

# Modelamiento matemático: ¿Cómo entendemos el mundo?

Víctor Osores

Departamento de Matemática, Física y Estadística,  
Facultad de Ciencias Básicas.

**Universidad Católica del Maule, Talca, Chile**  
**Agosto, 2024**



**UCM**

UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE



# Outline

## 1 Modelo

- ¿Qué es un modelo?
- Modelos físicos y modelos conceptuales
- Modelo matemático y modelo computacional

## 2 Importancia de la modelización matemática y la simulación

- Medicamento para el resfriado
- Modelo de Lotka–Volterra
- Reacción química

## 3 M. G.



# Modelo

Un modelo es una representación simplificada de un sistema, fenómeno o proceso del mundo real.



Figura: Soy DALL-E, ¿lo hice bien?.

- Captura los aspectos más importantes del sistema original mientras se ignoran los detalles menos relevantes (facilita el análisis y la resolución de problemas)



# Modelos físicos y modelos conceptuales

- **Físico:** Representaciones tangibles de algo.

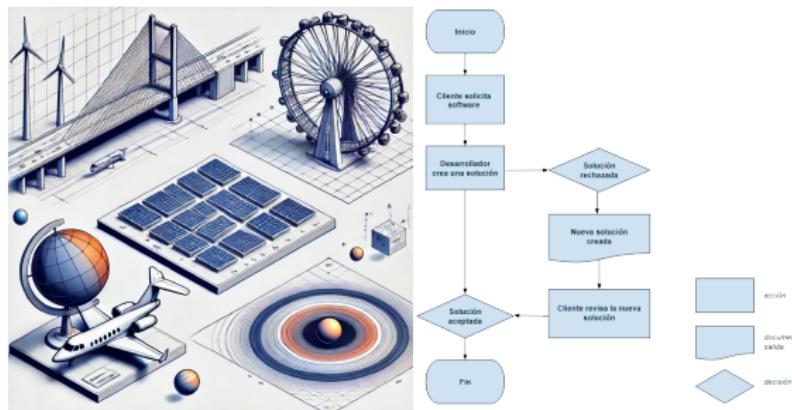


Figura: Soy DALL-E. Conforme pasa el tiempo lo hago mejor.

- **Conceptual:** Representaciones abstractas que ayudan a entender ideas o conceptos (diagramas de flujo o mapas mentales) .



# Modelo matemático

Un modelo matemático es una representación abstracta de un fenómeno del mundo real utilizando conceptos y estructuras matemáticas.

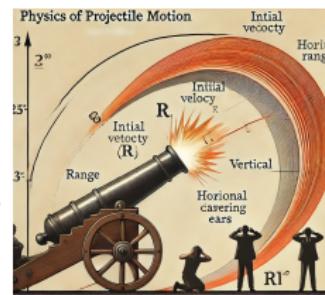
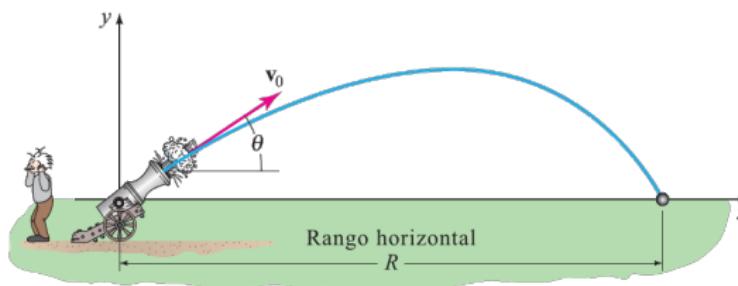


Figura: Soy DALL-E. Creo que mi problema es con la generación de palabras.

Permite: Describir, analizar y predecir (mediante ecuaciones, funciones u otras herramientas matemáticas).

¿Por qué?



# Galileo Galilei

*La filosofía está escrita en ese vasto libro que continuamente está abierto ante nuestros ojos (me refiero al universo), pero no se puede entender si primero no se aprende a comprender el lenguaje y a conocer los caracteres con los que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin los cuales es humanamente imposible entender ni una palabra; sin estos, uno está vagando por un oscuro laberinto.*

— Galileo Galilei

**Las matemáticas son el lenguaje con el que Dios ha escrito el universo.**



# Modelo computacional

Es un MM en ciencias de la computación que requiere recursos computacionales para simular sistemas complejos.

- ChatGPT.
- DALL-E.
- Tesla Autopilot, otras.



Figura: DALL-E: Esta soy yo.



# ¿Cómo entendemos el mundo que nos rodea?

Nuestros sentidos son herramientas fundamentales para interactuar y entender el mundo a nuestro alrededor.

- Solo pueden detectar una fracción del espectro de fenómenos que ocurren en el universo (problemas con las escalas).
- Comprensión poco profunda (no revelan las causas subyacentes ni las leyes que los gobiernan).
- Pueden ser subjetivos y susceptibles a ilusiones o interpretaciones erróneas.

