$ . Es claro que si  $\Omega$  es convexo entonces también es conexo. Sin embargo, el recíproco no es siempre cierto.

## 5.7.2 Conjuntos simplemente conexos y múltiplemente conexos en $\mathbb{R}^2$

**Definición 5.31** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto y conexo en  $\mathbb{R}^2$ . Decimos que  $\Omega$  es simplemente conexo si para cada curva  $\gamma$  simple, cerrada y regular en  $\Omega$ , la región acotada encerrada por la curva  $\gamma$  queda totalmente contenida en  $\Omega$ . En caso contrario, decimos que  $\Omega$  es múltiplemente conexo.

El siguiente resultado permite ilustrar la definición previa.

**Proposición 5.7.2** Todo conjunto convexo en  $\mathbb{R}^2$  es simplemente conexo en  $\mathbb{R}^2$ .

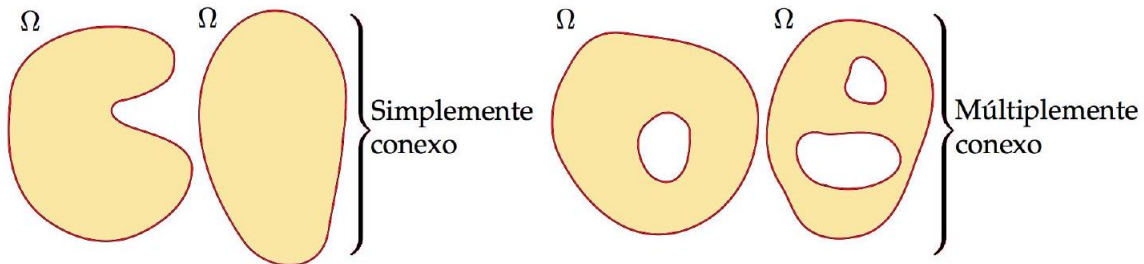


Figura 5.22: Conjuntos simplemente conexos y múltiplemente conexos en  $\mathbb{R}^2$ . Un conjunto múltiplemente conexo en  $\mathbb{R}^2$  posee agujeros (los cuales también pueden ser solo un punto o una línea).

## 5.7.3 El rotor y sus propiedades

**Definición 5.32** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial en  $\Omega$ .

- Si  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  y para  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$  existen  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$  para cada  $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ , entonces llamamos rotor de  $\mathbf{F}$  en  $\mathbf{x}$  al vector

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right).$$

- Si para cada  $\mathbf{x} \in \Omega$  existe  $\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , entonces llamamos rotor de  $\mathbf{F}$  en  $\Omega$  al campo vectorial  $\text{rot } \mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por

$$\mathbf{x} \mapsto \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right)$$

**Definición 5.33** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^3$ , sea

$$\mathfrak{G} = \{ \mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{F} \text{ es un campo vectorial en } \Omega : \exists \text{ rot } \mathbf{F} \text{ en } \Omega \}$$

y sea

$$\mathfrak{F} = \{ \mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{F} \text{ es un campo vectorial en } \Omega \}$$

Se define el operador rotor en  $\mathfrak{F}$ , como el operador diferencial  $\text{rot} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$  definido por

$$\mathbf{F} \mapsto \text{rot } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \hat{k}$$

**Observación:** (Notación) Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial tal que  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  y existen  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$  en  $\Omega$ . Entonces, podemos poner

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P, Q, R) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}. \end{aligned}$$

y el rotor de  $\mathbf{F}$  en  $(x, y, z) \in \Omega$ , como

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z), \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \right). \end{aligned}$$

**Definición 5.34** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial en  $\Omega$  tal que existe  $\text{rot } \mathbf{F}$ . Si

$$\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, 0) \text{ en } \Omega$$

entonces decimos que  $\mathbf{F}$  es irrotacional sobre  $\Omega$ .

