Apuntes de Análisis Matemático

(IMA311)

Versión del 26 de junio de 2024

Dr. Víctor Andrés Osores Escalona
Departamento de Matemática, Física y Estadística
Universidad Católica del Maule, Chile

Índice general

Contents

Prefacio

Este apunte es el resultado de una exhaustiva investigación y recopilación de recursos disponibles en la red. A lo largo de su proceso de escritura, he consultado una variedad de fuentes en línea, desde documentos académicos hasta tutoriales y ejemplos prácticos. Quiero enfatizar que la base de conocimiento en la que se sustenta este libro es el resultado de la generosidad de la comunidad en línea y de aquellos que han compartido su experiencia y conocimientos libremente.

Agradezco profundamente a todas las personas que han contribuido a la creación de este apunte a través de su valiosa información disponible en la red. Sin su generosidad y el espíritu colaborativo de la era digital, este documento no habría sido posible.

Es importante destacar que, a lo largo del libro, se citarán y referenciarán las fuentes relevantes de manera apropiada. Mi objetivo es proporcionar a los lectores una compilación coherente y útil de información sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, al tiempo que se reconoce y respeta el trabajo de quienes la han compartido en línea.

CAPÍTULO 1

Sistema de los números reales

1.1 Introducción

Para que una presentación de los conceptos principales del análisis (tales como la convergencia, continuidad, diferenciación y la integración) sea satisfactoria, debe basarse en el concepto de número definido con exactitud. Sin embargo, aquí no se abordará el tema sobre los axiomas que gobiernan la aritmética de los enteros, pero se supondrá que se conocen bien los números racionales (es decir, los de la forma m/n, en donde m y n son enteros y $n \neq 0$).

El sistema de los números racionales visto como un campo o un conjunto ordenado, es inadecuado para muchos casos. (Los conceptos de campo y conjunto ordenado se definirán en las Secs. 1.2 y 1.3.) Por ejemplo, no existe un racional p tal que $p^2 = 2$. (Se demostrará esto a continuación.) Lo anterior conduce a la introducción de los llamados "números irracionales", que con frecuencia se representan como desarrollos decimales infinitos y se consideran "aproximados" por los decimales finitos correspondientes. Entonces la sucesión

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$$

"tiende a $\sqrt{2}$". Puede surgir la siguiente pregunta, a menos que el número irracional $\sqrt{2}$ esté evidentemente definido: ¿Qué quiere decir que la sucesión "tienda a"?

Esta clase de pregunta se puede contestar tan pronto como se construya el llamado "sistema de los números reales".

Ejemplo 1.1 *Empecemos demostrando que la ecuación*

$$p^2 = 2 \tag{1.1.1}$$

no se puede satisfacer por ningún número racional p. Para ello supongamos que se satisface: podremos escribir $p = m/n$, donde m y n son enteros y además podremos elegirlos de modo que los dos no sean pares. Supongamos que lo hemos hecho; entonces (1.1.1) *implica que*

$$m^2 = 2n^2, \tag{1.1.2}$$

Lo que muestra que m^2 es par. Por tanto, m es par (si m fuera impar, m^2 también lo sería) y m^2 es divisible por 4. De aquí se deduce que el segundo miembro de (1.1.2) es divisible por 4, y por tanto n^2 es par, lo que implica que lo sea n.

Por consiguiente, el suponer que se verifica (1.1.1) nos lleva a la conclusión que m y n son los dos pares, en contra de la elección que para ellos habíamos hecho. Luego (1.1.1) es imposible para un número racional p.

Examinemos ahora la situación algo más de cerca. Sea A el conjunto de todos los números racionales positivos p, tales que $p^2 < 2$, y B el de todos aquellos para los que $p^2 > 2$. Veremos que A no contiene ningún número que sea mayor, ni B ninguno que sea menor, que todos los demás.

Más explícitamente, para cada p de A podemos hallar otro número racional q, también en A, tal que $p < q$; y para cada p de B otro q de B tal que $q < p$.

Para esto, se asocia a cada número racional $p > 0$ el número

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2} \tag{1.1.3}$$

Por lo que

$$q^2 - 2 = \frac{2\left(p^2 - 2\right)}{(p + 2)^2}. \tag{1.1.4}$$

Si p pertenece a A, entonces $p^2 - 2 < 0$, de (1.1.3) se puede ver que $q > p$ y de (1.1.4) $q^2 < 2$. Por lo que q pertenece a A.

Si p pertenece a B, entonces $p^2 - 2 > 0$, de (1.1.3) se puede ver que $0 < q < p$ y de (1.1.4) $q^2 > 2$. Por lo que q pertenece a B.

Observación: *El objeto de la discusión anterior ha sido demostrar que el sistema de los números racionales tiene ciertas lagunas, a pesar del hecho de que entre dos números racionales, siempre hay otro: Si $r < s$ entonces $r < (r + s)/2 < s$. El sistema de los números reales llena estas lagunas, y es la razón principal del papel tan fundamental que desempeña este sistema en el análisis.*

Para dilucidar su estructura y la de los números complejos, se empezará con una discusión breve de los conceptos generales de conjunto ordenado y campo.

A continuación se da parte de la terminología estándar de la teoría de conjuntos que se usará en todo este libro.

Definición 1.1 *Si A es un conjunto cualquiera (cuyos elementos pueden ser números u objetos cualesquiera), se escribirá $x \in A$ para expresar que x es un miembro (o elemento) de A.*
Si x no es un miembro de A, se escribirá: $x \notin A$.
El conjunto que no contiene ningún elemento se llamará conjunto vacío. Si un conjunto tiene al menos un elemento, es un conjunto no vacío.
Si A y B son conjuntos y todo elemento de A es un elemento de B, se dice entonces que A es un subconjunto de B, y se escribe $A \subset B$, o $B \supset A$. Si además existe un elemento de B que no pertenece a A, entonces A será un subconjunto propio de B. Obsérvese que $A \subset A$ para todo conjunto A.
Si $A \subset B$ y $B \subset A$, se escribe $A = B$. De otra manera será $A \neq B$.

Definición 1.2 *En todo el capítulo 1, el conjunto de los números racionales se representará con una* $\mathbb{Q}$.

1.2 Conjuntos ordenados

Definición 1.3 *Si S es un conjunto, un orden en S es una relación representada por el símbolo $<$ y tiene las dos propiedades siguientes:*
(i) Si $x \in S$ y $y \in S$, una y sólo una de las proposiciones siguientes es cierta:

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

(ii) Si $x, y, z \in S$, y si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.

La proposición "$x < y$" se lee "x es menor que y" o "x es más pequeño que y" o también "x precede a y".

Con frecuencia conviene escribir $y > x$ en vez de $x < y$.

La notación $x \leq y$ indica que $x < y$ o $x = y$, sin especificar cuál de las dos se cumple. Dicho de otra manera, $x \leq y$ es la negación de $x > y$.

Definición 1.4 *Un conjunto ordenado es aquel en el que se ha definido un orden.*

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es un conjunto ordenado si se define $r < s$ si $s - r$ es un número racional positivo.

Definición 1.5 *Supóngase que S es un conjunto ordenado, y $E \subset S$. Se dice que E es un conjunto acotado superiormente si existe un $\beta \in S$ tal que $x \leq \beta$ para cada $x \in E$, y a β se le denomina la cota superior de E.*

De la misma manera se definen las cotas inferiores (con $\geq$ en lugar de $\leq$).

Definición 1.6 *Supóngase que S es un conjunto ordenado, $E \subset S$, y E está acotado superiormente. Supóngase, además, que existe un $\alpha \in S$ con las siguientes propiedades:*

(i) α es una cota superior de E.

(ii) Si $\gamma < \alpha$, entonces γ no es una cota superior de E.

Entonces α se denomina la mínima cota superior de E [de (ii) es evidente que a lo más hay una α] o el supremum de E, y se escribe

$$\alpha = \sup E$$

La máxima cota inferior o infimum de un conjunto E que está acotado inferiormente, se define de la misma manera: La proposición

$$\alpha = \inf E$$

significa que α es una cota inferior de E y que ninguna β con $\beta > \alpha$ es una cota inferior de E.

Ejemplo 1.2 *(a) Considérense los conjuntos A y B del Ejemplo 1.1 como subconjuntos del conjunto ordenado $\mathbb{Q}$. El conjunto A está acotado superiormente. De hecho, las cotas superiores de A son los miembros de B. Como B no contiene un miembro más pequeño, entonces A no tiene mínima cota superior en $\mathbb{Q}$.*

De igual manera, B está acotado inferiormente: el conjunto de todas las cotas inferiores de B consta de A y de todos los $r \in \mathbb{Q}$ con $r \leq 0$. Como A no tiene un miembro más grande, entonces B no tiene máxima cota inferior en $\mathbb{Q}$.

(b) Si existe $\alpha = \sup E$, puede o no, ser α miembro de E. Sea por ejemplo, E_1 el conjunto de todos los $r \in \mathbb{Q}$ con $r < 0$. Y E_2 el conjunto de todos los $r \in \mathbb{Q}$ con $r \leq 0$. Entonces

$$\sup E_1 = \sup E_2 = 0,$$

y $0 \notin E_1, 0 \in E_2$.

(c) Si E consta de todos los números $1/n$, en donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces $\sup E = 1$ y pertenece a E, el $\inf E = 0$, y no pertenece a E.

Definición 1.7 *Se dice que un conjunto ordenado S tiene la propiedad de la mínima cota superior si lo siguiente es cierto:*
Si $E \subset S, E$ no es vacío y está acotado superiormente, entonces $\sup E$ existe en S.

El ejemplo 1.2(a) muestra que $\mathbb{Q}$ no tiene la propiedad de la mínima cota superior.

Ahora se mostrará que hay bastante relación entre las máximas cotas inferiores y las mínimas cotas superiores, y que todo conjunto ordenado que tenga la propiedad de la mínima cota superior tiene también la de la máxima cota inferior.

Teorema 1.1 *Supóngase que S es un conjunto ordenado con la propiedad de la mínima cota superior, $B \subset S$ y B es no vacio y acotado inferiormente. Ahora sea L el conjunto de todas las cotas inferiores de B. Entonces*

$$\alpha = \sup L$$

existe en S y $\alpha = \inf B$.
En particular, el $\inf B$ existe en S.

Demostración: *Como B está acotado inferiormente, L no es vacío. Ya que L consta exactamente de los $y \in S$ que además satisfacen la desigualdad $y \leq x$ para cada $x \in B$, es evidente que cada $x \in B$ es una cota superior de L. De aquí que L está acotado superiormente. La hipotesis referente a S implica por tanto, que L tiene un supremum en S; llamémosle α.*

Si $\gamma < \alpha$ entonces (véase la Definición 1.8) γ no es cota superior de L, de aquí que $\gamma \notin B$. Y resulta que $\alpha \leq x$ para cada $x \in B$. Entonces $\alpha \in L$.

Si $\alpha < \beta$ *se tiene que* $\beta \notin L$ *debido a que* α *es cota superior de* L.

Se ha mostrado que $\alpha \in L$, *pero que* $\beta \notin L$ *si* $\beta > \alpha$. *En otras palabras,* α *es una cota inferior de* B, *pero* β *no lo es si* $\beta > \alpha$. *Esto significa que* $\alpha = \inf B$.

1.3 Campos

Definición 1.8 *Un campo es un conjunto* F *con dos operaciones, llamadas adición y multiplicación, que satisfacen los axiomas siguientes, (A), (M) y (D) llamados "axiomas de campo":*

(A) Axiomas para la adición

(A1) Si $x \in F$ *y* $y \in F$, *entonces su suma,* $x + y$ *está en* F.

(A2) La adición es conmutativa: $x + y = y + x$ *para toda* $x, y \in F$.

(A3) La adición es asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *para toda* $x, y, z \in F$.

(A4) F *contiene un elemento 0 tal que* $0 + x = x$ *para cada* $x \in F$.

(A5) A cada $x \in F$ *le corresponde un elemento* $-x \in F$ *tal que*

$$x + (-x) = 0.$$

(M) Axiomas para la multiplicación

(M1) Si $x \in F$ *y* $y \in F$, *entonces su producto* xy *está en* F.

(M2) La multiplicación es conmutativa: $xy = yx$ *para toda* $x, y \in F$.

(M3) La multiplicación es asociativa: $(xy)z = x(yz)$ *para toda* $x, y, z \in F$.

(M4) F *contiene un elemento* $1 \neq 0$ *tal que* $1x = x$ *para cada* $x \in F$.

(M5) Si $x \in F$ *y* $x \neq 0$, *entonces existe un elemento* $1/x \in F$ *tal que*

$$x \cdot (1/x) = 1.$$

(D) La ley distributiva

$$x(y + z) = xy + xz$$

se cumple para toda $x, y, z \in F$.

Observación: *(a) Se acostumbra escribir (en cualquier campo)*

$$x - y, \frac{x}{y}, x + y + z, xyz, x^2, x^3, 2x, 3x, \ldots$$

en vez de

$$x + (-y), x \cdot \left(\frac{1}{y}\right), (x + y) + z, (xy)z, xx, xxx, x + x, x + x + x, \ldots$$

(b) Los axiomas de campo evidentemente se cumplen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales, siempre y cuando la adición y la multiplicación signifiquen lo acostumbrado. Por ende, $\mathbb{Q}$ es un campo.

(c) Aunque nuestro proposito no es el de estudiar campos (o cualquier otra estructura algebraica) con mucho detalle, vale la pena demostrar que algunas propiedades conocidas de $\mathbb{Q}$ son consecuencia de los axiomas de campo; una vez hecho esto, no se necesitará volver a hacerlo para los números reales o para los complejos.

Proposición 1.1 *Los axiomas para la adición implican las siguientes proposiciones:*
(a) Si $x+y=x+z$, entonces $y=z$.
(b) Si $x+y=x$, entonces $y=0$.
(c) Si $x+y=0$, entonces $y=-x$.
(d) $-(-x)=x$.
La proposición (a) es la ley de la cancelación. Nótese que (b) asegura la unicidad del elemento cuya existencia se supuso en (A4), y que (c) hace lo mismo para (A5).

Demostración: *Si $x+y=x+z$, de los axiomas (A) se tiene*

$$\begin{aligned} y &= 0+y=(-x+x)+y=-x+(x+y) \\ &= -x+(x+z)=(-x+x)+z=0+z=z \end{aligned}$$

Esto demuestra (a). Tómese $z=0$ en (a) para obtener (b), y $z=-x$ en (a) para obtener (c).

Como $-x+x=0$, (c)(con $-x$ en lugar de x) esto produce (d).

Proposición 1.2 *Los axiomas para la multiplicación implican las proposiciones siguientes:*
(a) Si $x\neq 0$ y $xy=xz$, entonces $y=z$.
(b) Si $x\neq 0$ y $xy=x$, entonces $y=1$.
(c) Si $x\neq 0$ y $xy=1$, entonces $y=1/x$.
(d) Si $x\neq 0$, entonces $1/(1/x)=x$.
La demostración es similar a la de la proposición 1.1 y por eso no se da aquí.

Proposición 1.3 *Los axiomas de campo implican las siguientes proposiciones, para cualquier $x,y,z\in F$:*
(a) $0x=0$.
(b) Si $x\neq 0$ y $y\neq 0$, entonces $xy\neq 0$.
(c) $(-x)y=-(xy)=x(-y)$.
(d) $(-x)(-y)=xy$.

Demostración: $0x+0x=(0+0)x=0x$. *En consecuencia, proposición 1.1(b) implica que $0x=0, y$ por esto se cumple (a).*

Supóngase ahora $x\neq 0, y\neq 0$, pero que $xy=0$. Entonces de (a) se tiene

$$1=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0=0,$$

una contradicción. Por lo tanto se cumple (b).

La primera igualdad en (c) proviene de

$$(-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0$$

combinada con prop. 1.1(c); la otra mitad de (c) se demuestra de la misma forma. Finalmente de (c) y prop. 1.1(d) se obtiene

$$(-x)(-y) = -[x(-y)] = -[-(xy)] = xy$$

Definición 1.9 *Un campo ordenado es un campo F que a su vez es un conjunto ordenado, y que tiene las siguientes propiedades:*
(i) $x + y < x + z$ si $x, y, z \in F$ y $y < z$.
(ii) $xy > 0$ si $x \in F, y \in F, x > 0$, y $y > 0$.
Si $x > 0$, se dice que x es positivo; si $x < 0$, entonces es negativo.

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es un campo ordenado.

En cada campo ordenado se aplican todas las reglas conocidas de las desigualdades: la multiplicación por cantidades positivas (negativas) preserva (invierte) las desigualdades, ningún cuadrado es negativo, etcétera. En la siguiente proposición se listan algunas de estas.

Proposición 1.4 *En todo campo ordenado, las siguientes proposiciones son verdaderas:*
(a) Si $x > 0$, entonces $-x < 0$, y viceversa.
(b) Si $x > 0$ y $y < z$, entonces $xy < xz$.
(c) Si $x < 0$ y $y < z$, entonces $xy > xz$.
(d) Si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$. En particular, $1 > 0$.
(e) Si $0 < x < y$, entonces $0 < 1/y < 1/x$.

Demostración:

(a) *Si $x > 0$, entonces $0 = -x+x > -x+0$, así que $-x < 0$. Si $x < 0$, entonces $0 = -x+x < -x+0$, de manera que $-x > 0$. Esto demuestra (a).*

(b) *Debido a que $z > y$, se tiene $z - y > y - y = 0$, por consiguiente $x(z - y) > 0$, y por tanto*

$$xz = x(z - y) + xy > 0 + xy = xy.$$

(c) *De (a), (b) y la Proposicion 1.3(c) se obtiene,*

$$-[x(z - y)] = (-x)(z - y) > 0,$$

de aquí que $x(z - y) < 0$, y en consecuencia $xz < xy$.

(d) *Si $x > 0$, la parte (ii) de la Definición 1.9 nos da $x^2 > 0$. Si $x < 0$, entonces $-x > 0$, por ende $(-x)^2 > 0$. Pero $x^2 = (-x)^2$, debido a la Proposición 1.3(d). Ya que $1 = 1^2, 1 > 0$.*

(e) *Si $y > 0$ y $v \leq 0$, entonces $yv \leq 0$. Pero $y \cdot (1/y) = 1 > 0$. En consecuencia, $1/y > 0$. De la misma forma, $1/x > 0$. Si se multiplican ambos miembros de la desigualdad $x < y$, por la cantidad positiva $(1/x)(1/y)$, se obtiene $1/y < 1/x$.*

1.4 El campo real

Ahora se establecerá el teorema de existencia que es la base de este capítulo.

Teorema 1.2 *Existe un campo ordenado $\mathbb{R}$ con la propiedad de la mínima cota superior. Además, $\mathbb{R}$ contiene como subcampo a $\mathbb{Q}$.*

La segunda proposición significa que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y que cuando se aplican las operaciones de adición y multiplicación en $\mathbb{R}$ a los miembros de $\mathbb{Q}$, éstas coinciden con las operaciones más comunes en los números racionales; también los números racionales positivos son elementos positivos de $\mathbb{R}$.

A los miembros de $\mathbb{R}$ se les denomina números reales.

Debido a que la demostración del Teorema 1.2 es bastante larga y un poco tediosa, se presenta en el Apéndice del capítulo 1. En realidad, la demostración construye $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$.

El siguiente teorema podría obtenerse a partir de esta construcción con un poco de esfuerzo adiciónal. No obstante, es preferible obtenerlo a partir del Teorema 1.2, debido a que éste proporciona una buena ilustración de lo que se puede hacer con la propiedad de la mínima cota superior.

Teorema 1.3

(a) Si $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces hay un entero positivo n tal que

$$nx > y.$$

(b) Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, y $x < y$, entonces existe un $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x < p < y.$$

La parte (a) se conoce comúnmente como la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$. La parte (b) significa que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: es decir, entre dos números reales cualesquiera hay un racional.

Demostración: *(a) Sea A el conjunto de todos los nx, en donde n varía en los enteros positivos. Si (a) no fuera cierto, entonces y sería una cota superior de A, y A entonces tiene una mínima cota superior en $\mathbb{R}$. Hagamos $\alpha = \sup A$. Ya que $x > 0, \alpha - x < \alpha$, y $\alpha - x$ no es una cota superior de A. Por consiguiente, $\alpha - x < mx$ para algún entero positivo m. De donde $\alpha < (m+1)x \in A$, lo cual es imposible, porque α es una cota superior de A.*

(b) Debido a que $x < y$, se tiene $y - x > 0$, y (a) proporciona un entero positivo n tal que

$$n(y-x) > 1.$$

Aplicando (a) nuevamente, se obtienen los enteros positivos m_1 y m_2 de tal manera que $m_1 > nx, m_2 > -nx$. Entonces

$$-m_2 < nx < m_1.$$

En consecuencia hay un entero m (con $-m_2 \leq m \leq m_1$) tal que

$$m - 1 \leq nx < m.$$

Si estas desigualdades se combinan, se obtiene

$$nx < m \leq 1 + nx < ny.$$

Como $n > 0$, se deduce que

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Esto demuestra (b), con $p = m/n$.

Ahora se demostrará la existencia de las raíces n-ésimas de los reales positivos. Esta prueba mostrará cómo puede manejarse en $\mathbb{R}$, la dificultad mencionada en la Introducción (la irracionalidad de $\sqrt{2}$).

Teorema 1.4 *Para todo número real $x > 0$ y cada entero $n > 0$ hay un número real $y > 0$, y uno solo, tal que $y^n = x$.*

Este número y se escribe $\sqrt[n]{x}$, o $x^{1/n}$.

Demostración: *Que como máximo hay un y con tal propiedad, es evidente, pues, $0 < y_1 < y_2$ implica $y_1^n < y_2^n$.*

Sea E el conjunto formado por todos los números reales positivos t, tales que $t^n < x$.

Si $t = x/(1 + x)$, será $0 \leq t < 1$; por tanto, $t^n \leq t < x$, por lo que $t \in E$ y E no es vacío.

Si $t > 1 + x$, entonces $t^n > t > x$, así que $t \notin E$. Es decir, $1 + x$ es una cota superior de E.

El Teorema 1.2 implica por lo tanto, la existencia de

$$y = \sup E.$$

Para demostrar que $y^n = x$ se mostrará que cada una de las desigualdades $y^n < x$ y $y^n > x$ conduce a una contradicción.

La identidad $b^n - a^n = (b - a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}\right)$ produce la desigualdad

$$b^n - a^n < (b - a)nb^{n-1}$$

cuando $0 < a < b$.

Ahora supóngase que $y^n < x$. Si se escoge h de tal forma que 0 $< h < 1$ y

$$h < \frac{x - y^n}{n(y + 1)^{n-1}}.$$

Si se hace $a = y, b = y + h$. Entonces

$$(y + h)^n - y^n < hn(y + h)^{n-1} < hn(y + 1)^{n-1} < x - y^n.$$

Es decir $(y + h)^n < x$, y $y + h \in E$. Ya que $y + h > y$, esto contradice el hecho de que y es una cota superior de E.

Suponiendo que $y^n > x$. Hágase

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

Entonces $0 < k < y$. *Si* $t \geq y - k$, *se concluye que*

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x.$$

Por lo que $t^n > x$, *y* $t \notin E$. *Se deduce que* $y - k$ *es una cota superior de* E. *Pero* $y - k < y$, *esto contradice el hecho de que* y *es la mínima cota superior de* E.

En consecuencia $y^n = x$, *y esto completa la demostración.*

Corolario 1.1 *Si* a *y* b *son números reales positivos y* n *es un entero positivo, entonces*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}.$$

Demostración: *Haciendo* $\alpha = a^{1/n}, \beta = b^{1/n}$. *Se tiene*

$$ab = \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n,$$

debido a que la multiplicación es conmutativa. [Axioma (M2) de la Definición 1.8]. Por lo tanto, la afirmación de unicidad del Teorema 1.4 muestra que

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n}.$$

Decimales Terminaremos esta parte, señalando la relación que existe entre los números reales y los decimales.

Sea $x > 0$ un número real, y n_0 el mayor entero, tal que $n_0 \leq x$.(*). Elegidos $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$, sea n_k el mayor entero, para el cual

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \leq x.$$

Sea, además, E el conjunto formado por los números

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.4.1}$$

En estas condiciones, x es el sup de E. El desarrollo decimal de x es

$$n_0 \cdot n_1 n_2 n_3 \cdots \tag{1.4.2}$$

Inversamente, para todo decimal con desarrollo infinito (1.4.2) el conjunto E de los números (1.4.1) está acotado superiormente, y (1.4.2) es el desarrollo decimal del sup de E.

Como nunca utilizaremos números decimales, no entraremos en un estudio detallado.

1.5 El sistema extendido de los números reales

Definición 1.10 *El sistema extendido de los números reales está constituido por el campo real* $\mathbb{R}$ *al que se han añadido dos símbolos,* $+\infty$ *y* $-\infty$. *Se conservará el orden original en* $\mathbb{R}$, *y se definirá*

$$-\infty < x < +\infty$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Es evidente entonces, que $+\infty$ es una cota superior de cada subconjunto del sistema extendido de los números reales, y que cada subconjunto que no es vacío tiene una mínima cota superior. Por ejemplo, si E es conjunto que no es vacío ni acotado superiormente en $\mathbb{R}$, entonces $\sup E = +\infty$ en el sistema extendido de los números reales.

Las mismas observaciones se aplican exactamente a las cotas inferiores.

El sistema extendido de los números reales no forma un campo, pero por conveniencia se acostumbra lo siguiente:

(a) Si x es un número real, se verifica que $-\infty < x < +\infty$ y

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

(b) Si $x > 0$, será $x \cdot (+\infty) = +\infty, x \cdot (-\infty) = -\infty$.

(c) Si $x < 0$, es $x \cdot (+\infty) = -\infty, x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Cuando es conveniente hacer distinción explícita entre los números reales por un lado y los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ por otro, los primeros se llaman finitos.

1.6 El campo complejo

Definición 1.11 *Un número complejo es un par ordenado de números reales* (a, b). *"Ordenado" significa que* (a, b) *y* (b, a) *se consideran distintos si* $a \neq b$.
Sean $x = (a, b), y = (c, d)$ *dos números complejos. Se escribe* $x = y$ *si y solamente si* $a = c$ *y* $b = d$. *(Nótese que esta definición no es por completo superflua; debe pensarse en la igualdad de los números racionales representados como cocientes de enteros.) Se define*

$$\begin{aligned} x + y &= (a + c, b + d) \\ xy &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Teorema 1.5 *Las definiciones anteriores para la adición y la multiplicación vuelven al conjunto de todos los números complejos un campo, con* $(0, 0)$ *y* $(1, 0)$ *en lugar de 0 y 1.*

Demostración: *Simplemente se verificarán los axiomas de campo de la Definición 1.8. (Se usa la estructura de campo de* $\mathbb{R}$*, por supuesto.)*

Sean $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f)$.

(A1) es evidente.

(A2) $x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x$.

(A3)

$$\begin{aligned}(x+y)+z =&(a+c,b+d)+(e,f)\\ =&(a+c+e,b+d+f)\\ =&(a,b)+(c+e,d+f)=x+(y+z).\end{aligned}$$

(A4) $x+0=(a,b)+(0,0)=(a,b)=x$.

(A5) Haciendo $-x=(-a,-b)$. *Entonces* $x+(-x)=(0,0)=0$.

(M1) es evidente.

(M2) $xy=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,da+cb)=yx$.

(M3)

$$\begin{aligned}(xy)z &= (ac-bd,ad+bc)(e,f)\\ &= (ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)\\ &= (a,b)(ce-df,cf+de)=x(yz)\end{aligned}$$

(M4) $1x=(1,0)(a,b)=(a,b)=x$.

(M5) Si $x\neq 0$, *entonces* $(a,b)\neq(0,0)$, *lo cual significa que al menos uno de los números reales* a,b *es diferente de 0 . En consecuencia, por la Proposición 1.4(d)* $a^2+b^2>0$, *y se puede definir*

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Por tanto,

$$x\cdot\frac{1}{x}=(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=1.$$

(D)

$$\begin{aligned}x(y+z) &= (a,b)(c+e,d+f)\\ &= (ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)\\ &= (ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)\\ &= xy+xz.\end{aligned}$$

Teorema 1.6 *Para números reales cualesquiera* a *y* b *se tiene*

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),\quad (a,0)(b,0)=(ab,0)$$

La demostración es trivial.

El Teorema 1.6 muestra que los números complejos de la forma $(a,0)$ tienen las mismas propiedades aritméticas que los números reales correspondientes a. Por tanto, es posible identificar $(a,0)$ con a. Esta identificación hace del campo real un subcampo del campo complejo.

El lector puede haber notado que hasta ahora se han definido los números complejos sin hacer ninguna referencia a la misteriosa raíz cuadrada de -1. A continuación se muestra que la notación (a, b) es equivalente a la más acostumbrada $a + bi$.

Definición 1.12 $i = (0, 1)$.

Teorema 1.7 $i^2 = -1$.

Demostración: $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Teorema 1.8 *Si a y b son dos números reales, será $(a, b) = a + bi$.*

Demostración:

$$\begin{aligned} a + bi &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= (a, 0) + (0, b) = (a, b). \end{aligned}$$

Definición 1.13 *Si a, b son reales y $z = a + bi$, entonces al número complejo $\bar{z} = a - bi$ se le llama el conjugado de z. Los números a y b son la parte real y la parte imaginaria de z, respectivamente.*

Se escribirá algunas veces

$$a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

Teorema 1.9 *Si z y w son complejos, entonces*

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,

(b) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(c) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

(d) *$z\bar{z}$ es real y positivo (excepto cuando $z = 0$).*

Demostración: *(a),(b) y (c) son triviales. Para probar (d), escríbase $z = a + bi$, y nótese que* $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Definición 1.14 *Si z es un número complejo, su valor absoluto (o módulo) $|z|$ es la raíz cuadrada no negativa de $z\bar{z}$; es decir, $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$.*

La existencia (y la unicidad) de $|z|$ se concluye a partir del Teorema 1.4 y la parte (d) del Teorema 1.9.

Nótese que cuando x es real, es $\bar{x} = x$, y por consiguiente $|x| = \sqrt{x^2}$. Asi que $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$.

Teorema 1.10 *Siendo z y w números complejos. Se tiene*

(a) $|z| > 0$ *a menos que* $z = 0$, $|0| = 0$,

(b) $|\bar{z}| = |z|$,

(c) $|zw| = |z||w|$

(d) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$

(e) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Demostración: *(a) y (b) son evidentes. Si se hace $z = a + bi$, $w = c + di$, en donde a, b, c, d real. Entonces*

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = |z|^2|w|^2$$

o $|zw|^2 = (|z||w|)^2$. Ahora (c) deduce de la afirmación de unicidad del Teorema 1.4.

Para demostrar (d), nótese que $a^2 \leq a^2 + b^2$, por consiguiente

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Para demostrar (e), nótese que $\bar{z}w$ es el conjugado de $z\bar{w}$, así que $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\
&= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

Y por último se obtiene (e) extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros.

Notación Si $x_1, \ldots, x_n$ son números complejos, escribimos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Terminamos esta sección con una desigualdad importante, corrientemente llamada desigualdad de Schwarz.

Teorema 1.11 *Si $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ son números complejos, será*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2.$$

Demostración: *Pongamos $A = \Sigma\,|a_j|^2; B = \Sigma\,|b_j|^2; C = \Sigma a_j \bar{b}_j$ (en todas las sumas de esta demostración, j toma los valores $1, \ldots n$). Si $B = 0$, será $b_1 = \cdots = b_n = 0$ y la conclusión es obvia. Supongamos, por tanto, que $B > 0$. Por el Teorema 1.9, tenemos*

$$\begin{aligned}
\sum |Ba_j - Cb_j|^2 &= \sum \left(Ba_j - Cb_j\right)\left(B\bar{a}_j - \overline{Cb}_j\right) \\
&= B^2 \sum |a_j|^2 - B\bar{C} \sum a_j \bar{b}_j - BC \sum \bar{a}_j b_j + |C|^2 \sum |b_j|^2 \\
&= B^2 A - B|C|^2 \\
&= B\left(AB - |C|^2\right).
\end{aligned}$$

Como cada término de la primera suma es no negativo, vemos que

$$B\left(AB - |C|^2\right) \geq 0$$

Como $B > 0$, se sigue que $AB - |C|^2 \geq 0$, que es la desigualdad deseada.

1.7 Espacios euclidianos

Definición 1.15 *Para cada entero positivo k, sea $\mathbb{R}^k$ el conjunto de todas las k-tuplas ordenadas*

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

donde $x_1, \ldots, x_k$ son números reales, llamados coordenadas de $\boldsymbol{x}$. Los elementos de $\mathbb{R}^k$ se llaman puntos, o vectores, especialmente cuando $k > 1$. Designaremos a los vectores por letras negritas. Si $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ y α un número real, haremos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k) \\ \alpha\boldsymbol{x} &= (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k) \end{aligned}$$

de modo que $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ y $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$. Esto define la adición de vectores, lo mismo que la multiplicación de un vector por un número real (un escalar). Estas dos operaciones satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva (la demostración es elemental, comparando con las leyes análogas para los números reales) y hacen de $\mathbb{R}^k$ un espacio vectorial sobre el campo real. El elemento cero de $\mathbb{R}^k$ (a veces llamado origen o vector nulo) es el punto 0 , cuyas coordenadas son todas 0 .
Definimos también el llamado «producto interior» (o escalar) de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ por

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

y la norma de $\boldsymbol{x}$ por

$$|\boldsymbol{x}| = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}$$

La estructura así definida (el espacio vectorial $\mathbb{R}^k$ con el producto interior y la norma) es el llamado k-espacio euclidiano.

Teorema 1.12 *Supongamos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^k$ y que a es un número real. Será:*
(a) $|\boldsymbol{x}| \geq 0$
(b) $|\boldsymbol{x}| = 0$, *si, y solo si,* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;
(c) $|\alpha\boldsymbol{x}| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$
(d) $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$
(e) $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$
(f) $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|$.

Demostración: *(a), (b) y (c) son evidentes y (d) es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Schwarz. Por (d) tenemos*

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\ &= \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}\\ &\leq |\boldsymbol{x}|^2+2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}|^2\\ &= (|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado (*e*). *Finalmente,* (*f*) *se sigue de* (*e*) *si sustituimos* $\boldsymbol{x}$ *por* $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ *y* $\boldsymbol{y}$ *por* $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$.

Nota El Teorema 1.12(a), (b) y (f) nos permite (véase Cap. 2) considerar $\mathbb{R}^k$ como un espacio métrico.

$\mathbb{R}^1$ (el conjunto de todos los números reales) suele llamarse recta, o recta real. Del mismo modo a $\mathbb{R}^2$ se le llama plano, o plano complejo (comparar las Definiciones 1.11 y 1.15. En estos dos casos la norma coincide con el valor absoluto del número real o complejo correspondiente.

1.8 Apéndice

Se demostrará en este Apéndice el Teorema 1.2 construyendo $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$. Esta construcción se dividirá en varios pasos.

Paso 1 Los miembros de $\mathbb{R}$ serán determinados subconjuntos de $\mathbb{Q}$, llamados cortaduras. Por definición, una cortadura es cualquier conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ con las tres propiedades siguientes:

(I) α no es vacío, $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(II) Si $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$, y $q < p$, entonces $q \in \alpha$.

(III) Si $p \in \alpha$, entonces $p < r$ para algún $r \in \alpha$.

Las letras $p, q, r, \ldots$ siempre denotarán números racionales, y $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ se usarán para simbolizar cortaduras.

Nótese que (III) significa simplemente que α no tiene un miembro más grande; (II) implica dos hechos que se usarán con libertad:

Si $p \in \alpha$ y $q \notin \alpha$, entonces $p < q$.

Si $r \notin \alpha$ y $r < s$, entonces $s \notin \alpha$.

Paso 2 Al definir "$\alpha < \beta$" esto significará que: α es un subconjunto propio de β.

Comprobemos que esto cumple con los requisitos de la Definición 1.3.

Si $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$, es evidente que $\alpha < \gamma$. (Un subconjunto propio de un subconjunto propio es un subconjunto propio.) También es claro que a lo más una de las tres relaciones siguientes

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha$$

puede ser cierta para cualquier par α, β. Para mostrar que al menos una es cierta, supóngase que las primeras dos no lo son. Entonces α no es un subconjunto de β. De aquí que hay un $p \in \alpha$ con $p \notin \beta$. Si

$q \in \beta$, se deduce que $q < p$ (ya que $p \notin \beta$), en consecuencia $q \in \alpha$, por (II). Entonces $\beta \subset \alpha$. Debido a que $\beta \neq \alpha$, se concluye: $\beta < \alpha$.

Es por esto que ahora $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado.

Paso 3 El conjunto ordenado $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la mínima cota superior.

Para demostrar esto, supongamos que A es un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}$, y que $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A. Definase a γ como la unión de todas las $\alpha \in A$. Dicho de otra forma, $p \in \gamma$ si y solamente si $p \in \alpha$ para alguna $\alpha \in A$. Se demostrará a continuación que $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\gamma = \sup A$.

Como A es no vacío, existe una $\alpha_0 \in A$. Esta α_0 no es vacía. Ya que $\alpha_0 \subset \gamma, \gamma$ es no vacía. En seguida, $\gamma \subset \beta$ (porque $\alpha \subset \beta$ para cada $\alpha \in A$), y por lo tanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$. De aquí que γ satisface la propiedad (I). Para probar (II) y (III), tómese $p \in \gamma$. Entonces $p \in \alpha_1$ para alguna $\alpha_1 \in A$. Si $q < p$, entonces $q \in \alpha_1$, por esto $q \in \gamma$; esto demuestra (II). Si se selecciona $r \in \alpha_1$ de tal forma que $r > p$, se ve que $r \in \gamma$ (porque $\alpha_1 \subset \gamma$), y por lo tanto γ satisface (III).

Así que $\gamma \in \mathbb{R}$.

Es evidente que $\alpha \leq \gamma$ para cada $\alpha \in A$.

Supóngase ahora que $\delta < \gamma$. Entonces hay un $s \in \gamma$ y $s \notin \delta$. Debido a que $s \in \gamma, s \in \alpha$ para alguna $\alpha \in A$. Por esto $\delta < \alpha$, y δ no es una cota superior de A.

Esto da el resultado deseado: $\gamma = \sup A$.

Paso 4 Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, se define $\alpha + \beta$ como el conjunto de todas las sumas $r + s$, en donde $r \in \alpha$ y $s \in \beta$.

Se define también 0^* como el conjunto de todos los números racionales negativos. Es claro que 0^* es una cortadura. Se verificará que los axiomas para la adición (véase Definición 1.8) son ciertos en $\mathbb{R}$, en donde 0^* desempeña el papel de 0 .

(A1) Se tiene que mostrar que $\alpha + \beta$ es una cortadura. Es evidente que $\alpha + \beta$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que no es vacío. Si se toman $r' \notin \alpha, s' \notin \beta$. Entonces $r' + s' > r + s$ para cualesquiera $r \in \alpha, s \in \beta$. Es por esto que $r' + s' \notin \alpha + \beta$. De aquí que $\alpha + \beta$ tiene la propiedad (I).

Si se toma $p \in \alpha + \beta$. Entonces $p = r + s$, con $r \in \alpha, s \in \beta$. Si $q < p$, es $q - s < r$, así $q - s \in \alpha$, y $q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$. Entonces (II) se cumple. Si se escoge $t \in \alpha$ de tal manera que $t > r$. Entonces $p < t + s$ y $t + s \in \alpha + \beta$. De donde (III) se cumple.

(A2) $\alpha + \beta$ es el conjunto de todos los $r + s$, con $r \in \alpha, s \in \beta$. Por la misma definición, $\beta + \alpha$ es el conjunto de todos los $s + r$. Debido a que $r + s = s + r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{Q}$, se tiene $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(A3) Como en el punto anterior, esto se deriva de la ley asociativa en $\mathbb{Q}$.

(A4) Si $r \in \alpha$ y $s \in 0^*$, entonces $r + s < r$, en consecuencia $r + s \in \alpha$. De aquí que $\alpha + 0^* \subset \alpha$. Para obtener la inclusión opuesta, tómese $p \in \alpha$, y $r \in \alpha$, $r > p$. Por lo que $p - r \in 0^*$, y $p = r + (p - r) \in \alpha + 0^*$. De donde $\alpha \subset \alpha + 0^*$. Se concluye que $\alpha + 0^* = \alpha$.

(A5) Con $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo y β el conjunto de todos los p con la propiedad siguiente:

Existe $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$.

Dicho de otra manera, algún número racional más pequeño que $-p$ ya no está en α.

Se mostrará que $\beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha + \beta = 0^*$.

Si $s \notin \alpha$ y $p = -s - 1$, entonces $-p - 1 \notin \alpha$, de aquí que $p \in \beta$. De esta manera β no es vacío. Si $q \in \alpha$, entonces $-q \notin \beta$. Así $\beta \neq \mathbb{Q}$. En consecuencia, β satisface (I).

Tomando un $p \in \beta$, y $r > 0$, de manera que $-p - r \notin \alpha$. Si $q < p$, entonces $-q - r > -p - r$, de aquí que $-q - r \notin \alpha$. Por lo que $q \in \beta$, y (II) se cumple. Poniendo $t = p + (r/2)$. Entonces $t > p$, y $-t - (r/2) = -p - r \notin \alpha$, de manera que $t \in \beta$. En consecuencia β satisface (III).

Se ha probado que $\beta \in \mathbb{R}$.

Si $r \in \alpha$ y $s \in \beta$, entonces $-s \notin \alpha$, por esto $r < -s, r + s < 0$. De aqui que $\alpha + \beta \subset 0^*$.

Para probar la inclusión opuesta, tómese $v \in 0^*$, y hágase $w = -v/2$. Entonces $w > 0,$ y hay un entero n tal que $nw \in \alpha$, pero $(n + 1)w \notin \alpha$. (Nótese que esto depende del hecho de que $\mathbb{Q}$ tiene la propiedad arquimediana!) Poniendo $p = -(n + 2)w$. Entonces $p \in \beta$, debido a que $-p - w \notin \alpha$, y

$$v = nw + p \in \alpha + \beta.$$

De aquí que $0^* \subset \alpha + \beta$.

Se concluye que $\alpha + \beta = 0^*$.

Por supuesto que esta β se denotará mediante $-\alpha$.

Paso 5 Habiendo demostrado que la adición definida en el Paso 4 satisface los axiomas (A) de la Definición 1.8, se concluye que la Proposición 1.1 es válida en $\mathbb{R}$, y se puede probar uno de los requisitos de la Definición 1.9:

$$\text{Si } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ y } \beta < \gamma, \text{ entonces } \alpha + \beta < \alpha + \gamma.$$

En verdad, es obvio de la definición de $+$ en $\mathbb{R}$ que $\alpha + \beta \subset \alpha + \gamma$; si se tuviera $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, la ley de la cancelación (Proposición 1.1) implicaria $\beta = \gamma$.

También se deduce que $\alpha > 0^*$ si y solamente si $-\alpha < 0^*$.

Paso 6 La multiplicación en este contexto es un poco más fastidiosa que la adición, debido a que los productos de racionales negativos son positivos. Por esta razón nos restringiremos primero a $\mathbb{R}^+$, el conjunto de todas las $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0^*$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\beta \in \mathbb{R}^+$, entonces se define $\alpha\beta$ como el conjunto de todos los p tales que $p \leq rs$ para $r \in \alpha, s \in \beta, r > 0, s > 0$.

Se define 1^* como el conjunto de todos los $q < 1$.

Entonces se cumplen los axiomas (M) y (D) de la Definición 1.8, con $\mathbb{R}^+$en lugar de F y 1^* desempeña el papel de 1.

Las demostraciones son tan similares a las ofrecidas en el Paso 4 que se omitirán.

En particular, nótese que el segundo requisito de la Definición 1.9 se cumple: Si $\alpha > 0^*$ y $\beta > 0^*$, entonces $\alpha\beta > 0^*$.

Paso 7 Se completa la definición de la multiplicación estableciendo que $\alpha 0^* = 0^* \alpha = 0^*$, y

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & \text{si } \alpha < 0^*, \beta < 0^*, \\ -[(-\alpha)\beta] & \text{si } \alpha < 0^*, \beta > 0^*, \\ -[\alpha \cdot (-\beta)] & \text{si } \alpha > 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

Los productos del miembro derecho se definieron en el Paso 6.

Habiendo probado (en el Paso 6) que los axiomas (M) se cumplen en $\mathbb{R}^+$, ahora es muy simple demostrarlos en $\mathbb{R}$, por medio de la aplicación repetida de la identidad $\gamma = -(-\gamma)$ que es parte de la Proposición 1.14. (Véase el Paso 5.)

