Apuntes: Matemática para Data Science

Versión del 21 de junio de 2024

Víctor Andrés Osores Escalona
Departamento de Matemática, Física y Estadística
Universidad Católica del Maule, Chile

Índice general

Contents

CAPÍTULO 1

Matrices

1.1 Preliminares de matrices

Definición 1.1.1 **(Matriz)** *Sean* $m,\ n \in \mathbb{N}$ *y* $\mathbb{K}$ *un cuerpo* ($\mathbb{R}$, *ó* $\mathbb{C}$). *Se llama función Matricial sobre* $\mathbb{K}$ *a una función*

$$A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{K}, \quad (i, j) \to A(i, j).$$

Se designa por a_{ij} *al valor de* A *en el par* (i, j). *Se escribe:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o bien $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, *y se dice que* A *es una matriz de orden* $m \times n$. *También se escribe* $A = (a_{ij})$, *cuando está claro el número de filas y columnas de* A.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), entonces la matriz se dice real (compleja) o a valores reales (complejos). El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$, con elementos en $\mathbb{K}$, se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llama Matriz nula a la matriz A, tal que $a_{ij} = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y se denota por θ.

Definición 1.1.2 **(Igualdad de Matrices)** *Sean* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *dos matrices, entonces*

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

1.2 Operaciones con matrices

Definición 1.2.1 **(Suma de matrices)** *Sean* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *entonces la matriz suma* $A + B$ *es*

$$A + B = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall i = 1, \dots, m,\ \forall j = 1, \dots, n.$$

Definición 1.2.2 **(Multiplicación de matrices)** *Sean* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. *La matriz producto* $C = AB$ *es una matriz de* $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, *con*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Propiedades 1.2.1 **(Suma y producto de matrices)** *Para cualquier* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *se tiene:*

- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- $A + B = B + A$.
- $\exists \theta \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A + \theta = A$.
- $\exists (-A) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A + (-A) = \theta$.

Y para A, B, C *matrices de modo que los productos estén definidos, tenemos:*

- $(AB)C = A(BC)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $\exists A \neq \theta, B \neq \theta : AB = \theta$.

Ejemplo 1.2.1 **(En general el producto de matrices no es conmutativo)** *Basta considerar*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.2.2 **(Ejemplo de producto de Matrices)** *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

Entonces, solo el producto AB *es posible y en tal caso:*

$$AB = \begin{pmatrix} 27 & 55 & 31 \\ 17 & 49 & 36 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.2.3 **(Producto de un escalar por una matriz)** *Sea* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, *se define el producto* $\lambda A = B$, *por*

$$\lambda A = (b_{ij}) \ \text{con} \ b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Propiedades 1.2.2 $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$.
- $\alpha(AC) = (\alpha A)C = A(\alpha C), \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$.

Definición 1.2.4 **(Transpuesta de una matriz)** *Para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define la transpuesta de A como la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, donde*

$$A^t = (b_{ij}) \text{ con } b_{ij} = a_{ji},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m.$$

Propiedades 1.2.3 $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

- $(A^t)^t = A$.
- $(A+B)^t = A^t + B^t$.
- $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$.
- $(CD)^t = D^t C^t,\ \forall C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), D \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$.

Definición 1.2.5 **(Matrices cuadradas)** *Una matriz cuadrada de n filas y n columnas es una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se dice que una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es:*

Triangular superior *si $a_{ij} = 0$, para $i > j$.*

Triangular inferior *si $a_{ij} = 0$, para $i < j$.*

Diagonal *si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.*

Escalar *si es diagonal y $a_{ii} = \lambda$, para $1 \le i \le n$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Identidad *si es escalar y $a_{ii} = 1$, para $1 \le i \le n$.*

Simétrica *si $A^t = A$.*

Antisimétrica *si $A^t = -A$.*

Observaciones: Denotaremos la matriz Identidad de orden n como I_n y cuando no exista confusión la denotaremos por I, además

$$AI = IA = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Toda matriz cuadrada se puede descomponer como suma de una matriz simétrica con una antisimétrica.

1.3 Matrices invertibles

Definición 1.3.1 **(Matrices Invertibles)** *Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice invertible (o no singular) si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = I \wedge BA = I$, donde I denota la matriz identidad.*

La matriz B se llama inversa de A y se denota por A^{-1}.

Si A es invertible, entonces su inversa A^{-1} es única.

Si A y B son invertibles, entonces AB también lo es y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.3.1 Operaciones elementales

Definición 1.3.2 **(Operaciones Elementales sobre filas)** *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llaman operaciones elementales sobre filas sobre A a las siguientes operaciones.*

Intercambio de dos filas de A, la fila i con la fila j. Se escribe

$$f_{ij}, \;\; i, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Multiplicar una fila de A por un escalar α no nulo. Para la fila i se escribe $\alpha f_i, \;\; \alpha \in \mathbb{K}$.

Sumar un múltiplo escalar de una fila a otra. Si a la fila j se suma α veces la fila i, entonces se escribe $f_j + \alpha f_i, \;\; \alpha \in \mathbb{K}$.

Teorema 1.3.1 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y F una operación elemental sobre filas cualquiera, entonces*

$$F(A) = F(I)A.$$

Corolario 1.3.1 *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y F es una operación elemental sobre filas, entonces*

$$F(AB) = F(A)B.$$

Si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ son operaciones elementales de filas, entonces

$$(F_n \circ \cdots \circ F_2 \circ F_1)(AB) = (F_n \circ \cdots \circ F_2 \circ F_1(A))B.$$

Teorema 1.3.2 *Toda operación elemental sobre filas es invertible y su inversa es una operación elemental sobre filas del mismo tipo.*

Definición 1.3.3 **(Matrices equivalentes por filas)** *Dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se dicen equivalentes por filas si una se obtiene de la otra por aplicación de una o varias operaciones elementales sobre filas.*

Teorema 1.3.3 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es equivalente por filas con I, entonces A es invertible.*

Observaciones: 1.- Si A es invertible y $F_1, \dots, F_n$ son operaciones elementales sobre filas que permiten pasar de A a la matriz identidad I, entonces la matriz inversa A^{-1} se obtiene aplicando, en el mismo orden, las operaciones elementales $F_1, \dots, F_n$ a la matriz I.
2.- Para calcular A^{-1} se efectúan las operaciones elementales sobre filas en la matriz ampliada $(A|I)$ hasta obtener la matriz $(I|B)$. En tal caso $B = A^{-1}$.

Ejemplo 1.3.1 *Encuentre la inversa de la matriz A dada por,*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encuentre valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea invertible. Considere A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Notación: Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces designamos por $A_{ij} \in \mathcal{M}_{m-1\times n-1}(\mathbb{K})$ a la matriz obtenida de A eliminando la fila i y la columna j.

1.3.2 Determinante de una matriz

Definición 1.3.4 (**Determinante**) *Se llama Función determinante sobre $\mathbb{K}$ a la función*

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad A \to \det(A),$$

tal que

- *Si $n = 1$ y $A = (a)$, entonces $\det(A) = a$.*
- *Si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, entonces $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$, para cualquier $i = 1, 2, \dots, n$.*

También se escribe $\det(A) = |A|$.

Propiedades 1.3.1 *Para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se tiene.*

- *Si A tiene una fila nula, entonces $\det(A) = 0$.*
- *Si A es una matriz triangular, entonces $\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

- $\det(A^t) = \det(A)$.
- *Si F es una operación elemental sobre filas que intercambia dos filas de A, es decir, $B = F(A)$, entonces* $\det(B) = -\det(A)$.
- *Si F es una operación elemental sobre filas que multiplica una fila de A por un escalar α, es decir, $B = F(A)$, entonces* $\det(B) = \alpha \det(A)$.
- *Si F es una operación elemental sobre filas que suma un múltiplo escalar α de la fila i a la fila j, es decir, $B = F(A)$, entonces* $\det(B) = \det(A)$.
- *Si A tiene dos filas iguales, entonces* $\det(A) = 0$.
- *Si una fila de A es combinación lineal de otras filas de A, entonces* $\det(A) = 0$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Observación: Dado que $\det(A^t) = \det(A)$, se tiene que todas las propiedades indicadas también valen para las columnas.

Definición 1.3.5 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Se llama Menor de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz A_{ij}, es decir es el escalar $\det(A_{ij})$.
Se llama Cofactor de un elemento a_{ij} al escalar $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.
Si c_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} , entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \det(A), \quad \text{para cualquier} \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{kj} = 0, \quad k \neq i \quad \text{para cualquier} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ejemplo: Calcular $|A|$, donde la matriz A viene dada por

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.3.3 Matriz de cofactores y matriz adjunta

Definición 1.3.6 (**Matriz de cofactores**) *Se llama Matriz de cofactores de la matriz A a la matriz que contiene los cofactores de cada elemento a_{ij}. Se escribe* $\mathrm{cof}(A) = A^c$.

Definición 1.3.7 (**Matriz Adjunta**) *Se llama Matriz Adjunta de la matriz A a la matriz transpuesta de la matriz de cofactores. Se escribe* $\mathrm{adj}(A) = (A^c)^t$.

Teorema 1.3.4 *A es inversible sí y sólo sí* $\det(A) \neq 0$.

Teorema 1.3.5 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\det(A) \neq 0$, entonces*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A).$$

Definición 1.3.8 (**Rango de una matriz**) *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llama rango de A al orden de la mayor submatriz cuadrada de A con determinante no nulo. Se escribe $r(A)$.*

Observaciones:
1.- Si A y B son equivalentes por filas, entonces $r(A) = r(B)$.
2.- Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se dice escalonada por filas si el primer elemento no nulo de cada fila de A está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior. El número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente por filas con A es igual a $r(A)$.

Ejemplo 1.3.2 *Muestre que existe A^{-1} y encuentrela. Siendo A,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Encuentre el rango de la matriz B dada por,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

1.4 Ejercicios

1. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule AB, BA y $(AC^2 - I)$.
   b) Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales:
   i) $-2X + C = B$, ii) $(A - \frac{2}{3}X)^t = 2C$, iii) $2C + X = B^2$.

2. Considere las siguientes definiciones:
   i) M se dice antisimétrica si $M^t = -M$, ii) M se dice ortogonal si $M^{-1} = M^t$.
   Demuestre las siguientes proposiciones:

   a) Si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^t$ es una matriz simétrica y $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.
   b) Toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.
   c) Las matrices AA^t y A^tA son simétricas.
   d) Si A y B son matrices ortogonales, entonces AB es una matriz ortogonal.
   e) Si A es una matriz simétrica y H es una matriz ortogonal, entonces $H^{-1}AH$ es una matriz simétrica.
   f) Si $A \in M_{n\times n}$ es simétrica y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$, entonces B^tAB es una matriz simétrica.

3. Calcule la inversa de las siguientes matrices, donde $a \in \mathbb{R}$.

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

   d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcule los números reales a y b, tales que: $A^2 + aA + bI = \theta$.
   b) De la ecuación anterior calcule una expresión para la inversa de A.
   c) Usando la expresión obtenida en (b) calcule la inversa de A.
   d) Compruebe el resultado obtenido.

5. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que A^tA es invertible, y sea $B = I - A(A^tA)^{-1}A^t$.

   a) Pruebe que $B^2 = B$.
   b) Muestre que $BA = \theta$.
   c) Pruebe que B es una matriz simétrica.

CAPÍTULO 2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.1 Preliminares

Definición 2.1.1 (**Sistema lineal de ecuaciones**) *Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas en $\mathbb{K}$ es un conjunto de m ecuaciones lineales en que cada una tiene a lo más n incógnitas, esto es,*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \tag{2.1.1}$$

donde, para $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ son los coeficientes del sistema, $b_i \in \mathbb{K}$ son los términos independientes del sistema y $x_1, \ldots, x_n$ son las incógnitas del sistema.
Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, entonces el sistema se dice homogéneo, en caso contrario se dice no homogéneo.

El sistema (2.1.1) se puede escribir de la siguiente forma,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

lo que da por resultado la ecuación matricial,

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Definición 2.1.2 *Decimos que la n-upla $(y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{K}^n (= M_{n\times 1}(\mathbb{K}))$ es una solución del sistema (2.1.1), si al reemplazar ordenadamente cada x_i por y_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$, se satisfacen simultáneamente las m igualdades del sistema (2.1.1). Llamaremos conjunto solución del sistema (2.1.1), al conjunto formado por todas las soluciones del sistema.*

Definición 2.1.3 *El sistema* (2.1.1) *se dice:*

i) **Incompatible**, *si no tiene solución.*

ii) **Compatible determinado**, *si tiene única solución.*

iii) **Compatible indeterminado**, *si tiene más de una solución.*

Definición 2.1.4 (**Matriz ampliada del sistema**) *Dado el sistema* (2.1.1), $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *llamaremos matriz ampliada del sistema a la matriz* $(A|\boldsymbol{b})$ *de orden* $m \times (n+1)$

Teorema 2.1.1 (**Existencia de soluciones**) *El sistema* (2.1.1) *es compatible si y sólo si* $r(A) = r(A|\boldsymbol{b})$.

Teorema 2.1.2 (**Unicidad de soluciones**) *Supongamos que el sistema* (2.1.1) *de* m *ecuaciones y* n *incógnitas es compatible y que* $r(A) = n$. *Entonces la solución del sistema es única.*

Teorema 2.1.3 (**Multiplicidad de soluciones**) *Si el sistema* (2.1.1) *es compatible y* $r =: r(A) < n$, *entonces a lo más* r *incógnitas se expresan en términos de las* $n - r$ *restantes.*

Observaciones:

i) Consideremos el sistema (2.1.1), $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Si F representa a cualquiera de las tres operaciones elementales por filas, entonces $F(A)\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{b})$.

ii) Si $(A|\boldsymbol{b})$ es equivalente por filas a la matriz $(A_1|\boldsymbol{b}_1)$, entonces el sistema $A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$, es compatible si y sólo si el sistema (2.1.1) es compatible. En este caso, el conjunto solución de ambos sistemas es el mismo.

iii) El método en donde se obtiene $(C|\boldsymbol{c})$ (equivalente por filas con $(A|\boldsymbol{b})$) escalonada por filas se denomina eliminación Gaussiana.

iv) Un caso particular de lo anterior es la sucesión de operaciones elementales que transforman la matriz A en la matriz identidad. Aplicando las mismas operaciones a la matriz ampliada se obtiene el **Método de eliminación de Gauss-Jordan**.

v) Notar que el sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \theta$ siempre tiene solución. Además el sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \theta$ tiene solución no nula si y sólo si $r(A) < n$ (n es el número de incógnitas del sistema).

Ejercicio 2.1 *Muestre que el siguiente sistema de ecuaciones tiene única solución. Encuentrela,*

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 3 \\ -x1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ 5x_1 - 6x_3 & = & -1 \end{array}\right\}$$

Definición 2.1.5 (**Sistemas de Cramer**) *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, con $|A| \neq 0$, entonces la matriz A es invertible y el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, de n ecuaciones y n incógnitas, tiene solución única*

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Recordando que $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{adj}(A) = \dfrac{1}{|A|}(c_{ij})^t_{1\leq i,j\leq n}$, obtenemos la regla de Cramer.

Definición 2.1.6 (**Regla de Cramer**) *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con $|A| \neq 0$, entonces la única solución del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es*

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t, \quad \textit{con} \quad x_i = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} c_{ki}b_k, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Observación: Notar que para $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

donde A_i es la matriz de orden n, obtenida de la matriz A en que la columna i-ésima de A es reemplazada por los elementos de B.

Ejercicio 2.2 *Resuelva usando la regla de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales,*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y - z & = & 0 \\ 3x + y - z & = & 2 \\ 4x - 2y + z & = & 2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.3 (Interpolación polinomial) *Determine el polinomio cuadrático que interpola los puntos en el plano $(1, 3)$, $(2, 4)$ y $(3, 7)$.*

Ejercicio 2.4 *Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales,*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + \lambda y + z & = & 1 \\ -2x - y + z & = & 3 \\ -x + y + \lambda z & = & \lambda \end{array}\right.$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Detrermine todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene:

a) Única solución.

b) Infinitas soluciones.

c) no tiene solución.

Ejercicio 2.5 (Problema de valores y vectores propios de una matriz) *Considere la matriz A dada por,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ tenga solución no trivial (valores propios de A).

b) Resuelva el sistema $(A + 4I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (Espacio propio asociado al valor propio -4).

2.2 Factorización LU

Si la matriz A es tal que la etapa de eliminación del M.E.G. se puede llevar a cabo (es decir si todos los pivotes $a_{ii}^{(i)} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$), entonces

$$A = LU,$$

donde:

- U es la **matriz triangular superior que resulta del proceso de eliminación** y
- L es la **matriz triangular inferior de los multiplicadores** m_{ij}:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Veremos a continuación como resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante el proceso de factorización LU.

- Si $A = LU$, entonces

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff L(U\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff \begin{cases} L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \\ U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}. \end{cases}$$

  Por lo tanto, resolver un sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es equivalente a:

  1. Resolver $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ y, luego,
  2. resolver $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

- Factorizar la matriz $A = LU$ consiste simplemente en: **triangularizar A por eliminación gaussiana** y **almacenar la matriz triangular L de multiplicadores**.

Ejemplo 2.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{m_{21}=-2\\ m_{31}=4}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{m_{32}=3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$U := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Resuelva...