**Teorema 5.10** (Propiedades del rotor de un campo escalar) Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$ , sean  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mathbf{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dos campos vectoriales que admiten rotor en  $\Omega$ , sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos números reales y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo escalar que admite gradiente en  $\Omega$ . Entonces se verifica que,

$$i) \text{ rot}(\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \text{ rot } \mathbf{F} + \beta \text{ rot } \mathbf{G}$$

$$ii) \text{ rot}(f \mathbf{F}) = f \text{ rot } \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$$

$$iii) \text{ Si } \nabla f \text{ admite rotor en } \Omega, \text{ entonces } \text{rot}(\nabla f) = (0, 0, 0) \text{ en } \Omega.$$

### Interpretación del rotor

**Observación:** Si un campo  $\mathbf{F}$  representa el flujo de ciertas partículas de un fluido, entonces el hecho que  $\text{rot}(\mathbf{F}) = 0$  físicamente significa que las partículas del fluido no rotan (son irrotacionales), es decir,



el fluido puede sufrir traslaciones y distorsiones, pero no posee remolinos. Informalmente, esto significa que si colocamos en el fluido una pequeña rueda con aspas, ésta se moverá en el fluido pero no girará alrededor de su eje.

**Ejemplo 5.30** El campo de velocidades

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{y\hat{i} - x\hat{j}}{x^2 + y^2}$$

es irrotacional. Una pequeña rueda con aspas moviéndose en el fluido no girará alrededor de su eje  $\omega$ .

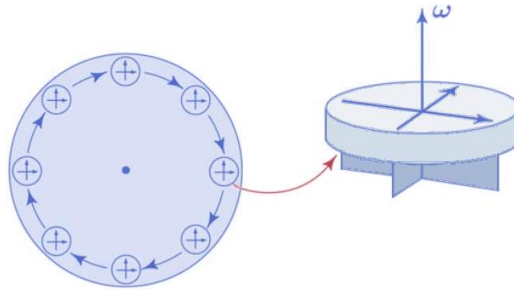


Figura 5.23: Una pequeña rueda con aspas moviéndose en el fluido no girará alrededor de su eje  $\omega$ .

**Ejemplo 5.31** El campo de velocidades

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\hat{i} - x\hat{j}$$

es rotacional. Una pequeña rueda con aspas moviéndose en el fluido girará alrededor de su eje  $\omega$ .

#### 5.7.4 Integral de línea de un campo vectorial independiente de la trayectoria

**Definición 5.35** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ , sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  un campo vectorial continuo. Decimos que la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{F}$  es independiente de la trayectoria en  $\Omega$  si para cualquier par de curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  seccionalmente simples y regulares contenidas en  $\Omega$ , cuyos puntos extremos son comunes, se verifica que

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2,$$

donde  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son parametrizaciones seccionalmente simples, regulares y suaves de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  respectivamente.

El teorema a continuación generaliza al [Teorema Fundamental del Cálculo](#), y es muy útil para el cálculo de integrales de línea de campos vectoriales que son gradientes de campos escalares; en cuyo caso, la integral del campo vectorial gradiente depende solamente de los valores extremos de la curva

evaluados en el respectivo campo escalar, obteniéndose un criterio para averiguar cuando una integral de trabajo es independiente de la trayectoria.

**Teorema 5.11** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ , sea  $\Omega$  un conjunto abierto, conexo y no vacío en  $\mathbb{R}^N$ , y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  en  $\Omega$ . Si  $\gamma$  es una curva simple, regular y suave en  $\Omega$  y  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una parametrización simple, regular y suave de  $\gamma$ , entonces

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

**Dem:** Sea  $\gamma$  una curva seccionalmente regular y suave en  $\Omega$  parametrizada por la función seccionalmente regular y suave  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Teniendo en cuenta el Teorema Fundamental del Cálculo y el hecho que  $f$  es de clase  $C^1$  en  $\Omega$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t))) dt \\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)). \end{aligned}$$

El teorema previo prueba que la integral de línea de un campo gradiente continuo es independiente de la trayectoria en  $\Omega$ , si  $\Omega$  es conexo, y, en particular, el valor de esta integral es cero si integramos sobre una curva cerrada contenida en  $\Omega$ . De esta manera, no nos interesa conocer con precisión cual es la curva  $\gamma$  (ni alguna parametrización  $\mathbf{r}$  de  $\gamma$ ), puesto que solo nos basta con saber cuál es el punto inicial y el punto terminal de la curva, a la cual le exigimos que sea seccionalmente regular y suave (para efectos de integrabilidad).

