UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y ESTADÍSTICA

Cálculo II IMA-211
Listado de ejercicios

1. Calcula la integral de línea
$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
si $\vec{F}(x,y,z) = x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\imath} + (xz-y)\hat{k}$ y γ es la curva de trayectoria $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + 2t\hat{\jmath} + 4t^2\hat{k}$ que une el punto $(0,0,0)$ con el punto $(1,2,4)$.

2. Calcula la integral de línea
$$\int_\gamma xy^2\ \mathrm{d}x + x^2y\ \mathrm{d}y$$
si γ es el arco parabólico $x=y^2$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(-1,1)$, usando
a) x como parámetro,
b) la parametrización $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \cos(2t)+1), t\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$.

3. Calcula la integral
$$\oint_\gamma \frac{1}{|x|+|y|}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$$
donde γ es el contorno del cuadrado de vértices $\vec{A}=(1,0), \vec{B}=(0,1), \vec{C}=(-1,0)$ y $\vec{D}=(0,-1)$ recorrido en sentido antihorario.

4. Calcula la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2\right)$ sobre la curva γ que es el contorno del trozo de la esfera $x^2+y^2+z^2=1, x\geq 0, y\geq 0$ y $z\geq 0$, recorrido de modo que la cara exterior del trozo de la esfera queda a la izquierda.

5. Evalúa
$$\int_\gamma \left(x^2+y\right)\mathrm{d}x + \left(y^2+z\right)\mathrm{d}y + \left(z^2+x\right)\mathrm{d}z$$
sobre la curva cerrada γ que resulta de la unión entre la curvas $\gamma_1 : x+z=1, 0\leq x\leq 1,\ y=0; \gamma_2 : x+y=1, 0\leq y\leq 1, z=0;$ y$\gamma_3 : y^2+z^2=1, y\geq 0, z\geq 0, x=0$; recorrida de modo tal que la parte exterior de la superficie continua y acotada por esta curva queda a la izquierda de un observador sobre el plano xy que está a gran distancia del origen.

6. Calcula la integral de línea
$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\ \mathrm{d}x + y^2\ \mathrm{d}y - z^3\ \mathrm{d}z$$

7. Calcula la integral de línea
$$\int_{(a_1,b_1,c_1)}^{(a_2,b_2,c_2)} \frac{x\ \mathrm{d}x + y\ \mathrm{d}y + z\ \mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
donde (a_1,b_1,c_1) pertenece a la esfera $x^2+y^2+z^2=R_1^2$ y (a_2,b_2,c_2) pertenece a la esfera $x^2+y^2+z^2=R_2^2$, con $R_2>R_1>0$.

8. Considera el campo gravitacional

$$\vec{G}(\rho,\theta,\phi) = -\frac{mMg\hat{\rho}}{\rho^2} \quad \forall(\rho,\theta,\phi) \in]0,\infty[\times]0,2\pi]\times]0,\pi]$$

donde m es la masa de una partícula que es atraída por una masa M en el origen de $\mathbb{R}^3, g$ es una constante gravitacional, y ρ es la distancia al origen. Si M fuese la masa de la Tierra, ρ sería la distancia al centro de la Tierra y g sería la constante gravitacional de Newton. Muestra que $\vec{G}$ es un campo vectorial conservativo.

9. Encuentra, si es posible, una función potencial para el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2\cos x + z^3, 4 + 2y\operatorname{sen} x, 3xz^2 + 2\right) \quad \forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

10. Muestra que

$$\int_\gamma \left(6x + 2y^2\right) \mathrm{d}x + \left(4xy - z^2\right) \mathrm{d}y - 2yz\ \mathrm{d}z$$

es independiente de la trayectoria de cualquier curva γ seccionalmente regular y suave en $\mathbb{R}^3$, y determina su valor para una tal curva con punto inicial $(1,2,-1)$ y punto terminal $(4,0,2)$, de la siguiente forma:

a) Determinando una función potencial,

b) Determinando una poligonal de lados paralelos a los ejes coordenados.

11. Muestra que el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \left(3x^2y + 2, x^3 + 4y^3\right) \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

es conservativo.

12. Muestra que todo campo vectorial conservativo de clase C^1 es irrotacional. 8. Muestra que el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right) \quad \forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$$

es irrotacional y que, sin embargo, no verifica que

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

donde γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy recorrida en sentido antihorario. ¿Contradice esto al Teorema 5.7.4 y la Proposición 5.7.4? Justifica tu respuesta.

13. Calcula el trabajo del campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left(2xy - x^2, x + y^2\right)$ sobre la frontera de la superficie encerrada por las curvas $y = x^2 \mathrm{y} x = y^2$, recorrida en sentido antihorario. Verifica el Teorema 3.9.1.

14. Evalúa

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

donde γ es la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ recorrida en sentido antihorario, donde

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)$$

15. Sea $a > 0$. Evalúa la integral de línea

$$\oint_\gamma \frac{-y\ \mathrm{d}x + (x-a)\mathrm{d}y}{(x-a)^2 + y^2}$$

sobre cualquier curva γ cerrada, simple, regular y suave recorrida en sentido antihorario de forma tal que

a) el punto $(a,0)$ no pertenece a la curva ni a la región que ella encierra

b) el punto $(a,0)$ pertenece a la región encerrada por la curva.