La demostración de la ley distributiva

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

se divide en varias partes. Por ejemplo, supóngase que $\alpha > 0^*, \beta < 0^*, \beta + \gamma > 0^*$. Entonces $\gamma = (\beta + \gamma) + (-\beta)$, y (debido a que ya se sabe que la ley distributiva se cumple en $\mathbb{R}^+$)

$$\alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha \cdot (-\beta)$$

Pero $\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha\beta)$. Entonces

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$$

Las otras partes se tratan en la misma forma.

Se ha completado ya la demostración de que $\mathbb{R}$ es un campo ordenado con la propiedad de la mínima cota superior.

Paso 8 Con cada $r \in \mathbb{Q}$ se asocia el conjunto r^* que consta de todos los $p \in \mathbb{Q}$ tales que $p < r$. Es evidente que cada r^* es una cortadura; es decir, $r^* \in \mathbb{R}$. Estas cortaduras satisfacen las relaciones siguientes:

(a) $r^* + s^* = (r + s)^*$,

(b) $r^* s^* = (rs)^*$,

(c) $r^* < s^*$ si y solo si $r < s$.

Para probar (a) se escoge $p \in r^* + s^*$. Entonces $p = u + v$, en donde $u < r, v < s$. En consecuencia $p < r + s$, lo cual expresa que $p \in (r + s)^*$.

De manera inversa, supóngase que $p \in (r+s)^*$. Entonces $p < r+s$. Si se escoge t tal que $2t = r+s-p$, hágase

$$r' = r - t, s' = s - t.$$

Entonces $r' \in r^*, s' \in s^*$ y $p = r' + s'$, de modo que $p \in r^* + s^*$.

Esto demuestra (a). La demostración de (b) es similar.

Si $r < s$, entonces $r \in s^*$, pero $r \notin r^*$; en consecuencia $r^* < s^*$.

Si $r^* < s^*$ entonces hay un $p \in s^*$ tal que $p \notin r^*$. En consecuencia $r \leq p < s$, asi que $r < s$.

Esto demuestra (c).

Paso 9 Como se vio en el Paso 8, el reemplazo de los números racionales r por las correspondientes "cortaduras racionales" $r^* \in \mathbb{R}$ preserva las sumas, productos y el orden. Esto puede expresarse también, diciendo que el campo ordenado $\mathbb{Q}$ es isomorfo al campo ordenado $\mathbb{Q}^*$ cuyos elementos son las cortaduras racionales. Por supuesto que r^* no es de ninguna manera el mismo que r, pero las propiedades que nos interesan (la aritmética y el orden) son las mismas en los dos campos.

Esta identificación de $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{Q}^*$ permite considerar a $\mathbb{Q}$ como un subcampo de $\mathbb{R}$.

En términos de esta identificación, la segunda parte del Teorema 1.19 se entiende bien. Nótese que ocurre lo mismo cuando los números reales se consideran como subcampo del campo complejo, y esto sucede también en un nivel mucho más elemental, cuando los enteros se identifican como un subconjunto determinado de $\mathbb{Q}$.

Es un hecho que dos campos ordenados cualesquiera con la propiedad de la mínima cota superior son isomorfos, pero esto no se demostrará aquí. Por lo tanto, la primera parte del Teorema 1.2 caracteriza completamente al campo real $\mathbb{R}$.

Los libros de Landau y Thurston que se citan en la Bibliografia se dedican completamente a sistemas de números reales. El capítulo 1 del libro de Knopp contiene una descripción más pausada de cómo se puede obtener $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$. Otra construcción presentada en la sección 5 del libro de Hewitt y Stromberg, define a cada número real como una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales (véase el Cap. 3).

Dedekind inventó las cortaduras que se usaron en esta sección. La construcción de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$ por medio de sucesiones de Cauchy se debe a Cantor. Cantor y Dedekind publicaron sus construcciones en 1872.

1.9 ejercicios

A menos que se especifique lo contrario, todos los números que se mencionen en estos ejercicios serán reales.

1. Si r es racional ($r \neq 0$) y x es irracional, demuestre que $r + x$ y rx son irracionales.
2. Demostrar que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 12 .
3. Demostrar la Proposición 1.2.
4. Sea E un subconjunto que no es vacío de un conjunto ordenado; supóngase que α es una cota inferior de E y β es una cota superior de E. Demostrar que $\alpha \leq \beta$.
5. Sea A un conjunto de números reales que no es vacío, que está acotado inferiormente. Si $-A$ es el conjunto de todos los números $-x$, en donde $x \in A$. Demostrar que

$$\inf A = -\sup(-A)$$

6. Sea $b > 1$ fijo.

(a) Si m, n, p, q son enteros, $n > 0$, $q > 0$, y $r = m/n = p/q$, demostrar que

$$\left(b^m\right)^{1/n} = \left(b^p\right)^{1/q}.$$

Por consiguiente tiene sentido definir $b^r = \left(b^m\right)^{1/n}$.

(b) Demostrar que $b^{r+s} = b^r b^s$ si r y s son racionales.

(c) Si x es real, y se define $B(x)$ como el conjunto de todos los números b^t, donde t es racional y $t \leq x$. Demostrar que

$$b^r = \sup B(r)$$

en la cual r es racional. En consecuencia tiene sentido definir

$$b^x = \sup B(x)$$

para cada real x.

(d) Demostrar que $b^{x+y} = b^x b^y$ para todos los reales x y y.

7. Con $b > 1, y > 0$ fijos, demostrar que hay un real único x tal que $b^x = y$, al completar el bosquejo siguiente. (A este x se le llama logaritmo de y de base b.)

   (a) Para cualquier entero positivo $n, b^n - 1 \geq n(b-1)$.

   (b) En consecuencia $b - 1 \geq n\left(b^{1/n} - 1\right)$.

   (c) Si $t > 1$ y $n > (b-1)/(t-1)$, entonces $b^{1/n} < t$.

   (d) Si w es tal que $b^w < y$, entonces $b^{w+(1/n)} < y$ para un n suficientemente grande; para ver esto aplíquese la parte (c) con $t = y \cdot b^{-w}$.

   (e) Si $b^w > y$, entonces $b^{w-(1/n)} > y$ para un n suficientemente grande.

   (f) Considerar A como el conjunto de todos los w tales que $b^w < y$, y mostrar que $x = \sup A$ satisface $b^x = y$.

   (g) Demostrar que x es único.

8. Demostrar que en el campo complejo no puede definirse ningún orden para que éste se vuelva un campo ordenado. Sugerencia: -1 es un cuadrado.

9. Supóngase que $z = a + bi, w = c + di$, y definase $z < w$ si $a < c$, y también si $a = c$, pero cuando $b < d$. Demostrar que esto convierte al conjunto de los números complejos en un conjunto ordenado. (Por razones obvias, a este tipo de relación de orden se le denomina orden diccionario o lexicográfico.) ¿Tiene este conjunto ordenado la propiedad de la mínima cota superior?

10. Suprongase que $z = a + bi, w = u + iv, y$

$$a = \left(\frac{|w| + u}{2}\right)^{1/2}, \quad b = \left(\frac{|w| - u}{2}\right)^{1/2}.$$

   Demostrar que $z^2 = w$ si $v \geq 0$ y que $(\bar{z})^2 = w$ si $v \leq 0$. Y conclúyase que cada número complejo (con una excepción) tiene dos raíces cuadradas complejas.

11. Si z es un número complejo, demostrar que existe un $r \geq 0$ y un número complejo w con $|w| = 1$ tal que $z = rw$. ¿z determina siempre de manera única a w y r?

12. Si $z_1, \ldots, z_n$ son complejos, demostrar que

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|\,.$$

13. Si x, y son complejos, demostrar que

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

14. Si z es un número complejo tal que $|z| = 1$, esto es, tal que $z\bar{z} = 1$, calcular

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2.$$

15. ¿En qué condiciones se produce la igualdad en la desigualdad de Schwarz?

16. Supongamos $k \geq 3$; $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$; $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = d > 0$, y $r > 0$. Demostrar:

    (a) Si $2r > d$ hay una infinidad de $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^k$ tales que

    $$|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}| = r$$

    (b) Si $2r = d$, hay solamente uno de tales $\boldsymbol{z}$.

    (c) Si $2r < d$, no hay tales $\boldsymbol{z}$.

    ¿Cómo se modificarian estas afirmaciones si k fuera 2 o 1 ?

17. Demostrar que

    $$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2 = 2|\boldsymbol{x}|^2 + 2|\boldsymbol{y}|^2$$

    Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ y $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$. Interpretarlo geométricamente, como una propiedad de los paralelogramos.

18. Si $k \geq 2$ y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$, demostrar que existe $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ tal que $\boldsymbol{y} \neq 0$ pero $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$. ¿Es también verdad si $k = 1$?

19. Suponer $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^k$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k$. Hallar $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$ y $r > 0$ tales que

    $$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$$

    si, y solo si $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}| = r$.

    (Solución: $3\boldsymbol{c} = 4\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $3r = 2|\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$.)

20. Refiriéndose al Apéndice, supóngase que la propiedad (III) se omite de la definición de cortadura, conservando las mismas definiciones de orden y la adición. Mostrar que el conjunto ordenado resultante tiene la propiedad de la mínima cota superior y que la adición satisface los axiomas (A1) al (A4) (¡con un elemento cero ligeramente diferente!) pero no el (A5).

CAPÍTULO 2

Topología básica

2.1 Conjuntos finitos, numerables y no numerables

Empezamos esta sección con una definición del concepto de función.

Definición 2.1 *Consideremos dos conjuntos A y B, cuyos elementos pueden ser objetos cualesquiera, y supongamos que con cada elemento x de A se asocia, de algún modo, un elemento de B que representaremos por $f(x)$. Se dice que f es una función de A en B (o una aplicación o mapeo de A en B). El conjunto A se llama dominio de definición de f (también se dice que f está definida en A) y los elementos de $f(x)$ se llaman valores de f. El conjunto de todos los valores de f se llama rango de f.*

Definición 2.2 *Sean A y B dos conjuntos y f un mapeo o aplicación de A en B. Si $E \subset A$, se define $f(E)$ como el conjunto de todos los elementos $f(x)$ para $x \in E$. A $f(E)$ le llamamos imagen de E bajo f. En esta notación, $f(A)$ es el rango de f. Está claro que $f(A) \subset B$. Si $f(A) = B$, decimos que f mapea o aplica A sobre B. (Se utiliza la palabra sobre, admitiendo para ella un significado más específico que el de en).*
Si $E \subset B, f^{-1}(E)$ representa el conjunto de todo $x \in A$ tal que $f(x) \in E$. Llamamos a $f^{-1}(E)$ imagen inversa de E bajo f. Si $y \in B, f^{-1}(y)$ es el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $f(x) = y$. Si, para cada $y \in B, f^{-1}(y)$ no está integrado por más de un elemento de A se dice que f es un mapeo 1-1 (uno a uno) de A en B. Esto puede expresarse también como sigue: f es un mapeo 1-1 de A en B cuando $f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$ siempre que $x_1 \neq x_2; x_1 \in A; x_2 \in A$.

(La notación $x_1 \neq x_2$ significa que x_1 y x_2 son elementos diferentes; en otro caso, escribiremos $x_1 = x_2$).

Definición 2.3 *Si existe un mapeo 1-1 de A sobre B, decimos que A y B pueden ponerse en correspondencia 1-1, también llamada biunivoca, que A y B tienen el mismo número cardinal, o más brevemente, que A y B son equivalentes, y escribimos $A \sim B$. Esta relación tiene las propiedades siguientes, como se ve claramente:*

Es reflexiva: $A \sim A$.
Es simétrica: si $A \sim B$, *también* $B \sim A$.
Es transitiva: si $A \sim B$ *y* $B \sim C$, *también* $A \sim C$.
Toda relación con estas tres propiedades, se llama relación de equivalencia.

Definición 2.4 *Para todo entero positivo* n, *sea* J_n *el conjunto cuyos elementos son los números enteros* $1, 2, \ldots, n$, *y* J *el conjunto formado por todos los enteros positivos. Para todo conjunto* A, *decimos:*
(a) A *es finito si* $A \sim J_n$ *para algún* n *(el conjunto vacío se considera finito).*
(b) A *es infinito si no es finito.*
(c) A *es numerable si* $A \sim J$.
(d) A *es no numerable si no es ni finito ni numerable.*
(e) A *es a lo más numerable si es finito o numerable.*

Para dos conjuntos finitos A y B, evidentemente tenemos $A \sim B$ si, y solo si, A y B contienen el mismo número de elementos. Para los conjuntos infinitos, la idea «tener el mismo número de elementos» es vaga, mientras que la noción de correspondencia 1-1 conserva su claridad.

Ejemplo 2.1 *Sea* A *el conjunto de todos los números enteros.* A *es numerable. Para verlo, consideremos la disposición siguiente de los conjuntos* A *y* J *:*

$$\begin{array}{ll} A: & 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots \\ J: & 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \end{array}$$

Podemos, en este ejemplo, dar una fórmula explícita para una función f *de* J *en* A *que establece una correspondencia 1-1:*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ par }) \\ -\frac{n-1}{2} & (n \text{ impar }). \end{cases}$$

Observación: *Un conjunto finito no puede ser equivalente a uno de sus subconjuntos propios. Sin embargo, esto es posible para conjuntos infinitos, según se ve en el ejercicio 2.1, en el que* J *es un subconjunto propio de* A.

De hecho, podemos sustituir la Definición 2.4(b) por la proposición: A *es infinito, si es equivalente a uno de sus subconjuntos propios.*

Definición 2.5 *Por sucesión entendemos una función* f *definida en el conjunto* J *de todos los enteros positivos. Si* $f(n) = x_n$, *para* $n \in J$, *se acostumbra a representar la sucesión* f *por el símbolo* $\{x_n\}$, *o a veces por* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *Los valores de* f, *esto es, los elementos* x_n, *se llaman términos de la sucesión. Si* A *es un conjunto y* $x_n \in A$ *para todo* $n \in J$, *se dice que* $\{x_n\}$ *es una sucesión en* A, *o una sucesión de elementos de* A.

Obsérvese que los términos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de una sucesión no necesitan ser distintos.

Como todo conjunto numerable es el rango de una función 1-1 definida en J, podemos considerar un conjunto numerable como el rango de una sucesión de términos distintos. Hablando más libremente, podemos decir que los elementos de un conjunto numerable pueden ser «dispuestos en una sucesión».

A veces es conveniente sustituir J en esta definición por el conjunto de todos los enteros no negativos, esto es, comenzar con 0 en lugar de 1.

Teorema 2.1 *Todo subconjunto infinito de un conjunto numerable A, es numerable.*

Demostración: *Supongamos $E \subset A$ y que E es infinito. Dispongamos los elementos x de A en una sucesion $\{x_n\}$ de elementos distintos. Construyamos una sucesión $\{n_k\}$ como sigue:*

Sea n_1, el menor entero positivo tal que $x_{n_1} \in E$. Elegidos $n_1, \ldots, n_{k-1}(k = 2, 3, 4, \ldots)$, sean n_k el menor entero mayor que n_{k-1} y tal que $x_{n_k} \in E$.

Poniendo $f(k) = x_{n_k}(k = 1, 2, 3, \ldots)$ obtenemos una correspondencia $1 - 1$ entre E y J.

El teorema muestra que, hablando vulgarmente, los conjuntos numerables representan la «menor» infinidad; un conjunto que no es no numerable puede ser un subconjunto de uno numerable (No existe ningún conjunto no numerable que pueda ser un subconjunto de un conjunto numerable).

Definición 2.6 *Sean A y Ω dos conjuntos y supongamos que a cada elemento α de A hay asociado un subconjunto de Ω que representaremos por E_α. El conjunto cuyos elementos son los conjuntos E_α se representará por $\{E_\alpha\}$. En lugar de hablar de conjuntos de conjuntos, hablaremos a veces de una colección de conjuntos, o de una familia de conjuntos.*
Se define la unión de los conjuntos E_α como el conjunto S tal que $x \in S$ si, y solo si, $x \in E_\alpha$ para, al menos, un $\alpha \in A$. Usaremos la notación

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha. \tag{2.1.1}$$

Si A está constituido por los enteros $1, 2, \ldots, n$ escribiremos

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m \tag{2.1.2}$$

o

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n. \tag{2.1.3}$$

Si A es el conjunto de todos los enteros positivos, la notación usual es

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \tag{2.1.4}$$

El símbolo ∞ indica simplemente en (2.1.4), que se toma la unión de una colección numerable de conjuntos, y no debe confundirse con los símbolos $+\infty$ y $-\infty$.
Se define la intersección de los conjuntos E_α como el conjunto P tal que $x \in P$ si, y solo si, $x \in E_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Usaremos la notación

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha, \tag{2.1.5}$$

o

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n, \tag{2.1.6}$$

o

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m \tag{2.1.7}$$

como para las uniones. Si $A \cap B$ no es vacío, decimos que A y B se intersecan; o de otro modo: son ajenos.

Ejemplo 2.2

(a) Supongamos que E_1 está constituido por 1, 2, 3, y E_2 por 2, 3, 4. $E_1 \cup E_2$ estará constituido por 1,2,3,4; mientras que $E_1 \cap E_2$ lo estará por 2, 3 .

(b) Sea A el conjunto de los números reales x tales que $0 < x \leq 1$. Para todo $x \in A$, sea E_x el conjunto de los números reales y tales que $0 < y < x$. Será

$$E_x \subset E_z \text{ si, y solo si, } 0 < x \leq z \leq 1; \tag{i}$$

$$\bigcup_{x \in A} E_x = E_1 \tag{ii}$$

$$\bigcap_{x \in A} E_x \text{ es vacío;} \tag{iii}$$

(i) y (ii) son inmediatas. Para demostrar (iii), notemos que para todo $y > 0$, $y \notin E_x$ si $x < y$. De aquí, que $y \notin \bigcap_{x \in A} E_x$.

Observación: *Muchas propiedades de las uniones e intersecciones son completamente similares a las de las sumas y productos; a veces incluso se utilizan las palabras suma y producto y se escriben los símbolos Σ y Π en lugar de $\cup$ y $\cap$.*

Las leyes conmutativas y asociativa se ven inmediatamente:

$$A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A. \tag{2.1.8}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). \tag{2.1.9}$$

Así, la omisión de paréntesis en (2.1.3) y (2.1.6) está justificada.

También se conserva la ley distributiva:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{2.1.10}$$

Para demostrar esto, representemos el primer y segundo miembro de (2.1.10) por E y F, respectivamente. Supongamos $x \in E$. Entonces; $x \in A$ y $x \in B \cup C$, esto es $x \in B$ o $x \in C$ (es posible que en ambos). Por tanto, $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$, de modo que $x \in F$. Así pues, $E \subset F$.

Continuando: supongamos que $x \in F$. Entonces, $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. Esto es, $x \in A$, y $x \in B \cup C$. Por tanto, $x \in A \cap (B \cup C)$, de modo que $F \subset E$. De lo cual se deduce que $F = E$.

Reseñemos algunas otras relaciones que pueden demostrarse fácilmente:

$$A \subset A \cup B, \tag{2.1.11}$$

$$A \cap B \subset A. \tag{2.1.12}$$

Si 0 representa un conjunto vacío, será

$$A \cup 0 = A, \quad A \cap 0 = 0. \tag{2.1.13}$$

Si $A \subset B$:

$$A \cup B = B, \quad A \cap B = A. \tag{2.1.14}$$

Teorema 2.2 *Sea* $\{E_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *una sucesión de conjuntos numerables y hagamos*

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{2.1.15}$$

S *es numerable.*

Demostración: *Dispongamus cada conjunto* E_n *en una sucesión* $\{x_{nk}\}$*, con* $k = 1, 2, 3, \ldots$ ***y*** *consideremos la disposición en cuadro infinito:*

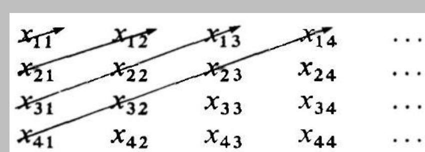

Figura 2.1: Ordenamiento.

en la que los, elementos de E_n *constituyen la fila n-ésima. El cuadro contiene todos los elementos de* S*. Estos elementos pueden disponerse en una sucesión como indican las flechas.*

$$x_{11}; x_{21}, x_{12}; x_{31}, x_{22}, x_{13}; x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}; \ldots \tag{2.1.16}$$

Si dos cualesquiera de estos conjuntos E_n *tienen elementos comunes, aparecerán más de una vez en* (2.1.16)*. Por tanto, hay un subconjunto* T *del conjunto de todos los enteros positivos, tal que* $S \sim T$*, lo que demuestra que* S *es a lo sumo numerable (Teorema 2.1). Como* $E_1 \subset S$ *y* E_1 *es infinito,* S *es infinito y, por tanto, numerable.*

Corolario 2.1 *Supongamos que* A *es a lo sumo numerable, y para cada* $\alpha \in A$, B_α *es a lo sumo numerable. Hagamos*

$$T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$$

T *será también a lo sumo numerable.*

Puesto que T es equivalente a un subconjunto de (2.1.15).

Teorema 2.3 *Sea A un conjunto numerable y B_n el conjunto de todas las n-tuplas $(a_1, \ldots, a_n)$, donde $a_k \in A(k = 1, \ldots n)$ sin que los elementos $a_1, \ldots, a_n$ necesiten ser distintos. B_n es numerable.*

Demostración: *Que B_1 es numerable es evidente, pues $B_1 = A$. Supongamos que B_{n-1} es numerable $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Los elementos de B_n son de la forma*

$$(b, a) \quad (b \in B_{n-1}, a \in A) \tag{2.1.17}$$

Para cada b dado, el conjunto de pares (b, a) es equivalente a A, y por tanto numerable. Así pues, B_n es la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables. Por el Teorema (2.2), B_n es numerable.

El teorema se demuestra por inducción.

Corolario 2.2 *El conjunto de todos los números racionales es numerable.*

Demostración: *Aplicaremos el Teorema (2.3), con $n = 2$, haciendo observar que todo número racional r es de la forma b/a, siendo a y b enteros. El conjunto de pares (a, b) y por tanto el de las fracciones b/a es numerable.*

De hecho, también es numerable el conjunto de todos los números algebraicos (ver Ejer. 2).

Que no todos los conjuntos infinitos son numerables, se ve en el siguiente teorema.

Teorema 2.4 *Sea A el conjunto de todas las sucesiones cuyos elementos son los dígitos 0 y 1. Este conjunto A, es no numerable,*
Los elementos de A se disponen en sucesión como sigue: $1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \ldots$.

Demostración: *Sea E un subconjunto numerable de A y supongamos E constituido por las sucesiones $s_1, s_2, s_3, \ldots$ Construimos una sucesión s como sigue: si el dígito n-ésimo en s_n es 1 , hacemos que el n-ésimo de s sea 0 , y viceversa. La sucesión s difiere, pues, de cada elemento de E al menos en un lugar; por tanto, $s \notin E$. Pero es claro que $s \in A$, por lo cual E es un subconjunto propio de A.*

Hemos demostrado que todo subconjunto numerable de A es un subconjunto propio de A. Se deduce de aquí que A es no numerable (porque de otro modo A sería un subconjunto propio de A, lo que es absurdo).

La idea de la demostración anterior fue utilizada primeramente por Cantor y se llama proceso diagonal de Cantor, porque si las sucesiones $s_1, s_2, s_3, \ldots$ están colocadas en una disposición como en (2.1), los elementos de la diagonal son los que intervienen en la construcción de la nueva sucesión.

Los lectores que estén familiarizados con la representación binaria de los números reales (base 2 en lugar de 10) se darán cuenta de que el Teorema (2.4) implica que el conjunto de todos los números reales es no numerable. Daremos una segunda demostración de este hecho en el Teorema 2.23.

2.2 Espacios métricos

Definición 2.7 *Un conjunto X cuyos elementos llamaremos puntos, se dice que es un espacio métrico si a cada dos puntos p y q de X hay asociado un número real $d(p,q)$ llamado distancia de p a q, tal que*
(a) $d(p,q) > 0$ si $p \neq q; d(p,p) = 0$;
(b) $d(p,q) = d(q,p)$;
(c) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$, para todo $r \in X$.
Cualquier función con las tres propiedades anteriores se llama función distancia o métrica.

Ejemplo 2.3 *Los ejemplos más importantes de espacios métricos, desde nuestro punto de vista, son los espacios euclidianos $\mathbb{R}^k$, especialmente $\mathbb{R}^1$ (la recta real) y $\mathbb{R}^2$ (el plano complejo); la distancia en $\mathbb{R}^k$ se define por*

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \quad \left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k\right). \tag{2.2.1}$$

Por el Teorema 1.12, las condiciones de la definición 2.7 quedan satisfechas por (2.2.1).

Es importante observar que todo subconjunto Y de un espacio métrico X, es a su vez un espacio métrico, con la misma función distancia; porque está claro que si se cumplen las condiciones (a) *a* (c) *de la Definición 2.7 para $p,q,r \in X$, también se cumplirán si imponemos a p,q,r la condición restrictiva de pertenecer a Y.*

Así pues, todo subconjunto de un espacio euclidiano, es un espacio métrico. Otros ejemplos son los espacios $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{L}^2(\mu)$, que se tratan en los capítulos posteriores.

Definición 2.8 *Por segmento (a,b) queremos significar el conjunto de todos los números reales x tales que $a < x < b$.*
Por intervalo $[a,b]$ entendemos el conjunto de todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$.
Ocasionalmente encontraremos «intervalos semi-abiertos» $[a,b)$ y $(a,b]$, el primero de los cuales está constituido por todo x tal que $a \leq x < b$, y el segundo por todo x para el cual $a < x \leq b$.
Si $a_i < b_i$ para $i = 1,\ldots,k$, el conjunto de todos los puntos, $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_k)$ en $\mathbb{R}^k$, cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades $a_i \leq x_i \leq b_i (1 \leq i \leq k)$ se llama celda-k. Así, una celda-1 es un intervalo, una celda-2 un rectángulo, etc.
Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ y $r > 0$, se define la bola abierta (o cerrada) B con centro en $\boldsymbol{x}$ y radio r como el conjunto de todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ tal que $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| < r$ (o $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| \leq r$).
Llamaremos convexo a un conjunto $E \subset \mathbb{R}^k$, si

$$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in E$$

cuando $\boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{y} \in E$ y $0 < \lambda < 1$.

Por ejemplo, las bolas son convexas. Porque si $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r, |\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|<r$, y $0<\lambda<1$. tenemos

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{y}+(1-\lambda)\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}| &= |\lambda(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+(1-\lambda)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})| \\ &\leq \lambda|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|+(1-\lambda)|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|<\lambda r+(1-\lambda)r=r.\end{aligned}$$

La misma demostración se aplica a las bolas cerradas. Es también fácil de ver que las celdas-k son convexas.

Definición 2.9 *Sea X un espacio métrico. Se entiende que todos los puntos y conjuntos mencionados a continuación son elementos y subconjuntos de X.*
(a) Vecindad (o entorno) de un punto p es un conjunto $N_r(p)$ formado por todos los puntos q tales que $d(p,q)<r$. Al número r se le llama radio de $N_r(p)$.
(b) Un punto p es un punto límite del conjunto E si toda vecindad de p contiene un punto $q\neq p$ tal que $q\in E$.
(c) Si $p\in E$ y p no es un punto límite de E, a p se le llama punto aislado de E.
(d) E es cerrado si todos sus puntos límites pertenecen a él.
(e) Un punto p es interior a E si existe una vecindad N de p tal que $N\subset E$.
(f) E es abierto si todos sus puntos son interiores.
(g) El complemento de E (representado por E^c) es el conjunto de todos los puntos $p\in X$ tales que $p\notin E$.
(h) E es perfecto si es cerrado y todos sus puntos son puntos limites.
(i) E es acotado si hay un número real M y un punto $q\in X$ tales que $d(p,q)<M$ para todo $p\in E$.
(j) E es denso en X si todo punto de X es punto límite de E, o punto de E (o ambas cosas a la vez).

Observemos que en $\mathbb{R}^1$ las vecindades son segmentos, mientras que en $\mathbb{R}^2$ son círculos.

Teorema 2.5 *Toda vecindad es un conjunto abierto.*

Demostración: *Consideremos una vecindad $E=N_r(p)$, y sea q un punto cualquiera de E. Hay un número real positivo h, tal que*

$$d(p,q)=r-h$$

Para todo punto s para el cual $d(q,s)<h$ tendremos, pues

$$d(p,s)\leq d(p,q)+d(q,s)<r-h+h=r$$

de modo que $s\in E$. Así pues, q es un punto interior de E.

Teorema 2.6 *Si p es un punto límite de un conjunto E, toda vecindad de p contiene infinitos puntos de E.*

Demostración: *Supongamos que hay una vecindad N de p que solamente contiene un número finito de puntos de E. Sean $q_1,\ldots,q_n$ esos puntos de $N\cap E$ que son distintos de p, y hagamos*

$$r=\min_{1\leq m\leq n} d\left(p,q_m\right)$$

[usaremos esta notación para expresar el menor de los números $d\left(p,q_1\right),\ldots,d\left(p,q_n\right)$]. El mínimo de un conjunto finito de números positivos es, evidentemente, positivo, de modo que $r>0$.

La vecindad $N_r(p)$ no contiene ningún punto q de E tal que $q \neq p$, de modo que p no es punto límite de E. Esta contradicción, demuestra el teorema.

Corolario 2.3 *Un conjunto finito de puntos no tiene puntos límites.*

Ejemplo 2.4 *Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:*

(a) El conjunto de todos los números complejos z tales que $|z| < 1$.

(b) El conjunto de todos los números complejos z tales que $|z| \leq 1$.

(c) Un conjunto finito.

(d) El conjunto de todos los enteros.

(e) El conjunto constituido por los números $1/n (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Notemos que este conjunto E tiene un punto límite (éste es, $z = 0$), pero ningún punto de E es punto límite de E, con lo que se ve la diferencia entre poseer un punto límite y contenerle.

(f) El conjunto de todos los números complejos (esto es, $\mathbb{R}^2$).

(g) El segmento (a, b).

Observemos que $(d), (e)$ y (g) pueden ser considerados también como subconjuntos de $\mathbb{R}^1$.

A continuación se expresan en una tabla algunas propiedades de estos conjuntos:

	Cerrado	Abierto	Perfecto	Acotado
(a)	No	Sí	No	Sí
(b)	Sí	No	Sí	Sí
(c)	Sí	No	No	Sí
(d)	Sí	No	No	No
(e)	No	No	No	Sí
(f)	Sí	Sí	Sí	No
(g)	No		No	Sí

En (g) hemos dejado la segunda columna en blanco. La razón es que el segmento (a, b) no es abierto si le consideramos como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, pero si es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^1$.

Teorema 2.7 *Sea $\{E_\alpha\}$ una colección (finita o infinita) de conjuntos E_α. Será:*

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha (E_\alpha^c)\,. \tag{2.2.2}$$

Demostración: *Sean A y B el primero y el segundo miembro de (2.2.2). Si $x \in A$, entonces $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$; por tanto $x \notin E_\alpha$ para cualquier α, y $x \in E_\alpha^c$ para todo α, de modo que $x \in \bigcap_\alpha E_\alpha^c$. Así pues, $A \subset B$.*

Inversamente, si $x \in B$, estará $x \in E_\alpha^c$ para todo α, y $x \notin E_\alpha$ para cualquier α, y de aquí $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$, de modo que $x \in (\bigcup_\alpha E_\alpha)^c$. Así pues, $B \subset A$.

Se deduce pues, que $A = B$.

Teorema 2.8 *Un conjunto E es abierto, si y solo si su complemento es cerrado.*

Demostración: *Supongamos, primeramente que E^c es cerrado, y elijamos un $x \in E$. En este caso, $x \notin E^c$ y x no es punto límite de E^c. Por tanto, existe una vecindad N de x tal que $E^c \cap N$ es vacío, esto es, $N \subset E$. Este x es un punto interior de E y E es abierto.*

Ahora, supongamos E abierto y sea x un punto límite de E^c. Cada vecindad de x contiene un punto de E^c, de modo que x no es punto interior de E. Como E es abierto, esto significa que $x \in E^c$, de donde se deduce que E^c es cerrado.

Corolario 2.4 *Un conjunto F es cerrado si, y solo si, su complemento es abierto.*

Teorema 2.9 *(a) Para toda colección $\{G_\alpha\}$ de conjuntos abiertos, $\bigcup_\alpha G_\alpha$ es abierto.*

(b) Para toda colección $\{F_\alpha\}$ de conjuntos cerrados, $\bigcap_\alpha F_\alpha$ es cerrado.

(c) Para toda colección finita $G_1, \ldots, G_n$ de conjuntos abiertos, $\bigcap_{i=1}^n G_i$ es abierto.

(d) Para toda colección finita $F_1, \ldots, F_n$ de conjuntos cerrados, $\bigcup_{i=1}^n F_i$ es cerrado.

Demostración: *Hagamos $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Si $x \in G$, tendremos que $x \in G_\alpha$ para algún α. Como x es un punto interior de G_α, es también un punto interior de G, y G es abierto, lo que demuestra (a).*

Por el Teorema 2.7,

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha (F_\alpha^c) \tag{2.2.3}$$

y F_α^c es abierto, por el Teorema 2.8. Por tanto (a) implica que (2.2.3) es abierto y, por tanto, $\bigcap_\alpha F_\alpha$ cerrado.

Ahora, hagamos $H = \bigcap_{i=1}^n G_i$. Para todo $x \in H$, existen vecindades N_i de x, con radios r_i, tales que $N_i \subset G_i (i = 1, \ldots, n)$. Hagamos

$$r = \min (r_1, \ldots, r_n)$$

y sea N la vecindad de x de radio r. Entonces, $N \subset G_i$ para $i = 1, \ldots, n$ de forma que $N \subset H$, y H es abierto.

Tomando complementos de (c) se deduce (d):

$$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n (F_i^c)\,.$$

Ejemplo 2.5 *En los apartados (c) y (d) del teorema precedente es esencial el carácter finito de las colecciones. Para verlo, sea G_n el segmento $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) (n = 1, 2, 3, \ldots) : G_n$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^1$.*

Hagamos $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n; G$ *estará constituido por un solo punto (esto es,* $x = 0$ *) y no es, por consiguiente, un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^1$.

Así, pues, la intersección de una colección infinita de conjuntos abiertos no es necesariamente abierta. Del mismo modo, la unión de una colección infinita de conjuntos cerrados no es necesariamente cerrada.

Definición 2.10 *Si* X *es un espacio métrico,* $E \subset X$ *y* E' *representa al conjunto de todos los puntos límite de* E *en* X*, entonces la cerradura de* E *es el conjunto* $\bar{E} = E \cup E'$.

Teorema 2.10 *Si* X *es un espacio métrico y* $E \subset X$*, entonces*
(a) $\bar{E}$ *es cerrado,*
(b) $E = \bar{E}$ *si, y solo si,* E *es cerrado,*
(c) $\bar{E} \subset F$ *para cada conjunto cerrado* $F \subset X$ *tal que* $E \subset F$.
De (a) y (c) es fácil ver que $\bar{E}$ *es el subconjunto cerrado más pequeño de* X *que contiene* E.

Demostración: *(a) Si* $p \in X$ *y* $p \notin \bar{E}$*, entonces* p *no es punto de* E *ni tampoco punto limite de* E*. Por consiguiente,* p *tiene una vecindad que no intersecta* E*. Por tanto el complemento de* $\bar{E}$ *es abierto. De aquí que* $\bar{E}$ *es cerrado.*

(b) Si $E = \bar{E}$*, (a) implica que* E *es cerrado. Si* E *es cerrado, entonces* $E' \subset E$ *[por las Definiciones 2.9(d) y 2.10]; por lo tanto* $\bar{E} = E$.

(c) Si F *es cerrado y* $F \supset E$*, entonces* $F \supset F'$*, de aquí que* $F \supset E'$*. Esto es* $F \supset \bar{E}$.

Teorema 2.11 *Sea* E *un conjunto de números reales acotado superiormente y que no es vacío. Si* $y = \sup E$*. Entonces* $y \in \bar{E}$*. Por consiguiente* $y \in E$ *si* E *es cerrado.*

Compárese esto con los ejemplos de la sección **??**.

Demostración: *Si* $y \in E$*, entonces* $y \in \bar{E}$*. Supóngase que* $y \notin E$*. Entonces para cada* $h > 0$ *existe un punto* $x \in E$ *tal que* $y - h < x < y$*, porque de otra forma* $y - h$ *sería una cota superior de* E*. De aquí que* y *es un punto límite de* E*. Por consiguiente,* $y \in \bar{E}$.

Observación: *Supongamos* $E \subset Y \subset X$*, siendo* X *un espacio métrico. Decir que* E *es un subconjunto abierto de* X *significa que a cada punto* $p \in E$ *hay asociado un número positivo* r*, tal que las condiciones* $d(p,q) < r$ *y* $q \in X$ *implica que* $q \in E$*. Pero hemos visto anteriormente (Sec. 2.16) que* Y *es también un espacio métrico, por lo que nuestras definiciones se pueden hacer igual con* Y*. Para ser más explícitos, diremos que* E *es abierto relativo en* Y *si a cada* $p \in E$ *hay asociado un* $r > 0$*, tal que* $q \in E$ *cuando* $d(p,q) < r$ *y* $q \in Y$*. El ejemplo 2.4(g) mostró que un conjunto puede ser abierto relativo en* Y *sin ser un subconjunto abierto de* X*. Sin embargo, hay una relación sencilla entre estos conceptos, que estableceremos ahora.*

Teorema 2.12 *Supongamos* $Y \subset X$*. Un subconjunto* E *de* Y *es abierto relativo en* Y *si, y solo si* $E = Y \cap G$ *para algún subconjunto abierto* G *de* X.

Demostración: *Supongamos que* E *es abierto relativo en* Y*. Para cada* $p \in E$ *hay un número positivo* r_p*, tal que las condiciones* $d(p,q) < r_p$ *y* $q \in Y$ *implican que* $q \in E$*. Sea* V_p *el conjunto de todos los*

$q \in X$, tales que $d(p,q) < r_p$ y definamos

$$G = \bigcup_{p \in E} V_p.$$

Por los Teoremas 2.5 y 2.9, G será un subconjunto abierto de X.

Como $p \in V_p$ para todo $p \in E$, es claro que $E \subset G \cap Y$.

Por nuestra elección de V_p, tenemos que $V_p \cap Y \subset E$ para todo $p \in E$, de modo que $G \cap Y \subset E$. Así pues, $E = G \cap Y$, con lo que queda demostrada la mitad del teorema.

Inversamente, si G es abierto en X y $E = G \cap Y$, todo $p \in E$ tiene una vecindad $V_p \subset G$. Por tanto, $V_p \cap Y \subset E$, de modo que E es abierto relativo en Y.

2.3 Conjuntos compactos

Definición 2.11 *Llamaremos cubierta abierta de un conjunto E en un espacio métrico X a la colección $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos de X, tales que $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.*

Definición 2.12 *Se dice que un subconjunto K de un espacio métrico X es compacto si toda cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita.*
Más explícitamente, la condición es que si $\{G_\alpha\}$ es una cubierta abierta de K, hay un número finito de índices $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, tales que

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}.$$

La noción de compacticidad es de gran importancia en análisis, especialmente en relación con la continuidad. (Cap. **??**).

Se ve claramente que todo conjunto finito es compacto. La existencia de una extensa clase de conjuntos compactos infinitos en $\mathbb{R}^k$, se deduce del Teorema 2.21.

Ya hemos observado (en la Sec. **??**) que si $E \subset Y \subset X, E$ puede ser abierto relativo en Y, sin ser abierto relativo en X. La propiedad de ser abierto depende, pues, del espacio en el que está sumergido E. Igualmente es cierto para la propiedad de ser cerrado.

Sin embargo, es más fácil utilizar la compacticidad, del modo que vamos a ver. Para formular el próximo teorema, diremos provisionalmente, que K es compacto relativo en X si se cumplen las condiciones de la Definición 2.12.

Teorema 2.13 *Supongamos $K \subset Y \subset X$. K es compacto relativo en X si, y solo si K es compacto relativo en Y.*

En virtud de este teorema podemos, en muchos casos, considerar conjuntos compactos como espacios métricos en sí mismos, sin prestar atención al espacio que los contiene. En particular, aunque tiene escaso sentido hablar de espacios abiertos o cerrados (todo espacio métrico X es un subconjunto abierto de sí mismo, así como también un subconjunto cerrado de sí mismo), tendrá sentido hablar de espacios métricos compactos.

Demostración: *Supongamos K compacto relativo en X, y sea $\{V_\alpha\}$ una colección de conjuntos, abierta relativa en Y, tal que $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. Por el Teorema 2.12, existen conjuntos G_α, abiertos relativos en X, tales que $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$, para todo α; y como K es compacto relativo en X, tendremos:*

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n} \tag{2.3.1}$$

para cierta elección de un número finito de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Como $K \subset Y$ (2.3.1) implica que

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}. \tag{2.3.2}$$

Lo que demuestra que K es compacto relativo en Y.

Inversamente, supongamos que K es compacto relativo en Y y sea $\{G_\alpha\}$ una colección de subconjuntos abiertos de X que cubre a K. Hagamos $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$, luego (2.3.2) se cumplirá para cierta elección de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, y como $V_\alpha \subset G_\alpha$, (2.3.2) implica (2.3.1); lo que completa la demostración.

Teorema 2.14 *Los subconjuntos compactos de espacios métricos, son cerrados.*

Demostración: *Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico X. Demostraremos que el complemento de K es un subconjunto abierto de X.*

Supongamos $p \in X$ y $p \notin K$. Si $q \in K$, sean V_q y W_q vecindades de p y q, respectivamente, de radios menores que $\frac{1}{2}d(p,q)$ [ver la Definición 2.9(a)]. Como K es compacto, hay un número finito de puntos $q_1, \ldots, q_n$ en K, tales que

$$K \subset W_{q_1} \cup \cdots \cup W_{q_n} = W.$$

Si $V = V_{q_1} \cap \cdots \cap V_{q_n}, V$ es una vecindad de p que no interseca a W. Por tanto, $V \subset K^c$, de modo que p es un punto interior de K^c; de donde se deduce el teorema.

Teorema 2.15 *Los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos, son compactos.*

Demostración: *Supongamos $F \subset K \subset X$, F cerrado (relativo en X) y K compacto. Sea $\{V_\alpha\}$ una cubierta abierta de F. Si se añade F^c a $\{V_\alpha\}$, se obtiene una cubierta abierta Ω de K. Como K es compacto, hay una subcolección finita Φ de Ω que cubre a K y, por tanto, a F. Si F^c es un elemento de Φ, podemos sacarle de Φ, quedando aun una cubierta abierta de F. Hemos demostrado así que una subcolección finita de $\{V_\alpha\}$ cubre a F.*

Corolario 2.5 *Si F es cerrado y K compacto, $F \cap K$ es compacto*

Demostración: *Los Teoremas 2.9(b) y 2.14, demuestran que $F \cap K$ es cerrado; como $F \cap K \subset K$, el teorema 2.15 demuestra que $F \cap K$ es compacto.*

Teorema 2.16 *Si $\{K_\alpha\}$ es una colección de subconjuntos compactos de un espacio métrico X, tal que la intersección de toda subcolección finita de $\{K_\alpha\}$ es no vacía, $\bigcap K_\alpha$ es no vacía.*

Demostración: *Tomemos un elemento K_1 de $\{K_\alpha\}$ y hagamos $G_\alpha = K_\alpha^c$. Admitamos que ningún punto de K_1 pertenece a todos los K_α. En estas condiciones, los conjuntos G_α forman una cubierta* *abierta de* K_1*, y como* K_1 *es compacto, hay un número finito de índices* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$*, tal que* $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$*. Pero esto significa que*

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n}$$

es vacío, en contra de la hipótesis.