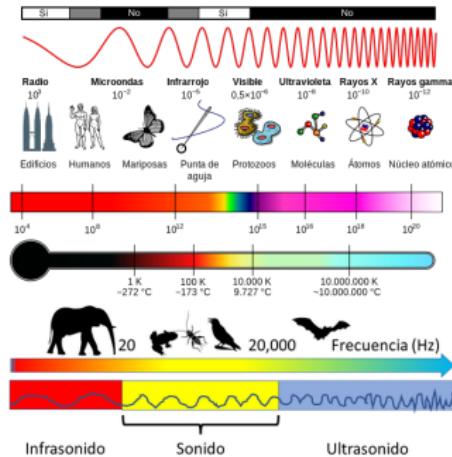


Figura: Espectro electromagnético. Rango auditivo humano.



# ¿Cómo entendemos el mundo que nos rodea?

Nuestros sentidos son herramientas fundamentales para interactuar y entender el mundo a nuestro alrededor.

- Solo pueden detectar una fracción del espectro de fenómenos que ocurren en el universo (problemas con las escalas).
- Comprensión poco profunda (no revelan las causas subyacentes ni las leyes que los gobiernan).
- Pueden ser subjetivos y susceptibles a ilusiones o interpretaciones erróneas.

Se requiere un entendimiento que va más allá de la percepción directa y cotidiana.

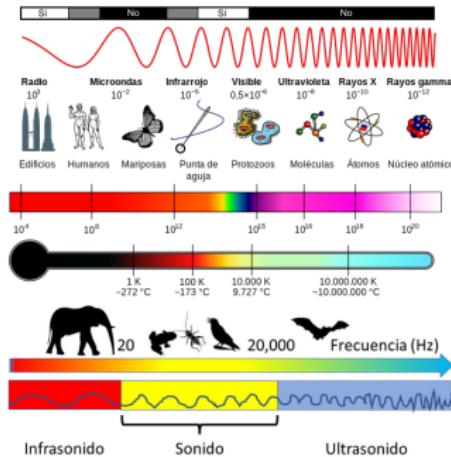


Figura: Espectro electromagnético. Rango auditivo humano.

# Modelos matemáticos

¿Como representamos los fenómenos en lenguaje matemático?

- Isaac Newton (1642–1727), un físico y matemático inglés, desarrolló el cálculo mientras investigaba problemas relacionados con el movimiento y las fuerzas, especialmente en el contexto de la gravitación universal y la mecánica celeste.
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), un matemático y filósofo alemán, desarrolló el cálculo en un enfoque más abstracto y formal.

Introducen los operadores derivada,  $\frac{d}{dx}$  y el operador integral  $\int$ .

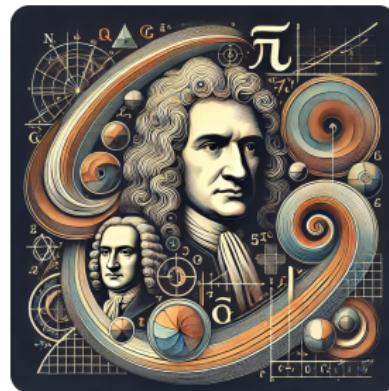
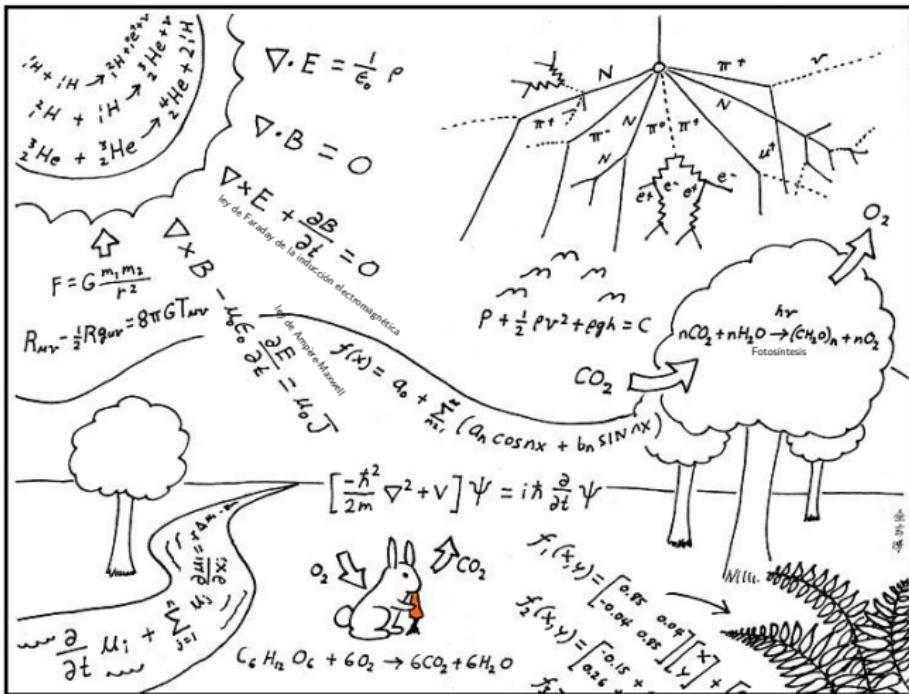
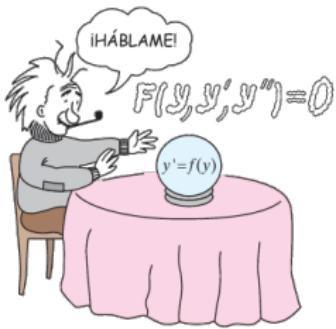
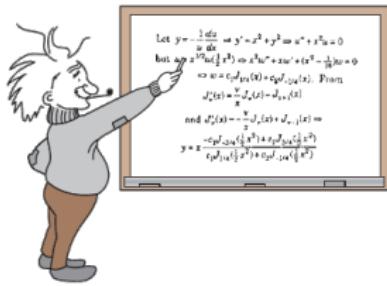