16. Sean $a > 0$ y $b > 0$. Calcula el área de la región acotada limitada por la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

17. Sea $a > 0$. Halla el área de la región del primer cuadrante acotada por un arco de la cicloide $\vec{r}(t) = (at - a \operatorname{sen} t, a - a\cos t), t \in [0, 2\pi]$.

18. Calcula
$$\oint_\gamma e^{-\left(x^2-y^2\right)} \cos(2xy)\mathrm{d}x + e^{-\left(x^2-y^2\right)} \operatorname{sen}(2xy)\mathrm{d}y$$
donde γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$, recorrida en sentido antihorario.

19. a) Muestra que el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \left(x^3 - 2xy^3\right)\hat{\imath} - 3x^2y^2\hat{\jmath}$ es un campo vectorial gradiente.
    b) Evalúa
$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
donde γ es la curva de trayectoria $\vec{r}(t) = \left(\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t\right), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ejercicios resueltos

1. Calcular las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_C (x+y)ds$ donde σ es el borde del triángulo con vértices $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.

   (b) $\displaystyle\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$ donde σ es la circunferencia $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$

Solución:

(a) El triángulo dado se descompone en tres segmentos de recta que parametrizamos de la siguiente forma:
$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad (0 \le t \le 1);$$
$$C_2 : \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \end{cases} \quad (0 \le t \le 1);$$
$$C_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1-t \end{cases} \quad (0 \le t \le 1).$$

Calculamos en cada tramo el módulo del vector velocidad:
$$\sigma_1(t) = (t, 0) \Longrightarrow \sigma_1'(t) = (1, 0) \Longrightarrow |\sigma_1'(t)| = 1;$$
$$\sigma_2(t) = (1-t, t) \Longrightarrow \sigma_2'(t) = (-1, 1) \Longrightarrow |\sigma_2'(t)| = \sqrt{2};$$
$$\sigma_3(t) = (0, 1-t) \Longrightarrow \sigma_3'(t) = (0, -1) \Longrightarrow |\sigma_3'(t)| = 1.$$

Con estos datos, la integral de línea se calcula como sigue:
$$\begin{aligned}\int_C (x+y)ds &= \int_{C_1} (x+y)ds + \int_{C_2} (x+y)ds + \int_{C_3} (x+y)ds \\ &= \int_0^1 tdt + \int_0^1 \sqrt{2}dt + \int_0^1 (1-t)dt = \sqrt{2} + 1\end{aligned}$$

(b) Si escribimos la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$ de la forma $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$, su parametrización viene dada por
$$C : \begin{cases} x = (a/2) + (a/2)\cos t \\ y = (a/2)\operatorname{sen} t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

De este modo,
$$\sigma'(t) = (-a \operatorname{sen} t/2, a\cos t/2) \Longrightarrow |\sigma'(t)| = a/2.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\cos t)} \cdot \frac{a}{2}dt \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t}dt = \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\sqrt{1-\cos t}}dt \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{-1/2} d(1-\cos t) \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \cdot 2(1-\cos t)^{1/2} \Big|_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

2. Calcular $\int_C \left(x^3y+y^3x/3\right)dx + ax^2dy$, siendo C el contorno de la región definida por $x^2+y^2-2ay<0, y>a(a>0)$.

Solución: El contorno del semicírculo indicado se descompone en dos curvas (el diámetro inferior y la semicircunferencia superior), cuyas parametrizaciones son las siguientes:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = a \end{cases} \quad (-a \le t \le a); C_2 : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a + a\operatorname{sen} t \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi)$$

Calculamos por separado la integral a lo largo de cada curva. En el caso de C_1, como $dx = 1, dy = 0$, resulta:

$$\int_{C_1} \left(x^3y+y^3x/3\right)dx + ax^2dy = \int_{-a}^{a} \left(t^3\cdot a + a^3t/3\right)dt = 0$$

En $C_2, dx = -a\operatorname{sen} tdt, dy = a\cos tdt$, de modo que:

$$\begin{aligned}&\int_{C_2} \left(x^3y+y^3x/3\right)dx + ax^2dy \\ &= \int_0^{\pi} \left[a^3\cos^3 t(a+a\operatorname{sen} t) + a\cos t(a+a\operatorname{sen} t)^3/3\right]\cdot(-a\operatorname{sen} t)dt \\ &+ \int_0^{\pi} a\cdot a^2\cos^2 t\cdot a\cos tdt \\ &= \frac{-a^5}{3}\int_0^{\pi} \left(3\operatorname{sen} t\cos^3 t + 3\operatorname{sen}^2 t\cos^3 t + \operatorname{sen} t\cos t + 3\operatorname{sen}^2 t\cos t\right. \\ &\left. +3\operatorname{sen}^3 t\cos t + \operatorname{sen}^4 t\cos t\right)dt + a^4\int_0^{\pi}\cos^3 tdt = 0\end{aligned}$$

3. Hallar $\int_C \left(y^2+z^2\right)dx + \left(z^2+x^2\right)dy + \left(x^2+y^2\right)dz$ a lo largo de la curva $C: x^2+y^2=2z, x+y-z+1=0$.