Corolario 2.6 *Si* $\{K_n\}$ *es una sucesión de conjuntos compactos no vacíos, tales que* $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$*,* $\bigcap_1^\infty K_n$ *es no vacío.*

Teorema 2.17 *Si* E *es un subconjunto infinito de un conjunto compacto* K, E *tiene un punto límite en* K*.*

Demostración: *Si ningún punto de* K *fuera punto límite de* E*, todo* $q \in K$ *tendría una vecindad* V_q *que contendría a lo más un punto de* E *(esto es,* q *si* $q \in E$ *). Está claro que ninguna subcolección finita de* $\{V_q\}$ *puede cubrir a* E*; y lo mismo sucede con* K*, luego* $E \subset K$*, lo que contradice la compacticidad de* K*.*

Teorema 2.18 *Si* $\{I_n\}$ *es una sucesión de intervalos en* $\mathbb{R}^1$*, tal que* $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$*,* $\bigcap_1^\infty I_n$ *es no vacía.*

Demostración: *Si* $I_n = [a_n, b_n]$*, sea* E *el conjunto de todos los* a_n*.* E *será no vacío y acotado superiormente (por* b_1*). Sea* x *el sup de* E*. Si* m *y* n *son enteros positivos:*

$$a_n \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m,$$

de modo que $x \leq b_m$ *para todo* m*. Como es obvio que* $a_m \leq x$*, vemos que* $x \in I_m$ *para* $m = 1, 2, 3, \ldots$

Teorema 2.19 *Sea* k *un entero positivo. Si* $\{I_n\}$ *es una sucesión de* k*-celdas, tales que* $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$*,* $\bigcap_1^\infty I_n$ *es no vacio.*

Demostración: *Supongamos que* I_n *consta de todos los puntos* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$*, tales que*

$$a_{n,j} \leq x_j \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, \ldots)$$

y hagamos $I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$*. Para cada* j*, la sucesión* $\{I_{n,j}\}$ *satisface la hipótesis del Teorema 2.18. Por tanto, existen números reales* $x_j^*(1 \leq j \leq k\ )$*, para los cuales*

$$a_{n,j} \leq x_j^* \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Llamando $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$*, vemos que* $\boldsymbol{x}^* \in I_n$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *de lo que se deduce el teorema.*

Teorema 2.20 *Toda celda-k es compacta.*

Demostración: *Sea* I*, una celda-*k *constituida por todos los puntos* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$*, tales que* $a_j \leq x_j \leq b_j (1 \leq j \leq k)$*. Hagamos*

$$\delta = \left\{ \sum_1^k (b_j - a_j)^2 \right\}^{1/2}$$

Será $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \leq \delta$*, si* $\boldsymbol{x} \in I$*, e* $\boldsymbol{y} \in I$*.*

Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe una cubierta abierta $\{G_\alpha\}$ *de* I *que no contiene ninguna subcubierta finita de* I*. Hagamos* $c_j = (a_j + b_j)/2$*. Los intervalos* $[a_j, c_j]$ *y* $[c_j, b_j]$ *determinarán* 2^k *celdas-k* Q_i*, cuya unión es* I*. Al menos uno de estos conjuntos* Q_i*, que llamamos* I_1*, no puede ser cubierto por ninguna subcolección finita de* $\{G_\alpha\}$ *(de otro modo* I *podría ser así cubierto). A continuación, dividiremos* I_1 *y continuaremos el proceso, obteniendo así una sucesión* $\{I_n\}$ *con las siguientes propiedades*

(a) $\quad I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots;$

(b) I_n *no es cubierto por ninguna subcolección finita de* $\{G_\alpha\}$*.*

(c) Si $\boldsymbol{x} \in I_n$ *y* $\boldsymbol{y} \in I_n$*, luego* $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \leq 2^{-n}\delta$*.*

Por (a) y el Teorema 2.19, hay un punto $\boldsymbol{x}^*$ *que pertenece a todo* I_n*. Para algún* $\alpha, \boldsymbol{x}^* \in G_\alpha$*. Como* G_α *es abierto, existe un* $r > 0$*, tal que* $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*| < r$ *implica que* $\boldsymbol{y} \in G_\alpha$*. Si* n *es tan grande que* $2^{-n}\delta < r$ *(tal* n *existe, porque de otro modo sería* $2^n \leq \delta/r$ *para todo entero positivo* n*, lo que es absurdo) porque* $\mathbb{R}$ *es arquimediano, luego (c) implica que* $I_n \subset G_\alpha$*, lo que está en contradicción con (b), quedando completa la demostración.*

La equivalencia de (a) y (b) del próximo teorema, se conoce por teorema de Heine-Borel.

Teorema 2.21 *Si un conjunto* E *en* $\mathbb{R}^k$ *tiene una de las tres propiedades siguientes, tiene también las otras dos.*
(a) E *es cerrado y acotado*
(b) E *es compacto,*
(c) Todo subconjunto infinito de E *tiene un punto límite en* E*.*

Demostración: *Si se cumple (a)* $E \subset I$ *para alguna celda-k* I *y se deduce (b) de los Teoremas 2.20 y 2.15. El Teorema 2.17 demuestra que (b) implica (c). Queda por demostrar que (c) implica (a).*

Si E *no es acotado, luego* E *contiene puntos* $\boldsymbol{x}_n$ *con*

$$|\boldsymbol{x}_n| > n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

El conjunto S *constituido por estos puntos* $\boldsymbol{x}_n$ *es infinito y se ve inmediatamente que no tiene ningún punto de límite en* $\mathbb{R}^k$ *y, por tanto, en* E*, por lo que (c) tiene como consecuencia que* E *es acotado.*

Si E *no es cerrado, hay un punto* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ *que es punto límite de* E*, pero no pertenece a* E*. Para* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *existen puntos* $\boldsymbol{x}_n \in E$*, tales que* $|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0| < 1/n$*. Sea* S *el conjunto de estos puntos* $\boldsymbol{x}_n$ *:* S *será infinito (de otro modo* $|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0|$ *tendría un valor positivo constante para infinitos* n *) y tiene a* $\boldsymbol{x}_0$ *como punto límite y no tiene ningún otro en* $\mathbb{R}^k$*, porque si* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ *y* $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}_0$ *sería*

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}| &\geq |\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}| - |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0| \\ &\geq |\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}| \end{aligned}$$

para todos los valores de n*, excepto un número finito de ellos, lo que demuestra que* y *no es punto límite de* S *(Teorema 2.6).*

Por tanto, S *no tiene puntos límite en* E*; por lo que* E *debe ser cerrado si se cumple (c).*

Debemos hacer notar, en este punto, que (b) y (c) son equivalentes en todo espacio métrico (Ejer. 26), pero que (a), en general, no implica (b) y (c). Se dan ejemplos en el Ejercicio 16 y en el espacio $\mathcal{L}^2$, tratado en el capítulo **??**.

Teorema 2.22 (Weierstrass) *Todo subconjunto infinito acotado de $\mathbb{R}^k$ tiene un punto límite en $\mathbb{R}^k$.*

Demostración: *Por ser acotado, el conjunto E en cuestión es un subconjunto de una celda-k $I \subset \mathbb{R}^k$. Por el Teorema 2.20, I es compacto; y, por tanto, E tiene un punto límite en I, por Teorema 2.17.*

2.4 Conjuntos perfectos

Teorema 2.23 *Sea P un conjunto perfecto no vacío en $\mathbb{R}^k$. P es no numerable.*

Demostración: *Como P tiene puntos límite, debe ser infinito. Supongámosle numerable y representemos sus puntos por $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots$ Construiremos una sucesión $\{V_n\}$ de vecindades, como sigue:*

Sea V_1 una vecindad de $\boldsymbol{x}_1$. Si V_1 contiene a todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$, tal que $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_1| < r$, se define la cerradura $\bar{V}_1$ correspondiente, como el conjunto de todos los $\boldsymbol{y} \in R^k$, tales que $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_1| \leq r$.

Supongamos que se ha construido V_n de modo que $V_n \cap P$ es no vacío. Como todo punto de P es punto límite de P, hay una vecindad V_{n+1}, tal que (i) $\bar{V}_{n+1} \subset V_n$; (ii) $\boldsymbol{x}_n \notin \bar{V}_{n+1}$; (iii) $V_{n+1} \cap P$ es no vacío. Por (iii), V_{n+1} satisface nuestras hipotesis inductivas y puede realizarse la construcción.

Hagamos $K_n = \bar{V}_n \cap P$. Como $\bar{V}_n$ es cerrado y acotado, $\bar{V}_n$ es compacto. Como $\boldsymbol{x}_n \notin K_{n+1}$ ningún punto de P pertenece a $\bigcap_1^\infty K_n$. Como $K_n \subset P$, esto significa que $\bigcap_1^\infty K_n$ es vacío. Pero todo K_n es no vacío por (iii) y $\boldsymbol{K}_n \supset \boldsymbol{K}_{n+1}$ por (i), lo que contradice al corolario del Teorema 2.16.

Corolario 2.7 *Todo intervalo $[a, b](a < b)$ es no numerable. En particular, el conjunto de todos los números reales es no numerable.*

2.4.1 El conjunto de Cantor

El conjunto que vamos a construir, ahora demuestra que existen conjuntos perfectos en $\mathbb{R}^1$ que no contienen ningún segmento.

Sea E_0 el intervalo [0,1]. Separemos el segmento $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, y sea E_1 la reunión de los intervalos

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Separemos los tercios centrales de estos intervalos, y sea E_2 la unión de los intervalos

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Continuando de este modo, obtenemos una sucesión de conjuntos compactos E_n, tales que

(a) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$;

(b) E_n es la unión de 2^n intervalos, cada uno de longitud 3^{-n}.

El conjunto
$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$
se llama conjunto de Cantor. P es, evidentemente, compacto y el Teorema 2.16 demuestra que es no vacío.

Ningún segmento de la forma
$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right) \tag{2.4.1}$$
donde k y m son enteros positivos, tiene un punto común con P. Como todo segmento (α, β) contiene a un segmento de la forma (2.4.1), si
$$3^{-m} < \frac{\beta - \alpha}{6}$$
P no contiene a ningún segmento.

Para demostrar que P es perfecto basta hacer ver que no contiene ningún punto aislado. Sea $x \in P$ y S un segmento que contiene a x. Sea I_n el intervalo de E_n que contiene a x. Elijamos n suficientemente grande para que $I_n \subset S$ y sea x_n un extremo de I_n tal que $x_n \neq x$.

De la construcción de P se deduce que $x_n \in P$, por lo que x es un punto límite de P y éste es perfecto.

Una de las propiedades más interesantes del conjunto de Cantor es que nos proporciona un ejemplo de conjunto no numerable de medida cero (el concepto de medida, se estudiará en el Cap. **??**).

2.5 Conjuntos conexos

Definición 2.13 *Dos subconjuntos A y B de un espacio métrico X se dice que son separados si $A \cap \bar{B}$ y $\bar{A} \cap B$ son vacíos, es decir, si ningún punto de A pertenece a la cerradura de B y ningún punto de B pertenece a la cerradura de A.*
Un conjunto $E \subset X$ se dice que es conexo si E no es la unión de dos conjuntos separados que no son vacíos.

Observación: *Es obvio que los conjuntos separados son ajenos, pero los conjuntos ajenos no necesariamente son separados. Por ejemplo, el intervalo $[0,1]$ y el segmento $(1,2)$ no son separados, debido a que 1 es un punto límite de $(1,2)$. No obstante, los segmentos $(0,1)$ y $(1,2)$ son separados.*

Los subconjuntos conexos de la recta real tienen una estructura particularmente sencilla:

Teorema 2.24 *Un subconjunto E de la recta real $\mathbb{R}^1$ es conexo si, y solamente si tiene la siguiente propiedad: Si $x \in E$, $y \in E$, y $x < z < y$, entonces $z \in E$.*

Demostración: *Si existe* $x \in E, y \in E$, *y algún* $z \in (x,y)$ *tal que* $z \notin E$, *entonces* $E = A_z \cup B_z$ *donde*

$$A_z = E \cap (-\infty, z), \quad B_z = E \cap (z, +\infty).$$

Como $x \in A_z$ *y* $y \in B_z, A$ *y* B *no son vacíos. Ya que* $A_z \subset (-\infty, z)$ *y* $B_z \subset (z, +\infty)$, *estos son separados. De aquí* E *no es conexo.*

De manera inversa, supóngase que E *no es conexo. Entonces hay conjuntos* A *y* B *separados que no son vacíos tales que* $A \cup B = E$. *Si se toman* $x \in A, y \in B$, *y se supone (sin perder generalidad) que* $x < y$. *Se define ahora*

$$z = \sup(A \cap [x,y]).$$

Por el Teorema 2.11, $z \in \bar{A}$; *de aquí que* $z \notin B$. *En particular,* $x \leq z < y$.
Si $z \notin A$, *se deduce que* $x < z < y$ *y* $z \notin E$.
Si $z \in A$, *entonces* $z \notin \bar{B}$, *en consecuencia existe* z_1 *tal que* $z < z_1 < y$ *y* $z_1 \notin B$. *Por lo tanto,* $x < z_1 < y$ *y* $z_1 \notin E$.

2.6 Ejericios

1. Demostrar que el conjunto vacío es un subconjunto de cada conjunto.

2. Se dice que un número complejo z es algebraico si hay enteros $a_0, \ldots, a_n$, que no son todos cero, tales que
$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$
Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable. Sugerencia: Para cada entero positivo N hay solo un número finito de ecuaciones con
$$n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = N.$$

3. Demostrar que existen números reales que no son algebraicos.

4. ¿Es numerable el conjunto de todos los números reales irracionales?

5. Construir un conjunto acotado de números reales que tenga exactamente tres puntos limites.

6. Si E' es el conjunto de todos los puntos límite de un conjunto E. Demostrar que E' es cerrado. Demostrar también que E y $\bar{E}$ tienen los mismos puntos límite. (Recordar que $\bar{E} = E \cup E'$.) ¿Siempre tienen E y E' los mismos puntos límite?

7. Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots$ subconjuntos de un espacio métrico.

   (a) Si $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$, demostrar que $\bar{B}_n = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   (b) Si $B = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, demostrar que $\bar{B} \supset \bigcup_{i=1}^\infty \bar{A}_i$.

   Mostrar, con un ejemplo, que esta inclusión puede ser propia.

8. ¿Es cada punto de cada conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^2$ un punto límite de E? Responder la misma pregunta para conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^2$.

9. Sea E° el conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto E. [Véase la Definición 2.9(e); a E° se le denomina el interior de E.]
   (a) Demostrar que E° es siempre abierto.
   (b) Demostrar que E es abierto si y solo si, $E^\circ = E$.
   (c) Si $G \subset E$ y G es abierto, demostrar que $G \subset E^\circ$.
   (d) Demostrar que el complemento de E° es la cerradura del complemento de E.
   (e) ¿Tienen siempre E y $\bar{E}$ los mismos interiores?
   (f) ¿Tienen siempre E y E° las mismas cerraduras?
10. Sea X un conjunto infinito. Si para $p \in X$ y $q \in X$ se define
$$d(p,q) = \begin{cases} 1 & (\text{si}\, p \neq q) \\ 0 & (\text{si}\, p = q) \end{cases}$$
Demostrar que esto es una métrica. ¿Cuáles subconjuntos del espacio métrico resultante son abiertos? ¿Cuáles son cerrados? ¿Cuáles son compactos?
11. Si para $x \in \mathbb{R}^1$ y $y \in \mathbb{R}^1$ se define
$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= (x-y)^2, \\ d_2(x,y) &= \sqrt{|x-y|}, \\ d_3(x,y) &= \left|x^2 - y^2\right|, \\ d_4(x,y) &= |x-2y|, \\ d_5(x,y) &= \frac{|x-y|}{1+|x-y|}. \end{aligned}$$
Determinar cuales de éstas son métricas.
12. Si $K \subset \mathbb{R}^1$ consta de 0 y los números $1/n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Demostrar que K es compacto, directamente de la definición (sin usar el teorema de Heine-Borel).
13. Construir un conjunto de números reales compacto en el cual sus puntos límites formen un conjunto numerable.
14. Dar un ejemplo de una cubierta abierta del segmento $(0,1)$ que no tenga una subcubierta finita.
15. Mostrar que el Teorema 2.16 y su Corolario son falsos (en $\mathbb{R}^1$, por ejemplo) si se reemplaza la palabra “compacto” por “cerrado” o por “acotado”.
16. Considerar al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, como un espacio métrico con $d(p,q) = |p-q|$. Sea E el conjunto de todos los $p \in \mathbb{Q}$ tales que $2 < p^2 < 3$. Mostrar que E es cerrado y acotado en $\mathbb{Q}$, pero que E no es compacto. ¿Es E abierto en $\mathbb{Q}$?
17. Si E es el conjunto de todos los $x \in [0,1]$ cuya expansión decimal contiene únicamente a los dígitos 4 y 7. ¿Es numerable E? ¿Es denso E en $[0,1]$? ¿Es E compacto? ¿Es E perfecto?.
18. ¿Existe un conjunto perfecto que no es vacío en $\mathbb{R}^1$ que no contiene ningún número racional?

19. (a) Si A y B son conjuntos cerrados ajenos en algún espacio métrico X, demostrar que son separados.

    (b) Demostrar lo mismo para conjuntos ajenos abiertos.

    (c) Si $p \in X, \delta > 0$ son fijos y se define A como el conjunto de todos los $q \in X$ para los cuales $d(p,q) < \delta$ y B se define de manera similar, con $>$ en lugar de $<$. Demostrar que A y B son separados.

    (d) Demostrar que cada espacio métrico conexo que tiene al menos dos puntos no es numerable. Sugerencia: Usar (c).

20. ¿Las cerraduras y los interiores de conjuntos conexos son siempre conexos? (Considérense los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.)

21. Sean A y B subconjuntos separados de algún $\mathbb{R}^k$, supóngase además que a $\in A$, $b \in \boldsymbol{B}$, y definase

$$\boldsymbol{p}(t) = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$$

    para $t \in \mathbb{R}^1$. Haciendo $A_0 = \boldsymbol{p}^{-1}(A), B_0 = \boldsymbol{p}^{-1}(B)$. [Entonces $t \in A_0$ si y solo si $\boldsymbol{p}(t) \in A$.

    (a) Demostrar que A_0 y B_0 son subconjuntos separados de $\mathbb{R}^1$.

    (b) Demostrar que existe un $t_0 \in (0,1)$ tal que $\boldsymbol{p}(t_0) \notin A \cup B$.

    (c) Demostrar que cada subconjunto convexo de $\mathbb{R}^k$ es conexo.

22. Se dice que un espacio métrico es separable si contiene un subconjunto denso numerable. Demostrar que $\mathbb{R}^k$ es separable. Sugerencia: Considerar el conjunto de los puntos que tienen coordenadas racionales.

23. Se dice que una colección $\{V_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos de X es una base si se cumplen las condiciones siguientes: Para todo $x \in X$ y cada conjunto abierto $G \subset X$ tal que $x \in G$, tenemos que $x \in V_\alpha \subset G$ para algún α. En otras palabras, todo conjunto abierto en X, es la unión de una subcolección de $\{V_\alpha\}$.

    Demostrar que todo espacio métrico separable tiene una base numerable.

    Sugerencia: Tomar todas las vecindades con radio racional y centro en algún subconjunto denso numerable de X.

24. Sea X un espacio métrico en el cual cada subconjunto infinito tiene un punto limite. Demostrar que X es separable. Sugerencia. Fijar $\delta > 0$ y tomar $x_1 \in X$. Elegidos $x_1, \ldots, x_j \in X$, escoger $x_{j+1} \in X$, si es posible, de modo que $d(x_i, x_{j+1}) \geq \delta$ para $i = 1, \ldots, j$. Demostrar que este proceso ha de detenerse después de un número finito de pasos, y que, por tanto, X puede ser cubierto por un número finito de vecindades de radio δ. Tomar $\delta = 1/n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ y considerar los centros de las correspondientes vecindades.

25. Demostrar que cada espacio métrico K compacto tiene una base numerable, y que K es por lo tanto separable. Sugerencia: Para cada entero positivo n, hay un número finito de vecindades de radio $1/n$ cuya unión cubre a K.

26. Sea X un espacio metrico en el que cada subconjunto infinito tiene un punto límite. Demostrar que X es compacto. Sugerencia: Por los ejercicios 23 y 24, X tiene una base numerable. Se deduce que toda cubierta aberta de X tiene una subcubierta numerable $\{G_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$ Si ninguna subcolección finita de $\{G_n\}$ cubre a X, el complemento F_n de $G_1 \cup \ldots \cup G_n$ es no vacío para todo n, pero $\bigcap F_n$ es vacio. Si E es un conjunto que contiene un punto de cada F_n, considerar un punto límite de E y llegar a una contradicción.

27. Se dice que un punto p en un espacio métrico X es un punto de condensación de un conjunto $E \subset X$ si cada vecindad de p contiene un número de puntos de E que no es numerable.

    Suponer que $E \subset \mathbb{R}^k$ es no numerable, y sea P el conjunto de todos los puntos de condensación de E. Demostrar que P es perfecto y que a lo más un número de puntos numerable de E no está en P. En otras palabras, mostrar que $P^c \cap E$ es a lo más numerable. Sugerencia: Sea $\{V_n\}$ una base numerable de $\mathbb{R}^k, y$ W la unión de los V_n para los cuales $E \cap V_n$ es a lo más numerable, entonces muéstrese que $P = W^c$.

28. Demostrar que todo conjunto cerrado en un espacio métrico separable, es la unión de un conjunto (es posible que vacio) perfecto y un conjunto que es a lo sumo numerable. (Corolario: Todo conjunto cerrado numerable en $\mathbb{R}^k$ posee puntos aislados.) Sugerencia: Véase el Ejer. 27.

29. Demostrar que todo conjunto abierto en $\mathbb{R}^1$ es la unión de una colección a lo sumo numerable de segmentos ajenos. Sugerencia: Utilizar el Ejer. 22.

30. Imitar la demostración del teorema 2.43 para llegar al resultado siguiente:

    Si $\mathbb{R}^k = \bigcup_1^\infty F_n$ donde cada F_n es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^k$, al menos uno de los F_n tiene un interior no vacio.

    Propiedad equivalente: Si G_n es un subconjunto abierto dentro de $\mathbb{R}^k$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, luego $\bigcap_1^\infty G_n$ es no vacio (de hecho, es denso en $\mathbb{R}^k$).

    (Es un caso particular del teorema de Baire; ver el Ejer. 22, Cap. 3, para el caso general.)

CAPÍTULO 3

Sucesiones numéricas y series

Como indica el título, este capítulo tratará principalmente sobre sucesiones y series de números complejos. Sin embargo, los hechos fundamentales sobre convergencia se explican con la misma facilidad para casos más generales. Las tres primeras secciones tratarán, en consecuencia, de sucesiones en espacios euclideanos, o incluso en espacios métricos.

3.1 Sucesiones convergentes

Definición 3.1 *Se dice que una sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico X, converge si hay un punto $p \in X$ con las siguientes propiedades: para cada $\varepsilon > 0$, existe un número entero N tal que $n \geq N$ implica que $d(p_n, p) < \varepsilon$. (d representa la distancia en X.)*
En este caso, decimos también que $\{p_n\}$ converge hacia p, o que p es el limite de $\{p_n\}$ [ver el Teorema 3.1(b)] y escribimos $p_n \to p$, o

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Si $\{p_n\}$ no converge, se dice que diverge.

Puede ser conveniente hacer resaltar que nuestra definición de «sucesión convergente» depende no solamente de $\{p_n\}$, sino también de X; por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ converge en $\mathbb{R}^1$ (hacia 0), pero no lo hace en el conjunto de los números reales positivos [con $d(x,y) = |x-y|$]. En casos de posible ambigüedad, debemos ser más precisos y especificar «convergente en X», mejor que solamente «convergente».

Recordemos que el conjunto de todos los puntos p_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ es el rango de $\{p_n\}$. El rango de una sucesión puede ser un conjunto finito, o puede ser infinito. Se dice que la sucesión $\{p_n\}$ es acotada si lo es su rango.

Como ejemplo, consideremos las siguientes sucesiones de números complejos (esto es, $X = \mathbb{R}^2$).

(a) Si $s_n = 1/n$, es $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$; el rango es infinito y la sucesión es acotada.

(b) Si $s_n = n^2$, la sucesión $\{s_n\}$ no es acotada, es divergente y tiene un rango infinito.

(c) Si $s_n = 1 + [(-1)^n/n]$, la sucesión $\{s_n\}$ converge hacia 1, es acotada y tiene rango infinito.

(d) Si $s_n = i^n$, la sucesión $\{s_n\}$ es divergente, es acotada, y tiene un rango finito.

(e) Si $s_n = 1$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, $\{s_n\}$ converge hacia 1 , es acotado y tiene un rango finito.

Resumiremos a continuacion algunas propiedades importantes de las sucesiones convergentes en espacios métricos.

Teorema 3.1 *Sea $\{p_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X.*
(a) $\{p_n\}$ converge hacia $p \in X$ si, y solo si toda vecindad de p contiene todos los términos de $\{p_n\}$, salvo un número finito de ellos.
(b) Si $p \in X$; $p' \in X$ y $\{p_n\}$ convergen hacia p y hacia p' entonces $p' = p$.
(c) Si $\{p_n\}$ converge, entonces $\{p_n\}$ es acotada.
(d) Si $E \subset X$ y p es un punto de límite de E, existe una sucesión $\{p_n\}$ en E para la cual $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Demostración: *(a) Supongamos $p_n \to p$ y sea V una vecindad de p. Para algún $\varepsilon > 0$, las condiciones $d(p, q) < \varepsilon$ y $q \in X$ implican que $q \in V$. En correspondencia con este ε, existe un N tal que $n \geq N$ implica que $d(p_n, p) < \varepsilon$. Por tanto, $n \geq N$ implica que $p_n \in V$.*

Inversamente, supongamos que toda vecindad de p contiene a todos los p_n, salvo un número finito. Tomemos $\varepsilon > 0$, y sea V el conjunto de todos los $q \in X$ tales que $d(p, q) < \varepsilon$. Por hipótesis, existe un N (correspondiente a este V) tal que $p_n \in V$ si $n \geq N$. Asi pues, $d(p_n, p) < \varepsilon$ si $n \geq N$ y, por tanto $p_n \to p$.

(b) Sea un $\varepsilon > 0$, dado. Existen dos enteros N, N' tales que

$$\begin{aligned} n \geq N &\text{ implica } d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq N' &\text{ implica } d(p_n, p') < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

De aquí, si $n \geq$ máx (N, N'), tenemos

$$d(p, p') \leq d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon.$$

Como ε era arbitrario, se deduce que $d(p, q') = 0$.

(c) Supongamos que $p_n \to p$. Existe un entero N tal que $n > N$ implica que $d(p_n, p) < 1$. Hagamos

$$r = \max\{1, d(p_1, p), \ldots, d(p_N, p)\}$$

Entonces, $d(p_n, p) \leq r$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

(d) Para todo entero positivo n, hay un punto $p_n \in E$, tal que $d(p_n, p) < 1/n$. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N de modo que $N\varepsilon > 1$. Si $n > N$, se deduce que $d(p_n, p) < \varepsilon$. Por tanto, $p_n \to p$, lo que completa la demostración.

Podemos estudiar la relación entre la convergencia y las operaciones algebraicas, para las sucesiones en $\mathbb{R}^k$. Consideremos primeramente sucesiones de números complejos.

Teorema 3.2 *Supongamos que* $\{s_n\}, \{t_n\}$ *son sucesiones complejas y* $\lim_{n\to\infty} s_n = s, \lim_{n\to\infty} t_n = t$. *Se verificará*
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} cs_n = cs$, $\lim\limits_{n\to\infty} (c + s_n) = c + s$, *para cualquier número* c;
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t_n = st$
(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{s_n} = \dfrac{1}{s}$, *siempre que* $s_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \ldots)$, *y* $s \neq 0$.

Demostración: *(a) Dado* $\varepsilon > 0$, *existen dos enteros* N_1, N_2 *tales que*

$$\begin{aligned} n \geq N_1 \text{ implica } & \quad |s_n - s| < \tfrac{\varepsilon}{2} \\ n \geq N_2 \text{ implica } & \quad |t_n - t| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Si $N = \max(N_1, N_2), n \geq N$ *implica*

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon.$$

Lo que demuestra (a). La demostracion de (b) es elemental.

(c) Utilizaremos la identidad

$$s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s). \tag{3.1.1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, *existen dos enteros* N_1, N_2 *tales que*

$$\begin{aligned} n \geq N_1 \text{ implica } & |s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}, \\ n \geq N_2 \text{ implica } & |t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Si tomamos $N = \max(N_1, N_2)$, $n \geq N$ *implica*

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon,$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0$$

Apliquemos (a) y (b) a (3.1.1). *Se deduce que*

$$\lim_{n\to\infty} (s_n t_n - st) = 0.$$

(d) Eligiendo m *de modo que* $|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$, *si* $n \geq m$, *vemos que*

$$|s_n| > \frac{1}{2}|s| \quad (n \geq m)$$

Dado $\varepsilon > 0$, *existe un entero* $N > m$ *tal que* $n \geq N$ *implica que*

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|^2 \varepsilon.$$

Por tanto, para $n \geq N$,

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n s}\right| < \frac{2}{|s|^2} |s_n - s| < \varepsilon.$$

Teorema 3.3

(a) *Supongamos* $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *y*

$$\boldsymbol{x}_n = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n})$$

$\{\boldsymbol{x}_n\}$ *converge hacia* $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *si, y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j \quad (1 \leq j \leq k). \tag{3.1.2}$$

(b) *Supongamos que* $\{\boldsymbol{x}_n\}$ *e* $\{\boldsymbol{y}_n\}$ *son sucesiones en* $\mathbb{R}^k$, $\{\beta_n\}$ *es una sucesión de números reales, y* $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$, $\beta_n \to \beta$. *Tendremos que*

$$\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \quad \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n \boldsymbol{x}_n = \beta \boldsymbol{x}$$

Demostración: *(a) Si* $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, *las desigualdades*

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \leq |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}|,$$

que se deducen inmediatamente de la definición de la norma de $\mathbb{R}^k$ *demuestran que se cumple* (3.1.2).

Inversamente, si se cumple (3.1.2), *a cada* $\varepsilon > 0$ *corresponde un entero* N *tal que* $n \geq N$ *implica que*

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \quad (1 \leq j \leq k)$$

y por tanto, $n \geq N$ *implica que*

$$|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}| = \left\{ \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon$$

por lo que, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, *lo que demuestra (a).*

El apartado (b) se deduce de (a) y del Teorema 3.2.

3.2 Subsucesiones

Definición 3.2 *Dada una sucesión* $\{p_n\}$, *consideremos otra* $\{n_k\}$ *constituida por enteros positivos, de modo que* $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. *La sucesión* $\{p_{ni}\}$ *se llama subsucesión de* $\{p_n\}$. *Si* $\{p_{ni}\}$ *converge, su límite se llama limite subsecuencial de* $\{p_n\}$.

Es claro que $\{p_n\}$ converge hacia p si, y solo si toda subsucesión de $\{p_n\}$ converge hacia p. Dejamos los detalles de la demostración al lector.

Teorema 3.4

(a) *Si* $\{p_n\}$ *es una sucesión en un espacio métrico compacto* X, *entonces alguna subsucesión de*

$\{p_n\}$ converge hacia un punto de X.

(b) Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^k$ contiene una subsucesión convergente.

Demostración: *(a) Sea E el rango de $\{p_n\}$. Si E es finito entonces hay un $p \in E$ y una sucesión $\{n_i\}$ con $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, tales que*

$$p_{n_1} = p_{n_2} = \cdots = p$$

La subsucesión $\{p_{n_i}\}$ así obtenida converge evidentemente hacia p.

Si E es infinito, el Teorema 2.17 muestra que E tiene un punto límite $p \in X$. Si se escoge n_1 de tal forma que $d(p, p_{n_1}) < 1$. Después de escoger $n_1, \ldots, n_{i-1}$, el Teorema 2.6 indica que hay un entero $n_i > n_{i-1}$ tal que $d(p, p_{n_i}) < 1/i$. Por lo tanto $\{p_{n_i}\}$ converge hacia p.

(b) Esto se concluye de (a), porque el Teorema 2.21 implica que cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}^k$ está en un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^k$.

Teorema 3.5 *Los limites subsecuenciales de una sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico X forman un subconjunto cerrado de X.*

Demostración: *Sea E^* el conjunto de los límites subsecuenciales de $\{p_n\}$ y sea q un punto límite de E^*. Se tiene que mostrar que $q \in E^*$.*

Si se escoge n_1 de manera que $p_{n_1} \neq q$. (Si tal n_1 no existe, entonces E^* tiene solo un punto, y no hay nada que demostrar.) Hágase $\delta = d(q, p_{n_1})$ y supóngase que se han escogido $n_1, \ldots, n_{i-1}$. Como q es un punto limite de E^*, entonces hay un $x \in E^*$ con $d(x, q) < 2^{-i}\delta$. Ya que $x \in E^*$, entonces hay un $n_i > n_{i-1}$ tal que $d(x, p_{n_i}) < 2^{-i}\delta$. Por lo tanto

$$d(q, p_{n_i}) \leq 2^{1-i}\delta$$

para $i = 1, 2, 3, \ldots$ Esto quiere decir que $\{p_n\}$ converge hacia q. En consecuencia $q \in E^*$.

3.3 Sucesiones de Cauchy

Definición 3.3 *Se dice que una sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico X es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, hay un entero N tal que $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ si $n \geq N$ y $m \geq N$.*

En el estudio de las sucesiones de Cauchy, del mismo modo que en otros casos que encontraremos más adelante, será útil el siguiente concepto geométrico.

Definición 3.4 *Sea E un subconjunto de un espacio métrico X, y S el conjunto de todos los números reales de la forma $d(p, q)$ con $p \in E$ y $q \in E$. El sup de S se llama díametro de E.*
Si $\{p_n\}$ es una sucesión en X y E_N está constituido por los puntos p_N, $p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$, se ve fácilmente, como consecuencia de las dos definiciones anteriores, que $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy

si, y solo si

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}(E_N) = 0.$$

Teorema 3.6

(a) Si $\bar{E}$ es la cerradura de un conjunto E en un espacio métrico X, será:

$$\operatorname{diam}(\bar{E}) = \operatorname{diam}(E).$$

(b) Si K_n es una sucesión de conjuntos compactos en X, tales que $K_n \supset K_{n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$ y si

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0,$$

$\bigcap_1^\infty K_n$ está constituido por exactamente un punto.

Demostración: *(a) Como $E \subset \bar{E}$, es claro que*

$$\operatorname{diam}(E) \leq \operatorname{diam}(\bar{E}).$$

Fijemos $\varepsilon > 0$, y elijamos $p \in \bar{E}$ y $q \in \bar{E}$. Por la definición de $\bar{E}$, existen puntos p', q', en E tales que $d(p, p') < \varepsilon$, y $d(q, q') < \varepsilon$. De aquí,

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq d\left(p, p'\right) + d\left(p', q'\right) + d\left(q', q\right) \\ &< 2\varepsilon + d\left(p', q'\right) \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam}(E) \end{aligned}$$

Se deduce que

$$\operatorname{diam}(\bar{E}) \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam}(E),$$

y como ε era arbitrario, queda demostrado (a).

(b) Hagamos $K = \bigcap_1^\infty K_n$. Por el Teorema 2.16, K es no vacío. Si contiene más de un punto, $\operatorname{diam}(K) > 0$. *Pero para todo $n, K_n \supset K$, de modo que* $\operatorname{diam}(K_n) \geq \operatorname{diam}(K)$, *lo que contradice la hipótesis de ser* $\operatorname{diam}(K_n) \to 0$.

Teorema 3.7

(a) En cualquier espacio métrico X, toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

(b) Si X es un espacio métrico compacto y $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X, entonces $\{p_n\}$ converge hacia algún punto de X.

(c) En $\mathbb{R}^k$ toda sucesión de Cauchy converge.

Nota: La diferencia entre la definición de convergencia y la de sucesión de Cauchy, es que el límite está incluido explícitamente en la primera y no en la segunda. Así el Teorema 3.7(b) permitirá averiguar si una sucesión dada converge o no, sin conocer el límite al que pueda tender.

El hecho (contenido en el Teorema 3.7) de converger una sucesión en $\mathbb{R}^k$ si, y solo si es de Cauchy, se llama comúnmente criterio de convergencia de Cauchy.

Demostración: *(a) Si* $p_n \to p$ *y* $\varepsilon > 0$*, hay un entero* N *tal que* $d(p, p_n) < \varepsilon$ *para todo* $n \geq N$*. En consecuencia*

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < 2\varepsilon$$

si $n \geq N$ *y* $m \geq N$*. Por lo tanto* $\{p_n\}$ *es una sucesión de Cauchy.*

(b) Sea $\{p_n\}$ *una sucesión de Cauchy en el conjunto compacto* X*. Para* $N = 1, 2, 3, \ldots$*, sea* E_N *el conjunto que consta de* $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$ *Entonces*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}(\bar{E}_N) = 0, \tag{3.3.1}$$

debido a la Definición 3.4 y al Teorema 3.6(a). Cada $\bar{E}_N$ *es compacto porque es un subconjunto cerrado de un espacio compacto* X *(Teorema 2.15). También* $E_N \supset E_{N+1}$*, así que* $\bar{E}_N \supset \bar{E}_{N+1}$*.*

El Teorema 3.6(b) indica que hay un $p \in X$ *único, que está en cada* $\bar{E}_N$*.*

Dado $\varepsilon > 0$*. Por* (3.3.1) *hay un entero* N_0 *tal que* $\bar{E}_N < \varepsilon$ *si* $N \geq N_0$*. Como* $p \in \bar{E}_N$*, se deduce que* $d(p, q) < \varepsilon$ *para cada* $q \in \bar{E}_N$*, de aquí que para cada* $q \in E_N$*. En otras palabras* $d(p, p_n) < \varepsilon$ *si* $n \geq N_0$*. Esto expresa exactamente que* $p_n \to p$*.*

(c) Sea $\boldsymbol{x}_n$ *una sucesión de Cauchy en* $\mathbb{R}^k$*. Defínase* E_N *como en (b) con* $\boldsymbol{x}_i$ *en lugar de* p_i*. Para algún* N*,* $\operatorname{diam}(E_N) < 1$*. El rango de* $\{\boldsymbol{x}_n\}$ *es la unión de* E_N *y el conjunto finito* $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{N-1}\}$*. Por esto* $\{\boldsymbol{x}_n\}$ *es acotado. Finalmente de (b) se deduce (c), debido a que todo subconjunto acotado de* $\mathbb{R}^k$ *tiene cerradura compacta en* $\mathbb{R}^k$ *(Teorema 2.21).*

Definición 3.5 *Si toda sucesión de Cauchy converge en un espacio métrico, se dice que este es completo.*

Entonces el Teorema 3.7 expresa que todos los espacios métricos compactos y los espacios euclidianos son completos. El Teorema 3.7 implica también que todo subconjunto cerrado E de un espacio métrico completo X es completo. (Toda sucesión de Cauchy en E es una sucesión de Cauchy en X, por esto converge hacia algún $p \in X$, y ciertamente $p \in E$ porque E es cerrado.) Un ejemplo de un espacio métrico que no es completo es el espacio de todos los números racionales, $d(x, y) = |x - y|$.

El Teorema 3.1(c) y el ejemplo (d) de la Definición 3.1, demuestran que las sucesiones convergentes son acotadas, pero que las sucesiones acotadas, en $\mathbb{R}^k$ no son necesariamente convergentes. Sin embargo, hay un caso importante en el que convergencia es equivalente a acotación; esto sucede con las sucesiones monótonas en $\mathbb{R}^1$.

Definición 3.6 *Se dice que una sucesión* $\{s_n\}$ *de números reales es:*
(a) monótona creciente si $s_n \leq s_{n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$*;*
(b) monotona decreciente si $s_n \geq s_{n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$*.*

La clase de las sucesiones monótonas está constituida por las sucesiones crecientes y las decrecientes.

Teorema 3.8 *Supongamos que* $\{s_n\}$ *es monótona.* $\{s_n\}$ *converge si, y solo si es acotada.*

Demostración: *Supongamos que* $s_n \leq s_{n+1}$ *(la demostración es análoga en el otro caso). Sea* E *el* *rango de* $\{s_n\}$*. Si* $\{s_n\}$ *es acotada, sea* s *el sup de* E*. Será*

$$s_n \leq s \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Para todo $\varepsilon > 0$*, existe un entero* N*, tal que*

$$s - \varepsilon < s_N \leq s$$

porque de otro modo $s - \varepsilon$ *sería una cota superior de* E*. Como* $\{s_n\}$ *es creciente,* $n \geq N$ *implica que*

$$s - \varepsilon < s_n \leq s,$$

lo que demuestra que $\{s_n\}$ *converge (hacia* s*).*

La inversa se deduce del Teorema 3.1(c).

3.4 Límites superior e inferior

Definición 3.7 *Sea* $\{s_n\}$ *una sucesión de números reales con las siguientes propiedades: para cada número real* M *hay un entero* N*, tal que* $n \geq N$ *implica que* $s_n \geq M$*. Escribimos*

$$s_n \to +\infty.$$

Del mismo modo, si para todo número real M *existe un entero* N *tal que* $n \geq N$ *implica que* $s_n \leq M$*, escribimos*

$$s_n \to -\infty.$$

Se habrá observado que hemos utilizado el símbolo $\to$ (introducido en la Definición 3.1) para ciertos tipos de sucesiones divergentes, igual que para las convergentes, pero sin que se hayan cambiado las definiciones de convergencia y de límite, dadas en la Definición 3.1.

Definición 3.8 *Sea* $\{s_n\}$ *una sucesión de números reales, y* E *el conjunto de los números* x *(en el sistema extendido de números reales) tales que* $s_{n_k} \to x$ *para alguna subsucesión* s_{n_k}*. Este conjunto* E *contiene todos los límites subsecuenciales definidos en la Definición 3.2 más, posiblemente, los números* $+\infty$ *y* $-\infty$*.*

Recordemos, ahora, las Definiciones 1.6 y 1.10 y hagamos

$$s^* = \sup E$$
$$s_* = \inf E$$

Los números s^* y s_* se llaman límites superior e inferior de $\{s_n\}$; utilizaremos la notación

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = s^*, \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = s_*.$$

Teorema 3.9 *Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números reales, y consideremos que E y s^* tienen el mismo significado que en la Definición 3.8. En estas condiciones, s^* tiene las dos propiedades siguientes:*
(a) $s^* \in E$.
(b) Si $x > s^*$, existe un entero N tal que $n \geq N$ implica que $s_n < x$.
Además, s^* es el único número que posee las propiedades (a) y (b).
Para s_* se obtiene, evidentemente, un resultado análogo.

Demostración: *(a) Si $s^* = +\infty, E$ no está acotado superiormente, por lo que no lo está $\{s_n\}$ y existe una subsucesión $\{s_{n_k}\}$ tal que $s_{n_k} \to +\infty$.*

Si s^* es real, E está acotado superiormente y existe al menos un límite subsecuencial, de modo que (a) se deduce de los Teoremas 3.5 y 2.11.

Si $s^* = -\infty$, E contiene solo un elemento, es decir $-\infty$, y no existe limite subsecuencial. Por tanto, para todo número real $M, s_n > M$ para, a lo sumo, un número finito de valores de n, de modo que $s_n \to -\infty$.

Queda así demostrado (a) para todos los casos posibles.

(b) Para demostrar (b), supongamos que existe un número $x > s^*$ tal que $s_n \geq x$ para infinitos valores de n. En este caso, existe un número $y \in E$ tal que $y \geq x > s^*$, en contradicción con la definición de s^*.

Por tanto, s^* satisface a (a) y (b).

Para demostrar la unicidad, supongamos que existen dos números p y q que satisfacen (a) y (b), y sea $p < q$. Elijamos x de modo que $p < x < q$. Como p satisface (b), tenemos que $s_n < x$ para $n \geq N$. Pero en este caso, q no puede satisfacer a (a).

Ejemplo 3.1 *(a) Sea $\{s_n\}$ una sucesión que contiene a todos los números racionales. Todo número real es un límite subsecuencial y*

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty, \quad \liminf s_n = -\infty$$

(b) Sea $s_n = (-1)^n[1 + (1/n)]$. Será

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = 1, \quad \liminf s_n = -1$$

(c) Para una sucesión $\{s_n\}$ de valores reales, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, si y solo si

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = s.$$

Terminaremos esta sección con un teorema de gran utilidad, cuya demostración es elemental.

Teorema 3.10 *Si $s_n \leq t_n$ para $n \geq N$, con N, prefijado, se verifica que*

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} t_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n.$$

3.5 Algunas sucesiones especiales

Calcularemos, ahora, los límites de algunas sucesiones que se presentan frecuentemente. Las demostraciones están basadas todas ellas en la siguiente observación: si $0 \leq x_n \leq s_n$ para $n \geq N$, siendo N un número dado, y si $s_n \to 0$, se verifica que $x_n \to 0$.

