
APUNTES DE MODELIZACIÓN CONTINUA II

EDP: Un curso de graduación

Versión del 17 de octubre de 2024

Víctor Andrés Osores Escalona
Departamento de Matemática, Física y Estadística
Universidad Católica del Maule, Chile

Índice general

Contents	III
1. Definiciones Básicas	1
1.1. Introducción	1
1.2. Linealidad y Superposición	5
1.3. Condiciones de Frontera e Iniciales	8
1.4. Ejercicios	13
2. Ecuaciones de Primer Orden: Caso Lineal	16
2.1. Algunos Ejemplos	16
2.2. El Problema de Cauchy	20
2.3. Solución General	26
2.4. Ejercicios	31
3. Ecuaciones de Primer Orden: No todo son flores	36
3.1. Retornando al Problema de Cauchy	36
3.2. Propagación de Singularidades	42
3.3. Ondas de choque	47
4. Ecuaciones semilineales de segundo orden	52
4.1. Clasificación	52
4.2. Formas canónicas y curvas características	56
5. La ecuación de la onda	60
5.1. Solución General	60
5.2. La Cuerda Infinita	62
5.3. Funciones Pares, Impares y Periódicas	66

5.4. La Cuerda Finita	74
6. Introducción a métodos numéricos para EDPs	77
6.1. Método de diferencias finitas	77
6.1.1. Principio general	77
6.1.2. Serie de Taylor	78
6.1.3. Aproximación de la segunda derivada	79
6.2. Formulación en diferencias finitas para un problema 1D	80
6.2.1. Teoría variacional y aproximación	80
6.2.2. Un esquema de diferencias finitas	80
6.2.3. Esquema consistente	82
6.3. Esquemas de diferencias finitas para problemas dependientes del tiempo	84
6.3.1. El problema continuo	84
6.3.2. Estimación de la energía	86
6.3.3. Un esquema explícito	87
6.3.4. Otros esquemas	89
6.3.5. Estabilidad y análisis de Fourier	91
6.4. Implementación en Python	91
6.4.1. Aplicación a una EDO	91
6.4.2. Aplicación a una EDP	94
6.5. Volúmenes finitos	96
6.6. Elementos Finitos	96

CAPÍTULO 1

Definiciones Básicas

En este capítulo introduciremos algunos conceptos básicos y daremos una serie de ejemplos de problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales que resolveremos a lo largo del libro.

1.1 Introducción

Vamos a comenzar presentando notación y terminología. Denotaremos al *espacio euclideo* de dimensión n , donde n es un entero mayor o igual que 1, por \mathbb{R}^n . El conjunto de los *números enteros* será denotado por \mathbb{Z} y el de los *números complejos* por \mathbb{C} . Por convención en este curso el cero no es un *número natural*, de modo que consideraremos al conjunto de los números naturales como $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\}$. También usaremos la notación $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$.

Dados dos puntos (o vectores), $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ en \mathbb{R}^n , la *distancia* entre x e y viene dada por

$$|x - y| = \left[\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.1)$$

El conjunto de todos los puntos a una distancia menor que $r > 0$ de un punto fijo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamada *bola abierta* centrada en x_0 de radio r denotada por $B(x_0, r)$, esto es,

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}.$$

Un subconjunto Ω de \mathbb{R}^n es *abierto* si, dado cualquier $x_0 \in \Omega$, existe una bola abierta centrada en x_0 totalmente contenida en Ω . Un subconjunto F de \mathbb{R}^n es *cerrado* si su complemento

$$\mathbb{R}^n - F = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin F\}$$

es abierto. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la *clausura* de A , denotada por \bar{A} , es el mínimo conjunto cerrado que lo contiene; el *interior* de A , denotado por A° , es el máximo conjunto abierto contenido en A y el borde o *frontera* de A , denotado por ∂A , es

$$\partial A = \{x \in \bar{A} : x \notin A^\circ\}.$$

Si $u = u(x, y, z, t, \dots)$ es una función de varias variables, usaremos notaciones diferentes para las *derivadas parciales* de u por ejemplo, la derivada parcial de u respecto de la variable x , que es la primera variable, podrá denotarse por

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_x, \quad \partial_x u \quad \text{ó} \quad D_1 u.$$

Análogamente, las derivadas de segundo orden podrán denotarse por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xx}, \quad \partial_x^2 u \quad \text{ó} \quad D_1^2 u,$$

en caso de derivación respecto a la misma variable x y, en el caso de variables diferentes, derivando primero respecto a x y luego respecto a y ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad u_{yx}, \quad \partial_y \partial_x u \quad \text{o} \quad D_2 D_1 u.$$

Una *ecuación en derivadas parciales* o *ecuación diferencial parcial* (EDP) es una ecuación con dos o más variables independientes x, y, z, t, \dots y derivadas parciales de una función (variable dependiente) $u = u(x, y, z, t, \dots)$. Más precisamente, una EDP en n variables independientes x_1, \dots, x_n es una ecuación de la forma

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} \right) = 0, \quad (1.1.2)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , F es una función dada y $u = u(x)$ es la función que deseamos determinar. Observe que con una definición tan general existen EDPs absurdas, como por ejemplo $\exp(u_x + u_y) = 0$.

La clasificación de EDPs según *orden* y *linealidad* es semejante a la clasificación de las *ecuaciones diferenciales ordinarias* (EDOs). El *orden* de una EDP es dado por la derivada parcial de mayor orden que aparece en la ecuación; por ejemplo, el orden de la ecuación (1.1.2) es k si F , como función de alguna de las derivadas de orden k , no es constante. Se dice que una EDP es *lineal* si es de primer grado en u y en todas sus derivadas parciales que aparecen en la ecuación. En caso contrario se dice que la ecuación es *no lineal*. La forma más general de una EDP lineal de primer orden es

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) D_j u + b(x) u + c(x) = 0, \quad (1.1.3)$$

donde alguno de los coeficientes a_j no es idénticamente nulo. Para ecuaciones de segundo orden, la forma más general de una EDP lineal es

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x) u + d(x) = 0, \quad (1.1.4)$$

en donde alguno de los coeficientes a_{ij} no es idénticamente nulo. En caso de dos variables independientes, las ecuaciones (1.1.3) y (1.1.4) pueden reformularse, respectivamente,

$$A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u + D(x, y) = 0. \quad (1.1.5)$$

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u + G(x, y) = 0. \quad (1.1.6)$$

Nota: La ecuación (1.1.6) no contiene término alguno con u_{yx} , aunque la ecuación (1.1.4) contenga tal término; la razón es que estamos interesados en las llamadas soluciones clásicas de la ecuación (1.1.6), esto es, soluciones u que son dos veces continuamente diferenciables en la región de interés Ω . Para tales funciones, $u_{xy} = u_{yx}$.

Decimos que una EDP lineal es *homogénea* si el término que no contiene a la variable dependiente es idénticamente nula.

Ejemplo 1.1.1

1. La ecuación (1.1.5) es homogénea si y solamente si la función $D(x, y)$ es idénticamente nula.
2. La ecuación (1.1.6) es homogénea si y solamente si $G(x, y) = 0$.

Nota: Observe que la función idénticamente nula es siempre solución de cualquier EDP lineal homogénea.

La parte de la ecuación que contiene las derivadas de mayor orden determina, en muchos casos, propiedades de las soluciones; esa es la llamada *principal* de la EDP. Por ejemplo, las partes principales de las ecuaciones (1.1.5) y (1.1.6) son, respectivamente,

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y,$$

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy}.$$

Entre las ecuaciones no lineales, las que tienen la parte principal lineal son llamadas *semilineales*. Por ejemplo, una EDP de primer orden semilineal con tres variables independientes x, y, z es de la forma

$$A(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = F(x, y, z, u).$$

La forma más general de una EDP semilineal de segundo orden es

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_iD_ju = f(x, u, D_1u, \dots, D_nu).$$

Ejemplo 1.1.2

1. La ecuación

$$xu_x - yu_y = \sin(xy)$$

es una EDP lineal no homogénea de primer orden.

2. La ecuación

$$u_t = u_{xxx} + uu_x$$

es semilineal de tercer orden. Se le conoce como *KdV* (una abreviación de Korteweg y de Vries).

3. Una ecuación más simple es la ecuación de *Burger*, con viscosidad

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_x^2 u,$$

donde ν es constante, que también es semilineal pero de segundo orden.

4. La ecuación de *Sine-Gordon*,

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0,$$

es una EDP semilineal de segundo orden.

5. La ecuación de *Poisson*,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y)$$

es una ecuación lineal de segundo orden no homogénea si la función h no fuera idénticamente nula. En caso que $h \equiv 0$, la ecuación es homogénea y llamada ecuación de *Laplace*. La ecuación de *Poisson* está asociada a fenómenos físicos estacionarios, esto es, independientes del tiempo, como por ejemplo potenciales electrostáticos generados por distribuciones fijas de carga.

6. La ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ y α^2 es una constante. En dimensiones mayores la ecuación del calor es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u,$$

donde $u = u(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ y Δ es el laplaciano en \mathbb{R}^n (en las variables espaciales x_1, \dots, x_n). Esta ecuación es de segundo orden, lineal y homogénea.

7. La ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

es lineal, homogénea y de segundo orden. La variable $t > 0$ representa el tiempo, $x \in \mathbb{R}$ es la variable espacial y $c > 0$ es una constante (velocidad de propagación de la onda). La ecuación de onda en dimensiones mayores viene dada por

$$u_{tt} = c^2 \Delta u,$$

donde $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ y Δ es el laplaciano en \mathbb{R}^n . La ecuación de onda, como su nombre lo indica, está asociada a fenómenos ondulatorios.

Las ecuaciones de *Poisson*, del *calor* y de la *onda*, además de ser interesantes desde el punto de vista físico, son prototipos de los tipos elíptico, parabólico e hiperbólico, respectivamente (que describiremos en el Capítulo 4) y el conocimiento de sus propiedades permite estudiar ecuaciones más generales de cada tipo. La mayor parte de este libro trata de problemas relacionados con esas ecuaciones en dos variables independientes.

1.2 Linealidad y Superposición

Las consideraciones que haremos a continuación son válidas para las EDPs lineales de cualquier orden pero, para fijar ideas, consideraremos una EDP de primer o segundo orden con n variables independientes x_1, \dots, x_n . Usaremos la notación vectorial $x = (x_1, \dots, x_n)$. Estamos considerando entonces una ecuación del tipo

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x) u + d(x) = 0. \quad (1.2.1)$$

Denotaremos por k el orden de la ecuación, $k = 1$ ó $k = 2$. Note que si $k = 1$, entonces $a_{ij} \equiv 0$ cualesquiera que sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y existe j , $1 \leq j \leq n$, tal que $b_j \neq 0$.

Podemos reformular la ecuación (1.2.1) en la forma

$$Lu = f, \quad (1.2.2)$$

donde $f(x) = -d(x)$ y

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x). \quad (1.2.3)$$

A cada función u (suficientemente diferenciable) le corresponde una única función Lu ; de esa manera definimos un *operador* o *transformación* L . Más precisamente, sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y suponga que las funciones a_{ij} , b_j y c , para $1 \leq i, j \leq n$, son continuas en Ω y toman valores reales; podemos entonces definir

$$\begin{aligned} L : C^k(\Omega) &\rightarrow C(\Omega) \\ u &\rightarrow Lu \end{aligned}$$

donde Lu es dado por la fórmula (1.2.3) y $C^k(\Omega)$ (resp. $C(\Omega)$) es el conjunto de las funciones $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ k veces continuamente diferenciables (resp. continuas).

Observación: En este libro nos interesaremos básicamente en soluciones reales para las EDPs, aunque la teoría para las funciones complejas sea completamente análoga. Sin embargo, en muchas ocasiones usaremos funciones complejas auxiliares, notoriamente en el estudio de las series e integrales de Fourier. Aprovechamos la oportunidad para recordar que, si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, entonces existen funciones reales $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ univocamente determinadas, tales que

$$f(x) = u(x) + iv(x), \forall x \in \Omega,$$

$u = \operatorname{Re} f$ es la parte real de f y $v = \operatorname{Im} f$ es la parte imaginaria de f . La función f es continua (resp. diferenciable) en x si y solamente si u y v son continuas (resp. diferenciables) en x . Además, la función f puede ser integrada en relación a una de las variables (por ejemplo, x_1) en el intervalo $[a, b]$ si y solamente si u y v pueden serlo; en ese caso

$$\int_a^b f(x_1, \dots, x_n) dx_1 = \int_a^b u(x_1, \dots, x_n) dx_1 + i \int_a^b v(x_1, \dots, x_n) dx_1$$

Denotaremos por $C_{\mathbb{C}}^k(\Omega)$ (resp. $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$) al conjunto de las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ k veces continuamente diferenciables (resp. continuas).

El término **operador** (o transformación) se usa para resaltar que la función L está definida entre espacios de funciones, esto es, L lleva una función u (con determinadas propiedades) en otra función Lu . El operador L es un ejemplo de un operador diferencial parcial.

El hecho que la ecuación (1.2.1) es lineal implica que el operador L definido por (1.2.3) es un operador lineal, es decir, L lleva la función idénticamente nula en ella misma y

$$L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv \quad (1.2.4)$$

cualesquiera sean u, v en el dominio de L y para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. La propiedad (1.2.4) puede deducirse fácilmente de la expresión (1.2.3).

Como en el caso de las EDOs, podemos asociar a la EDP no homogénea (1.2.2) la EDP lineal homogénea

$$Lu = 0, \quad (1.2.5)$$

que es llamada **ecuación homogénea** asociada a la ecuación (1.2.2). Usando la linealidad del operador L e inducción, es fácil ver que toda combinación lineal de soluciones de la ecuación (1.2.5) es también solución, es decir, si u_1, \dots, u_m satisfacen (1.2.5) y si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ son escalares, entonces

$$u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$$

también es solución de (1.2.5). En el lenguaje del álgebra lineal, L es un operador lineal definido en un espacio vectorial V de funciones ($V = C^k(\Omega)$) y las soluciones $u \in V$ de la ecuación (1.2.5) forman un subespacio de V . Este resultado es conocido como el **principio de superposición** (en su forma finita).

Al contrario de lo que sucede con las EDOs lineales homogéneas, el espacio de soluciones de la ecuación (1.2.5) puede tener dimensión infinita. Además, existen EDPs lineales de primer orden que no tienen solución! (El primer ejemplo de una tal ecuación con coeficientes complejos fue dado por H. Lewy en 1957: él probó que existe una función f tal que la ecuación

$$u_x + iu_y - 2i(x + iy)u_t = f$$

no tiene solución.

Ejemplo 1.2.1 Vamos a buscar soluciones clásicas de la ecuación lineal homogénea:

$$u_{xy} = 0 \quad (1.2.6)$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En este caso el operador L es dado por

$$\begin{aligned} L : C^2(\mathbb{R}^2) &\rightarrow C(\mathbb{R}^2) \\ (Lu)(x, y) &= u_{xy}(x, y), u \in C^2(\mathbb{R}^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Vamos a resolver (1.2.6) por integración: fijando la variable x e integrando respecto de y , obtenemos

$$u_x = F(x)$$

donde F es una función arbitraria en $C^1(\mathbb{R})$; fijando ahora la variable y e integrando respecto de x , obtenemos

$$u(x, y) = f(x) + g(y) \quad (1.2.7)$$

donde f es una primitiva de F en $C^2(\mathbb{R})$ y g es una función arbitraria en $C^2(\mathbb{R})$; como F es arbitraria, se sigue que f y g son funciones arbitrarias en $C^2(\mathbb{R})$. Como es evidente que todas las funciones de la forma (1.2.7) con f y $g \in C^2(\mathbb{R})$ son soluciones de la ecuación (1.2.6); concluimos que el espacio de las soluciones clásicas de (1.2.6) es precisamente el conjunto

$$\{u \in C^2(\mathbb{R}^2) : u(x, y) = f(x) + g(y), (x, y) \in \mathbb{R}^2, f, g \in C^2(\mathbb{R})\}.$$

Por tanto, en ese caso simple, el espacio de soluciones tiene dimensión infinita. Tal vez fuimos un poco exagerados en el ejemplo anterior, al insistir tantas veces en los espacios de funciones utilizados. Esa exageración fue a propósito: queríamos resaltar la importancia del espacio de funciones donde buscamos las soluciones (en otras palabras, el dominio del operador L). De hecho, hasta ahora no hemos definido lo que entendemos por solución de una EDP, la noción intuitiva de que una solución es una función que satisface idénticamente la ecuación es muy vaga; existen muchas interpretaciones posibles de esa noción intuitiva, generalizando inclusive el concepto de función. Esta discusión va más allá del presente texto y el lector interesado debe consultar libros más avanzados.

El ejemplo anterior nos lleva, de forma natural, a preguntar sobre la posibilidad de formar “combinaciones lineales infinitas” de soluciones. En otras palabras, ¿existe una forma infinita del principio de superposición? La respuesta es afirmativa, bajo ciertas condiciones.

Proposición 1.2.1 (Principio de Superposición.) Sea L un operador diferencial parcial lineal de orden k cuyos coeficientes están definidos en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponga que $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$ es un conjunto de funciones de clase C^k en Ω satisfaciendo la EDP lineal homogénea (1.2.5). Entonces, si $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$ es una sucesión de escalares tal que la serie

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m u_m(x)$$

es convergente y k veces diferenciable término a término en Ω , u satisface (1.2.5).

Dem: Hemos enunciado la proposición en el caso general, pero la demostraremos para el caso $k = 1$ ó $k = 2$, esto es, cuando L es definido por (1.2.3). En este caso, por hipótesis, cualesquiera que sean

$x \in \Omega, 1 \leq i, j \leq n,$

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \\ D_i u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i u_m(x) \\ D_i D_j u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x), \end{aligned}$$

y esas series convergen. Por tanto, para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_j u_m(x) + c(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u_m(x) + c(x) u_m(x) \right] \\ &= \sum_{m=1}^m \alpha_m (Lu_m)(x) = 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra la proposición (1.2.1) en el caso que $k = 1$ ó $k = 2$.

El método de separación de variables, que estudiaremos más adelante, se basa en el principio de superposición, por lo que tendremos muchas oportunidades de aplicar la proposición (1.2.1).

1.3 Condiciones de Frontera e Iniciales

Una diferencia importante entre EDOs y EDPs es la información adicional necesaria para la *unicidad de la solución*. Por ejemplo, en la solución general de una EDO lineal aparecen una o más constantes arbitrarias: podemos determinar esas constantes imponiendo condiciones iniciales, esto es, fijando los valores de la solución y de sus derivadas hasta cierto orden en un determinado punto; podemos también lograr unicidad, en el caso de intervalos finitos, imponiendo condiciones en los extremos de los intervalos, las llamadas condiciones de frontera (como en los problemas de *Sturm-Liouville*). La situación para las EDPs es fundamentalmente diferente: inclusive en el caso lineal, la solución general cuando es posible encontrarla, involucra funciones arbitrarias de las variables independientes (como vimos en el ejemplo (1.2.6)), de modo que existe un grado de generalidad mucho mayor respecto a la forma de la solución.

En el caso de las EDPs el espacio de las variables independientes es *multidimensional*: buscamos soluciones definidas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; es natural sustituir los extremos del intervalo (caso $n = 1$) por el borde $\partial\Omega$ de la región Ω . Cuando imponemos condiciones sobre el valor de la solución y de sus derivadas en el borde de la región (condiciones de frontera) tenemos un *problema de valores de frontera* o, simplemente, un problema de frontera. Las condiciones de frontera aparecen de manera natural en

la descripción de fenómenos físicos estacionarios (esto es, independientes del tiempo); muchas veces encontraremos condiciones del tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.3.1)$$

donde α y β son constantes dadas, f es una función dada en $\partial\Omega$ y $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada de u en la dirección normal a $\partial\Omega$.

- En el caso $\beta = 0$, la condición (1.3.1) se conoce como *condición de Dirichlet*.
- En el caso $\alpha = 0$, tenemos una *condición de Neumann*.

¿Cómo generalizar el concepto de condiciones iniciales (en el caso de EDOs) para EDPs? Como en el caso de EDPs tenemos más de una variable dependiente (por ejemplo x, t), es natural fijar una de las variables (por ejemplo $t = 0$) e imponer el valor de la solución y de sus derivadas parciales respecto a la variable fija como función de las otras variables (por ejemplo $u(x, 0) = f(x)$ y $u_t(x, 0) = g(x)$, f y g funciones dadas). Observe que en el caso $n = 2$, con variables x, t , eso significa imponer el valor de la solución y sus derivadas normales a lo largo de la curva $t = 0$; análogamente, en el caso $n = 3$, con variables x, y, t , fijar $t = 0$ significa observar la solución (y sus derivadas normales, si fuera el caso) a lo largo de la superficie $t = 0$. Podemos entonces generalizar el concepto de *condiciones iniciales* imponiendo el valor de la solución y sus derivadas normales a lo largo de una curva (si $n = 2$) o a lo largo de una superficie (si $n = 3$). El problema correspondiente es un *problema de Cauchy* o de *valor inicial*. En problemas físicos dependientes del tiempo t , como es el caso de fenómenos de difusión y de fenómenos oscilatorios, muchas veces es conveniente separar la variable temporal t de las variables espaciales x, y, z . Lo que muchas veces ocurre es que los valores de la solución y de sus derivadas respecto del tiempo hasta el orden $k - 1$ (suponiendo que la EDP es de orden k en t) se describen en el instante $t = 0$ como función de x, y, z (condición inicial) al mismo tiempo que se imponen condiciones de frontera, para todo $t \geq 0$ respecto de las variables espaciales: tales problemas se denominan *problemas mixtos*. Los conceptos precedentes quedarán más claros con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.3.1

1. El problema

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x, p(x)) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ son funciones dadas, es un *problema de Cauchy*. Como la EDP es de primer orden, basta imponer el valor de la solución en la curva inicial $y = p(x)$ en el plano. Veremos en el próximo capítulo que dicho problema tiene una única solución clásica.

2. El problema

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(0, y) &= f(y), y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

es también un *problema de Cauchy* que involucra una EDP lineal de primer orden. La curva inicial es el eje de las y . Al contrario del ejemplo anterior, el problema (1.3.1.2) no tiene solución

(si f no es constante) o tiene infinitas soluciones (si f es constante). Veremos, en siguiente capítulo, por qué sucede esto y cuándo existe solución para el **problema de Cauchy** con EDPs lineales de primer orden.

3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado (Ω es el interior del sólido $\bar{\Omega}$). Denotemos por $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a los puntos de \mathbb{R}^3 y por Δ al laplaciano en \mathbb{R}^3 . Entonces el problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 \Delta u \text{ en } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

es un **problema mixto**: la condición $u(\mathbf{x}, t) = 0$ para $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ y $t \geq 0$ es una condición de frontera, mientras que la condición $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ es una condición inicial. La función f es dada, α^2 es una constante positiva y buscamos una solución

$$u \in C(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)) \cap C^2(\Omega \times (0, +\infty)),$$

luego f tiene que estar en $C(\bar{\Omega})$. Observe que, para que exista solución, f debe satisfacer una condición de compatibilidad

$$f(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (1.3.3)$$

En problemas mixtos, la condición de contorno y la condición inicial no son completamente independientes y entonces es preciso que se satisfaga una condición de compatibilidad para que exista solución.

El problema (1.3.2) describe físicamente la temperatura $u(\mathbf{x}, t)$ en el punto \mathbf{x} y en el instante t del sólido $\bar{\Omega}$ hecho de material homogéneo, con difusividad térmica igual a α^2 y colocado en un recipiente térmico mantenido a temperatura constante igual a cero (condición de frontera) con una distribución inicial de temperatura $f(\mathbf{x})$ (condición inicial). No discutiremos el problema (1.3.2) pero estudiaremos en detalle el problema análogo en una dimensión espacial, esto es

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \text{ en } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

con condición de compatibilidad

$$f(0) = 0 = f(l).$$

En el lugar del sólido $\bar{\Omega}$ tenemos ahora una barra de sección recta uniforme (con área muy pequeña respecto de la longitud) y longitud l ; es necesario suponer en este caso que no hay intercambio de calor con el exterior a través de la superficie lateral de la barra (los extremos corresponden al borde de Ω y están mantenidos a temperatura cero, por la condición de frontera). Si la función f satisface la condición de compatibilidad correspondiente, tanto (1.3.2) como (1.3.4) tienen una única solución clásica (esto es, continua en la región cerrada y dos veces continuamente diferenciable en el interior). Como (1.3.2), (1.3.4) es un problema mixto pero puede también ser considerado como un problema de contorno en la región no acotada $[0, l] \times [0, +\infty)$.