Solución: La curva dada es la intersección del paraboloide $x^2+y^2=2z$ con el plano $x+y-z+1=0$. Si sustituimos el valor de z en la primera ecuación, la curva se puede expresar como:

$$C : \begin{cases} x^2+y^2 = 2x+2y+2 \\ z = x+y+1 \end{cases} \text{ o bien } C : \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 = 4 \\ z = x+y+1 \end{cases}$$

la cual puede parametrizarse como:

$$C : \begin{cases} x = 1+2\cos t \\ y = 1+2\operatorname{sen} t \\ z = 3+2\cos t+2\operatorname{sen} t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Sustituyendo estos valores y sus derivadas en la integral, resulta:

$$\begin{aligned}
&\int_C \left(y^2+z^2\right) dx + \left(z^2+x^2\right) dy + \left(x^2+y^2\right) dz \\
=&\int_0^{2\pi} \left[(1+2\operatorname{sen} t)^2 + (3+2\cos t+2\operatorname{sen} t)^2\right]\cdot(-2\operatorname{sen} t)dt \\
&+\int_0^{2\pi} \left[(3+2\cos t+2\operatorname{sen} t)^2 + (1+2\cos t)^2\right]\cdot(2\cos t)dt \\
&+\int_0^{2\pi} \left[(1+2\cos t)^2 + (1+2\operatorname{sen} t)^2\right]\cdot(-2\operatorname{sen} t+2\cos t)dt \\
=&\int_0^{2\pi} \left(24\cos t - 24\operatorname{sen} t + 40\cos^2 t - 40\operatorname{sen}^2 t + 24\cos^3 t - 24\operatorname{sen}^3 t\right) dt = 0.
\end{aligned}$$

4. Hallar las longitudes de los arcos de las siguientes curvas:

   (a) $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$ entre los puntos $(0,0,0)$ y $(3,3,2)$.

   (b) $y = a\operatorname{arcsen}(x/a), z = \frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ entre los puntos $(0,0,0)$ y (x_0,y_0,z_0).

   Solución: Si la curva se parametriza por el vector de posición $\vec{r}(t)$, con $t_0 \le t \le t_1$, la longitud viene dada por la fórmula

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} |r'(t)|\, dt$$

   (a) En este caso, $\vec{r}(t) = \left(3t, 3t^2, 2t^3\right)$, de donde $\overrightarrow{r'}(t) = \left(3, 6t, 6t^2\right)$ y $|r'(t)| = 3\left(1+2t^2\right)$. Teniendo en cuenta además que $(0,0,0) = \vec{r}(0)$ y $(3,3,2) = \vec{r}(1)$, resulta:

$$\ell = \int_0^1 3\left(1+2t^2\right) dt = 5$$

   (b) Si llamamos $x = t$, la curva se parametriza por

$$\vec{\sigma}(t) = \left(t, a\cdot\operatorname{arcsen}(t/a), \frac{a}{4}\ln\frac{a-t}{a+t}\right), 0 \le t \le x_0$$

   De aquí obtenemos:

$$\overrightarrow{\sigma'}(t) = \left(1, \frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}, \frac{-a^2}{2\left(a^2-t^2\right)}\right) \Longrightarrow |\sigma'(t)| = \frac{3a^2-2t^2}{2\left(a^2-t^2\right)}$$

   Por tanto,

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{x_0} \frac{3a^2-2t^2}{2\left(a^2-t^2\right)} dt = \int_0^{x_0}\left(1 - \frac{a^2}{2t^2-2a^2}\right) dt \\
&= x_0 - \frac{a^2}{2}\int_0^{x_0}\frac{1}{t^2-a^2}dt = x_0 - \frac{a^2}{2}\int_0^{x_0}\left(\frac{1/2a}{t-a} - \frac{1/2a}{t+a}\right) dt \\
&= x_0 - \frac{a}{4}\cdot\ln\left|\frac{x_0-a}{x_0+a}\right|
\end{aligned}$$

5. Hallar la masa del arco de curva

$$x = at, y = (a/2)t^2, z = (a/3)t^3 (0 \le t \le 1)$$

   si la densidad en cada punto vale $\rho = \sqrt{2y/a}$.

   Solución: La masa se calcula mediante la integral de línea $m = \int_C \rho\cdot ds$, a lo largo de la curva C. En este caso, la curva se parametriza por la función $\sigma(t) = \left(at, at^2/2, at^3/3\right)$, de donde $\sigma'(t) = \left(a, at, at^2\right)$ y $|\sigma'(t)| = a\sqrt{1+t^2+t^4}$.