Ejercicio 2.6 *Use factorización LU de A para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 & = & 2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 & = & -4 \\ -12x_1 + 8x_2 + 21x_3 - 8x_4 & = & 8 \\ -6x_1 - 10x_3 + 7x_4 & = & -43 \end{array} \right.$$

Obs: El algoritmo de eliminación gaussiana (o el de factorización LU) sólo puede llevarse a cabo **si todos los pivotes son no nulos:**

$$a_{kk}^{(k)} \neq 0.$$

Note que el sistema de ecuaciones lineales siguiente tiene matriz no singular pues su determinante es 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo el algoritmo (M.E.G) no puede aplicarse pues $a_{11} = 0$ y, por lo tanto, $m_{21} = a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ y $m_{31} = a_{31}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ no están definidos.

Para resolver el sistema, debe **intercambiarse la primera ecuación con cualquiera de las otras de manera de evitar el pivote cero**. Por ejemplo, asi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, puede demostrarse que la **estabilidad** del método de eliminación gaussiana en cuanto a **propagación de errores de redondeo** se deteriora si los multiplicadores m_{ij} son números muy grandes en módulo.
Una forma de evitar ambos inconvenientes, pivotes nulos y multiplicadores grandes en módulo, es realizar en cada paso el intercambio de ecuaciones que produzca el pivote mayor posible en módulo. Esto estrategia se denomina **pivoteo parcial**.

Estrategia de pivoteo parcial:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

- En el paso k-ésimo se revisa el vector
$$\begin{pmatrix} a_{kk}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{nk}^{(k)} \end{pmatrix}$$
y se busca la fila l en la que aparece la entrada mayor en módulo:
$$k \leq l \leq n : \left| a_{lk}^{(k)} \right| = \max_{k \leq i \leq n} \left\{ \left| a_{ik}^{(k)} \right| \right\}.$$
- Luego, si $l \neq k$, se intercambia esa fila con la k-ésima.
- Si la matriz es no singular, siempre habrá una entrada no nula en ese vector, por lo que así se evitan los pivotes nulos.
- Además, despues del intercambio, $\left| a_{kk}^{(k)} \right| \geq \left| a_{ik}^{(k)} \right|$, $i = k, \ldots, n$. Por lo tanto, los multiplicadores no pueden pasar de 1 en módulo:
$$|m_{ik}| = \left| a_{ik}^{(k)} \right| / \left| a_{kk}^{(k)} \right| \leq 1, \qquad i = k, \ldots, n.$$
- Si hay intercambios de filas, las matrices triangulares L y U que se obtienen por el **método de eliminación gaussiana con estrategia de pivoteo parcial**, ya no factorizan a $\boldsymbol{A}$, sino que factorizan a la matriz que se obtiene después de aplicar a A todos los intercambios de filas que tuvieron lugar.

Definición 2.2.1 *Se llama* **matriz de permutación** *a toda matriz que se obtenga intercambiado filas de* $\boldsymbol{I}$.

Por ejemplo, las siguientes son todas las matrices de permutación 3×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que los intercambios de filas de una matriz se obtienen **multiplicando a izquierda** por una matriz de permutación. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.2.1 *Si A es una matriz no singular, entonces existen matrices no singulares L triangular inferior y U triangular superior y una matriz de permutación P, tales que*

$$LU = PA.$$

Estas matrices pueden obtenerse mediante el **método de eliminación gaussiana con estrategia de pivoteo parcial**.

- Si se debe resolver un sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, se procede así:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \iff L(U\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{b} \iff \begin{cases} L\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{b}, \\ U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}. \end{cases}$$

- El método de eliminación gaussiana con estrategia de pivoteo parcial resulta **estable respecto a la propagación de errores de redondeo**.

2.3 Sistemas rectangulares: Solución en el sentido de mínimos cuadrados

Considere un sistema rectangular de ecuaciones

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $n < m$, es una matriz rectangular de m filas y n columnas y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Este problema, en general, no tiene solución: **sistema sobredeterminado**.

Una alternativa es buscar una solución en el siguiente sentido generalizado:

Hallar $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2$ sea **mínima**.

Definición 2.3.1 *El vector $\boldsymbol{x}$ que minimiza $\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2$ es la* **solución en el sentido de mínimos cuadrados** *del sistema rectangular.*

En general:

$$A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{b}.$$

2.3.1 Aplicación

Dado un conjunto de puntos

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m),$$

nos proponemos encontrar el polinomio

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1},$$

con $n < m$ que esté **más cerca** de estos puntos en el sentido que

$$\sum_{i=1}^{m} |p(x_i) - y_i|^2,$$

sea mínima.

Esta suma de cuadrados es el cuadrado de la norma del residuo del sistema rectangular:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \ldots & x_m^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.3.1 *Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n} (m \geq n)$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Un vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ minimiza la norma del residuo $\|\boldsymbol{r}\|_2 = \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2$ si y sólo si el residuo $\boldsymbol{r}$ es ortogonal a la imagen de A; esto es si*

$$A^t \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0},$$

donde A^t es la matriz transpuesta de A.

En consecuencia, $\boldsymbol{x}$ debe satisfacer

$$A^t \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad A^t(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad A^t A\boldsymbol{x} = A^t \boldsymbol{b}.$$

Estas últimas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones normales**.

Obs:

1. En el caso en que $m = n$ y que la matriz A sea una matriz no singular, entonces las ecuaciones normales entregan como solución la solución del sistema lineal $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

2. Las ecuaciones normales tienen solución única si y sólo si todas las columnas de A son l.i.; es decir, si $rango(A) = n$.

3. En este caso, además, la matriz A^tA es **simétrica y definida positiva**, de donde, las ecuaciones normales tienen solución única.

Para resolver las ecuaciones normales se puede proceder del siguiente modo:

1. Calcular la matriz A^tA y el vector $A^t\boldsymbol{b}$.

2. Obtener la matriz L de la factorización de Cholesky: $A^tA = LL^t$.

3. Resolver el sistema triangular inferior $L\boldsymbol{y} = A^t\boldsymbol{b}$.

4. Resolver el sistema triangular superior $L^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Ejemplo 2.3.1 *Ajustar los siguientes datos a un polinomio de grado 2 en el sentido de mínimos cuadrados.*

x	*f(x)*
-3	*14*
-1	*4*
1	*2*
3	*8*
5	*22*
7	*44*

2.4 Ejercicios

1. En cada caso calcule $\det(A)$ y $\det(A^{-1})$. ¿Existe A^{-1}?. En caso que exista, encuentrela.

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, b)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, c)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Para las siguientes matrices A y B, pruebe que $\det(A) = \det(B)$ sin calcular los valores de los determinantes.

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -a & -g & -d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 20 \\ 1 & 1 & 8 \\ 4 & 3 & 17 \end{pmatrix}$

4. Calcule, si es que existen, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales las matrices siguientes tienen inversa

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, b) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -k \\ 2 & 6 & -2k \\ 1 & 3 & 1+k \end{pmatrix}, c) \quad C = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

5. Calcule el rango de las siguientes matrices

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Para cada matriz dada determine su inversa si existe, usando operaciones elementales y matriz adjunta.

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Decida si los sistemas que siguen son incompatibles o compatibles. En el último caso, decida si son determinados o indeterminados y encuentre la solución.

$$a) \left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 8 \\ 3x & - & y & = & 4 \end{array}\right\}, \qquad b) \left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ x & + & 3y & = & 8 \\ 2x & + & 2y & = & 10 \end{array}\right\},$$

$$c) \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

8. Muestre que el siguiente sistema es compatible determinado y encuentre su solución por los método de Cramer y usando operaciones elementales (escalonando):

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & & & & & = & -10 \\ x_1 & - & 3x2 & & & + & x_4 & = & -4 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 9 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -15 \end{array}\right\}.$$

¿Qué método le tomó más tiempo?

9. Determine el o los valores de p y q tales que el sistema: i) No tenga solución. ii) Tenga una única solución. iii) Tenga infinitas soluciones.

$$a)\ \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & & & + & pz & = & q \end{array}\right\}, \qquad b)\ \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & q \\ 2x & - & y & + & z & = & p \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right\}.$$

10. Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente posea solución no trivial:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & \alpha x & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

11. Determine los valores que debe tomar el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & (1-\lambda)y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & c \end{array}\right\}$$

En el caso en que el sistema no sea determinado, determine las condiciones que debe satisfacer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para que el sistema sea compatible indeterminado.

CAPÍTULO 3

Vectores en $\mathbb{R}^3$

3.1 Vectores en el espacio

Algunas cantidades físicas como la longitud y la masa quedan perfectamente determinadas por su magnitud. Tales cantidades se llaman *escalares*, sin embargo para otras como la fuerza y la velocidad, se necesita especificar ademas su dirección y sentido, éstas se llaman *vectoriales*.

Se acostumbra representar un vector mediante un segmento de recta dirigido cuya dirección representa la dirección del vector y cuya longitud en términos de alguna unidad representa su magnitud.

En este capítulo presentaremos un estudio detallado de los vectores en el espacio.

El sistema coordenado rectangular tridimensional consta de tres rectas reales mutuamente perpendiculares. Tales rectas se llaman ejes coordenados y su intersección común se llama origen del sistema.

El sistema así definido establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y las ternas ordenadas (x, y, z) de números reales.

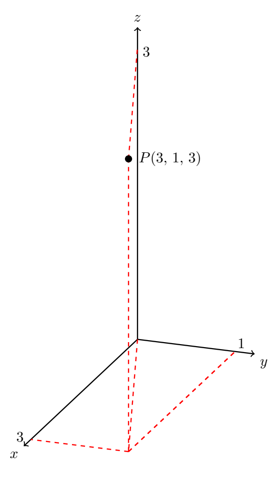


Figura 3.1: Punto en el espacio

Al origen del sistema le corresponde la terna $(0, 0, 0)$. A la terna $(3, 1, 3)$ le corresponde el punto P que muestra la Fig. 3.1.

Los planos xy, yz, zx se llaman *Planos Coordenados* y dividen al espacio en ocho regiones llamadas *Octantes*. El octante cuyos puntos tienen sus tres coordenadas positivas se llama Primer octante, pero no se ha convenido una numeración para los otros siete.

Definición 3.1.1 (**Distancia entre puntos**) *Sean $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos del espacio. La distancia entre P y Q está dada por:*

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Propiedades 3.1.1

1. *$PQ = 0$ si y sólo si $P = Q$.*
2. *$PQ \geq 0$, cualquiera sean los puntos P y Q.*
3. *$PQ = QP$.*
4. *$PQ \leq PR + RQ$, cualquiera sea el punto R.*

Definición 3.1.2 (**Vector**) *Llamaremos vector en el espacio a toda terna ordenada de números reales (a_1, a_2, a_3). El vector asociado con el segmento de recta cuyo punto inicial es $P(x_1, y_1, z_1)$ y cuyo punto terminal es $Q(x_2, y_2, z_2)$ se denota por*

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \vec{a}.$$

Es usual denotar los vectores con letras minúsculas con una flecha para distinguirlos de las cantidades escalares.

Ejemplo 3.1.1 *Si $P(-8, 9, 1)$ y $Q(0, 3, -2)$, entonces:*

1. $\overrightarrow{PQ} = (8, -6, -3)$.
2. $\overrightarrow{QP} = (-8, 6, 3)$.

Si $A(4, 3, 1)$, entonces:

1. $\overrightarrow{OA} = (4, 3, 1)$.

Observación: Los vectores asociados a segmentos de rectas en los que el punto inicial no es el origen del sistema se llaman *vectores libres*.

Definición 3.1.3 (**Igualdad y suma de vectores y producto por escalar**) *Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Diremos que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales si y sólo si:*

$$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge a_3 = b_3.$$

2. *Se define la suma $\vec{a} + \vec{b}$ y el producto por escalar $\alpha\vec{a}$ de la siguiente manera:*

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

Ejemplo 3.1.2 1. *Sean $\vec{a} = (1, 2, -1)$ y $\vec{b} = (3, 4, 1)$, entonces:*
$\vec{a} + \vec{b} = (4, 6, 0)$
$2\vec{a} = (2, 4, -2)$
$-3\vec{b} = (-9, -12, -3)$

2. *Si $\vec{u} = (3, a + 4, b)$ y $\vec{v} = (a + b, 5, 2)$. ¿Cuales son los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que $\vec{u} = \vec{v}$?.*

Observaciones:

1. Geométricamente el vector $\vec{a} + \vec{b}$ es la diagonal del paralelógramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como se muestra en la Fig. 3.2

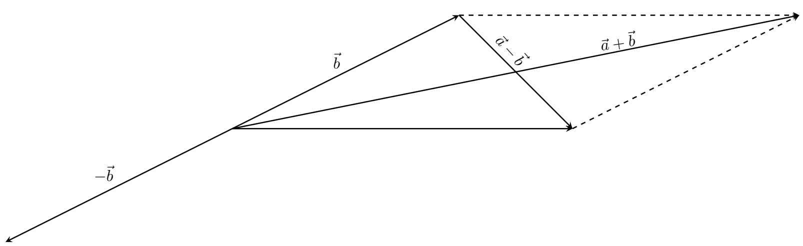


Figura 3.2: Suma y resta de vectores

2. Si $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces
$$-\vec{b} = (-1)\vec{b} = (-b_1, -b_2, -b_3)$$

3. Todo vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se puede considerar como el vector de origen en el punto $Q(0, 0, 0)$ y extremo en el punto $P(a_1, a_2, a_3)$ (ver Fig. 3.3).

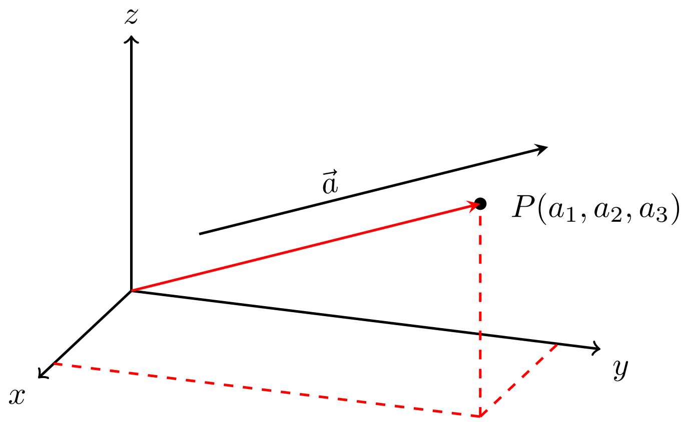


Figura 3.3:

4. Se define la **diferencia** de los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (en ese orden) como el vector
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3).$$

Definición 3.1.4 (**Norma o magnitud**) *Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un vector. Llamaremos norma o magnitud del vector $\vec{a}$ al número real no negativo*

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Todo vector de norma 1 se llama **vector unitario**. En el espacio hay tres vectores unitarios especiales que se denotan en forma especial, éstos son:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \qquad \vec{j} = (0, 1, 0), \qquad \vec{k} = (0, 0, 1),$$

de donde es claro que $||\vec{i}|| = 1$, $||\vec{j}|| = 1$, $||\vec{k}|| = 1$.

Todo vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se puede escribir:

$$\begin{aligned}\vec{a} =&(a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)\\ =&a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)\\ =&a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_k\vec{k}.\end{aligned}$$

Los vectores $a_1\vec{i}$, $a_2\vec{j}$, $a_k\vec{k}$ se llaman **componentes** del vector $\vec{a}$ y tienen la dirección de los ejes coordenados (ver Fig. 3.4).

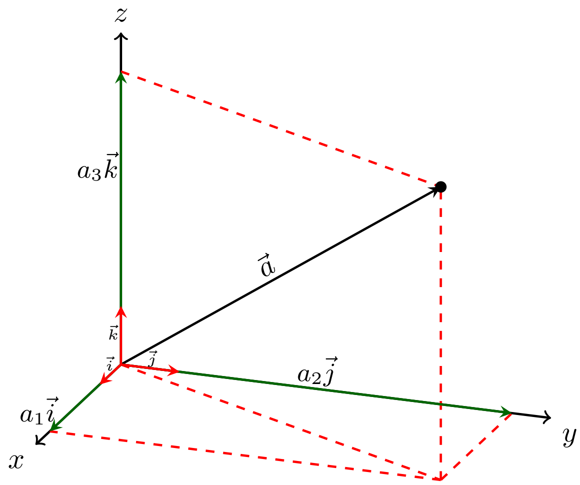


Figura 3.4:

Teorema 3.1.1 *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ dos vectores y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tiene:*

1. $\|\vec{a}\| = \|-\vec{a}\|$.
2. $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{b} - \vec{a}\|$.
3. $\|\vec{a}\| = 0$ *si y sólo si* $\vec{a} = (0, 0, 0) = \theta$.
4. $\|\alpha\vec{a}\| = |\alpha| \ \|\vec{a}\|$.
5. *Si* $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ *con* $\|\vec{a}\| \neq 0$, *entonces* $\|\vec{u}\| = 1$.

Demostración: Para 3). Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, luego

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\| = 0 \ &\Leftrightarrow \ \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \vec{a} = \theta. \end{aligned}$$

Para 5). Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Si $\|\vec{a}\| \neq 0$, entonces $1/\|\vec{a}\| \in \mathbb{R}$. Luego

$$\|\vec{u}\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\right\| = \left|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\right| \|\vec{a}\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\| = 1.$$

Las demás demostraciones se dejan al lector.