### Criterio para determinar independencia de la trayectoria

**Teorema 5.12** Sea  $N = 2$  o  $N = 3$ , sea  $\Omega$  un conjunto abierto, conexo y no vacío en  $\mathbb{R}^N$ , y sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  un campo vectorial continuo. Entonces, las siguientes tres propiedades son equivalentes:

- i) Existe una función potencial  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\mathbf{F}$ . Es decir,  $\mathbf{F}$  es conservativo.
- ii) Para cada curva  $\gamma$  cerrada seccionalmente simple, regular y suave en  $\Omega$  se verifica que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

- iii) Para cualquier par de curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  seccionalmente simples, regulares y suaves en  $\Omega$  tales que poseen extremos comunes, se verifica que

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2$$

donde  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son parametrizaciones seccionalmente simples, regulares y suaves de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  respectivamente.

**Dem:**

*i)  $\Rightarrow$  ii) Sea  $\gamma$  una curva cerrada, simple, regular y suave contenida en  $\Omega$  y asumamos que existe una función  $f$  de clase  $C^1$  en  $\Omega$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ , entonces*

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(\mathbf{r}(a)) - f(\mathbf{r}(b)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

*ii)  $\Rightarrow$  iii) Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos curvas simples, regulares y suaves en  $\Omega$  tales que poseen extremos comunes y asumamos que ii) se cumple. Sea  $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una parametrización simple, regular y suave de  $\gamma_1$  y  $\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una parametrización simple, regular y suave de  $\gamma_2$ , con  $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(c)$  y  $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(d)$ . Luego, como  $\gamma_2^-$  es la curva que invierte la orientación de  $\gamma_2$ , obtenemos que  $\gamma_1 + \gamma_2^-$  es una curva cerrada simple, regular y suave, y se verifica que*

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

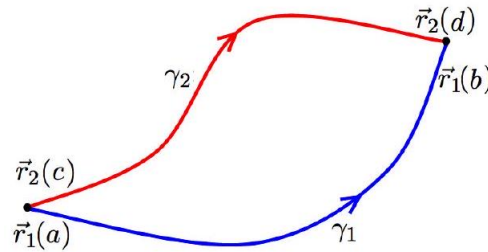


Figura 5.24: Curvas con mismo punto inicial y final.

Luego, si ponemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : [a, b + d - c] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t \rightarrow \mathbf{r}(t) &= \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ \mathbf{r}_2(-t + b + d) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c, \end{cases} \end{aligned}$$

obtenemos que  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b + d - c)$  y que  $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(d)$ . Así que  $\mathbf{r}$  es una parametrización simple, regular y suave de la curva  $\gamma_1 + \gamma_2^-$  y como estamos asumiendo que ii) se cumple, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{\gamma_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &= \int_{\gamma_1 + \gamma_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= 0. \end{aligned}$$

iii)  $\Rightarrow$  ii) Sea  $\gamma$  una curva cerrada, simple, regular y suave en  $\Omega$  y asumamos que iii) se cumple. Poniendo

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2^-$$

para algunas curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  simples, regulares y suaves tales que poseen extremos comunes verificando que la unión de sus trazas es igual a la traza de  $\gamma$ , desde iii) obtenemos que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

ii)  $\Rightarrow$  i) Queremos probar que

$$\exists f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{F} = \nabla f$$

bajo el supuesto que ii) se cumple.