   Como la densidad en cada punto de C vale $\rho(\sigma(t)) = t$, deducimos que

$$m = \int_0^1 at\sqrt{1+t^2+t^4}dt$$

Calculamos en primer lugar la integral indefinida:

$$I=\int t\sqrt{1+t^2+t^4}dt=\int t\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\int t\sqrt{\left(\frac{t^2+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2+1}dt$$

Haciendo el cambio de variable $\frac{t^2+1/2}{\sqrt{3}/2}=\operatorname{tg}u$, resulta

$$\begin{aligned}I&=\frac{3}{8}\int\sec^3 u du=\frac{3}{16}[\sec u\operatorname{tg}u+\ln|\sec u+\operatorname{tg}u|]\\&=\frac{3}{16}\left[\frac{t^2+1/2}{\sqrt{3}/2}\cdot\frac{\sqrt{t^4+t^2+1}}{\sqrt{3}}+\ln\left|\frac{t^2+1/2}{\sqrt{3}/2}+\frac{\sqrt{t^4+t^2+1}}{\sqrt{3}}\right|\right]\end{aligned}$$

En definitiva,

$$m=a\int_0^1 at\sqrt{1+t^2+t^4}dt=\frac{3a}{16}\left[\sqrt{3}-\frac{1}{3}+\ln\left(\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)\right].$$

6. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del contorno del triángulo esférico $x^2+y^2+z^2=a^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$.

Solución: Sean $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ las coordenadas del centro de gravedad. Debido a la simetría de la figura, $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$y, si la densidad se supone constante, $\bar{x}=\frac{1}{\ell}\int_C xds$. Descomponemos el triángulo esférico en tres curvas que parametrizamos como sigue:

$$C_1:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\operatorname{sen}t\\ z=0\end{cases},,0\leq t\leq\pi/2,$$

$$C_2:\begin{cases}x=0\\ y=a\cos t\\ z=a\operatorname{sen}t\end{cases},0\leq t\leq\pi/2,$$

$$C_3:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=0\\ z=a\operatorname{sen}t\end{cases},,0\leq t\leq\pi/2,$$

En los tres casos, $|r'(t)|=a$, de modo que:

$$\begin{aligned}\ell&=\int_C 1\cdot ds=\int_0^{\pi/2}adt+\int_0^{\pi/2}adt+\int_0^{\pi/2}adt=\frac{3a\pi}{2}\\ \int_C xds&=\int_{C_1}xds+\int_{C_2}xds+\int_{C_3}xds\\&=\int_0^{\pi/2}a\cos t\cdot a\cdot dt+\int_0^{\pi/2}a\cos t\cdot a\cdot dt=2a^2\end{aligned}$$

En definitiva, $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=\frac{4a}{3\pi}$.

7. Calcular las siguientes integrales de línea:

$$\int_{OA}xdy+ydx,\int_{OA}xdy-ydx$$

donde O es el origen de coordenadas y $A=(1,2)$, a lo largo de las trayectorias:

(a) segmento que une O con A.

(b) parábola con eje OY.

(c) poligonal que se compone de un segmento OB en el eje X y un segmento BA paralelo al eje Y.

Solución: En la primera de las integrales, si llamamos $P(x,y)=y, Q(x,y)=x$, como $\frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}$, entonces la integral es independiente de la trayectoria. Basta encontrar una función $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ cuyo gradiente sea $\overrightarrow{\nabla F}=(P,Q)$. Resulta en este caso $F(x,y)=xy$, con lo que la integral vale

$$\int_{OA}xdy+ydx=F(A)-F(O)=2$$

En la segunda integral, si llamamos $P(x,y)=-y, Q(x,y)=x$, entonces $\frac{\partial P}{\partial y}=-1, \frac{\partial Q}{\partial x}=1$, de modo que el valor de la integral depende de la trayectoria descrita. En cada caso, para resolver la integral debemos parametrizar la curva correspondiente.

(a) La recta que contiene el segmento que une O con A tiene por ecuación $y=2x$. Así pues,

$$\int_{OA} xdy - ydx = \int_0^1 x\cdot 2dx - 2x\cdot dx = \int_0^1 0dx = 0$$

(b) La ecuación general de la parábola con eje OY es $y=ax^2$. Como debe pasar por el punto A, entonces $2=a$. Así pues,

$$\int_{OA} xdy - ydx = \int_0^1 x\cdot 4xdx - \int_0^1 2x^2dx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}$$

(c) La poligonal indicada está formada por el segmento OB, donde $B=(1,0)$ y el segmento BA. El primero de ellos se parametriza por $x=t, y=0 (0\le t\le 1)$, y el segundo por $x=1, y=t (0\le t\le 2)$. La integral vale:

$$\begin{aligned}\int_{OA} xdy - ydx &= \int_{OB} xdy - ydx + \int_{BA} xdy - ydx\\ &= \int_0^1 0dt + \int_0^2 1dt = 2\end{aligned}$$

8. Hallar la integral de línea $\int_\sigma ydx + zdy + xdz$ donde σ es la curva $x=a\cos t, y=a\operatorname{sen} t, z=bt (0\le t\le 2\pi)$.

Solución: Sustituyendo en la integral los valores $x=a\cos t, y=a\operatorname{sen} t, z=bt, dx=-a\operatorname{sen} tdt$, $dy=a\cos tdt, dz=bdt$, tenemos:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi}\left(-a^2\operatorname{sen}^2 t + abt\cos t + ab\cos t\right)dt\\ &= \frac{-a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt + ab\left[t\operatorname{sen} t\big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\operatorname{sen} tdt\right] = -\pi a^2\end{aligned}$$

9. Calcular $\int_C yzdx + xzdy + xydz$ donde σ consta de los segmentos de rectas que unen $(1,0,0)$ con $(0,1,0)$ y con $(0,0,1)$.