Ejemplo 1.3.2 El problema para la ecuación de onda en un intervalo acotado

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \text{ en } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

también puede ser considerado como mixto (condiciones iniciales $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, $x \in [0, l]$ y condiciones de frontera $u(0, t) = 0 = u(l, t)$, $t \geq 0$) o como un problema de frontera en la región no acotada $[0, l] \times [0, +\infty)$. Observe que, como la ecuación de onda es de segundo orden respecto de la variable temporal t , precisamos de dos condiciones iniciales. Para que exista solución es necesario que f satisfaga la condición de compatibilidad

$$f(0) = 0 = f(l). \quad (1.3.6)$$

Más tarde veremos que, si queremos soluciones $u \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2((0, l) \times (0, \infty))$ con u_t continua en $[0, l] \times \{0\}$ necesitaremos, además de la condición (1.3.6), que $f \in C^2([0, l])$ con $f''(0) = 0 = f''(l)$ y que $g \in C^1([0, l])$ con $g(0) = 0 = g(l)$; probaremos que el problema (1.3.5) tiene de hecho una única solución en ese caso. Del punto de vista físico, el problema (1.3.5) describe una cuerda elástica de longitud l sujeta en las puntas y vibrando en un plano vertical (una cuerda de violín, por ejemplo); $u(x, t)$ es el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x en el instante t y las funciones f y g describen, respectivamente, la posición y velocidad iniciales de la cuerda. La ecuación de onda en (1.3.5) puede deducirse suponiendo que la cuerda tiene densidad de masa constante, que la amplitud es pequeña respecto de la longitud de la cuerda y que los efectos amortiguadores son despreciables. La constante c^2 es la tensión dividida entre la densidad, de modo que c tiene dimensión de velocidad: de hecho, c es la velocidad de propagación de la onda a lo largo de la cuerda. La ecuación en (1.3.5) corresponde a vibraciones libres; en el caso de vibraciones forzadas la ecuación es

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t),$$

mientras que la ecuación para vibraciones amortiguadas puede ser del tipo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - bu_t,$$

b una constante positiva o, más generalmente,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - f(u_t).$$

La generalización del problema (1.3.5) con dos variables espaciales es

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \Delta u \text{ en } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x, y, t) &= 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega} \\ u_t(x, y, 0) &= g(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

donde Ω es un subconjunto abierto acotado de \mathbb{R}^2 y Δ es el laplaciano en \mathbb{R}^2 ; la condición de compatibilidad en este caso es

$$f(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \partial\Omega. \quad (1.3.8)$$

El problema (1.3.7) describe el movimiento de una membrana vibrando (como en un tambor) y también tiene una única solución si f satisface la condición de compatibilidad (1.3.8).

Ejemplo 1.3.3 Otro problema que involucra la ecuación de onda es

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \Delta u, x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x, 0) &= g(x), x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

donde $n = 1, 2$ ó 3 y Δ es el laplaciano en \mathbb{R}^n . El problema (1.3.9) es un problema de Cauchy y tiene una única solución. Estudiaremos el problema (1.3.9) en el caso $n = 1$.

Ejemplo 1.3.4 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= f \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

es un problema de frontera y de hecho un **problema de Dirichlet**. Estudiaremos ese problema para algunas regiones particulares (si Ω fuera una región rectangular o el interior de un círculo). El problema (1.3.10) tiene una única solución.

Ejemplo 1.3.5 Otro problema de frontera para la ecuación de Laplace es

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \text{ en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

que es un problema de Neumann. Observe que (1.3.11) no tiene solución única: si u es solución de (1.3.11), entonces $u + c$ también lo es para cualquier constante c .

Dado un problema que consiste en una EDP y condiciones de contorno y/o iniciales, existen tres preguntas fundamentales:

- (i) existencia de soluciones;
- (ii) unicidad de solución;
- (iii) dependencia de la solución en los datos iniciales y/o de frontera.

Para estudiar la existencia es necesario especificar no solamente la clase de funciones donde buscamos solución sino también en qué sentido las condiciones de frontera y/o iniciales son satisfechas.

Consideremos, por ejemplo, el problema (1.3.1.3) con Ω el interior de la esfera de radio 1 con centro en el origen y $f \in C(\bar{\Omega})$ satisfaciendo la condición de compatibilidad (1.3.3). Si buscamos soluciones $u \in C^2(\Omega \times (0, +\infty))$ pero no necesariamente continuas en $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ ¿Cómo interpretar la condición de frontera? Podríamos, por ejemplo, buscar soluciones $u \in C^2(\Omega \times (0, +\infty))$ con la propiedad de que, para cada $t > 0$ y para cada $x_0 \in \partial\Omega$ fijos,

$$\lim_{\rho \uparrow 1} u(\rho x_0, t) = 0$$

note que en este caso estamos buscando soluciones que son radialmente continuas en las variables espaciales para cada t fijo pero no necesariamente continuas a priori en $\bar{\Omega}$. Análogamente, podríamos interpretar la condición inicial como

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = f(x)$$

para cada $x \in \bar{\Omega}$ fijo. Es claro que, del punto de vista físico, es natural buscar soluciones en $C(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)) \cap C^2(\Omega \times (0, +\infty))$. Una vez obtenida la existencia, el significado de la unicidad es claro: deseamos saber si la solución es única dentro de la clase especificada.

El estudio de la dependencia de la solución en los datos iniciales y/o de frontera es muy importante. Debemos recordar que los datos de un problema físico son datos experimentales que necesariamente contienen errores de medición; es, por tanto, natural preguntar si pequeñas variaciones en los datos causan pequeñas variaciones en la solución: si ese fuera el caso, diremos que la solución depende continuamente de los datos iniciales y/o de frontera. Es evidente que el significado de “pequeñas variaciones” depende del problema tratado. Un problema para el cual valen la existencia, unicidad y dependencia continua de los datos iniciales y/o de frontera se llama un problema bien puesto (en el sentido de Hadamard). De lo contrario se dice que el problema es mal puesto. De los ejemplos vistos en esta sección, los únicos mal puestos son el (1.3.1.2) y el (1.3.11). En este texto estudiaremos básicamente ecuaciones lineales de primer y segundo orden con dos variables independientes. Estaremos interesados en el estudio de la existencia y unicidad de soluciones clásicas para algunos problemas (incluyendo los dos ejemplos precedentes con dos variables independientes); la dependencia en los datos iniciales es más delicada y sólo será discutida en los ejemplos más simples.

1.4 Ejercicios

Sección 1: Introducción.

1. Indique el orden de las siguientes EDPs:

(i) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$

(ii) $u D_1^2 D_2 u + D_1 u = u^2 + 1$

(iii) $u_x u_t = \sin u$

(iv) $x^3 \partial_x u - u^3 \partial_t u + \partial_x^2 u = x^5 + t^4$

(v) $\frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = xyu$

2. Verifique cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales indicando, en tal caso, si son homogéneas o no:

- (i) $D_1 u^2 + D_2 u = 0$
- (ii) $x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + u = x + y$
- (iii) $(u_x)^2 - x^2 + u_t = 0$
- (iv) $u_{xx} - u_{tt} = \sin u$
- (v) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} = xyu$
- (vi) $x^2 D_2^2 u + y^2 D_1^2 u = D_1 u + D_2 u + xyu$

3. Identifique la parte principal de cada una de las ecuaciones de los ejercicios 1 y 2 precedentes.
4. Indique cuáles, entre las ecuaciones de los ejercicios 1 y 2 precedentes, son semilineales.

Sección 2: Linealidad y Superposición.

Pruebe directamente que si u y v son soluciones de una de las ecuaciones siguientes entonces toda combinación lineal de u y v también lo es:

- 1. $\frac{\partial u}{\partial x} + xu = 0$
- 2. $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- 3. $xu_y = xyu$
- 4. $yu_{xx} + xu_y = xyu$
- 5. $yu_{xx} + u_x + xu = 0$

Sección 3: Condiciones de Frontera e Iniciales.

Identifique las condiciones iniciales y/o de frontera en los problemas siguientes indicando si el problema es un problema de Cauchy, de frontera o mixto. Indique también si alguna de las funciones dadas tiene que satisfacer condiciones de compatibilidad.

- 1.

$$xu_x - yu_y = x^2 + y^2 \text{ en } \mathbb{R}^2$$

$$u(t^3, t^5) = t^2 + 1, t \in \mathbb{R}$$

- 2.

$$xu_x - yu_y = 0, \quad x^2 + y^2 < 4,$$

$$u(2 \sin t, 2 \cos t) = t \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- 3.

$$tu_{xx} + 2xu_{xt} - tu_{tt} + x^2 u_x + t^2 u_t = e^x \cos t, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.

$$y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} + xyu = x + y, \quad \text{si} \quad (x^2/4) + (y^2/9) < 1,$$
$$u(2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t) = t(2\pi - t), t \in [0, 2\pi].$$

5.

$$t^2 u_{xx} + xu_t - u = f(x, t), t > 0, x \in (0, 1)$$
$$u(0, t) = \alpha(t), u(1, t) = \beta(t), t \geq 0$$
$$u(x, 0) = \gamma(x), x \in (0, 1),$$

CAPÍTULO 2

Ecuaciones de Primer Orden: Caso Lineal

Como su nombre indica, en este capítulo estudiaremos ecuaciones lineales de primer orden. En la primera sección veremos algunos ejemplos simples de problemas de Cauchy que nos darán una idea de lo que puede suceder. La segunda sección es dedicada al estudio de problemas de Cauchy para ecuaciones lineales sin dependencia explícita en la variable dependiente. En la tercera y última sección discutiremos la solución general de ecuaciones lineales.

2.1 Algunos Ejemplos

En esta sección estudiaremos algunos ejemplos simples de problemas de Cauchy para ecuaciones lineales de primer orden con dos variables independientes.

Consideremos primero el ejemplo (1.3.1.1) del primer capítulo:

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x, p(x)) &= f(x), x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

donde $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ son funciones dadas. Como vimos anteriormente este es un problema de Cauchy: la función u que deseamos encontrar es conocida a lo largo de la curva inicial $y = p(x)$.

La EDP en (2.1.1) es muy simple y puede integrarse directamente: como la derivada parcial de u respecto de y es idénticamente nula, vemos que u es constante como función de y , o sea que, u sólo depende de x . En otras palabras, la solución general de la EDP en (2.1.1) es

$$u(x, y) = g(x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1.2}$$

donde $g \in C^1(\mathbb{R})$ es arbitraria (estamos buscando soluciones clásicas, esto es, $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$). Como (2.1.2) es válida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, considerando $y = p(x)$ obtenemos

$$g(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

es decir, la solución del problema (2.1.1) es dada por

$$u(x, y) = f(x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1.3}$$

Probamos entonces que, si u es una solución clásica de (2.1.1), u es dada por (2.1.3); recíprocamente, si u es dada por (2.1.3), entonces u es solución de (2.1.1). Por tanto el problema (2.1.1) tiene una única solución clásica.

Observe que, como estamos buscando soluciones $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, necesitamos que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Si quisiéramos soluciones más generales podríamos resolver el problema para funciones f más generales. Por ejemplo, si buscamos soluciones $u \in C(\mathbb{R}^2)$ tal que existe la derivada parcial en todos los puntos, f puede ser cualquier función continua. Además, observe que la curva inicial no requiere ser diferenciable de hecho ¡no es necesario que la función p sea continua!

La dependencia continua en los datos del problema (2.1.1) es evidente una vez que la solución $u(x, y)$ es igual a la condición inicial $f(x)$. Tenemos por consiguiente dependencia continua en los datos y el problema (2.1.1) es bien puesto.

Consideremos ahora el ejemplo (1.3.1.2) del capítulo 1:

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, u \in C^1(\mathbb{R}^2), \\ u(0, y) &= f(y), y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es dada. La única diferencia entre (2.1.1) y (2.1.4) es la curva inicial: en (2.1.1) ella es el gráfico de una función de x , mientras que en (2.1.4) es el eje de las y . Sin embargo, el problema (2.1.1) es bien puesto y (2.1.4) no lo es. De hecho, derivando la condición inicial en (2.1.4) respecto de y , obtenemos

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, \\ u_y(0, y) &= f'(y), y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

y por tanto

$$f'(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Luego, para que exista solución, es preciso que la función f sea constante. Si f es constante, $f \equiv k$, como la solución general de la EDP es dada por (2.1.2), la solución de (2.1.4) es

$$u(x, y) = g(x), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.1.5)$$

donde $g \in C^1(\mathbb{R})$ es cualquier función que satisface $g(0) = k$. En conclusión: el problema (2.1.4) no tiene solución si f no es constante y tiene infinitas soluciones si f es constante.

La situación es totalmente análoga si la curva inicial es una recta vertical: dado cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, el problema

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, \\ u(x_0, y) &= f(y), y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

no tiene solución si f no es constante y tiene infinitas soluciones si f es constante.

Y para curvas más generales, ¿Qué sucede? Para responder la pregunta vamos a dar un ejemplo más, tomando como curva inicial la parábola $x = 1 - y^2$, esto es, consideramos el problema

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, \\ u(1 - y^2, y) &= f(y). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es dada.

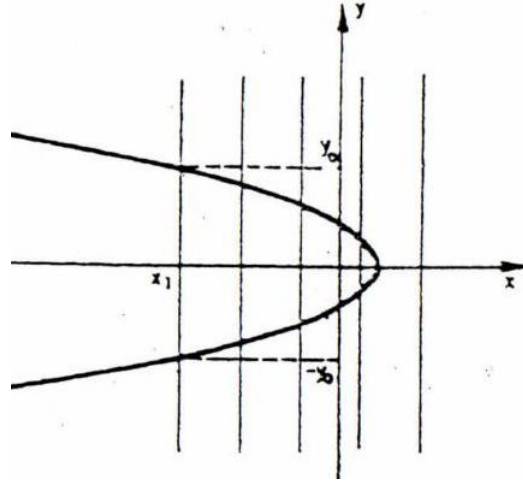


Figura 2.1: La solución es constante a lo largo de rectas verticales.

Como vimos anteriormente (ecuación (2.1.5)), la solución general de la EDP en (2.1.6) es una función sólo de x ; luego, si u es solución de (2.1.6), dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $u(x_0, y) = g(x_0)$ es constante, es decir, $u(x, y)$ es constante a lo largo de rectas verticales. Dado $x_0 < 1$, la recta vertical $x = x_0$ intersecta la curva inicial en dos puntos (x_0, y_0) y $(x_0, -y_0)$; pero entonces, si u es solución,

$$f(y_0) = u(x_0, y_0) = u(x_0, -y_0) = f(-y_0).$$

Luego, para que el problema (2.1.6) tenga solución, es necesario que

$$f(y) = f(-y), \forall y \in \mathbb{R},$$

es decir, es preciso que f sea una función par. Entonces, si f no es par, el problema no tiene solución. Si f es par, es de esperar que el problema tenga infinitas soluciones pues u no está determinada para $x > 1$: dado $x_0 > 1$, la recta vertical $x = x_0$ no intersecta la curva inicial. En verdad, como estamos buscando soluciones de clase C^1 , aún cuando fuera par es necesario imponer una condición adicional: observe que la solución, por lo que vimos antes, debe ser dada por

$$u(x, y) = f(\sqrt{1-x}) \text{ si } x \leq 1,$$

como queremos $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, se requiere que exista la derivada

$$\left. \frac{d}{dx}(f(\sqrt{1-x})) \right|_{x=1}$$

y, en ese caso, las soluciones del problema (2.1.6) son dadas por

$$u(x, y) = \begin{cases} f(\sqrt{1-x}) & \text{si } x \leq 1 \\ g(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

donde $g \in C^1([1, +\infty))$ satisfice

$$g(1) = f(0), \quad g'(1) = \left. \frac{d}{dx}(f(\sqrt{1-x})) \right|_{x=1}.$$

El estudio de este ejemplo deja claro que el problema de Cauchy para la ecuación

$$u_y = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, \quad (2.1.7)$$

tiene solución única para cualquier condición inicial $f \in C^1(\mathbb{R})$ si la curva inicial es tal que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, la recta $x = x_0$ intersecta a la curva en exactamente un punto; en otras palabras, si la curva inicial es el gráfico de una función $y = p(x)$. Entonces estamos otra vez en el problema (2.1.1).

Aquí el aspecto fundamental es que todas las soluciones de la EDP (2.1.7) son constantes en rectas verticales y las curvas iniciales "buenas" son las que no tienen tangentes verticales. Veremos posteriormente que las rectas verticales son curvas características planas para la EDP (2.1.7): En el caso de EDPs de primer orden las curvas características son curvas a lo largo de las cuales la EDP es una derivada total: integrando entonces a lo largo de dichas curvas resolvemos la ecuación. Exactamente fue eso lo que hicimos para hallar la solución general de (2.1.7): integramos respecto de y , o sea, a lo largo de las rectas $x = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

La ecuación (2.1.7) es una EDP lineal homogénea pero las ecuaciones no homogéneas pueden resolverse de la misma manera. Para nuestro ejemplo, la ecuación no homogénea correspondiente es

$$u_y = h(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1.8)$$

donde $h \in C(\mathbb{R}^2)$ es dada. Observe que las características planas son las mismas: a lo largo de la recta $x = x_0$ la ecuación queda

$$\frac{d}{dy} u(x_0, y) = h(x_0, y).$$

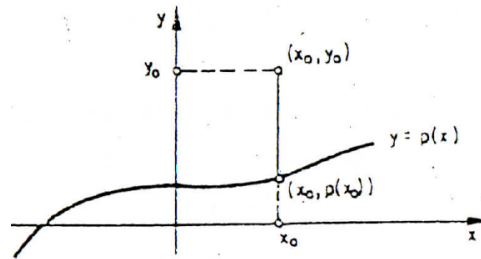


Figura 2.2: La solución se obtiene integrando a lo largo de las características planas (en el caso, las rectas verticales).

Vamos a resolver el problema correspondiente al (2.1.1), esto es,

$$\begin{aligned} u_y &= h(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \\ u(x, p(x)) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

donde $h \in C(\mathbb{R}^2)$, $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ son dadas. Para hallar la solución en el punto (x_0, y_0) basta integrar a lo largo del segmento de recta determinado por $(x_0, p(x_0))$ y (x_0, y_0) (vea la figura 2.2): de hecho, si u es solución de (2.1.9), entonces

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \int_{p(x_0)}^{y_0} u_y(x_0, t) dt + u(x_0, p(x_0)) \\ &= f(x_0) + \int_{p(x_0)}^{y_0} h(x_0, t) dt \end{aligned}$$

o sea

$$u(x, y) = f(x) + \int_{p(x)}^y h(x, t) dt \quad (2.1.10)$$

recíprocamente, si u es dada por (2.1.10), entonces u es solución de (2.1.9). En consecuencia el problema (2.1.9) tiene una única solución dada por (2.1.10).

En la siguiente sección, usaremos estas ideas para resolver problemas de Cauchy para ecuaciones lineales de primer orden con dos variables independientes sin dependencia explícita en la variable dependiente.

2.2 El Problema de Cauchy

En esta sección estudiaremos el problema de Cauchy para ecuaciones de la forma

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y). \quad (2.2.1)$$

Observe que en la ecuación (2.2.1) la función incógnita u aparece sólo en la parte principal de la ecuación, lo que simplifica un poco la resolución. En la tercera sección de este capítulo estudiaremos ecuaciones lineales generales.

Como vimos en la sección anterior, existe una relación entre la curva plana inicial γ y la región abierta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ donde deseamos no sólo la existencia sino la unicidad de la solución: la región Ω tiene que ser cubierta por curvas características planas que intersectan la curva γ en exactamente un punto. Parametrizando la curva γ por $(\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, donde I es un intervalo abierto (acotado o no), podemos enunciar el problema en la forma

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), t \in I. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Hacemos las siguientes hipótesis adicionales:

- (i) la curva inicial plana γ es una curva suave, es decir, las funciones σ, ρ son continuamente diferenciables en I y $\sigma'(t)^2 + \rho'(t)^2 \neq 0$ para todo $t \in I$;
- (ii) $f \in C^1(I)$;
- (iii) $a, b, c \in C^1(\Omega)$ y las funciones a y b no se anulan simultáneamente en Ω , donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un abierto conteniendo γ (la vecindad de la curva donde resolveremos el problema está contenida en Ω).

Para resolver el problema (2.2.2) usando las ideas de la primera sección, lo primero que debemos hacer es hallar las curvas características planas de la ecuación (2.2.1). Como vimos anteriormente, esas son curvas a lo largo de las cuales la EDP puede ser escrita como una derivada total. Si \mathcal{C} es una curva característica plana parametrizada por $(\alpha(s), \beta(s))$ entonces la derivada total de u a lo largo de \mathcal{C} es, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s)u_x(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s)u_y(\alpha(s), \beta(s)) \quad (2.2.3)$$

por otro lado, la EDP (2.2.1) a lo largo de \mathcal{C} resulta

$$a(\alpha(s), \beta(s))u_x(\alpha(s), \beta(s)) + b(\alpha(s), \beta(s))u_y(\alpha(s), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(s)). \quad (2.2.4)$$

Por tanto, si deseamos que el lado izquierdo de la ecuación (2.2.4) sea igual a cualquiera de las expresiones en (2.2.3), es necesario que, para cada s , exista un número real $\lambda(s) \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

ese caso la ecuación resulta

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \lambda(s)c(\alpha(s), \beta(s)). \quad (2.2.6)$$

Las condiciones (2.2.5) significan, geométicamente, que el vector tangente a la curva \mathcal{C} en el punto $(\alpha(s), \beta(s))$ es paralelo al vector $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$.

La función $\lambda(s)$ es de hecho innecesaria pues basta reparametrizar la curva convenientemente. Para probar esta afirmación, observe en primer lugar que la función λ es continua desde que la curva \mathcal{C} es suave (por hipótesis) y las funciones a y b no se anulan simultáneamente. Tomando entonces cualquier primitiva Λ de λ como $\Lambda'(s) = \lambda(s) \neq 0$, para cualquier s , $\Lambda'(s) > 0$ o $\Lambda'(s) < 0$ (por continuidad) para todo s , luego Λ es una función monótona creciente o decreciente, por consiguiente invertible (vea [A1]) y podemos hacer un cambio de variable $s = \Lambda^{-1}(t)$ ó $t = \Lambda(s)$ para obtener una nueva parametrización $(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))$ de la curva \mathcal{C} , donde

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t) &= \alpha(s) = \alpha(\Lambda^{-1}(t)), \\ \tilde{\beta}(t) &= \beta(s) = \beta(\Lambda^{-1}(t)). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Pero entonces, de (2.2.7) y (2.2.5) obtenemos

$$\tilde{\alpha}'(t) = \alpha'(s) \frac{ds}{dt} = \alpha'(s) \frac{1}{\Lambda'(\Lambda^{-1}(t))} = \frac{\alpha'(s)}{\lambda(s)} = a(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))$$

y, análogamente,

$$\tilde{\beta}'(t) = \frac{\beta'(s)}{\lambda(s)} = b(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)).$$

Por tanto las *curvas características planas* de la ecuación (2.2.1) son las curvas suaves \mathcal{C} que admiten parametrización $(\alpha(s), \beta(s))$ satisfaciendo

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

El sistema de EDOs dado por (2.2.8) tiene infinitas soluciones: para obtener una única solución es necesario dar un par de condiciones iniciales. Pero precisamente, recordando los resultados sobre sistema de EDOs (vea el teorema de Picard en [S] o el Capítulo 7 de [S i]): como $a, b \in C^1(\Omega)$, dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe una solución $(\alpha(s), \beta(s))$ de (2.2.8) para s en una vecindad de s_0 tal que

$$\alpha(s_0) = x_0, \beta(s_0) = y_0. \quad (2.2.9)$$

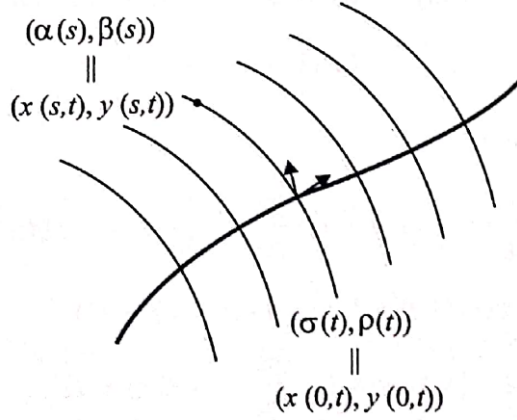


Figura 2.3: La solución se obtiene integrando a lo largo de las características planas.