Observación: El vector unitario que se define en 5) se llama **dirección** $\vec{a}$. El vector nulo θ no tiene dirección definida.

Definición 3.1.5 (**vectores paralelos**) *Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si y sólo si existe un número real α tal que $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.*

Ejemplo 3.1.3 *Los vectores* $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ *y* $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ *son paralelos pues*

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k} = 2(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 2\vec{b}.$$

Definición 3.1.6 (**Producto escalar o producto punto**) *Sean* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *dos vectores. Se define el* **Producto escalar** *o* **producto punto** *de* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *como el número,*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Teorema 3.1.2 *Sea* φ *el menor ángulo formado por los vectores* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. *Entonces*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||cos(\varphi).$$

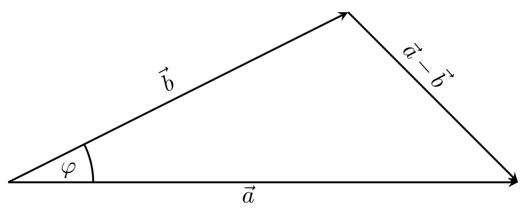


Figura 3.5: Teorema del coseno.

Demostración: Aplicando el teorema del coseno (ver Fig. 3.5), tenemos que

$$||\vec{a} - \vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 - 2||\vec{a}||\ ||\vec{b}||cos(\varphi).$$

Luego,

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2||\vec{a}||\ ||\vec{b}||cos(\varphi),$$

desarrollando el primer miembro y simplificando se tiene,

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2||\vec{a}||\ ||\vec{b}||cos(\varphi),$$

es decir

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||cos(\varphi).$$

Con lo cual se obtiene lo esperado,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||cos(\varphi).$$

Corolario 3.1.1 *Dos vectores no nulos* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *son perpendiculares si y sólo si* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. *Además*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = ||\vec{a}||^2.$$

Ejemplo 3.1.4 1. *Sean* $\vec{a} = (-1, 2, -3)$ *y* $\vec{b} = (1, 3, 2)$*, entonces,*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1)(1) + (2)(3) + (-3)(2) = -1$$

2. *Si* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ *y* $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$*, entonces*

$$cos(\varphi) = \frac{2+1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

así, el menor ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *es* $\varphi = \pi/4$.

3. *Los vectores* $\vec{a} = (-4, 5, 7)$ *y* $\vec{b} = (1, -2, 2)$ *son perpendiculares. En efecto, ambos son no nulos y además:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Observaciones:

1. Es fácil verificar que si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, entonces

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = a_1 = \vec{i} \cdot \vec{a}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{j} = a_2 = \vec{j} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{k} = a_3 = \vec{k} \cdot \vec{a}.$$

2. Notemos además que,

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

Definición 3.1.7 (**Ángulos directores**) *Sea* $\vec{a}$ *un vector no nulo. Los ángulos* α, β, γ *que forma con los ejes coordenados se llaman* **ángulos directores** *de* $\vec{a}$ *(ver Fig 3.6).*

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{||\vec{a}||\,||\vec{i}||} = \frac{a_1}{||\vec{a}||}, \qquad cos(\beta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{||\vec{a}||\,||\vec{j}||} = \frac{a_2}{||\vec{a}||}, \qquad cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{||\vec{a}||\,||\vec{k}||} = \frac{a_3}{||\vec{a}||}.$$

Además,

$$\vec{a} = ||\vec{a}||(cos(\alpha)\vec{i} + cos(\beta)\vec{j} + cos(\gamma)\vec{k}).$$

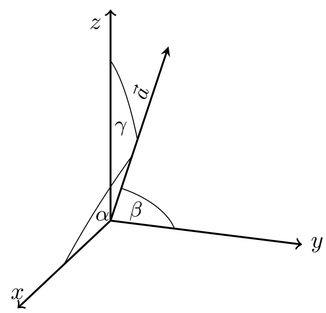


Figura 3.6: Ángulos directores.

Ejemplo 3.1.5 *Si* $\vec{a} = 1\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, *entonces los cosenos directores de* $\vec{a}$ *son,*

$$cos(\alpha) = \frac{1}{3}, \qquad cos(\beta) = \frac{-2}{3}, \qquad cos(\gamma) = \frac{2}{3}.$$

Definición 3.1.8 (**Proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$**) *Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos. Se llama* **proyección** *de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ al vector,*

$$proy_{\vec{a}}\, \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}||^2}\, \vec{a}$$

Ejemplo 3.1.6 *Si* $\vec{a} = (3, -1, -2)$ *y* $\vec{b} = (2, -3, 1/2)$, *entonces*

$$proy_{\vec{a}}\, \vec{b} = \frac{12}{7}\vec{i} - \frac{4}{7}\vec{j} - \frac{8}{7}\vec{k}.$$

Propiedades 3.1.2 (**Propiedades del producto punto**) *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tienen las siguientes propiedades,*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
3. $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b})$

Demostración: Para 3). Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} =& (\alpha a_1)b_1 + (\alpha a_2)b_2 + (\alpha a_3)b_3 \\
=& a_1(\alpha b_1) + a_2(\alpha b_2) + a_3(\alpha b_3) \\
=& \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) \\
\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) =& \alpha(a_1b_1) + \alpha(a_2b_2) + \alpha(a_3b_3) \\
=& (\alpha a_1)b_1 + (\alpha a_2)b_2 + (\alpha a_3)b_3 \\
=& \alpha\vec{a} \cdot \vec{b}.
\end{aligned}$$

Las otras demostraciones se dejan al lector.

Definición 3.1.9 (**Producto vectorial o producto cruz**) *Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores. Se llama* **producto vectorial** *o* **producto cruz** *de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (en ese orden) al vector,*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

ó

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Propiedades 3.1.3 (**Propiedades del producto vectorial**) *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tienen las siguientes propiedades,*

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. $\vec{a} \times \vec{a} = \theta$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4. $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$

Demostración: Para 2). Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, luego

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right) = \theta.$$

Para 3). Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, luego

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \end{aligned}$$

Las otras demostraciones se dejan al lector.

Ejemplo 3.1.7 1. *Sean $\vec{a} = 2\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Calcular $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{b} \times \vec{a}$.*

2. *Calcular* $\vec{i} \times \vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k}$ *y* $\vec{k} \times \vec{i}$.

3. *Calcular* $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{k})$, $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{k}$ *y note que en general* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Teorema 3.1.3 *Sean* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *dos vectores no nulos en* $\mathbb{R}$. *Se tiene que,*

1. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \wedge \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.

2. *Si* φ *es el menor ángulo entre* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *entonces,*

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||\, ||\vec{b}|| sin(\varphi)$$

Demostración: Para ii). Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$, luego

$$\begin{aligned}
||\vec{a} \times \vec{b}||^2 =& (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
=& a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 \\
& + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
=& (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
=& ||\vec{a}||^2\, ||b||^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\
=& ||\vec{a}||^2\, ||b||^2 - (||\vec{a}||\, ||\vec{b}|| cos(\varphi))^2 \\
=& ||\vec{a}||^2\, ||b||^2 sin^2(\varphi)
\end{aligned}$$

Así, como $0 \leq \varphi \leq \pi$, entonces $sin(\varphi) \geq 0$

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||\, ||b|| sin(\varphi).$$

Corolario 3.1.2 *Dos vectores no nulos* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *son paralelos si y sólo si* $\vec{a} \times \vec{b} = \theta$.

Observaciones:

1. Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos lados de un triángulo, entonces el área A del triángulo está dada por,
$$A = \frac{1}{2}||\vec{a} \times \vec{b}||.$$

2. $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ejemplo 3.1.8 1. *Sean* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ *y* $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. *Calcular un vector unitario ortogonal a* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$.

2. *Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos* $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, -1)$ *y* $C(-1, 1, 2)$.

Definición 3.1.10 *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores. Los productos $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ y $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ se llaman* **producto escalar triple** *y los productos de la forma $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ y $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ se llaman* **producto vectorial triple**.

Teorema 3.1.4 *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores no nulos.*

1. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$
3. $|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|$ *es el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.*

Demostración: Para 2). Sean $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, y $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$ luego

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\right)\\
&= a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\\
&= a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)\\
&= c_1(a_2b_3-a_3b_2)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\\
&= \vec{c}\cdot\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)\\
&= \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\\
&= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}
\end{aligned}$$

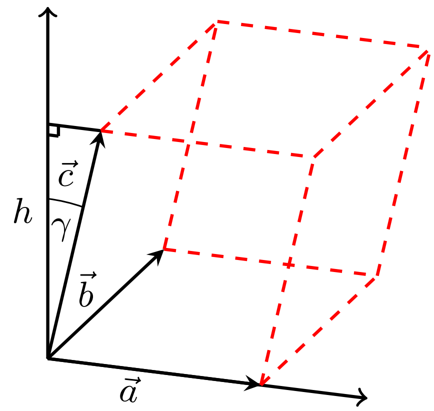


Figura 3.7: $|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|$ volumen del paralelepípedo.

Para 3). Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ luego basta notar que

$$\begin{aligned} h = \|proy_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\| &= \left\| \frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2}(\vec{a}\times\vec{b}) \right\| \\ &= \left| \frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2} \right| \|\vec{a}\times\vec{b}\| \\ &= \frac{|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|} \end{aligned}$$

Así

$$V = h\|\vec{a}\times\vec{b}\| = |\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|.$$

3.1.1 Listado 3

1. Encuentre un vector que tenga norma 3 y que sea perpendicular a $(1, -4, 0)$ y $(2, 0, -7)$.

2. Sean $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$ y $\vec{w} = (-2, 1, 1)$. **(En práctica)**

   a) Calcule $2\vec{u}\cdot\vec{v}$, $-\vec{v}\times\vec{u}$, $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$.

   b) Encuentre un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ (si existe) tal que,

      i) sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$,

      ii) $\|\vec{x} - \vec{u}\| = \|\vec{x} - \vec{v}\|$ y $\|\vec{x}\| = 1$,

      iii) sea paralelo al vector $\vec{u} - \vec{v}$ y perpendicular $\vec{a} - \vec{w}$.

3. Sean $\vec{a} = (1, -1, \alpha)$ y $\vec{b} = (-2, -\alpha, 4)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine un valor de α (si existe) tal que: **(En práctica)**

   i) $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{b}$,

   ii) $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$,

   iii) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ sea $(-6, -12, 12)$.

4. Sean $u = (-2, 1, -2)$ y $v = (1, -2, 1)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Encuentre un vector $\vec{w} = \vec{u} + \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\|\vec{w}\|$ tenga el menor valor posible.

5. Determine el lugar geométrico de los vectores que forman un ángulo de 30 grados con el vector $(1, 0, \sqrt{3})$. ¿Existe alguno de la forma $(\alpha, 8, \sqrt{3}\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$? Determínelo(s).

6. Determine un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tal que $\|\vec{x}\| = 4$ y los ángulos directores con respecto a los ejes X y Z sean 30 y 45 grados respectivamente. **(En práctica)**

7. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son perpendiculares y $\alpha \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $\vec{a}\cdot\vec{b} \neq 0$, entonces $\vec{x} = \dfrac{\vec{a}\times\vec{c} + \alpha\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ satisface las ecuaciones: $\vec{x}\cdot\vec{a} = \alpha$ y $\vec{x}\times\vec{b} = \vec{c}$. **(En práctica)**

8. Sean $\vec{a} = (0, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 0, 3)$ y $\vec{c} = (-1, 0, -2)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Pruebe que:

$$(\vec{x}\cdot\vec{a} = 0) \wedge (\vec{x}\cdot\vec{b} = 0) \wedge (\vec{x}\cdot\vec{c} = 0) \Rightarrow \vec{x} = (0, 0, 0).$$

9. Calcule el área del cuadrilatero cuyos vértices son los vectores: $(9, 10, 1)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 8, 6)$ y $(31, 21, -10)$.

(En práctica)

10. Determine el área del triángulo cuyo vértices son los puntos $(1, 0, -1)$, $(2, -2, 3)$ y $(7, -2, 4)$.

11. Sabiendo que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 1$ determine: **(En práctica)**

    a) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$.

    b) $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$.

CAPÍTULO 4

Conceptos básicos de Vectores en $\mathbb{R}^n$

4.1 Vectores en $\mathbb{R}^n$

Definición 4.1.1 *Llamamos vector de $\mathbb{R}^n$ a una lista ordenada de n números reales, la cual denotamos como*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Aquí x_k lo llamamos k-ésima componente del vector $\boldsymbol{x}$.

El vector nulo o vector cero en $\mathbb{R}^n$ viene dado por

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.1.1 *El vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector de $\mathbb{R}^4$ y su primera, segunda, tercera y cuarta componentes son 5, 10, -3 y 5, en ese orden.*

Los vectores

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores de $\mathbb{R}^n$. A estos vectores los llamamos vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.1.2 (Igualdad de vectores) *Dos vectores* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ *son iguales si y solo si* $x_i = y_i$ $\forall i \in 1, \ldots, n$. *Es decir,*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \forall i \in 1, \ldots, n.$$

Definición 4.1.3 *Dados* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ *y* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, *se define la suma de vectores por*

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

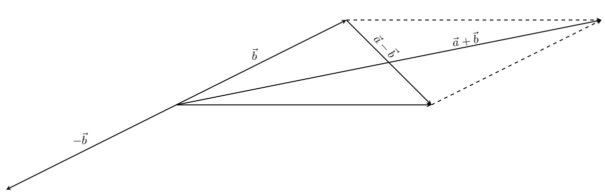
Definición 4.1.4 *Dados* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *se define el producto por escalar por*

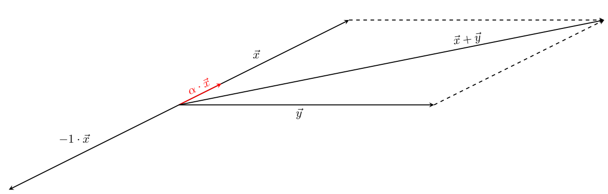
$$\lambda \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

Definición 4.1.5 *Se define la resta de vectores* $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ *por*

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}).$$

En la siguiente figura se muestra el significado gráfico de la suma, la resta, el producto por escalar de vectores.





Definición 4.1.6 *Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y sean α, β dos números reales. Entonces*

1. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ *(Ley clau. para +).*
2. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ *(Ley asoc. para +).*
3. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ *(Ley conm. para +).*
4. *Existe un único vector* $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}+\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}=0)$. *(Elemento neutro para la suma).*
5. *Para cada* $\boldsymbol{u}$, *existe un único vector* $-\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ *(Existencia del opuesto para suma).*
6. $\alpha\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *(Ley clausura para el producto por escalar).*
7. $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$ *(Ley dist. del producto por escalar resp +).*
8. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$ *(Ley dist. del producto por escalar respecto a + de escalares).*
9. $(\alpha\beta)\boldsymbol{u} = \alpha(\beta\boldsymbol{u}) = \beta(\alpha\boldsymbol{u})$ *(Ley asoc. respecto al producto por escalares).*
10. $\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, *si y solo si,* $\alpha = 0$ *ó* $\boldsymbol{u} = 0$.

Ejercicio 4.1

1. *Calcule* $(2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})-(5\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v})+7\boldsymbol{u}$.
2. *Determine el vector* $\boldsymbol{x}$ *tal que* $2\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{u}$.

Definición 4.1.7 *Diremos que dos vectores* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$ *son paralelos si y solo si* $\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{v}$, *para algún* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 4.1.8 (Combinación Lineal) *Dados* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, *al vector*

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k$$

lo llamamos combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. *A los escalares* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *los llamamos coeficientes de la combinación lineal.*

Ejercicio 4.2 *Sean* $\boldsymbol{u} = \binom{-1}{2}$ *y* $\boldsymbol{v} = \binom{2}{5}$ *y* $\boldsymbol{w} = \binom{3}{-2}$. *Calcule la combinación lineal de ellos dada por* $3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}$. *¿los vectores* $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *son combinaciones lineales de* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$?

Definición 4.1.9 (Conjunto Generado y Conjunto Generador) *Al conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ *lo representamos por*

$$V := \text{Gen}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} = \{\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k, \text{con}\, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

El conjunto V *es generado por el conjunto* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ *a este conjunto lo llamamos conjunto generador de* V.

El conjunto generado es único mientras que el conjunto generador NO es único.

Ejemplo 4.1.2 *El siguiente conjunto representa la solución de un sistema de ecuaciones lineales*

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 3r - s \\ r + 5s \\ r \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note que los elementos de V se escriben

$$\begin{pmatrix} 3r - s \\ r + 5s \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual indica que V está siendo generado por el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definición 4.1.10 (Conjunto l.i.) *Un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ es linealmente independiente si los únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tales que*

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$$

son todos cero.

Ejercicio 4.3 *Muestre que*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

es un conjunto l.i. y que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\},$$

es un conjunto l.d.

Note que todo conjunto de $\mathbb{R}^n$ que contenga al vector nulo es un conjunto l.d.

Definición 4.1.11 (Producto escalar) *Dados $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, definimos $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ el producto escalar entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, como el escalar dado por*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Ejercicio 4.4 *Dados* $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. *Calcule* $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$, $(3\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}, (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$ *y* $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$.