Solución: Descomponemos la trayectoria en los dos segmentos de recta cuyas parametrizaciones respectivas son:

$$C_1:\left\{\begin{array}{l} x+y=1\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-t\\ y=t\\ z=0\end{array}\right. \quad (0\le t\le 1),$$

$$C_2:\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y+z=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=1-t\\ z=t\end{array}\right. \quad (0\le t\le 1).$$

Entonces la integral se calcula como sigue:

$$\int_C F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F = \int_0^1 0dx + 0dy + t(1-t)\cdot 0 + \int_0^1 t(1-t)\cdot 0 + 0dy + 0dz = 0$$

10. Sea σ una trayectoria suave.

(a) Probar que $\int_\sigma \vec{F} = 0$ si $\vec{F}$ es perpendicular a $\vec{\sigma}'(t)$ a lo largo de la curva $\vec{\sigma}(t)$.

(b) Probar que $\int_\sigma \vec{F} = \int_\sigma |\vec{F}|$ si $\vec{F}$ es paralelo a $\vec{\sigma}'(t)$ a lo largo de $\vec{\sigma}(t)$.

Solución: Por definición, $\int_\sigma \vec{F} = \int_{t_0}^{t_1}\vec{F}(\sigma(t))\cdot\overrightarrow{\sigma'}(t)dt$

(a) Si $\vec{F}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\sigma'}$, entonces el producto escalar $\vec{F}(\sigma(t))\cdot\overrightarrow{\sigma'}(t)$ es cero, de modo que la integral se anula.

(b) Por definición de producto escalar, $\vec{F}(\sigma(t)) \cdot \overrightarrow{\sigma'}(t) = |\vec{F}(\sigma(t))| \cdot \left|\overrightarrow{\sigma'}(t)\right| \cdot \cos\alpha$. Como los vectores $\vec{F}$ y $\overrightarrow{\sigma'}$ son paralelos, $\cos\alpha = 1$, de modo que

$$\int_\sigma \vec{F} = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{F}(\sigma(t))| \cdot \left|\overrightarrow{\sigma'}(t)\right| dt = \int_\sigma |\vec{F}|$$

11. Sea $F(x,y,z) = \left(z^3 + 2xy, x^2, 3xz^2\right)$. Probar que $\int_\sigma \vec{F} = 0$ si σ es el perímetro de cualquier cuadrado unitario (es decir, con un vértice en el origen y lado 1).

Solución: Si llamamos $P(x,y,z) = z^3 + 2xy, Q(x,y,z) = x^2, R(x,y,z) = 3xz^2$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} = 3z^2, \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Esto indica que $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ y el campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo. Deducimos entonces que $\int_\sigma \vec{F}$ es independiente de la trayectoria. Al ser cerrada dicha trayectoria, $\int_\sigma \vec{F} = 0$.

12. Observando que el integrando es un campo gradiente, calcular las siguientes integrales curvilíneas:

(a) $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy$

(b) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$ a lo largo de caminos que no se corten con el eje Y.

(c) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos ydx - \operatorname{sen} ydy)$

(d) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2dy - z^3dz$.

Solución: (a) Si $\vec{F}(x,y) = (x,y)$, entonces $\vec{F} = \overrightarrow{\nabla f}$, donde $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)/2$. Así pues,

$$\int_{(0,1)}^{(3,-4)} F(x,y)ds = f(3,-4) - f(0,1) = 12$$

(b) En este caso, $\vec{F}(x,y) = \left(y/x^2, -1/x\right)$, de modo que $F(x,y) = \overrightarrow{\nabla f}$, con $f(x,y) = -y/x$. Entonces,

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} F(x,y)ds = f(1,2) - f(2,1) = -3/2$$

(c) El campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y)$ es el gradiente de $f(x,y) = e^x \cos y$. Así pues,

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} \vec{F}(x,y)ds = f(a,b) - f(0,0) = e^a \cos b - 1$$

(d) Análogamente a los casos anteriores, $\vec{F}(x,y,z) = \left(x, y^2, -z^3\right) = \overrightarrow{\nabla f}$, con $f(x,y,z) = x^2/2 + y^3/3 - z^4/4$. Por tanto,

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} \vec{F}(x,y,z)ds = f(2,3,-4) - f(1,1,1) = \frac{-643}{12}$$

13. Probar que $\left|\int_\sigma P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right| \leq L \cdot M$ donde L es la longitud de σ y $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$ a lo largo de σ.

Solución: Utilizando las propiedades de la integral,

$$\begin{aligned} \left|\int_\sigma P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right| &= \left|\int_\sigma (P,Q)ds\right| = \left|\int_a^b (P,Q) \cdot \sigma'(t)dt\right| \\ &\leq \int_a^b |(P,Q)| \cdot |\sigma'(t)|\, dt = \int_\sigma |(P,Q)|ds \\ &= \int_\sigma \sqrt{P^2 + Q^2}ds \leq M \cdot \int_\sigma 1ds = M \cdot L \end{aligned}$$

14. Calcular la integral de línea

$$\int_C \left(e^x y - 3x^2 \cos z\right) dx + e^x dy + x^3 \operatorname{sen} z dz$$

a lo largo de la hélice $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, z = t$, desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta $(-1, 0, \pi)$.

