posee el límite g en la dirección $\boldsymbol{a}$ si

$$\lim_{h \to 0} f\left(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{a}\right) = g.$$

Escribimos

$$\boldsymbol{a}\text{-}\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x}) = g$$

Evidentemente, si una función posee el límite g, entonces todos sus límites direccionales existen e igualan g. Se podría pensar que por otro lado, si todos estos límites direccionales existen e igualan g, entonces f posee el límite g en $\boldsymbol{x}^0$. Esto no es así, tal como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.1 *Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ (x, y) = (0, 0)\ o\ y \neq x^2 \\ 1 & si\ y = x^2, x \neq 0. \end{cases}$$

Evidentemente, $f(0,0) = 0$ *y para cada dirección* $\boldsymbol{a}$*,*

$$\boldsymbol{a}\text{-}\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x}) = g$$

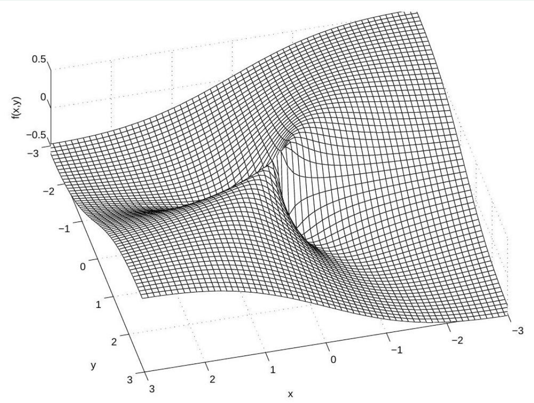

Figure 3.2: Función $f(x, y)$ definida en el Ejemplo 3.3.1.

Definición 3.3.3 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama continua en un punto interior $\boldsymbol{x}^0$ de $D(f)$*

en la dirección $\boldsymbol{a}$ *si*

$$\boldsymbol{a}\text{-}\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} f(x) = f(\boldsymbol{x}^0).$$

El Ejemplo 3.3.1 presenta una función que es discontinua en $(0,0)$, pero que es continua en $(0,0)$ en cada dirección, por lo tanto una función que es continua en un punto en cada dirección no necesariamente es continua en este punto.

Ejemplo 3.3.2 *Considere la función*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \textit{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Esta función no es continua en el punto $(0,0)$ *dado que*

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

Pero f es continua en las direcciones $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$ y $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$, dado que

$$\lim_{h\to 0} f(0+h,0) = 0; \quad \lim_{h\to 0} f(0,0+h) = 0.$$

3.4. Derivadas direccionales

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Analizaremos primero el comportamiento de f en la vecindad de un punto interior $\boldsymbol{x}^0$ de $D(f)$ en una dirección. Dado así f es una función de una variable, podemos describir el crecimiento o el decrecimiento de f en esta dirección en términos del cálculo diferencial de una variable.

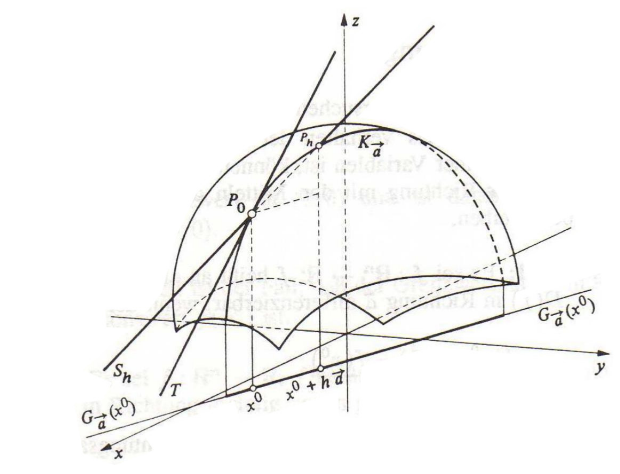

Figure 3.3: Ilustración de la derivada direccional.