Como vimos en los ejemplos de la sección anterior, la existencia y la unicidad de solución del problema (2.2.2) depende de cómo las curvas características intersectan la curva inicial. Consideremos en primer lugar el caso análogo al problema (2.1.1), esto es, supongamos que la curva inicial γ nunca es tangente a las curvas características planas: en otras palabras, el vector tangente $(\sigma'(t), \rho'(t))$ nunca es paralelo $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$. Usando la terminología del álgebra lineal, los vectores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ son linealmente independientes, $\forall t \in I$. Con esa hipótesis, para cada $t \in I$, existe una única curva característica plana pasando por el punto $(\sigma(t), \rho(t))$, o sea, que es solución de (2.2.8) y (2.2.9) con $x_0 = \sigma(t)$, $y_0 = \rho(t)$ en una vecindad de s_0 (que consideraremos igual a cero para simplificar la notación): además, $(\sigma(t), \rho(t))$ es el único punto de intersección de γ con la característica pues, si existiese otro, en algún lugar los vectores tangentes a las dos curvas serían paralelos, lo que contradice la hipótesis. En tal caso podemos entonces cubrir una vecindad de la curva γ con curvas características planas que intersecta la curva γ en exactamente un punto. Ello nos permite hacer un cambio de variable de (x, y) para (s, t) : para cada $t \in I$, si denotamos la curva característica plana que pasa por $(\sigma(t), \rho(t))$ por $(x(s, t), y(s, t))$, entonces el sistema (2.2.8) y las condiciones (2.2.9) pueden reenunciarse como

$$\begin{aligned} x_s(s, t) &= a(x(s, t), y(s, t)), \\ y_s(s, t) &= b(x(s, t), y(s, t)), \\ x(0, t) &= \sigma(t) \\ y(0, t) &= \rho(t) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

además, como los vectores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ son linealmente independientes,

$$\det \begin{pmatrix} x_s(0, t) & x_t(0, t) \\ y_s(0, t) & y_t(0, t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & \sigma'(t) \\ b(\sigma(t), \rho(t)) & \rho'(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

Para volver a u , dado (x_0, y_0) , sea $t_0 = t(x_0, y_0)$ y $s_0 = s(x_0, y_0)$, es decir, $x_0 = x(s_0, t_0)$ e $y_0 = y(s_0, t_0)$; sustituyendo (2.2.11) en (2.2.14), obtenemos

$$u(x, t) = \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0)) ds + f(t_0). \quad (2.2.15)$$

Observe que, si u es solución de (2.2.2), entonces u satisface (2.2.15); como (2.2.15) es de hecho solución de (2.2.2) (pues (2.2.14) es solución de (2.2.13)), la solución del problema (2.2.2) es única. Acabamos de probar entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1 Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, γ una curva suave en Ω parametrizada por $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, $f \in C^1(I)$ y $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Suponga que $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 \neq 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$, y

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \forall t \in I.$$

Entonces el problema (2.2.2) tiene una única solución de clase C^1 en una vecindad de la curva γ en Ω dada por (2.2.15).

El gráfico de la solución u del problema (2.2.2) es una superficie $z = u(x, y)$ en \mathbb{R}^3 , llamada superficie solución. Otra parametrización de esta superficie es dada por las variables s, t , esto es,

$$(s, t) \rightarrow (x(s, t), y(s, t), v(s, t))$$

es una parametrización de la superficie solución en donde v es dada por (2.2.14) y x, y satisfacen (2.2.10).

En un problema específico, normalmente es más fácil hallar las curvas características planas directamente e integrar a lo largo de dichas curvas que utilizar la fórmula (2.2.15).

Ejemplo 2.2.1 Considere el problema

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= 4xy \\ u(x, 0) &= f(x), x > 0. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Vamos a comenzar calculando las curvas características planas para la EDP en (2.2.16). Buscamos entonces curvas $s \rightarrow (\alpha(s), \beta(s))$ tales que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= -\beta(s), \\ \beta'(s) &= \alpha(s). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Multiplicando la primera ecuación por $\alpha(s)$, la segunda por $\beta(s)$ y sumando, obtenemos

$$\alpha(s)\alpha'(s) + \beta(s)\beta'(s) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} (\alpha(s)^2 + \beta(s)^2) = 0 \Rightarrow \alpha(s)^2 + \beta(s)^2 = cte.$$

Por consiguiente las curvas características planas para la EDP en (2.2.16) son círculos centrados en el origen. Como la curva inicial es el semieje $y = 0$, $x > 0$, la curva inicial intersecta ortogonalmente

cada característica plana en exactamente un punto y todos los puntos en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ están en algunas de dichas características.

A lo largo del círculo de radio r centrado en el origen, la EDP queda

$$\frac{d}{d\theta} u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 4r^2 \sin(\theta) \cos(\theta).$$

Usando entonces coordenadas polares para integrar la EDP, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^{\theta(x,y)} 4r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta + u(r, 0) \\ &= 2r^2 \sin^2 \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta(x,y)} + f(r) \\ &= 2y^2 + f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente la solución del problema (2.2.16) es

$$u(x, y) = 2y^2 + f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}. \quad (2.2.18)$$

Observe que, como $\sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en el origen, la diferenciabilidad de u depende de f .

Ejemplo 2.2.2 Resolvamos el problema

$$\begin{aligned} 2yu_x + u_y &= (2y^2 + x) \sin(2xy) \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ u(x, e^{-2x}) &= -\cos^2(xe^{-2x}). \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Las características planas satisfacen

$$\begin{cases} \alpha'(s) = 2\beta(s) \\ \beta'(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha'(s) = 2s + 2c_1 \\ \beta(s) = s + c_1 \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} \alpha(s) = s^2 + 2sc_1 + c_2 = (s + c_1)^2 + c_2 - c_1^2 \\ \beta(s) = s + c_1. \end{cases}$$

Por tanto las curvas características planas son parábolas de la forma $x = y^2 + c$.

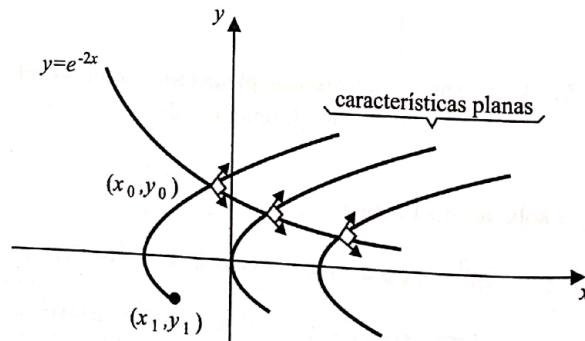


Figura 2.5: Las características planas son parábolas

Observe que, en el punto (x_0, y_0) de intersección de la curva inicial $y = e^{-2x}$ con la parábola $x = y^2 + x_0 - y_0^2$, las tangentes son ortogonales pues la recta tangente a la parábola en el punto (x_0, y_0) tiene inclinación $\frac{1}{2y_0}$ mientras que la recta tangente a la curva inicial en el mismo punto tiene inclinación $-2y_0$. Estamos por tanto en las condiciones del teorema (2.2.1). Dado cualquier punto $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, él está en la parábola $x = y^2 + x_1 - y_1^2$, que intersecta la curva inicial en el punto (x_0, y_0) donde

$$\begin{aligned}x_0 &= y_0^2 + x_1 - y_1^2, \\y_0 &= e^{-2x_0};\end{aligned}$$

parametrizando la parábola por $s \rightarrow (s^2 + x_1 - y_1^2, s)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}u(x_1, y_1) &= \int_{y_0}^{y_1} \frac{d}{ds} u(s^2 + x_1 - y_1^2, s) ds + u(x_0, y_0) \\&= \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2) \sin(2s^3 + 2s(x_1 - y_1^2)) ds + \cos^2(x_0 y_0) \\&= \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2) 2 \sin(s^3 + s(x_1 - y_1^2)) \cos(s^3 + s(x_1 - y_1^2)) ds + \cos^2(x_0 y_0) \\&= \int_{y_0(y_0^2 + x_1 - y_1^2)}^{y_1(y_1^2 + x_1 - y_1^2)} 2 \sin r \cos r dr + \cos^2(x_0 y_0) \\&= \cos^2 r \Big|_{r=x_0 y_0}^{r=x_1 y_1} + \cos^2(x_0 y_0) = \cos^2(x_1 y_1).\end{aligned}$$

Por consiguiente la solución del problema (2.2.2) es

$$u(x, y) = -\cos^2(xy).$$

2.3 Solución General

La teoría de las EDPs lineales de primer orden con dos variables independientes se asemeja más a la teoría de las EDO que a la de las EDPs. De hecho, es esa semejanza con las EDOs que nos permitirá hallar la solución general de tales ecuaciones.

Vamos a considerar el operador diferencial lineal de primer orden

$$L = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y), \quad (2.3.1)$$

esto es,

$$Lu = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u,$$

y vamos a estudiar la ecuación

$$Lu = d(x, y) \quad (2.3.2)$$

en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, suponiendo que $a, b, c, d \in C(\Omega)$.

La idea del método que usaremos es bastante simple: para resolver la ecuación (2.3.2), procuraremos realizar un cambio de variable $s = s(x, y), t = t(x, y)$ que la transforme en una ecuación donde sólo

aparezca la derivada con respecto a una de las variables (que escogeremos s), lo que nos permitirá resolver la ecuación como si fuese una EDO, fijando la otra variable (que será t).

Antes de describir el método en general, vamos a resolver algunas ecuaciones particulares para ilustrarlo.

Ejemplo 2.3.1 Busquemos la solución general de la ecuación

$$xu_x + u = x^2 \quad (2.3.3)$$

en el semiplano $x > 0$. Observe que la ecuación está en la forma deseada, ya que no aparece la derivada respecto de y (esto es, $b = 0$). Para cada y fijo, la ecuación (2.3.3) es una EDO y puede reenunciarse como

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu) = x^2;$$

integrando respecto a x , obtenemos

$$xu = \frac{x^3}{3} + f(y)$$

por consiguiente la solución general de (2.3.3) es dada por

$$u(x, y) = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x}f(y)$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es arbitraria.

Ejemplo 2.3.2 Busquemos ahora la solución general de la ecuación

$$-2yu_x + u_y = ye^x \quad (2.3.4)$$

en todo el plano. En este ejemplo podemos usar las ideas desarrolladas en la segunda sección para encontrar la solución general: con ayuda de las curvas características planas y de una curva auxiliar que intercepta transversalmente dichas características, podemos realizar un cambio de variable $s = s(x, y), t = t(x, y)$ con la finalidad de obtener una ecuación más simple. Las curvas características planas para la ecuación (2.3.4) son dadas por

$$\begin{cases} x'(s) = -2y(s) \\ y'(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) = -s^2 - 2sc_1 + c_2 = -(s + c_1)^2 + c_1^2 + c_2 \\ y(s) = s + c_1 \end{cases}$$

y por consiguiente las características planas son las parábolas $x = -y^2 + k$, k constante. Tomando como curva auxiliar el eje de las x , buscamos s y t con (vea (2.2.10))

$$\begin{aligned} x(s, t) &= -(s + c_1(t))^2 + c_2(t), & x(0, t) &= t, \\ y(s, t) &= s + c_1(t), & y(0, t) &= 0; \end{aligned}$$

entonces obtenemos

$$x = -s^2 + t, \quad y = s$$

o, equivalentemente,

$$s = y, \quad t = x + y^2. \quad (2.3.5)$$

Observe que t es constante a lo largo de las características planas y la curva auxiliar corresponde a $s = 0$. Efectuando el cambio de variable (2.3.5) y tomando $v(s, t) = u(x, y)$, v satisface la ecuación

$$v_s = se^{-s^2+t}$$

cuya solución general es dada por

$$v(s, t) = -\frac{1}{2}e^{-s^2+t} + f(t);$$

en consecuencia la solución general de (2.3.4) es dada por

$$u(x, y) = -\frac{1}{2}e^x + f(x + y^2),$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es arbitraria.

Ejemplo 2.3.3 Buscaremos ahora la solución general de una ecuación con coeficientes constantes:

$$au_x + bu_y + cu = d \quad (2.3.6)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 \neq 0$. Como en el ejemplo anterior, vamos a procurar un cambio de variable que ponga la ecuación (2.3.6) en una forma más simple, es decir, un cambio $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$ tal que t es constante a lo largo de las características planas. Para la ecuación (2.3.6), las características planas satisfacen

$$\begin{cases} x'(s) = a \\ y'(s) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) = as + c_1 \\ y(s) = bs + c_2 \end{cases}$$

y por tanto las características planas son las rectas $ay - bx = k_1$, k_1 constante; las rectas ortogonales a ellas son las rectas $by + ax = k_2$, k_2 constante. Tomando entonces t constante a lo largo de las características planas y s constante a lo largo de las rectas ortogonales, obtenemos

$$\begin{aligned} s &= ax + by \\ t &= -bx + ay \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Con el cambio de variable (2.3.7), la ecuación (2.3.6) resulta

$$(a^2 + b^2)v_s + cv = d. \quad (2.3.8)$$

Para cada t fijo, la ecuación (2.3.8) es una EDO de primer orden con factor integrante

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \exp\left(\frac{cs}{a^2 + b^2}\right) \quad (2.3.9)$$

multiplicando (2.3.8) por (2.3.9), obtenemos,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[v \exp\left(\frac{cs}{a^2 + b^2}\right) \right] = \frac{d}{a^2 + b^2} \exp\left(\frac{cs}{a^2 + b^2}\right).$$

Luego, si $c \neq 0$, la solución general de (2.3.6) es

$$v(s, t) = \frac{d}{c} + f(t) \exp\left(\frac{-cs}{a^2 + b^2}\right)$$

y la solución general de (2.3.6) es

$$u(x, y) = \frac{d}{c} + f(-bx + ay) \exp\left(\frac{-c}{a^2 + b^2}(ax + by)\right);$$

en el caso que $c = 0$, la solución general de (2.3.8) es

$$v(s, t) = \frac{d}{a^2 + b^2}s + f(t)$$

y la solución general de (2.3.6) es

$$u(x, y) = \frac{d}{a^2 + b^2}(ax + by) + f(-bx + ay)$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es arbitraria.

La idea utilizada en el ejemplo precedente puede aplicarse aun en el caso en que los coeficientes no sean constantes. Las curvas características planas de la ecuación (2.3.2) satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} x'(s) &= a(x(s), y(s)) \\ y'(s) &= b(x(s), y(s)) \end{aligned}$$

y por tanto son soluciones de la EDO de primer orden

$$a(x, y)dy - b(x, y)dx = 0. \quad (2.3.10)$$

Si las soluciones de la (2.3.10) son de la forma $t(x, y) = k$, donde k es una constante arbitraria, es natural tomar t como una de nuestras nuevas variables. Existe cierta libertad al escoger la variable s : basta garantizar que $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$ de hecho es un cambio de variable de clase C^1 en Ω y, para ello, basta que el jacobiano

$$\frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix}$$

nunca se anule en Ω . Observe que si t_y nunca se anula en Ω (respectivamente, t_x nunca se anula en Ω) podemos tomar $s = x$ (respectivamente, $s = y$). Note también que, si s es constante a lo largo de las trayectorias ortogonales a las características planas, como en el ejemplo 2.3.3, el jacobiano nunca se anula pues las curvas de nivel de las funciones s y t son ortogonales, luego los gradientes son ortogonales y por lo tanto linealmente independientes. Es claro que las trayectorias ortogonales son soluciones de la EDO

$$b(x, y)dy + a(x, y)dx = 0.$$

Ejemplo 2.3.4 Hallar la solución general de

$$x^2u_x - xyu_y + yu = xy^2 \quad (2.3.11)$$

en el semiplano $x < 0$. En este caso las curvas características planas son soluciones de la EDO

$$x^2 dy + xy dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{k}{x}.$$

luego podemos tomar $t = xy$; como $t_y \neq 0$, podemos escoger $s = x$, obteniendo entonces el cambio de variable

$$s = x, t = xy.$$

Tomando $v(s, t) = u(x, y)$, u satisface la EDP

$$s^2 v_s + \frac{t}{s} v = \frac{t^2}{s}$$

que tiene como factor integrante

$$\frac{1}{s^2} \exp \left(\int \frac{t}{s^3} ds \right) = \frac{1}{s^2} \exp \left(-\frac{t}{2s^2} \right)$$

multiplicando la ecuación (3.15) por el factor integrante, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(v \exp \left(-\frac{t}{2s^2} \right) \right) = \frac{t^2}{s^3} \exp \left(-\frac{t}{2s^2} \right)$$

y por tanto la solución general de (3.15) es

$$v(s, t) = t + f(t) \exp \left(\frac{t}{2s^2} \right).$$

Y volviendo a las variables x e y , la solución general de (2.3.11) es

$$u(x, y) = xy + f(xy) \exp \left(\frac{y}{2x} \right), x < 0,$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es arbitraria.

Ejemplo 2.3.5 Hallar la solución general de la ecuación

$$xu_x + (x-1)u_y + xu = e^{x-y}. \quad (2.3.12)$$

Las curvas características planas son soluciones de

$$\begin{aligned} xdy - (x-1)dx &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \\ \Rightarrow y &= x - \ln|x| + c \Rightarrow e^y = e^x \frac{1}{|x|} e^c \Rightarrow xe^{y-x} = k \end{aligned}$$

luego $t(x, y) = xe^{y-x}$. En este caso tanto t_x como t_y se anulan en algún punto. Mientras tanto, si tomamos $s = y - x$, obtenemos

$$\begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ (1-x)e^{y-x} & xe^{y-x} \end{vmatrix} = -e^{y-x} \neq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Haciendo entonces el cambio de variable

$$s = y - x, t = xe^{y-x}.$$

y tomando $v(s, t) = u(x, y)$, v satisface la EDP

$$v_s - te^{-s}v = -e^{-s}; \quad (2.3.13)$$

multiplicando por el factor integrante $e^{te^{-s}}$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial s} (ve^{te^{-s}}) = -e^{-s}e^{te^{-s}}$$

cuya solución es dada por

$$v(s, t) = \frac{1}{t} + f(t)e^{-te^s}. \quad (2.3.14)$$

Es interesante observar que, aunque los coeficientes de la ecuación (2.3.13) sean infinitamente diferenciables, la solución (2.3.14) tiene una discontinuidad en $t = 0$. Volviendo a las variables x e y , obtenemos

$$u(x, y) = \frac{e^{x-y}}{x} + f(xe^{y-x})e^{-x}, x \neq 0,$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$ arbitraria.

2.4 Ejercicios

Sección 1: Algunos Ejemplos

1. Resuelva:

(i)

$$\begin{aligned} u_y &= x^2 + y^2, \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, x^2) &= x + x^2, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} u_y &= \sin\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= x, x > 0. \end{aligned}$$

2. Verifique si los siguientes problemas tienen solución y, en ese caso, halle las soluciones.

(i)

$$\begin{aligned} u_y &= xe^y \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(y^2, y) &= e^{y^2} + y^4, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} u_y &= xe^y, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(y^2, y) &= y^2e^y, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(iii)

$$u_x = 2xy, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(e^y, y) = y^2 + 1, y \in \mathbb{R}.$$

(iv)

$$u_x = 2xy, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(x, x^2) = 1, x \in \mathbb{R}.$$

(v)

$$u_x = 2xy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$u(x, x^2) = x, x \in \mathbb{R}$$

3. Pruebe que el problema

$$u_x = h(x, y), (x, y) \text{ en } \mathbb{R}^2,$$

$$u(p(y), y) = f(y), y \text{ en } \mathbb{R},$$

tiene una única solución $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y halle una fórmula para u , suponiendo que $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ son conocidas.

Sección 2. El Problema de Cauchy

1. Halle las curvas características planas de las siguientes ecuaciones:

(i) $3u_x - 4u_y = x^2.$

(ii) $5u_x + 4u_y = x^3 + 1 + 2e^{3y}.$

(iii) $u_x - 3u_y = \sin(x) + \cos(y).$

(iv) $u_x - au_y = e^{mx} \cos(by), \quad (a, b, m \text{ constantes}).$

(v) $x^2u_x + y^2u_y = x^3.$

(vi) $u_x + xu_y = x^3 + 3xy.$

(vii) $x^2u_x - xyu_y = 2x^3 + x^2y + x^2 + \frac{x^3y}{x+1}.$

(viii) $x^2u_x + y^2u_y = axu, \quad (a \text{ constante}).$

(ix) $u_x + a \cos(x)u_y = \cos(x) + y, \quad (a \text{ constante}).$

2. Resuelva, indicando la región del plano donde la solución es válida:

(i)

$$3u_x - 4u_y = x^2$$

$$u\left(x, \frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{9}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii)

$$5u_x + 4u_y = x^3 + 1 + 2e^{3y}$$

$$u(4t, -5t + 1) = te^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iii)

$$u_x - 3u_y = \sin x + \cos y$$

$$u(t, t) = p(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (p \text{ una función dada}).$$

(iv)

$$u_x - au_y = e^{mx} \cos(by), \quad (a, b, m \text{ constantes}).$$

$$u(at, t) = p(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (p \text{ una función dada}).$$

(v)

$$x^2 u_x + y^2 u_y = x^3$$

$$u(x, 1) = 1; \quad x > 0.$$

(vi)

$$u_x + xu_y = x^3 + 3xy$$

$$u(0, y) = e^y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(vii)

$$x^2 u_x - xy u_y = 2x^3 + x^2 y + x^2 + \frac{x^3 y}{x+1}$$

$$u(t, t+1) = t^2 + t, \quad t > 0.$$

(viii)

$$x^2 u_x + y^2 u_y = axy, \quad (a \text{ constante}),$$

$$u(1, t) = a, \quad t > 0.$$

(ix)

$$u_x + a \cos(x) u_y = \cos(x) + y \quad (a \text{ constante}, a \neq 0)$$

$$u(\pi/2, y) = (\ln(\sin y))/a, \quad 0 < y < \pi.$$

3. La resolución de problemas de Cauchy para ecuaciones casi lineales es bastante similar al caso lineal, la diferencia es que en el caso casi lineal precisamos trabajar con curvas en \mathbb{R}^3 . Definimos: una *curva característica* para la EDP

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (2.4.1)$$

es una curva suave que admite una parametrización

$$\mathcal{C} : t \in I \rightarrow (\alpha(t), \beta(t), \eta(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

I un intervalo abierto, tal que

$$\alpha'(t) = a(\alpha(t), \beta(t), \eta(t)),$$

$$\beta'(t) = b(\alpha(t), \beta(t), \eta(t)),$$

$$\eta'(t) = c(\alpha(t), \beta(t), \eta(t)).$$

Una curva suave $\Gamma : t \in I \rightarrow (\sigma(t), \rho(t), \xi(t)) \in \mathbb{R}^3$ es llamada regular para la EDP (2.4.1) si los vectores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)), b(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)))$ nunca son paralelos cualesquiera que sea $t \in I$. Como en el caso lineal, es posible mostrar que, si Γ es una curva regular, existe una única solución clásica para el problema de Cauchy para la EDP (2.4.1) con condición inicial

$u(\sigma(t), \rho(t)) = \xi(t), t \in I$, en una región abierta del plano que contiene la curva plana $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t)), t \in I$. La solución es obtenida integrándose a lo largo de las características (en \mathbb{R}^3) que intersectan la curva Γ ; esto corresponde a resolver el sistema

$$\begin{aligned}x_s(s, t) &= a(x(s, t), y(s, t), v(s, t)), & x(0, t) &= \sigma(t). \\y_s(s, t) &= b(x(s, t), y(s, t), v(s, t)), & y(0, t) &= \rho(t), \\v_s(s, t) &= c(x(s, t), y(s, t), v(s, t)), & v(0, t) &= \xi(t).\end{aligned}$$

y tomar $u(x, y) = v(s, t)$. Utilice esas ideas para resolver los problemas a continuación, indicando la región donde la solución es válida:

(i)

$$\begin{aligned}xu_x - yu_y &= u^2 \\u(x, 1) &= 1, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}uu_x - xu_y &= y \\u(0, y) &= -y, \quad y > 0.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}2yu_x + u_y &= 2xyu \\u(t, 0) &= t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}-yu_x + xu_y &= u^2 + 1 \\u(x, 0) &= -x^2, \quad x > 0.\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}uu_x + uu_y &= -x - y \\u(t, -t) &= 2t, \quad t > 0.\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}x^2u_x + y^2u_y &= u^2 \\u(t, 2t) &= 1, \quad t > 0.\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y &= xu \\u(a, a \cos t) &= a \sin t, \quad 0 < t < \pi \quad (a \text{ constante}, a > 0).\end{aligned}$$

Sección 3: Solución General

1. Halle la solución general de cada una de las siguientes EDPs:

(i) $u_y = x^2 + y^2$.

(ii) $u_x = \sin(x/y)$.

(iii) $3u_x - 4u_y = x^2$.

(iv) $u_x - 3u_y = \sin x + \cos y$.

(v) $u_x - au_y = e^{mx} \cos(by)$, $(a, b, m \text{ constantes, } m^2 + a^2b^2 \neq 0)$.

(vi) $yu_x - xu_y = 0$.

(vii) $u_x - 4u_y + u = x + y + 1$.

(viii) $u_x + xu = x^3 + 3xy$.

(ix) $x^2u_x - xyu_y + yu = y$.

(x) $5u_x + 4u_y + u = x^3 + 1 + 2e^{3y}$.

(xi) $xyu_x - x^2u_y + yu = 0$.

(xii) $(x + \alpha)u_x + (y + \beta)u_y + \gamma u = 0$, $(\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes})$.

2. Haga el cambio de variable $\xi = \ln|x|$, $\eta = \ln|y|$ para obtener la solución general de cada una de las EDP's siguientes:

(i) $2xu_x - yu_y = 0$.

(ii) $2xu_x + 3yu_y = \ln|x|$.

(iii) $xu_x - 7yu_y = x^2y$.

(iv) $8xu_x - 5yu_y + 4u = x^2 \cos x$.

(v) $\alpha xu_x + \beta yu_y + \gamma u = x^2 + y^2$, $(\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes})$.

3. (Antes de resolver cada uno de estos problemas, vea el ejercicio 3 de la segunda sección.) Para cada una de las EDP's siguientes, halle las curvas características en \mathbb{R}^3 y, con la ayuda de una curva regular arbitraria, halle la solución general:

(i) $u_x + xu_y = u$.