Solución: El campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$, con $P(x, y, z) = e^x y - 3x^2 \cos z$, $Q(x, y, z) = e^x$, $R(x, y, z) = x^3 \operatorname{sen} z$, es conservativo porque

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 3x^2 \operatorname{sen} z$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

Esto significa que existe un campo escalar $f \in C^{(1)}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tal que $\overrightarrow{\nabla f} = \vec{F}$. Para determinar la función f utilizamos las ecuaciones $P = \frac{\partial f}{\partial x}, Q = \frac{\partial f}{\partial y}, R = \frac{\partial f}{\partial z}$. Así pues,

$$\begin{aligned}
P = \frac{\partial f}{\partial x} &\Longrightarrow f(x, y, z) = \int \left(e^x y - 3x^2 \cos z\right) dx = e^x y - x^3 \cos z + g(y, z) \\
Q = \frac{\partial f}{\partial y} &\Longrightarrow e^x = e^x + \frac{\partial g}{\partial y} \Longrightarrow g(y, z) = h(z) \\
&\Longrightarrow f(x, y, z) = e^x y - x^3 \cos z + h(z) \\
R = \frac{\partial f}{\partial z} &\Longrightarrow x^3 \operatorname{sen} z = x^3 \operatorname{sen} z + h'(z) \Longrightarrow h(z) = k
\end{aligned}$$

Elegimos el valor $k = 0$, con lo que $f(x, y, z) = e^x y - x^3 \cos z$. En definitiva,

$$\int_\sigma \vec{F} ds = f(-1, 0, \pi) - f(1, 0, 0) = 2$$

15. Hallar el trabajo realizado por la fuerza

$$\vec{F}(x, y) = \left(3y^2 + 2, 16x\right)$$

al mover una partícula desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$ siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$. ¿Qué elipse (es decir, qué valor de b) hace mínimo el trabajo?

Solución Por definición $W = \int_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_C \left(3y^2 + 2\right) dx + 16xdy$. Si parametrizamos la elipse $x^2 + y^2/b^2 = 1$ como $x = \cos t, y = b \operatorname{sen} t$, el trabajo realizado es:

$$\begin{aligned}
W &= \int_\pi^0 -\left(3b^2 \operatorname{sen}^2 t + 2\right) \operatorname{sen} t dt + \int_\pi^0 16 \cos t \cdot b \cos t dt \\
&= 3b^2 \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_\pi^0 + 2 \cos t|_\pi^0 + \frac{16b}{2}\left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right)\Bigg|_\pi^0 = 4b^2 - 8\pi b + 4.
\end{aligned}$$

Para determinar el valor de b que hace mínimo el trabajo, calculamos los puntos críticos de la función $W(b)$:

$$W' = 8b - 8\pi = 0 \Longleftrightarrow b = \pi.$$

Como $W'' = 8 > 0$, el valor $b = \pi$ hace mínimo el trabajo.

16. Hallar el trabajo realizado por el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + z, 2 + x, x + y)$$

a lo largo del arco más corto de la circunferencia mayor de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que une los puntos $(3, 4, 0)$ y $(0, 0, 5)$.

Solución: Si llamamos C a dicho arco, el trabajo se obtiene como:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_C (y+z)dx + (2+x)dy + (x+y)dz$$

Para obtener una parametrización de C, tengamos en cuenta que la curva es intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=25$ con el plano $4x=3y$. Al sustituir $y=4x/3$ llegamos a la ecuación $x^2/9+z^2/25=1$. Una parametrización de la curva es la siguiente:

$$C : \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\cos t \\ z = 5\operatorname{sen} t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi/2).$$

La integral que proporciona el trabajo es pues:

$$\begin{aligned} W =& \int_0^{2\pi} [(4\cos t + 5\operatorname{sen} t)(-3\operatorname{sen} t)dt \\ &+ \int_0^{2\pi} (2+3\cos t)(-4\operatorname{sen} t)dt + \int_0^{2\pi} (3\cos t + 4\cos t)(5\cos t)\Big] dt \\ =& \int_0^{2\pi} \left(-12\operatorname{sen} t\cos t - 15\operatorname{sen}^2 t - 8\operatorname{sen} t - 12\operatorname{sen} t\cos t + 35\cos^2 t\right) dt \\ =& -24\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\bigg|_0^{\pi/2} + 8\cos t\big|_0^{\pi/2} \\ &- \frac{15}{2}\left(t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right)\bigg|_0^{\pi/2} + \frac{35}{2}\left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right)\bigg|_0^{\pi/2} = 5\pi - 20 \end{aligned}$$

Teorema de Green

17. Calcular $\int_\sigma ydx - xdy$, donde σ es la frontera del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj.

    Solución: Por el teorema de Green, si llamamos D al interior del cuadrado, entonces

    $$\int_\sigma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

    Como $P(x,y)=y, Q(x,y)=-x$, resulta en este caso

    $$I = \iint_D -2dxdy = -2 \cdot \text{ área } (D) = -8$$

18. Usar el teorema de Green para calcular $\int_\sigma \left(y^2+x^3\right) dx + x^4 dy$, donde σ es el perímetro de $[0,1]\times[0,1]$ en sentido positivo.

