UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y ESTADÍSTICA

Introducción al Cálculo PMA-123
Listado de ejercicio resueltos

Cálculo de límites

1. Resuelve los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+x^2-8x-12}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}$

   b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4-x^3-x^2}{x^3-4x^2+5x}$

   Solución: a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+x^2-8x-12}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)\left(x^2-x-6\right)}{(x+2)\left(x^3+2x^2+x+2\right)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)\left(x^2+1\right)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+3}{x^2+1} = \dfrac{1}{5}$.

   Las descomposiciones factoriales se hacen dividiendo sucesivamente por $x+2$.

   b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x-2} = 12$.

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4-x^3-x^2}{x^3-4x^2+5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\left(3x^3-x^2-x\right)}{x\left(x^2-4x+5\right)} = \dfrac{0}{5} = 0$

2. Encuentre, en función de los valores de p, los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-px}{x^2-3x+2}$

   b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-p}$

   Solución:

   a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-px}{x^2-3x+2}$. Al tomar el límite uno observa que se tiene lo siguiente $\left[\frac{4-2p}{0}\right]$ (el denominador se está anulando). En consecuencia, si $p \neq 2$ el límite será infinito. Pero, si $p=2$, se tiene: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{2}{1} = 2$.

   b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-p}$. Al tomar el límite uno observa que se tiene lo siguiente $\left[\frac{0}{4-p}\right]$ (el numerador se anula y el denominador tiende a $4-p$). En consecuencia, si $p \neq 4$ el límite valdrá 0.

   Pero, si $p=4$, se tiene: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+2x+4}{x+2} = 3$.

3. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

   c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$

   Solución:

a) Es una indeterminación: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. Puede resolverse haciendo arreglos algebraicos a la función, multiplicando los términos de la expresión por el conjugado del numerador (un 1 conveniente). Así: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}-1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

b) Es similar al anterior. Para resolverlo hay que multiplicar por la expresión conjugada del denominador (un 1 conveniente).

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(4+x)-(4-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{2x} = \lim_{x\to 0}2(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}) = 2\cdot(2+2) = 8$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}-\left(\frac{x-2}{x}\right)}{\frac{x-2}{x}}(\text{ dividiendo numerador } y \text{ denominador por } x)$$
$$= \frac{\sqrt{1}-1}{1} = 0$$

6. Calcule

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+10x}{x^3-3x+4}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-4}{2x-5x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2}{x^2+12x}$

Solución: Mediante la comparación de grados los tres límites pueden hacerse directamente, resultando:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+10x}{x^3-3x+4} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-4}{2x-5x^2} = -\dfrac{3}{5}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2}{x^2+12x} = +\infty$.

4. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-5x+1}}{\sqrt{4x^2+3x}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{2x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x}{\sqrt{x^3+5x-3}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-5x+1}}{\sqrt{4x^2+3x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-5x+1}{4x^2+3x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{4x^2+3x}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{(2x-1)^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{4x^2-4x+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x}{\sqrt{x^3+5x-3}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3x^2+5x}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^3+5x-3}}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{x^3+5x-3}{x^4}}} = +\infty$.

5. A partir de la definición del número e, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, utilizando las propiedades de los límites, demuestre que:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{px} = e^p$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{px}\right)^{px} = e, p\neq 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{p}{x}\right)^{x} = e^p$

Solución:

a) Para demostrarlo se transforma la expresión inicial como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{px} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^p = e^p$$

b) Para demostrarlo puede hacerse $px = t$ y observar que si $x\to+\infty \Rightarrow t\to\infty$. Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{px}\right)^{px} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e$$

c) Para demostrarlo se transforma la expresión inicial como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{p}}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{p}}\right)^{\frac{x}{p}\cdot p} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{p}}\right)^{\frac{x}{p}}\right]^p = e^p$$

6. Aplicando los resultados anteriores calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{1/2} = e^{1/2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{(-4)}{x}\right)^{x} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{(-4)}}\right)^{\frac{x}{(-4)}}\right]^{(-4)} = e^{-4}$

7. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(\dfrac{x+2}{x^2+2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right)$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right) = \log\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)\right] = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right) = \log\left[\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)\right] = \log\dfrac{10}{4} = \log\dfrac{5}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log\left(\dfrac{x+2}{x^2+2}\right) = \log\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x^2+2}\right)\right] = -\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right) = \ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right)\right] = \ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x}{x+2}\right)} = \ln e^3 = 3.$

8. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{2}{x+1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \cos\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \tan\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{2}{x+1}\right) = \sin\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)\right] = \sin 0 = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \cos\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right) = \cos\left[\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)\right] = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$

9. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sin x+3}{x-2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \left(\dfrac{x}{\tan x}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sin x+3}{x-2}\right) = 0$. Note que $2 \leq \sin x + 3 \leq 4$.

b) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \left(\dfrac{x}{\tan x}\right) = \dfrac{\pi/4}{\tan(\pi/4)} = \dfrac{\pi}{4}.$

10. Encuentre el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{\frac{1}{x-2}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{\frac{x}{x+2}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3^x-9}{3^{x+1}}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{1/(x-2)}$, que no existe. En efecto (por límites laterales).