Sea  $\mathbf{v}_0$  en  $\Omega$  fijo, pero escogido de manera arbitraria, y para cada  $\mathbf{v} \in \Omega$  consideremos  $\gamma(\mathbf{v}_0, \mathbf{v})$  una curva simple, regular y suave contenida en  $\Omega$  tal que su punto inicial es  $\mathbf{v}_0$  y su punto terminal es  $\mathbf{v}$ . Consideremos también  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una parametrización simple, regular y suave de  $\gamma(\mathbf{v}_0, \mathbf{v})$  tal que  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{r}(b) = \mathbf{v}$

Definamos  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\mathbf{w} \mapsto f(\mathbf{w}) = \int_{\gamma(\mathbf{v}_0, \mathbf{w})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

La definición de  $f$  es correcta pues ya hemos probado ii)  $\Leftrightarrow$  iii), de manera que da lo mismo cual es la curva  $\gamma$  simple, regular y suave contenida en  $\Omega$  que conecta  $\mathbf{v}_0$  con  $\mathbf{w}$ , así como también da lo mismo cual es su correspondiente parametrización  $\mathbf{r}$  simple, regular y suave. Debemos probar que

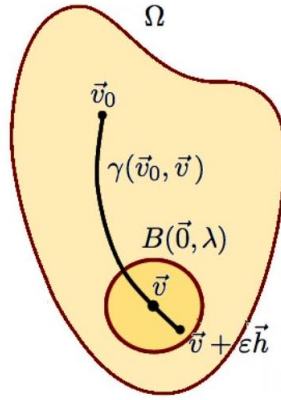
$$\nabla f(\mathbf{w}) = \mathbf{F}(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \Omega$$

Sea  $\lambda \in ]0, \text{dist}(\mathbf{v}_1, \partial\Omega)[$ , sea  $\mathbf{h} \in B(\mathbf{0}, 1)$  fijo, pero arbitrario y extendamos la curva  $\gamma(\mathbf{v}_0, \mathbf{v})$  por una curva simple, regular y suave  $\gamma(\mathbf{v}_0, \mathbf{v} + \lambda\mathbf{h})$  cuyo punto inicial es  $\mathbf{v}_0$  y cuyo punto terminal es  $\mathbf{v} + \lambda\mathbf{h}$ . Será suficiente probar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{h}) - f(\mathbf{v})}{\varepsilon} = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h}$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{h}) - f(\mathbf{v})}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_{\gamma(\mathbf{v}_0, \mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{h})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma(\mathbf{v}_0, \mathbf{v})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{h})} \overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$


Figura 5.25: Una vecindad sobre  $\gamma$ .

Pongamos ahora  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{h}$ , para  $t \in [0, \lambda]$ . Se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{h})} \vec{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{v} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} dt \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{v} + \xi \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} \end{aligned}$$

para alguna  $\xi \in [0, \varepsilon]$ , y como  $\xi \rightarrow 0^+$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  y  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial continuo, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{h}) - f(\mathbf{v})}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{h})} \vec{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{F}(\mathbf{v} + \xi \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h}. \end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que

$$\nabla f(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} \quad \forall \mathbf{v} \in \Omega, \forall \mathbf{h} \in B(\mathbf{0}, 1)$$

de donde se concluye que  $\nabla f = \mathbf{F}$  en  $\Omega$ .

**Proposición 5.7.3** Bajo las condiciones del Teorema 3.8.7, y asumiendo adicionalmente que  $\Omega$  es un conjunto convexo en  $\mathbb{R}^N$ , y que  $\mathbf{F}$  es de clase  $C^1$  en  $\Omega$ , entonces las afirmaciones i), ii) y iii) del Teorema 5.12 también equivalen a la siguiente afirmación:

iv) Para cada  $i, j = 1, \dots, N$  se tiene que  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ .

Si  $\mathbf{F} = (P, Q)$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un conjunto abierto, convexo y no vacío de  $\mathbb{R}^2$ , la condición iv) de la Proposición 5.7.3 se traduce en

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Si  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un conjunto abierto, convexo y no vacío de  $\mathbb{R}^3$ , la condición *iv*) de la Proposición 5.7.3 se traduce en

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

que a su vez equivale a

$$\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, 0) \quad \text{en } \Omega$$

Luego, bajo las hipótesis de la Proposición 5.7.3, en el caso  $N = 3$  la afirmación *iv*) de tal proposición equivale a

$$\mathbf{F} \text{ es irrotacional en } \Omega$$

**Ejemplo 5.32** Sea  $\Lambda$  un conjunto abierto y conexo en  $\mathbb{R}^2$  que contiene a la bola cerrada  $\overline{B((0,0),1)}$ , sea  $\Omega = \Lambda \setminus \{(0,0)\}$  y sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  el campo vectorial definido por

$$(x, y) \mapsto \mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Considerando  $\mathbf{F} = (P, Q)$  comprueba que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{en } \Omega$$

y que sin embargo  $\mathbf{F}$  no es conservativo.