Figura: DALL-E: Ilustración abstracta que simboliza las contribuciones de Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz.







# Evolución de un medicamento

Sistema de dos EDO de primer orden con datos iniciales:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -k_1x, & x(0) &= A \\ \frac{dy}{dt} &= k_1x - k_2y, & y(0) &= 0\end{aligned}$$

Flujo de una sola dosis de  $A$  unidades de medicamento a través de los compartimentos del tracto gastrointestinal y sanguíneo.

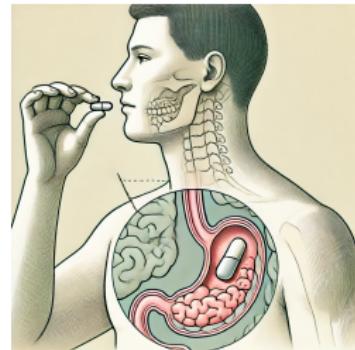
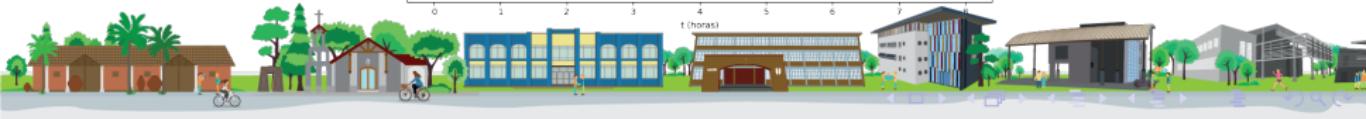
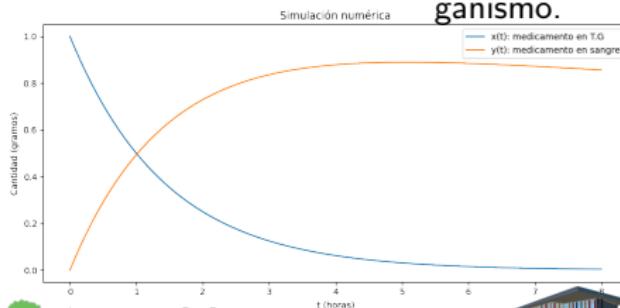


Figura: Medicamento en el organismo.



# Evolución de un medicamento

Sistema de dos EDO de primer orden con datos iniciales:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -k_1 x, & x(0) &= A \\ \frac{dy}{dt} &= k_1 x - k_2 y, & y(0) &= 0\end{aligned}$$

Flujo de una sola dosis de  $A$  unidades de medicamento a través de los compartimientos del tracto gastrointestinal y sanguíneo.

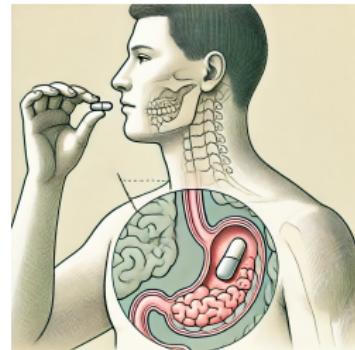
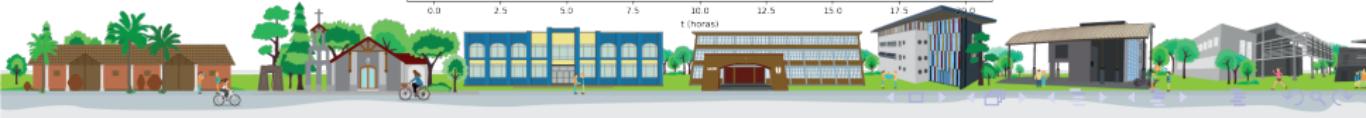
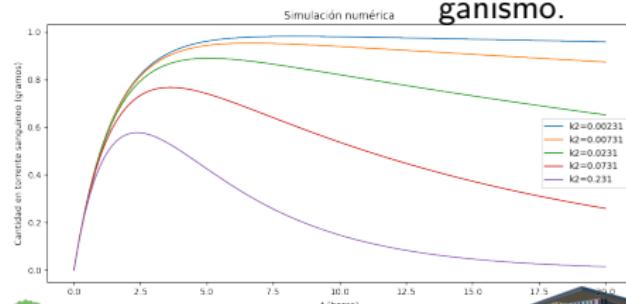


Figura: Medicamento en el organismo.