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 2^-} 3^{1/(x-2)} = 3^{\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}} = 0.$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 2^+} 3^{1/(x-2)} = 3^{\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}} = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{x/(x+2)} = 3^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)} = 3^1 = 3.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3^x-9}{3^{x+1}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3^x}{3^{x+1}} - \dfrac{9}{3^{x+1}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{9}{3^{x+1}}\right) = \dfrac{1}{3}.$

11. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x-3}{x-3}-\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x-3}-\dfrac{x^3+3}{x^2}\right)$

Solución: Surgen indeterminaciones del tipo $[\infty-\infty]$. Para transformarlas se hace la resta inicial.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2}\right)$
$=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{(x-2)^2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4x+4-4-3x+1}{(x-2)^2}$
$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2+x-3}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}1+\dfrac{x-3}{(x-2)^2}=-\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x-3}{x-3}-\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{(2x-3)(x+3)}{x^2-9}-\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x-3}-\dfrac{x^3+3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\left(x^2-1\right)x^2-\left(x^3+3\right)(x-3)}{x^3-3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3-x^2-3x+9}{x^3-3x^2}=$
3

12. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x})$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)$

Solución:

a)

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x})=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+2\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\qquad(\text{ multiplicando por } \sqrt{x}/\sqrt{x})$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x+2\sqrt{x}}{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

b)

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}}$
$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2+3x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$(extrayendo den numerador y denominador el x)
$=\dfrac{5}{2}.$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+4}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+4-x^2}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+4}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(-5x+4)}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-5x+4}+x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5+\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{5x+4}{x^2}}+1}=-\frac{5}{2}.$$

Continuidad

1. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

   a) $f(x)=x^3+8$
   b) $f(x)=\frac{x}{x^3+8}$
   c) $f(x)=\frac{x}{x^2-8}$
   d) $f(x)=\frac{x}{x^2+8}$
   e) $f(x)=\sqrt{x^3-8}$
   f) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$
   g) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$
   h) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$
   i) $f(x)=e^{x-2}$
   j) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$
   k) $f(x)=\log(5x-6)$
   l) $f(x)=\log\frac{1}{x^2+2}$
   m) $f(x)=\tan(2x)$
   n) $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$
   o) $f(x)=\cos(2x-1)$
   p) $f(x)=\frac{2-\sin(x)}{2+\cos(x)}$

   Solución: Las funciones dadas son continuas en todos los puntos de su dominio de definición. Por tanto, en los casos dados, hay que excluir los puntos en los que no están definidas, que son:

   a) $f(x)=x^3+8$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Los polinomios son funciones continuas siempre.

   b) $f(x)=\frac{x}{x^3+8}$ es continua en $\mathbb{R}-\{-2\}$. Puede observarse que en $x=-2$ se anula el denominador.

   Las funciones racionales son continuas siempre, menos en los ceros del denominador.

   c) $f(x)=\frac{x}{x^2-8}$ es continua en $\mathbb{R}-\{-\sqrt{8},\sqrt{8}\}$.

   d) $f(x)=\frac{x}{x^2+8}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pues está definida siempre (denominador en $\mathbb{R}^+$).

   e) $f(x)=\sqrt{x^3-8}$ es continua para todo $x\geq 2$.

   f) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pues está definida siempre.

   g) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pues está definida siempre.

   h) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$ es continua cuando $x^2-2x>0$; esto es cuando $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

   i) $f(x)=e^{x-2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pues está definida siempre.

   j) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

   k) $f(x)=\log(5x-6)$ es continua para todo $x>6/5$. Para valores de $x\leq 6/5$ la función no está definida.

   l) $f(x)=\log\frac{1}{x^2+2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pues está definida siempre.

   m) $f(x)=\tan 2x$ es continua para todo $x\neq\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$. Recuérdese que la tangente, $\tan\alpha$, no está definida cuando $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$. En este caso, $2x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$.

   n) $f(x)=\sin\frac{1}{x-1}$ es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$

   o) $f(x)=\cos(2x-1)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pues está definida siempre.

   p) $f(x)=\frac{2-\sin x}{2+\cos x}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pues está definida siempre.

2. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ x-1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ x-1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{si } x \leq 0 \\ x+1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{-1}{x-2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(2-x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:

Las funciones definidas a trozos son continuas cuando lo son en cada intervalo y, además, sus límites laterales son iguales en los puntos de cambio de definición.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ x-1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Cada función es continua en su intervalo de definición respectivo; pero es discontinua en $x = 1$, pues en ese punto los límites laterales no son iguales:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ x-1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$. En este caso, la función es continua en todo $\mathbb{R}$, pues en $x = 1$ los límites laterales coinciden.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(1-x^2\right) = 0$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{si } x \leq 0 \\ x+1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. La función está definida en todo $\mathbb{R}$. La única dificultad para su continuidad se da en $x = 0$.