**Sol:** Para cada  $(x, y) \in \Omega$  se verifica que

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Luego,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la circunferencia unitaria  $\gamma$  recorrida una vez en sentido antihorario, y consideremos la función vectorial  $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t),$$

que es una parametrización simple, cerrada, regular y suave de  $\gamma$ . Tenemos,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t)(-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Notemos que  $\Omega$  es un abierto conexo en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{F}$  es continuo en  $\Omega$ , por lo que el Teorema 5.12 es aplicable, y puesto que  $\gamma$  es una curva cerrada y regular para la cual ii) del Teorema 5.12 falla, concluimos que  $\mathbf{F}$  no es conservativo. Observemos que esto no contradice a la Proposición 5.7.3, pues aunque  $\mathbf{F}$  es  $C^1$  en  $\Omega$ ,  $\Omega$  no es convexo en  $\mathbb{R}^2$ , y por lo tanto la proposición no es aplicable.

### Ejercicio 5.12

1. Calcula la integral de línea

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz$$

2. Calcula la integral de línea

$$\int_{(a_1,b_1,c_1)}^{(a_2,b_2,c_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

donde  $(a_1, b_1, c_1)$  pertenece a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2$  y  $(a_2, b_2, c_2)$  pertenece a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2$ , con  $R_2 > R_1 > 0$ .

3. Considera el campo gravitacional

$$\mathbf{G}(\rho, \theta, \phi) = -\frac{mMg\hat{\rho}}{\rho^2} \quad \forall (\rho, \theta, \phi) \in ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi]$$

donde  $m$  es la masa de una partícula que es atraída por una masa  $M$  en el origen de  $\mathbb{R}^3$ ,  $g$  es una constante gravitacional, y  $\rho$  es la distancia al origen. Si  $M$  fuese la masa de la Tierra,  $\rho$  sería la distancia al centro de la Tierra y  $g$  sería la constante gravitacional de Newton. Muestra que  $\mathbf{G}$  es un campo vectorial conservativo.

4. Encuentra, si es posible, una función potencial para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 4 + 2y \sin x, 3xz^2 + 2) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

5. Muestra que

$$\int_{\gamma} (6x + 2y^2) dx + (4xy - z^2) dy - 2yz dz$$

es independiente de la trayectoria de cualquier curva  $\gamma$  seccionalmente regular y suave en  $\mathbb{R}^3$ , y determina su valor para una tal curva con punto inicial  $(1, 2, -1)$  y punto terminal  $(4, 0, 2)$ , de la siguiente forma:

- a) Determinando una función potencial,  
b) Determinando una poligonal de lados paralelos a los ejes coordenados.

6. Muestra que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y + 2, x^3 + 4y^3) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

es conservativo.

7. Muestra que todo campo vectorial conservativo de clase  $C^1$  es irrotacional. 8. Muestra que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

es irrotacional y que, sin embargo, no verifica que

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

donde  $\gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  en el plano  $xy$  recorrida en sentido antihorario. ¿Contradice esto al Teorema 5.12 y la Proposición 5.7.3? Justifica tu respuesta.

### 5.7.5 Teorema de Green

En esta sección enunciaremos un teorema que expresa una integral doble sobre una región  $D$  del plano cartesiano en términos de una integral de línea respecto de una curva cerrada  $\gamma$  que corresponde a la frontera  $\text{Fr}(D)$  de la región  $D$  recorrida en sentido antihorario.