    Solución: Como $P(x,y)=y^2+x^3, Q(x,y)=x^4$, entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4x^3-2y$. De este modo, si D es el interior del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$, por el teorema de Green,

    $$I = \iint_D \left(4x^3-2y\right) dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(4x^3-2y\right) dy = \int_0^1 \left(4x^3-1\right) dx = 0$$

19. Sea $\vec{F} = \left(2x^3-y^3, x^3+y^3\right)$.

    a) Calcular $\int_\sigma \vec{F}ds$, donde σ es la circunferencia unidad recorrida en sentido antihorario.

    b) Verificar el teorema de Green cuando σ es la frontera de la región anular descrita por $a \leq x^2+y^2 \leq b$ orientada en sentido positivo.

    Solución:

a) Si llamamos $P(x,y)=2x^3-y^3, Q(x,y)=x^3+y^3$, entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x^2+3y^2$. Por el teorema de Green, $I=\displaystyle\iint_D\left(3x^2+3y^2\right)dxdy$, donde D es el círculo $x^2+y^2\leq 1$. Mediante un cambio a coordenadas polares, la integral queda de la forma

$$I=\int_0^{2\pi}dv\int_0^1 3u^2\cdot udu=\frac{3\pi}{2}$$

b) Si aplicamos el teorema de Green, la situación es análoga a la del apartado (a), donde ahora la región D es la corona circular $a\leq x^2+y^2\leq b$.

El cambio a coordenadas polares en este caso nos conduce a

$$I=\int_0^{2\pi}dv\int_a^b 3u^2\cdot udu=3\cdot 2\pi\cdot\frac{b^4-a^4}{4}=\frac{3\pi\left(b^4-a^4\right)}{2}.$$

Si queremos resolver la integral de forma directa, debemos descomponer la trayectoria en dos curvas: C_1 es la circunferencia exterior $x^2+y^2=b^2$ recorrida en sentido antihorario, y C_2 la circunferencia interior $x^2+y^2=a^2$ recorrida en sentido horario. Si parametrizamos ambas curvas como:

$$C_1:\begin{cases}x=b\cos t\\ y=b\operatorname{sen}t\end{cases}\quad 0\leq t\leq 2\pi;\quad C_2:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=-a\operatorname{sen}t\end{cases}\quad 0\leq t\leq 2\pi$$

resulta,

$$\begin{aligned}I=&\int_{C_1}\vec{F}ds+\int_{C_2}\vec{F}ds\\
=&\int_0^{2\pi}\left[\left(2b^3\cos^3 t-b^3\operatorname{sen}^3 t\right)(-b\operatorname{sen}t)+\left(b^3\cos^3 t+b^3\operatorname{sen}^3 t\right)(b\cos t)\right]dt\\
&+\int_0^{2\pi}\left[\left(2a^3\cos^3 t+a^3\operatorname{sen}^3 t\right)(-a\operatorname{sen}t)+\left(a^3\cos^3 t-a^3\operatorname{sen}^3 t\right)(-a\cos t)\right]dt\\
=&\int_0^{2\pi}\left[\left(b^4+a^4\right)\left(-2\operatorname{sen}t\cos^3 t+\operatorname{sen}^3 t\cos t\right)+\left(b^4-a^4\right)\left(\operatorname{sen}^4 t+\cos^4 t\right)\right]dt\\
=&\frac{3\pi\left(b^4-a^4\right)}{2}\end{aligned}$$

20. Si C es una curva cerrada que limita una región D a la que se puede aplicar el teorema de Green, probar que área $(D)=\displaystyle\int_{\partial D}xdy=-\int_{\partial D}ydx$.

Solución: Por definición, área $(D)=\displaystyle\iint_D dxdy$. Si elegimos $P(x,y)=0, Q(x,y)=x$, entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$ y, por el teorema de Green

$$\text{área }(D)=\iint_D dxdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial D}xdy$$

Por otra parte, la elección $P(x,y)=-y, Q(x,y)=0$, también conduce a la igualdad $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$ y, aplicando nuevamente el teorema de Green, resulta que

$$\text{área }(D)=-\int_{\partial D}ydx$$

Observación. Sumando los dos resultados obtenidos, llegamos también a la fórmula conocida área $(D)=\frac{1}{2}\displaystyle\int_{\partial D}xdy-ydx$

21. Calcular el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución: Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, podemos aplicar la fórmula $A = \int_{\partial D} x dy$. Para ello, parametrizamos la frontera de la elipse por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases}$$

De este modo,

$$A = \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t dt = ab \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = \pi ab$$

22. Bajo las condiciones del teorema de Green, probar

(a) $\int_{\partial D} PQdx + PQdy = \iint_D \left[Q \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + P \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] dxdy$

(b) $\int_{\partial D} \left(Q \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx + \left(P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = 2 \iint_D \left(P \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - Q \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) dxdy.$

Solución:

(a) Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial (PQ)}{\partial x} = P \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial P}{\partial x},$$
$$\frac{\partial (PQ)}{\partial y} = P \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} + Q \cdot \frac{\partial P}{\partial y},$$

al aplicar el teorema de Green, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} PQdx + PQdy &= \iint_D \left(P \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_D \left[P \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] + Q \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \end{aligned}$$

(b) A partir de las fórmulas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) = P \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(Q \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}$$

basta aplicar el teorema de Green y obtener el resultado propuesto.

