UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y ESTADÍSTICA

Geometría IMA-113
Listado de ejercicios

1. Grafique el lugar geométrico definido por cada una de las siguientes ecuaciones: (indique vértices, focos, centros asintotas según corresponda)

   a) $y^2 + 4y - 6x + 22 = 0$
   b) $(y-1)^2 = 2x + 4$
   c) $3x^2 - 5y^2 + 6x + 10y = 32$
   d) $x^2 - 4x - 4y = 0$
   e) $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$
   f) $x^2 - 4x + y^2 - 16y + 4 = 0$
   g) $x^2 + 3y^2 + 6x + 6 = 0$
   h) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$
   i) $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 9 = 0$
   j) $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$
   k) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$
   l) $4x^2 - 3y^2 + 8x + 16 = 0$
   m) $4x^2 + 9y^2 - 8x = 32$

2. Califique como Verdadera o falsa cada una de las proposiciones. Justifique formalmente su respuesta.

   a. La ecuación $x^2 + y^2 + ax + by = c$ representa una circunferencia para todos los números reales diferentes de cero a,b,c.
   b. La distancia entre los focos de la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es $2\sqrt{a^2 - b^2}$
   c. La ecuación $x^2 + y^2 - 2kx + 4 = 0$ describe una circunferencia si y sólo si $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   d. El vértice de una parábola es el foco de la otra parábola y viceversa, si la ecuación de una de ellas es $y^2 - 2y - 4x + 1 = 0$, entonces la ecuación de la otra parábola es $y^2 + 2y + 2x - 4 = 0$
   e. La cónica de ecuación $y = x^2 + 2x - 1$, tiene su foco en $(1, 0)$.
   f. Sea la parábola P, cuya ecuación es $P : 2y^2 - 3y + 5x + 2 = 0$, su foco tiene por coordenadas $F_a\left(-\frac{107}{40}, \frac{3}{4}\right)$

3. Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como centro el vértice de la parábola que tiene por ecuación $x + 3y^2 - y = 0$, y contiene al foco de la misma.

   Resp. $\left(x - \frac{1}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{144}$.

4. Una circunferencia tiene por ecuación $x^2 + (y-2)^2 = 1$. La recta de ecuación $y = kx$ donde $k \in \mathbb{R}$, es tangente a la circunferencia. Halle todos los valores posibles de k.

   Resp. $k = \pm\sqrt{3}$

5. Determine la ecuación del conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que la suma de la distancia de P a los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ es 14.

   Resp. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$

6. Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que la distancia al punto $(1, -3)$ es dos veces la distancia a la recta definida por la ecuación $x - 4 = 0$.

   Resp. $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{12} = 1$

7. Un avión sigue una trayectoria tal que su distancia a una estación de radar situada en el punto $(2, 0)$ es igual a un tercio de su distancia a una carretera que sigue el trayecto de la recta definida por $x = -2$. Determine la ecuación de la trayectoria que sigue el avión.

   Resp. $\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{2} = 1$

8. Determine la ecuación del lugar geométrico compuesto de puntos $P(x, y)$ que cumplen con la condición de que su distancia al eje y es el doble que su distancia al punto $(2, -3)$.

   Resp. $3x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 52 = 0$

9. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $(2,-2)$ es siempre igual a un tercio de su distancia al punto $(4,1)$. Determine la ecuación del lugar geométrico,

Resp. $8x^2+8y^2-28x+38y+55=0$

10. Determine la ecuación general del lugar geométrico definido por el conjunto de puntos (x,y) ubicados en el plano tales que la distancia al punto $(-1,-2)$ es el doble de la distancia a la recta definida por la ecuación $x-3=0$.

Resp. $3x^2-y^2-26x-4y+31=0$

11. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la distancia a la recta $x+3=0$ es siempre dos unidades mayor que su distancia al punto $(1,1)$.

Resp. $y^2-2y-4x+1=0$

12. Sea $P:\left\{\begin{array}{l} x^2+4y^2-25=0 \\ 2x^2-2y^2-5=0 \end{array}\right.$. Encuentre el conjunto solución S.

Resp. $S=\left\{\left(\sqrt{7},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{7},-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{7},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{7},-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right\}$

13. Hallar los valores de b para los cuales el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ y=x+b \end{array}\right.$ tiene solución única.

Resp. $b=\pm 2\sqrt{2}$

14. Sea el sistema $\left\{\begin{array}{l} y^2-8y-a_1x+3a_1+16=0 \\ y^2-8y-a_2x-2a_2+16=0 \end{array}\right.$, $a_1,a_2\in\mathbb{R}^+$. Encuentre los valores de a_1,a_2 para que el sistema tenga solución en $\mathbb{R}^2$.

Resp. $a_1>a_2>0$

15. Encontrar el conjunto solución de los siguientes sistemas

1. $\left\{\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=2x+3 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2-6y=9 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} yx^2=20 \\ y=9-x^2 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=12 \\ x^2-y^2=4 \end{array}\right.$

Resp. 1. $S_1=\{(3,9),(-1,1)\}$
2. $S_2=\{(\sqrt{21},2)),(-\sqrt{21},2))\}$
3. $S_3=\{(2,5),(-2,5),(\sqrt{5},4),(-\sqrt{5},4)\}$
$S_4=\{(2\sqrt{2},2),(2\sqrt{2},-2),(-2\sqrt{2},2),(2\sqrt{2},-2)\}$

16. Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $(-1,6)$ y es tangente al lugar geométrico que tiene por ecuación $x^2+y^2-2x-6y-3=0$. **Resp.** $2x-3y+20=0$

17. Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $-\frac{3}{2}$ y es tangente al lugar geométrico que tiene por ecuación $4x^2+4y^2+8x+4y-47=0$. **Resp.** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ o $y=-\frac{1}{2}x-\frac{17}{2}$

18. Hallar la ecuación de la recta que es paralela a la recta que tiene por ecuación $x+4y+31=0$ y es tangente al lugar geométrico que tiene por ecuación $x^2+y^2+6x-8=0$.

Resp. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$ o $y=-\frac{1}{4}x-5$

19. Determine la ecuación de la recta l que contiene al centro de la elipse de ecuación $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$ y contiene al foco de la parabola de ecuación $x^2-6x-4y+5=0$.

Resp. $x+2y-3=0$

20. Determine la ecuación de la parábola que es cóncava hacia arriba y contiene tres de los vértices de la elipse cuya ecuación es $9x^2+4y^2=36$.

Resp. $x^2=-\frac{4}{3}(y-3)$

21. Determine el valor de la distancia minima entre la circunferencia $\mathcal{C}$ y la recta $\mathcal{L}$, si sus ecuaciones son respectivamente $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ y $\mathcal{L} : x - 2y - 6 = 0$.

    Resp. $d = \frac{11}{\sqrt{5}} - 1$

22. Dadas una circunferencia $\mathcal{C}$ y una elipse $\mathcal{E}$ que son concentricas de las cualas se conoce la ecuación de la elipse $\mathcal{E} : 9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 62 = 0$ y que $\mathcal{C}$ es tangente al eje, determine la ecuación de $\mathcal{C}$.

    Resp. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 22$

23. Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, en el punto (x_1, y_1) perteneciente a la circunferencia es: $x_1 x + y_1 y = r^2$.