**Teorema 5.13** (Teorema de Green para dominios simplemente conexos) Sea  $D$  una región en  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera  $\text{Fr}(D)$  es la traza de una curva simple, cerrada, suave y seccionalmente regular, sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $D \cup \text{Fr}(D) \subset \Omega$ , y sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $C^1$  tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j} = (P(x, y), Q(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Si  $\text{Fr}(D)$  es recorrida en sentido antihorario, entonces se verifica que

$$\oint_{\text{Fr}(D)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\text{Fr}(D)} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

**Ejemplo 5.33** Calcula

$$\oint_{\gamma} (x^2 + y^2) \, dx - xy \, dy$$

si  $\gamma$  representa los lados del cuadrado de vértices  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$  recorrido en sentido antihorario.



**Sol:** Pongamos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y) &= (P(x, y), Q(x, y)) \\ &= (x^2 + y^2, -xy).\end{aligned}$$

Claramente se trata de un campo vectorial de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$  y se verifica que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -y \quad y \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2y$$

de donde obtenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -3y$$

Por otro lado, la curva determinada por el cuadrado de vértices  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$  recorrido en sentido antihorario es una curva simple, cerrada, suave y seccionalmente regular. Luego, podemos aplicar el Teorema 5.13 de Green para dominios simplemente conexos. Obtenemos

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} (x^2 + y^2) dx - xy dy &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dy dx \\ &= -3 \left( \int_{-1}^0 \int_{-1-x}^{1-x} y dy dx + \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} y dy dx \right) \\ &= -\frac{3}{2} \left( \int_{-1}^0 ((x+1)^2 - (-(1+x))^2) dx + \int_0^1 ((1-x)^2 - (-(1-x))^2) dx \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

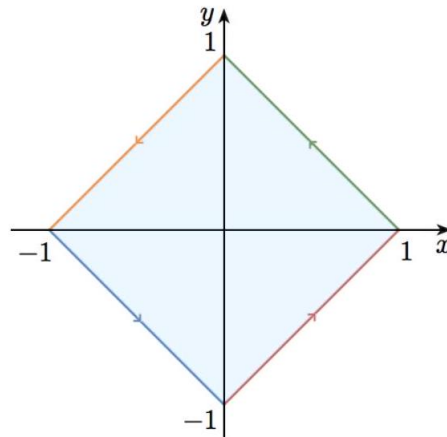


Figura 5.26: Región encerrada por los lados del cuadrado de vértices  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$  recorridos en sentido antihorario.

**Teorema 5.14** (Teorema de Green para dominios múltiplemente conexos) Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  una región cuya frontera  $\text{Fr}(D)$  está constituida por  $n + 1$  curvas simples, cerradas y seccionalmente regulares, a saber:  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , tales que:

- i) la región encerrada por  $\gamma$  incluye en su interior a cada  $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, n$ ,
- ii)  $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ,

iii) ninguna de las  $\gamma_i$  está contenida en la región encerrada por otra  $\gamma_j$ .

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un abierto tal que  $D \cup \text{Fr}(D) \subset \Omega$ , y  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j} = (P(x, y), Q(x, y))$$

y  $\text{Fr}(D)$  es recorrida en sentido antihorario, entonces

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

o bien

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} P dx + Q dy$$

### Observación:

- En el teorema anterior todas las curvas involucradas en las integrales están dadas en sentido antihorario; esto es:  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  están recorridas en el sentido antihorario usual.
- Recordemos que si  $\gamma$  es recorrida en sentido antihorario, entonces  $\gamma^-$  recorre a la traza de  $\gamma$  en sentido horario, comenzando en el punto terminal de  $\gamma$ . Luego, si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial continuo, y  $\mathbf{r}$  es una parametrización simple, regular y suave de la curva  $\gamma$  en el interior de  $\text{Dom}(\mathbf{F})$ , entonces se verifica que

$$\oint_{\gamma^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

### Ejemplo 5.34 Calcula

$$\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

si  $\gamma$  es una curva cerrada, simple, regular y suave, recorrida en sentido antihorario, y tal que el interior de la región encerrada por  $\gamma$  contiene al origen.