23. Sea f una función armónica, es decir, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Probar que $\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$, donde D es una región a la que se aplica el teorema de Green.

Solución: Si llamamos $P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ y $Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. De este modo, al aplicar el teorema de Green, obtenemos:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = \iint_D \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dxdy = 0$$

24. Calcular, tanto directamente como aplicando el teorema de Green, la integral $\int_\Gamma (xy + x + y) dx - (xy + x - y) dy$, siendo Γ

(a) la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

(b) la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$.

Solución:

(a) Para calcular la integral directamente, parametrizamos la elipse mediante las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t, \end{array}\right. \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

De este modo,

$$\begin{aligned} I =& \int_0^{2\pi} (ab\,\mathrm{sen}\,t\cos t + a\cos t + b\,\mathrm{sen}\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t)dt \\ &- \int_0^{2\pi} (ab\,\mathrm{sen}\,t\cos t + a\cos t - b\,\mathrm{sen}\,t) b\cos t dt \\ =& \int_0^{2\pi} \left(-a^2 b\,\mathrm{sen}^2\,t\cos t - ab^2\,\mathrm{sen}\,t\cos^2 t - \left(a^2 - b^2\right)\mathrm{sen}\,t\cos t - ab\right) dt \\ =& -2\pi ab. \end{aligned}$$

Al resolver la integral utilizando el teorema de Green, resulta:

$$I = \iint_D [-(y+1) - (x+1)]dxdy = \iint_D (-x-y-2)dxdy,$$

donde D es el interior de la elipse dada.

Para resolver la integral doble, hacemos el cambio de coordenadas

$$\left\{\begin{array}{l} x = au\cos v \\ y = bu\,\mathrm{sen}\,v \end{array}\right. \quad ,0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi,$$

cuyo jacobiano es $J = abu$. La integral queda entonces

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} (-au\cos v - bu\,\mathrm{sen}\,v - 2)\cdot abudv \\ &= \int_0^1 (-2abu \cdot 2\pi du = -2ab\pi. \end{aligned}$$

(b) La curva dada es la circunferencia de ecuación $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$, que podemos parametrizar como

$$\left\{\begin{array}{l} x = a/2 + (a/2)\cos t \\ y = (a/2)\,\mathrm{sen}\,t, \end{array}\right. \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I =& \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^2}{4}(1+\cos t)\,\mathrm{sen}\,t + \frac{a}{2}(1+\cos t) + \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,t\right]\cdot\left(-\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)dt \\ &- \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^2}{4}(1+\cos t)\,\mathrm{sen}\,t + \frac{a}{2}(1+\cos t) - \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,t\right]\cdot\left(\frac{a}{2}\cos t\right)dt \\ =& \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a^3}{8}(1+\cos t)\cdot\mathrm{sen}^2\,t - \frac{a^2}{4}(1+\cos t)\cdot\mathrm{sen}\,t - \frac{a^2}{4}\,\mathrm{sen}^2\,t\right. \\ &\left. -\frac{a^3}{8}(1+\cos t)\cdot\mathrm{sen}\,t\cos t - \frac{a^2}{4}(1+\cos t)\cdot\cos t + \frac{a^2}{4}\,\mathrm{sen}\,t\cos t\right] dt \\ =& -\frac{\pi a^2}{8}(a+4). \end{aligned}$$

Si queremos aplicar el teorema de Green, llamamos D al interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$. Tenemos así,

$$I = \iint_D [-(y+1) - (x+1)]dxdy = \iint_D (-x-y-2)dxdy.$$

Para resolver la integral, hacemos el cambio a coordenadas polares, $x = u\cos v, y = u\,\mathrm{sen}\,v$, con lo que:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv \int_0^{a\cos v} u(-u\cos v - u\,\mathrm{sen}\,v - 2)du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-\frac{a^3}{3}\cos^4 v - \frac{a^3}{3}\cos^3 v\,\mathrm{sen}\,v - a^2\cos^2 v\right] dv = -\frac{\pi a^2}{8}(a+4). \end{aligned}$$

25. Calcular $\int_\Gamma y^2 dx + (x+y)^2 dy$, siendo Γ el triángulo ABC de vértices $A(a,0), B(a,a)$, $C(0,a)$, con $a > 0$. ¿Se cumple la fórmula de Green?

Solución: Como la curva Γ es regular a trozos y la función $F(x,y) = \big(y^2, (x+y)^2\big)$ es diferenciable, puede aplicarse el teorema de Green. Así pues,

$$I = \iint_D (2(x+y) - 2y) dx dy$$

donde D es el interior del triángulo dado. Por tanto,

$$I = \int_0^a dx \int_{a-x}^a 2x dy = \int_0^a 2x(a - a + x) dx = \frac{2a^3}{3}.$$