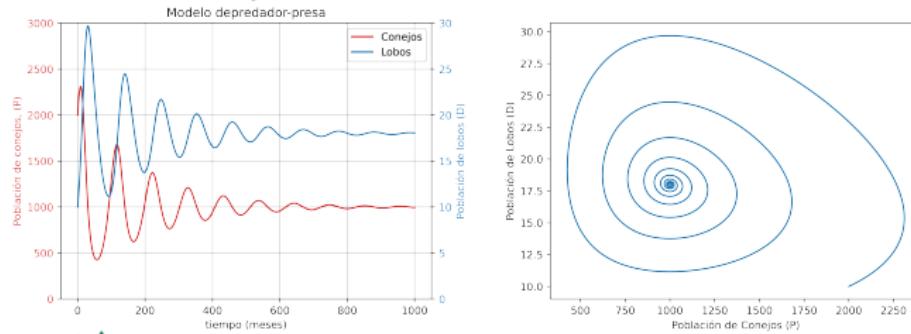


# Modelo depredador-presa (Lotka–Volterra)

Las ecuaciones de Lotka–Volterra, con capacidad de carga del ambiente ( $k$ ) vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= r_1 P \left(1 - \frac{P}{k}\right) - a_1 P D \\ \frac{dD}{dt} &= a_2 P D - r_2 D,\end{aligned}$$

donde  $r_1, r_2, a_1, a_2$  son parámetros (positivos) que representan las interacciones de las dos especies.



# Reacción de dos sustancias químicas presentes en un fluido

Ecuaciones de *Navier-Stokes* acopladas con ecuaciones de *advección-difusión-reacción*:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \right) = \nabla \cdot \sigma(\mathbf{w}, p) + f, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla u_1 - \nabla \cdot (\epsilon \nabla u_1) = f_1 - Ku_1 u_2,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla u_2 - \nabla \cdot (\epsilon \nabla u_2) = f_2 - Ku_1 u_2,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla u_3 - \nabla \cdot (\epsilon \nabla u_3) = f_3 + K(u_1 u_2 - u_3).$$



# Reacción de dos químicos presentes en un fluido

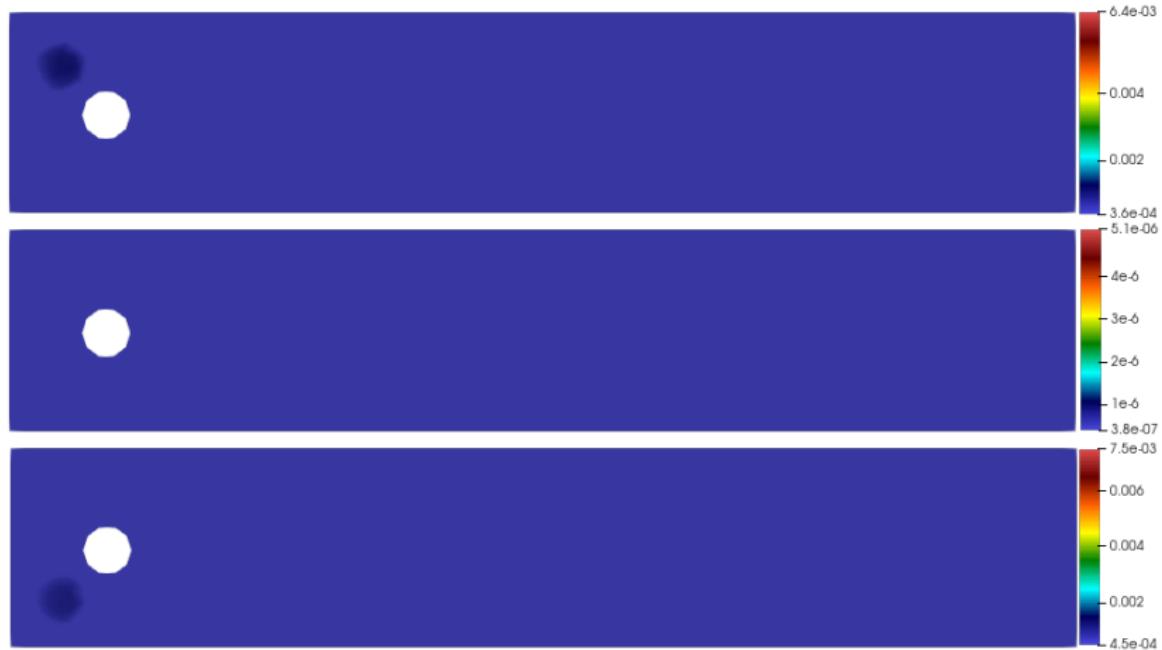


Figura: Concentraciones de las tres especies  $B$ ,  $C$  y  $A$ , respectivamente.