Definición 3.4.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La función f se llama diferenciable en un punto interior $\boldsymbol{x}^0 \in D(f)$ en la dirección $\boldsymbol{a}$ si el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{a}\right) - f\left(\boldsymbol{x}^0\right)}{h}$$

existe; si existe, el límite se llama derivada direccional de f en la dirección $\boldsymbol{a}$, y lo denotamos por

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}\left(\boldsymbol{x}^0\right)$$

Queremos ilustrar el concepto de la derivada direccional para el caso $n = 2$ (ver Figura 3.3). Sea $\boldsymbol{x}^0 = (x_0, y_0)$ y $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, entonces

$$\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{a} = (x_0 + ha_1, y_0 + ha_2)\,.$$

En general, el grafo de f es una "superficie" en $\mathbb{R}^3$; pero si consideramos f solamente sobre $G_{\boldsymbol{a}}\left(\boldsymbol{x}^0\right) \cap D(f)$, el grafo es una "curva" $K_{\boldsymbol{a}}$ en esta superficie. Ahora trataremos de encontrar la tangente T a la curva $K_{\boldsymbol{a}}$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Para tal efecto consideramos la secante S_h por los puntos P_0 y

$$P_h = (x_0 + ha_1, y_0 + ha_2, f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2)) .$$

Esta secante está únicamente determinada por su pendiente

$$\frac{f\left(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{a}\right) - f\left(\boldsymbol{x}^0\right)}{h}$$

Ahora, si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{a}\right) - f\left(\boldsymbol{x}^0\right)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}\left(\boldsymbol{x}^0\right)$$

entonces la recta por P_0 con la pendiente $\partial f / \partial \boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ -como recta límite de las secantes- es la tangente T a la curva $K_{\boldsymbol{a}}$ deseada.

Ejemplo 3.4.1 *Sea la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = x^2 + x\cos y$ *(ver Figura 3.4). Queremos calcular la derivada direccional de* f *en el punto* (x_0, y_0) *en la dirección* $\boldsymbol{a} =$

$(1/\sqrt{2})(1,1)$. *Aquí obtenemos*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\left(x_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(x_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - x_0^2 - x_0 \cos y_0\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2}hx_0 + \frac{1}{2}h^2}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{x_0}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - \cos y_0}{\frac{h}{\sqrt{2}}} + \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \sqrt{2}x_0 - \frac{x_0 \operatorname{sen} y_0}{\sqrt{2}} + \frac{\cos y_0}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

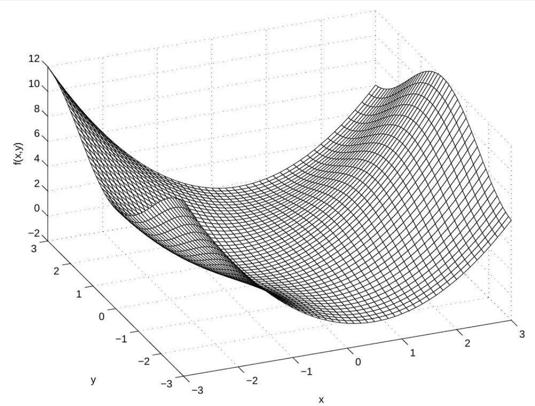

Figure 3.4: Función $f(x, y) = x^2 + x \cos y$.

Si cambiamos la orientación de la recta, es decir, si consideramos la dirección $-\boldsymbol{a}$, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.4.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\boldsymbol{x}^0$ en la dirección $\boldsymbol{a}$, entonces f también es diferenciable en $\boldsymbol{x}^0$ en la dirección $-\boldsymbol{a}$, y*

$$\frac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{a})}\left(\boldsymbol{x}^0\right) = -\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}\left(\boldsymbol{x}^0\right)$$

Dem: *Demostración. Se tiene que*

$$\frac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{a})}\left(\boldsymbol{x}^0\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\boldsymbol{x}^0 + h(-\boldsymbol{a})\right) - f\left(\boldsymbol{x}^0\right)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\boldsymbol{x}^0 + (-h)\boldsymbol{a}\right) - f\left(\boldsymbol{x}^0\right)}{-h} = -\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}\left(\boldsymbol{x}^0\right).$$

Teorema 3.4.2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en la dirección $\boldsymbol{a}$, entonces f es continua en $\boldsymbol{x}^0$ en la dirección $\boldsymbol{a}$.*

Dem: *Se tiene que*

$$\lim_{h\to 0}\left(f\left(\boldsymbol{x}^0+h\boldsymbol{a}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^0\right)\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f\left(\boldsymbol{x}^0+h\boldsymbol{a}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^0\right)}{h}\cdot h\right)=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}\left(\boldsymbol{x}^0\right)\cdot 0=0,$$

lo que implica la afirmación.

3.4.1. Derivadas parciales

Las derivadas direccionales con respecto a los vectores $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, las derivadas parciales, son muy importantes.

