UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y ESTADÍSTICA

Geometría IMA-113
Listado de ejercicios

1. Grafique el lugar geométrico definido por cada una de las siguientes ecuaciones: (indique vértices, focos, centros asintotas según corresponda)

   a) $y^2 + 4y - 6x + 22 = 0$
   b) $(y-1)^2 = 2x + 4$
   c) $3x^2 - 5y^2 + 6x + 10y = 32$
   d) $x^2 - 4x - 4y = 0$
   e) $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$
   f) $x^2 - 4x + y^2 - 16y + 4 = 0$
   g) $x^2 + 3y^2 + 6x + 6 = 0$
   h) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$
   i) $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 9 = 0$
   j) $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$
   k) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$
   l) $4x^2 - 3y^2 + 8x + 16 = 0$
   m) $4x^2 + 9y^2 - 8x = 32$

2. Califique como Verdadera o falsa cada una de las proposiciones. Justifique formalmente su respuesta.

   a. La ecuación $x^2 + y^2 + ax + by = c$ representa una circunferencia para todos los números reales diferentes de cero a,b,c.
   b. La distancia entre los focos de la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es $2\sqrt{a^2 - b^2}$
   c. La ecuación $x^2 + y^2 - 2kx + 4 = 0$ describe una circunferencia si y sólo si $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   d. El vértice de una parábola es el foco de la otra parábola y viceversa, si la ecuación de una de ellas es $y^2 - 2y - 4x + 1 = 0$, entonces la ecuación de la otra parábola es $y^2 + 2y + 2x - 4 = 0$
   e. La cónica de ecuación $y = x^2 + 2x - 1$, tiene su foco en $(1, 0)$.
   f. Sea la parábola P, cuya ecuación es $P : 2y^2 - 3y + 5x + 2 = 0$, su foco tiene por coordenadas $F_a\left(-\frac{107}{40}, \frac{3}{4}\right)$

3. Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como centro el vértice de la parábola que tiene por ecuación $x + 3y^2 - y = 0$, y contiene al foco de la misma.

   Resp. $\left(x - \frac{1}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{144}$.

4. Una circunferencia tiene por ecuación $x^2 + (y-2)^2 = 1$. La recta de ecuación $y = kx$ donde $k \in \mathbb{R}$, es tangente a la circunferencia. Halle todos los valores posibles de k.

   Resp. $k = \pm\sqrt{3}$

5. Determine la ecuación del conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que la suma de la distancia de P a los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ es 14.

   Resp. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$

6. Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que la distancia al punto $(1, -3)$ es dos veces la distancia a la recta definida por la ecuación $x - 4 = 0$.

   Resp. $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{12} = 1$

7. Un avión sigue una trayectoria tal que su distancia a una estación de radar situada en el punto $(2, 0)$ es igual a un tercio de su distancia a una carretera que sigue el trayecto de la recta definida por $x = -2$. Determine la ecuación de la trayectoria que sigue el avión.

   Resp. $\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{2} = 1$

8. Determine la ecuación del lugar geométrico compuesto de puntos $P(x, y)$ que cumplen con la condición de que su distancia al eje y es el doble que su distancia al punto $(2, -3)$.

   Resp. $3x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 52 = 0$

9. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $(2,-2)$ es siempre igual a un tercio de su distancia al punto $(4,1)$. Determine la ecuación del lugar geométrico,

Resp. $8x^2+8y^2-28x+38y+55=0$

10. Determine la ecuación general del lugar geométrico definido por el conjunto de puntos (x,y) ubicados en el plano tales que la distancia al punto $(-1,-2)$ es el doble de la distancia a la recta definida por la ecuación $x-3=0$.

Resp. $3x^2-y^2-26x-4y+31=0$

11. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la distancia a la recta $x+3=0$ es siempre dos unidades mayor que su distancia al punto $(1,1)$.

Resp. $y^2-2y-4x+1=0$

12. Sea $P:\left\{\begin{array}{l} x^2+4y^2-25=0 \\ 2x^2-2y^2-5=0 \end{array}\right.$. Encuentre el conjunto solución S.

Resp. $S=\left\{\left(\sqrt{7},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{7},-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{7},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{7},-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right\}$

13. Hallar los valores de b para los cuales el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ y=x+b \end{array}\right.$ tiene solución única.

Resp. $b=\pm 2\sqrt{2}$

14. Sea el sistema $\left\{\begin{array}{l} y^2-8y-a_1x+3a_1+16=0 \\ y^2-8y-a_2x-2a_2+16=0 \end{array}\right.$, $a_1,a_2\in\mathbb{R}^+$. Encuentre los valores de a_1,a_2 para que el sistema tenga solución en $\mathbb{R}^2$.

Resp. $a_1>a_2>0$

15. Encontrar el conjunto solución de los siguientes sistemas

1. $\left\{\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=2x+3 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2-6y=9 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} yx^2=20 \\ y=9-x^2 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=12 \\ x^2-y^2=4 \end{array}\right.$

Resp. 1. $S_1=\{(3,9),(-1,1)\}$
2. $S_2=\{(\sqrt{21},2)),(-\sqrt{21},2))\}$
3. $S_3=\{(2,5),(-2,5),(\sqrt{5},4),(-\sqrt{5},4)\}$
$S_4=\{(2\sqrt{2},2),(2\sqrt{2},-2),(-2\sqrt{2},2),(2\sqrt{2},-2)\}$

16. Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $(-1,6)$ y es tangente al lugar geométrico que tiene por ecuación $x^2+y^2-2x-6y-3=0$. **Resp.** $2x-3y+20=0$

17. Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $-\frac{3}{2}$ y es tangente al lugar geométrico que tiene por ecuación $4x^2+4y^2+8x+4y-47=0$. **Resp.** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ o $y=-\frac{1}{2}x-\frac{17}{2}$

18. Hallar la ecuación de la recta que es paralela a la recta que tiene por ecuación $x+4y+31=0$ y es tangente al lugar geométrico que tiene por ecuación $x^2+y^2+6x-8=0$.