# Reacción de dos químicos presentes en un fluido

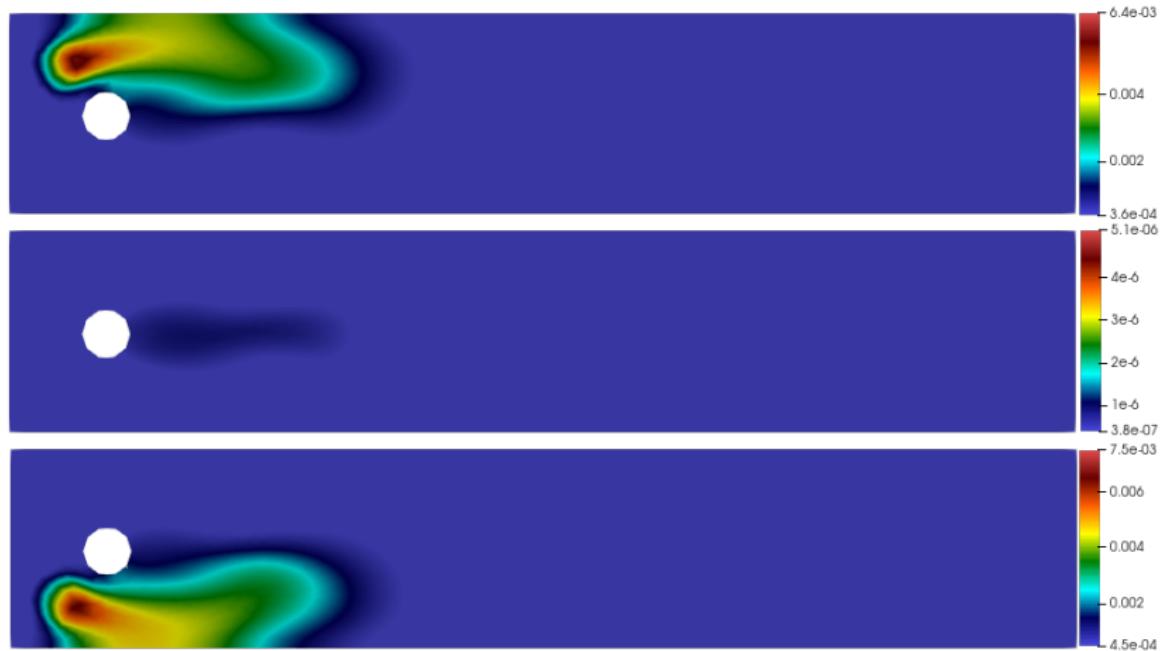


Figura: Concentraciones de las tres especies  $B$ ,  $C$  y  $A$ , respectivamente.