Definición 3.4.2 *Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. La función f se llama parcialmente diferenciable con respecto a x_k en un punto interior $\boldsymbol{x}^0$ de $D(f)$ si existe la derivada direccional $\left(\partial f/\partial \boldsymbol{e}_k\right)\left(\boldsymbol{x}^0\right)$.*

Tambien escribimos

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_k}\left(\boldsymbol{x}^0\right)=\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\boldsymbol{x}^0\right)=f_{x_k}\left(\boldsymbol{x}^0\right)$$

Esta expresión se llama derivada parcial (de primer orden) de f con respecto a la variable x_k en el punto $\boldsymbol{x}^0$.

Comentamos que según la Definición 3.4.2,

$$\begin{aligned} f_{x_k}\left(\boldsymbol{x}^0\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\boldsymbol{x}^0+h\boldsymbol{e}_k\right)-f\left(\boldsymbol{x}^0\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_k^0+h,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0\right)-f\left(x_1^0,\ldots,x_k^0,\ldots,x_n^0\right)}{h}, \end{aligned}$$

es decir, podemos obtener esta derivada parcial fijando $x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0$ y formando la derivada ordinaria con respecto a x_k en x_k^0.

Ejemplo 3.4.2

1. *Consideremos sobre* $\mathbb{R}^2$ *la función* $f(x,y) = x^2 + x\cos y$ *(ver Figura 3.4). Para* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *se tiene aquí*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 + \cos y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -x_0\,\mathrm{sen} y_0$$

2. *Consideremos nuevamente la función*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aqui obtenemos para $(\xi, \eta) \neq (0,0)$ *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta) = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} - \frac{2\xi^2\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta) = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - \frac{2\xi\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2},$$

y para $(\xi, \eta) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$$

es decir, las derivadas parciales existen en cada punto. Por otro lado, ya vimos en el Ejemplo 3.3.2 que la función no es continua en el punto $(0,0)$. *Sin embargo, note que las derivadas parciales no son acotadas en una vecindad de* $(0,0)$, *puesto que para* $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ *se tiene que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\eta) = \frac{1}{\eta}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,0) = \frac{1}{\xi}$$

Entonces, la existencia de las derivadas parciales aún no implica la continuidad de la función. En el siguiente teorema demostraremos que si todas las derivadas parciales son acotadas, sí podemos concluir que f *es continua.*

Teorema 3.4.3 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $x^0 \in D(f)$. *Si las derivadas parciales* $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$ *existen en una vecindad* $U_r\left(x^0\right)$ *de* x^0 *con* $U_r\left(x^0\right) \subset D(f)$ *y son acotadas en esta vecindad, entonces*

f es continua en x^0.

Dem: *Sea $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$ un vector con $\|\boldsymbol{v}\| < r$. Si definimos*

$$\boldsymbol{v}^0 := \overrightarrow{0}; \quad \boldsymbol{v}^{\mathrm{Nu}} = \sum_{i=1}^{\mathrm{Nu}} v_i \boldsymbol{e}_i, \quad \mathrm{Nu} = 1, \ldots, n$$

entonces siempre se tiene que

$$\left\|\boldsymbol{v}^{\mathrm{Nu}}\right\| \leqslant \|\boldsymbol{v}\| < r$$

y sabemos que

$$x^0 + \boldsymbol{v}^{\mathrm{Nu}} \in U_r\left(x^0\right), \quad \mathrm{Nu} = 0, 1, \ldots, n$$

Ahora consideramos que

$$f\left(x^0 + \boldsymbol{v}\right) - f\left(x^0\right) = \left(f\left(x^0 + \boldsymbol{v}^n\right) - f\left(x^0 + \boldsymbol{v}^{n-1}\right)\right) + \left(f\left(x^0 + \boldsymbol{v}^{n-1}\right) - f\left(x^0 + \boldsymbol{v}^{n-2}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+\left(f\left(x^{0}+\boldsymbol{v}^{1}\right)-f\left(x^{0}+\boldsymbol{v}^{0}\right)\right) \\
&=\sum_{\mathrm{Nu}=1}^{n}\left(f\left(x^{0}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{Nu}}\right)-f\left(x^{0}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{Nu}-1}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Según el Teorema del Valor Intermedio del cálculo diferencial existen puntos $\xi^{\mathrm{Nu}} \in U_r\left(x^0\right)$ *localizados en el segmento lineal que une* $x^0+\boldsymbol{v}^{\mathrm{Nu}-1}$ *con* $x^0+\boldsymbol{v}^{\mathrm{Nu}}$ *tales que*

$$
f\left(x^{0}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{Nu}}\right)-f\left(x^{0}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{Nu}-1}\right)=v_{\mathrm{Nu}} \cdot f_{x_{\mathrm{Nu}}}\left(\xi^{\mathrm{Nu}}\right)
$$

luego

$$
f\left(x^{0}+\boldsymbol{v}\right)-f\left(x^{0}\right)=\sum_{\mathrm{Nu}=1}^{n} v_{\mathrm{Nu}} \cdot f_{x_{\mathrm{Nu}}}\left(\xi^{\mathrm{Nu}}\right).
$$