Teorema 3.11

(a) *Si* $p > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

(b) *Si* $p > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(d) *Si* $p > 0$ *y* α *es real,* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

(e) *Si* $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Demostración: *(a) Tomemos $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$. (Nótese que aquí se ha usado la propiedad arquimidiana del sistema de los números reales.)*

(b) Si $p > 1$, hagamos $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. Será $x_n > 0$ y por la fórmula del binomio

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = p$$

de modo que

$$0 < x_n \leq \frac{p-1}{n}.$$

Por tanto, $x_n \to 0$. Si $p = 1$, (b) es evidente, y si $0 < p < 1$, se obtiene el resultado tomando los recíprocos.

(c) Hagamos $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Luego $x_n \geq 0$, y por el teorema del binomio

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

Por tanto

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

V. Osores

(d) Sea k un entero tal que $k > \alpha; k > 0$. Para $n > 2k$.

$$(1+p)^n > \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}$$

y de aquí

$$0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k} \quad (n > 2k)$$

Como $\alpha - k < 0, n^{\alpha-k} \to 0$ por (a).

(e) Hagamos $\alpha = 0$ en (d).

3.6 Series

En lo que resta de este capítulo, todas las sucesiones y series que consideremos tendrán valores complejos, excepto cuando se indique lo contrario explícitamente. En el Ejercicio 15 se hace referencia a la extensión de alguno de los teoremas que siguen, a series con términos en $\mathbb{R}^k$.

Definición 3.9 *Dada una sucesión $\{a_n\}$ usaremos la notación*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \quad (p \leq q)$$

para expresar la suma $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$. A $\{a_n\}$ le asociamos una sucesión $\{s_n\}$, donde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

También utilizaremos para $\{s_n\}$ la expresión simbólica

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

o, más brevemente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.6.1}$$

Al símbolo 3.6.1 le llamaremos serie infinita o solamente serie. A los números s_n se le llama sumas parciales de la serie. Si $\{s_n\}$ converge hacia s, diremos que la serie converge y escribiremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Al número s se le llama suma de la serie; pero debe entenderse claramente que s es el límite de una sucesión de sumas y que no se obtiene simplemente por adición.
Si $\{s_n\}$ diverge, se dice que la serie diverge.

A veces, por conveniencia de notación, consideraremos series en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{3.6.2}$$

y frecuentemente, cuando no haya peligro de ambigüedad, o si la distinción es de escasa importancia, escribiremos simplemente Σa_n *en lugar de* (3.6.1) *o* (3.6.2).

Es evidente que todo teorema sobre sucesiones, se puede enunciar refiriéndose a las series (haciendo $a_1 = s_1$ y $a_n = s_n - s_{n-1}$ para $n > 1$) y viceversa, pero es, sin embargo, útil considerar ambos conceptos.

El criterio de Cauchy (Teorema 3.7) puede ser enunciado de nuevo en la forma siguiente:

Teorema 3.12 Σa_n *converge si, y solo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un entero* N*, tal que*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \varepsilon \tag{3.6.3}$$

si $m \geq n \geq N$.

En particular, tomando $m = n$, (3.6.3) se convierte en

$$|a_n| \leq \varepsilon \quad (n \geq N).$$

En otras palabras:

Teorema 3.13 *Si* Σa_n *converge,* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

La condición $a_n \to 0$, no es, sin embargo, suficiente para poder asegurar la convergencia de Σa_n. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. Para demostrarlo, considérese el Teorema 3.18.

El Teorema 3.8 sobre sucesiones monótonas, tiene también una equivalencia inmediata para las series.

Teorema 3.14 *Una serie de términos no negativos converge si, y solo si sus sumas parciales forman una sucesión acotada.*

Veamos ahora otro método distinto de estudiar la convergencia, el llamado «criterio de comparación».

Teorema 3.15

(a) Si $|a_n| \leq c_n$ *para* $n \geq N_0$*, donde* N_0 *es un entero dado, y* Σc_n *converge, también converge* Σa_n.

(b) Si $a_n \geq d_n \geq 0$ para $n \geq N_0$ y Σd_n diverge, también diverge Σa_n.

Nótese que (b) se aplica solamente a series de términos a_n no negativos.

Demostración: *Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \geq N_0$, tal que $m \geq n \geq N$ implica que*

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon$$

por el criterio de Cauchy. De aquí, que

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon$$

y se deduce (a).

Además (b) se deduce de (a), porque si Σa_n converge, igual debe suceder con Σd_n [obsérvese que (b) se deduce también del Teorema 3.14].

El criterio de comparación es muy útil; para usarlo convenientemente, debemos familiarizarnos con cierto número de series de términos no negativos, cuya convergencia o divergencia es conocida.

3.7 Series de términos no negativos

La más sencilla de todas es, quizá, la serie geométrica.

Teorema 3.16 *Si $0 \leq x < 1$, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Si $x \geq 1$, la serie diverge.

Demostración: *Si $x \neq 1$*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

de donde se deduce el resultado, si hacemos $n \to \infty$. Para $x = 1$; tenemos

$$1 + 1 + 1 + \cdots,$$

que diverge, evidentemente.

En muchos casos que se encuentran en las aplicaciones, los términos de la serie decrecen monótonamente. Por tanto, es de particular interés el siguiente teorema de Cauchy. Lo que llama la atención del teorema es que una subsucesión más bien «estrecha» de $\{a_n\}$ determina la convergencia o divergencia de Σa_n.

Teorema 3.17 *Supongamos $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si, y solo si la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \tag{3.7.1}$$

converge.

Demostración: *Por el Teorema 3.14, basta considerar el carácter de acotado de las sumas parciales. Sea*

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ t_k &= a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}. \end{aligned}$$

Para $n < 2^k$

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + \left(a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}\right) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k \end{aligned}$$

de modo que

$$s_n \leq t_k \tag{3.7.2}$$

Por otro lado, si $n > 2^k$

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + \left(a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2} t_k \end{aligned}$$

de forma que

$$2s_n \geq t_k \tag{3.7.3}$$

Por (3.7.2) y (3.7.3), las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_k\}$ son, o ambas acotadas o ambas no acotadas, lo que completa la demostración.

Teorema 3.18 $\sum \frac{1}{n^p}$ *converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.*

Demostración: *Si $p \leq 0$, del Teorema 3.13 se deduce la divergencia. Si $p > 0$, es aplicable el Teorema 3.17 y llegamos a la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}$$

Ahora, $2^{1-p} < 1$ si, y solo si $1 - p < 0$ y se deduce la conclusión, por comparación con la serie geométrica (hágase $x = 2^{1-p}$ en el Teorema 3.16).

Como nueva aplicación del Teorema 3.17 demostraremos que:

Teorema 3.19 *Si $p > 1$*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \tag{3.7.4}$$

converge; si $p \leq 1$, la serie diverge.

Observación «$\log n$» expresa el logaritmo de n de base e (comparar con el Ejercicio 7, Cap. 1); el número e será definido inmediatamente (ver Definición 3.10). Comenzaremos la serie por $n = 2$, pues, $\log 1 = 0$.

Demostración: *La monotonía de la función logarítmica (que veremos con más detalle en el Cap. 8) implica que $\{\log n\}$ es creciente. Por tanto, $\{1/n \log n\}$ es decreciente y podemos aplicar el Teorema 3.17 a (3.7.4), lo que nos lleva a la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k (\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \tag{3.7.5}$$

y del Teorema 3.18 se deduce el Teorema 3.19.

Se puede, evidentemente, continuar este proceso. Por ejemplo,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n} \tag{3.7.6}$$

diverge, mientras que

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^2} \tag{3.7.7}$$

converge.

Podemos observar que los términos de la serie (3.7.6) difieren muy poco de los de la (3.7.7). No obstante, una diverge y la otra converge. Si continuamos el proceso que nos llevó del Teorema 3.18 al Teorema 3.19 y luego a (3.7.6) y (3.7.7), encontraremos parejas de series convergentes y divergentes cuyos términos todavía difieren menos que los de (3.7.6) y (3.7.7). Se puede pensar así, que debe de haber una situación límite de cierta naturaleza, una «frontera», con todas las series convergentes a un lado, y las divergentes al otro - al menos mientras se trate de series con coeficientes monótonos-. Esta noción de «frontera» es, en realidad, completamente vaga. Queremos recalcar lo siguiente: De cualquier forma que concretemos esta noción, la idea es falsa. Los Ejercicios 11(b) y 12(b) servirán de ilustración.

No queremos profundizar más en este aspecto de la teoría de la convergencia y enviamos al lector a la «Teoría y Aplicación de las Series Infinitas» de Knopp, capítulo IX, en particular el § 41.

3.8 El número e

Definición 3.10 $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, si $n \geq 1$, y $0! = 1$

Como

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

la serie converge, y tiene sentido la definición. De hecho, la serie converge muy rápidamente y nos permite calcular e con mucha precisión.

Es interesante observar que también puede ser definido e por medio de otro proceso de límites; la demostración proporciona un buen ejemplo de operaciones con límites.

Teorema 3.20 $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Demostración: *Sea*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Por el teorema del binomio

$$\begin{aligned} t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, $t_n \le s_n$, de modo que

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \le e, \tag{3.8.1}$$

por el Teorema 3.10. Además, si $n \ge m$,

$$t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

Sea $n \to \infty$, conservando m fijo. Tendremos

$$\liminf_{n\to\infty} t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

de modo que

$$s_m \le \liminf_{n\to\infty} t_n.$$

Si se hace $m \to \infty$, tenemos finalmente

$$e \le \liminf_{n\to\infty} t_n. \tag{3.8.2}$$

El teorema se deduce de (3.8.1) *y* (3.8.2).

La rapidez con que converge la serie $\sum \frac{1}{n!}$ puede comprobarse como sigue: Si s_n tiene el mismo significado que anteriormente, tendremos

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

de modo que

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n} \tag{3.8.3}$$

Así, por ejemplo, s_{10} da una aproximación de e con un error menor de 10^{-7}. La desigualdad (3.8.3) tiene además interés teórico, pues nos permite demostrar la irracionalidad de e con mucha facilidad.

Teorema 3.21 *e es irracional.*

Demostración: *Supongamos que e es racional. Será $e = p/q$, siendo p y q enteros positivos. Por* (3.8.3),

$$0 < q!\,(e - s_q) < \frac{1}{q} \tag{3.8.4}$$

Por la hipótesis hecha, $q!e$ es entero. Como

$$q!s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

es entero, vemos que $q!\,(e - s_q)$ es entero.

Como $q \geq 1$, (3.8.4) *implica la existencia de un entero entre 0 y 1 , con lo que hemos llegado a una contradicción.*

En realidad, e no es precisamente un número algebraico. Para una demostración sencilla de esto, véase la página 25 del libro de Niven, o la 176 del de Herstein, citados en la Bibliografía.

3.9 Criterios de la raíz y de la razón

Teorema 3.22 (Criterio de la raíz) *Dado Σa_n, hagamos $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.*
Tendremos
(a) si $\alpha < 1$, Σa_n converge;
(b) si $\alpha > 1$, Σa_n diverge;
(c) si $\alpha = 1$, el método no da información.

Demostración: *Si $\alpha < 1$, podemos elegir β de modo que $\alpha < \beta < 1$ y un entero N tal que*

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$$

para $n \geq N$ [por el Teorema 3.9(b)]. Esto es, que $n \geq N$ implica

$$|a_n| < \beta^n.$$

Como $0 < \beta < 1$, $\Sigma\beta^n$ converge. La convergencia de Σa_n puede deducirse ya por el criterio de comparación.

Si $\alpha > 1$, por el Teorema 3.9, hay una sucesión $\{n_k\}$ tal que

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha.$$

Por tanto $|a_n| > 1$ *para infinitos valores de* n*, de modo que no se cumple la condición* $a_n \to 0$*, necesaria para la convergencia de* Σa_n *(Teorema 3.13).*

Para demostrar (c)*, consideremos las series*

$$\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2}.$$

Para cada una de ellas $\alpha = 1$ *pero la primera diverge y la segunda converge.*

Teorema 3.23 (Criterio de la razón) *La serie* Σa_n

(a) converge, si $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$,

(b) diverge si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ *para* $n \geq n_0$*, donde* n_0 *es un número entero cualquiera, dado.*

Demostración: *Si se cumple la condición (a), podemos hallar* $\beta < 1$*, y un entero* N*, tal que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta$$

para $n \geq N$*. En particular,*

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| < \beta\,|a_N|\,,\\
&|a_{N+2}| < \beta\,|a_{N+1}| < \beta^2\,|a_N|\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&|a_{N+p}| < \beta^p\,|a_N|\,.
\end{aligned}$$

esto es,

$$|a_n| < |a_N|\,\beta^{-N}\cdot\beta^n$$

para $n \geq N$ *y se deduce (a) por el criterio de comparación, pues* $\Sigma\beta^n$ *converge.*

Si $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ *para* $n \geq n_0$*, es fácil ver que no se cumple la condición* $a_n \to 0$*, y se deduce* (b)*.*

Nota: El saber que $\lim a_{n+1}/a_n = 1$ no implica nada sobre la convergencia de Σa_n. Las series $\Sigma 1/n$ y $\Sigma 1/n^2$ demuestran esto.

Ejemplo 3.2 *(a) Consideremos la serie*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots,$$

para la cual

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0\\
\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\\
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.
\end{aligned}$$

El criterio de la raíz indica su convergencia, el de la razón no conduce a conclusiones.

(b) Lo mismo es cierto para la serie

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots,$$

donde

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{8},$$
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,$$

pero

$$\lim \sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}.$$

Observación: *El criterio de la razón, frecuentemente es más fácil de aplicar que el de la raíz, pues es usualmente más sencillo calcular cocientes que raíces n-ésimas, pero sin embargo, tiene más amplia aplicación el criterio de la raíz. Precisando más: cuando el criterio de la razón demuestra la convergencia, también el de la raíz; cuando éste no conduce a conclusiones, tampoco lo hace el de la razón. Esto es consecuencia del Teorema 3.24 y se aclara con los ejemplos anteriores.*

Ninguno de los dos es interesante en caso de divergencia. Los dos la deducen del hecho de que a_n no tiende a cero cuando $n\to\infty$.

Teorema 3.24 *Para toda sucesión $\{c_n\}$ de números positivos,*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}\le\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n},$$
$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

Demostración: *Demostraremos la segunda desigualdad; la demostración de la primera es análoga. Hagamos*

$$\alpha=\limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

Si $\alpha=+\infty$, no hay nada que demostrar. Si α es finito, elijamos $\beta>\alpha$. Existe un entero N tal que

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}\le\beta$$

para $n\ge N$. En particular, para todo $p>0$.

$$c_{N+k+1}\le\beta c_{N+k}\quad(k=0,1,\ldots,p-1).$$

Multiplicando estas desigualdades, obtenemos

$$c_{N+p}\le\beta^p c_N$$

o

$$c_n\le c_N\beta^{-N}\cdot\beta^n\quad(n\ge N).$$

De aquí

$$\sqrt[n]{c_n}\le\sqrt[n]{c_N\beta^{-N}}\cdot\beta$$

De modo que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \beta, \tag{3.9.1}$$

por el Teorema 3.11(b). Como (3.9.1) *es cierto para todo* $\beta > \alpha$*, tenemos*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \alpha.$$

3.10 Series de potencias

Definición 3.11 *Dada una sucesión* $\{c_n\}$ *de números complejos, a la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.10.1}$$

se le llama serie de potencias. A los números c_n *se les llama coeficientes de la serie;* z *es un número complejo.*

En general, la serie convergerá o divergerá, según el valor de z. Más concretamente, a toda serie de potencias hay asociado un círculo, llamado círculo de convergencia, tal que (3.10.1) converge si z está en el interior del mismo y diverge si está en el exterior (para tener en cuenta todos los casos, debemos considerar el plano como el interior de un círculo de radio infinito, y un punto como un círculo de radio cero). El comportamiento en el círculo de convergencia es mucho más variado y no se puede definir tan sencillamente.

Teorema 3.25 *Dada la serie de potencias* $\Sigma c_n z^n$*, hagamos*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \qquad R = \frac{1}{\alpha}$$

(Si $\alpha = 0$*,* $R = +\infty$*; si* $\alpha = +\infty$*,* $R = 0$*.)* $\Sigma c_n z^n$ *converge si* $|z| < R$ *y diverge si* $|z| > R$*.*

Demostración: *Hagamos* $a_n = c_n z^n$ *y apliquemos el criterio de la raíz:*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|z|}{R}$$

Nota: A R se le llama radio de convergencia de $\Sigma c_n z^n$.

Ejemplo 3.3

(a) *Para* $\Sigma n^n z^n$*:* $R = 0$*.*

(b) *Para* $\sum \frac{z^n}{n!}$*:* $R = +\infty$ *(en este caso es más sencillo de aplicar el criterio de la razón que el de la raíz).*

(c) *Para* Σz^n *:* $R = 1$*. Si* $|z| = 1$*, la serie diverge, pues* $\{z^n\}$ *no tiende a 0 cuando* $n \to \infty$*.*

(d) *Para* $\sum \frac{z^n}{n}$*:* $R = 1$*. En el círculo de convergencia, la serie diverge para* $z = 1$*, y converge para todos los demás puntos de* $|z| = 1$*. Esta última afirmación será demostrada en el Teorema 3.29.*

(e) *Para* $\sum \frac{z^n}{n^2}$*:* $R = 1$*. La serie converge también en todos los puntos del círculo* $|z| = 1$*, por el criterio de comparación, ya que* $\left|z^n/n^2\right| = 1/n^2$ *si* $|z| = 1$*.*

3.11 Suma por partes

Teorema 3.26 *Dadas dos sucesiones* $\{a_n\}, \{b_n\}$*, hagamos*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

si $n \geq 0$*; pongamos* $A_{-1} = 0$*. Si* $0 \leq p \leq q$*, tenemos*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p. \tag{3.11.1}$$

Demostración:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1}$$

y la última expresión de la derecha se ve fácilmente que es igual al segundo miembro de (3.11.1)*.*

La fórmula (3.11.1), llamada «fórmula de sumación parcial» es útil en el estudio de series de la forma $\Sigma a_n b_n$, en particular cuando $\{b_n\}$ es monótona. Veremos, ahora, algunas aplicaciones.

Teorema 3.27 *Supongamos*
(a) las sumas parciales A_n *de* Σa_n *forman una sucesión acotada;*
(b) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots;$
(c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*.*
Entonces, $\Sigma a_n b_n$ *converge.*

Demostración: *Elijamos* M *de modo que* $|A_n| \leq M$ *para todo* n*. Dado* $\epsilon > 0$*, existe un entero* N *tal que* $b_N \leq (\varepsilon/2M)$*. Para* $N \leq p \leq q$*, tenemos*

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \\
&\leq M \left|\sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right| \\
&= 2M b_p \leq 2M b_N \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Deduciéndose la convergencia a partir del criterio de Cauchy. Observamos que la primera desigualdad de la cadena anterior depende del hecho de ser $b_n - b_{n+1} \geq 0$*.*

Teorema 3.28 *Supongamos que*
(a) $|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \cdots$;
(b) $c_{2m-1} \geq 0, c_{2m} \leq 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$;
(c) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.
Entonces, Σc_n *converge.*

Las series para las que se cumple (b) se llaman «series alternantes»; el teorema es debido a Leibnitz.

Demostración: *Basta aplicar el Teorema 3.27 con* $a_n = (-1)^{n+1}$*, y* $b_n = |c_n|$.

Teorema 3.29 *Supongamos que el radio de convergencia de* $\Sigma c_n z^n$ *es 1 , que* $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \cdots$*, y* $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. $\Sigma c_n z^n$ *converge en todo punto del círculo* $|z| = 1$*, excepto, posiblemente, en* $z = 1$.

Demostración: *Hagamos* $a_n = z^n, b_n = c_n$. *Se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.27, pues*

$$|A_n| = \left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

si $|z| = 1, z \neq 1$.

3.12 Convergencia absoluta

Se dice que la serie Σa_n converge absolutamente si converge la serie $\Sigma\,|a_n|$

Teorema 3.30 *Si* Σa_n *converge absolutamente,* Σa_n *converge.*

Demostración: *La afirmación se deduce de la desigualdad*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$$

más el criterio de Cauchy.

Observación: *Para las series de términos positivos, la convergencia absoluta coincide con la convergencia.*

Si Σa_n converge, pero $\Sigma\,|a_n|$ diverge, decimos que Σa_n converge no absolutamente. Por ejemplo, la serie

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

converge no absolutamente (Teorema 3.28).

El criterio de comparación, lo mismo que el de la raíz y el de la razón, son en realidad métodos para hallar la convergencia absoluta y no pueden dar ninguna información para las series convergentes no absolutamente. Para salvar esta dificultad se utiliza a veces la suma por partes. En particular, las series de potencias convergen absolutamente en el interior del círculo de convergencia.

Veremos que con las series absolutamente convergentes se puede operar en gran manera como con las sumas finitas: podemos multiplicarlas término a término y variar el orden en que se efectúan las sumas, sin afectar a la suma de la serie. Por el contrario, para las series no absolutamente convergentes esto ya no es verdad y hay que tomar más precauciones al operar con ellas.

3.13 Adición y multiplicación de series

Teorema 3.31 *Si $\Sigma a_n = A$, y $\Sigma b_n = B$, será $\Sigma(a_n + b_n) = A + B$, y $\Sigma c a_n = cA$, para todo c prefijado.*

Demostración: *Sea*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

de aquí

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$$

Como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ *y* $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, *vemos que*

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B.$$

La demostración de la segunda afirmación es aún más sencilla.

Así, pues, pueden sumarse término a término dos series convergentes y la serie resultante converge hacia la suma de las dos series. El caso es más complicado cuando consideramos la multiplicación de dos series: para empezar, debemos definir el producto, lo que puede hacerse de varios modos; consideraremos el llamado «producto de Cauchy».

Definición 3.12 *Dadas Σa_n y Σb_n, hacemos*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y llamamos a Σc_n, producto de las dos series dadas.

Se puede justificar esta definición del modo siguiente: si tenemos dos series de potencias $\Sigma a_n z^n$ y $\Sigma b_n z^n$, las multiplicamos término a término y agrupamos las que tienen la misma potencia de z, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right)\left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots\right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots \\ &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots .\end{aligned}$$

Haciendo $z = 1$, llegamos a la definición anterior.

Ejemplo 3.4 *Si*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

y $A_n \to A$ *y* $B_n \to B$*, no es inmediato que* $\{C_n\}$ *converja hacia* AB*, pues no es* $C_n = A_n B_n$*. La dependencia de* $\{C_n\}$ *respecto a* $\{A_n\}$ *y* $\{B_n\}$ *es complicada (ver la demostración del Teorema 3.32). Vamos a ver que el producto de dos series convergentes puede, de hecho, ser divergente.*

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

converge (Teorema 3.28). Formemos el producto de esta serie consigo misma, obteniendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots,$$

de forma que

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Como

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2.$$

tendremos

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}$$

con lo que se ve que la condición $c_n \to 0$*, necesaria para la convergencia de* Σc_n*, no se cumple.*

Antes de ver el teorema siguiente, debido a Mertens, debemos hacer notar que hemos considerado el producto de dos series no absolutamente convergentes.

Teorema 3.32 *Supongamos que*

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente,*

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$*,*

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$*,*

(d) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Se verificará que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB.$$

Esto es, el producto de dos series convergentes converge, haciéndolo además hacia el valor previsto, si al menos una de las dos series converge absolutamente.

Demostración: *Hagamos*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad \beta_n = B_n - B.$$

Será

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n (B + \beta_0) \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 \end{aligned}$$

Pongamos

$$\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0.$$

Queremos demostrar que $C_n \to AB$. *Como* $A_n B \to AB$, *basta ver que*

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0. \tag{3.13.1}$$

Hagamos

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

[Aquí es donde utilizaremos (a)]. Sea dado $\varepsilon > 0$. *Por* (c), $\beta_n \to 0$. *Por tanto, podemos elegir* N *tal que* $|\beta_n| \le \varepsilon$ *para* $n \ge N$, *en cuyo caso*

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\le |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0| \\ &\le |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha. \end{aligned}$$

Conservando N *fijo y haciendo* $n \to \infty$, *tenemos*

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \le \varepsilon\alpha,$$

ya que $a_k \to 0$ *cuando* $k \to \infty$. *Y, al ser arbitrario* ϵ, *queda demostrado* (3.13.1).

Otra interrogación que se presenta es si la serie Σc_n tiene, siempre que sea convergente, la suma AB. Abel demostró que la respuesta es afirmativa:

Teorema 3.33 *Si las series* Σa_n, Σb_n *y* Σc_n *convergen hacia* A, B, C *y* $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$, *luego* $C = AB$.

En este caso, no es necesario hacer ninguna hipótesis sobre la convergencia absoluta. Daremos una demostración sencilla (que se basa en la continuidad de las series potenciales) después de ver el Teorema **??**.

3.14 Reordenamientos

Definición 3.13 *Sea $\{k_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, una sucesión en la que cada entero positivo aparece una vez y solo una (esto es, $\{k_n\}$ es una función 1-1 de J en J, según la notación de la Definición 2.4). Haciendo*

$$a'_n = a_{k_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

decimos que $\Sigma a'_n$ es un reordenamiento de Σa_n.

Si $\{s_n\}$ y $\{s'_n\}$ son las sucesiones de las sumas parciales de Σa_n y $\Sigma a'_n$, se ve fácilmente que, en general, las dos sucesiones constan de términos completamente diferentes. Hemos llegado, ahora, al problema de determinar en qué condiciones convergerán todos los reordenamientos de una serie convergente, y si las sumas de ellas son necesariamente iguales.

Ejemplo 3.5 *Consideremos la serie convergente*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{3.14.1}$$

y uno de sus reordenamientos.

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{3.14.2}$$

en la que siempre a dos términos positivos sigue uno negativo. Si s es la suma de (3.14.1).

$$s < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Como

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > 0$$

para $k \geq 1$, vemos que $s'_3 < s'_6 < s'_9 < \cdots$, donde s'_n es la n-ésima suma parcial de (3.14.2). *Por tanto,*

$$\limsup_{n\to\infty} s'_n > s'_3 = \frac{5}{6}$$

esto es, (3.14.2) *no converge hacia s [dejamos al lector el comprobar que* (3.14.2)*, sin embargo, converge].*

Este ejemplo ilustra el teorema siguiente, debido a Riemann.

Teorema 3.34 *Sea Σa_n una serie convergente pero no absolutamente de números reales, y sean $\alpha \leq \beta$ dos números dados (en el sistema ampliado de números reales). Esto es,*

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$$

V. Osores

Existe un reordenamiento $\Sigma a'_n$, con sumas parciales, s'_n, tales que:

$$\liminf_{n\to\infty} s'_n = \alpha, \quad \limsup_{n\to\infty} s'_n = \beta. \tag{3.14.3}$$

Demostración: *Sea*

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Será $p_n - q_n = a_n$; $p_n + q_n = |a_n|$; $p_n \geq 0$; $q_n \geq 0$. Las series Σp_n y Σq_n serán ambas divergentes.

Porque si fueran convergentes,

$$\Sigma\,(p_n + q_n) = \Sigma\,|a_n|$$

sería convergente, contrariamente a la hipótesis. Como

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n$$

la divergencia de Σp_n y la convergencia de Σq_n (o viceversa) implica la divergencia de Σa_n lo que, de nuevo, va contra la hipótesis.

Representemos, ahora, por $P_1, P_2, P_3, \ldots$, los términos no negativos de Σa_n en el orden en que figuran y $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, los valores absolutos de los términos negativos de Σa_n en su orden.

Las series $\Sigma P_n, \Sigma Q_n$ difieren de $\Sigma p_n, \Sigma q_n$ solo en términos cero y son, por tanto, divergentes.

Construyamos las sucesiones $\{m_n\}, \{k_n\}$ tales que la serie

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} + \cdots, \tag{3.14.4}$$

que, como se ve fácilmente, es un reordenamiento de Σa_n, satisfaga a (3.14.3).

Elijamos sucesiones con valores reales $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ tales que $\alpha_n \to \alpha$; $\beta_n \to \beta$; $\alpha_n < \beta_n$, $\beta_1 > 0$.

Sean $m_1 k_1$ los menores enteros, para los que

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \beta_1$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} < \alpha_1;$$

m_2, k_2 los enteros menores, para los cuales

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > \beta_2$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1}$$
$$- \cdots - Q_{k_2} < \alpha_2$$

continuando de este modo, lo que es posible, porque ΣP_n y ΣQ_n divergen.

Si x_n, y_n representan las sumas parciales de (3.14.4), cuyos últimos términos son $P_{m_n} - Q_{k_n}$, será

$$|x_n - \beta_n| \leq P_{m_n}, \quad |y_n - \alpha_n| \leq Q_{k_n}.$$

Como $P_n \to 0$ y $Q_n \to 0$ cuando $n \to \infty$; vemos que $x_n \to \beta$, e $y_n \to \alpha$.

Finalmente, está claro que ningún número menor que α o mayor que β puede ser límite subsecuencial de las sumas parciales de (3.14.4).

Teorema 3.35 *Si Σa_n es una serie de números complejos que converge absolutamente, entonces cualquier reordenamiento de Σa_n converge, y todos ellos convergen a la misma suma.*

Demostración: *Sea un reordenamiento $\Sigma a'_n$, con sumas parciales s'_n. Dado $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $m \geq n \geq N$ implica*

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| \leq \varepsilon. \tag{3.14.5}$$

Ahora se escoge p de tal forma que los enteros $1, 2, \ldots, N$ estén todos en el conjunto $k_1, k_2, \ldots, k_p$ (se está usando la notación de la Definición 3.13). Entonces si $n > p$, los números $a_1, \ldots, a_N$ se cancelarán al llevar a cabo la diferencia $s_n - s'_n$, de tal forma que por (3.14.5), $|s_n - s'_n| \leq \varepsilon$. Por consiguiente $\{s'_n\}$ converge hacia la misma suma que $\{s_n\}$.

3.15 Ejercicios

1. Demostrar que la convergencia de $\{s_n\}$ implica la de $\{|s_n|\}$. ¿Es verdad la inversa?
2. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.
3. Si $s_1 = \sqrt{2}$, y
$$s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
demostrar que $\{s_n\}$ converge, y que $s_n < 2$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$
4. Hallar los limites superior e inferior de la sucesión $\{s_n\}$ definida por
$$s_1 = 0; \quad s_{2m} = \frac{s_{2m-1}}{2}; \quad s_{2m+1} = \frac{1}{2} + s_{2m}.$$
5. Para cada dos sucesiones reales $\{a_n\}, \{b_n\}$, tenemos
$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$
siempre que la suma de la derecha no sea de la forma $\infty - \infty$.
6. Averiguar el comportamiento (convergencia o divergencia) de Σa_n, si
   (a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
   (b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$;
   (c) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$;
   (d) $a_n = \dfrac{1}{1+z^n}$, para valores complejos de z.
7. Demostrar que la convergencia de Σa_n implica la de
$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$
si $a_n \geq 0$.

8. Si Σa_n converge y $\{b_n\}$ es monótona y acotada, $\Sigma a_n b_n$ converge.

9. Hallar el radio de convergencia de cada una de las series de potencias siguientes:

   (a) $\sum n^3 z^n$,
   (b) $\sum \frac{2^n}{n!} z^n$,
   (c) $\sum \frac{2^n}{n^2} z^n$,
   (d) $\sum \frac{n^3}{3^n} z^n$.

10. Supongamos que los coeficientes de la serie de potencias $\Sigma a_n z^n$ son enteros, y que un número infinito de ellos son distintos de cero. Demostrar que el radio de convergencia es, a lo más 1 .

11. Suponer que $a_n > 0, s_n = a_1 + \cdots + a_n$, y Σa_n diverge.

    (a) Demostrar que $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

    (b) Demostrar que
    $$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$
    y deducir que $\sum \dfrac{a_n}{s_n}$ diverge.

    (c) Demostrar que
    $$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$
    y deducir que $\sum \dfrac{a_n}{s_n^2}$ converge.

    (d) ¿Qué se puede decir acerca de
    $$\sum \frac{a_n}{1+na_n} \text{ and } \sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}?$$

12. Suponer que $a_n > 0$ y Σa_n converge. Hacer
    $$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m.$$

    (a) Demostrar que
    $$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m}$$
    si $m < n$, y deducir que $\sum \dfrac{a_n}{r_n}$ diverge.

    (b) Demostrar que
    $$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$$
    y deducir que $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ converge.

13. Demostrar que el producto de Cauchy de dos series absolutamente convergentes, converge absolutamente.

14. Si $\{s_n\}$ es una sucesión compleja, se define su media aritmética σ_n como

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(a) Si $\lim s_n = s$, demostrar que $\lim \sigma_n = s$.

(b) Construir una sucesión $\{s_n\}$ que no converja, aunque $\lim \sigma_n = 0$.

(c) ¿Qué ocurriría si $s_n > 0$ para todo n y $\limsup s_n = \infty$, aunque $\lim \sigma_n = 0$?

(d) Hacer $a_n = s_n - s_{n-1}$, para $n \geq 1$. Mostrar que

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k.$$

Suponer que $\lim (n a_n) = 0$ y que $\{\sigma_n\}$ convergen. Demostrar que $\{s_n\}$ converge. [Esto proporciona un inverso de (a), pero con la suposición adicional de que $n a_n \to 0$.]

(e) Deducir la última conclusión a partir de una hipótesis más débil: Suponer $M < \infty, |n a_n| \leq M$ para todo n, y $\lim \sigma_n = \sigma$. Probar que $\lim s_n = \sigma$, completando lo siguiente:

Si $m < n$, entonces

$$s_n - \sigma_n = \frac{m+1}{n-m} (\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^{n} (s_n - s_i).$$

Para estas i,

$$|s_n - s_i| \leq \frac{(n-i)M}{i+1} \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$

Con $\varepsilon > 0$ fijo y asociado a cada n el entero m que satisface la desigualdad

$$m \leq \frac{n - \varepsilon}{1 + \varepsilon} < m + 1.$$

Entonces $(m+1)/(n-m) \leq 1/\varepsilon$ y $|s_n - s_i| < M\varepsilon$. De aquí que

$$\limsup_{n \to \infty} |s_n - \sigma| \leq M\varepsilon.$$

Ya que ε fue arbitrario, $\lim s_n = \sigma$.

15. Puede ampliarse la Definición 3.9 en el caso para el cual los a_n pertenecen a algún $\mathbb{R}^k$ prefijado. La convergencia absoluta se define como la convergencia de $\Sigma |\mathrm{a}_n|$. Mostrar que los Teoremas 3.12, 3.13, 3.15(a), 3.22, 3.23, 3.27, 3.30, 3.31 y 3.35 son verdaderos en este caso más general. (Sólo se requieren modificaciones ligeras en las demostraciones.)

16. Si α es un número positivo fijo, escoger $x_1 > \sqrt{\alpha}$, y definir $x_2, x_3, x_4, \ldots$, por medio de la fórmula de recurrencia

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right)$$

(a) Demostrar que $\{x_n\}$ decrece monótonamente y que $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(b) Hacer $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$, y mostrar que

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

de modo que al poner $\beta = 2\sqrt{\alpha}$.

$$\varepsilon_{n+1} < \beta \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(c) Este es un buen algoritmo para calcular raíces cuadradas, debido a que la fórmula de recurrencia es sencilla y la convergencia en extremo rápida. Por ejemplo, si $\alpha = 3$ y $x_1 = 2$, mostrar que $\varepsilon_1/\beta < \frac{1}{10}$ y que por lo tanto

$$\varepsilon_5 < 4 \cdot 10^{-16}, \quad \varepsilon_6 < 4 \cdot 10^{-32}$$

17. Sea $\alpha > 1$ fijo. Si se toma $x_1 > \sqrt{\alpha}$ y se define

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} = x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1 + x_n}.$$

(a) Demostrar que $x_1 > x_3 > x_5 > \cdots$.

(b) Demostrar que $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots$.

(c) Demostrar que $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(d) Comparar la rapidez de convergencia de este proceso con la del descrito en el Ejercicio 16.

18. Reemplazar la fórmula de recurrencia del Ejercicio 16 por

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p} x_n^{-p+1}$$

en donde p es un entero positivo fijo. Describir el comportamiento de las sucesiones $\{x_n\}$ resultantes.

19. Asociar a cada sucesión $a = \{\alpha_n\}$ en la cual α_n es 0 ó 2 , el número real

$$x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}.$$

Demostrar que el conjunto de todos los $x(a)$ es precisamente el conjunto de Cantor que se describió en la sección 2.4.1.

20. Suponer que $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio métrico X, y que alguna subsucesión $\{p_{n_i}\}$ converge hacia un punto $p \in X$. Demostrar que la sucesión completa $\{p_n\}$ converge hacia p.

21. Demostrar el siguiente teorema, análogo al 3.6(b): Si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados y acotados en un espacio métrico completo $X, E_n \supset E_{n+1}$, y si

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0,$$

$\bigcap_1^\infty E_n$ consta solamente de un punto.

22. Supongamos que X es un espacio métrico completo, y $\{G_n\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos densos de X. Demostrar el teorema de Baire, es decir, que $\bigcap_1^\infty G_n$ es no vacío. (De hecho, es denso en X.) Sugerencia: Hallar una sucesión decreciente de entornos cerrados E_n, de modo que $\bar{E}_n \subset G_n$, y aplicar el Ejercicio 21 .

23. Supongamos que $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ son sucesiones de Cauchy en un espacio métrico X. Demostrar que la sucesión $\{d(p_n, q_n)\}$ converge. Sugerencia: Para cada m, n;
$$d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n)$$
se deduce que
$$|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)|$$
es pequeño si m y n son grandes.

24. Sea X un espacio métrico.

(a) Llamando a dos sucesiones de Cauchy $\{p_n\}, \{q_n\}$ equivalentes en X, si
$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0.$$
Demostrar que esta es una relación de equivalencia.

(b) Sea X^* el conjunto de todas las clases de equivalencia asi obtenidas. Si $P \in X^*, Q \in X^*, \{p_n\} \in P, \{q_n\} \in Q$, definamos
$$\Delta(P, Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n)$$
Por el ejercicio 23, existe este límite. Demostrar que el número $\Delta(P, Q)$ permanece invariable si se sustituyen $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ por sucesiones equivalentes, y de aquí que Δ es una función distancia en X^*.

(c) Demostrar que el espacio métrico resultante X^* es completo.

(d) Para todo $p \in X$, existe una sucesión de Cauchy, cuyos términos son todos p; sea P_p el elemento de X^* que contiene esta sucesión. Demostrar que
$$\Delta(P_p, P_q) = d(p, q)$$
para todo $p, q \in X$. En otras palabras, la aplicación φ definida por $\varphi(p) = P_p$ es una isometría (es decir, una aplicación que conserva las distancias) de X en X^*.

(e) Demostrar que $\varphi(X)$ es denso en X^*, y que $\varphi(X) = X^*$ si X es completo. Por (d), podemos identificar X y $\varphi(X)$ y considerar a X sumergido en el espacio métrico completo X^*. A X^* le llamamos la completez[1] de X.

25. Sea X el espacio métrico cuyos puntos son los números racionales, con la métrica $d(x, y) = |x-y|$. ¿Cuál es la completez, X^*, de este espacio? (Comparar con el Ejercicio 24.)

[1] N. del E.: Se ha extendido el uso de la palabra completez como traducción del adjetivo completness. La Academia ha aceptado el término compleción, y existe tendencia a emplear este vocablo.

CAPÍTULO 4

Continuidad

El concepto de función y parte de la terminología, relacionada con ella, se introdujeron en las Definiciones 2.1 y 2.2. Aunque (en capítulos posteriores) prestaremos especial interés a las funciones reales y complejas (esto es, funciones cuyos valores son números reales o complejos) también trataremos sobre funciones vectoriales (esto es, con valores en $\mathbb{R}^k$) y con valores en un espacio métrico arbitrario. Los teoremas que trataremos de este modo general no resultan más sencillos si los limitamos, por ejemplo, a las funciones reales; y realmente simplifica y aclara el panorama el descartar las hipótesis innecesarias, y plantear y demostrar los teoremas en un sentido convenientemente general.

Los dominios de definición de nuestras funciones serán, pues, espacios métricos, convenientemente especificados en varios casos.

4.1 Límites de funciones

Definición 4.1 *Sean X y Y espacios métricos; supongamos que $E \subset X, f$ mapea (o aplica) E en Y y p es un punto límite de E. Escribiremos $f(x) \to q$ cuando $x \to p$ o*

$$\lim_{x\to p} f(x) = q \tag{4.1.1}$$

si existe un punto $q \in Y$ con la siguiente propiedad: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que

$$d_Y(f(x), q) < \varepsilon \tag{4.1.2}$$

para todos los puntos $x \in E$, para los cuales

$$0 < d_X(x, p) < \delta \tag{4.1.3}$$

Los símbolos d_X y d_Y se refieren a las distancias en X e Y, respectivamente.

Si X y/o Y se sustituyen por la recta real, el plano complejo, o algún espacio euclidiano $\mathbb{R}^k$, las distancias d_X, d_Y se sustituyen por los valores absolutos, o por las normas apropiadas (ver Sec. **??**).

Debe observarse que $p \in X$, pero p no necesita ser punto de E en la definición anterior. Además, aun si $p \in E$, podemos tener $f(p) \neq \lim f(x)$.

Podemos enunciar de nuevo esta definición, en lenguaje de límites de sucesiones:

Teorema 4.1 *Sean X, Y, E, f, p como en la Definición 4.1. Será:*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{4.1.4}$$

si y solo si

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q \tag{4.1.5}$$

para toda sucesión $\{p_n\}$ en E, tal que

$$p_n \neq p, \quad \lim_{n \to \infty} p_n = p. \tag{4.1.6}$$

Demostración: *Supongamos que se cumple* (4.1.4). *Elijamos $\{p_n\}$ en E, de modo que satisfaga a* (4.1.6). *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Existe $\delta > 0$, tal que $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$ si $x \in E$ y $0 < d_X(x, p) < \delta$. Existe, además, un N, tal que $n > N$ implica $0 < d_X(p_n, p) < \delta$. Así, pues, para $n > N$, tenemos $d_Y(f(p_n), q) < \varepsilon$, lo que demuestra que se cumple* (4.1.5).

Inversamente, supongamos que (4.1.4) *es falso. Existirá algún $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ existe un punto $x \in E$ (dependiente de δ), para el cual $d_Y(f(x), q) \geq \varepsilon$, pero $0 < d_X(x, p) < \delta$. Tomando $\delta_n = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, hallamos una sucesión en E que satisface a* (4.1.6), *para la cual* (4.1.5) *es falso.*

Corolario 4.1 *Si f tiene un límite en p, este límite es único.*

Se deduce de los Teoremas 3.1(b) y 4.1.

Definición 4.2 *Supongamos que tenemos dos funciones complejas, f y g, definidas ambas en E. Por $f + g$ significamos la función que asigna, a cada punto x de E el número $f(x) + g(x)$. De igual modo definimos la diferencia $f - g$, el producto fg y el cociente f/g de las dos funciones, debiendo entenderse que se define el cociente solamente en los puntos x de E, para los cuales $g(x) \neq 0$. Si f asigna a cada punto x de E el mismo número c, se dice que f es una función constante, o simplemente una constante, y escribimos $f = c$. Si f y g son funciones reales y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in E$, escribiremos a veces $f \geq g$, por brevedad.*
De igual modo, si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ mapean (o aplican) E en $\mathbb{R}^k$, definimos $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ por

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(x) = \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(x), \quad (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})(x) = \boldsymbol{f}(x) \cdot \boldsymbol{g}(x)$$

y si λ es un número real $(\lambda \boldsymbol{f})(x) = \lambda \boldsymbol{f}(x)$.

Teorema 4.2 *Supongamos que $E \subset X$ es un espacio métrico, p es un punto límite de E, f y g son funciones complejas de E, y*

$$\lim_{x \to p} f(x) = A, \quad \lim_{x \to p} g(x) = B$$

Entonces
(a) $\lim_{x \to p}(f+g)(x) = A + B$*;*
(b) $\lim_{x \to p}(fg)(x) = AB$*;*
(c) $\lim_{x \to p}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$*, si* $B \neq 0$*.*

Demostración: *Teniendo en cuenta el Teorema 4.1, estas afirmaciones se deducen inmediatamente de las propiedades análogas de las sucesiones (Teorema 3.2).*

Observación: *Si f y g mapean E en $\mathbb{R}^k$ (a) continúa siendo cierto y (b) se convierte en*

(b') $\lim_{x \to p}(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})(x) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$*.*

(Compárese con el Teorema 3.3).

4.2 Funciones continuas

Definición 4.3 *Supongamos que X y Y son espacios métricos, $E \subset X$, $p \in E$ y que f aplica E en Y. En estas condiciones, se dice que f es continua en p si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que*

$$d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

para todos los puntos $x \in E$, para los cuales $d_X(x, p) < \delta$.

