

Versión en revisión

APUNTES DE ANÁLISIS NUMÉRICO

(IMA422)

Versión del 10 de diciembre de 2025

Dr. Víctor Andrés Osores Escalona
Departamento de Matemática, Física y Estadística
Universidad Católica del Maule, Chile

Índice general

Contents	IV
1. Preliminares	2
1.1. Conceptos básicos	2
1.2. Valores y vectores propios	6
2. Álgebra lineal numérica	11
2.1. Normas de vectores y matrices	11
2.2. El problema de la sensitividad para un sistema lineal	18
2.3. El método de cuadrados mínimos y la transformación de una matriz $n \times n$ a una matriz triangular superior	32
2.4. El problema de valores propios de una matriz	41
2.4.1. Localización de valores propios y la sensitividad del problema	41
3. Teoría de distribuciones	50
3.1. Un problema de valores de contorno en \mathbb{R}	51
3.1.1. El Lema de Lax-Milgram	53
3.2. Un problema de valores de contorno en \mathbb{R}^n	54
3.3. Nociones básicas de distribuciones	56
3.4. Teoría de distribuciones	61
3.5. Derivación y multiplicación por funciones	65
3.5.1. Resultados adicionales sobre derivaciones distribucionales	65
4. Espacios de Sobolev	69
4.1. Conceptos y resultados preliminares	69
4.1.1. Teoremas de trazas	72

4.2. Inyecciones compactas y continuas	77
5. Introducción al Método de Elementos Finitos (FEM)	79
5.1. El método de Galerkin	79
5.1.1. Caso H -elíptico	79
5.2. El espacio de polinomios lineales por partes continuos 1D	84
5.3. Interpolación	86
5.3.1. Interpolación lineal	86
5.3.2. Interpolación lineal por partes continua	88
5.4. Proyección en L^2	89
5.4.1. Derivación de un sistema de ecuaciones lineales	90
5.4.2. Algoritmo básico para calcular la proyección en L^2	91
5.4.3. Estimación de error <i>a priori</i>	91
5.5. Método de elementos finitos (FEM) 1D	92
5.5.1. Algoritmo básico para computar la solución de elementos finitos	95
5.5.2. Estimación de error a priori	96
5.5.3. Implementación en Python	97
5.6. Un problema modelo con coeficientes variables	99
5.6.1. Formulación variacional	100
5.6.2. Aproximación por Elementos Finitos	102
5.7. Aproximación polinomial a trozos en 2D	106
5.7.1. Mallas	107
5.7.2. Espacios de polinomios a trozos	110
5.7.3. Interpolación	114
5.8. L^2 -Proyección	116
5.8.1. Derivación del sistema de ecuaciones lineales	116
5.8.2. Implementación de la L^2 -Proyección	117
5.8.3. Cuadratura e integración numérica	119
5.8.4. Implementación numérica	120
5.8.5. Propiedades de la matriz de masas	126
5.9. El método de elementos finitos en 2D	127
5.9.1. El método de elementos finitos para la ecuación de poisson	127

5.9.2. Aproximación por elementos finitos	128
5.9.3. Existencia y unicidad de solución de elementos finitos	130
5.9.4. Cotas a priori del error	130
5.9.5. Propiedades de la matriz de rigidez	132
5.9.6. Un problema modelo con coeficientes variables	133
5.9.7. Implementación numérica	134
5.9.8. Ensamblaje de las condiciones de frontera	138
5.9.9. Un solucionador de elementos finitos para la ecuación de Poisson	140
5.9.10. El problema de Dirichlet (puro)	148
5.9.11. El problema de neumann	149
5.9.12. El problema de autovalores	154
5.9.13. Un problema general lineal elíptico de segundo orden	160
5.10. Problemas dependientes del tiempo	161
5.10.1. La ecuación del calor	161
5.10.2. Formulación variacional	162
5.10.3. Discretización espacial	162
5.10.4. Discretización temporal	163
5.10.5. Estimaciones de estabilidad	163
5.10.6. Una estimación semidiscreta en el espacio	164
5.10.7. Una estimación totalmente discreta	165
5.10.8. Estimaciones de error a priori	165
5.10.9. Proyección de Ritz	165
5.10.10. Estimación semidiscreta en el espacio	166
5.10.11. Estimación totalmente discreta	167
5.10.12. Implementación computacional	168