(ii) $u_x + u_y = u$.

(iii) $x^2u_x + y^2u_y = xu$.

(iv) $xyu_x - yu_y = xy + x - u$.

CAPÍTULO 3

Ecuaciones de Primer Orden: No todo son flores

El propósito de este capítulo es mostrar algunos ejemplos de lo que puede suceder con los problemas de Cauchy si el teorema de existencia y unicidad no se cumple o si la ecuación no es lineal. El capítulo consta de tres secciones: en la primera estudiaremos, aún en el caso lineal, situaciones en las que el teorema no se cumple; en la segunda discutiremos la propagación de singularidades; finalmente, en la última sección introduciremos las llamadas ondas de choque, que aparecen en cierto tipo de problema no lineal y que han sido muy investigadas en las últimas décadas.

3.1 Retornando al Problema de Cauchy

Anteriormente definimos las curvas características planas para la ecuación

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y) \quad (3.1.1)$$

como las curvas $s \rightarrow (\alpha(s), \beta(s))$ que tienen tangente en el punto $(\alpha(s), \beta(s))$ paralela al vector $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$ o, equivalentemente, que satisfacen

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Si la curva inicial $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t)), t \in I$, no es tangente a las curvas características planas, vimos que el problema

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), \quad t \in I. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

tiene una única solución. ¿Qué sucede si la curva inicial γ es una curva característica plana? Por los ejemplos de la primera sección del Capítulo 2 esperamos que el problema no tenga solución o que tenga infinitas soluciones. Es lo que de hecho sucede y lo que diferencia un caso de otro es el concepto de curva característica espacial (¡por ello el énfasis puesto hasta ahora en el adjetivo “plana”!): una curva característica para la ecuación (3.1.3) es una curva suave $s \rightarrow (\alpha(s), \beta(s), \xi(s)) \in \mathbb{R}^3$ que tiene

tangente en el punto $(\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$ paralela al vector $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)), c(\alpha(s), \beta(s)))$; equivalentemente, α , β y ξ satisfacen

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)), \\ \xi'(s) &= c(\alpha(s), \beta(s)).\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

En el caso en que la curva inicial γ no es tangente a las curvas características planas, la superficie solución es generada por la curva $\Gamma : t \in I \rightarrow (\sigma(t), \rho(t), f(t))$ y por las curvas características en \mathbb{R}^3 que intersectan a Γ . En efecto, dada una característica de (3.1.1) que intercepta a Γ en el punto $(\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0))$, podemos encontrar una parametrización $s \rightarrow (\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$ de dicha curva satisfaciendo (3.1.4) con

$$(\alpha(0), \beta(0), \xi(0)) = (\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0)),\tag{3.1.5}$$

luego la característica plana que pasa por el punto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ es precisamente $(x(s, t_0), y(s, t_0)) = (\alpha(s), \beta(s))$ y por tanto, usando la ecuación (2.2.15) del segundo capítulo,

$$\begin{aligned}u(\alpha(s), \beta(s)) &= f(t_0) + \int_0^s c(\alpha(\nu), \beta(\nu)) d\nu \\ &= f(t_0) + \int_0^s \xi'(\nu) d\nu \\ &= f(t_0) + \xi(s) - \xi(0) \\ &= \xi(s)\end{aligned}$$

por (3.1.5), lo que prueba que dicha característica está en la superficie solución; por otro lado, la superficie solución es parametrizada por

$$(s, t) \rightarrow (x(s, t), y(s, t), v(s, t))$$

y, para cada t_0 fijo, definiendo

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= x(s, t_0), \\ \beta(s) &= y(s, t_0), \\ \xi(s) &= v(s, t_0),\end{aligned}$$

las ecuaciones (2.2.10) y (2.2.13) del capítulo 2 muestran que α , β y ξ satisfacen (3.1.4) y (3.1.5) y por lo tanto, para cada t_0 fijo, la curva $s \rightarrow (x(s, t_0), y(s, t_0), v(s, t_0))$ es una característica que intercepta Γ en $s = 0$, lo que demuestra que la superficie solución es de hecho generada por Γ y por las curvas características.

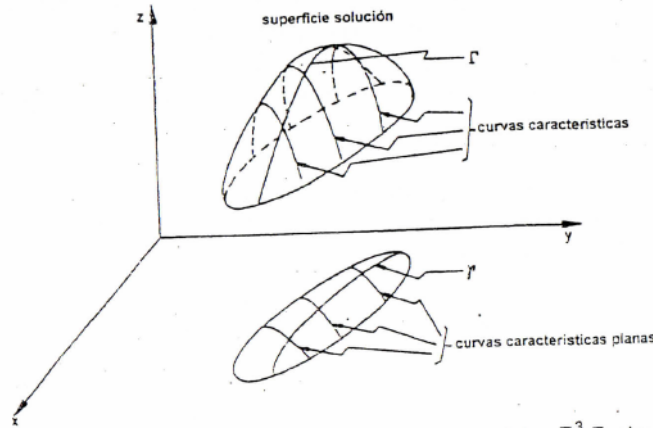


Figura 3.1: La superficie solución es generada por la curva inicial en \mathbb{R}^3 , Γ y las curvas características en \mathbb{R}^3 .

Estudiemos ahora el caso en que γ es una característica plana: probaremos que si Γ es una característica, el problema tiene infinitas soluciones y, si Γ no es característica, el problema no tiene solución.

Supongamos primero que Γ es una curva característica para la EDP (3.1.1). Sea δ una curva plana cualquiera que nunca es tangente a las características planas y que intercepta a γ en el punto $(\sigma(s_0), \rho(s_0))$, sea $t \rightarrow (p(t), q(t))$ una parametrización de δ con

$$(p(0), q(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0)) \quad (3.1.6)$$

y sea r una función arbitraria de clase C^1 satisfaciendo

$$r(0) = f(s_0). \quad (3.1.7)$$

Por lo visto anteriormente, el problema

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y) \\ u(p(t), q(t)) &= r(t) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

tiene una única solución u en una vecindad de δ ; además, la superficie solución contiene a la curva $\Delta : t \rightarrow (p(t), q(t), r(t))$ y contiene todas las características de la EDP que intersectan Δ ; en particular, la superficie solución contiene a Γ pues

$$(p(0), q(0), r(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0), f(s_0)) \in \Delta \cap \Gamma$$

por (3.1.6) y (3.1.7). Por consiguiente u es solución de (3.1.3). Como existen infinitas elecciones posibles para la curva δ y la función r , el problema tiene infinitas soluciones.

Supongamos ahora que γ es una característica plana pero que Γ no es una característica para (3.1.1). Suponga, por el absurdo, que el problema (3.1.3) tiene solución en ese caso: si u es solución, para todo $t \in I$, derivando la condición inicial obtenemos

$$\sigma'(t)u_x(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_y(\sigma(t), \rho(t)) = f'(t); \quad (3.1.9)$$

por otro lado, la EDP (3.1.1) en el punto $(\sigma(t), \rho(t))$ queda

$$a(\sigma(t), \rho(t))u_x(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_y(\sigma(t), \rho(t)) = c(\sigma(t), \rho(t)); \quad (3.1.10)$$

comparando (3.1.9) y (3.1.10) y considerando que los vectores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ son paralelos (pues γ es característica plana), obtenemos que los vectores en \mathbb{R}^3

$$(\sigma'(t), \rho'(t), f'(t)) \quad \text{y} \quad (a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)), c(\sigma(t), \rho(t)))$$

también son paralelos, es decir, Γ es una característica, lo que contradice la hipótesis. En consecuencia el problema (3.1.3) no tiene solución en este caso.

Ejemplo 3.1.1 Considere el problema

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

En este caso las características planas son las rectas horizontales, luego el problema tiene solución si y sólo si la curva $\Gamma : t \rightarrow (t, 0, f(t))$ es una característica, esto es, los vectores $(1, 0, 2t)$ y $(1, 0, f'(t))$ son paralelos, lo que es equivalente a

$$f'(t) = 2t \Leftrightarrow f(t) = t^2 + c, c \text{ constante.}$$

Luego el problema sólo tiene solución si $f(x) = x^2 + c$ para alguna constante c : en ese caso, tomando el eje de las y como la curva δ y $r(y)$ de clase C^1 con

$$r(0) = f(0) = c, \quad (3.1.12)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \\ u(0, y) &= r(y) \end{aligned}$$

cuya solución es

$$u(x, y) = u(0, y) + \int_0^x 2tdt = r(y) + x^2.$$

Por tanto, en el caso que $f(x) = x^2 + c$, el problema tiene como solución todas las funciones de la forma

$$u(x, y) = r(y) + x^2$$

donde r es de clase C^1 y satisface (3.1.12).

Volviendo al problema (3.1.3), el caso en el que la curva inicial γ es una característica plana es un caso extremo. ¿Que sucede si la curva γ es tangente a una característica plana en un punto determinado?

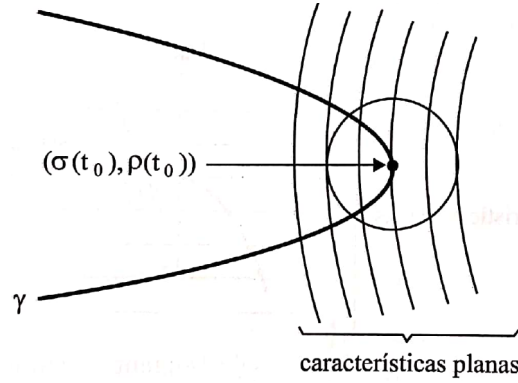


Figura 3.2: En cualquier vecindad de $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ pasa una característica plana que intercepta a γ más de una vez y otra que no intercepta a γ .

Puede ocurrir, como en el problema (2.1.6) del capítulo 2, que, para toda vecindad del punto donde γ es tangente a una característica plana, exista siempre una característica plana que intercepte a γ más de una vez y otra que no intercepte a γ pasando por esa vecindad (vea la figura 3.1): la existencia de una característica plana intersectando a γ más de una vez obliga a que el dato inicial f satisfaga alguna condición para que exista solución, pues el valor de la solución en uno de los puntos de la intersección determina el valor de la solución a lo largo de toda la curva característica plana; la existencia de una característica plana que no intercepta a γ hace que la solución, si existe, no sea única, pues el valor de la solución a lo largo de tales características no está determinado. Puede suceder también que, aún en presencia de esa tangencia, por cada punto de γ pase exactamente una característica plana que intercepta a γ sólo en ese punto: ello de hecho nos permite integrar a lo largo de las características planas, aunque podamos perder diferenciabilidad. Veamos primero un ejemplo en el que todo funciona.

Ejemplo 3.1.2 Resolvamos el problema

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= x^2 \\ u(x, x^3) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

En este caso las características planas son las rectas $y = c$, $c \in \mathbb{R}$, y, aunque la curva inicial $\gamma : t \in \mathbb{R} \rightarrow (t, t^3)$ sea tangente a la recta $y = 0$ en $t = 0$, cada característica plana intercepta a γ en sólo un punto. Entonces podemos integrar a lo largo de las curvas características planas para obtener la solución:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{\sqrt[3]{y}}^x t^2 dt + f(x) \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3} + f(x). \end{aligned}$$

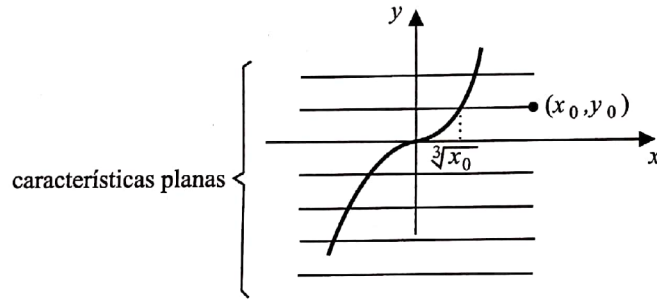


Figura 3.3: Aunque la curva inicial γ sea tangente a la característica plana $y = 0$, γ intercepta a cada característica plana en un único punto.

Cuando desarrollamos abstractamente el método de integración a lo largo de las características planas para resolver el problema (3.1.3) suponiendo que la curva inicial γ no es tangente a las características planas, usamos ese hecho para probar que el jacobiano de la transformación $(s, t) \rightarrow (x(s, t), y(s, t))$ es diferente de cero en una vecindad de la curva γ . En el caso en que permitimos la tangencia, el jacobiano se anula en el punto de tangencia. Puede ocurrir entonces que, aún en el caso en que cada característica plana intercepta a γ en exactamente un punto, el cambio de variable $(s, t) \rightarrow (x, y)$ ya no sea diferenciable y por tanto la solución encontrada integrando a lo largo de las características no sea de clase C^1 . Una pequeña modificación en el problema (3.1.13) ejemplifica esta situación: basta considerar

$$\begin{aligned} u_x &= 1 \\ u(x, x^3) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}; \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

entonces las características planas son las mismas y la solución es

$$u(x, y) = \int_{\sqrt[3]{y}}^x dt + f(x) = x - \sqrt[3]{y} + f(x),$$

que no es diferenciable en $y = 0$.

Es interesante observar que, antes de determinar la existencia o no de solución para el problema (3.1.3), es posible determinar formalmente las derivadas de la solución u (si existen!) en cualquier punto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ de la curva inicial γ en la que ella no es paralela a las características planas (no sólo las derivadas de primer orden, sino las de cualquier orden) suponiendo evidentemente que las funciones a, b, c, σ, ρ y f son infinitamente diferenciables. Para calcular las derivadas de primer orden, reenuncie la EDP en el punto $(\sigma(t), \rho(t))$ y derive la condición inicial en t de modo de obtener

$$\begin{aligned} a(\sigma(t), \rho(t))u_x(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_y(\sigma(t), \rho(t)) &= c(\sigma(t), \rho(t)), \\ \sigma'(t)u_x(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_y(\sigma(t), \rho(t)) &= f'(t) \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

como

$$\det \begin{pmatrix} a(\sigma(t_0), \rho(t_0)) & b(\sigma(t_0), \rho(t_0)) \\ \sigma'(t_0) & \rho'(t_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

por continuidad el determinante es diferente de cero en una vecindad de $t = t_0$ y podemos resolver algebraicamente el sistema (3.1.15) para $u_x(\sigma(t), \rho(t))$ y $u_y(\sigma(t), \rho(t))$. Para obtener las derivadas de

mayor orden, basta derivar la EDP, $u_x(\sigma(t), \rho(t))$ y $u_y(\sigma(t), \rho(t))$. Por ejemplo, para calcular u_{xx} , derive la EDP respecto de x :

$$au_{xx} + bu_{yx} = c_x - a_x u_x - b_x u_y,$$

y derive $u_x(\sigma(t), \rho(t))$ respecto de t para obtener

$$\begin{aligned} a(\sigma(t), \rho(t))u_{xx}(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_{xy}(\sigma(t), \rho(t)) &= F(t) \\ \sigma'(t)u_{xx}(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_{xy}(\sigma(t), \rho(t)) &= G(t) \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

donde

$$F(t) = (c_x - a_x u_x - b_x u_y)(\sigma(t), \rho(t))$$

y

$$G(t) = \frac{d}{dt} \{u_x(\sigma(t), \rho(t))\}$$

son funciones conocidas; el sistema (3.1.16) puede resolverse algebraicamente para $u_{xx}(\sigma(t), \rho(t))$ y $u_{xy}(\sigma(t), \rho(t))$ para t en una vecindad de $t = t_0$. Podemos entonces escribir formalmente la solución desarrollando en serie de Taylor en torno del punto $(x_0, y_0) = (\sigma(t_0), \rho(t_0))$,

$$u(x, y) \approx \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n. \quad (3.1.17)$$

Es natural preguntar cuándo la serie en (3.1.17) converge y, en caso de que ella converja, si la suma de la serie es solución del problema (3.1.3). De hecho, la respuesta a esas dos preguntas es afirmativa si suponemos, además de las condiciones ya enunciadas, que las funciones a, b, c, σ, ρ, f son analíticas, es decir, a, b, c tienen una expansión en serie de Taylor en torno del punto (x_0, y_0) y σ, ρ, f admiten una expansión en serie de Taylor en torno del punto t_0 ; en este caso la serie en (3.1.17) converge en una vecindad V del punto (x_0, y_0) , es solución de la EDP (3.1.3) en V y satisface la condición inicial en (3.1.3) para t en una vecindad de t_0 . Esta afirmación es una de las formas más simples del teorema de Cauchy-Kowalewski y el lector interesado debe consultar [ZT].

3.2 Propagación de Singularidades

Volvamos al problema

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), t \in I. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

donde $t \in I$ es un intervalo abierto, la curva plana $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$ es una curva suave, las funciones a, b, c son de clase C^1 en algún subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 conteniendo a la curva γ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada.

En el segundo capítulo vimos que, si $f \in C^1(I)$ y si la curva γ no es tangente a las características planas, entonces el problema (3.2.1) tiene una única solución clásica en una vecindad de la curva γ . La

solución en el punto (x_0, y_0) se obtiene integrando la ecuación a lo largo de la curva característica que pasa por $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$ de $s = 0$, que corresponde al punto

$$(\sigma(t_0), \rho(t_0)) = (x(0, t_0), y(0, t_0)),$$

hasta $s = s_0$. Por tanto la solución en el punto (x_0, y_0) sólo depende del dato inicial en el punto $(\sigma(t_0), \rho(t_0)) \in \gamma$; por ello, el punto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ es llamado el **dominio de dependencia** de (x_0, y_0) . Por razones análogas, la **región de influencia** de una parte $\tilde{\gamma}$ de la curva γ es el conjunto de puntos por donde pasan las características planas que intersectan $\tilde{\gamma}$.

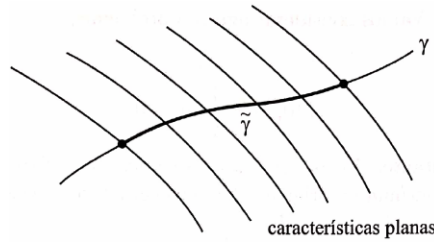


Figura 3.4: La región de influencia de $\tilde{\gamma}$ es determinada por las características planas que intersectan $\tilde{\gamma}$.

Si retiramos la hipótesis $f \in C^1(I)$ manteniendo la hipótesis sobre γ , podemos proceder de la misma manera, sólo que no obtendremos más una solución clásica. Si f (o f') tiene una discontinuidad en t_0 , entonces u (o alguna de sus derivadas) tendrá discontinuidades a lo largo de la característica que pasa por $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$. Por lo tanto las singularidades son propagadas a lo largo de las características planas.

Ejemplo 3.2.1 Consideremos el problema

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= 4xy, \\ u(x, 0) &= f(x), x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como vimos en el ejemplo 2.2.16 del capítulo 2, las características planas son círculos centrados en el origen y la solución del problema (3.2.2) es dada por

$$u(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 + 2y^2 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Note que $u \in C(\mathbb{R}^2)$ pero u no es diferenciable en el círculo $x^2 + y^2 = 1$; u satisface la ecuación diferencial en el interior y en el exterior de este círculo, que es precisamente la característica plana que pasa por $(1, 0)$.

Ejemplo 3.2.2 Vamos a considerar ahora el problema

$$\begin{aligned} u_x + bu_y &= 0, \\ u(0, y) &= \frac{1}{y}, y \neq 0, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

donde b es constante. En este caso la curva inicial es el eje de las y pero la función es discontinua en el origen. Como las características son las rectas

$$y = bx + c$$

donde c es constante, la solución de (3.2.3) no estará definida a lo largo de la recta $y = bx$: de hecho,

$$u(x, y) = \frac{1}{y - bx}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } y \neq bx.$$

es solución de (3.2.3), en el sentido que u satisface la EDP fuera de la recta $y = bx$.

La situación en el caso no lineal, tanto en lo que se refiere a la propagación de singularidades como al comportamiento de la solución, es bastante diferente. Para tener una idea de lo que puede acontecer, vamos a considerar ecuaciones no lineales de la forma

$$u_t + (f(u))_x = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.2.4)$$

donde f es una función de clase C^2 dada. Observe que la ecuación (3.2.4) puede ser escrita en la forma

$$u_t + b(u)u_x = 0, \quad (3.2.5)$$

$$b(u) = f'(u). \quad (3.2.6)$$

Ecuaciones del tipo (3.2.4) aparecen en el estudio de fenómenos ondulatorios (sin efectos disipadores) no lineales, como por ejemplo en dinámica de los gases. Lo que corresponde a las características planas en ese caso son las curvas en el plano xt satisfaciendo

$$\frac{dx}{dt} = b(u) \quad (3.2.7)$$

donde $u = u(x(t), t)$. A lo largo de tales curvas u es constante pues

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), t)) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_t + b(u)u_x = 0,$$

luego las curvas definidas por (3.2.7) son de hecho rectas. Es claro que esas rectas no pueden ser determinadas a priori, una vez que la ecuación (3.2.7) involucra el valor (desconocido) de u a lo largo de la curva. Podemos sin embargo usar esas curvas para hallar la solución de (3.2.4) satisfaciendo una determinada condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.2.8)$$

La idea aquí, como en el caso lineal, es construir la solución utilizando las “características planas” que intersectan la curva inicial plana $t = 0$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, u es constante e igual a $u_0(x_0)$ a lo largo de la recta que pasa por el punto $(x_0, 0)$ y satisface (3.2.7), esto es

$$u = u_0(x_0), \quad (3.2.9)$$

a lo largo de la recta

$$x = b(u_0(x_0))t + x_0. \quad (3.2.10)$$

Llamaremos características planas para el problema (3.2.5), (3.2.8) a las rectas (3.2.10). Basados en el caso lineal, esperamos que las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.10) determinen la solución del problema. Eso de hecho ocurre en una banda $t \in (0, T)$ pero, al contrario del caso lineal, las características planas se pueden interceptar.

Ejemplo 3.2.3 Considere el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La ecuación en (3.2.11) es la ecuación de Burger sin viscosidad y es de la forma (3.2.4) con $f(u) = u^2/2$. En este caso las rectas (3.2.10) se intersectan para $t \geq 1$, de modo que la solución dada por (3.2.9), (3.2.10) sólo es válida para $t < 1$. Las características planas para el problema (3.2.11) son dadas por

$$x = \begin{cases} t + x_0 & \text{si } x_0 < 0, \\ (1 - x_0)t + x_0 & \text{si } 0 \leq x_0 \leq 1, \\ x_0 & \text{si } x_0 > 1. \end{cases}$$

Si $x < t < 1$, entonces $x = t + x_0$ para algún $x_0 < 0$ y por tanto $u = u_0(x_0) = 1$; si $t < x < 1$, $x = (1 - x_0)t + x_0$ para algún $x_0 \in [0, 1]$, luego

$$u = u_0(x_0) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x - t}{1 - t} = \frac{1 - x}{1 - t}$$

finalmente, si $t < 1 < x$, entonces $u = u_0(x) = 0$. Por tanto la solución del problema (3.2.11), definida para $0 \leq t < 1$, es

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t < 1. \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{si } t \leq x < 1. \\ 0 & \text{si } t < 1 \leq x. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Observe que la función u definida por (3.2.12) no es una solución clásica puesto que $u \notin C^1(\mathbb{R} \times (0, 1))$: las derivadas parciales de u no están definidas a lo largo de los segmentos de recta $\{(t, t) : 0 \leq t < 1\}$ y $\{(1, t) : 0 \leq t < 1\}$. Esto era de esperarse pues ellas son las características planas que pasan por $(0, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente, y la condición inicial no es diferenciable en $x = 0$ y $x = 1$. Fuera de estos segmentos de recta, es claro que u satisface la EDP en (3.2.11); note también que $u \in C(\mathbb{R} \times [0, 1])$ y satisface la condición inicial en (3.2.11).

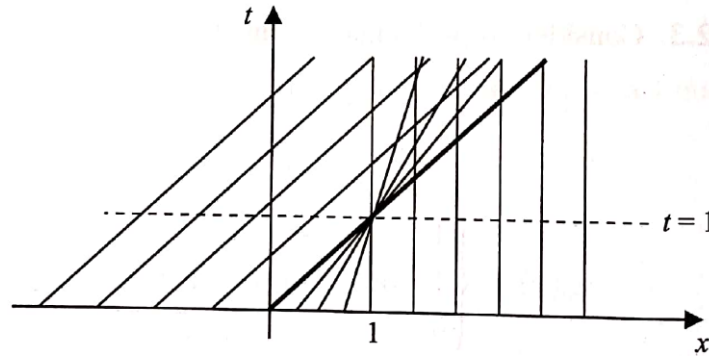


Figura 3.5: Características planas para el problema (3.2.11).

Respecto a la propagación de singularidades, la situación en el caso no lineal es también muy diferente.

Ejemplo 3.2.4 Consideremos nuevamente la ecuación de Burger pero con una condición inicial diferente,

$$u_t + uu_x = 0, \quad (3.2.13)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.2.14)$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0. \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La función

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, t \geq 0, \\ x/t & \text{si } 0 \leq x \leq t, t \neq 0, \\ 1 & \text{si } x > t \geq 0 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R} \times [0, +\infty) - \{(0, 0)\}$ y es solución del problema (3.2.13), decir, satisface la EDP para $t > 0$ fuera de las características que pasan por el origen y satisface la condición inicial.