Si f es continua en todo punto de E, se dice que f es continua en E.

Se observará que f debe estar definida en el punto p para que sea continua en p. (Compárese con la observación que sigue a la Definición 4.1.)

Si p es un punto aislado de E, la definición implica que toda función f que tiene a E como dominio de definición es continua en p. Porque, si elegimos un $\varepsilon > 0$ cualquiera, podemos escoger $\delta > 0$, de modo que el único punto $x \in E$, para el cual $d_X(x, p) < \delta$ sea $x = p$; entonces

$$d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon$$

Teorema 4.3 *En las condiciones enunciadas en la Definición 4.3, si admitimos además que p es un punto límite de E, f será continuo en p si, y solo si $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.*

Demostración: *Se ve fácilmente si comparamos las Definiciones 4.1 y 4.3.*

Volvamos, ahora, a la composición de funciones. Un breve resumen del teorema siguiente es que una función continua de una función continua, es continua.

Teorema 4.4 *Supongamos que X, Y, Z son espacios métricos, $E \subset X, f$ mapea E en Y, g mapea al rango de $f, f(E)$ en $Z,$ y h es el mapeo de E en Z definida por*

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in E)$$

Si f es continua en todo punto $p \in E$ y g es continua en el punto $f(p), h$ entonces es continua en p.

Esta función h se denomina la composición o función compuesta de f y g. Se escribe comúnmente

$$h = g \circ f.$$

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como g es continua en $f(p)$ existe un $\eta > 0$, tal que*

$$d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon \text{ si } d_Y(y, f(p)) < \eta \quad y \quad y \in f(E).$$

Como f es continua en p, existe un $\delta > 0$, tal que

$$d_Y(f(x), f(p)) < \eta \text{ si } d_X(x, p) < \delta \quad y \quad x \in E$$

Se deduce que

$$d_Z(h(x), h(p)) = d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon$$

si $d_X(x,p) < \delta$, y $x \in E$. Así, pues, h es continua en p.

Teorema 4.5 *Una aplicación (o mapeo) f de un espacio métrico X en un espacio métrico Y es continua en X si, y solo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo conjunto abierto V en Y.*

(Las imágenes inversas se definieron en la Definición 2.2.) Esta es una caracterización muy útil de la continuidad.

Demostración: *Supongamos que f es continuo en X y que V es un conjunto abierto en Y. Tenemos que demostrar que todo punto de $f^{-1}(V)$ es un punto interior de $f^{-1}(V)$. Para ello, sea $p \in X$ y $f(p) \in V$. Como V es abierto, existe un $\varepsilon > 0$, tal que $y \in V$ si $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$, y como f es continua en p, existe $\delta > 0$, tal que $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ si $d_X(x,p) < \delta$. Así, pues, $x \in f^{-1}(V)$ en cuanto $d_X(x,p) < \delta$.*

Inversamente, supongamos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo conjunto abierto V en Y. Fijemos $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, y sea V el conjunto de todo $y \in Y$, tal que $d_Y(y, f(p)) < \varepsilon$. V será abierto; por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto, y, por tanto, existe un $\delta > 0$, tal que $x \in f^{-1}(V)$ en cuanto $d_X(p,x) < \delta$. Pero si $x \in f^{-1}(V)$, se verifica que $f(x) \in V$, de modo que $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$, lo que completa la demostración.

Corolario 4.2 *Una aplicación f de un espacio métrico X en un espacio métrico Y es continua si y solo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para cada conjunto cerrado C en Y.*

Esto se deduce del teorema, ya que un conjunto es cerrado si y solo si, su complemento es abierto, y como $f^{-1}(E') = \left[f^{-1}(E)\right]'$ para cada $E \subset Y$.

Volvemos, ahora, a las funciones con valores complejos y vectoriales, y a las definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^k$.

Teorema 4.6 *Sean f y g funciones complejas continuas en un espacio métrico X. $f+g$, fg, y f/g son continuas en X.*

En el último caso, evidentemente, debemos suponer que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.

Demostración: *Respecto de los puntos de X no hay nada que demostrar. En los puntos límites, el enunciado se deduce de los Teoremas 4.2 y 4.3.*

Teorema 4.7

(a) *Sean $f_1, \ldots, f_k$ funciones reales en un espacio métrico X, y sea $\boldsymbol{f}$ la aplicación de X en $\mathbb{R}^k$ definida por*

$$\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \quad (x \in X) \tag{4.2.1}$$

$\boldsymbol{f}$ es continua si, y solo si cada una de las funciones $f_1, \ldots, f_k$ es continua.

(b) *Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son aplicaciones continuas de X en $\mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ son continuas en X.*

Las funciones $f_1, \ldots, f_k$ se llaman componentes de $\boldsymbol{f}$. Obsérvese que $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ es una aplicación en $\mathbb{R}^k$, mientras que $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ es una función real en X.

Demostración: *El apartado (a) se deduce de las desigualdades*

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(y)| = \left\{ \sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - f_i(y)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

para $j = 1, \ldots, k$. El (b) se deduce de (a) y del Teorema 4.6.

Ejemplo 4.1 *Si $x_1, \ldots, x_k$ son las coordenadas del punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$, las funciones ϕ_i definidas por*

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = x_i \quad \left(x \in \mathbb{R}^k\right) \tag{4.2.2}$$

son continuas en $\mathbb{R}^k$, pues, la desigualdad

$$|\phi_i(\boldsymbol{x}) - \phi_i(\boldsymbol{y})| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$$

demuestra que podemos tomar $\delta = \varepsilon$ en la Definición 4.3. A las funciones ϕ_i se les llama a veces funciones coordenadas.

Repitiendo la aplicación del Teorema 4.6, se ve que todo monomio

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} \tag{4.2.3}$$

en el que $n_1, \ldots, n_k$ son enteros no negativos, es continuo en $\mathbb{R}^k$. Esto mismo es cierto para los productos de (4.2.3) por una constante, pues las constantes son, evidentemente, continuas. Se deduce que todo polinomio P, dado por

$$P(\boldsymbol{x}) = \Sigma c_{n_1 \cdots n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} \quad \left(x \in \mathbb{R}^k\right) \tag{4.2.4}$$

es continuo en $\mathbb{R}^k$. En él, los coeficientes $c_{n_1 \cdots n_k}$ son números complejos, $n_1, \ldots, n_k$ son enteros no negativos, y la suma en (4.2.4) tiene un número finito de términos.

Además, toda función racional en $x_1, \ldots, x_k$, esto es, todo cociente de dos polonomios de la forma (4.2.4), es continua en $\mathbb{R}^k$ cuando el denominador es diferente de cero.

De la desigualdad del triángulo se ve fácilmente que

$$||\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \quad \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k\right). \tag{4.2.5}$$

Por tanto, la aplicación $\boldsymbol{x} \to |\boldsymbol{x}|$ *es una función real continua en* $\mathbb{R}^k$*.*

Si, ahora, $\boldsymbol{f}$ *es una aplicación continua de un espacio métrico* X *en* $\mathbb{R}^k$*, y* ϕ *está definida en* X *por* $\phi(p) = |\boldsymbol{f}(p)|$*, se deduce por el Teorema 4.4, que* ϕ *es una función real continua en* $\mathbb{R}^k$*.*

Observación: *Hemos definido la noción de continuidad para funciones definidas en un subconjunto* E *de un espacio métrico* X*. Sin embargo, el complemento de* E *en* X *no juega ningún papel en esta definición (obsérvese que la situación era algo diferente para los límites de funciones). En consecuencia, podemos descartar el complemento del dominio de definición de* f*, lo que significa que podemos hablar solamente de aplicaciones continuas de un espacio métrico en otro, en lugar de hacerlo de aplicaciones de subconjuntos, con lo cual se simplifican el enunciado y la demostración de algunos teoremas. Ya hemos hecho uso de esto en los Teoremas 4.5 a 4.7, y continuaremos haciéndolo en las secciones de compacticidad y conexión.*

4.3 Continuidad y compacticidad

Definición 4.4 *Se dice que una aplicación* $\boldsymbol{f}$ *de un conjunto* E *en* $\mathbb{R}^k$ *es acotada si existe un número real* M*, tal que* $|\boldsymbol{f}(x)| \leq M$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in E$*.*

Teorema 4.8 *Supongamos que* f *es una aplicación continua de un espacio métrico compacto* X *en un espacio métrico* Y*.* $f(X)$ *será compacto.*

Demostración: *Sea* $\{V_\alpha\}$ *una cubierta abierta de* $f(X)$*. Como* f *es continua, el Teorema 4.5 demuestra que todos los conjuntos* $f^{-1}(V_\alpha)$ *son abiertos. Como* X *es compacto, hay un número finito de índices,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$*, tales que*

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}). \tag{4.3.1}$$

Como $f\left(f^{-1}(E)\right) \subset E$*, para todo* $E \subset Y$*, (4.3.1) implica que*

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n} \tag{4.3.2}$$

lo que complementa la demostración.

Nota: Hemos utilizado la expresión $f\left(f^{-1}(E)\right) \subset E$, válida para $E \subset Y$. Si $E \subset X$, solo podemos afirmar que $f^{-1}(f(E)) \supset E$ sin que, necesariamente, se cumpla la igualdad.

Ahora. deduciremos algunas consecuencias del Teorema 4.8.

Teorema 4.9 *Si* $\boldsymbol{f}$ *es una aplicación continua de un espacio métrico compacto* X *en* $\mathbb{R}^k$*,* $\boldsymbol{f}(X)$ *es cerrado y acotado. Así,* $\boldsymbol{f}$ *es acotada.*

Se deduce del Teorema 2.21. El resultado es particularmente importante cuando f es real:

Teorema 4.10 *Supongamos que f es una función real continua en un espacio métrico compacto X, y*

$$M = \sup_{p\in X} f(p), \quad m = \inf_{p\in X} f(p) \tag{4.3.3}$$

Existen puntos $p, q \in X$, tales que $f(p) = M$ y $f(q) = m$.

La notación utilizada en (4.3.3) significa que M es la mínima cota superior del conjunto de todos los números $f(p)$, cuando p tiene por rango a X, y m es la máxima cota inferior de este conjunto de números.

También puede enunciarse la conclusión como sigue: Existen puntos p y q en X tales que $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in X$; esto es, f alcanza su máximo (en p) y su mínimo (en q).

Demostración: *Por Teorema 4.9, $f(X)$ es un conjunto cerrado y acotado de números reales; por tanto, contiene a su extremo superior M y al inferior m (Teorema 2.11).*

Teorema 4.11 *Supongamos que f es una aplicación continua 1-1 de un espacio métrico compacto X sobre un espacio métrico Y. La aplicación inversa f^{-1} definida en Y por*

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in X)$$

es una aplicación continua de Y sobre X.

Demostración: *Aplicando el Teorema 4.5 a f^{-1} en lugar de f, vemos que basta demostrar que $f(V)$ es un conjunto abierto en Y para todo conjunto abierto V en X. Fijemos un tal conjunto, V.*

El complementario V^c de V es cerrado en X y, por tanto, compacto (Teorema 2.15), por lo cual $f(V^c)$ es un subconjunto compacto de Y (Teorema 4.8) y es cerrado en Y (Teorema 2.14). Como f es una aplicación 1-1 y sobre, $f(V)$ es el complemento de $f(V^c)$. Por tanto, $f(V)$ es abierto.

Definición 4.5 *Sea f una aplicación de un espacio métrico X en un espacio métrico Y. Decimos que f es uniformemente continua en X si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon \tag{4.3.4}$$

para todos los valores de p y q en X para los que $d_X(p, q) < \delta$.

Consideremos las diferencias entre los conceptos de continuidad y continuidad uniforme. Primeramente, la continuidad uniforme es una propiedad de una función en un conjunto, mientras que la continuidad se puede definir en un solo punto; y no tiene sentido la pregunta de si una función es uniformemente continua en un cierto punto. Segundo, si f es continua en X, es posible hallar para cada $\varepsilon > 0$ y cada punto p de X, un número $\delta > 0$ que posee la propiedad enunciada en la Definición 4.3. Este δ depende de ε y de p. Pero si f es uniformemente continua en X, es posible hallar, para cada $\varepsilon > 0$, un número $\delta > 0$ que la cumpla para todos los puntos p de X.

Es evidente que toda función uniformemente continua es continua. Del teorema siguiente se deduce que los dos conceptos son equivalentes en los conjuntos compactos.

Teorema 4.12 *Sea f una aplicación continua de un espacio métrico compacto X en un espacio métrico Y. f es uniformemente continua en X.*

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como f es continua, podemos asociar a cada punto $p \in X$ un número positivo $\phi(p)$ tal que*

$$q \in X, d_X(p,q) < \phi(p) \text{ implies } \quad d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.3.5}$$

Sea $J(p)$ el conjunto constituido por todo $q \in X$ para el cual

$$d_X(p,q) < \frac{1}{2}\phi(p) \tag{4.3.6}$$

Como $p \in J(p)$, la colección de todos los conjuntos $J(p)$ es un recubrimiento abierto de X; y como X es compacto, hay un conjunto finito de puntos $p_1, \ldots, p_n$ en X tal que

$$X \subset J(p_1) \cup \cdots \cup J(p_n). \tag{4.3.7}$$

Hacemos

$$\delta = \frac{1}{2} \operatorname{mín}\left[\phi(p_1), \ldots, \phi(p_n)\right] \tag{4.3.8}$$

Será: $\delta > 0$. (Este es un punto en que el carácter de finito del recubrimiento, inherente a la definición de compacticidad, es esencial.

El mínimo de un conjunto finito de números positivos es positivo, mientras que el inf de un conjunto infinito de números positivos puede muy bien ser 0 .)

Sean, ahora, p y q puntos de X tales que $d_X(p,q) < \delta$. Por (4.3.7) hay un entero $m, 1 \leq m \leq n$, tal que $p \in J(p_m)$; por tanto,

$$d_X(p, p_m) < \frac{1}{2}\phi(p_m) \tag{4.3.9}$$

y tenemos también que

$$d_X(q, p_m) \leq d_X(p,q) + d_X(p, p_m) < \delta + \frac{1}{2}\phi(p_m) \leq \phi(p_m)$$

Finalmente, (4.3.5) demuestra que, por consiguiente,

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(q), f(p_m)) < \varepsilon$$

Lo que completa la demostración.

En el Ejercicio 10 se da otra demostración.

Procederemos, ahora, a demostrar que la compacticidad es esencial en las hipótesis de los Teoremas 4.8, 4.9, 4.10 y 4.12.

Teorema 4.13 *Sea E un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^1$. Luego*
(a) existe una función continua en E que no está acotada;
(b) existe una función continua y acotada en E que no tiene máximo. Si, además, E es acotado,
(c) existe una función continua en E que es no uniformemente continua.

Demostración: *Supongamos primeramente que E es acotado, de modo que existe un punto límite x_0 de E, que no es punto de E. Consideremos*

$$f(x) = \frac{1}{x - x_0} \quad (x \in E) \tag{4.3.10}$$

Es continua en E (Teorema 4.6) pero, evidentemente, no es acotada. Para ver que (4.3.10) no es uniformemente continua, sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ arbitrarios, y elijamos un punto $x \in E$ tal que $|x - x_0| < \delta$. Tomando t suficientemente próximo a x_0, podemos hacer la diferencia $|f(t) - f(x)|$ mayor que ε, aunque $|t - x| < \delta$. Como esto es cierto para todo $\delta > 0$, f no es uniformemente continua en E.

La función g dada por

$$g(x) = \frac{1}{1 + (x - x_0)^2} \quad (x \in E) \tag{4.3.11}$$

es continua en E, y acotada, pues $0 < g(x) < 1$. Es claro que

$$\sup_{x \in E} g(x) = 1$$

mientras que $g(x) < 1$ para todo $x \in E$. Así pues, g no tiene máximo en E.

Habiendo demostrado el teorema para conjuntos acotados E, supongamos que E no es acotado. Entonces $f(x) = x$ demuestra (a) mientras que

$$h(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \quad (x \in E) \tag{4.3.12}$$

establece (b), pues

$$\sup_{x \in E} h(x) = 1$$

y $h(x) < 1$ para todo $x \in E$.

La afirmación (c) sería falsa si se suprimiera la acotabilidad de la hipótesis. Porque, si E es el conjunto de todos los enteros, toda función definida en él es uniformemente continua en E. Para verlo, basta tomar $\delta < 1$ en la Definición 4.5.

Concluimos esta sección demostrando que la compacticidad es también esencial en el Teorema 4.11.

Ejemplo 4.2 *Sea X el intervalo semi-abierto $[0, 2\pi)$ en la recta real, y f la aplicación de X sobre el círculo Y constituido por todos los puntos cuya distancia al origen es 1 , dados por*

$$\boldsymbol{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad (0 \leq t < 2\pi) \tag{4.3.13}$$

La continuidad de las funciones trigonométricas coseno y seno, tanto como sus propiedades de periodicidad, se demostrarán en el capítulo **??**. *Admitiéndolas, es fácil ver que f es una aplicación continua 1-1 de X sobre Y.*

Sin embargo, la aplicación inversa (que existe, pues $\boldsymbol{f}$ es 1-1 y sobre) deja de ser continua en el punto $(1, 0) = \boldsymbol{f}(0)$. Ciertamente, X no es compacto en este ejemplo. (Puede ser interesante observar que $\boldsymbol{f}^{-1}$ deja de ser continua ¡a pesar del hecho de ser Y compacto!)

4.4 Continuidad y conexibilidad

Teorema 4.14 *Si f es una aplicación continua de un espacio métrico X en un espacio métrico Y, y si E es un subconjunto conexo de X, entonces $f(E)$ es conexo.*

Demostración: *Supóngase por el contrario, que $f(E) = A \cup B$, en donde A y B son subconjuntos separados no vacíos de Y.*

Si se hace $G = E \cap f^{-1}(A)$, $H = E \cap f^{-1}(B)$.

Entonces $E = G \cup H$, y ni G ni H son vacíos.

Debido a que $A \subset \bar{A}$ (la cerradura de A), se tiene que $G \subset f^{-1}(\bar{A})$; el último conjunto es cerrado, porque f es continua; de aquí que $\bar{G} \subset f^{-1}(\bar{A})$. Y se obtiene $f(\bar{G}) \subset \bar{A}$. Como $f(H) = B$ y $\bar{A} \cap B$ es vacío, se puede concluir que $\bar{G} \cap H$ es vacío.

El mismo argumento muestra que $G \cap \bar{H}$ es vacío. Por lo tanto G y H son separados. Esto es imposible si E es conexo.

Teorema 4.15 *Sea f una función real continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < f(b)$ y c es un número tal que $f(a) < c < f(b)$, existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.*

Evidentemente, se mantiene un resultado similar si $f(a) > f(b)$. Hablando vulgarmente, el teorema expresa que una función real continua adopta en un intervalo todos los valores intermedios.

Demostración: *Por el Teorema 2.24, $[a, b]$ es conexo; por tanto, el Teorema 4.14 demuestra que $f([a, b])$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^1$, y la afirmación queda demostrada si consideramos nuevamente el Teorema 2.24.*

Observación: *A primera vista, puede parecer que el Teorema 4.15 tiene un recíproco. Esto es, puede pensarse que si para cada par de puntos $x_1 < x_2$ y para todo número c comprendido entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$, hay un punto x en (x_1, x_2) tal que $f(x) = c$, f debe ser continua.*

Que esto no es así, puede deducirse del Ejemplo 4.3(d).

4.5 Discontinuidades

Si x es un punto en el dominio de definición de la función f, en el cual ésta no es continua, decimos que f es discontinua en x, o que f tiene una discontinuidad en x. Si x está definida en un intervalo o en un segmento, se suelen distinguir dos tipos de discontinuidades. Antes de dar esta clasificación, tenemos que definir los límites por la derecha y por la izquierda de f en x, que representaremos por $f(x+)$ y $f(x-)$, respectivamente.

Definición 4.6 *Supongamos f definida en (a, b). Consideremos todo punto x tal que $a \leq x < b$. Escribiremos*

$$f(x+) = q$$

si $f(t_n) \to q$ cuando $n \to \infty$, para todas las sucesiones $\{t_n\}$ en (x,b) tales que $t_n \to x$. Para obtener la definición de $f(x-)$, para $a < x \leq b$, nos limitamos a las sucesiones $\{t_n\}$ en (a,x).
Es claro que en cada punto x de (a,b), existe $\lim_{t\to x} f(t)$ si, y solo si

$$f(x+) = f(x-) = \lim_{t\to x} f(t).$$

Definición 4.7 *Supongamos f definida en (a,b). Si f es discontinua en el punto x y existe $f(x+)$ y $f(x-)$ se dice que f tiene una discontinuidad de primera clase o una discontinuidad simple, en x. De otro modo, se dice que la discontinuidad es de segunda clase.*

Hay dos formas en que la función puede tener una discontinuidad simple: o $f(x+) \neq f(x-)$ [en cuyo caso el valor de $f(x)$ carece de interés] o $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

Ejemplo 4.3 *(a) Definamos*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ racional }) \\ 0 & (x \text{ irracional }). \end{cases}$$

En estas condiciones, f tiene una discontinuidad de segunda clase en cada punto x, pues no existen $f(x+)$, ni $f(x-)$.

(b) Definamos

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ racional }) \\ 0 & (x \text{ irracional }). \end{cases}$$

f es continua en $x = 0$ y tiene una discontinuidad de segunda clase en todos los demás puntos.

(c) Definamos

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (-3 < x < -2) \\ -x-2 & (-2 \leq x < 0) \\ x+2 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

f tiene una discontinuidad simple en $x = 0$ y es continua en todo otro punto de $(-3,1)$.

(d) Definamos

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Como no existe $f(0+)$ ni $f(0-)$, f tiene una discontinuidad de segunda clase en $x = 0$. Todavía no hemos demostrado que $\operatorname{sen} x$ es una función continua. Si lo suponemos de momento, el Teorema 4.4 implica que f es continua en todo punto $x \neq 0$.

4.6 Funciones monótonas

Estudiaremos, ahora, las funciones que no decrecen nunca (o no crecen) en un segmento dado.

Definición 4.8 *Sea f una función real en (a, b). Se dice que f es monótona creciente en (a, b) si $a < x < y < b$ implica $f(x) \le f(y)$. Si se invierte la última desigualdad, obtenemos la definición de función monótona decreciente. La clase de las funciones monótonas está constituida por las crecientes y las decrecientes.*

Teorema 4.16 *Sea f monotona creciente en (a, b). Existen $f(x+)$ y $f(x-)$ en todo punto x de (a, b). Más preciso:*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \le f(x) \le f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) \tag{4.6.1}$$

Además, si $a < x < y < b$, será

$$f(x+) \le f(y-). \tag{4.6.2}$$

Evidentemente, resultados análogos se cumplen para las funciones monótonas decrecientes.

Demostración: *Por hipótesis, el conjunto de números $f(t)$, donde $a < t < x$ está acotado superiormente por el número $f(x)$, y por tanto tiene una mínima cota superior que llamaremos A. Evidentemente $A \le f(x)$. Tenemos que demostrar que $A = f(x-)$.*

Sea $\varepsilon > 0$ prefijado. De la definición de A como mínima cota superior se deduce que existe $\delta > 0$ tal que $a < x - \delta < x$, y

$$A - \varepsilon < f(x - \delta) \le A. \tag{4.6.3}$$

Como f es monótono, tenemos

$$f(x - \delta) \le f(t) \le A \quad (x - \delta < t < x) \tag{4.6.4}$$

Combinando (4.6.3) y (4.6.4), vemos que

$$|f(t) - A| < \varepsilon \quad (x - \delta < t < x).$$

Por tanto, $f(x-) = A$.

La segunda mitad de (4.6.1) se demuestra de igual modo.

Continuando, si $a < x < y < b$, de (4.6.1) vemos que

$$f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t). \tag{4.6.5}$$

La última igualdad se obtiene aplicando (4.6.1) a (a, y) en lugar de (a, b). De igual modo,

$$f(y-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t). \tag{4.6.6}$$

La comparación de (4.6.5) y (4.6.6) da (4.6.2).

Corolario 4.3 *Las funciones monótonas no tienen discontinuidad de segunda clase.*

Este corolario implica que toda función monótona es discontinua a lo más en un conjunto numerable de puntos. En lugar de recurrir al teorema general, cuya demostración se expone en el Ejercicio 17, damos aquí una demostración sencilla, aplicable a las funciones monótonas.

Teorema 4.17 *Sea f monótona en (a, b). El conjunto de puntos de (a, b) en los que f es discontinua es a lo sumo numerable.*

Demostración: *Supongamos, para concretar, que f es creciente y sea E el conjunto de puntos en los que f es discontinua.*

Con cada punto x de E, asociamos un número racional $r(x)$ tal que

$$f(x-) < r(x) < f(x+).$$

Como $x_1 < x_2$ implica $f(x_1+) \leq f(x_2-)$, vemos que $r(x_1) \neq r(x_2)$ si $x_1 \neq x_2$.

Hemos establecido, así una correspondencia 1-1 entre el conjunto E y un subconjunto del conjunto de números racionales. Este último, como sabemos, es numerable.

Observación: *Se habrá notado que las discontinuidades de una función monótona no son necesariamente aisladas. De hecho, dado un subconjunto numerable cualquiera E de (a, b) que puede incluso ser denso, podemos construir una función f, monótona en (a, b) discontinua en todo punto de E, y en ningún otro punto de (a, b).*

Para demostrarlo, supongamos los puntos de E ordenados en una sucesión $\{x_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$ Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números positivos tal que Σc_n converge. Definamos

$$f(x) = \sum_{x_n < x} c_n \quad (a < x < b). \tag{4.6.7}$$

debiendo entenderse la suma como sigue: se suman los términos con índices n para los cuales $x_n < x$. Si no hay puntos x_n a la izquierda de x, la suma es vacía, y siguiendo el convenio usual, diremos que es cero. Como (4.6.7) converge absolutamente, carece de importancia el orden en que están colocados los términos.

Dejamos al lector la comprobación de las siguientes propiedades de f:

(a) f es monótona creciente en (a, b);

(b) f es discontinua en todo punto de E; en realidad,

$$f(x_n+) - f(x_n-) = c_n.$$

(c) f es continua en cualquier otro punto de (a, b).

Además, no es difícil ver que $f(x-) = f(x)$ en todos los puntos de (a, b). Si una función satisface esta condición, decimos que f es continua por la izquierda. Si se hubiera tomado la suma en (4.6.7) para todos los índices n para los que $x_n \leq x$, hubiéramos tenido $f(x+) = f(x)$ en todo punto de (a, b), esto es, f hubiera sido continua por la derecha.

Pueden definirse también funciones de este tipo por otro método; como ejemplo, nos referimos al Teorema 6.12.

4.7 Límites infinitos y límites en el infinito

Para poder operar en el sistema ampliado de los números reales, ampliaremos el alcance de la Definición 4.1, volviéndola a enunciar en términos de vecindades.

Para todo número real x, hemos definido ya una vecindad de x como un segmento $(x-\delta, x+\delta)$.

Definición 4.9 *Para todo número real c, el conjunto de los números reales x tales que $x > c$, se dice que es una vecindad de $+\infty$ y se escribe $(x, +\infty)$. Del mismo modo, el conjunto $(-\infty, c)$ es una vecindad de $-\infty$.*

Definición 4.10 *Supongamos f una función real definida en E. Decimos que*

$$f(t) \to A \text{ si } t \to x,$$

donde A y x pertenecen al sistema ampliado de números reales, si por cada vecindad U de A existe una vecindad V de x tal que $V \cap E$ es no vacío, y que $f(t) \in U$ para todo $t \in V \cap E, t \neq x$.

Fácilmente se ve que esto coincide con la Definición 4.1 cuando A y x son reales.

También es cierto el análogo al Teorema 4.2, y la demostración no contiene nada nuevo. Lo enunciamos para constancia.

Teorema 4.18 *Supongamos f y g definidas en E. Supongamos*

$$f(t) \to A, \quad g(t) \to B \qquad \text{si } t \to x.$$

Será:
(a) $f(t) \to A'$ implica $A' = A$.
(b) $(f+g)(t) \to A + B$
(c) $(fg)(t) \to AB$
(d) $(f/g)(t) \to A/B$
siempre que estén definidos los segundos miembros de (b);(c) y (d).

Obsérvese que no están definidos $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; ∞/∞ y $A/0$ (ver la Definición 1.10).

4.8 Ejercicios

1. Supóngase que f es una función real definida sobre $\mathbb{R}^1$ que además satisface la condición

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

para cada $x \in \mathbb{R}^1$. ¿Lo anterior implica que f es continua?

2. Si f es un mapeo continuo de un espacio métrico X en un espacio métrico Y, demostrar que

$$f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)}$$

para cada conjunto $E \subset X$. ($\bar{E}$ denota la cerradura de E.) Por medio de un ejemplo, mostrar que $f(\bar{E})$ puede ser un subconjunto propio de $\overline{f(E)}$.

3. Sea f una función real continua sobre un espacio métrico X. Sea $Z(f)$ (el conjunto cero de f) el conjunto de todos los $p \in X$ en los que $f(p) = 0$. Demostrar que $Z(f)$ es cerrado.

4. Sean f y g aplicaciones continuas de un espacio métrico X en otro espacio métrico Y, y E un subconjunto denso de X. Demostrar que $f(E)$ es denso en $f(X)$. Si además $g(p) = f(p)$ para todo $p \in E$, demuéstrese que $g(p) = f(p)$ para todo $p \in X$. (Dicho de otro modo, una aplicación continua se determina por medio de sus valores sobre un subconjunto denso de su dominio.)

5. Si f es una función real continua definida en un conjunto cerrado $E \subset \mathbb{R}^1$, demostrar que existen funciones reales continuas g en $\mathbb{R}^1$ tales que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in E$. (A tales funciones se les llama extensiones continuas de f, de E a $\mathbb{R}^1$.) Demostrar que el resultado es falso si se omite la palabra «cerrado». Ampliar el resultado a las funciones con valores vectoriales. Sugerencia: Suponer que la gráfica de g es una recta en cada segmento de los que constituyen el complemento de E (comparar con el Ejer. 29, Cap. 2). El resultado permanece cierto si se sustituye $\mathbb{R}^1$ por un espacio métrico, pero la demostración no es tan sencilla.

6. Si f está definida en E, su gráfica es el conjunto de los puntos $(x, f(x))$, para $x \in E$. En particular, si E es el conjunto de los números reales y f tiene valores reales, la gráfica de f es un subconjunto del plano.

   Suponiendo que E es compacto, demostrar que f es continua en E si, y solo si su gráfica es compacta.

7. Si $E \subset X$ y f es una función definida en X, la restricción de f a E es la función g cuyo dominio de definición es E, tal que $g(p) = f(p)$ para $p \in E$. Definir f y g en $\mathbb{R}^2$ por: $f(0,0) = g(0,0) = 0$, $f(x,y) = xy^2/\left(x^2+y^4\right)$, $g(x,y) = xy^2/\left(x^2+y^6\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Demostrar que f es acotada en $\mathbb{R}^2$, que g es no acotada en cualquier vecindad de $(0,0)$ y que f no es continua en $(0,0)$; y sin embargo las restricciones de f y de g a cada recta en $\mathbb{R}^2$ son continuas.

8. Sea f una función real uniformemente continua en el conjunto acotado E en $\mathbb{R}^1$. Demostrar que f es acotada en E.

   Demostrar que la conclusión es falsa si se omite de la hipótesis el carácter de acotado de E.

9. Mostrar que en términos de diámetros de conjuntos, el requisito de la definición de la continuidad uniforme puede volverse a enunciar de la manera siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que diám $f(E) < \varepsilon$ para todo $E \subset X$ con diám $E < \delta$.

10. Completar los detalles de la siguiente demostración alternativa del Teorema 4.12: si f no es uniformemente continua, entonces para alguna $\varepsilon > 0$ hay sucesiones $\{p_n\}, \{q_n\}$ en X tales que $d_X(p_n, q_n) \to 0$, pero $d_Y(f(p_n), f(q_n) > \varepsilon$. Usar el Teorema 2.17 para llegar a una contradicción.

11. Supóngase que f es un mapeo uniformemente continuo de un espacio métrico X en un espacio métrico Y y demuéstrese que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y para cada sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en X. Usar este resultado para dar una demostración alternativa del teorema establecido en el Ejercicio 13.

12. Una función uniformemente continua de una función uniformemente continua es uniformemente continua.

Establecer lo anterior con más precisión y demostrarlo.

13. Sea E un subconjunto denso de un espacio métrico X, y sea f una función real uniformemente continua definida sobre E. Demostrar que f tiene una extensión continua de E a X (para terminología véase el Ejercicio 5). (La unicidad se deduce del Ejercicio 4.)

    Sugerencia: para cada $p \in X$ y cada entero positivo n, sea $V_n(p)$ el conjunto de todos los $q \in E$ con $d(p,q) < 1/n$. Usar el Ejercicio 9 para mostrar que la intersección de las cerraduras de los conjuntos $f(V_1(p)), f(V_2(p))$, consiste de un solo punto, por ejemplo $g(p)$, de $\mathbb{R}^1$. Demostrar que la función g así definida sobre X es la extensión de f deseada.

    ¿Puede reemplazarse el espacio rango $\mathbb{R}^1$ por $\mathbb{R}^k$? ¿Por cualquier espacio métrico compacto? ¿Por cualquier espacio métrico completo? ¿Por cualquier espacio métrico?.

14. Sea $I = [0,1]$ el intervalo cerrado unitario. Supóngase que f es un mapeo continuo de I en I. Demostrar que $f(x) = x$ para al menos un $x \in I$.

15. Un mapeo de X en Y se dice que es abierto si $f(V)$ es un conjunto abierto en Y siempre que V es un conjunto abierto en X.

    Demostrar que cada mapeo abierto continuo de $\mathbb{R}^1$ en $\mathbb{R}^1$ es monótono.

16. Representemos por $[x]$ el mayor entero contenido en x, esto es, $[x]$ es el entero tal que $x-1 < [x] \leq x$, y llamemos $(x) = x - [x]$ a la parte fraccionaria de x. ¿Qué discontinuidades tendrán las funciones $[x]$ y (x) ?

17. Sea f una función real definida en (a,b). Demostrar que el conjunto de puntos en el que f tiene una discontinuidad simple es a lo sumo numerable.

    Sugerencia: Sea E el conjunto en el cual $f(x-) < f(x+)$. Con cada punto x de E se asocia una terna (p,q,r) de números racionales tales que

    (a) $f(x-) < p < f(x+)$,

    (b) $a < q < t < x$ implica $f(t) < p$,

    (c) $x < t < r < b$ implica $f(t) > p$.

    El conjunto formado por tales ternas es numerable. Demostrar que cada terna está asociada con, a lo sumo, un punto de E. Operar en igual forma con los otros tipos posibles de discontinuidades simples.

18. Todo número racional x puede estar escrito en la forma $x = m/n$, de donde, $n > 0$, y m y n son enteros sin ningún divisor común. Cuando $x = 0$, tomamos $n = 1$. Considerar la función f definida en $\mathbb{R}^1$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ irracional }) \\ \frac{1}{n} & (x = \frac{m}{n}) \end{cases}$$

    Demostrar que f es continua en todo punto irracional, y tiene una discontinuidad simple en todo punto racional.

19. Supóngase que f es una función real con dominio $\mathbb{R}^1$, y que tiene la propiedad del valor intermedio: Si $f(a) < c < f(b)$, entonces $f(x) = c$ para algún x entre a y b.

    Supóngase también que, para cada racional r, el conjunto de todos los x con $f(x) = r$ es cerrado.

    Demostrar que f es continua.

    Sugerencia: Si $x_n \to x_0$, pero $f(x_n) > r > f(x_0)$ para algún r y todo n, entonces $f(t_n) = r$ para algún t_n entre x_0 y x_n; de aquí $t_n \to x_0$. Encontrar una contradicción. (N.J. Fine, Amer. Math. Monthly, vol. 73, 1966, p. 782.)

20. Si E es un subconjunto que no es vacio de un espacio métrico X, se define la distancia de $x \in X$ a E por medio de

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z)$$

    (a) Demostrar que $\rho_E(x) = 0$ si y solo si $x \in \bar{E}$.

    (b) Demostrar que ρ_E es una función uniformemente continua en X, mostrando primero que

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y)$$

    para todo $x \in X, y \in X$.

    Sugerencia: $\rho_E(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, de modo que

$$\rho_E(x) \leq d(x, y) + \rho_E(y).$$

21. Suponer que K y F son conjuntos ajenos en un espacio métrico X, K es compacto y F cerrado. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que $d(p, q) > \delta$ si $p \in K$ y $q \in F$. Sugerencia: ρ_F es una función positiva continua en K.

    Demostrar que la conclusión puede ser falsa para dos conjuntos cerrados ajenos si ninguno de ellos es compacto.

22. Sean A y B conjuntos cerrados no vacíos, ajenos, en un espacio métrico X. Definir

$$f(p) = \frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p) + \rho_B(p)} \quad (p \in X)$$

    Demostrar que f es una función continua en X cuyo rango está en $[0, 1]$, que $f(p) = 0$ precisamente en A y $f(p) = 1$ precisamente en B. Esto establece un inverso del Ejercicio 3: todo conjunto cerrado $A \subset X$ es $Z(f)$ para alguna f real continua en X. Poniendo

$$V = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad W = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right),$$

    demostrar que V y W son abiertos y ajenos y que $A \subset V$ y $B \subset W$. (Así, los pares de conjuntos cerrados ajenos en un espacio métrico, pueden ser recubiertos por pares de conjuntos abiertos ajenos. Esta propiedad de los espacios métricos se llama normalidad.)

23. Se dice que una función de valores reales f definida en (a, b) es convexa si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

siempre $a < x < b, a < y < b, 0 < \lambda < 1$. Demostrar que cada función convexa es continua. Demostrar después que cada función convexa creciente de una función convexa es convexa. (Por ejemplo, si f es convexa, también lo es e^f.)

Si f es convexa en (a,b) y si $a < s < t < u < b$, mostrar que

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leq \frac{f(u)-f(s)}{u-s} \leq \frac{f(u)-f(t)}{u-t}.$$

24. Aceptar que f es una función real continua definida en (a,b) y tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

para todo $x, y \in (a,b)$. Demostrar entonces que f es convexa.

25. Si $A \subset \mathbb{R}^k$ y $B \subset \mathbb{R}^k$, se define $A+B$ como el conjunto de todas las sumas $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{x} \in A$, $\boldsymbol{y} \in B$.

(a) Si K es compacto y C es cerrado en $\mathbb{R}^k$, demostrar que $K+C$ es cerrado.

Sugerencia: Tomar $\boldsymbol{z} \notin K+C$, y hacer que $F = \boldsymbol{z} - C$ represente al conjunto de todos los $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{y} \in C$. Entonces K y F son ajenos. Escójase δ como en el Ejercicio 21. Mostrar finalmente que la bola abierta con centro en $\boldsymbol{z}$ y radio δ no interseca $K+C$.

(b) Sea α un número real irracional, C_1 el conjunto de todos los enteros, y sea C_2 el conjunto de todos los $n\alpha$ con $n \in C_1$. Mostrar que C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^1$ cuya suma $C_1 + C_2$ no es cerrada, mostrando primero que $C_1 + C_2$ es un subconjunto denso numerable de $\mathbb{R}^1$.

26. Supóngase que X, Y, Z son espacios métricos, y que Y es compacto. Sea f una función que mapea X en Y, y g un mapeo uno-a-uno continuo que aplica Y en Z, y hágase $h(x) = g(f(x))$ para $x \in X$.

Demostrar que f es uniformemente continuo si h es uniformemente continuo.

Sugerencia: g^{-1} tiene un dominio compacto $g(Y)$, y $f(x) = g^{-1}(h(x))$.

Demostrar también que f es continuo si h es continuo.

Mostrar (modificando el Ejemplo 4.2, o encontrando un ejemplo diferente) que la compacticidad de Y no se puede omitir de la hipótesis, inclusive cuando X y Z son compactos.

CAPÍTULO 5

Diferenciación

En este capítulo (excepto en la sección final) limitaremos nuestra atención a las funciones reales definidas en intervalos o segmentos, no solo por motivos de comodidad, sino porque cuando pasamos de las funciones reales a las de valores vectoriales, aparecen notables diferencias. La diferenciación de funciones definidas en $\mathbb{R}^k$ se tratará en el capítulo 9.

5.1 Derivada de una función real

Definición 5.1 *Supongamos f definida (y con valores reales) en $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$, formemos el cociente*

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (a < t < b, t \neq x) \tag{5.1.1}$$

y definamos

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) \tag{5.1.2}$$

con la condición de que exista este límite, de acuerdo con la Definición 4.1.

Así, asociamos a la función f una función f', cuyo dominio de definición es el conjunto de los puntos x en los que existe (5.1.2); a f' se le llama derivada de f.

Si f' está definida en un punto x, decimos que f es diferenciable en x.

Si f' está definida en todos los puntos de un conjunto $E \subset [a, b]$, decimos que f es diferenciable en E.

Es posible considerar en (5.1.2) límites por la derecha y por la izquierda; lo que conduce a la definición de derivadas por la derecha y por la izquierda. En particular, en los puntos límites a y b, la derivada será, si existe una derivada por la derecha, o por la izquierda, respectivamente. Sin embargo no estudiaremos este tipo de derivadas con detalle.

Si f está definida en un segmento (a, b) y $a < x < b$, $f'(x)$ está definida por las (5.1.1) y (5.1.2) anteriores, pero en este caso no están definidas $f'(a)$ y $f'(b)$.

Teorema 5.1 *Supongamos f definida en $[a,b]$. Si f es diferenciable en un punto $x \in [a,b]$, es continua en x.*

Demostración: *Cuando $t \to x$, por el Teorema 4.2, tenemos*

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot (t - x) \to f'(x) \cdot 0 = 0.$$

El recíproco de este teorema no es cierto. Es fácil construir funciones continuas que dejan de ser diferenciables en puntos aislados. En el capítulo 7 incluso nos encontraremos con una función que es continua en toda la recta, sin ser diferenciable en ningún punto.

Teorema 5.2 *Supongamos que f y están definidas en $[a,b]$ y son diferenciables en un punto $x \in [a,b]$. $f+g$; fg, y f/g son diferenciables en x, y*

(a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

(c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$.

En (c) se supone, evidentemente, que $g(x) \neq 0$.

Demostración: *(a) se ve claramente por el Teorema 4.2. Sea $h = fg$. Será*

$$h(t) - h(x) = f(t)[g(t) - g(x)] + g(x)[f(t) - f(x)]$$

Si dividimos esta expresión por $t - x$ y observamos que $f(t) \to f(x)$ cuando $t \to x$ (Teorema 5.1), se deduce (b). Sea, ahora $h = f/g$. Será

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \frac{1}{g(t)g(x)} \left[g(x) \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f(x) \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \right].$$

Suponiendo que $t \to x$, y aplicando los Teoremas 4.2 y 5.1, obtenemos (c).

Ejemplo 5.1 *Se ve fácilmente que la derivada de una constante es cero. Si f está definida por $f(x) = x, f'(x) = 1$. Repitiendo la aplicación de (b) y (c) se ve que x^n es diferenciable, y que su derivada es nx^{n-1} para todo entero n (si $n < 0$ debemos limitarnos a $x \neq 0$). Así, todo polinomio es diferenciable, y lo mismo sucede con las funciones racionales, excepto en los puntos en que el denominador es cero.*

El teorema siguiente se conoce como «regla de la cadena» de la diferenciación. En el capítulo 9 encontraremos versiones más generales.

Teorema 5.3 *Supongamos que f es continua en $[a,b]$, existe $f'(x)$ en algún punto $x \in [a,b], g$ está definida en un intervalo I que contiene el rango de f, y g es diferenciable en el punto $f(x)$. Si*

$$h(t) = g(f(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

h es diferenciable en x, y

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) \tag{5.1.3}$$

Demostración: *Sea $y = f(x)$. Por la definición de derivada, tenemos*

$$f(t) - f(x) = (t - x)\left[f'(x) + u(t)\right] \tag{5.1.4}$$

$$g(s) - g(y) = (s - y)\left[g'(y) + v(s)\right] \tag{5.1.5}$$

donde $t \in [a, b]$; $s \in I$, y $u(t) \to 0$ cuando $t \to x$, $v(s) \to 0$ si $s \to y$. Sea $s = f(t)$. Aplicando primeramente (5.1.5) y a continuación (5.1.4), obtenemos

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) \\ &= [f(t) - f(x)] \cdot \left[g'(y) + v(s)\right] \\ &= (t - x) \cdot \left[f'(x) + u(t)\right] \cdot \left[g'(y) + v(s)\right] \end{aligned}$$

o, si $t \neq x$,

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \left[g'(y) + v(s)\right] \cdot \left[f'(x) + u(t)\right] \tag{5.1.6}$$

Haciendo que $t \neq x$, vemos que $s \to y$, por la continuidad de f, así que el segundo miembro de (5.1.6) tiende a $g'(y)f'(x)$, lo que da (5.1.3).