**Sol:** Notemos que

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

no es  $C^1$  en regiones que contienen al círculo unitario. Sin embargo,  $\mathbf{F}$  si es  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Luego, si a la región  $D_0$  encerrada por  $\gamma$  (recorrida en sentido antihorario) le quitamos el círculo  $B_\varepsilon$  de centro en el origen y radio  $\varepsilon$ , con  $0 < \varepsilon < 1$  (cuya frontera es la circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio  $\varepsilon$ , a la que asociamos la curva  $\gamma_\varepsilon$  que la recorre en sentido antihorario), entonces sobre la región  $D = D_0 \setminus B_\varepsilon$  es posible aplicar el Teorema 3.9.2 de Green para dominios múltiplemente conexos.

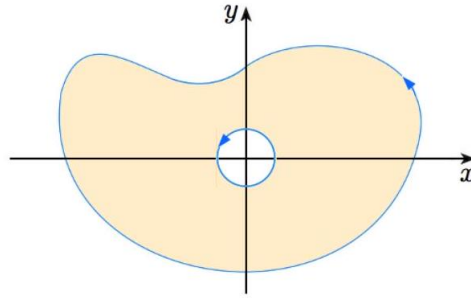


Figura 5.27: Región  $D = D_0 \setminus B_\varepsilon$ , donde  $D_0$  es una región que contiene al origen y está encerrada por la curva  $\gamma$  que es cerrada, simple, regular y suave, recorrida en sentido antihorario; y  $B_\varepsilon$  es el círculo de centro en el origen y radio  $\varepsilon$ , cuya frontera es recorrida en sentido antihorario.

Obtenemos

$$\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Ahora, como

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

se sigue que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{en } D$$

y sobre  $\gamma_\varepsilon$  se tiene que  $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ , así que

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{\gamma_\varepsilon} -y dx + x dy$$

Ahora, podemos concluir de dos formas diferentes:

**Primera forma.** Consideremos  $\mathbf{F}_1(x, y) = (-y, x)$  y parametrizamos  $\gamma_\varepsilon$  mediante la función vectorial  $\mathbf{r}(t) = (\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t)$ , con  $t \in [0, 2\pi]$  Luego,

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}(t)) = \varepsilon(-\sin t, \cos t) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \varepsilon(-\sin t, \cos t)$$

de donde

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_\varepsilon} -y dx + x dy &= \int_{\gamma_\varepsilon} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \varepsilon(-\sin t, \cos t) \cdot \varepsilon(-\sin t, \cos t) dt \\ &= \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= 2\varepsilon^2 \pi \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{\gamma_{\varepsilon}} -y dx + x dy = 2\pi.$$

**Segunda forma.** Consideremos  $\mathbf{F}_1(x, y) = (-y, x) = (P_1(x, y), Q_1(x, y))$  y usemos el Teorema 5.13 de Green para dominios simplemente conexos. Claramente

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 1$$

de donde obtenemos que

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = 2$$

Ahora, como  $B_{\varepsilon}$  el círculo encerrado por  $\gamma_{\varepsilon}$ , por el Teorema 5.13 de Green para dominios simplemente conexos obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_{\varepsilon}} -y dx + x dy &= \iint_{B_{\varepsilon}} \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) dA \\ &= 2 \iint_{B_{\varepsilon}} dA \\ &= 2\varepsilon^2 \pi, \end{aligned}$$

pues el área de  $B_{\varepsilon}$ , que es el círculo centrado en el origen y de radio  $\varepsilon$ , es  $\pi\varepsilon^2$ . Se sigue que

$$\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{\gamma_{\varepsilon}} -y dx + x dy = 2\pi.$$

**Ejercicio 5.13** 1. Calcula el trabajo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$  sobre la frontera de la superficie encerrada por las curvas  $y = x^2$  y  $x = y^2$ , recorrida en sentido antihorario. Verifica el Teorema 3.9.1.