Este ejemplo muestra que podemos tener una solución continua para $t > 0$ aunque la condición inicial ($t = 0$) sea discontinua: por tanto la discontinuidad de la condición inicial no es “cargada” por las características planas. En el ejemplo precedente, sólo las derivadas son discontinuas a lo largo de las características planas que pasan por el origen. Ese es, evidentemente, un fenómeno puramente no lineal.

3.3 Ondas de choque

Volvamos al ejemplo 3.2.3: note que no es posible hallar una solución global, es decir, definida para todo $t > 0$, que sea continua en el punto $(1, 1)$, una vez que $u = 1$ en la región $x < t < 1$ y $u = 0$ en la región $t < 1 \leq x$; además, aún admitiendo soluciones discontinuas (por ejemplo, funciones discontinuas a lo largo de una curva suave y que satisfacen la EDP fuera de esa curva), no podríamos determinar la solución en la región $1 < x < t$ una vez que cada punto en dicha región esta en exactamente tres características planas (vea la figura 3.2).

Aún con relación al problema (3.2.11), note que las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.10) determinan en ese caso una superficie (que no es el gráfico de una función de x y t) en el espacio xtu , parametrizada por x_0 y t ; la figura (3.3) nos muestra la proyección de las curvas $s \rightarrow (x(s, t_0), t_0, u(s, t_0))$ en el plano xu para distintos valores de t_0 . Observe como la curva “se quiebra” en $t = 1$.

El ejemplo 3.2.3 es típico de lo que sucede cuando las características planas se intersectan. Note que, si $x_1 < x_2$, las características planas que pasan por $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ son dadas, respectivamente, por (vea la ecuación (3.2.10))

$$l_1 : x = b(u_0(x_1))t + x_1,$$

$$l_2 : x = b(u_0(x_2))t + x_2,$$

luego l_1 y l_2 tienen un punto P en común si y solamente si

$$b(u_0(x_1)) > b(u_0(x_2)).$$

En ese caso, si $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$, una solución global es necesariamente discontinua en $P = (x_0, t_0)$ puesto que, cuando $t \rightarrow t_0^-$ a lo largo de l_1 , $u \rightarrow u_0(x_1)$ en tanto que $u \rightarrow u_0(x_2)$ cuando $t \rightarrow t_0^-$ a lo largo de l_2 ; decimos

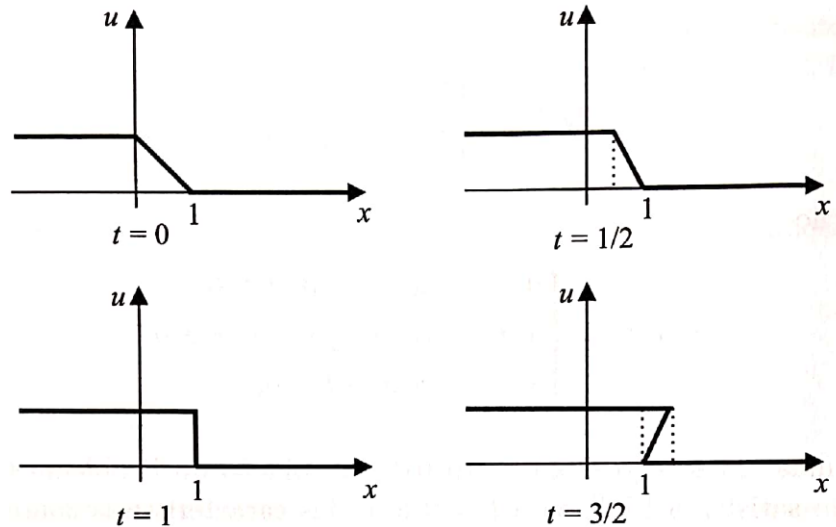


Figura 3.6: Proyección de las curvas $s \rightarrow (x(s, t), t, u(s, t))$ en el plano xu para diferentes valores de t .

entonces que una **onda de choque** es formada en $t = t_0$. Soluciones discontinuas tienen sentido desde el punto de vista físico: experiencias con fluidos compresibles muestran la aparición de discontinuidades

en la solución. Buscaremos entonces funciones u que sean discontinuas a lo largo de una curva $x = g(t), t \geq t_0$, y que satisfagan la EDP fuera de esa curva.

Observe que, si la función $b(u_0(x))$ es una función monótona no decreciente de x , las características nunca se encuentran pues, en ese caso,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow b(u_0(x_1)) \leq b(u_0(x_2))$$

Del punto de vista analítico, esto significa que $b(u_0(x))$ tiene derivada siempre mayor o igual que cero y por tanto las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.10) determinan la solución para todo $t > 0$: de hecho, la transformación

$$\begin{aligned} x &= b(u_0(x_0))s + x_0 \\ t &= x \end{aligned}$$

define un cambio de variable, una vez que su jacobiano nunca se anula.

Volviendo al problema (3.2.11), debemos debilitar el concepto de solución, aceptando soluciones discontinuas, y descubrir, analizando el problema físico, como definir la solución en la región $1 < x < t$. De hecho, ecuaciones del tipo (3.2.4) son derivadas de leyes de conservación integrales de la forma

$$\frac{d}{dt} \int_G u dx = - \int_{\partial G} f \cdot n ds, \quad (3.3.1)$$

donde G es una región del espacio, u mide la densidad de la entidad física en discusión, f describe el flujo y n es la normal exterior al borde ∂G de G . La ecuación (3.3.1) expresa que la tasa de variación de cantidad total de entidad física contenida en una región G es igual al flujo que atraviesa el borde de G . En el caso unidimensional, G es un intervalo y la ecuación (3.3.1) queda

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(a, t, u(a, t)) - f(b, t, u(b, t)). \quad (3.3.2)$$

Observe que, derivando bajo el signo de integral, dividiendo entre $(b - a)$ y haciendo tender el intervalo $[a, b]$ a un punto, obtenemos la ecuación

$$u_t + f_x = 0$$

que coincide con la ecuación (3.2.4) si $f = f(u)$. Por tanto la solución que tiene sentido del punto de vista físico es la que satisface (3.3.2).

Volviendo a la ecuación (3.2.4), buscamos una solución $u = u(x, t)$ satisfaciendo (3.2.8) y que no está definida a lo largo de una curva suave $x = g(t), t \geq t_0$, donde $t_0 > 0$ es el menor valor de t para el cual hay intercepción de características. Supongamos que u da un “salto” a lo largo de $x = g(t), t > 0$, que $t_0 \leq t \leq T$ y tomamos $a < b$ de modo que la porción de curva $x = g(t)$ para $t_0 \leq t \leq T$ esté contenida en la banda $a < x < b$ del plano xt (vea la figura 3.3). Con esta notación, definimos

$$I(t) = \int_a^b u(x, t) dx \quad (3.3.3)$$

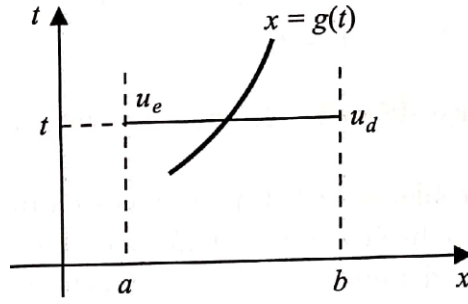


Figura 3.7: Los extremos del intervalo, a y b se escogen de modo que la curva $t \in [t_0, T] \rightarrow (g(t), t)$ esté contenida en $(a, b) \times [t_0, T]$.

Entonces, de (3.3.2),

$$\frac{dI}{dt} = f(u(a, t)) - f(u(b, t)). \quad (3.3.4)$$

Por otro lado, si denotamos por u_l y u_d , respectivamente, las soluciones a izquierda y a derecha de la curva $x = g(t)$, entonces la ecuación (3.3.3) puede reenunciarse así

$$I(t) = \int_a^{g(t)} u_l(x, t) dx + \int_{g(t)}^b u_d(x, t) dx.$$

Por hipótesis, u_l y u_d tienen límites laterales cuando $x \rightarrow g(t)^-$ y $x \rightarrow g(t)^+$ respectivamente, luego, derivando directamente,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= g'(t)u_l(g(t), t) + \int_a^{g(t)} \partial_t u_l(x, t) dx - g'(t)u_d(g(t), t) + \int_{g(t)}^b \partial_t u_d(x, t) dx \\ &= g'(t) \{u_l(g(t), t) - u_d(g(t), t)\} - \int_a^{g(t)} \partial_x (f(u_l(x, t))) dx - \int_{g(t)}^b \partial_x (f(u_d(x, t))) dx \\ &= g'(t) \{u_l(g(t), t) - u_d(g(t), t)\} - f(u_l(g(t), t)) + f(u_l(a, t)) \\ &\quad - f(u_d(b, t)) + f(u_d(g(t), t)); \end{aligned}$$

comparando con (3.3.4), obtenemos

$$g'(t) (u_d(g(t), t) - u_l(g(t), t)) = f(u_d(g(t), t)) - f(u_l(g(t), t))$$

o sea

$$s[u] = [f] \quad (3.3.5)$$

donde $s = g'(t)$,

$$[u] = u_d(g(t), t) - u_l(g(t), t)$$

es el “salto” que da u al cruzar la curva $x = g(t)$ y

$$[f] = f(u_d(g(t), t)) - f(u_l(g(t), t))$$

es el “salto” que da $f(u)$ al cruzar la curva $x = g(t)$. La condición (3.3.5) es llamada la **condición** de salto.

Ejemplo 3.3.1 Apliquemos esas ideas para encontrar una solución global para el problema (3.2.11): como $u = 1$ para $x < t < 1$ y $u = 0$ para $x > \max\{1, t\}$, es natural buscar una solución con $u_l = 1$ y $u_d = 0$ para $t > 1$, luego $[u] = -1, [f] = -1/2, s = 1/2$ y

$$g(t) = t/2 + c.$$

Por otro lado, la discontinuidad debe comenzar en el punto $(1, 1)$, luego la curva suave $x = g(t)$, $t \geq 1$, debe ser la semirrecta $2x = t + 1$, $t \geq 1$ y la solución global deseada es

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t < 1 \text{ ó } x < \frac{1+t}{2}, t \geq 1. \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{si } t \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } t < 1 \leq x \text{ ó } x > \frac{1+t}{2} \geq 1. \end{cases}$$

La figura 3.3.1 muestra las discontinuidades de u : u es discontinua a lo largo de la semirrecta $2x = t + 1$, $t \geq 1$ y las derivadas de primer orden de u son discontinuas (además, es claro, de la semirrecta anterior) en los segmentos de recta $x = t$, $0 \leq t \leq 1$ y $x = 1$, $0 \leq t \leq 1$.

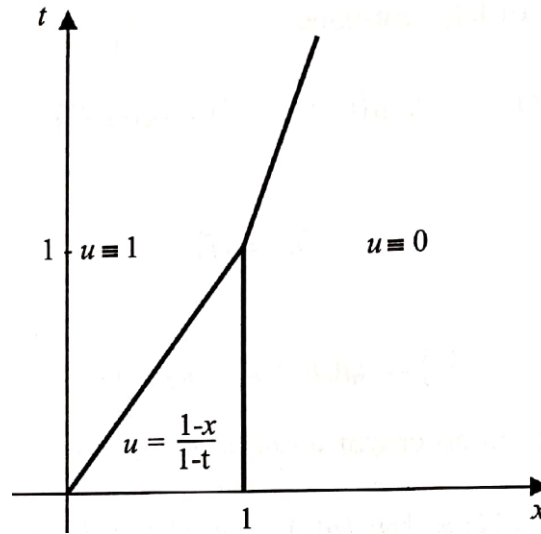


Figura 3.8: Solución global del problema (3.2.11).

Extendiendo el concepto de solución tornamos posible el resolver problemas de valor inicial del tipo (3.2.4), (3.2.8) que no tienen soluciones globales clásicas. Al mismo tiempo, existe el peligro de que hayamos aumentado en demasía la clase de posibles soluciones, perdiendo la unicidad. De hecho, el ejemplo 3.2.4 muestra que ello puede suceder: las características planas no se intersectan y existe solución clásica para $t > 0$ pero que no está determinada en la región $0 \leq x \leq t$. (vea la figura 3.3). Procediendo como en el ejemplo 3.3.1, vemos que la función

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < t/2 \\ 1 & \text{si } x > t/2 \end{cases}$$

satisface la condición de salto (3.3.5) y es solución de (3.2.13) en el sentido de que satisface la EDP para $t > 0$ fuera de la recta $x = t/2$ y, evidentemente, satisface la condición inicial. Por otro lado, la

función

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, t \geq 0, \\ x/t & \text{si } 0 \leq x \leq t, t \neq 0, \\ 1 & \text{si } x > t \geq 0 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R} \times [0, +\infty) - \{(0, 0)\}$ (luego, en particular, satisface la condicion de salto (3.3.5) con $[u] = [j] = 0$) y satisface la EDP para $t > 0$ fuera de las características que pasan por el origen. Sólo una de estas funciones tiene significado físico, el problema es saber cual de ellas es.

La solución u_1 en el ejemplo precedente puede descartarse introduciendo el siguiente criterio:

Hipótesis 3.2 Dado (x, t) , con $t > t_0$, fuera de la curva de discontinuidad, existe una característica plana que pasa por (x, t) la cual es interceptada por la curva de discontinuidad en un instante $t_1 > t$.

De la figura 3.3 es evidente que no existe ninguna curva en la región $0 < x < t$ que satisfaga la hipótesis 3.2, luego la solución global que buscamos para el problema (3.2.13) tiene que ser continua.

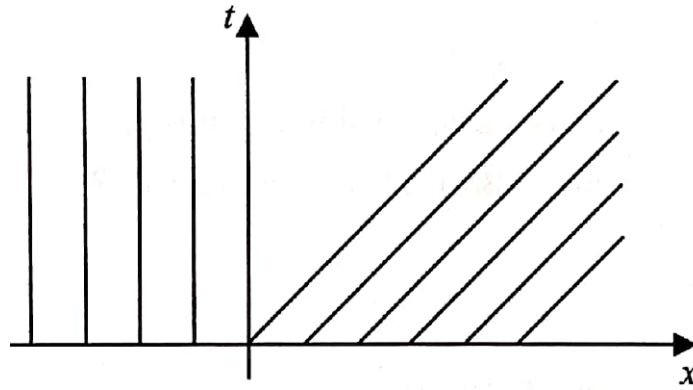


Figura 3.9: Características planas para el problema (3.2.13).

El significado de la hipótesis tal vez quede más claro analizando el ejemplo (3.3.1): comparando las figuras (3.2) y (3.3.1), vemos que existen tres características planas que pasan por un punto (x_1, t_1) en la región $1 < x < t$ pero sólo una de ellas intercepta a la curva de discontinuidad $2x = t + 1$, $t \geq 1$, en un instante $t > t_1$ (si $2x_1 \neq t_1 + 1$, es evidente). Esto significa que, con la hipótesis u_l y u_d están determinadas por la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$: Observe que si

$$b(u_l(x_1, t)) > g'(t) > b(u_d(x_2, t)) \quad (3.3.6)$$

siempre que $x_1 < g(t) < x_2$, $t > t_0$, entonces se satisface la hipótesis 3.2.

Del punto de vista físico, la hipótesis 3.2 puede justificarse mediante la teoría de la entropía. Para mayores detalles el lector debe consultar el parágrafo B del capítulo 15 de [Sm]; puede ver también el excelente artículo de Lax [La] y el libro [W].

CAPÍTULO 4

Ecuaciones semilineales de segundo orden

En este capítulo clasificaremos las ecuaciones semilineales de segundo orden, definiremos sus curvas características y sus formas canónicas.

4.1 Clasificación

En Geometría Analítica el estudio de las curvas definidas por ecuaciones de segundo grado en x e y se simplifica reduciendo la ecuación a su forma normal. Mediante una transformación afín que lleva las variables x e y en nuevas variables ξ , η , la ecuación puede ser escrita en la forma canónica de una parábola, hipérbola o elipse (o alguna forma degenerada de esas curvas) en términos de las nuevas variables ξ , η . El sistema $\xi\eta$ de coordenadas es el sistema de coordenadas respecto al cual la curva tiene su representación algebraica más simple y natural. En esta sección usaremos tales ideas para clasificar las EDPs semilineales de segundo orden con dos variables independientes.

Como vimos en el primer capítulo, una EDP semilineal de segundo orden con dos variables independientes es de la forma

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (4.1.1)$$

y la parte principal de la ecuación (4.1.1) es el operador

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}. \quad (4.1.2)$$

En analogía con el caso de las cónicas, definiremos el tipo de la ecuación (4.1.1) analizando su parte principal.

Supongamos que las funciones a, b y c son continuas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y que no se anulan simultáneamente. El discriminante de la ecuación (4.1.1) es la función $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y). \quad (4.1.3)$$

Definición 4.1.1 El operador diferencial L dado por (4.1.2) y la EDP (4.1.1) se dicen

(i) parabólicos en el punto $(x, y) \in \Omega$ si $\delta(x, y) = 0$;

(ii) hiperbólicos en el punto $(x, y) \in \Omega$ si $\delta(x, y) > 0$;

(iii) elípticos en el punto $(x, y) \in \Omega$ si $\delta(x, y) < 0$.

El operador L y la EDP (4.1.1) se llaman parabólicos (respectivamente hiperbólicos, elípticos) en Ω si son parabólicos (respectivamente hiperbólicos, elípticos) en todos los puntos de Ω .

En general la ecuación (4.1.1) puede cambiar de tipo en el dominio de definición de sus coeficientes: en ese caso se dice que la EDP (así como el operador asociado) es de tipo mixto. Es evidente que eso no sucede cuando los coeficientes a, b y c son constantes.

De las ecuaciones que vimos en el primer capítulo, las ecuaciones de Burger y del calor son parabólicas, las ecuaciones de Sine Gordon y la de onda son hiperbólicas y las ecuaciones de Poisson y Laplace son elípticas en todo el plano. La ecuación de Tricomi,

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (4.1.4)$$

es de tipo mixto: es elíptica en el semiplano $y > 0$, parabólica en el eje de las x e hiperbólica en el semiplano $y < 0$.

Una propiedad fundamental es que el tipo de una EDP es invariante bajo cambios de variables “bien comportados”. Para demostrarlo, suponga que $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ son funciones con derivadas continuas hasta el segundo orden en una vecindad del punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ con jacobiano

$$J(x, y) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

y suponga que $J(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces, por continuidad, el jacobiano no se anula en una vecindad del punto (x_0, y_0) y, por el teorema de la función inversa, podemos resolver localmente $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ en una vecindad del punto $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0))$ y las funciones x e y son de clase C^2 en dicha vecindad. Definiendo entonces $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ obtenemos, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, \\ u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + v_{\xi\xi\xi} \xi_x^3 + v_{\xi\xi\eta} \xi_x^2 \eta_x + v_{\xi\eta\eta} \xi_x \eta_x^2 + v_{\eta\eta\eta} (\eta_x)^3 \\ u_{xy} &= v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_{\xi\xi\xi} \xi_x^2 \xi_y + v_{\xi\xi\eta} \xi_x \xi_y \eta_x + v_{\xi\eta\eta} \xi_x \eta_y^2 + v_{\eta\eta\eta} \eta_x \eta_y^2 \\ u_{yy} &= v_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + v_{\xi\xi\xi} \xi_x^2 \xi_y^2 + v_{\xi\xi\eta} \xi_x^2 \xi_y \eta_y + v_{\xi\eta\eta} \xi_x \xi_y \eta_y^2 + v_{\eta\eta\eta} \eta_x^2 \eta_y^2 \end{aligned}$$

Por tanto, si u es una solución clásica de la ecuación (4.1.1), v es una solución clásica de la ecuación

$$A(\xi, \eta)v_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \quad (4.1.5)$$

donde

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) &= a(x, y) (\xi_x)^2 + 2b(x, y) \xi_x \xi_y + c(x, y) (\xi_y)^2, \\ B(\xi, \eta) &= a(x, y) \xi_x \eta_x + b(x, y) (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c(x, y) \xi_y \eta_y, \\ C(\xi, \eta) &= a(x, y) (\eta_x)^2 + 2b(x, y) \eta_x \eta_y + c(x, y) (\eta_y)^2. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Calculando el discriminante de la ecuación (4.1.5), obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta(\xi, \eta) &= B(\xi, \eta)^2 - A(\xi, \eta)C(\xi, \eta) = \\ &= \delta(x, y)J(x, y)^2\end{aligned}$$

donde

$$\delta(x, y) = b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y)$$

es el discriminante de la ecuación (4.1.1). Como el jacobiano nunca se anula en una vecindad del punto (x_0, y_0) , el signo de $\Delta(\xi_0, \eta_0)$ es igual al signo de $\delta(x_0, y_0)$. En otras palabras, la ecuación (4.1.1) es parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) en (x_0, y_0) si y sólo si la ecuación (4.1.5) es parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) en (ξ_0, η_0) .

Otro aspecto de la clasificación por tipos es la existencia o no de curvas características: definimos, en el capítulo 2, características planas para ecuaciones de primer orden; para ecuaciones de segundo orden, las características son curvas planas a lo largo de las cuales la EDP puede enunciarse en una forma que contiene sólo derivadas totales de u_x y u_y . Las curvas características son muy importantes en el estudio de las ecuaciones hiperbólicas; las ecuaciones elípticas no tienen curvas características.

Para comprender lo que está sucediendo, buscaremos curvas características para la ecuación (4.1.1). Como estamos suponiendo que la ecuación es de segundo orden, los coeficientes a, b y c no se anulan simultáneamente en la región de interés; para simplificar, supongamos que a nunca se anula en la región Ω ; el caso en que a se anula puede tratarse análogamente. En primer lugar, la EDP (4.1.1) es equivalente al sistema de primer orden

$$\begin{aligned}p &= u_x, \\ q &= u_y, \\ a(x, y)p_x + 2b(x, y)p_y + c(x, y)q_y &= f(x, y, u, p, q).\end{aligned}\tag{4.1.7}$$

Como u es de clase C^2 , podemos eliminar u de las dos primeras ecuaciones en (4.1.7) derivando la primera respecto de y , la segunda respecto de x y restando, obtenemos

$$p_y - q_x = 0.\tag{4.1.8}$$

Multiplicando la ecuación (4.1.8) por una función arbitraria $\lambda = \lambda(x, y) \neq 0$ y sumando a la última ecuación del sistema (4.1.7) llegamos a la ecuación.

$$ap_x + 2bp_y + \lambda p_y - \lambda q_x + cq_y = 0\tag{4.1.9}$$

Por otro lado, la derivada respecto de x de una función $\omega(x, y)$ a lo largo de la curva $y = y(x)$ en el plano xy es dada por

$$\frac{d}{dx}(\omega(x, y(x))) = \omega_x + \omega_y \frac{dy}{dx}.\tag{4.1.10}$$

Por tanto, enunciando (4.1.9) en la forma

$$a \frac{dP}{dx} - \lambda \frac{dQ}{dx} = 0\tag{4.1.11}$$

donde $P(x) = p(x, y(x))$ y $Q(x) = q(x, y(x))$, obtenemos

$$\begin{aligned} p_x + p_y \frac{dy}{dx} &= p_x + \frac{2b + \lambda}{a} p_y \\ q_x + q_y \frac{dy}{dx} &= q_x - \frac{c}{\lambda} q_y \end{aligned}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b + \lambda}{a} = -\frac{c}{\lambda} \quad (4.1.12)$$

y λ debe satisfacer la ecuación

$$\lambda^2 + 2b\lambda + ac = 0. \quad (4.1.13)$$

Entonces, si

$$\frac{dy}{dx} = \mu(x, y), \quad (4.1.14)$$

comparando con (4.1.12) y (4.1.13), vemos que μ satisface (4.1.15)

$$a\mu^2 - 2b\mu + c = 0. \quad (4.1.15)$$

Por tanto el signo del discriminante $\delta = b^2 - ac$ determina si existen dos, una o ninguna solución real $\mu = \mu(x, y)$ de la ecuación (4.1.15). Concluimos que en el caso hiperbólico ($\delta > 0$) existen dos familias de curvas reales satisfaciendo (4.1.14) con μ solución de (4.1.15); en el caso parabólico ($\delta = 0$) existe sólo una familia mientras que en el caso elíptico ($\delta < 0$) no existe ninguna. Las curvas definidas por (4.1.14) con μ solución de (4.1.15), cuando existen, se denominan curvas características de la ecuación (4.1.1).

Ejemplo 4.1.1 *Encontremos las curvas características para la ecuación de onda*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (4.1.16)$$

donde $c > 0$ es constante. Como observamos anteriormente, la ecuación (4.1.16) es hiperbólica en todo el plano, por tanto tiene dos familias de curvas características. Enunciando la ecuación en la forma

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

tenemos $a(t, x) = 1$, $b(t, x) = 0$ y $c(t, x) = -c^2$, luego la ecuación (4.1.15) queda

$$\mu^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm c.$$

Obteremos entonces

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \Rightarrow x = \pm ct + k$$

donde k es una constante arbitraria. Luego las características son las familias de rectas $x + ct = k_1$ y $x - ct = k_2$, donde k_1 y k_2 son constantes.