Ejemplo 5.2 *(a) Sea f, una función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases} \tag{5.1.7}$$

Admitiendo que la derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$ (estudiaremos las funciones trigonométricas en el Cap. 8), podenos aplicar los Teoremas 5.2 y 5.3 cuando $x \neq 0$, y obtendremos

$$f'(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \tag{5.1.8}$$

Para $x = 0$ estos teoremas no pueden aplicarse, pues, $1/x$ no está definido, y recurriremos directamente a la definición: para $t \neq 0$.

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \operatorname{sen} \frac{1}{t}$$

Para $t \to 0$, esta expresión no tiende a ningún límite, de modo que $f'(0)$ no existe.

(b) Supongamos f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \tag{5.1.9}$$

Como anteriormente, obtenemos

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \tag{5.1.10}$$

En $x = 0$, *recurrimos a la definición, y obtenemos*

$$\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right| = \left|t \operatorname{sen}\frac{1}{t}\right| \leq |t| \quad (t \neq 0)$$

suponiendo $t \to 0$, *vemos que*

$$f'(0) = 0. \tag{5.1.11}$$

Así, pues, f *es diferenciable en todos los puntos* x, *pero* f' *no es una función continua, pues,* $\cos(1/x)$ *en* $(5.1.10)$, *no tiende a un límite cuando* $x \to 0$.

5.2 Teoremas del valor medio

Definición 5.2 *Sea* f *una función real definida en un espacio métrico* X. *Decimos que* f *tiene un máximo local en un punto* $p \in X$, *si existe* $\delta > 0$, *tal que* $f(q) \leq f(p)$ *para todo* $q \in X$, *tal que* $d(p,q) < \delta$.

Del mismo modo se definen los mínimos locales.

El próximo teorema es la base de muchas aplicaciones de la diferenciación.

Teorema 5.4 *Supongamos* f *definida en* $[a,b]$; *si tiene un máximo local en un punto* $x \in (a,b)$, *y existe* $f'(x)$, *es* $f'(x) = 0$.

El enunciado análogo para los mínimos locales, es también cierto.

Demostración: *Elijamos* δ *de acuerdo con la Definición 5.2, de modo que*

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b$$

Si $x - \delta < t < x$, *será*

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq 0$$

Suponiendo $t \to x$, *vemos que* $f'(x) \geq 0$.

Si $x < t < x + \delta$, *será*

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq 0$$

lo que demuestra que $f'(x) \leq 0$. *De aquí que* $f'(x) = 0$.

Teorema 5.5 *Si* f *y* g *son funciones reales continuas en* $[a,b]$ *diferenciables en* (a,b), *existe un punto* $x \in (a,b)$, *en el cual*

$$[f(b)-f(a)]g'(x) = [g(b)-g(a)]f'(x)$$

Obsérvese que no es necesaria la diferenciabilidad en los extremos.

Demostración: *Hagamos*

$$h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

h es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b) \tag{5.2.1}$$

Para demostrar el teorema, debemos ver que $h'(x) = 0$ para algún $x \in (a, b)$.

Si h es constante, se cumple para todo $x \in (a, b)$. Si $h(t) > h(a)$ para algún $t \in (a, b)$, sea x un punto de $[a, b]$ en el que h alcanza su máximo (Teorema 4.10). Por (5.2.1), $x \in (a, b)$ y el Teorema 5.4 demuestra que $h'(x) = 0$. Si $h(t) < h(a)$ para algún $t \in (a, b)$, se aplica el mismo argumento, eligiendo para x un punto de $[a, b]$ en el que h alcanza su mínimo.

A este teorema se le llama a veces teorema generalizado del valor medio; al siguiente caso especial suele llamársele «el» teorema del valor medio.

Teorema 5.6 *Si f es una función real continua en $[a, b]$, que es diferenciable en (a, b), existe un punto $x \in (a, b)$, en el cual*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x).$$

Demostración: *Hacer $g(x) = x$ en el Teorema 5.5.*

Teorema 5.7 *Suponiendo f diferenciable en (a, b).*
(a) Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es monótona creciente.
(b) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es constante.
(c) Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es monótona decreciente.

Demostración: *Todas las conclusiones se pueden extraer de la ecuación*

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x),$$

que es válida para cada par de números x_1, x_2 de (a, b), para algún x entre x_1 y x_2.

5.3 Continuidad de las derivadas

Hemos visto [Ejemplo 5.2(b)] que una función f puede tener una derivada f', que existe en todo punto, pero es discontinua en alguno de ellos, pero no toda función es una derivada. En particular, las derivadas que existen en todos los puntos de un intervalo tienen una propiedad importante en común con las funciones continuas en un intervalo: adoptan los valores intermedios (compárese con el Teorema 4.15). El enunciado preciso es el siguiente:

Teorema 5.8 *Supongamas que f es una función real diferenciable en $[a, b]$ y que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Existe un punto $x \in (a, b)$, tal que $f'(x) = \lambda$.*

Un resultado similar se cumple, evidentemente, si $f'(a) > f'(b)$.

Demostración: *Hágase* $g(t) = f(t) - \lambda t$. *Entonces* $g'(a) < 0$, *de manera que* $g(t_1) < g(a)$ *para algún* $t_1 \in (a, b)$, *y* $g'(b) > 0$, *así que* $g(t_2) < g(b)$ *para algún* $t_2 \in (a, b)$. *Por consiguiente,* g *alcanza su mínimo sobre* $[a, b]$ *(Teorema 4.10) en algún punto* x *tal que* $a < x < b$. *Entonces por el Teorema 5.4,* $g'(x) = 0$. *Es por esto que* $f'(x) = \lambda$.

Corolario 5.1 *Si* f *es diferenciable en* $[a, b]$, f' *no puede tener en* $[a, b]$ *ninguna discontinuidad simple.*

Pero f' puede muy bien tener discontinuidad de segunda clase.

5.4 Regla de L'Hopital

El siguiente teorema es útil, con frecuencia, para el cálculo de límites.

Teorema 5.9 *Supongamos que* f *y* g *son reales y diferenciables en* (a, b), *y* $g'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$, *donde* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. *Supongamos*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \text{ si } x \to a \tag{5.4.1}$$

Si

$$f(x) \to 0 \quad y \quad g(x) \to 0 \text{ cuando } x \to a, \tag{5.4.2}$$

o si

$$g(x) \to +\infty \text{ cuando } x \to a, \tag{5.4.3}$$

será

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \text{ cuando } x \to a. \tag{5.4.4}$$

Igualmente es cierto el enunciado análogo, si $x \to b$ o si $g(x) \to -\infty$ en (5.4.3)). Hacemos notar que utilizamos el concepto de límite en el sentido amplio de la Definición 4.10.

Demostración: *Consideramos primeramente el caso de ser* $-\infty \leq A < +\infty$. *Elijamos un número real* q, *tal que* $A < q$ *y un* r, *tal que* $A < r < q$. *Por* (5.4.1), *existe un punto* $c \in (a, b)$, *tal que* $a < x < c$ *implica*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r \tag{5.4.5}$$

Si $a < x < y < c$, *el Teorema 5.5 demuestra que hay un punto* $t \in (x, y)$, *tal que*

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r \tag{5.4.6}$$

Supongamos que se cumple (5.4.2). *Considerando en* (5.4.6) *que* $x \to a$, *vemos que*

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q \quad (a < y < c). \tag{5.4.7}$$

Supongamos, ahora, que se cumple (5.4.3). *Conservando* y *fijo en* (5.4.6), *podemos elegir un punto* $c_i \in (a, y)$, *tal que* $g(x) > g(y)$ *y* $g(x) > 0$ *si* $a < x < c_1$. *Multiplicando* (5.4.6) *por* $[g(x) - g(y)]/g(x)$, *obtenemos*

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (a < x < c_1) \tag{5.4.8}$$

Si suponemos que $x \to a$ *en* (5.4.8); (5.4.3) *demuestra que hay un punto* $c_2 \in (a, c_1)$, *tal que*

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \quad (a < x < c_2) \tag{5.4.9}$$

Resumiendo: (5.4.7) *y* (5.4.9) *demuestran que para cada* q, *sujeto solamente a la condición* $A < q$, *hay un punto* c_2, *tal que* $f(x)/g(x) < q$ *si* $a < x < c_2$.

Del mismo modo, si $-\infty < A \leq +\infty$, *y se elige* p, *de modo que* $p < A$,

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (a < x < c_3) \tag{5.4.10}$$

y de las dos afirmaciones, se deduce (5.4.4).

5.5 Derivadas de orden superior

Definición 5.3 *Si* f *tiene una derivada* f' *en un intervalo, y* f' *es a su vez diferenciable, representaremos su derivada por* f'' *y la llamaremos derivada segunda de* f. *Continuando de este modo, obtenemos funciones*

$$f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$$

cada una de las cuales es la derivada de la precedente. A $f^{(n)}$ *se le llama derivada* n*-ésima o de orden* n *de* f.

Para que $f^{(n)}(x)$ exista en un punto x, debe existir $f^{(n-1)}(t)$ en una vecindad de x (o en una vecindad hacia un lado, si x es un extremo del intervalo en el que está definida f) y debe ser diferenciable en x. Como ha de existir $f^{(n-1)}$ en una vecindad de x, $f^{(n-2)}$ debe ser diferenciable en esa vecindad.

5.6 Teorema de Taylor

Teorema 5.10 *Supongamos que* f *es una función real en* $[a, b], n$ *es un entero positivo,* $f^{(n-1)}$ *es continua en* $[a, b]$, *existe* $f^{(n)}(t)$ *para todo* $t \in (a, b)$. *Sean* α, β *puntos distintos de* $[a, b]$ *y definamos*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k \tag{5.6.1}$$

Existe un punto x *entre* α *y* β, *tal que*

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n \tag{5.6.2}$$

Para $n=1$ este teorema es el del valor medio. En general, el teorema demuestra que se puede hallar f aproximada por medio de un polinomio de grado $n-1$; y (5.6.2) nos permite estimar el error, si conocemos las cotas en $\left|f^{(n)}(x)\right|$.

Demostración: *Sea M el número definido por*

$$f(\beta)=P(\beta)+M(\beta-\alpha)^n \tag{5.6.3}$$

y hagamos

$$g(t)=f(t)-P(t)-M(t-\alpha)^n \quad (a\leq t\leq b). \tag{5.6.4}$$

Tenemos que demostrar que $n!M=f^{(n)}(x)$ para algún x entre α y β. Por (5.6.1) y (5.6.4)

$$g^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)-n!M \quad (a<t<b). \tag{5.6.5}$$

Por tanto, la demostración estará completa si podemos probar que $g^{(n)}(x)=0$ para algún x entre α y β.

Como $P^{(k)}(\alpha)=f^{(k)}(\alpha)$ para $k=0,\ldots,n-1$, tenemos

$$g(\alpha)=g'(\alpha)=\cdots=g^{(n-1)}(\alpha)=0 \tag{5.6.6}$$

La elección de M demuestra que $g(\beta)=0$, de modo que $g'\left(x_1\right)=0$ para algún x_1 entre α y β, por el teorema del valor medio. Como $g'(\alpha)=0$, deducimos del mismo modo que $g''\left(x_2\right)=0$ para algún x_2 entre α y x_1. Después de n pasos, llegamos a la conclusión de que $g^{(n)}\left(x_n\right)=0$ para algún x_n entre α y x_{n-1}, esto es, entre α y β.

5.7 Diferenciación de funciones vectoriales

Observación: *La Definición 5.1 se aplica sin ningún cambio a las funciones complejas f definidas en $[a,b]$ y los Teoremas 5.1 y 5.2, lo mismo que sus demostraciones permanecen válidos. Si f_1 y f_2 son las partes real e imaginaria de f, esto es si $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$ para $a\leq t\leq b$, donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son reales, se ve fácilmente que*

$$f'(x)=f_1'(x)+if_2'(x) \tag{5.7.1}$$

además, f es diferenciable en x si, y solo si f_1 y f_2 son diferenciables en x.

Pasando a las funciones con valores vectoriales (o vectoriales simplemente) en general, esto es, a las funciones $\boldsymbol{f}$ que mapean $[a,b]$ en algún $\mathbb{R}^k$, también se puede aplicar la Definición 5.1 para definir $\boldsymbol{f}'(x)$. El término $\phi(t)$ de (5.1.1) es ahora, para cada t, un punto en $\mathbb{R}^k$ y en (5.1.2) se toma el límite respecto a la norma de $\mathbb{R}^k$. En otras palabras, $\boldsymbol{f}'(x)$ es el punto de $\mathbb{R}^k$ (si existe), para el cual

$$\lim_{t\to x}\left|\frac{\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{f}(x)}{t-x}-\boldsymbol{f}'(x)\right|=0 \tag{5.7.2}$$

y $\boldsymbol{f}'$ es también una función con valores en $\mathbb{R}^k$.

Si $f_1,\ldots,f_k$ son las componentes de $\boldsymbol{f}$, que se definieron en el Teorema 4.7, entonces

$$\boldsymbol{f}'=\left(f_1',\ldots,f_k'\right) \tag{5.7.3}$$

y $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en un punto $\boldsymbol{x}$ si, y solo si cada una de las funciones $f_1, \ldots, f_k$ es diferenciable en x.

El Teorema 5.1 es cierto, lo mismo que los 5.2(a) y (b), si se sustituye fg por el producto interno $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ (ver la Definición 4.2).

Sin embargo, respecto al teorema del valor medio y a una de sus consecuencias: la regla de L'Hopital, la situación cambia. Los dos siguientes ejemplos demostrarán que dejan de ser ciertos para las funciones con valores complejos.

Ejemplo 5.3 *Definamos, para x real*

$$f(x) = e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \tag{5.7.4}$$

(La última expresión puede considerarse como definición de la exponencial compleja e^{ix}; véase en el Capítulo **??** *un estudio completo de estas funciones). Será*

$$f(2\pi) - f(0) = 1 - 1 = 0, \tag{5.7.5}$$

pero

$$f'(x) = ie^{ix} \tag{5.7.6}$$

de modo que $|f'(x)| = 1$ para todo x real.

Así, pues, el Teorema 5.6 deja de ser cierto en este caso.

Ejemplo 5.4 *En el segmento $(0, 1)$ definamos $f(x) = x$, y*

$$g(x) = x + x^2 e^{i/x^2} \tag{5.7.7}$$

Como $\left|e^{it}\right| = 1$ para todo t real, vemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{5.7.8}$$

Ahora bién,

$$g'(x) = 1 + \left\{2x - \frac{2i}{x}\right\} e^{i/x^2} \quad (0 < x < 1) \tag{5.7.9}$$

de modo que

$$\left|g'(x)\right| \geq \left|2x - \frac{2i}{x}\right| - 1 \geq \frac{2}{x} - 1 \tag{5.7.10}$$

De aquí que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = \frac{1}{|g'(x)|} \leq \frac{x}{2 - x} \tag{5.7.11}$$

y así

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0. \tag{5.7.12}$$

Por (5.7.8) y (5.7.12), no se cumple en este caso la regla de L'Hopital. Obsérvese también que $g'(x) \neq 0$ en $(0, 1)$, por (5.7.10).

Sin embargo, hay una consecuencia del teorema del valor medio, que para las aplicaciones es casi tan útil como el Teorema 5.6, y que sigue siendo verdad para las funciones vectoriales. Del Teorema 5.6 se deduce que

$$|f(b)-f(a)| \leq (b-a) \sup_{a<x<b} \left|f'(x)\right|. \tag{5.7.13}$$

Teorema 5.11 *Supóngase que $\boldsymbol{f}$ es una aplicación continua de $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$ y $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en (a,b). Entonces existe $x \in (a,b)$ tal que*

$$|\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)| \leq (b-a)\left|\boldsymbol{f}'(x)\right|.$$

Demostración: *Haciendo $z = \boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)$, y definiendo*

$$\varphi(t) = \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

Entonces φ es una función continua de valores reales sobre $[a,b]$ que es diferenciable en (a,b). El teorema del valor medio muestra por lo tanto que

$$\varphi(b)-\varphi(a) = (b-a)\varphi'(x) = (b-a)\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}'(x)$$

para algún $x \in (a,b)$. Por otro lado,

$$\varphi(b)-\varphi(a) = \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}(a) = \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|^2.$$

La desigualdad de Schwarz produce ahora

$$|\boldsymbol{z}|^2 = (b-a)\left|\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}'(x)\right| \leq (b-a)|\boldsymbol{z}|\left|\boldsymbol{f}'(x)\right|.$$

Por consiguiente $|\boldsymbol{z}| \leq (b-a)\,|\boldsymbol{f}'(x)|$, que es la conclusión que se quería.

5.8 Ejercicios

1. Sea f definida para todo x real, y supóngase que

$$|f(x)-f(y)| \leq (x-y)^2$$

para todo x y y reales. Demostrar que f es constante.

2. Supóngase que $f'(x) > 0$ en (a,b). Demostrar que f es estrictamente creciente en (a,b), y sea g su función inversa. Demostrar que g es diferenciable, y además que

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (a < x < b)$$

3. Supóngase que g es una función real sobre $\mathbb{R}^1$, con derivada acotada (es decir $|g'| \leq M$). Fijese $\varepsilon > 0$, y definase $f(x) = x + \varepsilon g(x)$. Demostrar que f es uno-a-uno si ε es suficientemente pequeño.

(Puede determinarse un conjunto de valores admisibles de ε que depende sólo de M.)

4. Si
$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$$
donde $C_0, \ldots, C_n$ son constantes reales, demostrar que la ecuación
$$C_0 + C_1 x + \cdots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0$$
tiene, al menos, una raiz real entre 0 y 1 .

5. Suponer f definida y diferenciable para todo $x > 0$, y $f'(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Hacer $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Demostrar que $g(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

6. Suponer que
   (a) f es continua para $x \geq 0$,
   (b) $f'(x)$ existe para $x > 0$,
   (c) $f(0) = 0$,
   (d) f' es monótona creciente.

   Hacer
$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0)$$
   y demostrar que g es monótona creciente.

7. Suponer que existen $f'(x)$ y $g'(x)$, $g'(x) \neq 0$ y $f(x) = g(x) = 0$. Demostrar que
$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
   (Esto se cumple también para funciones complejas.)

8. Suponer que f' es continua en $[a, b]$ y $\varepsilon > 0$. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que
$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$
   siempre que $0 < |t - x| < \delta; a \leq x \leq b; a \leq t \leq b$. (Podría expresarse esto diciendo que f es uniformemente diferenciable en $[a, b]$ si f' es continua en $[a, b]$). ¿Se cumple esto también para las funciones vectoriales?

9. Sea f una función real continua sobre $\mathbb{R}^1$, de la cual se sabe que $f'(x)$ existe para todo $x \neq 0$ y que $f'(x) \to 3$ cuando $x \to 0$. ¿Puede deducirse que $f'(0)$ existe?

10. Supongamos que f y g son funciones complejas diferenciales en $(0, 1)$; $f(x) \to 0$; $g(x) \to 0$; $f'(x) \to A$; $g'(x) \to B$ cuando $x \to 0$, siendo A y B números complejos y $B \neq 0$. Demostrar que
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$
    Comparar con el Ejercicio 5.4. Sugerencia:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{x} - A \right\} \cdot \frac{x}{g(x)} + A \cdot \frac{x}{g(x)}.$$
    Aplicar el Teorema 5.9 a las partes real e imaginaria de $f(x)/x$ y $g(x)/x$.

11. Suponer que f está definida en una vecindad de x y que existe $f''(x)$. Demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

Demostrar con un ejemplo que puede existir el límite aún cuando no exista $f''(x)$. Sugerencia: Aplicar el Teorema 5.9.

12. Si $f(x) = |x|^3$, calcular $f'(x)$ y $f''(x)$ para todo número real x, y demostrar que $f^{(3)}(0)$ no existe.

13. Supóngase que a y c son números reales, $c > 0$, y f está definida sobre $[-1, 1]$ por medio de

$$f(:) = \begin{cases} x^a \operatorname{sen}(|x|^{-c}) & (\text{ si } x \neq 0) \\ 0 & (\text{ si } x = 0) \end{cases}$$

Demostrar lo siguiente:

(a) f es continua si, y solo si $a > 0$.

(b) $f'(0)$ existe si, y solo si $a > 1$.

(c) f' es acotada si, y solo si $a \geq 1 + c$.

(d) f' es continua si, y solo si $a > 1 + c$.

(e) $f''(0)$ existe si, y solo si $a > 2 + c$.

(f) f'' es acotada si, y solo si $a \geq 2 + 2c$.

(g) f'' es continua si, y solo si $a > 2 + 2c$.

14. Sea f una función real diferenciable definida en (a, b). Demostrar que f es convexa si, y solo si f' es monótona creciente. Supóngase enseguida que $f''(x)$ existe para cada $x \in (a, b)$, y demuestre que f es convexa si, y solo si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

15. Supóngase que $a \in \mathbb{R}^1$, y que f es una función real diferenciable dos veces sobre $(a, +\infty)$, y M_0, M_1, M_2 son las minimas cotas superiores de $|f(x)|, |f'(x)|$, $|f''(x)|$, respectivamente, sobre (a, ∞). Demostrar que

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2$$

Sugerencia: Si $h > 0$, el teorema de Taylor muestra que

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+2h) - f(x)] - hf''(\xi)$$

para algún $\xi \in (x, x+2h)$. En consecuencia

$$\left|f'(x)\right| \leq hM_2 + \frac{M_0}{h}.$$

Para mostrar que $M_1^2 = 4M_0M_2$ puede ocurrir en realidad, tómese $a = -1$, y definase

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & (-1 < x < 0) \\ \frac{x^2-1}{x^2+1} & (0 \leq x < \infty) \end{cases}$$

y muéstrese que $M_0 = 1, M_1 = 4, M_2 = 4$.

¿Es también $M_1^2 \leq 4M_0M_2$ válido para funciones vectoriales?

16. Supóngase que f es doblemente diferenciable sobre $(0, \infty)$, f'' es acotada sobre $(0, \infty)$, y que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Demostrar que $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

    Sugerencia: Hacer $a \to \infty$ en el Ejercicio 15.

17. Supóngase que f es una función real y tres veces diferenciable sobre $[-1, 1]$, tal que

    $$f(-1) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

    Demostrar que $f^{(3)}(x) \geq 3$ para algún $x \in (-1, 1)$.

    Nótese que la igualdad es válida para $\frac{1}{2}\left(x^3 + x^2\right)$.

    Sugerencia: Usar el Teorema 5.10, con $\alpha = 0$ y $\beta = \pm 1$, para mostrar que existen $s \in (0, 1)$ y $t \in (-1, 0)$ tales que

    $$f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t) = 6.$$

18. Supóngase que f es una función real sobre $[a, b]$, n es un entero positivo, y $f^{(n-1)}$ existe para cada $t \in [a, b]$. Sean α, β, y P del teorema de Taylor 5.10. Definase

    $$Q(t) = \frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta}$$

    para $t \in [a, b], t \neq \beta$, diferenciese

    $$f(t) - f(\beta) = (t - \beta) Q(t)$$

    $n - 1$ veces en $t = \alpha$, y dedúzcase la siguiente versión del teorema de Taylor:

    $$f(\beta) = P(\beta) + \frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^n$$

19. Supóngase que f está definida en $(-1, 1)$ y $f'(0)$ existe. Supóngase también que $-1 < \alpha_n < \beta_n < 1$, $\alpha_n \to 0$, y $\beta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Definanse los cocientes de las diferencias siguientes:

    $$D_n = \frac{f\left(\beta_n\right) - f\left(\alpha_n\right)}{\beta_n - \alpha_n}.$$

    Demostrar que:

    (a) Si $\alpha_n < 0 < \beta_n$, entonces $\lim D_n = f'(0)$.

    (b) Si $0 < \alpha_n < \beta_n$, y $\{\beta_n / \left(\beta_n - \alpha_n\right)\}$ es acotada, entonces $\lim D_n = f'(0)$.

    (c) Si f' es continua en $(-1, 1)$, entonces $\lim D_n = f'(0)$.

    Dar un ejemplo en el que f sea diferenciable en $(-1, 1)$ (pero f' no sea continua en 0) y en el que α_n, β_n tienda a 0 de tal forma que $\lim D_n$ exista, pero sea diferente de $f'(0)$.

20. Formular y demostrar una desigualdad que se deduce del teorema de Taylor, y que permanece válida para las funciones vectoriales.

21. Sea E un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^1$. Dijimos en el Ejercicio 22, capítulo 4 que existe una función real continua f en $\mathbb{R}^1$ cuyo conjunto cero es E. ¿Es posible, para cada conjunto cerrado E, hallar una tal f que sea diferenciable en $\mathbb{R}^1$, o una que sea n veces diferenciable o incluso una que tenga derivada de todos los órdenes en $\mathbb{R}^1$?

22. Supóngase que f es una función real definida sobre $(-\infty, \infty)$. Se dirá que x es un punto fijo de f si $f(x) = x$.

    (a) Si f es diferenciable y $f'(t) \neq 1$ para cada real t, demostrar que f tiene a lo más un punto fijo.

    (b) Mostrar que la función f definida por

    $$f(t) = t + \left(1 + e^t\right)^{-1}$$

    no tiene punto fijo, aunque $0 < f'(t) < 1$ para todo real t.

    (c) No obstante, si hay una constante $A < 1$ tal que $|f'(t)| \leq A$ para todo real t, demostrar que existe un punto fijo x de f, y que $x = \lim x_n$, en donde x_1 es un número real arbitrario y además

    $$x_{n+1} = f(x_n)$$

    para $n = 1, 2, 3, \ldots$

    (d) Mostrar que el procedimiento descrito en el apartado (c) puede entenderse a partir de la trayectoria en zig-zag

    $$(x_1, x_2) \to (x_2, x_2) \to (x_2, x_3) \to (x_3, x_3) \to (x_3, x_4) \to \cdots$$

23. La función f definida por

    $$f(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$$

    tiene tres puntos fijos, a saber α, β, γ, donde

    $$-2 < \alpha < -1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 1 < \gamma < 2.$$

    Si se escoge arbitrariamente x_1, y se define $\{x_n\}$ haciendo $x_{n+1} = f(x_n)$.

    (a) Si $x_1 < \alpha$, demostrar que $x_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

    (b) Si $\alpha < x_1 < \gamma$, demostrar que $x_n \to \beta$ cuando $n \to \infty$.

    (c) Su $\gamma < x_1$, demostrar que $x_n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$.

    Entonces β puede localizarse con este método, pero α y γ no.

24. El procedimiento que se describió en la parte (c) del Ejercicio 22 puede también aplicarse a funciones que mapean $(0, \infty)$ en $(0, \infty)$.

    Fijando algún $\alpha > 1$, y haciendo

    $$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right), \quad g(x) = \frac{\alpha + x}{1 + x}$$

    Entonces f y g tienen como único punto fijo en $(0, \infty)$ a $\sqrt{\alpha}$. Intentar explicar, en base a las propiedades de f y g, por qué la convergencia en el Ejercicio 16 del capítulo 3 es mucho más rápida que la del Ejercicio 17. (Compárense f' y g', y dibújense las trayectorias en zig-zag que se sugieren en el Ejercicio 22.)

    Hacer lo mismo cuando $0 < \alpha < 1$.

25. Supóngase que f es doblemente diferenciable sobre $[a,b]$, $f(a)<0, f(b)>0$, $f'(x)\geq\delta>0$, y $0\leq f''(x)\leq M$ para todo $x\in[a,b]$. Sea ξ el único punto en (a,b) en el cual $f(\xi)=0$. Completar los detalles del siguiente esbozo del método de Newton para calcular ξ.

   (a) Escoger $x_1\in(\xi,b)$, y definir $\{x_n\}$ por medio de
   $$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
   Interpretar esto geométricamente, en términos de una tangente a la gráfica de f.

   (b) Demostrar que $x_{n+1}<x_n$ y que
   $$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi.$$

   (c) Usar el teorema de Taylor para mostrar que
   $$x_{n+1}-\xi=\frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n-\xi)^2$$
   para algún $t_n\in(\xi,x_n)$.

   (d) Si $A=M/2\delta$, dedúzcase que
   $$0\leq x_{n+1}-\xi\leq\frac{1}{A}\left[A(x_1-\xi)\right]^{2n}.$$
   (Compárese con los Ejercicios 16 y 18 del capítulo 3.)

   (e) Mostrar que el método de Newton es significativo para encontrar un punto fijo de la función g definida por
   $$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$
   ¿Cómo se comporta $g'(x)$ cuando x está muy cerca de ξ?

   (f) Hacer $f(x)=x^{1/3}$ sobre $(-\infty,\infty)$ y aplicar el método de Newton. ¿Qué ocurre?

26. Suponer que f es diferenciable en $[a,b]$; $f(a)=0$ y hay un número real A tal que $|f'(x)|\leq A|f(x)|$ en $[a,b]$. Demostrar que $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$. Sugerencia: Dado $x_0\in[a,b]$, sea
   $$M_0=\sup|f(x)|,\quad M_1=\sup\left|f'(x)\right|$$
   para $a\leq x\leq x_0$. Para cada tal x,
   $$|f(x)|\leq M_1(x_0-a)\leq A(x_0-a)M_0.$$
   Por tanto $M_0=0$, si $A(x_0-a)<1$. Esto es, $f=0$ en $[a,x_0]$. Continuar.

27. Sea ϕ una función real definida en un rectángulo R en el plano, dado por $a\leq x\leq b, \alpha\leq y\leq\beta$. Una solución del problema con valores iniciales
   $$y'=\phi(x,y),\quad y(a)=c\quad(\alpha\leq c\leq\beta)$$
   es, por definición, una función diferenciable f en $[a,b]$ tal que $f(a)=c, \alpha\leq f(x)\leq\beta$, y
   $$f'(x)=\phi(x,f(x))\quad(a\leq x\leq b).$$

Demostrar que semejante problema tiene a lo más una solución si hay una constante A tal que

$$|\phi(x, y_2) - \phi(x, y_1)| \leq A\,|y_2 - y_1|$$

siempre que $(x, y_1) \in R$, y $(x, y_2) \in R$.

Sugerencia: Aplicar el Ejercicio 26 a la diferencia de dos soluciones. Observar que este teorema de unicidad no se cumple para el problema con valores iniciales

$$y' = y^{1/2}, \quad y(0) = 0,$$

que tiene dos soluciones: $f(x) = 0$ y $f(x) = x^2/4$. ¿Hay otras soluciones? Determinarlas.

28. Formular y demostrar un teorema de unicidad análogo, para sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$y_j' = \phi_j(x, y_1, \ldots, y_k), \quad y_j(a) = c_j \quad (j = 1, \ldots, k).$$

Obsérvese que puede también escribirse en la forma

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{c}$$

donde $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ varía sobre una celda-k, $\boldsymbol{\phi}$ es el mapeo de una celda-$k+1$) en el espacio-k euclidiano, cuyas componentes son las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_k$, y $\boldsymbol{c}$ es el vector $(c_1, \ldots, c_k)$. Utilizar el Ejercicio 26 para funciones con valores vectoriales.

29. Particularizar el Ejercicio 28, considerando el sistema

$$y_j' = y_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, k-1)$$
$$y_k' = f(x) - \sum_{j=1}^{k} g_j(x) y_j$$

donde $f, g_1, \ldots, g_k$ son funciones reales continuas en $[a, b]$ y deducir un teorema de unicidad para las soluciones de la ecuación

$$y^{(k)} + g_k(x) y^{(k-1)} + \cdots + g_2(x) y' + g_1(x) y = f(x),$$

con las condiciones iniciales

$$y(a) = c_1, \quad y'(a) = c_2, \quad \ldots \quad , \quad y^{(k-1)}(a) = c_k.$$

CAPÍTULO 6

La integral de Riemann-Stieltjes

El presente capítulo está basado en una definición de la integral de Riemann, que depende muy explícitamente de la estructura de orden de la recta real. En consecuencia, empezaremos estudiando la integración de las funciones reales en intervalos. En capítulos posteriores seguirán las generalizaciones a funciones de variables complejas y vectoriales en intervalos. La integración en conjuntos distintos de los intervalos, se estudia en los capítulos 10 y 11 .

6.1 Definición y existencia de la integral

Definición 6.1 *Sea $[a, b]$ un intervalo dado. Por partición P de $[a, b]$ entendemos un conjunto finito de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ donde*

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

Escribimos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Suponiendo, ahora, que f es una función real acotada definida en $[a, b]$. Correspondiendo a cada partición P de $[a, b]$ hacemos

$$\begin{aligned} M_i &= \sup f(x) && (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\ m_i &= \inf f(x) && (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\ U(P, f) &= \textstyle\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \\ L(P, f) &= \textstyle\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \end{aligned}$$

y finalmente

$$\overline{\int_a^b} f dx = \inf U(P, f), \tag{6.1.1}$$

$$\underline{\int_a^b} f dx = \sup L(P, f), \tag{6.1.2}$$

donde se han considerado el sup y el inf sobre todas las particiones P de $[a, b]$. Los primeros miembros de (6.1.1) y (6.1.2) se llaman integral superior e inferior de Riemann de f sobre $[a, b]$, respectivamente.

Si las integrales superior e inferior son iguales, decimos que f es integrable según Riemann, sobre $[a, b]$, escribimos $f \in \mathcal{R}$ (esto es, $\mathcal{R}$ representa el conjunto de las funciones integrales según Riemann) y representamos el valor común de (6.1.1) y (6.1.2) por

$$\int_a^b f dx \tag{6.1.3}$$

o por

$$\int_a^b f(x) dx. \tag{6.1.4}$$

Esta es la integral de Riemann de f sobre $[a, b]$.

Como f es acotada, existen dos números m y M, tales que

$$m \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x \leq b).$$

De aquí que, para todo P,

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a)$$

de modo que los números $L(P, f)$ y $U(P, f)$ forman un conjunto acotado. Esto demuestra que las integrales superior e inferior están definidas para toda función acotada f. La cuestión de su igualdad, y por tanto de la integrabilidad de f es más delicada. En lugar de hallarla solamente para la integral de Riemann, consideraremos inmediatamente un caso más general.

Definición 6.2 *Sea α una función monótona creciente en $[a, b]$ (como $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ son finitas, se deduce que α es acotada en $[a, b]$). Correspondiendo a cada partición P de $[a, b]$, escribimos*

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$$

Es claro que $\Delta\alpha_i \geq 0$. Para toda función real f acotada en $[a, b]$ escribimos

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i$$
$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i$$

donde M_i, m_i tienen el mismo significado que en la Definición 6.1 y definimos

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha), \tag{6.1.5}$$
$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup L(P, f, \alpha), \tag{6.1.6}$$

tomando también los ínf *y los* sup *sobre todas las particiones.*

Si los primeros miembros de (6.1.5) *y* (6.1.6) *son iguales, representamos su valor común por*

$$\int_a^b f d\alpha \tag{6.1.7}$$

o algunas veces por

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \tag{6.1.8}$$

Esta es la integral de Riemann-Stieltjes (o simplemente la integral de Stieltjes) de f *respecto a* α*, sobre* $[a, b]$.

Si existe (6.1.7), esto es si (6.1.5) y (6.1.6) son iguales, decimos que f es integral con respecto a α, en el sentido de Riemann y escribimos $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Tomando $\alpha(x) = x$, se ve que la integral de Riemann es un caso particular de la integral de Riemann-Stieltjes. Merece especial mención el hecho de que en el caso general α no necesita ni ser continua.

Diremos unas palabras sobre notaciones. Preferimos (6.1.7) a (6.1.8), pues la letra x que aparece en (6.1.8) no añade nada al contenido de (6.1.7). No tiene importancia qué letra empleemos para representar la llamada «variable de integración». Por ejemplo, (6.1.8) es lo mismo que

$$\int_a^b f(y) d\alpha(y)$$

La integral depende de f, α, a y b, pero no de la variable de integración, que puede incluso suprimirse.

El papel que juega la variable de integración es totalmente análogo al del índice de sumación: los dos símbolos

$$\sum_{i=1}^{n} c_i, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k$$

expresan lo mismo, pues ambos significan $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

Desde luego, no perjudica la inclusión de la variable de integración, e incluso en muchos casos es conveniente hacerlo.

Ahora, trataremos de la existencia de la integral (6.1.7). Sin mencionarlo cada vez, supondremos que f es real y acotada, y α monótona creciente en $[a, b]$; y cuando no se preste a confusión escribiremos $\int$ en lugar de $\int_a^b$.

Definición 6.3 *Decimos que la partición* P^* *es un refinamiento de* P*, si* $P^* \supset P$ *(esto es, si todo punto de* P *es punto de* P^**). Dadas dos particiones,* P_1 *y* P_2*, decimos que* P^* *es su refinamiento común si* $P^* = P_1 \cup P_2$.

Teorema 6.1 *Si* P^* *es un refinamiento de* P*, es*

$$L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha) \tag{6.1.9}$$

y

$$U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha). \tag{6.1.10}$$

Demostración: *Para demostrar* (6.1.9), *supongamos primero que* P^* *contiene solamente un punto más que* P. *Sea este punto* x^*, *y supongamos* $x_{i-1} < x^* < x_i$, *donde* x_{i-1} *y* x_1 *son dos puntos consecutivos de* P. *Hagamos*

$$\begin{aligned} w_1 &= \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x^*) \\ w_2 &= \inf f(x) \quad (x^* \leq x \leq x_i) \end{aligned}$$

Evidentemente $w_1 \geq m_i$ *y* $w_2 \geq m_i$, *siendo como antes*

$$m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)\,.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} &L\left(P^*, f, \alpha\right) - L(P, f, \alpha) \\ &\quad = w_1\left[\alpha\left(x^*\right) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right] + w_2\left[\alpha\left(x_i\right) - \alpha\left(x^*\right)\right] - m_i\left[\alpha\left(x_i\right) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right] \\ &\quad = \left(w_1 - m_i\right)\left[\alpha\left(x^*\right) - \alpha\left(x_{i-1}\right)\right] + \left(w_2 - m_i\right)\left[\alpha\left(x_i\right) - \alpha\left(x^*\right)\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Si P^* *contiene* k *puntos más que* P, *repetiremos el razonamiento anterior* k *veces, y llegaremos a* (6.1.9). *La demostración de* (6.1.10) *es análoga.*

Teorema 6.2 $\underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha.$

Demostración: *Sea* P^* *el refinamiento común de dos particiones* P_1 *y* P_2. *Por el Teorema 6.1,*

$$L\left(P_1, f, \alpha\right) \leq L\left(P^*, f, \alpha\right) \leq U\left(P^*, f, \alpha\right) \leq U\left(P_2, f, \alpha\right)$$

Por tanto

$$L\left(P_1, f, \alpha\right) \leq U\left(P_2, f, \alpha\right) \tag{6.1.11}$$

Conservando P_2 *fijo, y tomando el sup sobre todo* P_1, (6.1.11) *da*

$$\underline{\int} f d\alpha \leq U\left(P_2, f, \alpha\right). \tag{6.1.12}$$

El teorema queda demostrado tomando el ínf sobre todo P_2 en (6.1.12).

Teorema 6.3 $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a, b]$ *si y solo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una partición* P *tal que*

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon. \tag{6.1.13}$$

Demostración: *Para cada* P *tenemos*

$$L(P, f, \alpha) \leq \underline{\int} f d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha \leq U(P, f, \alpha).$$

Asi pues, (6.1.13) *implica*

$$0 \leq \overline{\int} f d\alpha - \underline{\int} f d\alpha < \varepsilon.$$

Por tanto, si (6.1.13) *se satisface para todo* $\varepsilon > 0$, *tenemos*

$$\overline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d\alpha$$

esto es, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Inversamente, supongamos que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y sea* $\varepsilon > 0$ *dado. Existen particiones* P_1 *y* P_2 *tales que*

$$U\left(P_2, f, \alpha\right) - \int f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.1.14}$$

$$\int f d\alpha - L\left(P_1, f, \alpha\right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.1.15}$$

Elijamos P *como refinamiento común de* P_1 *y* P_2. *El Teorema 6.1 juntamente con* (6.1.14) *y* (6.1.15) *demuestra que*

$$U(P, f, \alpha) \leq U\left(P_2, f, \alpha\right) < \int f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L\left(P_1, f, \alpha\right) + \varepsilon \leq L(P, f, \alpha) + \varepsilon$$

de modo que se cumple (6.1.13) *para esta partición* P.

El Teorema 6.3 proporciona un criterio para la integrabilidad muy conveniente. Antes de aplicarlo se establecerán algunos hechos muy relacionados con este.

Teorema 6.4

(a) *Si se cumple* (6.1.13) *para alguna* P *y algún* ε, *entonces* (6.1.13) *se cumple también (con el mismo* ε*) para cada refinamiento de* P.

(b) *Si se cumple* (6.1.13) *para una* $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *y si* s_i, t_i *son puntos arbitrarios en* $[x_{i-1}, x_i]$, *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \left|f\left(s_i\right) - f\left(t_i\right)\right| \Delta\alpha_i < \varepsilon.$$

(c) *Si* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y la hipótesis de (b) se cumple, entonces*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha\right| < \varepsilon.$$

Demostración: *El Teorema 6.1 implica (a). Debido a las suposiciones hechas en (b), se tiene que* $f\left(s_i\right)$ *y* $f\left(t_i\right)$ *están en* $[m_i, M_i]$, *así que* $|\ f\left(s_i\right) - f\left(t_i\right) | \leq M_i - m_i$. *Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \left|f\left(s_i\right) - f\left(t_i\right)\right| \Delta\alpha_i \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

lo que demuestra (b). Las desigualdades evidentes

$$L(P, f, \alpha) \leq \sum f\left(t_i\right) \Delta\alpha_i \leq U(P, f, \alpha)$$

y

$$L(P, f, \alpha) \leq \int f d\alpha \leq U(P, f, \alpha)$$

demuestran (c).

Teorema 6.5 *Si f es continua sobre $[a,b]$ entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a,b]$.*

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado, y elijamos $\eta > 0$ tal que*

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\eta < \varepsilon.$$

Como f es uniformemente continua en $[a,b]$ (Teorema 4.12), existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(t)| < \eta \tag{6.1.16}$$

si $|x - t| < \delta$ y $x \in [a,b], t \in [a,b]$.

Si P es cualquier partición de $[a,b]$ tal que $\Delta x_i < \delta$. Entonces, (6.1.16) *implica*

$$M_i - m_i \leq \eta \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6.1.17}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i \\ &\leq \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \eta[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon \end{aligned}$$

Por el Teorema 6.3, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Teorema 6.6 *Si f es monótona en $[a,b]$ y α es continua en $[a,b]$, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. (Supondremos, naturalmente, también que α es monótona.)*

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Para cada entero positivo n, elijamos una partición P tal que*

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Lo que es posible, pues α es continuo (Teorema 4.15).

Supondremos que f es monótona creciente (la demostración es análoga en el otro caso). Entonces

$$M_i = f(x_i), \quad m_i = f(x_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

de modo que

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) =& \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ =& \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \cdot [f(b) - f(a)] < \varepsilon \end{aligned}$$

si se toma n suficientemente grande. Por el Teorema 6.3 $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Teorema 6.7 *Supóngase que f es acotada sobre $[a,b]$ tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad sobre $[a,b]$, y α es continua en cada punto para el cual f es discontinua. Entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Hágase $M = \sup|f(x)|$, y sea E el conjunto de puntos en los cuales f es discontinua. Como E es finito y α es continua en cada punto de E, se puede cubrir E con un número finito de intervalos ajenos $[u_j, v_j] \subset [a, b]$ tales que la suma de las diferencias correspondientes $\alpha(v_j) - \alpha(u_j)$ sea menor que ε. Además, pueden reemplazarse estos intervalos de tal manera que cada punto de $E \cap (a, b)$ esté en el interior de algún $[u_j, v_j]$.*

Quítense los segmentos (u_j, v_j) de $[a, b]$. El conjunto sobrante K es compacto. En consecuencia f es uniformemente continua sobre K, y existe $\delta > 0$ tal que $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ si $s \in K, t \in K, |s - t| < \delta$.

Ahora se forma una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, como sigue: cada u_j se encuentra en P. Cada v_j se encuentra en P. Ningún punto de cualquier segmento (u_j, v_j) se encuentra en P. Si x_{i-1} no es uno de los u_j, entonces $\Delta x_i < \delta$.