Dado que todas las derivadas parciales son acotadas, existen constantes $M_{\mathrm{Nu}}>0$ *con* $|f_{x_{\mathrm{Nu}}}(x)| \leqslant M_{\mathrm{Nu}}$ *para todo* $x \in U_r\left(x^0\right)$ *y* $\mathrm{Nu}=1,\ldots,n$. *Ahora, si* $\varepsilon>0$ *elegimos un* δ_ε *tal que* $0<\delta_\varepsilon<r$ *y*

$$
\delta_{\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{M_{1}+\cdots+M_{n}}.
$$

Así, todos los vectores $\boldsymbol{v}$ *con* $\|\boldsymbol{v}\|<\delta_{\varepsilon}$ *satisfacen lo siguiente:*

$$\left|f\left(x^{0}+\boldsymbol{v}\right)-f\left(x^{0}\right)\right| \leqslant \sum_{\mathrm{Nu}=1}^{n}\left|v_{\mathrm{Nu}}\right| M_{\mathrm{Nu}}<\delta_{\varepsilon} \sum_{\mathrm{Nu}=1}^{n} M_{\mathrm{Nu}}<\varepsilon$$

Esto implica que f *es continua en* x^{0}*.*

Para cada punto $x^{0} \in D(f)$ donde existen las derivadas parciales $f_{x_{1}}, \ldots, f_{x_{n}}$ existe entonces el vector $\left(f_{x_{1}}\left(x^{0}\right), \ldots, f_{x_{n}}\left(x^{0}\right)\right)$.

Definición 3.4.3 *Sea la función* $f: \mathbb{R}^{n} \rightarrow \mathbb{R}$ *parcialmente diferenciable con respecto a cada una de las variables* $x_{k}, k=1, \ldots, n$*. Entonces el vector*

$$\operatorname{grad} f\left(x^{0}\right)=\left(f_{x_{1}}\left(x^{0}\right), f_{x_{2}}\left(x^{0}\right), \ldots, f_{x_{n}}\left(x^{0}\right)\right)$$

se llama gradiente de f *en* x^{0}*. Otra notación es*

$$\nabla f\left(x^{0}\right)=\operatorname{grad} f\left(x^{0}\right)$$

3.5. Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Los conceptos de la derivada direccional y en particular de la derivada parcial aún no corresponden al concepto de la diferenciabilidad de funciones de una variable dado que la derivada direccional no considera enteramente el comportamiento de la función en una vecindad n-dimensional. Ya sabemos que la existencia de todas las derivadas direccionales en un punto x^0 asegura la continuidad de f en todas las direcciones, pero tal como vimos en el Ejemplo 3.4.2, esto todavía no nos permite deducir la continuidad de f en el punto x^0 (mientras que para las funciones de una variable, la diferenciabilidad sí implica la continuidad). Ahora introduciremos un concepto de diferenciabilidad que considera enteramente la vecindad n dimensional.

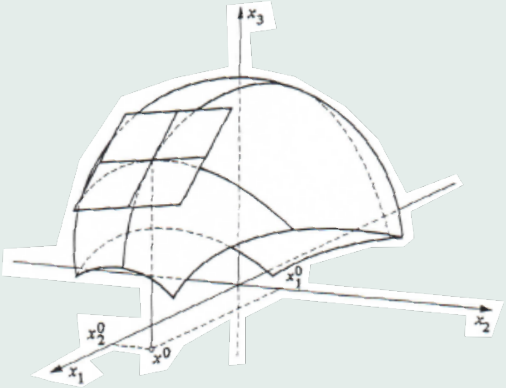

Figure 3.5: La diferenciabilidad de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Definición 3.5.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$y sea x^0 un punto interior de $D(f)$. La función se llama diferenciable en el punto x^0 si existen un vector $\boldsymbol{c} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ y una función f^0 definida en* *una vecindad* $U\left(x^0\right)$ *de* x^0 *con las siguientes propiedades:*

1. $f^0\left(x^0\right)=\lim_{x\to x^0} f^0(x)=0.$
2. $f(x)=f\left(x^0\right)+\boldsymbol{c}\cdot\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\right)+d\left(x,x^0\right)f^0(x)$ *para todo* $x\in U\left(x^0\right)$.