# Reacción de dos químicos presentes en un fluido

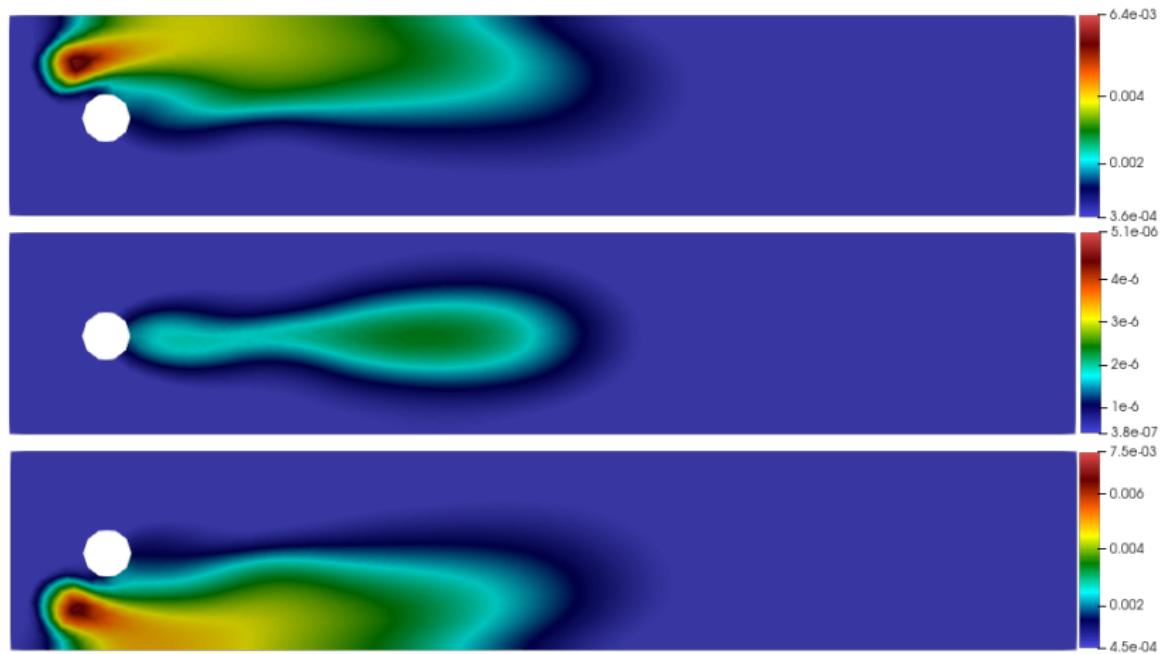


Figura: Concentraciones de las tres especies  $B$ ,  $C$  y  $A$ , respectivamente.



# Reacción de dos químicos presentes en un fluido

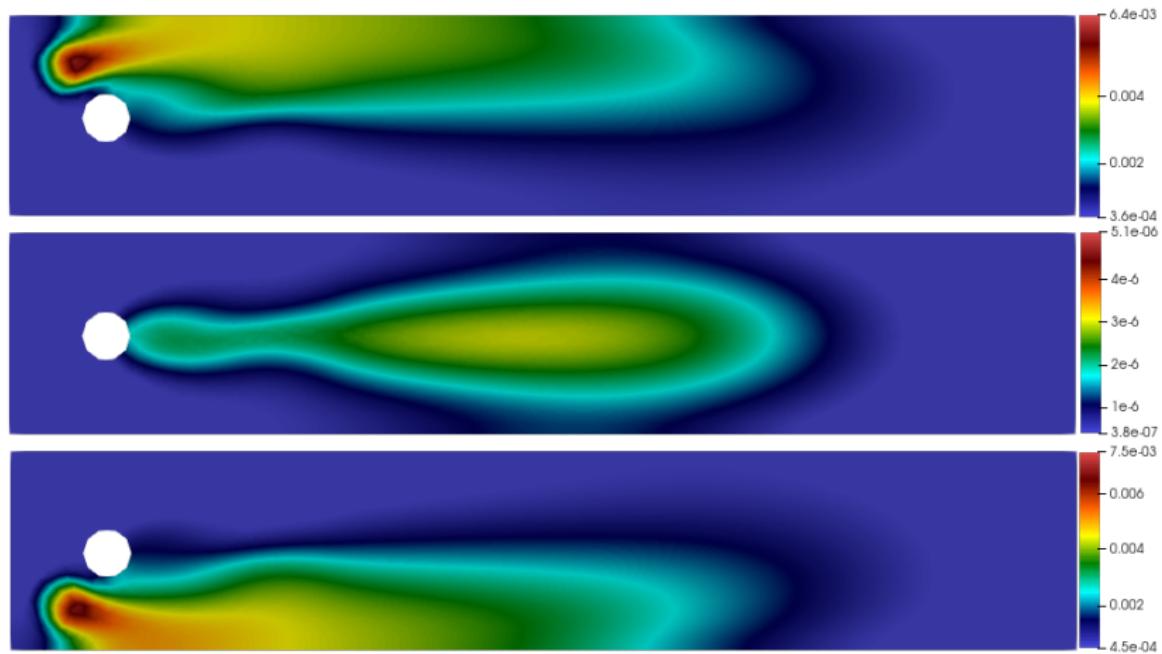


Figura: Concentraciones de las tres especies  $B$ ,  $C$  y  $A$ , respectivamente.