Resp. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$ o $y=-\frac{1}{4}x-5$

19. Determine la ecuación de la recta l que contiene al centro de la elipse de ecuación $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$ y contiene al foco de la parabola de ecuación $x^2-6x-4y+5=0$.

Resp. $x+2y-3=0$

20. Determine la ecuación de la parábola que es cóncava hacia arriba y contiene tres de los vértices de la elipse cuya ecuación es $9x^2+4y^2=36$.

Resp. $x^2=-\frac{4}{3}(y-3)$

21. Determine el valor de la distancia minima entre la circunferencia $\mathcal{C}$ y la recta $\mathcal{L}$, si sus ecuaciones son respectivamente $\mathcal{C}: x^2+y^2+2x-4y-4=0$ y $\mathcal{L}: x-2y-6=0$.

Resp. $d=\frac{11}{\sqrt{5}}-1$

22. Dadas una circunferencia $\mathcal{C}$ y una elipse $\mathcal{E}$ que son concentricas de las cualas se conoce la ecuación de la elipse $\mathcal{E}: 9x^2+16y^2+18x-64y-62=0$ y que $\mathcal{C}$ es tangente al eje x, determine la ecuación de $\mathcal{C}$.

23. Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2=r^2$, en el punto (x_1,y_1) perteneciente a la circunferencia es: $x_1x+y_1y=r^2$.

24. Los vértices de una hipérbola son los puntos en el plano $(\pm 2,0)$ y sus focos son los puntos $(\pm 3,0)$. Hallar su ecuación y su excentricidad.

Resp. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, $e=1.5$.

25. Los vértices de una hipérbola son $(0,\pm 4)$ y su excentricidad es igual a $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.

Resp. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$,$F_i(0,\pm 6)$, $i=1,2$.

26. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(6,0)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2x-3=0$.

Resp. $3x^2-y^2=27$.

27. Hallar los puntos de intersección de la recta $2x-9y+12=0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2-9y^2=11$.

Resp. $2x\pm\sqrt{5}=0$

28. Se llama hipérbola equilátera una hipérbola de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

a) Comprobar que la excentricidad de una hipérbola equilátera es igual a $\sqrt{2}$.

b) Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola equilátera a sus asíntotas es una constante.

29. Los vertices de una hipérbola son los puntos $(-1,3)$ y $(3,3)$, y su excentricidad es 5 . Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos, y las longitudes de cada lado recto.

Resp. $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$. $F_1(4,3), F_2(-2,3)$. $LR=5$.

30. Para cada una de las siguientes ecuaciones, para las correspondientes a hipérbolas: determinar las coordenadas del centro, vertices y focos; su excentricidad y las ecuaciones de sus asíntotas.

a) $x^2-9y^2-4x+36y-41=0$

b) $4x^2-9y^2+32x+36y+64=0$

c) $x^2-4y^2-2x+1=0$

Resp. a) $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{1}=1$. Centro $(2,2)$. Vértices $(5,2)$ y $(-1,2)$. Focos $(2\pm\sqrt{10},2)$. Excentricidad $\frac{\sqrt{10}}{3}$. Asíntotas $x+3y-8=0, x-3y+4=0$. c) No es una hipérbola. Son dos rectas concurrentes: $x\pm 2y-1=0$.

31. Hallar sus puntos de intersección: $x^2-2y^2+x+8y-8=0$ y $3x^2-4y^2+3x+16y-18=0$.

Resp. $(1,1),(1,3),(-2,1),(-2,3)$.

32. Verifique que la curva $xy=1$ corresponde a una hipérbola.

33. Comprobar que la elipse $9x^2+16y^2=144$ y la hipérbola $3x^2-4y^2=12$ tienen los mismos focos.

34. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2-9=0$ y la hipérbola $9x^2-4y^2-36=0$.

Resp. $(2.35,1.86),(-2.35,1.86),(2.35,-1.86),(-2.35,-1.86)$ (valores redondeados a dos decimales).

35. Use la rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación dada. Identifique la sección cónica.

a) $x^2 + xy + y^2 = 4$. **Resp.** Elipse.

b) $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 5$. **Resp.** Hipérbola.

c) $x^2 - 2xy + y^2 = 8x + 8y$. **Resp.** Parábola.

d) $x^2 + 4xy = 16$. **Resp.** Hipérbola.

e) $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$. **Resp.** Hipérbola.

f) $x^2 + 4xy + 4y^2 = 16\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y$. **Resp.** Parábola.

g) $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$. **Resp.** Elipse.

h) $-x^2 + 6\sqrt{3}xy + 5y^2 - 8\sqrt{3}x + 8y = 12$. **Resp.** Hipérbola.

i) $8x^2 - 8xy + 2y^2 + 10\sqrt{5}x = 5$. **Resp.** Hipérbola.

j) $x^2 - xy + y^2 - 4x - 4y = 20$. **Resp.** Elipse.