El vector $\boldsymbol{c}$ *se llama derivada (o derivada total) de* f *en* x^0.

Para $n=1$ este resultado implica que si f es una función diferenciable en x^0, entonces en una vecindad de x^0 la función f puede ser aproximada por una recta g con $g(x)=f\left(x^0\right)+c\left(x-x^0\right)$ de tal manera que la diferencia $f(x)-g(x)$ desaparece de por lo menos primer orden cuando $x\to x^0$, es decir,

$$\frac{f(x)-g(x)}{\left|x-x^0\right|}\to 0 \quad \text{cuando } x\to x^0$$

Podemos ofrecer una interpretación análoga para funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (ver Figura 3.5). Aquí

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(x^0\right) + \boldsymbol{c} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) \\ &= f\left(x_1^0, x_2^0\right) + c_1\left(x_1 - x_1^0\right) + c_2\left(x_2 - x_2^0\right) \end{aligned}$$

representa un plano en $\mathbb{R}^3$ por $\left(x_1^0, x_2^0, f\left(x_1^0, x_2^0\right)\right)$. Ahora, la diferenciabilidad en x^0 significa que en una vecindad de x^0 podemos aproximar f por un plano, el plano tangencial, de tal manera que la diferencia $f(x) - g(x)$ desaparece de por lo menos primer orden cuando $x \to x^0$, es decir

$$\frac{f\left(x_1, x_2\right) - g\left(x_1, x_2\right)}{d\left(\left(x_1, x_2\right), \left(x_1^0, x_2^0\right)\right)} \to 0 \quad \text{cuando } \left(x_1, x_2\right) = x \to x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right).$$

Ahora demostraremos que la diferenciabilidad en x^0 implica la existencia de la derivadas parciales $f_{x_1}\left(x^0\right), \ldots, f_{x_n}\left(x^0\right)$.

Teorema 3.5.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea f diferenciable en x^0. Entonces todas las derivadas parciales de primer orden existen en x^0, y*

$$f_{x_k}\left(x^0\right) = c_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

es decir,

$$\boldsymbol{c} = \nabla f\left(x^0\right)$$

Dem: *Dado que la función f es diferenciable, se tiene en una vecindad de x^0 que*

$$f(x) = f\left(x^0\right) + \boldsymbol{c} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) + d\left(x, x^0\right) f^0(x).$$

Para un índice $k, 1 \leqslant k \leqslant n$, sea $x = x^0 + h\boldsymbol{e}_k$ con algún $h \neq 0$. Obtenemos $\boldsymbol{c} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) = hc_k$ y $d\left(x, x^0\right) = |h|$, por lo tanto

$$\frac{f\left(x^0 + h\boldsymbol{e}_k\right) - f\left(x^0\right)}{h} = c_k + \frac{|h|}{h} f^0\left(x^0 + h\boldsymbol{e}_k\right)$$

Concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x^0\right)=\lim_{h\to 0}\left(c_k+\frac{|h|}{h}f^0\left(x^0+h\boldsymbol{e}_k\right)\right)=c_k.$$

∎

Más generalmente, la diferenciabilidad implica la existencia de las derivadas direccionales en todas las direcciones. En el teorema siguiente demostraremos, además, como podemos calcular las derivadas direccionales de las derivadas parciales.

Teorema 3.5.2 *Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diferenciable en x^0. Entonces f es diferenciable en x^0 en cada dirección $\boldsymbol{a}$, y se tiene que*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}\left(x^0\right)=\left(\nabla f\left(x^0\right)\right)\cdot\boldsymbol{a},$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}\left(x^0\right)\right|\leqslant\left\|\nabla f\left(x^0\right)\right\|.$$