Ejemplo 4.1.2 Hallemos las curvas características para la ecuación de Tricomi (4.1.4) en el semiplano $y < 0$. La ecuación (4.1.15) en este caso es

$$y\mu^2 + 1 = 0 \Rightarrow \mu = \pm \sqrt{-\frac{1}{y}}$$

entonces la ecuación (4.1.14) implica

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \pm \sqrt{-\frac{1}{y}} \Rightarrow \sqrt{-y} dy = \pm dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-y)^{3/2} = \pm \frac{3}{2}x + c, \end{aligned}$$

donde c es una constante arbitraria. Por tanto las curvas características son

$$y = -\left(\pm \frac{3x}{2} + c\right)^{2/3}$$

Ejemplo 4.1.3 Encontremos ahora las curvas características para la ecuación del calor.

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (4.1.17)$$

donde $\alpha > 0$ es constante. Como la ecuación (4.1.17) es parabólica en todo el plano, existe sólo una familia de curvas características: en efecto, como $b = c = 0$, la ecuación (4.1.15) tiene como una única solución $\mu = 0$ y por tanto las curvas características son las rectas $y = c$, c una constante arbitraria.

4.2 Formas canónicas y curvas características

Como en el caso de las cónicas de segundo grado, si la EDP (4.1.1) es del mismo tipo en un abierto en \mathbb{R}^2 , podemos hallar un cambio de variable que la ubique en una forma particularmente simple, la llamada forma canónica o normal. La forma normal de una ecuación elíptica es

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, v_{\xi}, v_{\eta}), \quad (4.2.1)$$

la de una ecuación parabólica es

$$v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, u, v_{\xi}, u_{\eta}) \quad (4.2.2)$$

y una ecuación hiperbólica tiene dos formas canónicas:

$$v_{\xi\eta} = g(\xi, \eta, v, v_{\xi}, v_{\eta}) \quad (4.2.3)$$

6

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, v, v_{\xi}, v_{\eta}) \quad (4.2.4)$$

El caso hiperbólico tiene más de una forma canónica porque, aunque la ecuación (4.2.3) sea normalmente más simple de resolver, la forma (4.2.4) es la que generaliza para dimensiones mayores.

Para hallar tal cambio de variables se necesita cierta suavidad de los coeficientes de la parte principal. Además, un cambio de variable es local, pues la EDP puede cambiar de tipo en la región Ω . Es evidente que si la EDP (4.1.1) es hiperbólica o elíptica en un punto (x_0, y_0) , como el discriminante es continuo, la ecuación es hiperbólica o elíptica, respectivamente, en una vecindad de (x_0, y_0) ; mientras tanto, ello no sucede en el caso parabólico: por ejemplo, la ecuación de Tricomi es parabólica sólo en el eje de las x ; por esa razón debemos suponer que la ecuación es del mismo tipo en un abierto.

Empezaremos estudiando el caso hiperbólico, que es más simple. Supongamos que los coeficientes a, b y c de la ecuación (4.1.1) tienen derivadas continuas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ donde la ecuación es hiperbólica y que a no se anula en Ω . En este caso tenemos dos familias de curvas características y_1 e y_2 con

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \mu_1, \quad \frac{dy_2}{dx} = \mu_2 \\ \mu_1(x, y) &= \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \mu_2(x, y) = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Como la EDP es particularmente simple a lo largo de las características, es natural procurar un cambio de variable $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ tal que ξ es constante a lo largo de la familia de características y_1 y η es constante a lo largo de la familia y_2 . Buscaremos entonces ξ , que satisfagan las ecuaciones de primer orden

$$\xi_x + \mu_1 \xi_y = 0, \xi_y \neq 0 \quad (4.2.6)$$

$$\eta_x + \mu_2 \eta_y = 0, \eta_y \neq 0 \quad (4.2.7)$$

Observe que si $a, b, c \in C^1(\Omega)$ y a nunca se anula en Ω , entonces $\mu_1, \mu_2 \in C^1(\Omega)$ y podemos hallar soluciones ξ, η de (4.2.6) y (4.2.7) de clase C^2 . Además, como $\mu_1 \neq \mu_2$ en todos los puntos de Ω , la transformación $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ define de hecho un cambio de variable pues el jacobiano

$$J(x, y) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = (\mu_2 - \mu_1) \xi_y \eta_y$$

nunca se anula en Ω . Definiendo entonces $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ y usando las ecuaciones (4.1.5) y (4.1.6), obtenemos

$$Av_{\xi\xi} + 2Bv_{\xi\eta} + Cv_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

donde

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = a\mu_1^2\xi_y^2 - 2b\mu_1\xi_y^2 + c\xi_y^2 = 0 \\ C(\xi, \eta) &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0 \end{aligned}$$

y por tanto

$$v_{\xi\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

Con ese cambio de variable entonces la ecuación (4.1.1) toma la forma (4.2.3).

Ejemplo 4.2.1 Pongamos la ecuación de onda (4.1.16) en la forma (4.2.3). Las curvas características para la ecuación (4.1.16) son de la forma $x \pm ct = \text{constante}$. Haremos entonces el cambio de variable

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct, \\ \eta &= x - ct. \end{aligned}$$

Como $c > 0$, el jacobiano nunca se anula pues

$$J(t, x) = \xi_t \eta_x - \xi_x \eta_t = c + c = 2c \neq 0.$$

Tomando $v(\xi, \eta) = u(t, x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta} \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

por tanto la EDP (4.1.16) queda

$$-4c^2 v_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow v_{\xi\eta} = 0.$$

Ejemplo 4.2.2 Pondremos la ecuación de Tricomi (4.1.4) en la forma (4.2.3) en el semiplano $y < 0$. Las curvas características para la ecuación de Tricomi son de la forma $(-y)^{3/2} \pm 3x/2 = \text{constante}$. Haremos entonces el cambio de variable

$$\begin{aligned} \xi &= (-y)^{3/2} + \frac{3x}{2}, \\ \eta &= (-y)^{3/2} - \frac{3x}{2}. \end{aligned}$$

Como $y < 0$, las funciones ξ y η son infinitamente diferenciables con jacobiano

$$J(x, y) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = -9(-y)^{1/2}/2 \neq 0.$$

Tomando $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, obtenemos

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{9}{4} v_{\xi\xi} - \frac{9}{2} v_{\xi\eta} + \frac{9}{4} v_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= \frac{3}{4} (-y)^{-1/2} (v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}) - \frac{9}{4} y (v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) \end{aligned}$$

y por tanto satisface la ecuación

$$v_{\xi,\eta} = -\frac{1}{12} \left(\frac{\xi + \eta}{2} \right)^{-1/3} (v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}).$$

En el caso parabólico sólo existe una familia de curvas características pero podemos obtener como anteriormente

$$\xi_x + \mu \xi_y = 0$$

donde μ es la única raíz de (4.1.15). Escogiendo cualquier función η de clase C^2 tal que

$$J(x, y) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

en todos los puntos de la región Ω , obtenemos un cambio de variable que transforma la ecuación (4.1.1) en la ecuación (4.2.2).

Ejemplo 4.2.3 Pongamos en la forma canónica la ecuación

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + xu_{yy} = u_x + u_y. \quad (4.2.8)$$

La EDP (4.2.8) es parabólica en todo el plano y, como $a = b = c = x$, la única raíz de la ecuación (4.1.15) para $x \neq 0$ es $\mu = 1$, luego las curvas características son las rectas $y = x + k$, k una constante arbitraria. Haciendo entonces al cambio de variable

$$\xi = y - x$$

$$\eta = y + x$$

y tomando $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, u es solución de (4.2.8) si y solamente si u satisface

$$(\eta - \xi)v_{\eta\eta} = v_\eta.$$

No estudiaremos el caso elíptico por ser más complicado. Sólo observamos que es posible repetir formalmente lo realizado en el caso hiperbólico con el auxilio de funciones complejas.

CAPÍTULO 5

La ecuación de la onda

En este capítulo resolveremos algunos problemas que involucran la ecuación de onda. En la primera sección usaremos una de las formas canónicas para hallar la solución general de la ecuación de onda en \mathbb{R}^2 . En la segunda sección discutiremos el problema de la cuerda infinita. En las dos últimas secciones estudiaremos problemas que involucran la ecuación de onda en un intervalo finito.

5.1 Solución General

Como ya observamos anteriormente, las curvas características son muy importantes para las EDPs hiperbólicas. Vamos a ejemplificar eso estudiando la ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (5.1.1)$$

donde c es una constante positiva. Como vimos en el ejemplo (4.1.1) del capítulo precedente, las curvas características de la ecuación (5.1.1) son las rectas $x \pm ct = \text{constante}$. Haciendo entonces el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

$v(\xi, \eta) = u(x, y)$ satisface la EDP

$$v_{\xi\eta} = 0. \quad (5.1.3)$$

Pero la EDP (5.1.3) puede resolverse fácilmente integrando directamente primero en η y después en ξ para obtener

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) \quad (5.1.4)$$

donde φ y ψ son funciones arbitrarias (de clase C^2 , si buscamos soluciones clásicas). Volviendo a las variables x y t , tenemos que

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \quad (5.1.5)$$

donde φ y ψ son funciones arbitrarias, $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$.

En este simple ejemplo, el uso de las características nos permitió hallar la solución general de la ecuación. Es interesante observar que la ecuación de onda (5.1.1) fue uno de los problemas más importantes del siglo XVIII. El primero en estudiarla fue d'Alembert, seguido por Euler, Daniel Bernoulli y Lagrange. Fueron obtenidas soluciones en diversas formas y la discusión sobre los méritos y las relaciones entre esas soluciones provocó preguntas fundamentales (como por ejemplo, sobre lo que es una función) que sólo fueron resueltas en el siglo XIX.

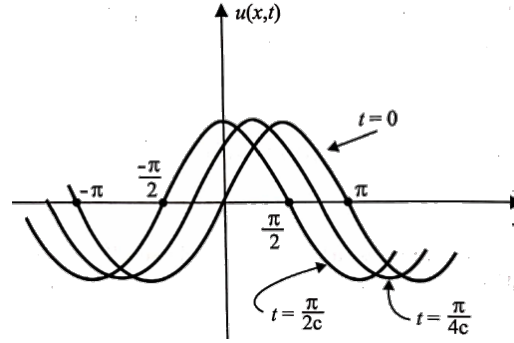


Figura 5.1: La función $u(x, t) = \sin(x + ct)$ describe una senoide moviéndose hacia la izquierda con velocidad c .

Si consideramos t representando al tiempo, la transformación $\xi = x + ct$ representa la traslación del sistema de coordenadas a la izquierda con velocidad c . Por ejemplo, la función $u(x, t) = \sin(x + ct)$ describe una senoide (u onda senoidal) moviéndose hacia la izquierda con velocidad constante c (vea la figura 5.1). De la misma forma, la función $u(x, t) = \varphi(x + ct)$ describe una onda (como la del gráfico de la función φ) moviéndose hacia la izquierda con velocidad c . De manera análoga, la función $u(x, t) = \psi(x - ct)$ describe una onda moviéndose hacia la derecha con velocidad c . Por tanto, la solución general (5.1.5) de la ecuación describe la superposición de dos ondas moviéndose con velocidad c , una hacia la izquierda y la otra hacia la derecha. Como las dos ondas viajan en sentidos opuestos, la forma de la función $u(x, t)$ en general varía con el tiempo.

Ejemplo 5.1.1 Vamos a tomar $\varphi = \psi$ con

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 4 \\ -x - 4 & \text{si } -4 \leq x < -2, \\ x & \text{si } -2 \leq x < 2, \\ -x + 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

La figura 5.2 muestra el gráfico de la función $u(x, t) = \varphi(x + t) + \varphi(x - t)$ para algunos valores de t .

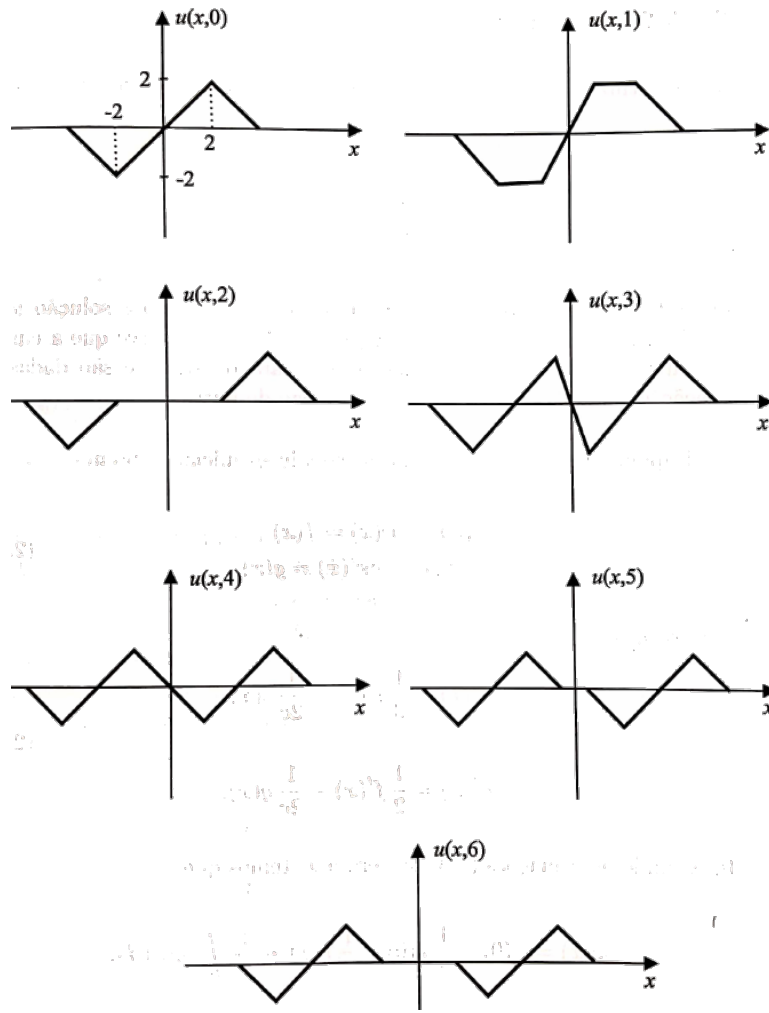


Figura 5.2: El gráfico de la función $u(x, t_0)$ para algunos valores de t_0 (ejemplo 5.1.1).

5.2 La Cuerda Infinita

Vamos a utilizar la solución general (5.1.5) para resolver el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

donde f y g son funciones dadas. Es claro que, si queremos la solución $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, debemos tener que $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$. Observe que la curva inicial es la curva $t = 0$ (que no es una característica) y son dadas la función u y su derivada normal u_t a lo largo de la curva.

Imponiendo a la solución general (5.1.5) las condiciones iniciales, obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \psi(x) &= f(x) \\ c\varphi'(x) - c\psi'(x) &= g(x) \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x) \\ \psi'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x)\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

Integrando las ecuaciones (5.2.3) de cero a x , tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(0) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds, \\ \psi(x) &= \psi(0) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds\end{aligned}\tag{5.2.4}$$

Como, de (5.2.2),

$$\varphi(0) + \psi(0) = f(0),$$

obtenemos

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds\tag{5.2.5}$$

Entonces, si u es solución de (5.2.1), u es dada por (5.2.5). Debemos probar que la función u definida por (5.2.5) es solución de (5.2.1): en efecto, derivando (5.2.5),

$$\begin{aligned}u_x(x, t) &= \frac{f'(x+ct) + f'(x-ct)}{2} + \frac{g(x+ct) - g(x-ct)}{2c} \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{f''(x+ct) + f''(x-ct)}{2} + \frac{g'(x+ct) - g'(x-ct)}{2c} \\ u_t(x, t) &= \frac{cf'(x+ct) - cf'(x-ct)}{2} + \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{c^2 f''(x+ct) + c^2 f''(x-ct)}{2} + \frac{cg'(x+ct) - cg'(x-ct)}{2}\end{aligned}$$

Luego u es solución del problema (5.2.1). Como toda solución es de esta forma, u dada por (5.2.5) es la única solución de (5.2.1).

La expresión (5.2.5) muestra claramente que el valor de la solución en el punto (x_0, t_0) sólo depende de los datos iniciales en el intervalo cerrado de extremos $x_0 - ct_0$ y $x_0 + ct_0$: los datos iniciales pueden ser alterados arbitrariamente fuera de dicho intervalo sin cambiar el valor de la solución en el punto (x_0, t_0) . Ese intervalo es llamado el *intervalo de dependencia* del punto (x_0, t_0) .

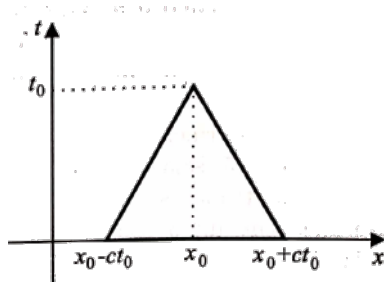


Figura 5.3: El intervalo de dependencia del punto (x_0, t_0) si $t_0 > 0$ y $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$.

Dado un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, la máxima región delimitada por las características que pasan por los extremos del intervalo es la región

$$R = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) : a - ct \leq x \leq b + ct\} \cup \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0) : a + ct \leq x \leq b - ct\};$$

R es la *región de influencia* del intervalo $[a, b]$. Observe que, si $(x_0, t_0) \in R$, entonces el intervalo de dependencia de (x_0, t_0) intersecta a $[a, b]$; por tanto, una perturbación en los datos iniciales en el intervalo $[a, b]$ modifica la solución en la región R .

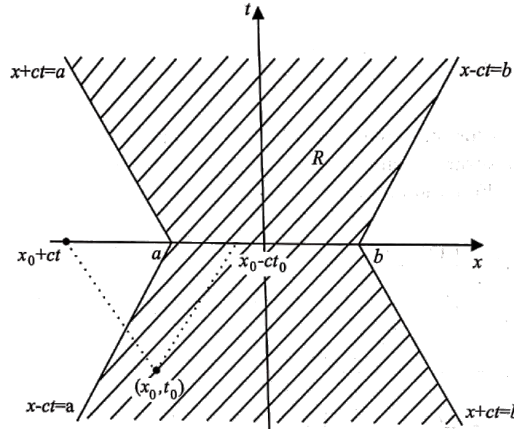


Figura 5.4: R es la región de influencia de $[a, b]$. La modificación de los datos iniciales en $[a, b]$ cambia la solución en la región R .

Como observamos anteriormente, es preciso que $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$ para que u dada por (5.2.5) sea una solución clásica del problema (5.2.1). Mientras tanto, si admitimos soluciones no clásicas y si, por ejemplo, fuera discontinua en un punto x_0 , ¿qué sucede con la solución? De la fórmula (5.2.5), vemos que u será discontinua a lo largo de las rectas $x + ct = x_0$ y $x - ct = x_0$; en otras palabras, *las discontinuidades se propagan a lo largo de las características*. Es claro que, en ese caso, u dada por (5.2.5) satisface la EDP fuera de las características que pasan por x_0 .

El problema (5.2.1), para $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, describe el movimiento de una *cuerda infinita* vibrando en un plano vertical: $u(x, t)$ es el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x y en el instante t , $f(x)$ es la posición inicial (en $t = 0$) y $g(x)$ es la velocidad inicial de la cuerda.

Ejemplo 5.2.1 Vamos a considerar el problema (5.2.1) con $c = 1$, $f(x) = \sin x$ y $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. En este caso la solución es

$$u(x, t) = \frac{\sin(x + t) + \sin(x - t)}{2} = \sin x \cos t.$$

Por consiguiente $u(x, t)$ es una senoide de amplitud $|\cos t|$ (luego cero para $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k entero). La figura 5.5 muestra el gráfico de $u(x, t_0)$ para diferentes valores de t_0 . Observe que cuando t va de cero a $\pi/2$, la amplitud decrece de 1 hasta cero; cuando t varía de $\pi/2$ a π , la amplitud va de cero hasta 1 pero la oscilación es al contrario de la oscilación para $t \in [0, \pi/2]$; en el intervalo $[\pi, 3\pi/2]$ la amplitud decrece y crece nuevamente en $[3\pi/2, 2\pi]$ alcanzando la posición inicial en $t = 2\pi$. Como

$\cos(t+2k\pi) = \cos t$, entonces $u(x, t+2k\pi) = u(x, t)$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{Z}$ y por tanto el movimiento de la cuerda en cualquier intervalo de tiempo $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ es exactamente el mismo que en el intervalo $[0, 2\pi]$.

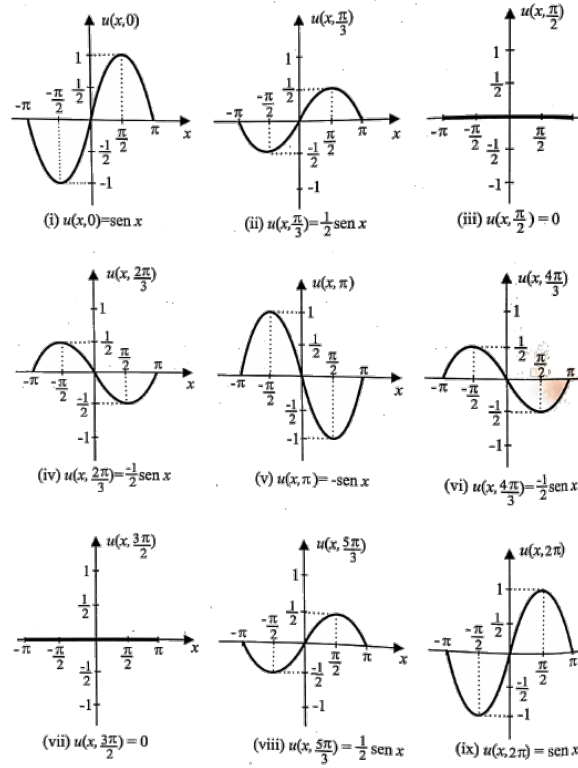


Figura 5.5: El gráfico de $u(x, t_0)$ para algunos valores de t_0 (ejemplo 5.2.1).

Ejemplo 5.2.2 Vamos a considerar ahora el problema (5.2.1), con $c = 1$, $g = 0$ y f una función que no es de clase C^2 :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ -2|x| + 2 & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Entonces u dada por la fórmula (5.2.5) es continua (pues f es continua), pero ya no es continuamente diferenciable en el plano pues la derivada de f es discontinua en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$: las derivadas de u deben ser discontinuas a lo largo de las características en el plano (x, t) que pasan por los puntos $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Considerando solamente las características que pasan por $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, ellas dividen al plano (x, t) en nueve regiones (vea la figura 5.6): en las regiones I, III, V, VII, $u = 0$ pues $|x+t| > 1$ y $|x-t| > 1$; en las regiones II y VI, $|x-t| > 1$ pero $|x+t| < 1$, luego $u(x, t) = 1 - |x+t|$; en las regiones IV y VIII, $|x+t| > 1$ pero $|x-t| < 1$, por lo tanto $u(x, t) = 1 - |x-t|$; finalmente, en la región IX, $|x+t| < 1$ y $|x-t| < 1$, luego

$$u(x, t) = 2 - |x-t| - |x+t|.$$

Observe que de hecho las derivadas de u tienen discontinuidades a lo largo de las rectas $x-t = -1$, $x-t = 0$, $x-t = 1$, $x+t = -1$, $x+t = 0$ y $x+t = 1$. La figura 5.7 muestra el gráfico de $u(x, t)$ para

algunos valores de $t \geq 0$ (basta considerar $t \geq 0$ pues $u(x, t) = u(x, -t)$). Note que la onda inicial f se divide en dos cuando t varía de cero a uno y después ellas se apartan, viajando cada una con velocidad $c = 1$, una hacia la izquierda y la otra a la derecha.

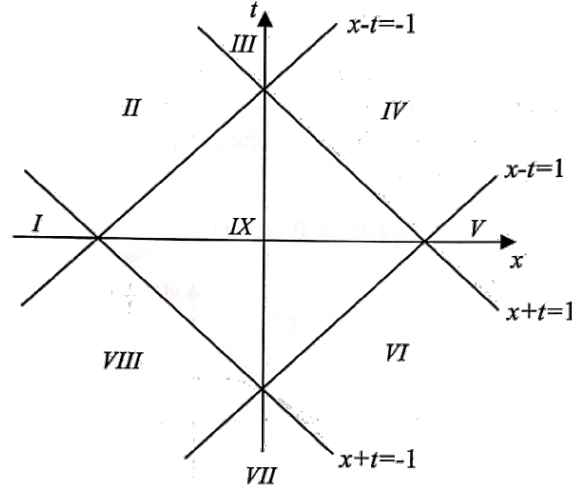


Figura 5.6: Las derivadas de u son discontinuas en las cuatro rectas $x - t = \pm 1$, $x + t = \pm 1$ y también en las rectas $x \pm t = 0$, que no aparecen en la figura.