Teorema 4.1.1 *Sean* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces*

1. $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$ *(Ley conmutativa para* $\cdot$*)*
2. $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$. *(Distributividad de* $\cdot$ *respecto de* $+$*)*
3. $\alpha(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = (\alpha\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot(\alpha\boldsymbol{v})$.
4. $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, *si y solo si,* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Note que no tiene sentido la prop. asociativa para $\cdot$.

Definición 4.1.12

1. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v}$ *es* **ortogonal** *a* $\boldsymbol{w}$ *si* $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0$.
2. *un subconjunto* $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un* **conjunto ortogonal** *si* $\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j = 0 \quad \forall i \neq j$.
3. *un subconjunto* $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto* **ortonormal** *si es un conjunto ortogonal y* $\|\boldsymbol{v}_i\| = 1 \quad \forall i = \{1, \ldots, n\}$.

Ejercicio 4.5 *Encuentre* α *y* β *de forma que los vectores*

$$\begin{pmatrix}1\\-\alpha\\2\\3\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}4\\5\\-2\beta\\7\end{pmatrix}$$

sean ortogonales.

Definición 4.1.13 (Norma) *Definimos la norma de un vector* $\boldsymbol{u}$ *de* $\mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|$, *como*

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}.$$

Ejercicio 4.6 *Dados* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$. *Calcule* $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$ *y* $\|\boldsymbol{w}\|$.

Teorema 4.1.2 *Dados los vectores* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tenemos que*

(a) $\|\lambda\boldsymbol{u}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{u}\|$

(b) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$

(c) $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$

(d) $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$ *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*
La igualdad se obtiene, si y solo si, $\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{v}$ para algún $\lambda\in\mathbb{R}$.

(e) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ *(Desigualdad triangular).*
La igualdad se cumple, si y solo si, $\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{v}$ con $\lambda\geq 0$.

Demostración: *Para todo $t\in\mathbb{R}$ tenemos que $\|t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2\geq 0$*

$$\begin{aligned} 0 \leq \|t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 &= (t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \\ &= t^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) + t(2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = p(t) \end{aligned}$$

donde $p(t)=at^2+bt+c$ es un polinomio cuadrático con $a=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$, $b=2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ y $c=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$.

Como $a\geq 0$, la gráfica de $p(t)$ es una parábola cóncava hacía arriba con vértice en el semiplano superior. Recordando que el vértice de $p(t)$ es $\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$ entonces

$$0 \leq c - \frac{b^2}{4a} = \|\boldsymbol{v}\|^2 - \frac{4(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2}{4\|\boldsymbol{u}\|^2}$$

Además, si $\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{v}$ entonces

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| = |\lambda\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}| = \left|\lambda\right|\left|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right| = |\lambda\left|\|\boldsymbol{v}\|^2 = \right|\lambda\left|\right|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{v}\| \\ = \|\lambda\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|. \end{aligned}$$

Obs: 1. La distancia euclidiana entre dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$.

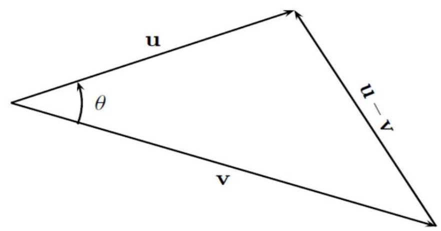
2. Cuando $\|\boldsymbol{w}\|=1$, se dice que $\boldsymbol{w}$ es un vector unitario.

Ejercicio 4.7 *1. Halle la distancia entre* $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Halle el vector unitario en la dirección $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Definición 4.1.14 (Ángulo entre vectores) *Dados los vectores no nulos $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$, definimos el ángulo determinado por $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ como el menor giro positivo.*

Dados dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ no nulos, siempre podemos construir un triángulo como el de la siguiente figura



Al aplicar el Teorema del Coseno a este triángulo, se obtiene

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$$
$$\|\boldsymbol{u}\|^2 - 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$$

Entonces $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$.

Ejercicio 4.8 *Sean* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Calcule el ángulo entre ellos.*

Definición 4.1.15 (Proyección ortogonal) *Si $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, definimos la proyección ortogonal de $\boldsymbol{v}$ sobre $\boldsymbol{u}$ como el vector*

$$\mathrm{proy}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{v} = \left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\right)\boldsymbol{u}$$

Llamamos a $\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{v} - \mathrm{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ es ortogonal a $\boldsymbol{u}$.

Ejercicio 4.9 *Halle* $\mathrm{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ *y la componente vectorial de $\boldsymbol{v}$ ortogonal a $\boldsymbol{u}$ (esto es $\boldsymbol{v}_c$), para cada uno de los siguientes casos:*

(a) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *y* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{u} = e_1$ *y* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

A continuación se introduce el producto cruz, producto únicamente definido para vectores en $\mathbb{R}^3$.

Definición 4.1.16 (**Producto vectorial o producto cruz**) *Sean* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

dos vectores. Se llama **producto vectorial** *o* **producto cruz** *de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (en ese orden) al vector,*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

ó

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Propiedades 4.1.1 (**Propiedades del producto vectorial**) *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\alpha\in\mathbb{R}$. Se tienen las siguientes propiedades,*

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$
2. $\vec{a}\times\vec{a}=\theta$
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
4. $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$

Demostración: Para 2). Sea $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$, luego

$$\vec{a}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right)=\theta.$$

Para 3). Sea $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ y $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$, luego

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})&=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix}\\ &=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1+c_1 & b_3+c_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1+c_1 & b_2+c_2\end{vmatrix}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\right)\\ &=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.\end{aligned}$$

Las otras demostraciones se dejan al lector.

Ejemplo 4.1.3 1. *Sean $\vec{a}=2\vec{i}-1\vec{j}+3\vec{k}$ y $\vec{b}=-\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$. Calcular $\vec{a}\times\vec{b}$ y $\vec{b}\times\vec{a}$.*

2. *Calcular $\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{k}$ y $\vec{k}\times\vec{i}$.*

3. *Calcular $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{k})$, $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{k}$ y note que en general $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.*

Teorema 4.1.3 *Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos en $\mathbb{R}$. Se tiene que,*

1. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \wedge \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$
2. *Si φ es el menor ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ entonces,*
$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||sin(\varphi)$$

Demostración: Para ii). Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$, luego

$$\begin{aligned}
||\vec{a} \times \vec{b}||^2 =&(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2\\
=&a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3\\
&+ a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2\\
=&(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2\\
=&||\vec{a}||^2\,||b||^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2\\
=&||\vec{a}||^2\,||b||^2 - (||\vec{a}||\,||\vec{b}||cos(\varphi))^2\\
=&||\vec{a}||^2\,||b||^2 sin^2(\varphi)
\end{aligned}$$

Así, como $0 \leq \varphi \leq \pi$, entonces $sin(\varphi) \geq 0$

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||\,||b||sin(\varphi).$$

Corolario 4.1.1 *Dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si y sólo si $\vec{a} \times \vec{b} = \theta$.*

Observaciones:

1. Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos lados de un triángulo, entonces el área A del triángulo está dada por,
$$A = \frac{1}{2}||\vec{a} \times \vec{b}||.$$
2. $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ejemplo 4.1.4 1. *Sean $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Calcular un vector unitario ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.*

2. *Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, -1)$ y $C(-1, 1, 2)$.*

Definición 4.1.17 *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores. Los productos $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ y $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ se llaman* **producto escalar triple** *y los productos de la forma $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ y $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ se llaman* **producto vectorial triple**.

Teorema 4.1.4 *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores no nulos.*

1. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
3. $|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$ *es el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.*

Demostración: Para 2). Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ luego

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1) \\
&= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= \vec{c} \cdot \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\
&= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

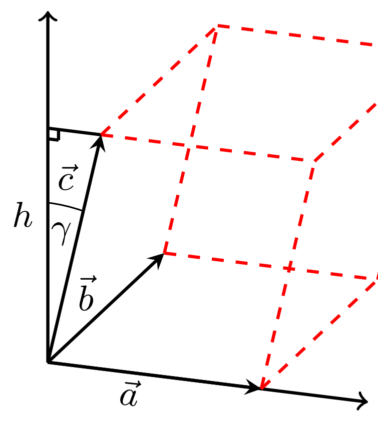


Figura 4.1: $|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$ volumen del paralelepípedo.

Para 3). Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ luego basta notar que

$$\begin{aligned}
h = \|proy_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}\| &= \left\| \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2} (\vec{a} \times \vec{b}) \right\| \\
&= \left| \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2} \right| \|\vec{a} \times \vec{b}\| \\
&= \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}
\end{aligned}$$

Así

$$V = h\|\vec{a} \times \vec{b}\| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|.$$

4.1.1 Otras normas en $\mathbb{R}^n$

Como generalización de la norma Euclideana (la usada usualmente) o norma-2, están las normas-p, definidas también en $\mathbb{K}^n$, cuales vienen dadas por:

1. Norma-1: $\|\boldsymbol{v}\|_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|$.
2. Norma-infinito: $\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$.
3. Norma$-p$: $\|\boldsymbol{v}\|_p = (|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p)^{1/p}$.

Ejercicio 4.10 *Calcular las normas 1, 2 (euclidiana) e ∞ del vector $v = (3, 4, -12)$.*

En el siguiente gráfico podemos ver la diferencia entre las 3 normas más usuales en $\mathbb{R}^2$. En cada gráfico están representados todos los puntos con norma igual a 1 bajo la norma respectiva.

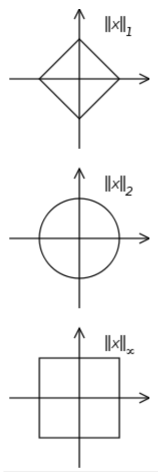


Figura 4.2: Gráfica de $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)||_p = 1\}$
con $p = 1, 2, \infty$.

CAPÍTULO 5

Rectas y Planos en $\mathbb{R}^3$

5.1 Rectas en el espacio

Consideremos una recta L en el espacio que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a un vector dado, no nulo, $\vec{r} = (a, b, c)$.

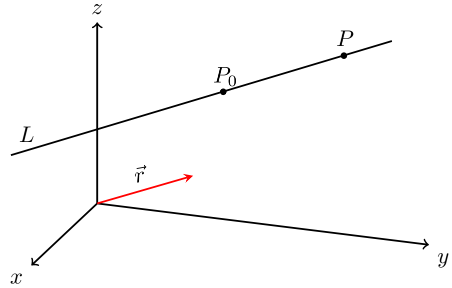


Figura 5.1: Recta que pasa por el punto P_0 y es paralela a $\vec{r}$.

Definición 5.1.1 (**Recta en el espacio**) *La recta L es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ del espacio para los cuales el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\vec{r}$. Esto es, $P \in L$ si y sólo si existe un escalar t tal que:*

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{r} \qquad \text{(Ecuación vectorial de la recta)}$$

Si $\vec{r} = (a, b, c)$ y $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, entonces

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc)$$

es decir

$$x - x_0 = ta, \qquad y - y_0 = tb, \qquad z - z_0 = tc$$

o bien

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

(**Ecuaciones paramétricas de la recta**)

Si a, b y c son no nulos, entonces eliminando el parámetro t se obtiene

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

(**Ecuaciones simétricas o cartesianas de la recta**)

Ejemplo 5.1.1 1. *Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto* $P(2, -9, -5)$ *y es paralela al vector* $\vec{r} = (0, 2, 3)$.

Solución:

$$L : \begin{cases} x = 2 \\ y = -9 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -5 + 3t \end{cases}$$

2. *Encontrar las ecuaciones simétricas de la recta que contiene los puntos* $P_1(4, -6, 5)$ *y* $P_2(2, -3, 0)$.

   Solución:

$$L : \frac{x - 4}{-2} = \frac{y + 6}{3} = \frac{5 - z}{5}.$$

3. *Considere la recta* L *cuyas ecuaciones paramétricas son*

$$L : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t, \quad\quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + t \end{cases}$$

   Determine un vector unitario paralelo a L *y dos puntos distintos de la recta.*

   Solución:

$$\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \left(\frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right)$$

   es un vector unitario paralelo a L.

   Para $t = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$. *Para* $t = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$. *Así* $A(2, 0, -1)$ *y* $B(-1, 1, 0)$ *son dos puntos diferentes de* L.

4. *Considere la recta* L *del ejemplo 3 y la recta* $L' : \frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{2} = z + 1$ *y decida si existe punto de intersección entre ellas.*

   Solución: No hay punto de intersección.

Definición 5.1.2 (**Rectas paralelas y perpendiculares**) *Sean* L_1 *y* L_2 *dos rectas.* $\vec{r}_1$ *vector director de* L_1 *y* $\vec{r}_2$ *vector director de* L_2.

a) L_1 *es* **paralela** *a* L_2 *si* $\vec{r}_1$ *es paralelo a* $\vec{r}_2$.

b) L_1 *es* **perpendicular** *a* L_2 *si* $\vec{r}_1$ *es perpendicular a* $\vec{r}_2$ *y* $L_1 \cap L_2 \neq \phi$.

Observación: Las rectas L y L' del ejemplo 4 no se intersectan y es fácil verificar que no son paralelas. Esta situación, que en el plano es imposible, ocurre a menudo en el espacio. Tales pares de rectas se dicen **alabeadas**.

Teorema 5.1.1 *Sea* L *una recta paralela al vector* $\vec{r}$ *y sea* A *un punto del espacio que no pertenece a* L*. La distancia del punto* A *a la recta* L *está dada por:*

$$d = \frac{\|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0 A}\|}{\|\vec{r}\|},$$

donde P_0 *es un punto cualquiera de la recta.*

Ejemplo 5.1.2

1. *Encontrar la distancia desde el punto* $A(1, 2 - 1)$ *a la recta* $L : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z-3}{2}$.

   Solución: $d = \dfrac{6\sqrt{13}}{\sqrt{14}}$.

2. *Encuentre la distancia entre las rectas*

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t, \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad L_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t, \\ z = -2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Solución: $d(L_1, L_2) = \sqrt{2}$.

5.2 Planos en el espacio

De la geometría clásica se sabe que existe un único plano que contiene un punto dado y es perpendicular a una recta dada. Sean $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo del espacio y sea $\vec{n} = (a, b, c)$ un vector dado no nulo. Un punto $P(x, y, z)$ del espacio pertenece al plano Π que contiene a P_0 y es perpendicular al vector $\vec{n}$ si y sólo si el vector $\overrightarrow{P_0 P}$ es perpendicular a $\vec{n}$. Esto es

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0 P} = 0 \qquad \textbf{(Ecuación vectorial del plano)}$$

Como $\vec{n} = (a, b, c)$, $\overrightarrow{P_0 P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ y definiendo $d = ax_0 + by_0 + cz_0$, luego

$$ax + by + cz = d \qquad \textbf{(Ecuación cartesiana del plano)}$$

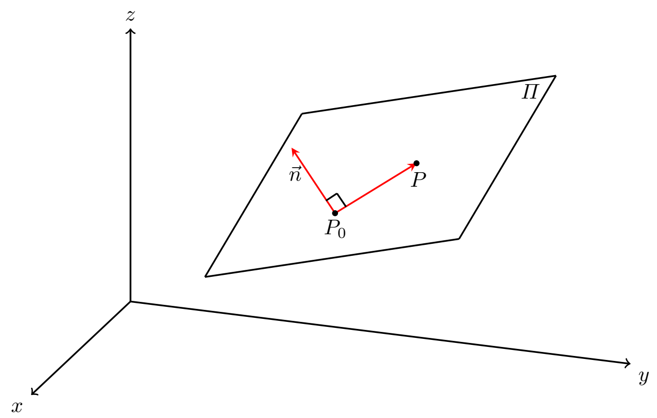


Figura 5.2: Vector normal al plano Π.

Ejemplo 5.2.1 1. *Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(-2,4,5)$ y es perpendicular a al vector $\vec{n}=(7,0,-6)$*

Solución: $\Pi : 7x-6z=-44$.

2. *Determinar dos puntos distintos del plano $\Pi : x+2y+2z=13$.*

3. *Calcular la distancia entre el punto $P_0(2,-3,4)$ y el plano $\Pi : x+2y+2z=13$.*

   Solución: $P_0Q=3$.

   Observación: *Se puede probar que en general la distancia d entre un punto P_0 y un plano Π está dada por*

$$d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}|}{\|\vec{n}\|},$$

   donde $P_1\in\Pi$ y $\vec{n}$ es el vector normal al plano Π.

4. *Hallar, el ángulo formado por los planos $\Pi_1 : x+y+z=5$ y $\Pi : x+2y+z=7$.*

   Solución: 19.47 grados.

5. *Hallar la ecuación de la recta de intersección de los planos del ejercicio anterior.*

   Solución: varias formas de describir la misma recta.

6. *Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,0,3)$, $B(-2,3,1)$ y $C(0,1\ ,5)$.*

   Solución: varias formas de describir un mismo plano.

5.2.1 Listado 4

1. Usando métodos vectoriales demuestre que la distancia d entre el punto $P(x_0,y_0)$ y la recta $ax+by+c=0$ es

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasan por el punto P en la dirección de $\vec{r}$.

   a) $P(2,-1,4)$, $\vec{r}=(3,-1,6)$. **(En práctica)**

   b) $P(-2,4,3)$, $\vec{r}=(2,0,-3)$.