# Reacción de dos químicos presentes en un fluido

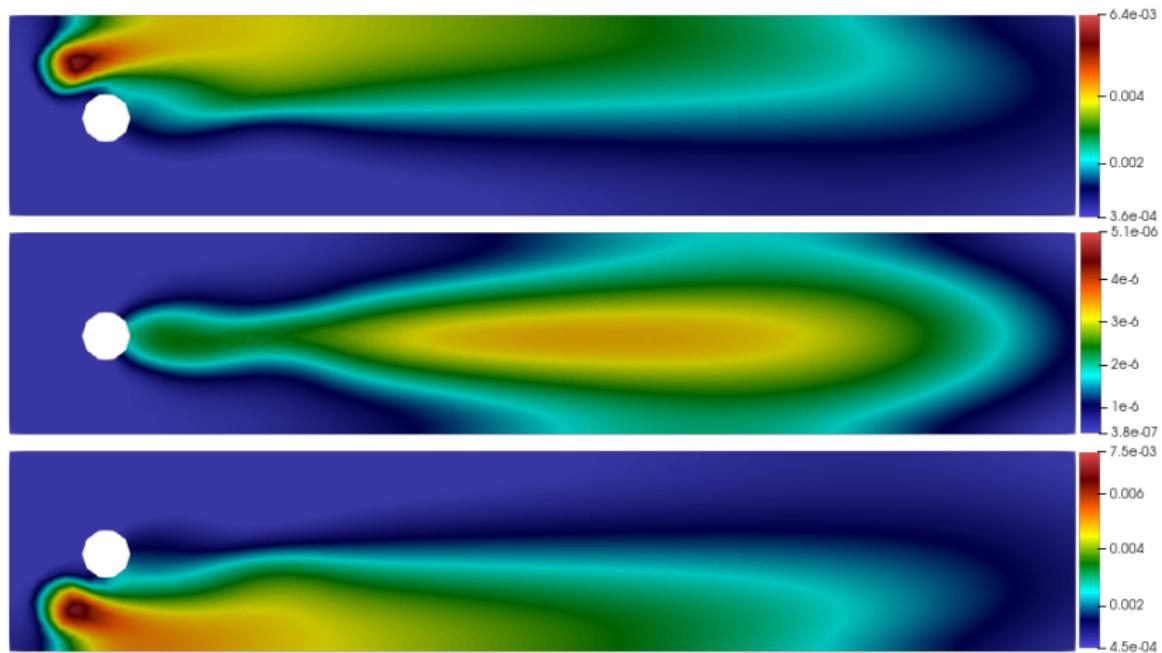


Figura: Concentraciones de las tres especies  $B$ ,  $C$  y  $A$ , respectivamente.



# Reacción de dos químicos presentes en un fluido

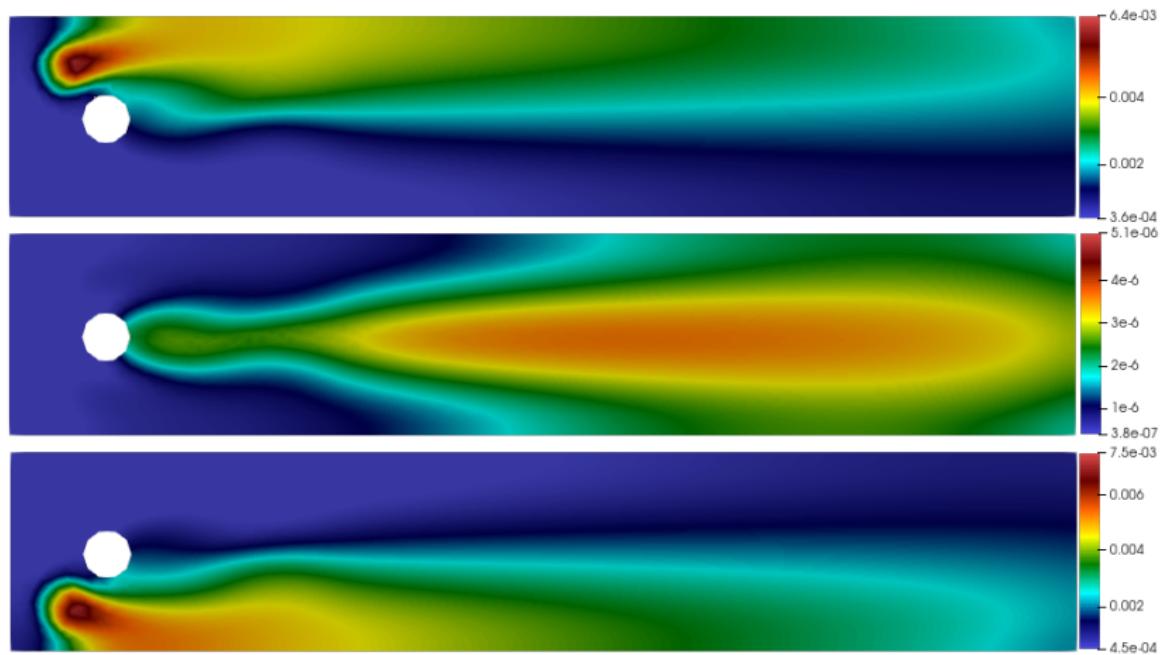


Figura: Concentraciones de las tres especies  $B$ ,  $C$  y  $A$ , respectivamente.