Nótese que $M_i - m_i \leq 2M$ para cada i, y que $M_i - m_i \leq \varepsilon$ a menos que x_{i-1} sea uno de los u_j. En consecuencia, de la misma forma que en la demostración del Teorema 6.5,

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq [\alpha(b) - \alpha(a)]\varepsilon + 2M\varepsilon$$

Como ε es arbitrario, el Teorema 6.3 muestra que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Nota: Si f y α tienen un punto común de discontinuidad, entonces f no debe estar necesariamente en $\mathcal{R}(\alpha)$. Esto se muestra en el Ejercicio 3.

Teorema 6.8 *Supongamos que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b], m \leq f \leq M$, ϕ es continua en $[m, M]$, y $h(x) = \phi(f(x))$ en $[a, b]$. Entonces, $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$.*

Demostración: *Elijamos $\varepsilon > 0$. Como ϕ es uniformemente continua en $[m, M]$, existe $\delta > 0$, tal que $\delta < \varepsilon$ y $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$ si $|s - t| \leq \delta$ y $s, t \in [m, M]$.*

Como $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, hay una partición $P = \{x_1, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, tal que

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \delta^2 \tag{6.1.18}$$

Consideremos M_i y m_i con el mismo significado que en la Definición 6.1 y sean M_i^*, m_i^* los números análogos para h. Dividamos los números $1, \ldots, n$ en dos clases: $i \in A$ si $M_i - m_i < \delta$; $i \in B$ si $M_i - m_i \geq \delta$.

Para $i \in A$, la elección de δ muestra que $M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon$.

Para $i \in B, M_i^* - m_i^* \leq 2K$, siendo $K = \sup|\phi(t)|$ y $m \leq t \leq M$. Por (6.1.18), tenemos

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i < \delta^2 \tag{6.1.19}$$

de modo que $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$. Se deduce que

$$\begin{aligned} U(P, h, \alpha) - L(P, h, \alpha) &= \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta\alpha_i \\ &\leq \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K] \end{aligned}$$

Como ε era arbitrario, el Teorema 6.3 implica que $h \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Observación: Este teorema sugiere la pregunta: ¿Qué funciones son integrables según Riemann? La contestación figura en el Teorema 11.33(b).

6.2 Propiedades de la integral

Teorema 6.9

(a) *Si* $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y* $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a,b]$,

$$f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$$

$cf \in \mathcal{R}(\alpha)$ *para toda constante* c, *y*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha,$$
$$\int_a^b cf d\alpha = c\int_a^b f d\alpha.$$

(b) *Si* $f_1(x) \leq f_2(x)$ *en* $[a,b]$,

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha.$$

(c) *Si* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a,b]$ *y* $a < c < b$, *entonces* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a,c]$ *y en* $[c,b]$ *y*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

(d) *Si* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a,b]$ *y* $|f(x)| \leq M$ *en* $[a,b]$,

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

(e) *Si* $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ *y* $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$, *entonces* $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *y*

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2;$$

si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y* c *es una constante positiva, será* $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ *y*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c\int_a^b f d\alpha$$

Demostración: *Si* $f = f_1 + f_2$ *y* P *es alguna partición de* $[a,b]$, *tenemos que*

$$L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \tag{6.2.1}$$
$$\leq U(P, f, \alpha) \leq U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha) \tag{6.2.2}$$

Si $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y* $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$, *sea* $\varepsilon > 0$ *dado. Existen particiones* P_j $(j = 1,2)$, *tales que*

$$U(P_j, f_j, \alpha) - L(P_j, f_j, \alpha) < \varepsilon$$

Esas desigualdades subsisten si se sustituyen P_1 *y* P_2 *por su refinamiento común* P. *Entonces* (6.2.1)

V. Osores

implica

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<2\varepsilon$$

lo que demuestra que $f\in\mathcal{R}(\alpha)$.

Con este mismo P, *tenemos*

$$U(P,f_j,\alpha)<\int f_j d\alpha+\varepsilon \quad (j=1,2);$$

por lo que (6.2.1) *implica*

$$\int f d\alpha \leq U(P,f,\alpha)<\int f_1 d\alpha+\int f_2 d\alpha+2\varepsilon$$

Como ε *era arbitrario, deducimos que*

$$\int f d\alpha \leq \int f_1 d\alpha+\int f_2 d\alpha. \tag{6.2.3}$$

Si sustituimos en (6.2.3) f_1 *y* f_2 *por* $-f_1$ *y* $-f_2$, *se invierte la desigualdad, y queda demostrada la igualdad.*

Las demostraciones de las otras afirmaciones del Teorema 6.9 son tan parecidas que omitimos los detalles. En el apartado (c) podemos limitarnos pasando a refinamientos a las particiones que contienen al punto c, al aproximar $\int f d\alpha$.

Teorema 6.10 *Si* $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ *y* $g\in\mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a,b]$,
(a) $fg\in\mathcal{R}(\alpha)$
(b) $|f|\in\mathcal{R}(\alpha)$ *y* $\left|\int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f| d\alpha.$

Demostración: *Si tomamos* $\phi(t)=t^2$, *el Teorema 6.8 demuestra que* $f^2\in\mathcal{R}(\alpha)$ *si* $f\in\mathcal{R}(\alpha)$. *La identidad*

$$4fg=(f+g)^2-(f-g)^2$$

completa la demostración de (a).

Si tomamos $\phi(t)=|t|$, *el Teorema 6.8 demuestra, de igual modo, que* $|f|\in\mathcal{R}(\alpha)$. *Elijamos* $c=\pm1$, *de forma que*

$$c\int f d\alpha \geq 0$$

Será

$$\left|\int f d\alpha\right| = c\int f d\alpha=\int cf d\alpha \leq \int |f| d\alpha$$

pues $cf\leq |f|$.

Definición 6.4 *La función escalón unitario* I *se define como*

$$I(x)=\begin{cases}0 & (x\leq 0),\\ 1 & (x>0).\end{cases}$$

Teorema 6.11 *Si $a < s < b$, f es acotada sobre $[a,b]$, f es continua en s, y $\alpha(x) = I(x-s)$, entonces*

$$\int_a^b f d\alpha = f(s).$$

Demostración: *Considérense particiones $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, donde $x_0 = a$, y $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Entonces*

$$U(P,f,\alpha) = M_2, \quad L(P,f,\alpha) = m_2$$

Debido a que f es continua en s, se ve que M_2 y m_2 converge hacia $f(s)$ cuando $x_2 \to s$.

Teorema 6.12 *Supóngase que $c_n \geq 0$ para $1,2,3,\ldots, \Sigma c_n$ converge, $\{s_n\}$ es una sucesión de puntos distintos en (a,b), y*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I\left(x - s_n\right) \tag{6.2.4}$$

Sea f continua sobre $[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f\left(s_n\right) \tag{6.2.5}$$

Demostración: *La prueba de comparación muestra que la serie (6.2.4) converge para cada x. Su suma $\alpha(x)$ es evidentemente monótona y $\alpha(a) = 0$, $\alpha(b) = \Sigma c_n$.*

Sea $\varepsilon > 0$ conocido, y elíjase N de manera que

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$$

Haciendo

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I\left(x - s_n\right), \quad \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I\left(x - s_n\right)$$

De los Teoremas 6.9 y 6.11 se tiene

$$\int_a^b f d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f\left(s_n\right) \tag{6.2.6}$$

Como $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$, entonces

$$\left|\int_a^b f d\alpha_2\right| \leq M\varepsilon \tag{6.2.7}$$

donde $M = \sup|f(x)|$. Debido a que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, se deduce de (6.2.6) y (6.2.7) que

$$\left|\int_a^b f d\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f\left(s_n\right)\right| \leq M\varepsilon \tag{6.2.8}$$

Si se hace $N \to \infty$, se obtiene (6.2.5).

Teorema 6.13 *Si se supone que α crece monótonamente y $\alpha' \in \mathcal{R}$ sobre $[a,b]$. Sea f una función real acotada sobre $[a,b]$.*
Entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ si y solo si $f\alpha' \in \mathcal{R}$. En este caso

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado y aplíquese el Teorema 6.3 a α': Existe una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ tal que*

$$U\left(P, \alpha'\right) - L\left(P, \alpha'\right) < \varepsilon \tag{6.2.9}$$

El teorema del valor medio suministra puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que

$$\Delta\alpha_i = \alpha'\left(t_i\right)\Delta x_i$$

para $i = 1, \ldots, n$. Si $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha'\left(s_i\right) - \alpha'\left(t_i\right)\right|\Delta x_i < \varepsilon, \tag{6.2.10}$$

de (6.2.9) y el Teorema 6.4(b). Hacer ahora $M = \sup|f(x)|$. Ya que

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\alpha'\left(t_i\right)\Delta x_i$$

y se deduce de (6.2.10) que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\alpha'\left(s_i\right)\Delta x_i\right| \leq M\varepsilon. \tag{6.2.11}$$

En particular,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\Delta\alpha_i \leq U\left(P, f\alpha'\right) + M\varepsilon$$

para todas las elecciones de $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, de manera que

$$U(P, f, \alpha) \leq U\left(P, f\alpha'\right) + M\varepsilon.$$

De (6.2.11), y con el mismo argumento se obtiene

$$U\left(P, f\alpha'\right) \leq U(P, f, \alpha) + M\varepsilon.$$

Entonces

$$\left|U(P, f, \alpha) - U\left(P, f\alpha'\right)\right| \leq M\varepsilon. \tag{6.2.12}$$

Ahora nótese que, (6.2.9) sigue siendo cierto si P se reemplaza por cualquier refinamiento. De aquí que (6.2.12) sigue siendo también cierto. Se concluye que

$$\left|\overline{\int_a^b} f d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx\right| \leq M\varepsilon.$$

Pero ε es arbitrario. En consecuencia,

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx, \tag{6.2.13}$$

para cualquier f acotada. La igualdad de las integrales inferiores se deduce de (6.2.11) *exactamente de la misma forma. De aquí se deduce el teorema.*

Observación: *Los dos teoremas anteriores ilustran la generalidad y flexibilidad que son inherentes en el proceso de integración de Stieltjes. Si α es una función escalón pura [este es el nombre que con frecuencia se da a las funciones de la forma* (6.2.4)*], la integral se reduce a una serie finita o infinita. Si α tiene derivada integrable, la integral se reduce a una integral de Riemann ordinaria. Esto hace posible en la mayoría de los casos estudiar series e integrales en forma simultánea, en vez de separadamente.*

Considérese un ejemplo físico para ilustrar lo anterior. El momento de inercia de un alambre recto de longitud unitaria a través de uno de sus extremos y con respecto a un eje, que forma un ángulo recto con el alambre, es

$$\int_0^1 x^2 dm \tag{6.2.14}$$

en donde $m(x)$ es la masa que se tiene en el intervalo $[0, x]$. Si se considera que el alambre tiene densidad continua ρ, esto es, si $m'(x) = \rho(x)$, entonces (6.2.14) *se vuelve*

$$\int_0^1 x^2 \rho(x) dx \tag{6.2.15}$$

Por otro lado, si el alambre está compuesto de masas m_i concentradas en puntos x_i, (6.2.14) *se convierte en*

$$\sum_i x_i^2 m_i \tag{6.2.16}$$

Es por esto que (6.2.14) *contiene como casos especiales a* (6.2.15) *y* (6.2.16)*, pero también contiene mucho más; por ejemplo, el caso en el cual m es continua, pero no diferenciable en todas partes.*

Teorema 6.14 (cambio de variable) *Supóngase que φ es una función continua estrictamente creciente que mapea un intervalo $[A, B]$ sobre $[a, b]$. Supóngase también que α es monótona creciente sobre $[a, b]$ y $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a, b]$. Si se define β y g sobre $[A, B]$ por medio de*

$$\beta(y) = \alpha(\varphi(y)), \quad g(y) = f(\varphi(y)). \tag{6.2.17}$$

Entonces $g \in \mathcal{R}(\beta)$ y

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha. \tag{6.2.18}$$

Demostración: *A cada partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ le corresponde una partición $Q = \{y_0, \ldots, y_n\}$ de $[A, B]$, de tal manera que $x_i = \varphi(y_i)$. Todas las particiones de $[A, B]$ se obtienen de esta forma. Como los valores tomados por f sobre $[x_{i-1}, x_i]$ son exactamente los mismos que los tomados por g sobre $[y_{i-1}, y_i]$, se ve que*

$$U(Q, g, \beta) = U(P, f, \alpha), \quad L(Q, g, \beta) = L(P, f, \alpha) \tag{6.2.19}$$

Debido a que $f \in \mathcal{R}(\alpha), P$ puede elegirse de tal manera que $U(P, f, \alpha)$ y $L(P, f, \alpha)$ estén próximas a $\int f d\alpha$. De aquí (6.2.19) combinada con el Teorema 6.3 muestra que $g \in \mathcal{R}(\beta)$ y que (6.2.18) se cumple. Esto completa la demostración.

Nótese el siguiente caso especial:

Tomando $\alpha(x) = x$. Entonces $\beta = \varphi$. Suponiendo $\varphi' \in \mathcal{R}$ sobre $[A, B]$. Si se aplica el Teorema 6.13 al miembro izquierdo de (6.2.18), se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy. \tag{6.2.20}$$

6.3 Integración y diferenciación

En esta sección continuamos limitándonos a las funciones reales. Demostraremos que la integración y la diferenciación son, en cierto sentido, operaciones inversas.

Teorema 6.15 *Sea $f \in \mathcal{R}$ en $[a, b]$. Para $a \leq x \leq b$, hagamos*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

En estas condiciones, F es continua en $[a, b]$; además, si f es continua en un punto x_0 de $[a, b], F$ es diferenciable en x_0, y

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Demostración: *Como $f \in \mathcal{R}$, es acotada. Supongamos $|f(t)| \leq M$ para $a \leq t \leq b$. Si $a \leq x < y \leq b$, será*

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq M(y - x),$$

por el Teorema 6.9(c) y (d). Dado $\varepsilon > 0$, vemos que

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon,$$

con tal que $|y - x| < \varepsilon/M$. Esto demuestra la continuidad (en realidad la continuidad uniforme) de F.

Supongamos, ahora, que f es continua en x_0. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos $\delta > 0$, tal que

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

si $|t - x_0| < \delta$ y $a \leq t \leq b$. Por tanto, si

$$x_0 - \delta < s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta \quad \text{ y } \quad a \leq s < t \leq b$$

tenemos, por el Teorema 6.9(d)

$$\left|\frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{t - s}\int_s^t [f(u) - f(x_0)]\, du\right| < \varepsilon.$$

Se deduce así, que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Teorema 6.16 (El teorema fundamental del cálculo) *Si $f \in \mathcal{R}$ sobre $[a,b]$ y si existe una función diferenciable F sobre $[a,b]$ tal que $F' = f$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demostración: *Dado $\varepsilon > 0$, elíjase una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, de tal manera que $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$. El teorema del valor medio proporciona los puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ de tal manera que*

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\,\Delta x_i$$

para $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

Y del Teorema 6.4(c) se deduce ahora que

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Por que esto se verifica para cada $\varepsilon > 0$, la demostración queda concluida.

Teorema 6.17 (Integración por partes) *Si F y G son funciones diferenciables sobre $[a,b]$, $F' = f \in \mathcal{R}$, y $G' = g \in \mathcal{R}$. Entonces*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Demostración: *Haciendo $H(x) = F(x)G(x)$ y aplicando el Teorema 6.16 a H y su derivada. Se ve claramente que $H' \in \mathcal{R}$, debido al Teorema 6.10.*

6.4 Integración de funciones vectoriales

Definición 6.5 *Sean $f_1, \ldots, f_k$ funciones reales en $[a,b]$ y $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ la correspondiente aplicación de $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$. Si α es monótona creciente en $[a,b]$, decir que $\boldsymbol{f} \in \mathcal{R}(\alpha)$ significa que $f_j \in \mathcal{R}(\alpha)$ para $j = 1, \ldots, k$. En este caso, definimos*

$$\int_a^b \boldsymbol{f} d\alpha = \left(\int_a^b f_1 d\alpha, \ldots, \int_a^b f_k d\alpha \right)$$

En otras palabras, $\int \boldsymbol{f} d\alpha$ es el punto en $\mathbb{R}^k$ cuya coordenada j-ésima es $\int f_j d\alpha$.

Es claro que los apartados (a), (c) y (e) del Teorema 6.9 son válidos para estas integrales con valores vectoriales; no hacemos más que aplicar los resultados primitivos a cada coordenada. Lo mismo es cierto respecto al Teorema 6.13, 6.15 y 6.16. Como aclaración, enunciamos el análogo al Teorema 6.16.

Teorema 6.18 *Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{F}$ aplican $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$, si $\boldsymbol{f} \in \mathcal{R}$ en $[a,b]$ y $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$, entonces*

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt = \boldsymbol{F}(b) - \boldsymbol{F}(a).$$

El análogo al Teorema 6.10(b) presenta, sin embargo, algún aspecto nuevo, al menos en la demostración:

Teorema 6.19 *Si $\boldsymbol{f}$ aplica $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$ y $\boldsymbol{f} \in \mathcal{R}(\alpha)$ para alguna función monótona creciente α en $[a,b]$, entonces $|\boldsymbol{f}| \in \mathcal{R}(\alpha)$ y*

$$\left|\int_a^b \boldsymbol{f} d\alpha\right| \leq \int_a^b |\boldsymbol{f}| d\alpha \tag{6.4.1}$$

Demostración: *Si $f_1, \ldots, f_k$ son las componentes de $\boldsymbol{f}$,*

$$|\boldsymbol{f}| = \left(f_1^2 + \cdots + f_k^2\right)^{1/2}. \tag{6.4.2}$$

Por el Teorema 6.8, cada una de las funciones f_i^2 pertenece a $\mathcal{R}(\alpha)$, por lo que también su suma. Como x^2 es una función continua de x, el Teorema 4.11 demuestra que la función raíz cuadrada es continua en $[0,M]$, para todo número real M. Si aplicamos una vez más el Teorema 6.8, (6.4.2) *demuestra que $|\boldsymbol{f}| \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

Para probar (6.4.1)*, hagamos $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ donde $y_j = \int f_j d\alpha$. Será $\boldsymbol{y} = \int \boldsymbol{f} d\alpha$, y*

$$|\boldsymbol{y}|^2 = \sum y_i^2 = \sum y_j \int f_j d\alpha = \int \left(\sum y_j f_j\right) d\alpha.$$

Por la desigualdad de Schwarz,

$$\sum y_j f_j(t) \leq |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{f}(t)| \quad (a \leq t \leq b) \tag{6.4.3}$$

por lo que el Teorema 6.9(b) implica

$$|\boldsymbol{y}|^2 \leq |\boldsymbol{y}| \int |\boldsymbol{f}| d\alpha \tag{6.4.4}$$

Si $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, (6.4.1) *es trivial. Si $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, la división de* (6.4.4) *por $|\boldsymbol{y}|$ da* (6.4.1).

6.5 Curvas rectificables

Terminamos este capítulo con un tema, de interés en geometría, que proporciona una aplicación de algo de la teoría precedente. El caso $k = 2$ (esto es, el caso de las curvas planas) es de importancia considerable en el estudio de las funciones analíticas de variable compleja.

Definición 6.6 *Una aplicación continua γ de un intervalo $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$ se llama curva en $\mathbb{R}^k$. Para hacer notar el intervalo del parámetro $[a,b]$, se dice también que γ es una curva sobre $[a,b]$.*
Si γ es uno-a-uno, γ se llama arco.
Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, se dice que es una curva cerrada.

Debe observarse que se ha definido una curva como una aplicación, no como un conjunto de puntos. Por supuesto que cada curva γ en $\mathbb{R}^k$ tiene asociado un subconjunto de $\mathbb{R}^k$, es decir el rango de γ, pero que diferentes curvas pueden tener el mismo rango.

A cada partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ y a toda curva γ sobre $[a, b]$ se le asocia el número

$$\Lambda(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} \left| \gamma\left(x_i\right) - \gamma\left(x_{i-1}\right) \right| .$$

El término i-ésimo en esta suma es la distancia (en $\mathbb{R}^k$) entre los puntos $\gamma\left(x_{i-1}\right)$ y $\gamma\left(x_i\right)$. En consecuencia $\Lambda(P, \gamma)$ es la longitud de una trayectoria poligonal con vértices en $\gamma\left(x_0\right), \gamma\left(x_1\right), \ldots, \gamma\left(x_n\right)$, conservando este orden. Conforme la partición se hace más fina, este polígono se aproxima al rango de γ cada vez más. Esto hace razonable definir la longitud de γ como

$$\Lambda(\gamma) = \sup \Lambda(P, \gamma)$$

donde el supremum se toma sobre todas las particiones de $[a, b]$.

Si $\Lambda(\gamma) < \infty$, se dice que γ es rectificable.

En algunos casos, $\Lambda(\gamma)$ se da como una integral de Riemann. Se demostrará esto para curvas continuamente diferenciables, es decir, para curvas γ cuya derivada γ' es continua.

Teorema 6.20 *Si γ' es continua sobre $[a, b]$, entonces γ es rectificable, y*

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \left| \gamma'(t) \right| dt$$

Demostración: *Si $a \leq x_{i-1} < x_i \leq b$, entonces*

$$\left| \gamma\left(x_i\right) - \gamma\left(x_{i-1}\right) \right| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \gamma'(t) \right| dt.$$

Por consiguiente

$$\Lambda(P, \gamma) \leq \int_a^b \left| \gamma'(t) \right| dt.$$

para cada partición P de $[a, b]$. En consecuencia,

$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b \left| \gamma'(t) \right| dt.$$

Para demostrar la desigualdad opuesta, sea $\varepsilon > 0$ dado. Como γ' es uniformemente continua sobre $[a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \gamma'(s) - \gamma'(t) \right| < \varepsilon \text{ si } |s - t| < \delta.$$

Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$, con $\Delta x_i < \delta$ para toda i. Si $x_{i-1} \leq t \leq x_i$, se deduce que

$$\left| \gamma'(t) \right| \leq \left| \gamma'\left(x_i\right) \right| + \varepsilon.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\gamma'(t)\right|dt &\leq \left|\gamma'\left(x_i\right)\right|\Delta x_i+\varepsilon\Delta x_i\\ &=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\gamma'(t)+\gamma'\left(x_i\right)-\gamma'(t)\right]dt\right|+\varepsilon\Delta x_i\\ &\leq\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\gamma'(t)dt\right|+\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\gamma'\left(x_i\right)-\gamma'(t)\right]dt\right|+\varepsilon\Delta x_i\\ &\leq\left|\gamma\left(x_i\right)-\gamma\left(x_{i-1}\right)\right|+2\varepsilon\Delta x_i.\end{aligned}$$

Si se adicionan estas desigualdades, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_a^b\left|\gamma'(t)\right|dt &\leq \Lambda(P,\gamma)+2\varepsilon(b-a)\\ &\leq\Lambda(\gamma)+2\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Debido a que ε era arbitrario,

$$\int_a^b\left|\gamma'(t)\right|dt\leq\Lambda(\gamma).$$

Esto completa la demostración.

6.6 Ejercicios

1. Suponer que α es creciente en $[a,b]; a\leq x_0\leq b; \alpha$ es continua en $x_0; f\left(x_0\right)=1$, y $f(x)=0$ si $x\neq x_0$. Demostrar que $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ y que $\displaystyle\int f d\alpha=0$.

2. Suponer que $f\geq 0; f$ es continua en $[a,b]$, y $\int_a^b f(x)dx=0$. Demostrar que $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$. (Comparar con el Ejercicio 1.)

3. Definir tres funciones β_1,β_2,β_3 como sigue: $\beta_j(x)=0$ si $x<0; \beta_j(x)=1$ si $x>0$ para $j=1,2,3$; y $\beta_1(0)=0$; $\beta_2(0)=1$; $\beta_3(0)=\frac{1}{2}$. Sea f una función acotada en $[-1,1]$.

   (a) Demostrar que $f\in\mathcal{R}\left(\beta_1\right)$ si, y solo si $f(0+)=f(0)$, y que en este caso
   $$\int f d\beta_1=f(0).$$

   (b) Plantear y demostrar un resultado similar para β_2.

   (c) Demostrar que $f\in\mathcal{R}\left(\beta_3\right)$ si, y solo si f es continua en 0 .

   (d) Si f es continua en 0 , demostrar que
   $$\int f d\beta_1=\int f d\beta_2=\int f d\beta_3=f(0).$$

4. Si $f(x)=0$ para todo número irracional x, y $f(x)=1$ para todo racional x, demostrar que $f\notin\mathcal{R}$ en $[a,b]$ para un $a<b$.

5. Supóngase que f es una función real acotada sobre $[a, b]$, y que $f^2 \in \mathcal{R}$ sobre $[a, b]$. ¿Se puede deducir que $f \in \mathcal{R}$? Si se supone que $f^3 \in \mathcal{R}$, ¿cambia la respuesta?

6. Sea el conjunto de Cantor P construido en la sección 2.44. Sea f una función real acotada sobre $[0, 1]$ continua en cada punto que esté fuera de P. Demostrar que $f \in \mathcal{R}$ sobre $[0, 1]$.
   Sugerencia: P puede cubrirse con un número finito de segmentos cuya longitud total pueda hacerse tan pequeña como se desee. Proceder de la misma forma que en el Teorema 6.7.

7. Supóngase que f es una función real definida sobre $(0, 1]$ y que $f \in \mathcal{R}$ sobre $[c, 1]$ para cada $c > 0$. Se define
$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{c \to 0} \int_c^1 f(x)dx$$
   si el limite existe (y es finito).

   (a) Si $f \in \mathcal{R}$ sobre $[0, 1]$, mostrar que esta definición de la integral coincide con la definición antigua.

   (b) Construir una función f tal que el límite anterior exista, aunque no exista cuando $|f|$ se reemplace por f.

8. Supóngase que $f \in \mathcal{R}$ sobre $[a, b]$ para cada $b > a$ con a fija. Se define
$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$
   si el límite existe (y es finito). En este caso se dice que la integral de la izquierda converge. Si ésta también converge después de haber reemplazado f por $|f|$, entonces se dice que converge absolutamente.

   Supóngase ahora que $f(x) \geq 0$ y que f es monótona decreciente sobre $[1, \infty)$. Demostrar que
$$\int_1^\infty f(x)dx$$
   converge si, y solo si
$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$
   converge. (Este es el llamado "criterio de la integral" para la convergencia de series.)

9. Mostrar que algunas veces puede aplicarse la integración por partes a las integrales "impropias" que se definieron en los Ejercicios 7 y 8 . (Formular un teorema estableciendo las hipótesis apropiadas y demostrarlo.) Por ejemplo mostrar que
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{(1+x)^2}dx$$
   Mostrar que una de estas integrales converge absolutamente, pero la otra no.

10. Sean p y q dos números reales positivos tales que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Demostrar lo siguiente:

(a) Si $u \geq 0$ y $v \geq 0$, entonces

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

La igualdad es cierta si, y solo si $u^p = v^q$.

(b) Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, $g \in \mathcal{R}(\alpha)$, $f \geq 0$, $g \geq 0$, y

$$\int_a^b f^p d\alpha = 1 = \int_a^b g^q d\alpha,$$

entonces

$$\int_a^b fg d\alpha \leq 1.$$

(c) Si f y g son funciones complejas en $\mathcal{R}(\alpha)$, entonces

$$\left| \int_a^b fg d\alpha \right| \leq \left\{ \int_a^b |f|^p d\alpha \right\}^{1/p} \left\{ \int_a^b |g|^q d\alpha \right\}^{1/q}$$

Esta es la desigualdad de Hölder. Cuando $p = q = 2$, se llama comúnmente desigualdad de Schwarz. (Nótese que el Teorema 1.11 es un caso muy especial de ésta.)

(d) Mostrar que la desigualdad de Hölder también es verdadera para las integrales "impropias" que se describieron en los Ejercicios 7 y 8.

11. Sea α una función creciente fija sobre $[a, b]$. Si $u \in \mathcal{R}(\alpha)$ se define

$$\|u\|_2 = \left\{ \int_a^b |u|^2 d\alpha \right\}^{1/2}$$

Supóngase que $f, g, h \in \mathcal{R}(\alpha)$, y demuéstrese la desigualdad del triángulo

$$\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$$

como una consecuencia de la desigualdad de Schwarz, de la misma manera que en la demostración del Teorema 1.12.

12. Con las notaciones del Ejercicio 11, supóngase que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ y $\varepsilon > 0$. Demostrar que existe una función continua g sobre $[a, b]$ tal que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

Sugerencia: Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición adecuada de $[a, b], y$ definase

$$g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f(x_{i-1}) + \frac{t - x_{i-1}}{\Delta x_i} f(x_i)$$

si $x_{i-1} \leq t \leq x_i$.

13. Si se define

$$f(x) = \int_x^{x+1} \operatorname{sen}\left(t^2\right) dt.$$

(a) Demostrar que $|f(x)| < 1/x$ si $x > 0$.

Sugerencia: Hacer $t^2 = u$ e integrar por partes, para mostrar que $f(x)$ es igual a

$$\frac{\cos\left(x^2\right)}{2x} - \frac{\cos\left[(x+1)^2\right]}{2(x+1)} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{4u^{3/2}} du$$

Reemplazar $\cos u$ por -1.

(b) Demostrar que

$$2xf(x) = \cos\left(x^2\right) - \cos\left[(x+1)^2\right] + r(x)$$

en donde $|r(x)| < c/x$ y c es una constante.

(c) Encontrar los límites superior e inferior de $xf(x)$, cuando $x \to \infty$.

(d) ¿Converge $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(t^2\right) dt$?

14. Si

$$f(x) = \int_x^{x+1} \operatorname{sen}\left(e^t\right) dt.$$

Mostrar que

$$e^x |f(x)| < 2$$

y que

$$e^x f(x) = \cos\left(e^x\right) - e^{-1}\cos\left(e^{x+1}\right) + r(x)$$

en donde $|r(x)| < Ce^{-x}$, para alguna constante C.

15. Supóngase que f es real, y continuamente diferenciable sobre $[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$, y

$$\int_a^b f^2(x)dx = 1$$

Demostrar que

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$$

y también que

$$\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x)dx > \frac{1}{4}.$$

16. Para $1 < s < \infty$, se define

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(Ésta es la función zeta de Riemann, que es muy importante en el estudio de la distribución de los números primos.) Demostrar que

(a) $\zeta(s) = s\displaystyle\int_1^\infty \frac{[x]}{x^{s+1}}dx$

y que

(b) $\zeta(s) = \dfrac{s}{s-1} - s\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$, en donde $[x]$ representa el entero mayor $\leq x$.

Demostrar que la integral del apartado (b) converge para todo $s > 0$.

Sugerencia: Para demostrar (a), calcular la diferencia entre la integral sobre $[1, N]$ y la N-ésima suma parcial de la serie que define a $\zeta(s)$.

17. Supóngase que α crece monótonamente sobre $[a, b]$, que g es continua, y $g(x) = G'(x)$ para $a \leq x \leq b$. Demostrar que

$$\int_a^b \alpha(x)g(x)dx = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \int_a^b G d\alpha.$$

Sugerencia: Tomar g real, sin perder generalidad. Dado $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, elegir $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ de tal manera que $g(t_i)\Delta x_i = G(x_i) - G(x_{i-1})$. Mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i) g(t_i) \Delta x_i = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \sum_{i=1}^{n} G(x_{i-1}) \Delta\alpha_i.$$

18. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, curvas en el plano complejo, definidas en $[0, 2\pi]$ por

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad \gamma_2(t) = e^{2it}, \quad \gamma_3(t) = e^{2\pi it \operatorname{sen}(1/t)}.$$

Demostrar que estas tres curvas tienen el mismo rango que γ_1 y γ_2 son rectificables, que la longitud de γ_1 es 2π, que la de γ_2 es 4π y que γ_3 no es rectificable.

19. Sea γ_1 una curva en $\mathbb{R}^k$, definida en $[a, b]$; sea ϕ un mapeo $1-1$ continuo de $[c, d]$ sobre $[a, b]$, tal que $\phi(c) = a$, y definamos $\gamma_2(s) = \gamma_1(\phi(s))$. Demostrar que γ_2 es un arco, una curva cerrada simple o una curva rectificable, si y solo si es cierto lo mismo para γ_1. Demostrar que γ_2 y γ_1 tienen la misma longitud.

CAPÍTULO 7

Sucesiones y series de funciones

En el presente capítulo limitaremos nuestra atención a las funciones de variables complejas (en ellas incluiremos, naturalmente, las de valores reales) aunque muchos de los teoremas y demostraciones que siguen se amplian sin dificultad a las funciones vectoriales, e incluso a los mapeos en espacios métricos en general. Elegimos el trabajar en este marco reducido para fijar la atención en los aspectos más importantes de los problemas que se presentan cuando se varía el orden en los procesos de límites.

7.1 Discusión del problema principal

Definición 7.1 *Supongamos que $\{f_n\}$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$, es una sucesión de funciones definidas en un conjunto E, y que la sucesión de números $\{f_n(x)\}$ converge para todo $x \in E$. Podemos definir una función f por*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in E). \tag{7.1.1}$$

En estas circunstancias, decimos que $\{f_n\}$ converge en E y que f es el límite o la función límite, de $\{f_n\}$. A veces, utilizaremos una terminología más expresiva y diremos que «$\{f_n\}$ converge hacia f puntualmente en E», o bien, «en cada punto de E», si se cumple (7.1.1). Del mismo modo, si $\Sigma f_n(x)$ converge para todo $x \in E$ y definimos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in E) \tag{7.1.2}$$

a la función f se le llama suma de la serie Σf_n.

El principal problema que se presenta es el de determinar qué propiedades de las funciones se conservan con las operaciones de límites (7.1.1) y (7.1.2). Por ejemplo, si las funciones f_n son continuas, o diferenciables o integrables, ¿sucede lo mismo con la función límite? ¿Cuáles son las relaciones entre f_n' y f' o entre las integrales de f_n y la de f?

Decir que f es continua en x significa que

$$\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$$

Por tanto, preguntar si el límite de una sucesión de funciones continuas es continuo, es lo mismo que preguntar si

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t) \tag{7.1.3}$$

esto es, si no importa el orden en que se aplica el proceso de límites. En el primer miembro de (7.1.3), hacemos primero $n \to \infty$, y luego, $t \to x$; en el segundo, primero $t \to x$, y luego, $n \to \infty$.

Vamos a demostrar, por medio de ejemplos que, en general, no se puede variar el orden en los procesos de límites sin afectar al resultado. Después demostraremos que, en ciertas condiciones, no tiene importancia este orden.

El primer ejemplo, y el más sencillo, se refiere a una «sucesión doble».

Ejemplo 7.1 *Para $m = 1, 2, 3, \ldots$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$ sea*

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n}$$

Para todo n prefijado, será

$$\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1. \tag{7.1.4}$$

Por otro lado, para todo m prefijado

$$\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0,$$

de modo que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0. \tag{7.1.5}$$

Ejemplo 7.2 *Sea*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (x \text{ real; } n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y consideremos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \tag{7.1.6}$$

Como $f_n(0) = 0$, tenemos que $f(0) = 0$. Para $x \neq 0$, la última serie de (7.1.6) es una serie geométrica convergente con suma $1 + x^2$ (Teorema 3.16). Por tanto,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 + x^2 & (x \neq 0) \end{cases} \tag{7.1.7}$$

de forma que una serie convergente de funciones continuas puede tener una suma discontinua.

Ejemplo 7.3 *Para $m = 1, 2, 3, \ldots$, hagamos*

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$$

Cuando $m!x$ es entero, $f_m(x) = 1$. Para todo otro valor de x, $f_m(x) = 0$. Sea ahora

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

Para x irracional, $f_m(x) = 0$ para todo m, por lo cual $f(x) = 0$. Para x racional, es decir, $x = p/q$, siendo p y q enteros, vemos que $m!x$ es entero si $m \geq q$, de modo que $f(x) = 1$. Por tanto

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n} = \begin{cases} 0 & (x \text{ irracional }) \\ 1 & (x \text{ racional }) \end{cases} \tag{8}$$

Hemos obtenido, así, una función límite discontinua en todas partes que no es integrable, según Riemann (Ejer. 4, Cap. 6).

Ejemplo 7.4 *Sea*

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}} \quad (x \text{ real}, n = 1, 2, 3, \dots) \tag{7.1.8}$$

y

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Entonces, $f'(x) = 0$, y

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$$

de modo que $\{f_n'\}$ no converge hacia f'. Por ejemplo,

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty$$

cuando $n \to \infty$, mientras que $f'(0) = 0$.

Ejemplo 7.5 *Sea*

$$f_n(x) = n^2 x\left(1 - x^2\right)^n \quad (0 \leq x \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots) \tag{7.1.9}$$

Para $0 < x \leq 1$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

por el Teorema 3.11(d). Como $f_n(0) = 0$, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \tag{7.1.10}$$

Un cálculo sencillo demuestra que

$$\int_0^1 x\left(1 - x^2\right)^n dx = \frac{1}{2n+2}.$$

Así, pues, a pesar de (7.1.10)

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^2}{2n+2} \to +\infty$$

cuando $n \to \infty$.

Si sustituimos en (7.1.9) n^2 *por* n, *se cumple todavía* (7.1.10), *pero, tenemos*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

cuando

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx = 0$$

Así, pues, el límite de la integral no es necesariamente igual a la integral del límite, aun cuando los dos sean finitos.

Después de estos ejemplos que demuestran que podemos cometer un error si se invierte el orden del proceso de límites descuidadamente, definiremos una nueva forma de convergencia, más severa que la puntual que aparece en la Definición 7.1, que nos permitirá llegar a resultados positivos.

7.2 Convergencia uniforme

Definición 7.2 *Decimos que una sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *con* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *converge uniformemente en* E *hacia una función* f *si para cada* $\varepsilon > 0$ *hay un entero* N *tal que* $n \geq N$ *implica*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{7.2.1}$$

para todo $x \in E$.

Es claro que toda sucesión uniformemente convergente es puntualmente convergente. Concretamente, la diferencia entre los dos conceptos es la siguiente: si $\{f_n\}$ converge puntualmente en E, existe una función f tal que, para todo $\varepsilon > 0$ y cada $x \in E$, hay un entero N, que depende de ε y de x, tal que se cumple (7.2.1) si $n \geq N$; si $\{f_n\}$ converge uniformemente en E, es posible hallar, para cada $\varepsilon > 0$ un entero N tal que lo hace para todo $x \in E$.

Decimos que la serie $\Sigma f_n(x)$ converge uniformemente en E si la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales definidas por

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = s_n(x)$$

converge uniformemente en E.

El criterio de Cauchy sobre convergencia uniforme es el siguiente:

Teorema 7.1 *La sucesión de funciones* $\{f_n\}$, *definida en* E, *converge uniformemente en* E *si y solo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un entero* N *tal que* $m \geq N$; $n \geq N$; $x \in E$ *implica*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{7.2.2}$$

Demostración: *Supongamos que* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* E*, y sea* f *la función límite. Entonces, existe un entero* N *tal que* $n \geq N$ *y* $x \in E$ *implica*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

de modo que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

si $n \geq N$*;* $m \geq N$*, y* $x \in E$.

Inversamente, supongamos que se cumple la condición de Cauchy. Por el Teorema 3.7, la sucesión $\{f_n(x)\}$ *converge, para todo* x*, hacia un límite que podemos llamar* $f(x)$*. Así pues, la sucesión* $\{f_n\}$ *converge en* E *hacia* f*. Tenemos que demostrar que la convergencia es uniforme.*

Sea $\varepsilon > 0$ *dado, y elijamos* N *tal que se cumpla (7.2.2). Fijemos* n *y hagamos* $m \to \infty$ *en (7.2.2). Como* $f_m(x) \to f(x)$ *cuando* $m \to \infty$*, esto da*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{7.2.3}$$

para cada $n \geq N$ *y todo* $x \in E$*, lo que completa la demostración.*

El criterio siguiente es útil algunas veces.

Teorema 7.2 *Supongamos*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in E)$$

Hagamos

$$M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Entonces, $f_n \to f$ *uniformemente en* E *si y solo si* $M_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Como esto es consecuencia inmediata de la Definición 7.2, omitimos los detalles de la demostración.

Hay un criterio de convergencia uniforme muy conveniente para las series, debido a Weierstrass:

Teorema 7.3 *Supongamos que* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones definidas en* E*, y supongamos*

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad (x \in E, n = 1, 2, 3, \dots)$$

En estas condiciones, Σf_n *converge uniformemente en* E *si* ΣM_n *converge.*

Obsérvese que no se afirma la inversa (y de hecho, no es cierta).

Demostración: *Si* ΣM_n *converge, para* $\varepsilon > 0$ *arbitrario,*

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\right| \leq \sum_{i=n}^{m} M_i \leq \varepsilon \quad (x \in E)$$

son tal que m *y* n *sean suficientemente grandes. La convergencia uniforme, se deduce del Teorema 7.1.*

7.3 Convergencia uniforme y continuidad

Teorema 7.4 *Supongamas que $f_n \to f$ uniformemente en un conjunto E en un espacio métrico. Sea x un punto de acumulación de E, y supongamos que*

$$\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7.3.1}$$

$\{A_n\}$ convergerá, y

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n. \tag{7.3.2}$$

En otras palabras, la conclusión es que

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t). \tag{7.3.3}$$

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Por la convergencia uniforme de $\{f_n\}$, existe N, tal que $n \geq N$, $m \geq N$ y $t \in E$ implica*

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon. \tag{7.3.4}$$

Haciendo $t \to x$ en (7.3.4), obtenemos

$$|A_n - A_m| \leq \varepsilon$$

para $n \geq N$, $m \geq N$, de modo que $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy y, por tanto, converge, digamos que hacia A.

Ahora,

$$|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|\,. \tag{7.3.5}$$

Elijamos, primeramente n de modo que

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{7.3.6}$$

para todo $t \in E$ (lo que es posible por la convergencia uniforme) y tal que

$$|A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{7.3.7}$$

Entonces, para este n, elijamos una vecindad V de x tal que

$$|f_n(t) - A_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{7.3.8}$$

Si $t \in V \cap E$, $t \neq x$.

Sustituyendo las desigualdades (7.3.6) a (7.3.8) en (7.3.5), vemos que

$$|f(t) - A| \leq \varepsilon$$

siempre que $t \in V \cap E$, $t \neq x$. Lo que equivale a (7.3.2).

Teorema 7.5 *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en E, y si $f_n \to f$ uniformemente en E, f es continua en E.*

Este importantísimo resultado es un corolario inmediato del Teorema 7.4.

El inverso no es cierto; esto es, una sucesión de funciones continuas puede converger en una función continua, aunque la convergencia no sea uniforme. En 7.5 se tiene un ejemplo de ello (para verlo, aplicar el Teorema 7.2. Pero hay casos en los que podemos afirmar el inverso:

Teorema 7.6 *Si K es compacto, y*
(a) $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas sobre K,
(b) $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función continua f sobre K,
(c) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in K, n = 1, 2, 3, \ldots,$
Entonces $f_n \to f$ uniformemente sobre K.

Demostración: *Si se hace $g_n = f_n - f$. Entonces g_n es continua, $g_n \to 0$ puntualmente, y $g_n \geq g_{n+1}$. Se tiene que demostrar ahora que $g_n \to 0$ uniformemente sobre K.*

Dado $\varepsilon > 0$, sea K_n el conjunto de todos los $x \in K$ con $g_n(x) \geq \varepsilon$. Como g_n es continua, K_n es cerrado (véase el Teorema 4.5), por ende también es compacto (véase el Teorema 2.15). Ya que $g_n \geq g_{n+1}$, se tiene $K_n \supset K_{n+1}$. Fijemos $x \in K$. Debido a que $g_n(x) \to 0$, es evidente que $x \notin K_n$ si n es suficientemente grande. Por esto $x \notin \bigcap K_n$. Dicho de otro modo, $\bigcap K_n$ es vacío.

Por lo tanto K_N es vacío para algún N (véase el Teorema 2.16). Con esto se deduce que $0 \leq g_n(x) < \varepsilon$ para todo $x \in K$ y todo $n \geq N$. Esto demuestra el teorema.

Nótese que la compactibilidad es necesaria aquí. Por ejemplo, si

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \quad (0 < x < 1; n = 1, 2, 3, \ldots)$$

entonces $f_n(x) \to 0$ monótonamente en $(0, 1)$, pero la convergencia no es uniforme.