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-6,5,3)$ y es paralela a la recta

$$L : \frac{x-4}{-2} = \frac{3-y}{3} = \frac{3z+5}{6}.$$

(En práctica)

4. Hallar las ecuación de la recta que pasa por los puntos: $P_0(5,0,7)$ y $P_1(5,-3,11)$.

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,-3,4)$ y es perpendicular a cada una de las rectas:

$$L_1 : \frac{2x-4}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{5} \quad y \quad L_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{2y-7}{3} = \frac{3-z}{-3}.$$

(En práctica)

6. Demostrar que las rectas L_1 y L_2 son paralelas y hallar la distancia entre ellas.

$$L_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{8-z}{4} \quad y \quad L_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{-4} = \frac{z+3}{-4}.$$

7. Hallar la distancia entre las rectas $L_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ y $L_2 : \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$. **(En práctica)**

8. Hallar la ecuación del plano que contiene los puntos $(4,-2,2)$ y $(1,1,5)$ y es perpendicular al plano: $\Pi : 3x-2y+5z-1=0$. **(En práctica)**

9. Determinar el valor de k de modo que los planos $\Pi_1 : kx-2y+2z-7=0$ a $\Pi_2 : 4x+ky-6z+9=0$, sean perpendiculares.

10. Hallar la ecuación del plano cuyas intersecciones con los ejes coordenados x, y, z son -5, 3 y 1 respectivamente. **(En práctica)**

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3,-2,6)$ y es paralelo al plano $\Pi : 4y-3z+12=0$.

12. Hallar el ángulo que forman los planos $\Pi_1 : 3x+y-z+3=0$ y $\Pi_2 : x-y+4z-9=0$.

13. Hallar el ángulo formado por la recta $L_1 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-4}{2}$ y el plano $\Pi : 2x+3y-z+11=0$. **(En práctica)**

14. Hallar el ángulo formado por la recta de intersección de los planos $\Pi_1 : x-2y+z+4=0$ y $\Pi_2 : x+2y+3z-4=0$ y el plano $\Pi_3 : 3x-7y+8z-9=0$. **(En práctica)**

15. Hallar la distancia del punto $P_0(7,7,4)$ a la recta de intersección de los planos $\Pi_1: 6x+2y+z-4=0$ y $\Pi_2: 6x-y-2z-10=0$.

16. Hallar la ecuación del plano que contiene el punto $P_0(3,-1,7)$ y es perpendicular a la recta $L: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{3-y}{-1} = \dfrac{z}{2}$. **(En práctica)**

17. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $L_1: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = -\dfrac{z}{4}$ y es paralelo a la recta $L_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+7}{5}$.

18. Demostrar que la recta $L_1: \dfrac{x-2}{6} = \dfrac{3y+1}{-6} = \dfrac{1-z}{3}$ y el plano $\Pi: 2x-3y+6z+3=0$ son paralelos y determinar la distancia entre L_1 y Π.

CAPÍTULO 6

Valores y vectores propios

Todas las matrices que consideraremos en este capítulo serán cuadradas. Sea A una matriz de $n \times n$. Una cuestión de considerable importancia en una gran variedad de problemas de aplicación, es la determinación de vectores $\boldsymbol{x}$, si los hay, tales que $\boldsymbol{x}$ y $A\boldsymbol{x}$ sean paralelos. Tal dificultad aparece en todas las aplicaciones relacionadas con las vibraciones: en aerodinámica, elasticidad, física nuclear, mecánica, ingeniería química, biología, ecuaciones diferenciales, etcétera. En esta sección formularemos el problema con precisión, y definiremos parte de la terminología pertinente; en la siguiente resolveremos el problema para matrices simétricas, y analizaremos brevemente la situación en el caso general.

6.1 Valores y vectores propios

Definición 6.1.1 *Sea A una matriz de $n \times n$. El número real λ es un valor propio (también conocidos como, valores característicos, autovalores o incluso eigenvalores) de A si existe un vector $\boldsymbol{x}$ distinto de cero en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{6.1.1}$$

Todo vector $\boldsymbol{x}$ distinto de cero que satisfaga (6.1.1) es un vector propio de A, asociado con el valor propio λ. Los valores propios también se llaman valores característicos, autovalores o eigenvalores (del alemán eigen, que significa "propio"). De manera similar, los vectores propios también se llaman vectores característicos, autovectores o eigenvectores.

Observe que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ siempre satisface (6.1.1), pero $\boldsymbol{0}$ no es un vector propio, pues, como hemos insistido, un vector propio debe ser un vector no nulo.

Observación: En la definición anterior, el número λ puede ser real o complejo, y el vector $\boldsymbol{x}$ puede tener componentes reales o complejos.

Ejemplo 6.1.1 *Si A es la matriz identidad I_n, el único valor propio es $\lambda = 1$; todo vector distinto de cero en $\mathbb{R}^n$ es un vector propio de A, asociado con el valor propio $\lambda = 1$:*

$$I_n \boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x}$$

Ejemplo 6.1.2 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Además,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Ejemplo 6.1.3 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de modo que $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A, asociado con el valor propio $\lambda_1 = 0$. Además,

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con el valor propio $\lambda_2 = 1$ (verifique).

El ejemplo resalta el hecho de que, aunque por definición el vector cero no puede ser un vector propio, el número cero sí puede ser un valor propio.

Definición 6.1.2 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$. El determinante*

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

es el polinomio característico de A. La ecuación

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

es la ecuación característica de A.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es (verifique)

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda - 0 & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6. \end{aligned}$$

En el desarrollo de un determinante de una matriz de $n \times n$, cada término es un producto de n elementos de la matriz, el cual tiene exactamente un elemento de cada fila (renglón) y un elemento de cada columna. En consecuencia, si desarrollamos $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, obtenemos un polinomio de grado n. Un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene n raíces (contando las repeticiones), algunas de las cuales pueden ser números complejos.

Entonces, podemos escribir

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n.$$

Si hacemos $\lambda = 0$ en $\det(\lambda I_n - A)$, al igual que en la expresión de la derecha, obtenemos $\det(-A) = c_n$, lo cual muestra que el término constante c_n es $(-1)^n \det(A)$. Con este resultado se establece el siguiente teorema.

En el siguiente teorema relacionaremos el polinomio característico de una matriz con sus valores propios.

Teorema 6.1.1 *Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de A.*

Demostración: *Sea λ un valor propio de A, asociado con el vector propio $\boldsymbol{x}$. Entonces, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, lo cual se puede escribir como*

$$A\boldsymbol{x} = (\lambda I_n)\,\boldsymbol{x}$$

o

$$(\lambda I_n - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{6.1.2}$$

un sistema homogéneo de n ecuaciones en n incógnitas. Este sistema tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de su matriz de coeficientes se anula, es decir, si y sólo si $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Recíprocamente, si λ es una raíz real del polinomio característico de A, entonces $\det(\lambda I_n - A) = 0$, de modo que el sistema homogéneo (6.1.2) tiene una solución no trivial $\boldsymbol{x}$. Por lo tanto, λ es un valor propio de A.

En consecuencia, para determinar los valores propios de una matriz dada A, debemos determinar las raíces de su polinomio característico $f(\lambda)$. Hay muchos métodos para determinar aproximaciones a las raíces de un polinomio, algunos más eficaces que otros; de hecho, muchos programas de computadora permiten determinar las raíces de un polinomio. Dos resultados que suelen ser útiles a este respecto son:

1. El producto de todas las raíces del polinomio

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

es $(-1)^n a_n$.

2. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros, $f(\lambda)$ no puede tener una raíz racional que no sea un entero. Así, uno sólo debe verificar los factores enteros de a_n como posibles raíces racionales de $f(\lambda)$. Por supuesto, $f(\lambda)$ podría tener raíces irracionales o complejas.

Los **vectores propios** correspondientes se obtienen al sustituir el valor de λ en la ecuación (6.1.2) y resolver el sistema homogéneo resultante.

Ejemplo 6.1.4 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Verifique que el polinomio característico viene dado por

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$$

Luego, las posibles raíces enteras de $f(\lambda)$ *son* $\pm1, \pm2, \pm3 \text{y} \pm 6$. *Al sustituir estos valores en* $f(\lambda)$, *tenemos que* $f(1) = 0$, *de modo que* $\lambda = 1$ *es una raíz de* $f(\lambda)$. *Por lo tanto,* $(\lambda - 1)$ *es un factor de* $f(\lambda)$. *Al dividir* $f(\lambda)$ *entre* $(\lambda - 1)$, *obtenemos (verifique)*

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right).$$

Al factorizar $\lambda^2 - 5\lambda + 6$, *tenemos*

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Entonces, los valores propios de A *son*

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Para determinar un vector propio $\boldsymbol{x}_1$, *asociado con* $\lambda_1 = 1$, *formamos el sistema lineal*

$$(1I_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}r \\ r \end{pmatrix}$$

para cualquier número real r. Por lo tanto, para $r = 2$,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_1 = 1$.

Para determinar un vector propio $\boldsymbol{x}_2$ asociado con $\lambda_2 = 2$, formamos el sistema lineal

$$(2I_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 2-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{pmatrix}$$

para cualquier número real r. En consecuencia, para $r = 4$,

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_2 = 2$.

Para determinar un vector propio $\boldsymbol{x}_3$ asociado con $\lambda_3 = 3$, formamos el sistema lineal

$$(3I_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

y vemos que una solución es (verifique)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{pmatrix}$$

para cualquier número real r. Así, para $r = 4$,

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_3 = 3$.

Ejemplo 6.1.5 *Calcule los valores propios y los vectores propios asociados de*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol: El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & 0 & -3 \\ -1 & \lambda - 0 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

(verifique). Determinamos que $\lambda = 3$ es una raíz de $p(\lambda)$. Al dividir $p(\lambda)$ entre $(\lambda - 3)$, obtenemos $p(\lambda) = (\lambda - 3)\left(\lambda^2 + 1\right)$. Entonces, los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i.$$

Para obtener un vector propio $\boldsymbol{x}_1$ asociado con $\lambda_1 = 3$, sustituimos $\lambda = 3$ en (6.1.2), lo cual nos da como resultado

$$\begin{pmatrix} 3 - 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 - 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos que el vector $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ es una solución para cualquier número real r (verifique). Al hacer $r = 1$, concluimos que

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_1 = 3$. Para obtener un vector propio $\boldsymbol{x}_2$ asociado con $\lambda_2 = i$, sustituimos $\lambda = i$ en (6.1.2), lo que da como resultado

$$\begin{pmatrix} i - 0 & 0 & -3 \\ -1 & i - 0 & 1 \\ 0 & -1 & i - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos que el vector $\begin{pmatrix} (-3i)r \\ (-3+i)r \\ r \end{pmatrix}$ *es una solución para cualquier número* r *(verifique).* Al *hacer* $r = 1$, *concluimos que*

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -3i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A *asociado con* $\lambda_2 = i$. *De manera similar, determinamos que*

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A, *asociado con* $\lambda_3 = -i$.

En resumen: El procedimiento para determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz, es como sigue.

Paso 1. Determinar las raíces del polinomio característico $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$. Éstas son los valores propios de A.

Paso 2. Para cada valor propio λ, determine todas las soluciones no triviales para el sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Éstos son los vectores propios de A, asociados con el valor propio λ.

Por supuesto, el polinomio característico de una matriz dada puede tener algunas raíces complejas, e incluso podría carecer por completo de raíces reales. Sin embargo, en el importante caso de las matrices simétricas, todas las raíces del polinomio característico son reales.

El conjunto S que consiste en todos los vectores propios de A asociados con λ_j, junto con el vector nulo, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, denominado espacio propio asociado con λ_j (también se le conoce como espacio invariante).

Precaución: Al determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz A, evite cometer el error común de transformar primero A a la forma escalonada reducida por filas B, y luego determinar los valores y vectores propios de B.

6.2 Diagonalización

Definición 6.2.1 *Se dice que una matriz* B *es semejante o similar a una matriz* A, *si existe una matriz no singular* P *tal que*

$$B = P^{-1}AP.$$

Ejemplo 6.2.1 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

y

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, B es semejante a A.

Se deja al lector la demostración de la validez de las siguientes propiedades elementales de la semejanza.

1. A es semejante a A.
2. Si B es semejante a A, entonces A es semejante a B.
3. Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

De acuerdo con la propiedad 2, podemos reemplazar las proposiciones "A es semejante a B" y "B es semejante a A" por "A y B son semejantes".

Definición 6.2.2 *Diremos que la matriz A es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. En este caso, también decimos que A puede diagonalizarse.*

Si A y B son como en el ejemplo anterior, entonces A es diagonalizable, ya que es semejante a B.

Teorema 6.2.1 *Matrices semejantes tienen los mismos valores propios.*

Demostración: *Sean A y B semejantes. Entonces, $B = P^{-1}AP$ para alguna matriz no singular P. A continuación demostraremos que A y B tienen los mismos polinomios característicos, $f_A(\lambda)$ y $f_B(\lambda)$, respectivamente. Tenemos*

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= \det(\lambda I_n - B) = \det\left(\lambda I_n - P^{-1}AP\right) && (6.2.1)\\ &= \det\left(P^{-1}\lambda I_n P - P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}(\lambda I_n - A)P\right) && (6.2.2)\\ &= \det\left(P^{-1}\right)\det(\lambda I_n - A)\det(P) && (6.2.3)\\ &= \det\left(P^{-1}\right)\det(P)\det(\lambda I_n - A) && (6.2.4)\\ &= \det(\lambda I_n - A) = f_A(\lambda) && (6.2.5) \end{aligned}$$

Como $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$, resulta que A y B tienen los mismos valores propios.

Note que los valores propios de una matriz diagonal son las entradas de su diagonal principal. El teorema siguiente establece la condición para que una matriz sea diagonalizable.

Teorema 6.2.2 *Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes.*

Demostración: *Suponga que A es semejante a D. Entonces,*

$$P^{-1}AP = D,$$

es una matriz diagonal, de manera que

$$AP = PD \tag{6.2.6}$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y sea $\boldsymbol{x}_j, j = 1, 2, \ldots, n$ la j-ésima columna de P. Resulta que la j-ésima columna de la matriz AP es $A\boldsymbol{x}_j$, y la j-ésima columna de PD es $\lambda_j \boldsymbol{x}_j$.

Por lo tanto, con base en (6.2.6), tenemos

$$A\boldsymbol{x}_j = \lambda_j \boldsymbol{x}_j. \tag{6.2.7}$$

Como P es una matriz no singular, sus columnas son linealmente independientes y, por lo tanto, todas son distintas de cero. En consecuencia, λ_j es un valor propio de A, y $\boldsymbol{x}_j$ es un vector propio correspondiente.

Recíprocamente, suponga que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son n valores propios de A, y que los vectores propios correspondientes, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, son linealmente independientes. Sea $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ la matriz cuya j-ésima columna es $\boldsymbol{x}_j$. Como las columnas de P son linealmente independientes, P es no singular. A partir de (6.2.7) obtenemos (6.2.6), lo cual implica que A es diagonalizable. Esto completa la demostración.

Observación: Si A es una matriz diagonalizable, $P^{-1}AP = D$, donde D es una matriz diagonal. La demostración del teorema anterior implica que los elementos de la diagonal de D son los valores propios de A. Además, P es una matriz cuyas columnas son, respectivamente, n vectores propios linealmente independientes de A. Observe también que, según el teorema, el orden de las columnas de P determina el orden de las entradas de la diagonal de D.

Ejemplo 6.2.2 (El orden importa) *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Los vectores propios correspondientes

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes (verificar). Por lo tanto, A es diagonalizable. Aquí

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, si $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$ (cambiamos el orden), entonces

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.2.3 (Matriz no diagonalizable) *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$. Los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 son vectores de la forma

$$\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde r es cualquier número real distinto de cero. Como A no tiene dos vectores propios linealmente independientes, concluimos que A no es diagonalizable.

El siguiente es un teorema útil, ya que identifica una clase amplia de matrices que pueden diagonalizarse.