# Reacción de dos químicos presentes en un fluido

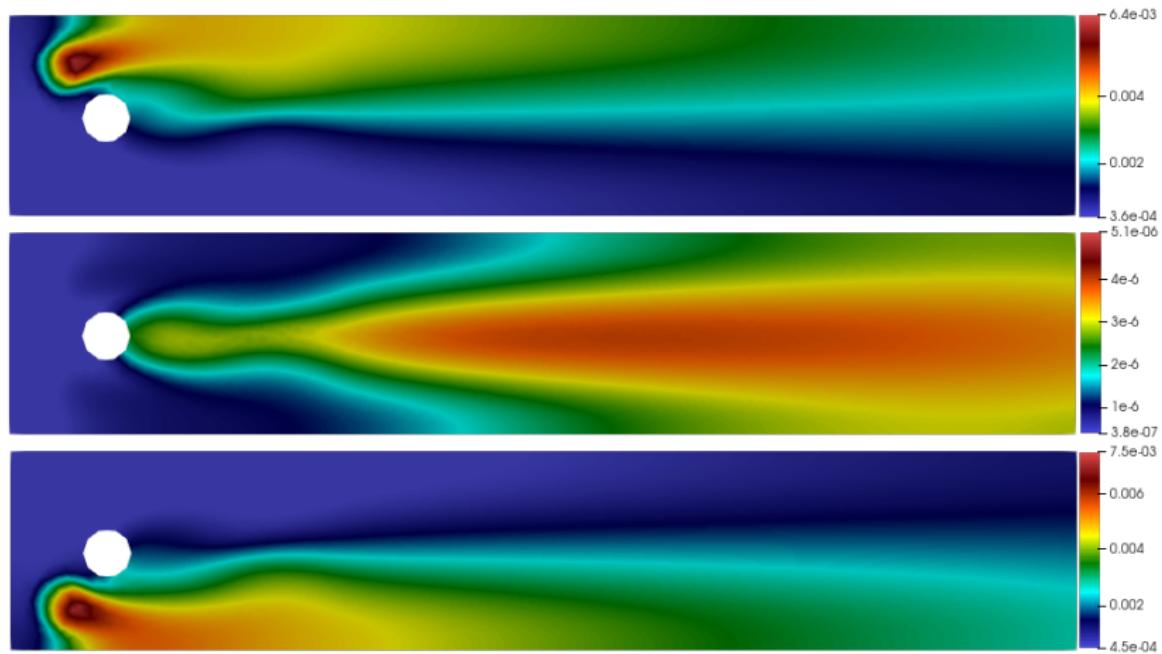


Figura: Concentraciones de las tres especies  $B$ ,  $C$  y  $A$ , respectivamente.



# Reacción de dos químicos presentes en un fluido

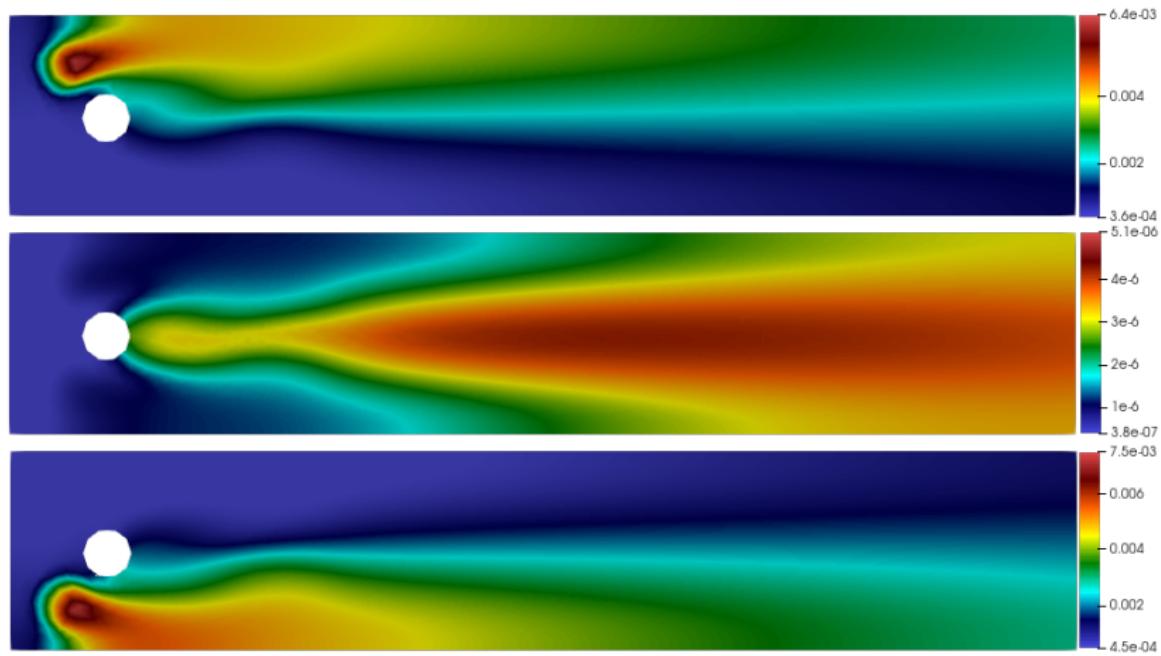


Figura: Concentraciones de las tres especies  $B$ ,  $C$  y  $A$ , respectivamente.



Muchas gracias.