2. Evalúa

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde  $\gamma$  es la elipse  $9x^2 + 4y^2 = 36$  recorrida en sentido antihorario, donde

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right)$$

3. Sea  $a > 0$ . Evalúa la integral de línea

$$\oint_{\gamma} \frac{-y dx + (x - a)dy}{(x - a)^2 + y^2}$$

sobre cualquier curva  $\gamma$  cerrada, simple, regular y suave recorrida en sentido antihorario de forma tal que

a) el punto  $(a, 0)$  no pertenece a la curva ni a la región que ella encierra

b) el punto  $(a, 0)$  pertenece a la región encerrada por la curva.

4. Sean  $a > 0$  y  $b > 0$ . Calcula el área de la región acotada limitada por la elipse  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
5. Sea  $a > 0$ . Halla el área de la región del primer cuadrante acotada por un arco de la cicloide  $\mathbf{r}(t) = (at - a \sin t, a - a \cos t), t \in [0, 2\pi]$ .

6. Calcula

$$\oint_{\gamma} e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy) dx + e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy) dy$$

donde  $\gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$ , recorrida en sentido antihorario.

7. a) Muestra que el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - 2xy^3) \hat{i} - 3x^2y^2 \hat{j}$  es un campo vectorial gradiente.

- b) Evalúa

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde  $\gamma$  es la curva de trayectoria  $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

---

## Índice alfabético

---

- Ángulo
  - entre vectores, 8
- Adherencia, 15
- Argumento
  - de una función, 9
- Base
  - canónica, 6
- Bola
  - abierta, 10
  - cerrada, 10
- Conjunto
  - $\mathbb{R}^n$ , 6
  - abierto, 10, 15
  - cerrado, 11, 15
  - de nivel, 9
  - vacío, 10
- conjuntos compactos, 15
- Continuidad
  - de una función, 10, 22
- Curva
  - de nivel, 9
- definida negativa, 61, 62
- definida positiva, 61, 62
- Derivado, 15
- Desigualdad
  - de Cauchy-Schwarz, 7
  - triangular, 8
- Espacio
  - vectorial, 6
  - $\mathbb{R}^n$ , 6
- Estructura geométrica
  - de  $\mathbb{R}^n$ , 6
- forma cuadrática, 61
- Frontera, 15
- Función
  - a valores en  $\mathbb{R}^m$ , 9
  - continua, 22
  - coordenada, 20
- Funciones
  - coordenadas, 9
- Geometría
  - de  $\mathbb{R}^n$ , 7
- Grafo
  - de una función, 9
- Homogeneidad, 8
- Imagen
  - por funciones, 9
- indefinida, 61
- Interior, 15
- Límite
  - de una función, 10, 17, 19
  - de una sucesión, 13
  - unicidad, 19
- Linealidad, 7
- Longitud
  - de un vector, 7
- Máximo
  - de una función, 2
- Mínimo
  - de una función, 2

matriz funcional de Jacobi, 45  
matriz Jacobiana, 45  
multiplicadores de Lagrange, 66

Norma, 7  
propiedades, 8

Positividad, 7, 8

Producto  
interno, 6  
propiedades, 7  
por escalar  
en  $\mathbb{R}^n$ , 6  
punto, 6

Punto  
adherente, 14  
aislado, 22  
de acumulación, 14  
frontera, 14  
interior, 14

puntos de silla, 61

recubrimiento abierto, 15

semidefinida negativa, 61, 62  
semidefinida positiva, 61, 62

Simetría, 7

Subsucesión, 12  
convergente, 12

Sucesión, 11  
convergente, 11, 12, 14  
de Cauchy, 14

Suma  
en  $\mathbb{R}^n$ , 6

Teorema  
de Bolzano-Weierstrass en  $\mathbb{R}$ , 1  
de Pitágoras, 8  
de Rolle en  $\mathbb{R}$ , 2  
del coseno, 8  
del valor intermedio en  $\mathbb{R}$ , 1  
del valor medio en  $\mathbb{R}$ , 3  
fundamental del cálculo ( $2^{do}$ ), 5  
fundamental del cálculo ( $1^{er}$ ), 3

Teorema Fundamental del Cálculo, 126

Topología  
de  $\mathbb{R}^n$ , 10

Vecindad, 23

Vectores  
ortogonales, 8