Teorema 6.2.3 *Si todas las raíces del polinomio característico de una matriz A de $n \times n$ son distintas (es decir, si todas son diferentes entre sí), A es diagonalizable.*

Demostración: *Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$* los *valores propios (eigenvalores) distintos de A, y sea $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ un conjunto de vectores propios asociados. Queremos demostrar que S es linealmente independiente.*

Suponga que S es linealmente dependiente. Entonces, algún vector $\boldsymbol{x}_j$ es una combinación lineal de los vectores que le preceden en S. Podemos suponer que $S_1 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{j-1}\}$ es linealmente independiente pues, de otra forma, uno de los vectores en S_1 sería una combinación lineal de los que le preceden y podríamos elegir un nuevo conjunto S_2, y así sucesivamente. En consecuencia, tenemos que S_1 es linealmente independiente y que

$$\boldsymbol{x}_j = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1} \tag{6.2.8}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}$ son escalares. Premultiplicando ambos lados de la ecuación (6.2.8) por A (multiplicando por la izquierda), obtenemos

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x}_j &= A\left(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1}\right) && (6.2.9)\\ &= c_1A\boldsymbol{x}_1 + c_2A\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{j-1}A\boldsymbol{x}_{j-1} && (6.2.10)\end{aligned}$$

Como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ son valores propios de A, y $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_j$ son sus vectores propios asociados, sabemos que $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, j$. Al sustituir en (6.2.9), tenemos

$$\lambda_j\boldsymbol{x}_j = c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{j-1}\lambda_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1}. \tag{6.2.11}$$

Al multiplicar (6.2.8) por λ_j, obtenemos

$$\lambda_j\boldsymbol{x}_j = \lambda_jc_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_jc_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_jc_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1} \tag{6.2.12}$$

Restando (6.2.12) de (6.2.11), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_j\boldsymbol{x}_j - \lambda_j\boldsymbol{x}_j\\ &= c_1\left(\lambda_1 - \lambda_j\right)\boldsymbol{x}_1 + c_2\left(\lambda_2 - \lambda_j\right)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{j-1}\left(\lambda_{j-1} - \lambda_j\right)\boldsymbol{x}_{j-1}\end{aligned}$$

Como S_1 es linealmente independiente, debemos tener

$$c_1\left(\lambda_1 - \lambda_j\right) = 0, \quad c_2\left(\lambda_2 - \lambda_j\right) = 0, \ldots, \quad c_{j-1}\left(\lambda_{j-1} - \lambda_j\right) = 0$$

Ahora,

$$\lambda_1 - \lambda_j \neq 0, \quad \lambda_2 - \lambda_j \neq 0, \ldots, \quad \lambda_{j-1} - \lambda_j \neq 0$$

(ya que las λ son distintas), lo que implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{j-1} = 0$$

De acuerdo con la ecuación (6.2.8), concluimos que $\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}$, lo cual es imposible si $\boldsymbol{x}_j$ es un vector propio. Por lo tanto, S es linealmente independiente y, con ello A es diagonalizable.

Observación: En la demostración del teorema, en realidad hemos establecido el siguiente resultado (de mayor importancia): sea A una matriz de $n \times n$, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, donde k son valores propios distintos de A, con vectores propios asociados $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$. Entonces, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ son linealmente independientes.

Si no todas las raíces del polinomio característico de A son distintas, A puede o no ser diagonalizable. El polinomio característico de A puede escribirse como el producto de n factores, cada uno de la forma

$\lambda - \lambda_j$, donde λ_j es una raíz del polinomio característico, y los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de A. Así, el polinomio característico puede escribirse como

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son los valores propios distintos de A, y $k_1, k_2, \ldots, k_r$ son enteros cuya suma es n. El entero k_i se denomina multiplicidad de λ_i.

Ejemplo 6.2.4 *El valor propio $\lambda = 1$ es un valor propio de multiplicidad 2 de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es posible demostrar que A puede diagonalizarse si y sólo si para cada valor propio λ_j, de multiplicidad k_j, pueden encontrarse k_j vectores propios linealmente independientes. Esto significa que el espacio solución del sistema lineal $(\lambda_j I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene dimensión k_j. También puede demostrarse que si λ_j es un valor propio de A, de multiplicidad k_j, es imposible encontrar más de k_j vectores propios linealmente independientes asociados con λ_j.

Consideremos los ejemplos siguientes.

Ejemplo 6.2.5 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$, así que los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 1$. En consecuencia, $\lambda_2 = 1$ es un valor propio de multiplicidad 2. Consideremos ahora los vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, mismos que se obtienen resolviendo el sistema lineal $(1I_3 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde r es cualquier número, así que la dimensión del espacio solución del sistema lineal $(1I_3 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es 1. No existen dos vectores linealmente independientes asociados con $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto, A no puede diagonalizarse.

Ejemplo 6.2.6 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$, de manera que los valores propios de A son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$; nuevamente, $\lambda_2 = 1$ es un valor propio de multiplicidad 2. Consideremos ahora el espacio solución de $(1I_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, esto es, de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix}$$

para cualesquiera números r y s. Note que este vector puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

esto quiere decir que el vector solución está siendo generado por los vectores de la derecha, los cuales son l.i.

En consecuencia, podemos tomar como vectores propios $\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$ los vectores

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, buscamos un vector propio asociado con $\lambda_1 = 0$. Para ello tenemos que resolver el sistema homogéneo $(0_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, o

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix},$$

para cualquier número t. Así,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado con $\lambda_1 = 0$. Como $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$ son linealmente independientes, A puede diagonalizarse.

Por lo tanto, una matriz de $n \times n$ no puede diagonalizarse si no tiene n vectores propios linealmente independientes.

En resumen: El procedimiento para diagonalizar una matriz A es el siguiente.

Paso 1. Encontrar el polinomio característico $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ de A.

Paso 2. Determinar las raíces del polinomio característico de A.

Paso 3. Para cada valor propio λ_j de A, de multiplicidad k_j, determinamos una base para el espacio solución de $(\lambda_j I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (el espacio propio asociado a λ_j. Si la dimensión del espacio propio es menor que k_j, entonces A no es diagonzalizable. De acuerdo con ello, determinamos n vectores propios linealmente independientes de A.

Paso 4. P es la matriz cuyas columnas son los n vectores propios linealmente independientes determinados en el paso 3. Entonces, $P^{-1}AP = D$, es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de A correspondientes a las columnas de P.

CAPÍTULO 7

Espacios vectoriales

7.1 Preliminares

Definición 7.1.1 **(Cuerpo)** *Sea $\mathbb{K}$ un conjunto y sean $+$ y $\cdot$ dos operaciones binarias internas definidas sobre $\mathbb{K}$, llamadas* **suma** *y* **producto** *respectivamente. Diremos que $\mathbb{K}$, con estas operaciones, es un* **cuerpo** *si se satisfacen los siguientes axiomas:*

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$ **Asociatividad de +**
2. $\forall x, y \in \mathbb{K}, \quad x + y = y + x.$ **Conmutatividad de +**
3. $\exists 0 \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}, \quad x + 0 = x.$ **Elemento neutro para +**
4. $\forall x \in \mathbb{K}, \exists - x \in \mathbb{K}, \quad x + (-x) = 0.$ **Simétrico**
5. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$ **Asociatividad de ·**
6. $\exists 1 \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}, \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$ **Elemento neutro para ·**
7. $\forall x \in \mathbb{K}, x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{K}, \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$ **Inverso de x**
8. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \wedge \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$
   Distributividad de · respecto de la suma +
9. *Diremos que $\mathbb{K}$ es un* **cuerpo conmutativo**, *si además se satisface:*

$$\forall x, y \in \mathbb{K}, \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Observaciones:

1. Escribiremos la terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ para indicar que el conjunto $\mathbb{K}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ es un cuerpo.
2. Los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ de los números racionales, reales y complejos respectivamente, constituyen cuerpos conmutativos con las operaciones de suma y producto usuales.

Definición 7.1.2 **(Espacio vectorial)** *Sean V un conjunto, $\mathbb{K}$ un cuerpo y*

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (x, y) &\to x + y, \end{aligned}$$

una operación binaria interna llamada **suma**,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\to V \\ (\alpha, x) &\to \alpha x, \end{aligned}$$

una operación binaria externa llamada **producto por escalar**.

Diremos que V con las operaciones $+$ y $\cdot$ es un **espacio vectorial** *sobre $\mathbb{K}$ o un* **$\mathbb{K}$-espacio vectorial**, *si:*

1. $\forall x, y, z \in V, \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$
2. $\forall x, y \in V, \quad x + y = y + x.$
3. $\exists \theta_V \in V$ *(vector nulo) para* $+$, *tal que,* $\quad x + \theta_V = x, \forall x \in V.$
4. $\forall x \in V, \exists -x \in V, \quad x + (-x) = \theta_V.$
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V, \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$
6. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V, \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$
8. $\forall x \in V, \ 1 \cdot x = x,$ *donde 1 es el elemento unidad de $\mathbb{K}$.*

Observaciones:

1. Los elementos de V se denominan **vectores** y los elementos de $\mathbb{K}$, **escalares**.
2. Del axioma 3 se concluye que $V \neq \phi$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, diremos que V es un espacio vectorial real. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, diremos que V es un espacio vectorial complejo.
4. Cualesquiera sean los vectores x e y de V, $x + (-y)$ se escribe como $x - y$ y se llama **diferencia** entre x e y.

7.2 Propiedades de los espacios vectoriales

Teorema 7.2.1 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces*

1. *El elemento neutro θ_V para la operación suma, es único.*

2. *Para cada* $x \in V$ *existe un único simétrico (inverso aditivo)* $-x \in V$.

3. *Ley de cancelación*
$$\forall x, y, z \in V,\ \ x + y = x + z \Rightarrow y = z$$

4. *Para todo* $x \in V$, $0 \cdot x = \theta_V$.

5. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot \theta_V = \theta_V$.

6. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$, *para todo* $x \in V$, $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$.

7. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$, *para todo* $x \in V$, $\alpha \cdot x = \theta_V \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee x = \theta_V)$.

Ejemplo 7.2.1 1. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo, entonces* $\mathbb{K}$ *es un espacio vectorial sobre si mismo, lo cual se sigue trivialmente de las propiedades de cuerpo.*

2. *Consideremos el conjunto* $\mathbb{R}^n$ *de todas las* n*-uplas de números reales, es decir:*
$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.\},$$
$\mathbb{R}^n$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial con las siguientes operaciones*
$$\begin{aligned} + :\ & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \cdot :\ & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

3. *Si en* $\mathbb{R}^2$ *se definen la suma como en el ejemplo anterior y el producto por escalar como sigue:*
$$\begin{aligned} \cdot :\ & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2), \end{aligned}$$
Luego $\mathbb{R}^2$ *con estas operaciones no es un espacio vectorial.*

4. *El símbolo* $\mathbb{K}^X$ *denota el conjunto de todas las funciones con dominio un conjunto* $X \neq \phi$ *y codominio en el cuerpo* $\mathbb{K}$*, es decir*
$$\mathbb{K}^X = \{f | f : X \to \mathbb{K}\}$$
En $\mathbb{K}^X$ *definimos la suma de funciones y el producto de un escalar por una función como sigue. Si* f *y* g *son dos elementos cualesquiera de* $\mathbb{K}^X$*, entonces:*
$$\begin{aligned} f + g :& X \to \mathbb{K} \\ & (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Si α es cualquier escalar en $\mathbb{K}$ y f cualquier elemento de $\mathbb{K}$, entonces:

$$\begin{aligned}\alpha f :& X \to \mathbb{K}\\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

$(\mathbb{K}^X, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

5. *El conjunto $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ de las matrices de orden $n \times m$ con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$ y con las operaciones de suma y producto por un escalar usuales, es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Los vectores de este espacio son matrices.*

7.3 Subespacio vectorial

Definición 7.3.1 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y S un subconjunto de V. Diremos que S es un* **subespacio vectorial** *de V, si S es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las mismas operaciones de suma y producto por escalar definidas en V.*

Observación: Cualquiera sea el espacio vectorial V, tanto $\{\theta_V\}$ como V son subespacios de V llamados subespacios triviales.

Teorema 7.3.1 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que $S \subset V$ es* **subespacio** *vectorial de V si y sólo si*

1. *$S \neq \emptyset$*
2. *si para cualquier $x, y \in S$, se cumple que $x + y \in S$ y*
3. *si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in S$, entonces $\lambda x \in S$.*

Ejemplo 7.3.1

1. *Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = -d \right\}$. S es un subespacio del espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*
2. *Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$. S no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*
3. *El conjunto $V = C_{[0,1]}(\mathbb{R})$ de las funciones reales continuas sobre $[0, 1]$ es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^{[0,1]}$ de las funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$.*
4. *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces Ax denotará la multiplicación de A por la matriz columna formada por $x_1, \ldots, x_n$, es decir*

$$Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Sea

$$S = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}.$$

Es decir, S es el subconjunto de $\mathbb{K}^n$ de las soluciones del sistema $Ax = 0$. Entonces, S es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.

7.3.1 Intersección de subespacios

Teorema 7.3.2 *Si S y T son dos subespacios vectoriales de un mismo $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, entonces la intersección de S y T, $S \cap T$, es un subespacio vectorial de V.*

Demostración: Hacer en clase.

1. $S \cap T \neq \phi$.
2. $S \cap T$ es cerrado para la suma.
3. $S \cap T$ es cerrado para multiplicación por escalar.

7.3.2 Unión de subespacios

En general la unión de subespacios no es un subespacio vectorial. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.3.2 1. *Sean $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ y $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{2}\}$ subespacios vectoriales. Luego $u = (1, 2) \in S$, por lo tanto $u \in S \cup T$. Análogamente, $v = (2, 1) \in T$, por lo tanto $v \in S \cup T$. Pero, $u + v = (3, 3) \notin S$ y $(3, 3) \notin T$. Luego, $u + v \notin S \cup T$. Por lo tanto $S \cup T$ no es un subespacio vectorial.*

Teorema 7.3.3 *Si S y T son subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, entonces $S \cup T$ es subespacio si y sólo si $S \subseteq T \vee T \subseteq S$.*

7.3.3 Suma de espacios vectoriales

Sean S y T dos subespacios del mismo $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, se llama **suma** de S y T al conjunto

$$S + T = \{v \in V : v = s + t, s \in S \wedge t \in T\}.$$

Teorema 7.3.4 *$S + T$ es un subespacio vectorial de V.*

Demostración: Hacer en clase.

Observación: Si $S \cap T = \{\theta_V\}$, la suma $S + T$ se llama **suma directa** y se escribe $S \oplus T$.

Ejemplo 7.3.3 *1. Sea*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\} = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

S es el subespacio representado por el eje X, y

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

El subespacio T es el plano coordenado YZ. Muestre que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

2. En $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, consideremos los subespacios

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : b = c = 0 \right\},$$

y

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : b = d = 0 \right\}.$$

Calcule $S + T$ y muestre que $S + T$ no es suma directa.

3. Sean $S = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ y $T = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = -A^t\}$. Muestre que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus T$.

7.3.4 Combinaciones lineales. Dependencia e independencia lineal

Definición 7.3.2 **(Combinación lineal)** *Sean, V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $x_1, \dots, x_n$ vectores de V. El vector x es* **combinación lineal** *(C.L.) de $x_1, \dots, x_n$ si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que*

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Observación: El vector nulo es *C.L.* de cualquier conjunto de vectores.

Ejemplo 7.3.4 *1. Decidir si $p(t) = t^2 - 2t + 3$ es C.L. de $p_1(t) = (t-1)^2$, $p_2(t) = \frac{1}{2}t + 1$, $p_3(t) = 5$.*

2. Investigar si $A = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$ es C.L de las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ Respuesta: Sí (de infinitas maneras).

Teorema 7.3.5 *Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A = \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subseteq V$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de A es un subespacio vectorial de V.*

$$S = \{x \in V : x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, r\}.$$

El subespacio S se llama **subespacio generado** *por A o* **subespacio generado** *por los vectores $v_1, \dots, v_r$. Los vectores $v_1, \dots, v_r$ se llaman* **generadores** *de S.*

Se denota por $S = \langle A \rangle = \langle \{v_1, \ldots, v_r\} \rangle$. También se dice que $v_1, \ldots, v_r$ **generan al subespacio** *o que A es un* **sistema** *de generadores de S.*

Demostración: Hacer en clase.

Ejemplo 7.3.5 *1. Caracterice el subespacio generado por $v_1 = (0, 1, 2)$, $v_2 = (-1, 3, -1)$ y $v_3 = (2, -11/2, 3)$.*

Solución: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2y - 7x = 0\}$.

2. Consideremos el subespacio de las matrices simétricas

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Encuentre el conjunto A tal que $S = \langle A \rangle$.

Respuesta: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Definición 7.3.3 *Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$; A es un conjunto* **linealmente dependiente** *($L.D.$) si existen escalares no todos nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \theta_V,$$

Si A no es un conjunto $L.D.$ se dice que es **linealmente independiente** *($L.I.$).*

Definición 7.3.4 *S es un conjunto* **linealmente independiente** *si todo subconjunto finito de S es $L.I.$*

Observaciones:

1. Todo conjunto que consta de un único vector distinto del nulo es $L.I.$
2. Todo conjunto que contiene al vector nulo es $L.D.$

Ejemplo 7.3.6 *1. Muestre que $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, es un conjunto $L.I.$*

2. Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, donde θ_V es el polinomio nulo. Sea $A = \{3x^2 - 2x, x^2 + 1, -3x + 2, x^2 - 1\} \subseteq \mathcal{P}_2(x)$. Muestre que A es $L.D.$

Observaciones:

1. Si $v_1, \ldots, v_k$ es un conjunto de vectores $L.D.$, entonces uno de los vectores es $C.L.$ de los restantes.

2. Recíprocamente, si un vector v es $C.L.$ de $v_1, \ldots, v_k$, entonces $\{v, v_1, \ldots, v_k\}$ es $L.D.$

3. Si el conjunto $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$ es un sistema de generadores $L.D.$ del espacio vectorial V, entonces existe $v_j \in A$ tal que $A - \{v_j\}$ es un sistema de generadores de V.