Definición 7.3 *Si X es un espacio métrico, $\mathcal{C}(X)$ representará al conjunto de todas las funciones valuadas en los complejos con dominio X, continuas y acotadas.*

[Nótese que la acotabilidad es redundante si X es compacto (véase el Teorema 4.9). Entonces $\mathcal{C}(X)$ consta de todas las funciones complejas continuas definidas sobre X si X es compacto.]

A cada $f \in \mathcal{C}(X)$ se le asocia su norma suprema

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Como se admite que f es acotada, $\|f\| < \infty$. Es obvio que $\|f\| = 0$ solo si $f(x) = 0$ para cada $x \in X$, es decir, solo si $f = 0$. Si $h = f + g$, entonces

$$|h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

para todo $x \in X$; de aquí que

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Si se define la distancia entre $f \in \mathcal{C}(X)$ y $g \in \mathcal{C}(X)$ como $\|f - g\|$, se deduce que se cumplen los axiomas 2.7 para una métrica.

Entonces se ha vuelto $\mathcal{C}(X)$ un espacio métrico.

El Teorema 7.2 puede volver a redactarse como sigue:

Teorema 7.7 *Una sucesión $\{f_n\}$ converge hacia f con respecto a la métrica de $\mathcal{C}(X)$ si, y solo si $f_n \to f$ uniformemente sobre X.*

De acuerdo con esto, los subconjuntos cerrados de $\mathcal{C}(X)$ se llaman a veces conjuntos uniformemente cerrados, la cerradura de un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X)$ se dice que es cerradura uniforme, y asi sucesivamente.

Teorema 7.8 *La métrica anterior hace de $\mathcal{C}(X)$ un espacio métrico completo.*

Demostración: *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(X)$. Esto quiere decir que a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un N tal que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ si $n \geq N$ y $m \geq N$. Se deduce (por el Teorema 7.1) que hay una función f con dominio X para la cual $\{f_n\}$ converge uniformemente. Y por el Teorema 7.5, f es continua. Además, f es acotada, porque hay un n tal que $|f(x) - f_n(x)| < 1$ para todo $x \in X$, y f_n es acotada.*

Entonces $f \in \mathcal{C}(X)$, y debido a que $f_n \to f$ uniformemente sobre X, se tiene que $\|f - f_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

7.4 Convergencia uniforme e integración

Teorema 7.9 *Sea α monótona creciente sobre $[a,b]$. Supóngase que $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a,b]$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y que $f_n \to f$ uniformemente sobre $[a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a,b]$, y*

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n d\alpha \tag{7.4.1}$$

(La existencia del límite en (7.4.1) es parte de la conclusión.)

Demostración: *Es suficiente demostrarlo para f_n real. Se hace*

$$\varepsilon_n = \sup |f_n(x) - f(x)|, \tag{7.4.2}$$

el supremum se ha tomado sobre $a \leq x \leq b$. Entonces

$$f_n - \varepsilon_n \leq f \leq f_n + \varepsilon_n,$$

de manera que las integrales superior e inferior de f satisfacen (véase la Definición 6.2),

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n)\, d\alpha \leq \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)\, d\alpha. \tag{7.4.3}$$

En consecuencia

$$0 \leq \overline{\int} f d\alpha - \underline{\int} f d\alpha \leq 2\varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Como $\varepsilon_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ *(por el Teorema 7.2), las integrales superior e inferior de* f *son iguales.*

Entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. *Otra aplicación de* (7.4.3) *produce ahora*

$$\left|\int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha\right| \leq \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \tag{7.4.4}$$

Esto implica (7.4.1).

Corolario 7.1 *Si* $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a, b]$, *y si*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

convergiendo la serie uniformemente en $[a, b]$, *entonces*

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

En otras palabras, las series pueden ser integradas término a término.

7.5 Convergencia uniforme y diferenciación

Hemos visto ya, en el Ejemplo 7.4, que la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ no implica nada sobre la sucesión $\{f_n'\}$. Así pues, se necesitan hipótesis más rigurosas para asegurar que $f_n' \to f'$ si $f_n \to f$.

Teorema 7.10 *Supongamos que* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones, diferenciables en* $[a, b]$ *de modo que* $\{f_n(x_0)\}$ *converge para algún punto* x_0 *en* $[a, b]$. *Si* $\{f_n'\}$ *converge uniformemente en* $[a, b]$, *luego* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $[a, b]$ *hacia una función* f, *y*

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) \quad (a \leq x \leq b) \tag{7.5.1}$$

Demostración: *Sea* $\varepsilon > 0$ *dado. Elijamos* N *tal que* $n \geq N, m \geq N$, *implica*

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.5.2}$$

y

$$\left|f_n'(t) - f_m'(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (a \leq t \leq b). \tag{7.5.3}$$

Si aplicamos el teorema del valor medio 5.11 a la función $f_n - f_m$ (7.5.3) *demuestra que,*

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leq \frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.5.4}$$

para cualesquiera x *y* t *en* $[a, b]$, *si* $n \geq N$, $m \geq N$. *La desigualdad*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

implica, por (7.5.2) *y* (7.5.4)*, que*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (a \leq x \leq b, n \geq N, m \geq N)$$

de modo que $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $[a, b]$*. Sea*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Fijemos un punto x *en* $[a, b]$*, y definamos*

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \tag{7.5.5}$$

para $a \leq t \leq b$ *y* $t \neq x$*. Será*

$$\lim_{t\to x} \phi_n(t) = f_n'(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7.5.6}$$

La primera desigualdad de (7.5.4) *demuestra que*

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (n \geq N, m \geq N)$$

de modo que $\{\phi_n\}$ *converge uniformemente, para* $t \neq x$*. Como* $\{f_n\}$ *converge hacia* f*, deducimos de* (7.5.5) *que*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t) \tag{7.5.7}$$

uniformemente para $a \leq t \leq b$ *y* $t \neq x$*.*

Si aplicamos, ahora, el Teorema 7.4 a $\{\phi_n\}$*,* (7.5.6) *y* (7.5.7) *demuestra que*

$$\lim_{t\to x} \phi(t) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

y esta es (7.5.1)*, por la definición de* $\phi(t)$*.*

Observación: *Si además de las hipótesis anteriores, se admite la continuidad de las funciones* f_n'*, se puede dar una demostración mucho más corta de* (7.5.1)*, basada en el Teorema 7.9 y el teorema fundamental del cálculo.*

Teorema 7.11 *Existe una función real continua sobre la recta real que es no diferenciable en ninguna parte.*

Demostración: *Se define*

$$\varphi(x) = |x| \quad (-1 \leq x \leq 1) \tag{7.5.8}$$

y se amplía la definición de $\varphi(x)$ *para toda* x *real pidiendo que*

$$\varphi(x + 2) = \varphi(x). \tag{7.5.9}$$

Entonces, para todo s *y* t*,*

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s - t|. \tag{7.5.10}$$

En particular, φ *es continua sobre* $\mathbb{R}^1$*. Se define*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x). \tag{7.5.11}$$

El Teorema 7.3 muestra que la serie (7.5.11) *converge uniformemente sobre* $\mathbb{R}^1$*, ya que* $0 \leq \varphi \leq 1$*. Por el Teorema 7.5,* f *es continua sobre* $\mathbb{R}^1$*.*

Si ahora se fijan un número real x *y un entero positivo* m *y se hace*

$$\delta_m = \pm\frac{1}{2} \cdot 4^{-m} \tag{7.5.12}$$

donde el signo se elige de tal forma que no esté ningún entero entre $4^m x$ *y* $4^m (x + \delta_m)$*. Esto puede hacerse ya que* $4^m |\delta_m| = \frac{1}{2}$*. Entonces se define*

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n (x + \delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m} \tag{7.5.13}$$

Cuando $n > m$ *entonces* $4^n \delta_m$ *es un entero par, así que* $\gamma_n = 0$*. Cuando* $0 \leq n \leq m$*,* (7.5.10) *implica que* $|\gamma_n| \leq 4^n$*.*

Debido a que $|\gamma_m| = 4^m$*, se concluye*

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \\ &\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n \\ &= \frac{1}{2}(3^m + 1).\end{aligned}$$

Conforme $m \to \infty, \delta_m \to 0$*. Se deduce que* f *no es diferenciable en* x*.*

7.6 Familias equicontinuas de funciones

En el Teorema 3.4 vimos que toda sucesión acotada de números complejos contiene una subsucesión convergente; y se plantea, ahora, la pregunta de si sucede algo similar con las sucesiones de funciones. Para concretar más, definiremos dos clases de acotación.

Definición 7.4 *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones definidas en un conjunto* E*.*
Decimos que $\{f_n\}$ *es acotada puntualmente en* E *si la sucesion* $\{f_n(x)\}$ *es acotada para cada* $x \in E$*, esto es, si existe una función* ϕ *con valores finitos en* E *tal que*

$$|f_n(x)| < \phi(x) \quad (x \in E, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Decimos que $\{f_n\}$ *es uniformemente acotada en* E *si existe un número* M *tal que*

$$|f_n(x)| < M \quad (x \in E, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si $\{f_n\}$ es acotada puntualmente en E y E_1 es un subconjunto numerable de E, es siempre posible hallar una subsucesion $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para todo $x \in E_1$, lo que puede hacerse por el proceso de la diagonal, utilizado en la demostración del Teorema 7.12.

Sin embargo, aún si $\{f_n\}$ es una sucesión uniformemente acotada de funciones continuas en un conjunto compacto E, no es necesaria la existencia de una subsucesion que converja puntualmente en E. En el ejemplo dado a continuación, sería fatigoso demostrarlo con los medios de que disponemos hasta este momento, pero la demostración es muy sencilla si se recurre a un teorema del capítulo 11 (Teoría de Lebesgue).

Ejemplo 7.6 *Sea*

$$f_n(x) = \operatorname{sen} nx \quad (0 \leq x \leq 2\pi, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Supongamos que existe una sucesión $\{n_k\}$ *tal que* $\{\operatorname{sen} n_k x\}$ *converge para todo* $x \in [0, 2\pi]$. *En este caso, debemos tener*

$$\lim_{k\to\infty} (\operatorname{sen} n_k x - \operatorname{sen} n_{k+1} x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

y de aquí

$$\lim_{k\to\infty} (\operatorname{sen} n_k x - \operatorname{sen} n_{k+1} x)^2 = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi) \tag{7.6.1}$$

Por el teorema de Lebesgue, referente a la integración de sucesiones convergentes acotadas (Teorema **??**, (7.6.1) *implica*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} n_k x - \operatorname{sen} n_{k+1} x)^2 \, dx = 0 \tag{7.6.2}$$

Pero un cálculo sencillo muestra que

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} n_k x - \operatorname{sen} n_{k+1} x)^2 \, dx = 2\pi$$

lo que contradice a (7.6.2).

Otra duda que puede plantearse, es si toda sucesión convergente contiene una subsucesión uniformemente convergente. El próximo ejemplo demuestra que no sucede necesariamente así, aun si la sucesión es uniformemente acotada en un conjunto compacto. (El Ejemplo 7.5 demuestra que una sucesión de funciones acotadas puede converger sin ser uniformemente acotada; pero se ve inmediatamente que la convergencia uniforme de una sucesión de funciones acotadas implica la acotación uniforme.)

Ejemplo 7.7 *Sea*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} \quad (0 \leq x \leq 1, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Entonces, $|f_n(x)| \leq 1$, *de modo que* $\{f_n\}$ *es uniformemente acotada en* $[0, 1]$. *Además,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

pero

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

de modo que ninguna subsucesión puede converger uniformemente en $[0, 1]$.

En la siguiente definición, se da el concepto de equicontinuidad que nos es necesario en este punto.

Definición 7.5 *Se dice que una familia $\mathcal{F}$ de funciones complejas f definidas en un conjunto E en un espacio métrico X es equicontinua en E, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

siempre que $d(x, y) < \delta$; $x \in E$; $y \in E$ y $f \in \mathcal{F}$. Aqui, d expresa la métrica de X.

Es claro que todo miembro de una familia equicontinua es uniformemente continua.

La sucesión del Ejemplo 7.7 no es equicontinua.

Los Teoremas 7.13 y 7.14 mostrarán que hay una relación bastante marcada entre la equicontinuidad y la convergencia uniforme de sucesiones de funciones continuas. Pero primero se describirá un proceso de selección que nada tiene que ver con la continuidad.

Teorema 7.12 *Si $\{f_n\}$ es una sucesión puntualmente acotada de funciones complejas sobre un conjunto numerable E, entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para cada $x \in E$.*

Demostración: *Sean $\{x_i\}, i = 1, 2, 3, \ldots$, los puntos de E, ordenados en una sucesión. Como $\{f_n(x_1)\}$ es acotada, existe una subsucesión que se representará por $\{f_{1,k}\}$, tal que $\{f_{1,k}(x_1)\}$ converge cuando $k \to \infty$.*

Considérense ahora las sucesiones $S_1, S_2, S_3, \ldots$, que se representarán por medio del arreglo

$$\begin{array}{llllll} S_1: & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots \\ S_2: & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & \cdots \\ S_3: & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & \cdots \end{array}$$

y que tienen la siguientes propiedades:

(a) S_n es una subsucesión de S_{n-1}, para $n = 2, 3, 4, \ldots$.

(b) $\{f_{n,k}(x_n)\}$ converge, cuando $k \to \infty$ (la acotabilidad de $\{f_n(x_n)\}$ hace posible que S_n pueda elegirse de esta forma);

(c) El orden en el que aparecen las funciones es el mismo en cada sucesión; es decir, si una función precede a otra en S_1, están en la misma relación en cada S_n, hasta que desaparecen una u otra. De aquí que, cuando se pasa una fila del cuadro anterior a la inmediatamente inferior, las funciones pueden transladarse hacia la izquierda, pero nunca hacia la derecha.

Sigamos ahora, la diagonal del arreglo; es decir, considérese la

$$S: f_{1,1} \quad f_{2,2} \quad f_{3,3} \quad f_{4,4} \cdots$$

De (c) se tiene que la sucesión S (excepto posiblemente sus primeros n - 1 términos) es una subsucesión de S_n, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ En consecuencia (b) implica que $\{f_{n,n}(x_i)\}$ converge, cuando $n \to \infty$, para cada $x_i \in E$.

Teorema 7.13 *Si K es un espacio métrico compacto y $f_n \in \mathcal{C}(K)$ para $n = = 1, 2, 3, \ldots,$ y si $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre K, entonces $\{f_n\}$ es equicontinua sobre K.*

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente, hay un entero N tal que*

$$\|f_n - f_N\| < \varepsilon \quad (n > N) \tag{7.6.3}$$

(Véase la Definición 7.3.) Debido a que las funciones continuas son uniformemente continuas sobre conjuntos compactos, hay un $\delta > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon \tag{7.6.4}$$

si $1 \leq i \leq N$ y $d(x, y) < \delta$.

Si $n > N$ y $d(x, y) < \delta$, se deduce que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < 3\varepsilon.$$

Y junto con (7.6.4), queda demostrado el teorema.

Teorema 7.14 *Si K es compacto, $f_n \in \mathcal{C}(K)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots,$ y si $\{f_n\}$ es acotada puntualmente y equicontinua sobre K, entonces*
(a) $\{f_n\}$ es uniformemente acotada sobre K,
(b) $\{f_n\}$ contiene una subsucesión uniformemente convergente.

Demostración: *(a) Sea $\varepsilon > 0$ conocido y elíjase $\delta > 0$, de acuerdo con la Definición 7.5 , de manera que*

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \tag{7.6.5}$$

para todo n, siempre que $d(x, y) < \delta$.

Como K es compacto, hay un número finito de puntos $p_1, \ldots, p_r$ en K tal que para cada $x \in K$ corresponde al menos un p_i con $d(x, p_i) < \delta$. Ya que $\{f_n\}$ es acotada puntualmente, existe $M_i < \infty$ tal que $|f_n(p_i)| < M_i$ para todo n. Si $M = \text{máx}(M_1, \ldots, M_r)$, entonces $|f_n(x)| < M + \varepsilon$ para cada $x \in K$. Esto demuestra (a).

(b) Sea E un subconjunto denso numerable de K. (Véase el Ejercicio 25 del Cap. 2 para la existencia de tal conjunto E.) El Teorema 7.12 muestra que $\{f_n\}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_i}\}$ tal que $\{f_{n_i}(x)\}$ converge para cada $x \in E$.

Haciendo $f_{n_i} = g_i$, con el propósito de simplificar la notación. Se probará que $\{g_i\}$ converge uniformemente sobre K.

Sea $\varepsilon > 0$, y tómese $\delta > 0$ como al inicio de esta demostración. Sea $V(x, \delta)$ el conjunto de todos los $y \in K$ con $d(x, y) < \delta$. Como E es denso en K, y K es compacto, hay un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_m$ en E tales que

$$K \subset V(x_1, \delta) \cup \cdots \cup V(x_m, \delta). \tag{7.6.6}$$

Ya que $\{g_i(x)\}$ converge para cada $x \in E$, hay un entero N tal que

$$|g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \varepsilon \tag{7.6.7}$$

siempre que $i \geq N, j \geq N, 1 \leq s \leq m$.

Si $x \in K$, (7.6.6) *muestra que* $x \in V(x_s, \delta)$ *para algún* s, *de manera que*

$$|g_i(x) - g_i(x_s)| < \varepsilon$$

para cada i. *Si* $i \geq N$ *y* $j \geq N$, *se deduce de* (7.6.7) *que*

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_i(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| + |g_j(x_s) - g_j(x)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración.

7.7 Teorema de Stone-Weierstrass

Teorema 7.15 *Si* f *es una función compleja continua en* $[a, b]$, *existe una sucesión de polinomios* P_n, *tal que*

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = f(x)$$

uniformemente en $[a, b]$. *Si* f *es real, se deben tomar los* P_n *reales.*

Esta es la forma en que el teorema fue enunciado originalmente por Weierstrass.

Demostración: *Admitiremos, sin pérdida de generalidad, que* $[a, b] = [0, 1]$, *y que* $f(0) = f(1) = 0$. *puesto que si se demuestra el teorema para este caso, consideraremos*

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Aquí $g(0) = g(1) = 0$, *y si puede obtenerse* g *como límite de una sucesión uniformemente convergente de polinomios, es claro que lo mismo es cierto para* f, *pues,* $f - g$ *es un polinomio.*

Además, supondremos que $f(x)$ *es cero para* x *fuera de* $[0, 1]$.

Entonces, f *es uniformemente continua en toda la recta.*

Hacemos

$$Q_n(x) = c_n \left(1 - x^2\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{7.7.1}$$

donde se ha elegido c_n, *de modo que*

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x) dx = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7.7.2}$$

Necesitamos algún conocimiento sobre el orden de magnitud de c_n. *Como*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx = 2 \int_{0}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx &\geq 2 \int_{0}^{1/\sqrt{n}} \left(1 - x^2\right)^n dx \\ &\geq 2 \int_{0}^{1/\sqrt{n}} \left(1 - nx^2\right) dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

de (7.7.2) se deduce que

$$c_n < \sqrt{n}. \tag{7.7.3}$$

La desigualdad $\left(1-x^2\right)^n \geq 1-nx^2$ *que se usó antes, se comprueba fácilmente que es cierta, considerando la función*

$$\left(1-x^2\right)^n - 1 + nx^2$$

que es cero en $x=0$*, y cuya derivada es positiva en* $(0,1)$.

Para todo $\delta > 0$ (7.7.3) *implica*

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n \quad (\delta \leq |x| \leq 1) \tag{7.7.4}$$

de modo que $Q_n \to 0$ *uniformemente en* $\delta \leq |x| \leq 1$.

Sea, ahora,

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt \quad (0 \leq x \leq 1). \tag{7.7.5}$$

Nuestras hipótesis sobre f *demuestran, por un simple cambio de variable, que*

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt = \int_0^1 f(t)Q_n(t-x)dt,$$

y la última integral es un polinomio en x*. Así, pues,* $\{P_n\}$ *es una sucesión de polinomios, que son reales si* f *es real.*

Dado $\varepsilon > 0$*, elegiremos* $\delta > 0$*, tal que* $|y-x| < \delta$ *implica*

$$|f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $M = \sup|f(x)|$*. Utilizando* (7.7.2), (7.7.4) *y el hecho de ser* $Q_n(x) \geq 0$*, vemos que para* $0 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned}
|P_n(x)-f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1}[f(x+t)-f(x)]Q_n(t)dt\right| \\
&\leq \int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt \\
&\leq 2M\int_{-1}^{-\delta}Q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}Q_n(t)dt + 2M\int_{\delta}^{1}Q_n(t)dt \\
&\leq 4M\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo n *suficientemente grande, lo que demuestra el teorema.*

Es instructivo representar las gráficas de Q_n para algunos valores de n; nótese también, que necesitamos la continuidad uniforme de f para deducir la convergencia uniforme de $\{P_n\}$.

En la demostración del Teorema 7.18, no necesitamos todo el rigor del Teorema 7.15, sino solamente el siguiente caso particular, que enunciamos como corolario.

Corolario 7.2 *Para cada intervalo $[-a, a]$ hay una sucesión de polinomios reales P_n, tal que $P_n(0) =$ y que*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x|$$

uniformemente en $[-a, a]$.

Demostración: *Por el Teorema 7.15, existe una sucesión $\{P_n^*\}$ de polinomios reales que converge hacia $|x|$ uniformemente en $[-a, a]$. En particular, $P_n^*(0) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Los polinomios*

$$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

tienen las propiedades deseadas.

Ahora, aislaremos las propiedades de los polinomios que hacen posible el teorema de Weierstrass.

Definición 7.6 *Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de funciones complejas definidas en un conjunto E es un álgebra si (i) $f+g \in \mathcal{A}$ (ii) $fg \in \mathcal{A}$, y (iii) $cf \in \mathcal{A}$ para toda $f \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{A}$ y para todas las constantes complejas c, esto es, si $\mathcal{A}$ es cerrada, respecto de la adición, multiplicación y multiplicación escalar. Tendremos que considerar también álgebras de funciones reales; en este caso, es natural que solo debe cumplirse (iii) para todo número real c.*
Si $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de ser $f \in \mathcal{A}$ cuando $f_n \in \mathcal{A}(n = 1, 2, 3, \ldots)$ y $f_n \to f$ uniformemente en E, se dice que $\mathcal{A}$ es uniformemente cerrada.
Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todas las funciones que son límite de sucesiones uniformemente convergentes de elementos de $\mathcal{A}$. A $\mathcal{B}$ se le llama cerradura uniforme de $\mathcal{A}$.

Por ejemplo, el conjunto de todos los polinomios es un álgebra, y puede enunciarse el teorema de Weierstrass diciendo que el conjunto de funciones continuas en $[a, b]$ es la cerradura uniforme del conjunto de polinomios en $[a, b]$.

Teorema 7.16 *Sea $\mathcal{B}$ la cerradura uniforme de un álgebra $\mathcal{A}$ de funciones acotadas. $\mathcal{B}$ es un álgebra uniformemente cerrada.*

Demostración: *Si $f \in \mathcal{B}$ y $g \in \mathcal{B}$, existen sucesiones uniformemente convergentes $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, tales que $f_n \to f, g_n \to g$ y $f_n \in \mathcal{A}, g_n \in \mathcal{A}$. Como estamos tratando con funciones acotadas, es fácil demostrar que*

$$f_n + g_n - f + g, \quad f_n g_n \to fg, \quad cf_n \to cf$$

siendo c una constante cualquiera, y la convergencia uniforme en cada caso.

De aquí, que $f + g \in \mathcal{B}$; $fg \in \mathcal{B}$, y $cf \in \mathcal{B}$, de modo que $\mathcal{B}$ es un álgebra.

Por el Teorema 2.10, $\mathcal{B}$ es cerrada (uniformemente).

Definición 7.7 *Sea $\mathcal{A}$ una familia de funciones en un conjunto E. Se dice que $\mathcal{A}$ separa puntos en E si a cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in E$ corresponde una función $f \in \mathcal{A}$, tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si a cada $x \in E$ corresponde una función $g \in \mathcal{A}$, tal que $g(x) \neq 0$, decimos que $\mathcal{A}$ no desaparece en ningún punto de E.*

El álgebra de todos los polinomios en una variable, tiene, como se ve fácilmente, esa; propiedades en $\mathbb{R}^1$. Un ejemplo de un álgebra que no separa puntos, es el conjunto de todos los polinomios pares, por ejemplo, en $[-1,1]$, pues, $f(-x)=f(x)$ para toda función par f.

El teorema siguiente aclara más estos conceptos.

Teorema 7.17 *Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de funciones en un conjunto E, que separa puntos en E, y no desaparece en ningún punto de E.*
Sean x_1, x_2 puntos distintos de $E, y c_1, c_2$ constantes (reales si $\mathcal{A}$ es un álgebra real). Entonces, $\mathcal{A}$ contiene una función f, tal que

$$f(x_1)=c_1, \quad f(x_2)=c_2.$$

Demostración: *Las suposiciones muestran que $\mathcal{A}$ contiene funciones g, h y k tales que*

$$g(x_1) \neq g(x_2), \quad h(x_1) \neq 0, \quad k(x_2) \neq 0.$$

Haciendo

$$u = gk - g(x_1)k, \quad v = gh - g(x_2)h.$$

Entonces $u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{A}, u(x_1) = v(x_2) = 0, u(x_2) \neq 0$, y $v(x_1) \neq 0$. Por tanto

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)}$$

tiene las propiedades requeridas.

Se tiene ya todo el material necesario para la generalización del teorema de Weierstrass, debida a Stone.

Teorema 7.18 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones reales continuas sobre un conjunto compacto K. Si $\mathcal{A}$ separa puntos sobre K y si $\mathcal{A}$ no desaparece en ningún punto de K, entonces la cerradura uniforme $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ consta de todas las funciones reales continuas sobre K.*

Se hará la demostración en varias etapas, cuatro para ser exactos.

Primera Etapa: Si $f \in \mathcal{B}$, entonces $|f| \in \mathcal{B}$.
Demostración: *Sea*

$$a = \sup |f(x)| \quad (x \in K) \tag{7.7.6}$$

y $\varepsilon > 0$ conocidos. Por el Corolario 7.2 existen números reales $c_1, \ldots, c_n$ tales que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - \right| y|| < \varepsilon \quad (-a \leq y \leq a) \tag{7.7.7}$$

Como $\mathcal{B}$ es un álgebra, la función

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i$$

es un miembro de $\mathcal{B}$. De (7.7.6) y (7.7.7) se tiene que

$$|g(x) - |f(x)|| < \varepsilon \quad (x \in K).$$

Debido a que $\mathcal{B}$ es uniformemente cerrada, es evidente que $|f| \in \mathcal{B}$.

Segunda Etapa: Si $f \in \mathcal{B}$ y $g \in \mathcal{B}$, entonces $\text{máx}(f,g) \in \mathcal{B}$ y $\text{mín}(f,g) \in \mathcal{B}$.

Se debe entender por $\text{máx}(f,g)$, la función h definida como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{si } f(x) < g(x) \end{cases}$$

y $\text{mín}(f,g)$ se define de la misma manera.

Demostración: *La segunda etapa se deduce a partir de la primera etapa y de las identidades siguientes:*

$$\text{máx}(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},$$
$$\text{mín}(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Por iteración, es posible extender el resultado para un conjunto finito cualquiera de funciones: Si $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{B}$, *entonces* $\text{máx}\,(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{B}$, *y*

$$\text{mín}\,(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{B}.$$

Tercera etapa: Dados una función real continua f sobre K, un punto $x \in K$, y $\varepsilon > 0$, existe entonces una función $g_x \in \mathcal{B}$ tal que $g_x(x) = f(x)$ y

$$g_x(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in K). \tag{7.7.8}$$

Demostración: *Como* $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ *y* $\mathcal{A}$ *satisfacen las hipótesis del Teorema 7.17, también lo hace* $\mathcal{B}$. *Por consiguiente, para cada* $y \in K$, *se puede encontrar una función* $h_y \in \mathcal{B}$ *tal que*

$$h_y(x) = f(x), \quad h_y(y) = f(y) \tag{7.7.9}$$

Como h_v *es continua, existe un conjunto abierto* J_v *que contiene a* y *tal que*

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in J_y) \tag{56}$$

Debido a que K *es compacto, existe un conjunto finito de puntos* $y_1, \ldots, y_n$ *tal que*

$$K \subset J_{y_1} \cup \cdots \cup J_{y_n}. \tag{7.7.10}$$

Haciendo

$$g_x = \text{máx}\,(h_{y_1}, \ldots, h_{y_n})$$

Por la segunda etapa, $g \in \mathcal{B}$ *y las relaciones* (7.7.9) *a* (7.7.10) *muestran que* g_x *tiene las otras propiedades requeridas.*

Cuarta etapa: Dados, una función real continua f sobre K, y $\varepsilon > 0$, existe una función $h \in \mathcal{B}$ tal que

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in K). \tag{7.7.11}$$

Como $\mathcal{B}$ es uniformemente cerrada, esta proposición es equivalente a la conclusión del teorema.

Demostración: *Considérense las funciones g_i, para cada $x \in K$, que se construyeron en la tercera etapa. Por la continuidad de g_x, existen conjuntos abiertos V_x que contienen a x, tales que*

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \quad (t \in V_x)\,. \tag{7.7.12}$$

Como K es compacto, existe un conjunto finito de puntos $x_1, \ldots, x_m$ tales que

$$K \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}. \tag{7.7.13}$$

Haciendo

$$h = \text{mín}\,(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m})\,.$$

Por la segunda etapa se tiene que $h \in \mathcal{B}$, y (7.7.8) implica que

$$h(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in K) \tag{7.7.14}$$

en tanto que (7.7.12) y (7.7.13) implicarán que

$$h(t) < f(t) + \varepsilon \quad (t \in K). \tag{7.7.15}$$

Finalmente, (7.7.11) se deduce a partir de (7.7.14) y de (7.7.15).

El Teorema 7.18 no se cumple para álgebras complejas. En el Ejercicio 21 se da un ejemplo de este hecho. Sin embargo, se cumple la conclusión del teorema, aun para álgebras complejas, si se impone una condición suplementaria a $\mathcal{A}$, esto es, que sea auto-adjunta. Esto significa que para toda $f \in \mathcal{A}$ su conjugada compleja f debe pertenecer también a $\mathcal{A}$; f está definida por $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

Teorema 7.19 *Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra auto-adjunta de funciones complejas continuas en un corjunio compacto K, que $\mathcal{A}$ separa puntos en K y no desaparece en ningún punto de K. La cerradura uniforme $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ consta de todas las funciones complejas continuas en K. En otras palabras, $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{C}(K)$.*

Demostración: *Sea $\mathcal{A}_R$ el conjunto de todas las funciones reales en K que pertener en a $\mathcal{A}$.*

Si $f \in \mathcal{A}$ y $f = u + iv$, con u, v reales; será $2u = f + f$, y como $\mathcal{A}$ es auto-adjunta, vemos que $u \in \mathcal{A}_R$. Si $x_1 \neq x_2$, existe $f \in \mathcal{A}$, tal que $f(x_1) = 1, f(x_2) = 0$; por tanto, $0 = u(x_2) \neq u(x_1) = 1$, lo que demuestra que $\mathcal{A}_R$ separa puntos en K. Si $x \in K$, entonces $g(x) \neq 0$ para algún $g \in \mathcal{A}$, y hay un número complejo λ, tal que $\lambda g(x) > 0$; si $f = \lambda g, f = u + iv$, se deduce que $u(x) > 0$; por tanto, $\mathcal{A}_R$ no desaparece en ningún punto de K.

Así, pues, $\mathcal{A}_R$ satisface las hipótesis del Teorema 7.32. Se deduce que toda función real continua en K está en la cerradura uniforme de $\mathcal{A}_R$, por lo que está en $\mathcal{B}$. Si f es una función compleja continua en $K, f = u + iv$, entonces $u \in \mathcal{B}$, $v \in \mathcal{B}$, y, por tanto, $f \in \mathcal{B}$, lo que completa la demostración.

7.8 Ejercicios

1. Demostrar que toda sucesión uniformemente convergente de funciones acotadas, es uniformemente acotada.

2. Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente en E, demostrar que $\{f_n + g_n\}$ convergen uniformemente en E. Si, además $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son sucesiones de funciones acotadas, demostrar que $f_n g_n\}$ convergen uniformemente en E.

3. $\{f_n g_n\}$ no converja uniformemente en E (desde luego, $\{f_n g_n\}$ deben converger en E).

4. Considerar
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}$$
¿Para qué valores de x converge la serie absolutamente? ¿En qué intervalos deja de converger uniformemente? ¿Es f continua dondequiera que converja la serie? ¿Es acotada f ?

5. Sea
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(x < \frac{1}{n+1}\right) \\ \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} & \left(\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{n} < x\right) \end{cases}$$
Demostrar que $\{f_n\}$ converge hacia una función continua, pero no uniformemente. Utilizar la serie Σf_n para demostrar que la convergencia absoluta, aun para todo x, no implica convergencia uniforme.

6. Demostrar que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$
converge uniformemente en todo intervalo acotado, pero no converge absolutamente para cualquier valor de x.

7. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y x real, hacer
$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$
Demostrar que $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia una función f, y que la ecuación
$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$$
es correcta si $x \neq 0$, pero falsa si $x = 0$.

8. Si
$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$
si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos distintos de (a, b), y si $\boldsymbol{V} |c_n|$ converge, demostrar que la serie
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n) \quad (a \leq x \leq b)$$
converge uniformemente, que f es continua para todo $x \neq x_n$.

9. Sea $|f_n|$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente hacia una función f en un conjunto E. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

para toda sucesión de puntos $x_n \in E$ tales que $x_n \to x$, y $x \in E$. ¿Es cierto el reciproco?

10. Si (x) representa la parte fraccionaria de un número real x (ver, para la definición, el Ejercicio 16, Cap. 4), considerar la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2} \quad (x \text{ real })$$

Hallar todas las discontinuidades de f, y demostrar que forman un conjunto denso numerable. Demostrar que f es, sin embargo, integrable según Riemann en todo intervalo acotado.

11. Suponer que $\{f_n\}, \{g_n\}$ están definidas en E, y

(a) Σf_n tiene sumas parciales uniformemente acotadas.

(b) $g_n - 0$ uniformemente en E.

(c) $g_1(x) \geq g_2(x) \geq g_3(x) \geq \cdots$ para todo $x \in E$. Entonces, $\Sigma f_n g_n$ converge uniformemente en E.

Sugerencia: Comparar con el Teorema 3.27.

12. Supóngase que g y $f_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ están definidas sobre $(0, \infty)$, son integrables según Riemann sobre $[t, T]$ siempre que $0 < t < T < \infty$, $|f_n| \leq g$, $f_n - f$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $[0, \infty]$, y que

$$\int_0^{\infty} g(x)dx < \infty$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

(Para las definiciones que se presentan, véanse los Ejercicios 7 y 8 del Cap. 6.)

Esta es una forma bastante débil del teorema de Lebesgue de la convergencia dominada (Teorema **??**). En el contexto de la integral de Riemann, puede incluso reemplazarse la convergencia uniforme, por la convergencia puntual, si se admite que $f \in \mathcal{R}$. (Véanse los artículos de F. Cunningham en el Math. Mag., tomo 40, 1967, páginas 179 a 186, y H. Kestelman en la Amer. Math. Monthly, tomo 77,1970 , páginas 182 a la 187.)

13. Supóngase que $f_n\}$ es una sucesión de funciones monótonas crecientes sobre $\mathbb{R}^1$, con $0 \leq f_n(x) \leq 1$ para todo x y todo n.

(a) Demostrar que hay una función f y una sucesión $\{n_k\}$ tales que

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^1$. (La existencia de tal sucesión puntualmente convergente se conoce comúnmente como teorema de selección de Helly.)

(b) Si además, f es continua, demostrar que $f_{n_k} - f$ uniformemente sobre $\mathbb{R}^1$.

Sugerencia: (i) Alguna subsucesión $f_{n_i}\}$ converge en todos los puntos racionales r, por ejemplo, hacia $f(r)$. (ii) Definir $f(x)$, para cualquier $x \in \mathbb{R}^1$, como el sup $f(r)$, en donde el sup se toma sobre todos los $r \leq x$. (iii) Mostrar que $f_{ni}(x) - f(x)$ en cada x en el cual f es continua. (Es decir, donde la monotonia se usa con más rigor) (iv) Una subsucesión de f_{ni} l converge en cada punto de discontinuidad de f por que a lo más hay un número numerable de tales puntos. Esto demuestra (a). Para demostrar (b) conviene modificar la demostración de (iii) apropiadamente.

14. Sea f una funcion real continua sobre $\mathbb{R}^1$, que tiene las siguientes propiedades: $() \leq f(t) \leq 1, f(t+2) = f(t)$ para cada t, y

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{3}\right) \\ 1 & \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 1\right) \end{cases}$$

Si $\Phi(t) = (x(t), y(t))$, donde

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f\left(3^{2n-1} t\right), \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f\left(3^{2n} t\right)$$

Demostrar que Φ es continua y que Φ mapea $I = [0,1]$ sobre el cuadrado unitario $I^2 \subset \mathbb{R}^2$. En realidad se tiene que mostrar que Φ mapea el conjunto de Cantor sobre I^2.

Sugerencia: Cada $(x_0, y_0) \in I^2$ tiene la forma

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1}, \quad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n}$$

en donde cada a_i es 0 ó 1. Si

$$t_0 = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i-1} (2a_i)$$

mostrar que $f\left(3^k t_0\right) = a_k$, y por consiguiente, que $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$.

(Este sencillo ejemplo de la llamada çurva que llena el espacio"se debe a I. J. Schoenberg, Bull. A.M.S., tomo 44, 1938, página 519.)

15. Supóngase que f es una función real continua sobre $\mathbb{R}^1$, $f_n(t) = f(nt)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y $\{f_n\}$ es equicontinua sobre $[0,1]$. ¿Qué puede decirse de f ?

16. Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión equicontinua de funciones sobre un conjunto compacto K, y que $\{f_n\}$ converge puntualmente sobre K. Demostrar que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre K.

17. Las nociones de convergencia uniforme y equicontinuidad se definen para mapeos en cualquier espacio métrico. Demostrar que los Teoremas 7.2 y 7.5 son válidos para mapeos en cualquier espacio métrico, y que los Teoremas 7.1 y 7.4 son válidos para mapeos en cualquier espacio métrico completo. Y por último, demostrar que para funciones vectoriales, es decir, aplicaciones en cualquier $\mathbb{R}^k$, los Teoremas 7.3 7.9, 7.10, 7.13 y 7.14 son válidos.

18. Sea $\{f_n\}$ una sucesión uniformemente acotada de funciones que son integrables según Riemann en $[a,b]$ y hagamos
$$F_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt \quad (a\le x\le b)$$
Demostrar que existe una subsucesión $\{F_{n_k}\}$ que converge uniformemente en $[ab]$.

19. Sea K un espacio métrico compacto y S un subconjunto de $\mathcal{C}(K)$. Demostrar que S es compacto (con respecto a la métrica que se definió en la Sec. **??**) si, y solo si S es uniformemente cerrado, acotado puntualmente y equicontinuo. (Si S no es equicontinuo, entonces contiene una sucesión que no tiene una subsucesión equicontinua, por consiguiente no tiene subsucesión que converja uniformemente sobre K.)

20. Si f es continua en $[0,1]$ y si
$$\int_0^1 f(x)x^n dx=0 \quad (n=0,1,2,\ldots)$$
entonces, $f(x)=0$ en $[0,1]$. Sugerencia: La integral del producto de f por cualquier polinomio es cero. Utilizar el teorema de Weierstrass para demostrar que $\int_0^1 f^2(x)dx=0$.

21. Sea K el círculo unitario en el plano complejo (esto es, el conjunto de todos los z con $|z|=1$) y sea $\mathcal{A}$ el álgebra de todas las funciones de la forma
$$f\left(e^{i\theta}\right)=\sum_{n=0}^{N} c_n e^{in\theta} \quad (\theta \text{ real }).$$
Entonces, $\mathcal{A}$ separa puntos en K y no desaparece en ningún punto de K, pero sin embargo hay funciones continuas en K que no están en la cerradura uniforme de $\mathcal{A}$. Sugerencia: Para cada $f\in\mathcal{A}$.
$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta=0$$
y esto es también cierto para cada f en la cerradura de $\mathcal{A}$.

22. Sea $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a,b]$. Demostrar que hay polinomios P_n tales que
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f-P_n|^2\,d\alpha=0$$
(Comparar esto con el Ejercicio 12 del Cap. 6.)

23. Hágase $P_0=0$, y para $n=0,1,2,\ldots$, definase
$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{x^2-P_n^2(x)}{2}$$
Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=|x|,$$
uniformemente en $[-1,1]$.

(Esto hace posible demostrar el teorema de Stone-Weierstrass sin probar de antemano el Teorema 7.15).

Sugerencia: Usar la identidad

$$|x| - P_{n+1}(x) = [|x| - P_n(x)] \left[1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right]$$

para demostrar que $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$ si $|x| \leq 1$, y que

$$|x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n < \frac{2}{n+1}$$

si $|x| \leq 1$.

24. Sea X un espacio métrico, con métrica d. Si se fija un punto $a \in X$ y se asigna a cada $p \in X$ la función f_p definida por

$$f_p(x) = d(x,p) - d(x,a) \quad (x \in X).$$

Demostrar que $|f_p(x)| \leq d(a,p)$ para todo $x \in X$, y que por lo tanto, $f_p \in \mathcal{E}(X)$.

Demostrar después que

$$\|f_p - f_q\| = d(p,q)$$

para todo $p, q \in X$.

Si $\Phi(p) = f_p$ se deduce que Φ es una isometria (una aplicación o mapeo que preserva distancias) de X sobre $\Phi(X) \subset \mathcal{C}(X)$.

Sea Y la cerradura de $\Phi(X)$ en $\mathcal{C}(X)$. Mostrar que Y es completo.

Conclusión: X es isométrico a un subconjunto denso de un espacio métrico completo Y.

(Para una demostración diferente de esto, véase el Ejercicio 24 del Cap. 3.)

25. Supongamos que ϕ es una función real continua acotada en la banda definida por $0 \leq x \leq 1; -\infty < y < \infty$. Demostrar que el problema con valores iniciales

$$y' = \phi(x,y), \quad y(0) = c$$

tiene una solución. (Obsérvese que las hipótesis de este teorema de existencia son menos restrictivas que las del correspondiente teorema de unicidad; ver el Ejercicio 2, Cap. 5).

Sugerencia: Fijar n. Para $i = 0, \ldots, n$, hacer $x_i = i/n$. Sea f_n una función continua en $[0,1]$ tal que $f_n(0) = c$,

$$f_n'(t) = \phi\left(x_i, f_n\left(x_i\right)\right) \qquad \text{si } x_i < t < x_{i+1},$$

y hagamos

$$\Delta_n(t) = f_n'(t) - \phi\left(t, f_n(t)\right),$$

excepto en los puntos x_i, donde $\Delta_n(t) = 0$. Será

$$f_n(x) = c + \int_0^x \left[\phi\left(t, f_n(t)\right) + \Delta_n(t)\right] dt$$

Selecciónese $M < \infty$ de tal forma que $|\phi| \leq M$. Verificar las afirmaciones que siguen:

(a) $|f_n'| \leq M, |\Delta_n| \leq 2M, \Delta_n \in \mathcal{R}$, y $|f_n| \leq |c| + M = M_1$, digamos, sobre $[0,1]$, para todo n.

(b) $\{f_n\}$ es equicontinua sobre $[0,1]$, debido a que $|f_n'| \leq M$.

(c) Alguna $f_{n_k}\}$ converge hacia alguna f, uniformemente sobre $[0,1]$.

(d) Como ϕ es uniformemente continua sobre el rectángulo $0 \leq x \leq 1, |y| \leq M_1$,

$$\phi\left(t, f_{n_k}(t)\right) \rightarrow \phi(t, f(t))$$

uniformemente sobre $[0,1]$.

(e) $\Delta_n(t) \rightarrow 0$ uniformemente sobre $[0,1]$, debido a que

$$\Delta_n(t) = \phi\left(x_i, f_n\left(x_i\right)\right) - \phi\left(t, f_n(t)\right)$$

en (x_i, x_{i+1}).

(f) Por consiguiente

$$f(x) = c + \int_0^x \phi(t, f(t)) dt$$

Esta f es una solución del problema planteado.

26. Demostrar un teorema de existencia análogo para el problema con valores iniciales

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{\Phi}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{c}$$

en el cual $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$, y Φ es un mapeo continuo acotado, de la parte de $\mathbb{R}^{k+1}$ definida por $0 \leq x \leq 1$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^k$. (Compararlo con el Ejercicio 28 del Cap. 5.) Sugerencia: Usar la versión vectorial del Teorema 7.14.