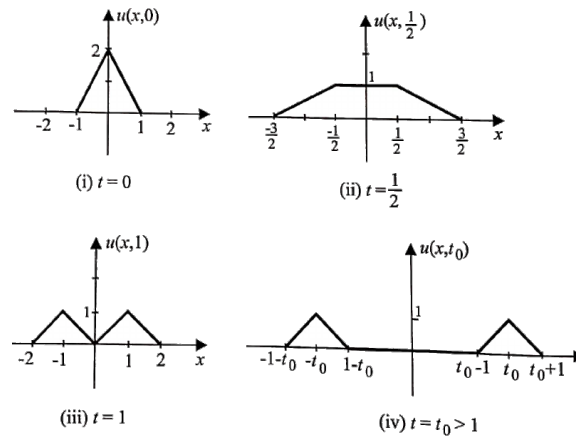


Figura 5.7: El gráfico de $u(x, t_0)$ para algunos valores de t_0 (ejemplo 5.2.2).

5.3 Funciones Pares, Impares y Periódicas

En la sección precedente usamos la solución general (5.1.5) de la ecuación de onda para resolver un problema en \mathbb{R}^2 . No es tan fácil, sin embargo, aplicar (5.1.5) directamente para estudiar la ecuación de onda en una región del tipo $(0, l) \times (0, +\infty)$. Para entender las dificultades involucradas, vamos a

considerar el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, l], \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

donde f es una función dada y c, l son constantes positivas. Como vimos en el primer capítulo, el problema (5.3.1) puede ser considerado como un problema mixto y, para que exista solución, es necesario que f satisfaga la condición de compatibilidad

$$f(0) = 0 = f(l). \quad (5.3.2)$$

A pesar de las semejanzas entre los problemas (5.2.1) y (5.3.1), no podemos usar la fórmula (5.1.5) para resolver el problema (5.3.1) pues f está definida sólo en el intervalo $[0, l]$; esperamos, entre tanto, por la deducción anterior, que la fórmula sea válida cuando $x + ct, x - ct \in [0, l]$, $x \in [0, l], t \geq 0$. ¿Y en los otros puntos de la región $[0, l] \times [0, +\infty)$? Una posibilidad es extender la función f de manera conveniente, a toda la recta; es claro que la extensión no puede ser arbitraria, pues esperamos que el problema (5.3.1) tenga una única solución. Procediendo como en la resolución del problema (5.2.1), obtenemos que la solución de (5.3.1) es de la forma

$$u(x, t) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2} \quad (5.3.3)$$

donde $x \in [0, l], t \geq 0$ y F es una extensión apropiada de la función f dada, o sea,

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in [0, l]. \quad (5.3.4)$$

¿Qué otras propiedades debe tener la función F ? En primer lugar, tomando $x = 0$, obtenemos

$$0 = u(0, t) = \frac{F(ct) + F(-ct)}{2}, \quad \forall t \geq 0,$$

luego F es una *función impar*, esto es,

$$F(-y) = -F(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (5.3.5)$$

Tomando ahora $x = l$, obtenemos

$$0 = u(l, t) = \frac{F(l + ct) + F(l - ct)}{2}, \quad \forall t \geq 0,$$

luego

$$F(l + y) = -F(l - y), \quad \forall y \in \mathbb{R};$$

entonces, si $y \in \mathbb{R}$,

$$F(y + 2l) = F(l + (y + l)) = -F(l - (y + l)) = -F(-y) = F(y)$$

y por tanto, usando (5.3.5),

$$F(y + 2l) = F(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (5.3.6)$$

La propiedad (5.3.6) significa que F es una *función periódica de período $2l$* . Las propiedades (5.3.4), (5.3.5) y (5.3.6) determinan completamente la función F : si $x \in [0, l]$, $F(x) = f(x)$; si $x \in [-l, 0]$, $-x \in [0, l]$ y por consiguiente, de (5.3.5),

$$F(x) = -F(-x) = -f(-x), \quad \forall x \in [-l, 0]. \quad (5.3.7)$$

Y entonces F está determinada en el intervalo $[-l, l]$. Además, si $x > l$, entonces x está en algún intervalo de la forma $[(2k-1)l, (2k+1)l]$, para algún entero $k \geq 1$, luego $x - 2kl \in [-l, l]$; por otro lado, podemos probar por inducción, a partir de (5.3.6), que

$$F(y + 2nl) = F(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}; \quad (5.3.8)$$

luego

$$F(x) = F(x - 2kl + 2kl) = F(x - 2kl) = \begin{cases} -f(-x + 2kl) & \text{si } (2k-1)l \leq x \leq 2kl, \\ f(x - 2kl) & \text{si } 2kl \leq x \leq (2k+1)l. \end{cases} \quad (5.3.9)$$

Finalmente, si $x \leq -l$, $-x \geq l$ y por tanto, de (5.3.5),

$$F(x) = -F(-x), \quad x \leq -l, \quad (5.3.10)$$

está determinada por lo que vimos anteriormente. Observe que las expresiones (5.3.4), (5.3.7), (5.3.9) y (5.3.10) determinan F en intervalos cerrados, luego en los puntos de la forma kl , $k \in \mathbb{Z}$, F es dada por dos fórmulas diferentes; mientras tanto, la condición de compatibilidad (5.3.2) implica que F está bien definida en esos puntos y que $F(kl) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. La función F así definida es la *extensión impar y periódica de período $2l$* de f .

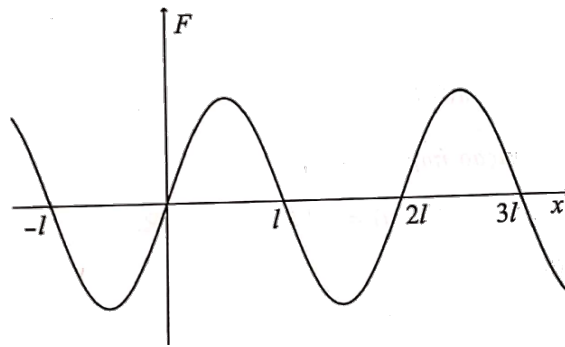


Figura 5.8: La extensión impar y periódica de la función $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación. Convengamos en que las derivadas en los extremos del intervalo son derivadas laterales; entonces, por ejemplo,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

y

$$f'(l) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(l+h) - f(l)}{h}.$$

Definiciones análogas valen para derivadas de orden mayor.

Como (5.3.3) es de la forma (5.1.5) con $\varphi = \psi = F/2$, para obtener que u dada por (5.3.3) es una solución clásica de la EDP, basta probar que $F \in C^2(\mathbb{R})$. Para eso, necesitamos, en primer lugar, que $f \in C^2([0, l])$.

La continuidad de f y la condición de compatibilidad (5.3.2) implican la continuidad de F : de hecho, las ecuaciones (5.3.4), (5.3.7), (5.3.9) y (5.3.10) y la continuidad de f prueban que F es continua en todos los intervalos de la forma $[(k-1)l, kl]$, $k \in \mathbb{Z}$; por otro lado, por la periodicidad de F , para probar que F es continua en todos los puntos de la forma kl , $k \in \mathbb{Z}$, basta probar que F es continua en $x = 0$ y $x = l$; en $x = 0$, usando la continuidad de f , la condición $f(0) = 0$ y las fórmulas (5.3.4) y (5.3.7), obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = F(0) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-f(-x)) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -f(0) = 0 = F(0);\end{aligned}$$

en $x = l$, usando nuevamente la continuidad de f , la condición $f(l) = 0$ y las fórmulas (5.3.4) y (5.3.9) (con $k = 1$), obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow l^-} F(x) &= \lim_{x \rightarrow l^-} f(x) = f(l) = F(l) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow l^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow l^+} (-f(-x + 2l)) = - \lim_{y \rightarrow l^-} f(y) = -f(l) = 0 = F(l).\end{aligned}$$

Por consiguiente $F \in C(\mathbb{R})$.

Para demostrar que F es de clase C^1 , procediendo como en lo precedente vemos que basta probar que F es diferenciable en $x = 0$ y en $x = l$ y que F' es continua en esos puntos. Calculando entonces la derivada de F en $x = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0), \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(h) - F(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-f(-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0),\end{aligned}$$

luego F es diferenciable en $x = 0$ con $F'(0) = f'(0)$. En cuanto a la continuidad de F' en el origen, usando las ecuaciones (5.3.4) y (5.3.7), vemos que

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } 0 \leq x < l, \\ f'(-x) & \text{si } -l < x < 0. \end{cases} \quad (5.3.11)$$

Luego

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = F'(0), \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(-x) = f'(0) = F'(0),\end{aligned}$$

y F' es continua en $x = 0$. En el punto $x = l$,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(l+h) - F(l)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(l+h) - f(l)}{h} = f'(l), \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(l+h) - F(l)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-f(-l-h+2l)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(l+h) - f(l)}{h} = f'(l),\end{aligned}$$

luego F es diferenciable en $x = l$ y, usando (5.3.4) y (5.3.9) con $k = 1$,

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } 0 < x \leq l, \\ f'(-x + 2l) & \text{si } l < x < 2l. \end{cases} \quad (5.3.12)$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow l^-} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow l^-} f'(x) = f'(l) = F'(l), \\ \lim_{x \rightarrow l^+} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow l^+} f'(-x + 2l) = \lim_{y \rightarrow l^-} f'(y) = f'(l) = F'(l), \end{aligned}$$

y F' es continua en $x = l$.

El lector atento debe haber observado que para probar la continuidad de F necesitamos usar $f(0) = 0 = f(l)$ mientras que la continuidad de F' no precisa de ninguna condición sobre f' . La razón es simple: en primer lugar, para que sea posible extender una función $f \in C([0, l])$ a una función impar en $C([-l, l])$, es preciso, por la fórmula (5.3.5), que $f(0) = -f(0)$ y por tanto que $f(0) = 0$; además, para que sea posible extender esa nueva función $[-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ a una función continua en toda la recta y periódica de período $2l$, es preciso que los valores en $x = -l$ y $x = l$ sean iguales, esto es, que $-f(l) = f(l)$ y por tanto $f(l) = 0$. Entonces una función $f \in C([0, l])$ puede ser extendida a una función continua impar y periódica de período $2l$ si y solamente si $f(0) = f(l) = 0$. Por otro lado, la derivada de una función impar es una *función par*, esto es, una función $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$G(-y) = G(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (5.3.13)$$

(Basta derivar la ecuación (5.3.5) para obtener (5.3.13) con $G = F'$). Luego F' es la extensión par y periódica de período $2l$ de f' . Pero cualquier función $g \in C([0, l])$ puede ser extendida a una función par G , continua en \mathbb{R} y periódica de período $2l$:

$$G(x) = \begin{cases} g(x - 2kl) & \text{si } 2kl \leq x \leq (2k + 1)l, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ g(-x + 2kl) & \text{si } (2k - 1)l < x < 2kl, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (5.3.14)$$

G es la extensión de g que satisface esas propiedades. Es evidente entonces que F' es la extensión par y periódica de período $2l$ de f' , y por consiguiente basta la continuidad de f' para que F' sea continua. Observe que la derivada de una función par es una función impar (basta derivar (5.3.13)) y en consecuencia, por lo que vimos anteriormente, para que F'' sea continua será necesario que, además de $f \in C^2([0, l])$, se satisfaga

$$f''(0) = 0 = f''(l). \quad (5.3.15)$$

Vamos a demostrar directamente que, si $f \in C^2([0, l])$ satisface las propiedades (5.3.2) y (5.3.15), entonces $F \in C^2(\mathbb{R})$. Argumentando como en la demostración de que F y F' son continuas, basta probar que F' es diferenciable en los puntos $x = 0$ y $x = l$ y que F'' es continua en esos puntos. En el punto $x = 0$, usando (5.3.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F'(h) - F'(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = f''(0) = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F'(h) - F'(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(-h) - f'(0)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = -f''(0) = 0, \end{aligned}$$

luego F' es diferenciable en $x = 0$ y

$$F''(x) = \begin{cases} f''(x) & \text{si } 0 \leq x < l, \\ -f''(-x) & \text{si } -l < x < 0. \end{cases} \quad (5.3.16)$$

Como $f'' \in C([0, l])$ y $f''(0) = 0$, es evidente de (5.3.16) que F'' es continua en $x = 0$. De manera análoga, en $x = l$ tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F'(l+h) - F'(l)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(l+h) - f'(l)}{h} = f''(l) = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F'(l+h) - F'(l)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(-l-h+2l) - f'(l)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(l+h) - f'(l)}{h} = -f''(l) = 0, \end{aligned}$$

luego

$$F''(x) = \begin{cases} f''(x) & \text{si } 0 < x \leq l, \\ -f''(-x+2l) & \text{si } l < x < 2l. \end{cases} \quad (5.3.17)$$

Nuevamente, la continuidad de F'' en $x = l$ se sigue del hecho que $f''(l) = 0$.

Acabamos de probar entonces que la función u definida por (5.3.3) es una solución clásica de la EDP en (5.3.1). Antes de proseguir con el análisis del problema (5.3.1), vamos a enunciar dos proposiciones de las propiedades que destacamos anteriormente sobre extensiones periódicas pares e impares de funciones continuas en un intervalo $[0, l]$.

Proposición 5.3.1 Sea $f \in C([0, l])$ y suponga que f satisface (5.3.2). Entonces la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(x-2kl) & \text{si } 2kl \leq x \leq (2k+1)l, k \in \mathbb{Z}, \\ -f(-x+2kl) & \text{si } (2k-1)l \leq x < 2kl, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (5.3.18)$$

es la extensión impar y periódica de período $2l$ de f y está en $C(\mathbb{R})$. Además, si $f \in C^1([0, l])$, $F \in C^1(\mathbb{R})$ y F' es la extensión par y periódica de período $2l$ de f' en $C([0, l])$.

Proposición 5.3.2 Sea $g \in C([0, l])$. Entonces la función G definida por (5.3.14) es la extensión par y periódica de período $2l$ de la función g y es continua en toda la recta. Además de eso, si $g \in C^1([0, l])$, entonces $G \in C^1(\mathbb{R})$ si y solamente si $g'(0) = 0 = g'(l)$; en ese caso G' es la extensión impar y periódica de período $2l$ de la función g' en $C([0, l])$.

Las funciones periódicas son muy importantes y serán utilizadas posteriormente en otros problemas. En general se dice que una función $f : A \rightarrow B$ es periódica con período T si $x + T \in A$ siempre que $x \in A$, $T \neq 0$ y

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in A. \quad (5.3.19)$$

De esta definición resulta evidentemente que cualquier múltiplo no nulo kT , $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, del período T es también un período para la función. El menor valor positivo T , si existe, para el cual la expresión (5.3.19) es válida, es llamado el *período fundamental* de f . Observe que toda función constante es

periódica con cualquier período pero no tiene período fundamental. Las funciones continuas y periódicas no constantes siempre tienen período fundamental. Aprovechamos la oportunidad para demostrar una propiedad importante de las funciones periódicas:

Proposición 5.3.3 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica con período fundamental T y suponga que f es integrable en cualquier intervalo finito. Entonces, cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx \\ &= \int_0^T f(x) dx - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(y+T) dy \\ &= \int_0^T f(x) dx - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(y) dy \\ &= \int_0^T f(x) dx. \end{aligned}$$

Volviendo al problema (5.3.1), nos agradecería obtener un teorema de existencia y unicidad pero para ello necesitamos especificar en qué clase de funciones buscamos soluciones. Como observamos anteriormente, estamos interesados en soluciones clásicas de la EDP, por lo tanto $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$; por otro lado, es necesario que u_t esté definida en $[0, l] \times \{0\}$. Desde el punto de vista físico resulta natural procurar soluciones $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$; pero entonces ¿cómo interpretar la condición $u_t(x, 0) = 0$? Una posibilidad es definir $u_t(x, 0)$ como una derivada normal, es decir, definir $u_t(x, 0)$ por

$$u_t(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(x, h) - u(x, 0)}{h}, \quad x \in [0, l]. \quad (5.3.20)$$

Vamos a buscar entonces una solución en el espacio

$$V = \left\{ u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty)) : \exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(x, h) - u(x, 0)}{h} \right\}. \quad (5.3.21)$$

Por lo que vimos anteriormente, si $u \in V$ es solución de (5.3.1), entonces, como $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty))$, u es de la forma (5.3.3), donde F es la extensión impar y periódica de período $2l$ de la función $f \in C^2([0, l])$; además, u es de clase C^2 en $[0, l] \times [0, +\infty)$, pues como $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fórmula (5.3.3) tiene sentido en cualquier punto $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ y define una función de clase C^2 en \mathbb{R}^2 , luego $u : [0, l] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es la restricción de una función en $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Por otro lado, la función u definida por (5.3.3) satisface las condiciones de frontera: como F es impar,

$$u(0, t) = \frac{F(ct) + F(-ct)}{2} = \frac{F(ct) - F(ct)}{2} = 0, \quad \forall t \geq 0;$$

En este caso la derivada de f tiene una discontinuidad en $x = 1$ y en consecuencia las derivadas de la solución u tendrán discontinuidades a lo largo de las rectas $x \pm t = 1 + 4k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 5.3.2 Sean $c = 1$ y $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + x$. Entonces $f \in C^2([0, 1])$ pero $f''(0) = f''(1) = -2$, luego u no es de clase C^2 . Las derivadas de segundo orden de u son discontinuas a lo largo de las rectas $x \pm t = k$, $k \in \mathbb{Z}$. En efecto, usando la fórmula (5.3.18),

$$F(x) = \begin{cases} -(x - 2kl)^2 + x - 2kl & \text{si } 2k \leq x \leq 2k + 1, k \in \mathbb{Z}, \\ (x - 2kl)^2 + x - 2kl & \text{si } 2k - 1 \leq x < 2k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

y por tanto

$$F''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } 2k < x < 2k + 1, k \in \mathbb{Z}, \\ 2 & \text{si } 2k - 1 < x < 2k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como

$$u_{xx} = u_{tt} = \frac{F''(x+t) + F''(x-t)}{2}$$

y

$$u_{xt} = \frac{F''(x+t) - F''(x-t)}{2},$$

todas las derivadas de segundo orden tienen discontinuidades a lo largo de las rectas $x \pm t = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.4 La Cuerda Finita

En esta sección estudiaremos un problema un tanto más general que (5.3.1),

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in (0, l), t > 0, \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) &= g(x), & x \in [0, l], \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

donde f, g son funciones dadas y c, l son constantes positivas. Como vimos en el ejemplo 1.3.5 del primer capítulo, el problema (5.4.1) describe una cuerda elástica de longitud l , sujeta de sus extremos y vibrando en un plano vertical; $u(x, t)$ es el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x en el instante t . El problema (5.4.1) puede ser considerado como un problema mixto: las condiciones

$$u(0, t) = 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \tag{5.4.2}$$

son condiciones de frontera y significan que la cuerda está sujeta de sus extremos $x = 0$, $x = l$; las dos últimas condiciones en (5.4.1) son condiciones iniciales y f y g representan, respectivamente, la posición y la velocidad iniciales de la cuerda. Las condiciones de frontera y las condiciones iniciales no son independientes: para que exista solución es preciso que f satisfaga la condición de compatibilidad

$$f(0) = 0 = f(l). \tag{5.4.3}$$

Para simplificar, vamos a utilizar la linealidad de la EDP y de las condiciones de frontera para dividir el problema (5.4.1) en dos problemas más simples, uno con $g = 0$ (que es exactamente (5.3.1)) y el otro con $f = 0$, esto es,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in (0, l), t > 0, \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) &= g(x), & x \in [0, l]. \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Suponga que $u \in V$ (vea (5.3.21)) es solución de (5.4.4): entonces, si v es la solución de (5.3.1) dada por el teorema 5.3.1, $w = u - v \in V$ es solución de (5.4.4) pues w satisface la ecuación de onda, las condiciones de frontera en (5.4.4) y

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = f(x) - f(x) = 0,$$

$$w_t(x, 0) = u_t(x, 0) - v_t(x, 0) = g(x).$$

Recíprocamente, si $v \in V$ es solución de (5.3.1) y $w \in V$ es solución de (5.4.4), entonces $u = v + w \in V$ es solución de (5.4.1). Por consiguiente, como ya demostramos un teorema de existencia y unicidad para (5.3.1), bastará demostrar la existencia y unicidad para (5.4.4) a fin de obtener la existencia y unicidad para (5.4.1).

Es interesante observar que la unicidad en V para el problema (5.4.1) es un corolario de la unicidad en V para (5.3.1): en efecto, suponga que $u, v \in V$ son soluciones de (5.4.1); entonces $w = u - v \in V$ es solución de

$$\begin{aligned} w_{tt} &= c^2 w_{xx}, & x \in (0, l), t > 0, \\ w(0, t) &= 0 = w(l, t), & t \geq 0, \\ w(x, 0) &= 0, & x \in [0, l], \\ w_t(x, 0) &= 0, & x \in [0, l], \end{aligned}$$

que es exactamente el problema (5.3.1) con $f = 0$, luego, por el teorema 5.3.1, $w = 0$, o sea, $u = v$. Como (5.4.4) es un caso particular de (5.4.1), la solución de (5.4.4) en V , si existe, es única.

Solamente falta encontrar una solución de (5.4.4) en V . Comparando con la solución de (5.2.1), esperamos una solución de la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds, \tag{5.4.5}$$

donde $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una extensión apropiada de la función g . Imponiendo la condición de frontera en $x = 0$, obtenemos

$$\int_{-ct}^{ct} G(s) ds = 0, \quad \forall t \geq 0$$

y en consecuencia G debe ser una función impar. Por analogía con el problema (5.3.1), esperamos que G sea la extensión impar y periódica de período $2l$ de g . Vamos a probar que en tal caso u dada por

(5.4.5) es solución de (5.4.4). Es claro que u satisface la EDP, $u(0, t) = 0$ y $u(x, 0) = 0$. Calculando $u(l, t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} u(l, t) &= \frac{1}{2c} \int_{l-ct}^{l+ct} G(s) ds \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} G(r+l) dr \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^0 G(r+l) dr + \frac{1}{2c} \int_0^{ct} G(r+l) dr \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^0 G(r-l) ds + \frac{1}{2c} \int_0^{ct} G(r+l) dr \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-l-ct}^{-l} G(s) ds + \frac{1}{2c} \int_l^{l+ct} G(s) ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

pues G es impar. Finalmente,

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} [G(x+ct) + G(x-ct)],$$

luego, si $x \in [0, l]$,

$$u_t(x, 0) = G(x) = g(x).$$

Observe que, si $g \in C^1([0, l])$ cumple $g(0) = 0 = g(l)$, entonces $G \in C^1(\mathbb{R})$ por la proposición 5.3.1 y por consiguiente u definida por (5.4.5) es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 . Acabamos de probar entonces el siguiente teorema.

Teorema 5.4.1 Sean $f \in C^2([0, l])$ y $g \in C^1([0, l])$ tales que f, f'' y g se anulan en $x = 0$ y $x = l$. Entonces la función $u : [0, l] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x, t) = \frac{F(x+ct) + F(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds, \quad (5.4.6)$$

donde $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son las extensiones impares y periódicas de periodo $2l$ de las funciones f, g , respectivamente, es la única solución $u \in V$ del problema 5.4.1; además, la función u es de hecho de clase C^2 en $[0, l] \times [0, +\infty)$.

CAPÍTULO 6

Introducción a métodos numéricos para EDPs

Las aproximaciones de diferencias finitas para las derivadas son uno de los métodos más simples y antiguos para resolver ecuaciones diferenciales. Ya eran conocidas por L. Euler (1707-1783) hacia 1768 en una dimensión espacial y probablemente fueron extendidas a dos dimensiones por C. Runge (1856-1927) hacia 1908. El advenimiento de las técnicas de diferencias finitas en aplicaciones numéricas comenzó a principios de los años 50 y su desarrollo fue estimulado por la aparición de las computadoras, que ofrecieron un marco conveniente para abordar problemas complejos de ciencia y tecnología. Se han obtenido resultados teóricos durante las últimas cinco décadas en relación con la precisión, estabilidad y convergencia del método de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales.

6.1 Método de diferencias finitas

6.1.1 Principio general

El principio de los métodos de diferencias finitas es similar a los esquemas numéricos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Consiste en aproximar el operador diferencial reemplazando las derivadas en la ecuación mediante cocientes diferenciales. El dominio se particiona en espacio y en tiempo, y se calculan aproximaciones de la solución en los puntos espaciales o temporales. El error entre la solución numérica y la solución exacta está determinado por el error cometido al pasar de un operador diferencial a uno de diferencias. Este error se denomina error de discretización o error de truncamiento. El término error de truncamiento refleja el hecho de que se usa una parte finita de una serie de Taylor en la aproximación.

Para simplificar, consideraremos el caso unidimensional. El concepto principal detrás de cualquier esquema de diferencias finitas está relacionado con la definición de la derivada de una función suave u en un punto $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

y con el hecho de que cuando h tiende a 0 (sin desaparecer), el cociente en el lado derecho proporciona una “buena” aproximación de la derivada. En otras palabras, h debe ser suficientemente pequeño para obtener una buena aproximación. Queda por indicar qué exactamente se considera una buena

aproximación y en qué sentido. De hecho, la aproximación es buena cuando el error cometido en esta aproximación (es decir, al reemplazar la derivada por el cociente diferencial) tiende a cero cuando h tiende a cero. Si la función u es suficientemente suave en el entorno de x , es posible cuantificar este error usando una expansión de Taylor.