Definición 7.3.5 ($L.I.$ **maximal**) *Un subconjunto $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es $L.I.$* **maximal**, *si A es $L.I.$ y si $A \cup \{w\}$ es L.D., cualquiera sea $w \in V$, $w \neq v_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Ejemplo 7.3.7 *$A = \{(1,0),(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto $L.I.$ maximal puesto que es $L.I.$ y cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de A. Luego $A \cup \{w\}$ es L.D., para todo $w \in \mathbb{R}^2$.*

Definición 7.3.6 (**Base de V**) *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es una* **base** *de V si:*

1. *A es $L.I.$*

2. *A es un sistema de generadores de V.*

Teorema 7.3.6 *Todo espacio vectorial posee base.*

Demostración: La demostración del Teorema 7.3.6 no está al alcance de este curso.

Ejemplo 7.3.8

1. *Si $V = \mathbb{R}^3$, se puede demostrar fácilmente que el conjunto $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es $L.I.$ y un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, A constituye una base de $\mathbb{R}^3$, llamada* **base canonica** *de $\mathbb{R}^3$.*

2. *El conjunto $B = \{3, x-1, x^2+x\}$ es base del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(x)$ (polinomios de grado menor o igual a 2, con coeficientes reales).*

Teorema 7.3.7 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores $v_1, \ldots, v_n$. Entonces todo conjunto $L.I.$ de vectores de V es finito y contiene a lo más n vectores.*

Definición 7.3.7 (**Dimension de V**) *Se llama* **dimensión** *de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V al número de elementos de una base cualquiera de V. Se denota $\dim(V)$. Si V consiste únicamente en él vector nulo, diremos que su dimensión es 0.*

7.3.5 Listado 5

1. Sean U, V, W, Z los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.
   $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$,

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$,
$W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$,
$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y = 2z\}$.
Caracterice los elementos de cada uno de los siguientes espacios:

a) $U + V$
b) $U + W$
c) $V + W$
d) $W + Z$
e) $U \cap W$
f) $V \cap W$
g) $U \cap Z$

2. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente independientes.

    a) $\{(3, 6, 1), (2, 1, 1), (-1, 0, -1)\}$ en $\mathbb{R}^3$
    b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
    c) $\{t^3 - t^2 + 4t + 1, \quad 2t^3 - 2t^2 + 9t - 1, \quad t^3 + 6t - 5, \quad 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5\}$ en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

3. Demuestre que los polinomios $\{(1-t)^3,\ (1-t)^2,\ (1-t),\ 1\}$, generan el espacio de los polinomios de grado menor o igual que tres.

4. Sean $S_1 = \{\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x), \operatorname{sen}(x)\cos(x)\}$ y $S_2 = \{1, \operatorname{sen}(2x), \cos(2x)\}$. Muestre que los vectores de cada conjunto son $L.I$.

5. Encuentre una base y determine la dimensión de los siguientes subespacios:

    a) $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 3z = 0\}$,
    b) $Y = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y\}$,
    c) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 6x = 3y = z\}$,
    d) $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - 2c + d = 0\}$,
    e) $V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d, b = 2c\}$
    f) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & c \\ 0 & d & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \right\}$,
    g) $T = \langle \{7 - x^2, x^2 + 1, x^2 - 1\} \rangle$,
    h) $S = \langle \{\cos^2(x), \sin^2(x), \cos(2x)\} \rangle$,
    i) $R = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}$,
    j) $Q = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$,
    k) $P = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = p'(0) = 0\}$.

6. Considere el conjunto $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con la suma usual de polinomios y la multiplicación por escalar definida por
$$\alpha p(x) = \alpha p'(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$
¿Es $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ un espacio vectorial con estas operaciones?.

7. Considere la ecuación $x - 2y + 3z = 0$.

    a) Muestre que el conjunto solución S de esta ecuación es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
    b) Encuentre una base para S y su dimensión.

8. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S_1 = \{u, v, w\}$ un subconjunto $L.I$ de V. Demuestre que: $S_2 = \{u+v, u-v, u-2v+w\}$ es también $L.I$.

9. Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.
   $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$
   $V = \langle\{-1, 2, 1), (0, 0, 1)\}\rangle$
   Caracterice los subespacios $U + V$ y $U \cap V$.

10. Encuentre la dimensión del subespacio $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = d \right\}$.

11. Encuentre la dimensión del espacio $U = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : 2b - c = 0\}$.

12. Dados los subespacios $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + c = 0 \right\}$ y

    $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : 2b - d = 0 \right\}$.

    a) Caracterice el subespacio $U \cap V$.
    b) ¿Es $U + V$ suma directa?.

13. Considere el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x + 3y - z = 0\}$ y el subespacio T de $\mathbb{R}^3$ generado por $(3, -1, 1)$.

    a) Demuestre que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
    b) Determine una base para $S + T$ y decida si ésta es una suma directa.

CAPÍTULO 8

Espacios vectoriales con producto interior

8.1 Espacios vectoriales con producto interior

Definición 8.1.1 **(Productor interior)** *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ se dice un* **producto interior** *sobre V si verifica:*

1. $\langle v, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V, \qquad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = \theta.$
2. $\forall v_1, v_2$ *y* $w \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,
$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w\rangle = \alpha\langle v_1, w\rangle + \beta\langle v_2, w\rangle.$$
3. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle} \quad \forall v, w \in V.$

Propiedades 8.1.1

1. *De (3) se tiene que*
$$\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle} \quad \forall v \in V,$$
de donde se puede concluir que $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$.
2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y* V *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *entonces (3) se transforma en*
$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \quad \forall v, w \in V.$$
3. $\forall w_1, w_2$ *y* $v \in V$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$
$$\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\rangle = \overline{\alpha}_1\langle v, w_1\rangle + \overline{\alpha}_2\langle v, w_2\rangle.$$
En particular, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *se tiene*
$$\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\rangle = \alpha_1\langle v, w_1\rangle + \alpha_2\langle v, w_2\rangle.$$

Ejemplo 8.1.1 (**Producto interior**) *1.- Sea $V = \mathbb{C}^n$ espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$
$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v}_i,$$

es un producto interior.

2. *Sea $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$,*

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{M}_{n\times m} \times \mathcal{M}_{n\times m} \to \mathbb{R}$$
$$\langle A, B\rangle = tr(A^t B),$$

es un producto interior. Donde la **traza** *de una matriz cuadrada A es la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por $tr(A)$.*

3. *Sea $C_{\mathbb{R}}[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$.*

$$\langle\ ,\ \rangle : C_{\mathbb{R}}[a,b] \times C_{\mathbb{R}}[a,b] \to \mathbb{R}$$
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

es un producto interior.

Definición 8.1.2 (**Norma**) *Sea V un espacio vectorial con producto interior, se llama norma del vector v al número $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.*

Propiedades 8.1.2 $\forall u, v, w \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$,

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \theta$.
2. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.
3. $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$. **(Desigualdad de Cauchy-Schwartz)**
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. **(Desigualdad triangular)**

Definición 8.1.3 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior*

1. *$v, w \in V$, v es* **ortogonal** *a w si $\langle v, w\rangle = 0$.*
2. *un subconjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es un* **conjunto ortogonal** *si $\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.*
3. *un subconjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es un conjunto* **ortonormal** *si es un conjunto ortogonal y $\|v_i\| = 1 \quad \forall i = \{1, \ldots, n\}$.*

Lema 8.1.1 *Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es L.I.*

Demostración: Demostrar en clases.

Corolario 8.1.1 *Si un vector w es C.L. de un conjunto ortogonal de vectores no nulos $\{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces w es igual a*

$$w = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle w, x_k \rangle}{\|x_k\|^2} x_k.$$

Demostración: Demostrar en clases.

Proposition 8.1.1 (**Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt**) *Sea V espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \, , \, \rangle$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces existe una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ tal que el subespacio generado por los vectores $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es el mismo que el subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_m\}$ $(1 \leq m \leq n)$. Explícitamente, la base es*

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1, && (1)\\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1, && (2)\\
w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2, && (3)\\
&\vdots \quad \vdots\\
w_n &= v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \cdots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}. && (n)
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.2 1. *Sea $B = \{(3,0,4), (-1,0,7), (2,9,11)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Encuentre una base ortogonal para $\mathbb{R}$.*

Respuesta: $B' = \{(3,0,4), (-4,0,3), (0,9,0)\}$

Observación: Sea V espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \, , \, \rangle$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces, por Gram-Schmidt existe una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de V. Sea $u_i = w_i/\|w_i\|$, entonces $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V donde los vectores son ortogonales y de norma 1.

Definición 8.1.4 *Sea V espacio vectorial con producto interior $\langle \, , \, \rangle$ y sean U, W subespacios de V. Diremos que U es* **ortogonal** *a W y denotaremos $U \perp W$ si para todo $u \in U$ y para todo $w \in W$ tenemos que $\langle u, w \rangle = 0$.*

Si X es subconjunto de V, definimos

$$X^{\perp} := \{u \in V : \langle u, x \rangle = 0, \forall x \in X\}. \qquad (\textbf{Complemento ortogonal de X})$$

Proposition 8.1.2 *Sea V espacio vectorial con producto interior $\langle \, , \, \rangle$ y $X \subseteq V$. Entonces $X^{\perp}$ es un subespacio de V.*

Demostración: Demostrar en clases.

Observación: Si W es subespacio y x es ortogonal a todo vector de una base de W entonces $x \in W^{\perp}$.

Ejemplo 8.1.3 *1.* $W = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. *Encuentre* $W^{\perp}$.

2. Sean $S = \{(x,y,z) : 2x - 3y + z = 0\}$ *y* $T = \{(x,y,z) : \frac{x}{2} = -\frac{y}{3} = z\}$. *Muestre que* $S \perp T$.

8.1.1 Listado 6

1. a) Considere $\mathbb{R}^2$ con el producto interior usual. Si $x = (1,2)$ y $y = (-1,1)$, encuentre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que
$$\langle v, x\rangle = -2 \ \wedge \ \langle v, y\rangle = 3.$$
   b) Demuestre que para cada vector $u \in \mathbb{R}^2$, se tiene
$$u = \langle u, e_1\rangle e_1 + \langle u, e_2\rangle e_2,$$
   donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}$.

2. Encuentre una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir de $\{(1,1,0),(-1,1,0),(-1,1,1)\}$.

3. Dado el vector $(2,1,-1) \in \mathbb{R}^3$, construya a partir de él una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el $p.i.$ usual. Sea $S = \langle\{(1,1,1),(-1,1,0)\}\rangle$.
   a) Caracterice $S^{\perp}$ y determine su dimensión.
   b) Encontrar una base B ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que uno de sus vectores sea elemento de $S^{\perp}$.

5. Considere el espacio vectorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con el $p.i.$
$$\langle p, q\rangle = 2\int_0^2 p(x)q(x)dx$$
   Pruebe que el conjunto $\{1, x-2, x^2-2\}$ es $l.i.$ y ortonormalice respecto del $p.i.$ dado.

6. En $\mathbb{C}^2$ se define el producto interior
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i.$$
   Pruebe que los vectores $x = (3, -i)$, $y = (2, 6i)$ son ortogonales y normalícelos.

7. Pruebe que en el espacio $C_{\mathbb{R}}[0,1]$, con el producto interior
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$
   el conjunto $\{1, \sqrt{3}(2t-1), \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\}$ es una base ortonormal.

8. En el espacio $C_{\mathbb{R}}[0, 2\pi]$, con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

el conjunto $\{\sin(x), \cos(x)\}$ es ortogonal.

9. Pruebe que $\{\sin(nx), \cos(nx), 1\}$ es un conjunto ortogonal con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

10. En el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 con el producto

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

construya a partir de la base $\{1, x, x^2\}$ una base ortonormal.

11. Sean x e y vectores de un espacio vectorial con $p.i.$ tales que $x+y$ es ortogonal a $x-y$. Demuestre que $\|x\| = \|y\|$.

12. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $p.i.$. Demuestre que: $\forall x, y \in V$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

13. Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = z\}$. Halle $W^{\perp}$. ¿Qué representan geométricamente W y $W^{\perp}$?

CAPÍTULO 9

Tranformaciones lineales

9.1 Tranformaciones lineales

Las transformaciones lineales son las funciones con las que trabajamos en el álgebra lineal. Se trata de funciones entre espacios vectoriales compatibles con la estructura, es decir con la suma y el producto por escalares.

Definición 9.1.1 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una* **transformación lineal** *de V en W es una función $T : V \to W$ tal que*

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$, *para* $u, v \in V$,
2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, *para* $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Observación: $T : V \to W$ es transformación lineal si y sólo si

$$T(\lambda v + u) = \lambda T(v) + T(u), \text{ para } v, u \in V, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Algunas veces usaremos esto último para comprobar si una aplicación de V en W es una transformación lineal.

Ejemplo 9.1.1 *1. T dada por*

$$\begin{aligned} T :&\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ &T(x,y) = (x-y, 2x, y+x) \end{aligned}$$

es una T.L.

2. T dada por

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ T(p(x)) &= \frac{d^2 p(x)}{dx^2}, \end{aligned}$$

es una T.L.

T dada por

$$T : V \to V$$
$$T(x) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0,$$

es una T.L. llamada **homotecia de razón** *a.*

Propiedades 9.1.1 *Sean T y L dos transformaciones lineales de V en W, entonces,*

1. $T(\theta_v) = \theta_w$.
2. $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$.
3. *$T + L$ es una T.L.*
4. *λT es T.L., para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.*
5. *Si $T : V \to W$ y $L : W \to Z$ son dos transformaciones lineales, entonces $L \circ T : V \to Z$, es una T.L.*

Observación: Denotaremos por $\mathcal{L}(V, W)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W donde V y W son espacios de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. De 3. y 4. se tiene que $\mathcal{L}(V, W)$ es un subespacio del espacio de todas las funciones de V en W donde la función nula es el vector nulo de $\mathcal{L}(V, W)$.

Definición 9.1.2 **(Kernel o núcleo)** *Sea $T : V \to W$ una T.L. Se llama* **kernel** *o* **núcleo** *de T, al conjunto de todos los vectores de V tales que su imagen es el vector nulo de W, se denota por $Ker(T)$,*

$$Ker(T) = \{x \in V : T(x) = \theta_w\}.$$

Definición 9.1.3 **(Imágen)** *Se llama* **imágen** *de T al conjunto de las imágenes de todos los vectores de V, es decir, al recorrido de la función T. Se denota por $Im(T)$,*

$$Im(T) = Rec(T) = \{y \in W : \exists x \in V, T(x) = y\},$$

o también

$$Im(T) = \{T(x) : x \in V\}.$$

Proposition 9.1.1 *Sea $T : V \to W$ una T.L., entonces,*

1. *$Ker(T)$ es subespacio de V.*
2. *$Im(T)$ es subespacio de W.*

Demostración: Demostrar en clases.

Definición 9.1.4 (**Nulidad y rango**) *Sea $T : V \to W$ una T.L.. Se llama* **nulidad** *de T a la dimensión del $Ker(T)$ y se denota por $\eta(T)$. Se llama* **rango** *de T a la dimensión de la $Im(T)$ y se denota por $\rho(T)$.*

Ejemplo 9.1.2 *1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*

$$T(x, y) = -2(x, y),$$

es una T.L. (verificarlo). Muestre que $\eta(T) = 0$.

2. $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$T(p(x)) = p(1/3),$$

es una T.L. (la demostración de esta afirmación queda a cargo del lector). Encuentre $Ker(T)$ e $Im(T)$.

Proposition 9.1.2 *Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base del espacio V y $T \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera la $Im(T)$.*

Demostración: Demostrar en clases.

Proposition 9.1.3 *Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. T es inyectiva si y sólo si $Ker(T) = \{\theta_v\}$.*

Observación: Si $T : V \to W$ es una $T.L.$ inyectiva y $\{x_1, \ldots, x_p\}$ es $L.I.$, entonces $\{T(x_1), \ldots, T(x_p)\}$ es $L.I.$.

Teorema 9.1.1 (**Dimensiones**) *Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ entonces, $dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(V)$.*

Ejemplo 9.1.3 *Se sabe que la transformación lineal $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*

$$T(p(x)) = p(1/3),$$

es tal que $dim(Ker(T)) = 2$ y $dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}) = 1$. Luego,

$$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = 3 = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})).$$

Teorema 9.1.2 (**Fundamental del álgebra lineal**) *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Sea W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo y $\{w_1, \ldots, w_n\}$, vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que*

$$T(v_j) = w_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ejemplo 9.1.4 *Sea $B = \{(1,2),(0,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y considere $w_1 = (-1,1,0)$, $w_2 = (0,-3,1) \in \mathbb{R}^3$. Encuentre $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,2) = (-1,1,0)$ y $T(0,-1) = (0,-3,1)$.*

9.1.1 Matriz asociada a una transformación lineal

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sea W un espacio vectorial de dimensión m sobre $\mathbb{K}$. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, y $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W. Si T es cualquier transformación lineal de V en W, entonces

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \tag{9.1.1}$$

de los w_i. Los escalares $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ son las coordenadas de $T(v_j)$ en la base $\mathcal{B}'$. Por consiguiente, la transformación T está determinada por los mn escalares a_{ij} mediante la expresión (9.1.1).

Definición 9.1.5 *La matriz $m \times n$, A, definida por $[A]_{ij} = a_{ij}$, se llama matriz asociada de T respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$; y se denota*

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = A.$$

.

Ejemplo 9.1.5 1. *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida*

$$T(x,y,z) = (2x+y, 3y, x+4z, z).$$

Sean $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Encuentre la matriz asociada a T con respecto a las bases B, B'.