Como los límites laterales coinciden, la función también es continua en $x = 0$.

En efecto:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = 1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1$.

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. La función está definida en todo $\mathbb{R}$. La función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ es discontinua en $x = 1$, pero ese punto está en el segundo "tramo".

En $x = 0$, los límites laterales valen:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x-1} = -1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0$. Como no coinciden, la función no es continua en $x = 0$.

e) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{-1}{x-2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$. La función no está definida en $x = 2$. Por tanto, en ese punto es discontinua.

El otro punto conflictivo es $x = 1$. Hay que estudiar los límites laterales.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1} = e^0 = 1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-1}{x-2} = 1$.

Como son iguales, la función es continua en $x = 1$.

f) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(2-x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$. La función no está definida para $x \geq 2$. Por tanto, sólo puede ser continua si $x < 2$. Por otra parte, en $x = 1$ puede presentar dificultad: hay que estudiar los límites laterales en ese punto.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) = 0$.

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln(2-x) = \ln 1 = 0$.

Como son iguales, la función es continua en $x = 1$.

3. Estudia la continuidad de la función ¿Si tuviese alguna discontinuidad evitable cómo podría evitarse?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^5-x^8}{1-x^6} & si \quad x\neq 1, x\neq -1 \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Solución: La función es continua cuando $1-x^6\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$ o $x\neq 1$. Además,

En $x=-1$, como $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$ no existe (use límites laterales), la discontinuidad no puede evitarse (es de salto infinito).

En $x=1$, como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5\left(1-x^3\right)}{(1+x^3)\,(1-x^3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5}{(1+x^3)}=\dfrac{1}{2}$. Por tanto, en $x=1$, la discontinuidad puede evitarse redefiniendo la función con $f(1)=\frac{1}{2}$.

4. Determina el tipo de discontinuidades que presenta la función dada por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8} & si \quad x\neq -8, x\neq 1 \\ 1 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Solución: Es continua cuando: $x^2+7x-8\neq 0 \Rightarrow x\neq \frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\begin{cases} -8 \\ 1\end{cases}$.

En $x=1$ existe el límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+7x-8}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+8)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+8}=\frac{2}{9}$$

Discontinuidad evitable. Luego se puede extender la función con $f(1)=\frac{2}{9}$.

En $x=-8$ la discontinuidad es inevitable, pues no existe el límite:

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2-1}{x^2+7x-8}=\nexists$$

(use límites laterales).

5. ¿Para qué valores de a es continua en $x=1$ la función $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\leq 1 \\ 2x+a, & \text{si } x>1\end{cases}$?

Solución: En el punto $x=1$ deben ser iguales los límites laterales.

Por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to a^-}x^2=1$$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+a)=2+a$

Como deben ser iguales: $1=2+a\Rightarrow a=-1$.

6. Determina los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases} \sin(x)-a & x<-\pi \\ \cos(x)+b & -\pi\leq x<0 \\ e^x-1 & x\geq 0\end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución: Hay que estudiar los límites laterales en los puntos $x=-\pi y x=0$. En cada caso esos límites deben ser iguales.

En $x=\pi$:

Límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to\pi^-}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\sin(x)-a=\sin(\pi)-a=-a$$

Límite por la derecha:

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \cos(x) + b = \cos(\pi) + b = -1 + b.$$

Como deben ser iguales: $-a = -1 + b \Rightarrow a = 1 - b$.

En $x = 0$:

Límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(x) + b = \cos(0) + b = 1 + b.$$

Límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 0$$

Como deben ser iguales: $1 + b = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 2$.

Luego, la función continua es: $f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 2 & x < -\pi \\ \cos(x) - 1 & -\pi \leq x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

7. Determina la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = |x - 1|$

b) $f(x) = \left|x^2 - 2x\right|$

Solución: Ambas funciones pueden definirse a trozos.

a) $f(x) = |x + 1| = \begin{cases} -(x+1), & \text{si } x < -1 \\ x + 1, & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$. El único punto conflictivo es $x = -1$.

Se estudian los límites laterales en $x = -1$.

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-(x+1)) = 0$, y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x+1) = 0$, se deduce que la función es continua en $x = -1$.

b) $f(x) = \left|x^2 - 2x\right| = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x, & \text{si } 0 < x < 2. \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Hay que estudiar lo que pasa en $x = 0$ y $x = 2$.

En ambos casos coinciden los límites laterales y, en consecuencia, la función es continua en todo $\mathbb{R}$. En efecto:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^2 - 2x\right) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(-x^2 + 2x\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(-x^2 + 2x\right) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(x^2 - 2x\right) = 0$$