Dem: *1. Según el Teorema 3.5.1,*

$$f(x) = f\left(x^0\right) + \boldsymbol{c} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) + d\left(x, x^0\right) f^0(x)$$

en una vecindad de x^0*, donde* $\boldsymbol{c} = \nabla f\left(x^0\right)$*. Si definimos* $x = x^0 + h\boldsymbol{a}$ *y elegimos* $|h| = d\left(x, x^0\right) \neq 0$ *suficientemente pequeño, se tiene que*

$$f\left(x^0 + h\boldsymbol{a}\right) - f\left(x^0\right) = h\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} + |h| f^0\left(x^0 + h\boldsymbol{a}\right),$$

por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}\left(x^0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x^0 + h\boldsymbol{a}\right) - f\left(x^0\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} + \frac{|h|}{h} f^0\left(x^0 + h\boldsymbol{a}\right)\right) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \left(\nabla f\left(x^0\right)\right) \cdot \boldsymbol{a}.$$

2. Utilizando la desigualdad de Schwarz obtenemos

$$\left|\left(\nabla f\left(x^0\right)\right)\cdot \boldsymbol{a}\right| \leqslant \left\|\nabla f\left(x^0\right)\right\|\cdot\|\boldsymbol{a}\| = \left\|\nabla f\left(x^0\right)\right\|$$

Comentamos que si $\nabla f\left(x^0\right) = \overrightarrow{0}$, entonces la fórmula (2.1) implica que

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}\left(x^0\right) = 0 \quad \text{para toda dirección } \boldsymbol{a}.$$

Por otro lado, si $\nabla f\left(x^0\right) \neq \overrightarrow{0}$, entonces

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{\left\|\nabla f\left(x^0\right)\right\|}\nabla f\left(x^0\right)$$

define una dirección en $\mathbb{R}^n$. Para la derivada direccional de f en x^0 en la dirección $\boldsymbol{a}_0$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}_0}\left(x^0\right) = \left(\nabla f\left(x^0\right)\right)\cdot \boldsymbol{a}_0 = \frac{\nabla f\left(x^0\right)\cdot\nabla f\left(x^0\right)}{\left\|\nabla f\left(x^0\right)\right\|} = \left\|\nabla f\left(x^0\right)\right\|.$$

Esto significa que $\boldsymbol{a}_0$ es una dirección extremal, dado que según la fórmula (2.2),

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}\left(x^0\right)\right| \leqslant \left\|\nabla f\left(x^0\right)\right\| = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}_0}\left(x^0\right)$$

para cualquier dirección $\boldsymbol{a}$. En otras palabras, $\boldsymbol{a}_0$ es la dirección del mayor crecimiento de f en el punto x^0

Si f es diferenciable en un punto x^0, entonces la existencia de las derivadas direccionales (garantizada por el Teorema 3.5.2) en x^0 asegura que f es continua en x^0 en todas las direcciones. Sin embargo, esto no nos permite concluir que f es continua en x^0. Pero en el siguiente teorema demostraremos que si f es diferenciable en x^0 (en el sentido de la Definición 3.5.1), f es continua en x^0. Para tal efecto demostraremos primero el siguiente teorema.

Teorema 3.5.3 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea f diferenciable en x^0. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D(f)$ con $d\left(x, x^0\right) < \delta$ se tiene que*

$$\left|f(x) - f\left(x^0\right)\right| \leqslant M d\left(x, x^0\right)$$

con la constante

$$M = \left\| \nabla f\left(x^0\right) \right\| + \varepsilon$$

Dem: *Dado que la función f es diferenciable, existe una vecindad $U\left(x^0\right)$ de x^0 donde*

$$f(x) = f\left(x^0\right) + \boldsymbol{c} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) + d\left(x, x^0\right) f^0(x), \quad \boldsymbol{c} = \nabla f\left(x^0\right).$$

Ahora, para $\varepsilon > 0$ elegimos un $\delta > 0$ tal que $x \in U_\delta\left(x^0\right)$ y $\left|f^0(x)\right| < \varepsilon$ para todo x tal que $d\left(x, x^0\right) < \delta$. Utilizando la desigualdad de Schwarz, obtenemos para $d\left(x, x^0\right) < \delta$ lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f\left(x^0\right)\right| &\leqslant \left|\boldsymbol{c} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right)\right| + d\left(x, x^0\right) \left|f^0(x)\right| \\ &\leqslant \|\boldsymbol{c}\| \left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right\| + d\left(x, x^0\right) \left|f^0(x)\right| \\ &\leqslant \left(\left\|\nabla f\left(x^0\right)\right\| + \varepsilon\right) d\left(x, x^0\right) \end{aligned}$$

Con la ayuda del Teorema 2.6 podemos demostrar ahora la continuidad de f.