2. *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x,y,z) = (2x-y, y+z)$. Encuentre la matriz asociada a T con respecto a las bases B_1, B_2.*

Proposition 9.1.4 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente y A una matriz de orden $m \times n$ con elementos en $\mathbb{K}$. Entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que $[T]_{B_1 B_2} = A$.*

Ejemplo 9.1.6 *La transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

es?

Proposition 9.1.5 *Sea V y W un espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, y $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ una* *base de W. Entonces*

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}, \quad \forall\, v \in V. \tag{9.1.2}$$

Ejemplo 9.1.7 *Sea $T : \mathcal{B}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$,*

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b, c+2d, b),$$

Encuentre la matriz asociada a T respecto a las bases

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$B_2 = \{(-2,2,2), (1,0,0), (1,1,0)\}.$$

Si $x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1/2 & 4 \end{pmatrix}$, encuentre $[T(x)]_{B_2}$.

Teorema 9.1.3 *Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$; sean $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ transformaciones lineales. Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ son bases de los espacios V, W y Z, respectivamente, entonces*

$$[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}. \tag{9.1.3}$$

Demostración: Sean

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}, \quad \mathcal{B}'' = \{z_1, \ldots, z_l\}$$

y

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,\ 1 \le j \le n; \qquad U(w_i) = \sum_{k=1}^{l} b_{ki} z_k,\ 1 \le i \le m.$$

Es decir

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [a_{ij}] \qquad \text{y} \qquad [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} = [b_{ij}].$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(UT)(v_j) &= U(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} U(w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{l} b_{ki} z_k \\
&= \sum_{k=1}^{l} (\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}) z_k.
\end{aligned}$$

Luego el coeficiente kj de la matriz $[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$ es $\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}$ que es igual a la fila k de $[U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$ por la columna j de $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, en símbolos, si $A = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, $B = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$ y $C = [UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$, entonces

$$[C]_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij} = F_k(B)C_j(A) = [BA]_{kj}.$$

Proposition 9.1.6 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, B y B', bases de V y W respectivamente. Si $T : V \to W$ y $S : V \to W$ son transformaciones lineales, entonces*

1. $[T + S]_{BB'} = [T]_{BB'} + [S]_{BB'}$.
2. $[\lambda T]_{BB'} = \lambda[T]_{BB'}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 9.1.7 *Sea V espacio vectorial de dimensión finita, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V y $T, U : V \to V$ operadores lineales. Entonces*

1. $[UT]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$.
2. *Si T es inversible, entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz inversible y*
$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Demostración:

1. Es inmediato del teorema anterior tomado $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'' = \mathcal{B}$.
2. Denotemos I al operador identidad de V, entonces I se puede escribir $I = TT^{-1}$, luego
$$I_n = [I]_{\mathcal{B}} = [TT^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}}$$
y análogamente, $I = T^{-1}T$, luego
$$I_n = [I]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}T]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}.$$
Por lo tanto $[T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$.

Ejemplo 9.1.8 *Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + 3y, 4y - x)$ y $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$. Y considere las bases $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\} = B_2$ y $B_3 = \{(1, 3), (2, 5)\}$. Muestre que $[LT]_{B_1B_2} = [L]_{B_2B_3}[T]_{B_1B_2}$.*

Matriz de transición, matriz de cambio de base o de paso

Definición 9.1.6 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{v_1', \ldots, v_n'\}$, bases de V. Sea $I : V \to V$ la transformación idéntica. $[I]_{B_1B_2} = P$ se llama* **de cambio de base** *o* **de paso** *de la base B_1 a B_2. Y $[I]_{B_2B_1}$ es la* **matriz de transición** *de B_2 a B_1.*

Ejemplo 9.1.9 *1. Sean $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B_2 = \{(-1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 0, -1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Hallar las matrices de cambio de base P y Q.*

9.1.2 Listado 7

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3$

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$

   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (\cos(x + y), \sin(z))$

   d) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 + (b + c)x + d$

   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x^2, x^3)$

2. Determine una base para el $Ker(T)$ e $Im(T)$ donde T es la transformación lineal siguiente:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$, $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & z \end{pmatrix}$

   b) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_2$

   c) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$

   d) $T : \mathcal{P}_2(x) \to \mathbb{R}^2$, $T(ax^2 + bx + c) = (a - c, b + c)$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de las bases $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

   a) Encuentre la ecuación de definición de T.

   b) Encuentre el rango de T y una base para $Ker(T)$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que: $T(1, 0, 0) = (2, 1, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 0, 1) = (2, -1, 1)$.

   a) Encuentre la ecuación de definición de T.

   b) Encuentre una base para $Ker(T)$ e $Im(T)$.

   c) Indique la nulidad y el rango de T.

5. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (3x + y, x + z)$

   a) Encuentre una base para $Ker(T)$ y para $Im(T)$.

   b) Determine la nulidad y el rango de T.

6. Defina la transformación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases
   $B_1 = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, -1, 0), (-2, 0, 1), (-1, 0, 0)\}$ es

$$[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 6 & 3 \\ -27/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ respecto de las bases $B_1 = \{(1,0), (-1,1)\}$ y $B_2 = \{(1,0,1), (1,-1,0), (0,1,-1)\}$.

   a) Encuentre la ecuación de definición de T.

   b) Encuentre las coordenadas de $T(5,-1)$ en la base B_2 usando la matriz asociada.

8. Sean $B_1 = \{1, t, t^2\}$ y $B_2 = \{t-1, t+1, t^2+1\}$ bases del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(R)$.

   a) Encuentre las matrices asociadas a la aplicación I (identidad) respecto de las bases B_1, B_2 ($[I]_{B_1B_2}$) y B_2, B_1 ($[I]_{B_2B_1}$).

   b) De las matrices obtenidas en a) use la que corresponda para encontrar las coordenadas del vector $v = 2t^2 + 5t - 9$ en la base B_2.

9. Considere la siguiente transformación lineal $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $D(p) = \frac{d}{dx}(p(x))$ y encuentre la matriz asociada respecto de la base canónica.

10. Sea $T : \mathcal{P}_2(R) \to \mathbb{R}$, $T(p(x)) = \displaystyle\int_0^1 p(x)dx$. Encontrar la matriz asociada a T respecto de las bases $B_1 = \{1, x-1, x(x-1)\}$ y $B_2 = \{1\}$.

11. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 10 & 8 & 8 & -6 \\ 8 & 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

   a) Pruebe que la nulidad de T es 2.

   b) Sean $v_1 = (4,7,-12,0)$, $v_2 = (0,-5,8,4)$, $v_3 = (2,1,-2,2)$. Pruebe que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es $L.D.$ y que $v_1, v_2, v_3 \in Ker(T)$.

   c) Sean v_1, v_2 como en b), $v_4 = (2,1,-2,1)$ y $v_5 = (1,1,1,1)$. Acepte que $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$ y usando esta información encuentre una base para $Im(T)$.

   d) Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de modo que $Ker(T) = \langle\{v_4, v_5\}\rangle$ y $Im(T) = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$.

12. Determine una aplicación lineal de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$dim(Ker(T)) = 2 \quad y \quad Im(T) = \langle\{(2,-1,0), (-1,2,2)\}\rangle.$$

CAPÍTULO 10

Valores y vectores propios

10.1 Valores y vectores propios

Definición 10.1.1 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T un operador lineal sobre V. Un* **valor propio** *o* **autovalor** *de T es un escalar λ de $\mathbb{K}$ tal que*

$$T(v) = \lambda v,$$

para algún $v \in V$, $v \neq \theta$. Si λ es un **autovalor** *de T, entonces*

1. *cualquier $\theta \neq v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ se llama* **vector propio** *o* **autovector** *de T asociado al* **valor propio** *λ.*

Los valores propios se llaman también a menudo raíces características, eigenvalores. valores característicos o valores espectrales. Nosotros usaremos, preferentemente, "vector propio".

Teorema 10.1.1 *Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $T : V \to V$ un operador lineal y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de T. Entonces los vectores propios asociados a λ son los vectores no nulos de $Ker(T - \lambda I)$.*

Demostración: (Hacer en clases.)

Ejemplo 10.1.1 *1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x + 2y, 3x + 3y)$. Encuentre los valores propios y vectores propios de T.*

Observación: Notemos que el conjunto de todos los vectores propios de un operador lineal $T : V \to V$ asociados al valor propio λ, unido con el vector nulo es un subespacio de V.

Definición 10.1.2 *El conjunto definido en la observación anterior se llama* **espacio propio asociado** *al valor propio λ y viene dado por*

$$S_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}.$$

Ejemplo 10.1.2 *Considere el operador lineal del ejemplo anterior cuyos valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$. Calcule S_1 y S_6.*

Teorema 10.1.2 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Si B es una base para V, entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de T si y sólo si*

$$|[T - \lambda I]_B| = 0.$$

Observaciones:

1. Observemos que $|[T - \lambda I]_B|$ es un polinomio en λ de grado $n = dim(V)$, llamado **polinomio caracteristico** de T.
   Por tanto, λ es un valor propio de T si y sólo si λ es raíz de su polinomio característico. Así, toda $T.L.$ definida sobre un $\mathbb{C}^n$-espacio vectorial tiene n valores propios, donde n es la dimensión del espacio, la multiplicidad de la raíz λ_i del polinomio característico se llama **multiplicidad algebraica** de λ_i
2. La dimensión del espacio propio correspondiente al valor propio λ se llama multiplicidad geométrica de λ.
3. Si λ es valor propio de T, entonces multiplicidad geométrica de λ es $\leq$ multiplicidad algebraica de λ.

Ejemplo 10.1.3 *1. Para la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x+2y, 3x+3y)$. Considere la base $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Encuentre los valores propios de T.*

2. Considere el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación lineal cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre los valores propios de T.

Teorema 10.1.3 *Sea V espacio vectorial y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Sean $v_1, \dots, v_m$ vectores propios de T, con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ respectivamente. Suponga que estos valores propios son distintos entre si, esto es, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Entonces $v_1, \dots, v_m$ son linealmente independientes.*

Proof. Hagamos la demostración por inducción sobre m.

Caso base. Si $m = 1$, no hay nada que demostrar puesto que un vector no nulo el LI.

Paso inductivo. Supongamos que el enunciado es verdadero para el caso $m-1$ con $m > 1$, (hipótesis inductiva o HI), y probemos entonces que esto implica que es cierto para m. Debemos ver que si

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_mv_m = 0 \qquad (*)$$

entonces $c_1 = \cdots c_m = 0$. Multipliquemos $(*)$ por λ_1, obtenemos:

$$c_1\lambda_1 v_1 + c_2\lambda_1 v_2 + \cdots c_m\lambda_1 v_m = 0. \tag{$**$}$$

También apliquemos T a $(*)$ y obtenemos

$$c_1\lambda_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2 + \cdots c_m\lambda_m v_m = 0. \tag{$***$}$$

Ahora a $(**)$ le restamos $(***)$ y obtenemos:

$$c_2(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + \cdots c_m(\lambda_1 - \lambda_m)v_m = 0. \tag{10.1.1}$$

Como, por hipótesis inductiva, $v_2, \ldots, v_m$ son LI, tenemos que $c_i(\lambda_1 - \lambda_i) = 0$ para $i \geq 2$. Como $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$ para $i \geq 2$, obtenemos que $c_i = 0$ para $i \geq 2$. Por $(*)$ eso implica que $c_1 = 0$ y por lo tanto $c_i = 0$ para todo i.

Corolario 10.1.1 *Sea V espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \to V$ una transformación lineal que tiene n vectores propios $v_1, \ldots, v_n$ cuyos valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son distintos entre si. Entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.*

Ejemplo 10.1.4 *1. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (10x - 10y + 6z, 8x - 8y + 6z, -5x + 5y - 3z)$. Considere la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Encuentre los valores propios y los respectivos espacios propios asociados.*

Definición 10.1.3 *Sea V espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ lineal. Diremos que T es diagonalizable si existe una base de V de vectores propios de T.*

En el caso que T sea una transformación lineal diagonalizable y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sea una base de vectores propios con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, entonces

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

y, por lo tanto, la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ es diagonal, más precisamente

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Teorema 10.1.4 *Sea $T : V \to V$ una T.L. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es diagonalizable.*
2. *La dimensión de cada S_λ es igual al grado de multiplicidad de λ.*
3. *$\sum dim(S_\lambda) = dim(V)$.*

Ejemplo 10.1.5 Resuelto: *Sea T una transformación lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representada en la base canónica por la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es

$$p_A(x) = \det \begin{bmatrix} 5-x & -6 & -6 \\ -1 & 4-x & 2 \\ 3 & -6 & -4-x \end{bmatrix} = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = -(x-2)^2(x-1).$$

¿Cuáles son las dimensiones de los espacios de los vectores propios asociados con los dos valores propios? Se deben resolver las ecuaciones asociadas a las matrices

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

y

$$A - I = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Las soluciones de estos sistemas son los espacios propios de los valores propios 2 y 1 respectivamente. En el primer caso,

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+3F_2]{F_1+3F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, la solución del sistema asociado a $A - 2I$ es

$$V_2 = \{(2y + 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} =< (2, 1, 0), (2, 0, 1) >$$

cuya dimensión es 2.

Por otro lado,

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+3F_2]{F_1+4F_2} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-2F_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, la solución del sistema asociado a $A - I$ es

$$V_1 = \{(z, -\frac{1}{3}z, z) : z \in \mathbb{R}\} =< (1, -\frac{1}{3}, 1) > .$$

Entonces, una base de vectores propios de T podría ser

$$\mathcal{B} = \{(2, 1, 0), (2, 0, 1), (1, -\frac{1}{3}, 1)\}$$

y en esa base la matriz de la transformación lineal es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 10.1.5 *Si $T : V \to V$ es una transformación lineal diagonalizable y B es una base de V, entonces existe una matriz invertible P, tal que $P^{-1}[T]_B P$ es una matriz diagonal.*

Ejemplo 10.1.6 *1. Hallar los valores propios, vectores propios y espacios propios de las siguientes matrices A_i, $i = 1, \dots, 4$ y decidir si son diagonalizables. Cuando sí lo sean, dar una P_i tal que $D_i = P_i^{-1} A_i P_i$. Considerarlas primero como matrices reales y luego como complejas.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 10.1.7 *1. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el operador definido por $p \to T(p)$ donde*

$$T(p(x)) = (a - b + 4c) + (3a + 2b - c)x + (2a + b - c)x^2,$$

con $p(x) = a + bx + cx^2$.

a) Muestre que T es una transformación lineal.

b) Usando la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, encuentre la matriz A asociada a T.

c) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de la matriz A.

d) Encuentre una base para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de T.

10.1.1 Listado 8

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la transformación lineal tal que $T(x, y, z) = (-x + 4y - 2z, 3y - 2z, 4y - 3z)$.

   a) Encuentre, si es posible, una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_B$ sea diagonal. **(En Práctica 1.)**

   b) Si T es diagonalizable, escriba la matriz diagonal.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica. Encuentre si existe, una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_B$ sea diagonal.

3. ¿Es la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalizable?.

4. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$.

   a) Decida si T es o no diagonalizable. **(En Práctica 4.)**

   b) Si lo es, escriba la base B' respecto de la cual la matriz asociada a T es diagonal y escriba $[T]_{B'}$,

   c) Construya la matriz de paso de la base canónica B a la base B' y encuentre $[(1, 1, 1)]_{B'}$.

5. Sean $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$ los valores propios de una transformación lineal T y $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,0,1)$, $v_3 = (-1,1,0)$, vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente.

   a) Encuentre la transformación lineal T.

   b) Resuelva la ecuación $T(x,y,z) = (5x, 5y, 5z)$.

   c) Resuelva la ecuación $T(x,y,z) = (x,y,z)$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuya matriz asociada respecto de la base canónica es
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
(En Práctica 6.)

   a) Determine los valores propios de T.

   b) Determine los espacios propios asociados.

   c) Encontrar, si es posible, una base para $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada a T respecto de ella sea diagonal.

   d) Resolver en $\mathbb{R}^3$ la ecuación $T(u) = 2u$.

7. Dada la matriz A, determine valores y vectores propios, espacios propios asociados y decida si A es diagonalizable. En caso afirmativo, escriba la matriz P que diagonaliza a A.

   a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

   d) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ **(En Práctica 7d.)**

8. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una $T.L.$ definida por $T(x,y,z) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 4x - 2y + 3z)$

   a) Determine los valores propios de T.

   b) Encuentre una base y la dimensión de los espacios propios asociados.

   c) Decida si T es diagonalizable. En caso afirmativo, escriba la base B' de $\mathbb{R}^3$, formada por los vectores propios y encuentre la matriz asociada a T respecto de B'.

   d) Halle una base de $\mathbb{R}^3$ de modo que la matriz asociada a la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida en la base canónica por $T(1,0,0) = (-3, -6, 2/3)$, $T(0,1,0) = (2, 5, -2/3)$, $T(0,0,1) = (6, 9, 0)$ sea una matriz diagonal respecto de dicha base.

9. Sea a un número real y considere la matriz **(En Práctica 9.)**
$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

   a) Determine los valores propios de A_a.

b) Determine los subespacios propios asociados a cada valor propio.

c) Muestre que A es diagonalizable verificando a que existe una matriz P invertible tal que $P^{-1}A_aP$ es diagonal.