6.1.2 Serie de Taylor

Supongamos que la función u es C^2 en el entorno de x . Para cualquier $h > 0$ tenemos:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x+h_1),$$

donde h_1 es un número entre 0 y h (es decir, $x+h_1$ es un punto de $]x, x+h[$). Para el tratamiento de los problemas, es conveniente retener solo los dos primeros términos de la expresión anterior:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + O(h^2),$$

donde el término $O(h^2)$ indica que el error de la aproximación es proporcional a h^2 . De la ecuación anterior deducimos que existe una constante $C > 0$, tal que para $h > 0$ suficientemente pequeño tenemos:

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch,$$

donde $C = \sup_{y \in [x, x+h_0]} \frac{|u''(y)|}{2}$, para $h \leq h_0$ ($h_0 > 0$ dado). El error cometido al reemplazar la derivada $u'(x)$ por el cociente diferencial es del orden de h . Se dice que la aproximación de u' en el punto x es consistente en el primer orden. Esta aproximación es conocida como la diferencia progresiva de u' . De manera más general, definimos una aproximación de orden p de la derivada.

Definición 6.1.1 La aproximación de la derivada u' en el punto x es de orden p ($p > 0$) si existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que el error entre la derivada y su aproximación está acotado por Ch^p (es decir, es exactamente $O(h^p)$).

De igual manera, podemos definir la diferencia regresiva de primer orden de u' en el punto x como:

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + O(h^2).$$

Obviamente, se pueden considerar otras aproximaciones. Con el fin de mejorar la precisión de la aproximación, definimos una aproximación consistente, llamada aproximación central de diferencias, tomando en cuenta los puntos $x-h$ y $x+h$. Supongamos que la función u es tres veces diferenciable en las proximidades de x :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\xi_+),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\xi_-),$$

donde $\xi_+ \in]x, x+h[$ y $\xi_- \in]x-h, x[$. Restando estas dos expresiones obtenemos, gracias al teorema del valor medio:

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6} u^{(3)}(\xi),$$

donde ξ es un punto de $]x-h, x+h[$. Así, para cada $h \in]0, h_0[$, tenemos la siguiente cota en el error de la aproximación:

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| \leq Ch^2,$$

donde $C = \sup_{y \in [x-h_0, x+h_0]} \frac{|u^{(3)}(y)|}{6}$. Esto define una aproximación consistente de segundo orden para u' .

Remark 6.1.1 El orden de la aproximación está relacionado con la regularidad de la función u . Si u es C^2 continua, entonces la aproximación es consistente solo en el primer orden.

6.1.3 Aproximación de la segunda derivada

Lemma 6.1.1 Supongamos que u es una función de clase C^4 en un intervalo $[x-h_0, x+h_0]$, $h_0 > 0$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $h \in]0, h_0[$ tenemos:

$$\left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq Ch^2. \quad (6.1.1)$$

El cociente diferencial $\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$ es una aproximación consistente de segundo orden de la segunda derivada u'' de u en el punto x .

Demostración: Utilizamos expansiones de Taylor hasta el cuarto orden para lograr el resultado:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_+),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_-),$$

donde $\xi_+ \in]x, x+h[$ y $\xi_- \in]x-h, x[$. Como anteriormente, el teorema del valor medio nos permite escribir:

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi),$$

donde $\xi \in]x-h, x+h[$. Por lo tanto, deducimos la relación con la constante

$$C = \sup_{y \in [x-h_0, x+h_0]} \frac{|u^{(4)}(y)|}{12}.$$

■

Remark 6.1.2 De igual manera, la estimación del error depende de la regularidad de la función u . Si u es de clase C^3 , entonces el error es del orden de h solamente.

6.2 Formulación en diferencias finitas para un problema 1D

Consideramos un dominio acotado $\Omega =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ y $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que resuelve el problema de Dirichlet no homogéneo:

$$\mathcal{D} \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases} \quad (6.2.1)$$

donde c y f son dos funciones dadas, definidas en $\bar{\Omega}$, $c \geq 0$.

6.2.1 Teoría variacional y aproximación

Es conocido que si $c \in L^\infty(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$, entonces la solución u de este problema existe. Además, si $c = 0$, tenemos la formulación explícita de u como:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \alpha + x(\beta - \alpha),$$

donde $G(x, y) = x(1 - y)$ si $y \geq x$ y $G(x, y) = y(1 - x)$ si $y < x$. Sin embargo, cuando $c \neq 0$, no hay una fórmula explícita que nos dé la solución u . Así, debemos resignarnos a encontrar una aproximación de la solución.

El primer paso para derivar una aproximación en diferencias finitas de la ecuación (6.2.1) es dividir el intervalo unitario en un número finito de subintervalos. Aquí surge un concepto fundamental de las aproximaciones de diferencias finitas: la solución numérica no está definida en todo el dominio Ω , sino solo en un número finito de puntos en Ω .

Introducimos los puntos de la malla equidistantes $\{x_j\}_{0 \leq j \leq N+1}$ dados por $x_j = jh$, donde N es un entero y la distancia h está dada por $h = 1/(N + 1)$. Típicamente, se busca que la distancia se haga muy pequeña a medida que el número de puntos de la malla aumenta. En el límite del dominio Ω , tenemos $x_0 = 0$ y $x_{N+1} = 1$. En cada uno de estos puntos, buscamos el valor numérico de la solución, $u_j = u(x_j)$. Imponemos que $u(x_0) = \alpha$ y $u(x_{N+1}) = \beta$ y usamos el cociente diferencial introducido en la sección anterior para aproximar la derivada de segundo orden de la ecuación (6.2.1).

Los valores desconocidos del problema discreto son todos los valores $u(x_1), \dots, u(x_N)$ e introducimos el vector $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^N$ con componentes u_j , para $j \in \{1, \dots, N\}$.

6.2.2 Un esquema de diferencias finitas

Supongamos que las funciones c y f son al menos tales que $c \in C^0(\bar{\Omega})$ y $f \in C^0(\bar{\Omega})$. El problema entonces consiste en encontrar $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^N$, tal que $u_i \approx u(x_i)$, para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, donde u es la solución del problema (6.2.1). Introduciendo la aproximación de la derivada de segundo orden mediante un cociente diferencial, consideramos el siguiente problema discreto:

$$\mathcal{D}_h = \begin{cases} -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j), & j \in \{1, \dots, N\}, \\ u_0 = \alpha, & u_{N+1} = \beta, \end{cases} \quad (6.2.2)$$

El problema \mathcal{D} ha sido discretizado mediante un método de diferencias finitas basado en un esquema centrado de tres puntos para la derivada de segundo orden.

El problema (6.2.2) se puede escribir en forma matricial como:

$$A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h,$$

donde A_h es la matriz tridiagonal definida como:

$$A_h = A_h^{(0)} + \begin{pmatrix} c(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c(x_N) \end{pmatrix},$$

con

$$A_h^{(0)} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{b}_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}.$$

La pregunta que surge de esta formulación está relacionada con la existencia de una solución. En otras palabras, tenemos que determinar si la matriz A_h es invertible o no. La respuesta está dada por la siguiente proposición.

Proposición 6.2.1 *Supongamos que $c \geq 0$. Entonces, la matriz A_h es simétrica y definida positiva.*

Demostración: Observamos que A_h es simétrica. Consideremos un vector $\mathbf{v} = (v_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$. Dado que $c \geq 0$, tenemos:

$$\mathbf{v}^t A_h \mathbf{v} = \mathbf{v}^t A_h^{(0)} \mathbf{v} + \sum_{i=1}^N c(x_i) v_i^2 \geq \mathbf{v}^t A_h^{(0)} \mathbf{v},$$

y el problema se reduce a mostrar que $A_h^{(0)}$ es definida positiva. Notamos que:

$$h^2 \mathbf{v}^t A_h^{(0)} \mathbf{v} = v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + \cdots + (v_{N-1} - v_N)^2 + v_N^2,$$

y así $\mathbf{v}^t A_h^{(0)} \mathbf{v} \geq 0$. Además, si $\mathbf{v}^t A_h^{(0)} \mathbf{v} = 0$, entonces todos los términos $v_{i+1} - v_i = v_1 = v_N = 0$. Por lo tanto, concluimos que todos los $v_i = 0$ y el resultado se sigue. ■

Podemos resumir el método de diferencias finitas para el problema (6.2.1) en la siguiente tabla:

Teoría (continuo)	Diferencias finitas (discreto)
Dominio $\Omega = [0, 1]$	$\mathbb{I}_N = \{0, \frac{1}{N+1}, \dots, 1\}$
Desconocido $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u \in C^2(\Omega)$	$\mathbf{u}_h = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$
Condiciones $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$	$u_0 = \alpha, u_{N+1} = \beta$
Ecuación $-u'' + cu = f$	$\frac{-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j)$

6.2.3 Esquema consistente

La fórmula utilizada en los esquemas numéricos proviene de una aproximación de la ecuación usando una expansión de Taylor. La noción de consistencia y precisión ayuda a comprender qué tan bien un esquema numérico aproxima una ecuación. Introducimos una definición formal de consistencia que puede ser utilizada para cualquier ecuación diferencial parcial definida en un dominio Ω , y se denota como:

$$(Lu)(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

donde L denota un operador diferencial. La notación (Lu) indica que la ecuación depende de u y de sus derivadas en cualquier punto x . Un esquema numérico puede escribirse, para cada índice j , en una forma más abstracta como:

$$(L_h u)(x_j) = f(x_j), \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, N\}.$$

Por ejemplo, en el problema con condiciones de contorno (6.2.1), el operador L es:

$$(Lu)(x) = -u''(x) + c(x)u(x),$$

y el problema puede escribirse de la siguiente forma: *encontrar* $u \in C^2(\Omega)$ *tal que*

$$(Lu)(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega. \quad (6.2.3)$$

Definimos el operador L_h por:

$$(L_h u)(x_j) = \frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1}))}{h^2} + c(x_j)u(x_j), \quad j \in \{1, \dots, N\},$$

y el problema discreto (6.2.2) se puede formular de la siguiente manera: *encontrar* u *tal que*

$$(L_h u)(x_j) = f(x_j), \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, N\}.$$

Definición 6.2.1 *Un esquema de diferencias finitas se dice que es consistente con la ecuación diferencial parcial que representa, si para cualquier solución suficientemente suave u de esta ecuación, el error de truncamiento del esquema, correspondiente al vector $\varepsilon_h \in \mathbb{R}^N$ cuyos componentes se definen como:*

$$(\varepsilon_h)_j = (L_h u)(x_j) - f(x_j), \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, N\},$$

tiende uniformemente a cero con respecto a x cuando h tiende a cero, es decir, si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon_h\|_\infty = 0.$$

Además, si existe una constante $C > 0$, independiente de u y de sus derivadas, tal que, para todo $h \in]0, h_0]$ (dado $h_0 > 0$) tenemos:

$$\|\varepsilon_h\| \leq Ch^p,$$

con $p > 0$, entonces se dice que el esquema es de orden de precisión p (es preciso de orden p) para la norma $\|\cdot\|$.

La definición establece que el error de truncamiento se define aplicando el operador de diferencias L_h a la solución exacta u . Esto significa que un esquema consistente implica que la solución exacta casi resuelve el problema discreto.

Lemma 6.2.1 Supongamos que $u \in C^4(\Omega)$. Entonces, el esquema numérico (6.2.2) es consistente y preciso de segundo orden en espacio para la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración: Utilizando el hecho de que $-u'' + cu = f$ y suponiendo que $u \in C^4(\Omega)$, tenemos

$$\varepsilon_h(x_j) = -\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2} + c(x_j)u(x_j) - f(x_j) \quad (6.2.4)$$

$$= -u''(x_j) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_j) + c(x_j)u(x_j) - f(x_j) \quad (6.2.5)$$

$$= \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_j), \quad (6.2.6)$$

donde cada $\xi_j \in]x_{j-1}, x_{j+1}[$. Así, tenemos:

$$\|\varepsilon_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in \Omega} |u^{(4)}(y)|,$$

y el resultado se sigue. ■

Remark 6.2.1 Dado que la dimensión del espacio N está relacionada con h por la relación $h(N+1) = 1$, tenemos:

$$\|\varepsilon_h\|_1 = O(h), \quad y \quad \|\varepsilon_h\|_2 = O(h^{3/2}).$$

El error de consistencia es un primer paso hacia el análisis del error de convergencia del método. Sin embargo, no es suficiente para analizar un esquema numérico.

Theorem 6.2.1 Supongamos que $c \geq 0$ y que la solución del problema \mathcal{D} es de clase $C^4(\Omega)$. Entonces, el esquema de diferencias finitas \mathcal{D}_h es de segundo orden (de convergencia) para la norma $\|\cdot\|_\infty$. Además, si u y u_h son soluciones de (6.2.1) y (6.2.2), tenemos la siguiente estimación:

$$\|u - u_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{x \in \Omega} |u^{(4)}(x)|.$$

6.3 Esquemas de diferencias finitas para problemas dependientes del tiempo

Consideremos un problema de contorno dependiente del tiempo, de primer orden, planteado en un dominio acotado $\Omega =]0, 1[$: encontrar $u : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), & \forall t \in]0, T[, \forall x \in]0, 1[, \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in]0, 1[, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & \forall t \in]0, T[, \end{cases} \quad (6.3.1)$$

donde $f(t, x)$ es un término fuente dado y $\nu \geq 0$. Esta ecuación es la conocida ecuación del calor que describe la distribución del calor en un dominio dado a lo largo del tiempo. Es la ecuación diferencial parcial parabólica prototípica. La función $u(\cdot, \cdot)$, solución de esta ecuación, describe la temperatura en una ubicación dada x en el tiempo. El análisis de esta ecuación fue pionero por el físico francés J. Fourier (1768-1830), quien inventó métodos influyentes para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

6.3.1 El problema continuo

Mostraremos que este problema tiene una única solución suave que depende de manera continua de los datos. La siguiente estimación indica la continuidad, con respecto a los datos u_0 y f , de la solución u .

Lemma 6.3.1 *Supongamos que $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(]0, T[\times \Omega)$. Si u es una solución suficientemente suave del problema (6.3.1), entonces tenemos la estimación:*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(]0, T[\times \Omega)}.$$

Demostración: Dado que la ecuación es lineal, tenemos $u = v + w$, donde v es solución de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) &= 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T[, \\ v(t, 0) &= v(t, 1) = 0, \quad \forall t \in]0, T[, \quad v(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

y de manera similar, w es solución de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) &= f(t, x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T[, \\ w(t, 0) &= w(t, 1) = 0, \quad \forall t \in]0, T[, \quad w(0, x) = 0, \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos considerar estos dos problemas por separado para v y w . Con respecto al primer problema, multiplicamos la ecuación por $v(x, t)$ e integramos con respecto a $x \in]0, 1[$. Aplicando la regla de la cadena y la integración por partes, y teniendo en cuenta las condiciones de contorno homogéneas, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} v^2(t, x) dx \right) + \nu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx = 0.$$

Dado que el segundo término es positivo, deducimos:

$$\forall t \in]0, T[, \quad \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} v^2(t, x) dx \right) \leq 0.$$

Ahora, integramos con respecto a la variable $t \in]0, s[, s \in [0, T]$, y obtenemos:

$$\forall s \in [0, T], \quad \|v(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Procedemos de manera similar para el término w , para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} w^2(t, x) dx \right) + \nu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx &= \int_{\Omega} (fw)(t, x) dx \\ &\leq \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

La desigualdad de Poincaré conduce a la estimación:

$$\|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)},$$

y así tenemos (observando que $2ab \leq a^2 + b^2$):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \left(\|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\frac{d}{dt} \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Integramos en $]0, s[$ para $s \in [0, T]$ y teniendo en cuenta la condición inicial $w(x, 0) = 0$, obtenemos:

$$\forall s \in [0, T], \quad \|w(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^s \|f(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq (\|f\|_{L^2([0, T] \times \Omega)})^2,$$

y, combinando esta estimación con la estimación para v , el resultado sigue. ■

Este resultado es importante ya que proporciona la unicidad de una solución regular.

Corolario 6.3.1 Supongamos que $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2([0, T] \times \Omega)$. Entonces, si el problema (6.3.1) tiene una solución regular, esta solución es única.

Demostración: Supongamos que $u_1(t, x)$ y $u_2(t, x)$ son dos soluciones regulares del problema (6.3.1). Entonces, si denotamos su diferencia por $u = u_1 - u_2$, obtenemos un problema similar al inicial pero donde tanto los datos iniciales u_0 como el término fuente son cero:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \\ u(0, x) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Luego, usando la estimación anterior para este problema, concluimos que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

y por lo tanto $u = u_1 - u_2 = 0$, es decir, las soluciones regulares son idénticas. ■

6.3.2 Estimación de la energía

Es común introducir la noción de energía de la solución u en el tiempo t como:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx = \frac{1}{2} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Esta no es la energía física del sistema sino más bien una herramienta matemática utilizada para analizar el comportamiento de la solución. Veremos que usando el Lema (6.3.1) y sin el término fuente f , la energía es una función no creciente en el tiempo. Este resultado indica claramente que esta energía está controlada en cualquier instante t por la energía en el instante inicial $t = 0$, que es dada. Esta importante propiedad de la ecuación del calor debe ser preservada en la resolución numérica del problema.

Introducimos un resultado preliminar antes de proporcionar una estimación de la energía.

Lemma 6.3.2 (Grönwall) Sean α, β dos números reales y sea u una función real no negativa definida en \mathbb{R}_+ tal que:

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t u(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

entonces $u(t) \leq \alpha \exp(\beta t)$.

Demostración: Definimos $v(t) = \alpha + \beta \int_0^t u(s) ds$, $t \in \mathbb{R}_+$, de modo que $v(t) \geq u(t) \geq 0$. Derivando y usando la regla de la cadena obtenemos que $v'(t) = \beta u(t) \leq \beta v(t)$, y por lo tanto

$$v'(t) - \beta v(t) \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Multiplicando por $\exp(-\beta t)$ e integrando entre 0 y t obtenemos:

$$\int_0^t \exp(-\beta s) v'(s) ds - \beta \int_0^t \exp(-\beta s) v(s) ds \leq 0,$$

y después de integrar por partes tenemos:

$$\int_0^t \exp(-\beta s) v'(s) ds = \beta \int_0^t \exp(-\beta s) v(s) ds + \exp(-\beta t) v(t) - v(0),$$

y finalmente el resultado sigue: $v(t) \leq v(0) \exp(\beta t) = \alpha \exp(\beta t)$. ■

Lemma 6.3.3 (Estimación de la energía) Supongamos que $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2([0, T] \times \Omega)$. Si u es una solución del problema (6.3.1) suficientemente suave, entonces tenemos la siguiente estimación:

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq \exp(t) \left(\int_{\Omega} u_0^2(x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} f^2(s, x) dx ds \right).$$

Demostración: Procedemos como antes, multiplicamos la ecuación (6.3.1) por u e integramos con respecto a la variable x y luego con respecto a t para obtener:

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx - \int_{\Omega} u_0^2(x) dx + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(s, x) \right)^2 dx ds$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^t \int_{\Omega} f(s, x) u(s, x) dx ds \\
 &\leq \int_0^t \int_{\Omega} f^2(s, x) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} u^2(s, x) dx ds.
 \end{aligned}$$

De aquí deducimos que:

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq \int_{\Omega} u_0^2(x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} f^2(s, x) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} u^2(s, x) dx ds.$$

Ahora, invocamos el lema de Grönwall con

$$\alpha = \int_{\Omega} u_0^2(x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} f^2(s, x) dx ds, \quad \beta = 1,$$

para obtener:

$$\int_{\Omega} u^2(s, x) dx \leq \exp(t) \left(\int_{\Omega} u_0^2(x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} f^2(s, x) dx ds \right), \quad \forall T > 0,$$

y el resultado sigue. ■

Las estimaciones dadas por los Lemas (6.3.1) y (6.2.3) son a menudo referidas como estimaciones de estabilidad, ya que expresan que el tamaño de la solución puede estar acotado por el tamaño de los datos iniciales u_0 y f . Una consecuencia de estos resultados es que pequeñas perturbaciones de orden ϵ en los datos iniciales conducen a pequeñas perturbaciones del mismo orden en la solución.

Corolario 6.3.2 Supongamos que los datos iniciales u_0 y f son ligeramente perturbados y reemplazados por nuevos datos $u_{0,\epsilon} \in L^2(\Omega)$ y $f_{\epsilon} \in L^2([0, T] \times \Omega)$ tales que:

$$\|u_0 - u_{0,\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon, \quad y \quad \|f - f_{\epsilon}\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \leq \epsilon.$$

Entonces, si $u_{\epsilon}(t, \cdot)$ denota la nueva solución del problema (6.3.1), tenemos la estimación:

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot) - u_{\epsilon}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0 - u_{0,\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|f - f_{\epsilon}\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \leq 2\epsilon.$$

Demostración: Dado que el problema (6.3.1) es lineal, $u - u_{\epsilon}$ resuelve el problema para el término fuente $f - f_{\epsilon}$ y los datos iniciales $u_0 - u_{0,\epsilon}$. Es fácil ver que para todo $t \in [0, T]$ tenemos:

$$\|u(t, \cdot) - u_{\epsilon}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0 - u_{0,\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|f - f_{\epsilon}\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \leq 2\epsilon,$$

y el resultado sigue. ■

6.3.3 Un esquema explícito

Para discretizar el dominio $[0, T] \times \bar{\Omega}$, introducimos puntos de malla equidistribuidos correspondientes a un tamaño de paso espacial $h = 1/(N + 1)$ y a un paso temporal $\delta = 1/(M + 1)$, donde M, N son enteros positivos, y definimos los nodos de una malla regular:

$$(t_n, x_j) = (n\delta, jh), \quad n \in \{0, \dots, M + 1\}, \quad j \in \{0, \dots, N + 1\}.$$

Denotamos u_j^n como el valor de una solución aproximada en el punto (t_n, x_j) y $u(t, x)$ como la solución exacta del problema (6.3.1). Los datos iniciales también deben ser discretizados como:

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad \forall j \in \{0, \dots, N+1\}. \quad (6.3.2)$$

Finalmente, las condiciones de contorno homogéneas se discretizan como:

$$u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad \forall n \in \{0, \dots, M+1\}. \quad (6.3.3)$$

El problema entonces consiste en encontrar, en cada paso temporal, un vector $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^N$, tal que sus componentes sean los valores $\{u_j^n\}_{1 \leq j \leq N}$.

Introduciendo la aproximación de la derivada espacial de segundo orden dada por la fórmula (6.1.1), y considerando una aproximación de diferencias progresivas para la derivada temporal:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta},$$

obtenemos el siguiente esquema, junto con las condiciones iniciales (6.3.2) y las condiciones de contorno (6.3.3), para $n \in \{0, \dots, M\}$ y $j = \{1, \dots, N\}$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f(t_n, x_j). \quad (6.3.4)$$

Este esquema se denomina explícito porque los valores $\{u_j^{n+1}\}_{1 \leq j \leq N}$ en el tiempo t_{n+1} se calculan utilizando los valores del nivel de tiempo anterior t_n . De hecho, este sistema puede escribirse en forma vectorial como:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\delta} + A_h U^n = C^n, \quad \forall n \in \{0, \dots, M\},$$

donde la matriz A_h y el vector C^n se definen como:

$$A_h = \frac{\nu}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$C^n = \begin{pmatrix} f(t_n, x_1) \\ \vdots \\ f(t_n, x_N) \end{pmatrix},$$

y con los datos iniciales:

$$U^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ \vdots \\ u_N^0 \end{pmatrix}.$$

Para analizar el esquema numérico, introducimos una norma en \mathbb{R}^N :

$$\|u\|_p = \left(\sum_{j=1}^N h |u_j|^p \right)^{1/p}, \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty, \quad (6.3.5)$$

donde el caso límite corresponde a $\|u\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j|$. Nótese que esta norma depende del tamaño de paso $h = 1/(N+1)$. A través del parámetro de peso h , la norma $\|u\|_p$ es idéntica a la norma $L^p(\Omega)$ para funciones constantes por partes en cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ del dominio $\Omega = [0, 1]$.

Lemma 6.3.4 *El esquema numérico (6.3.4) es consistente y de primer orden en el tiempo para la norma $\|\cdot\|_\infty$ y de segundo orden en el espacio para la norma $\|\cdot\|_2$.*

Demostración: Consideremos una función de clase C^2 en el tiempo y C^4 en el espacio $u(t, x)$. Escribimos:

$$\epsilon_h(u)_j^n = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\delta} - \nu \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{h^2} - f(t_n, x_j).$$

Si u es solución de la ecuación del calor, entonces tenemos:

$$\epsilon_h(u)_j^n = A_j - \nu B_j,$$

donde definimos

$$A_j = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\delta} - \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j),$$

$$B_j = \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j).$$

Usando una expansión de Taylor respecto a la variable temporal (manteniendo x_j fijo) obtenemos, para $\tau \in]t_n, t_{n+1}[$:

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + \delta \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\tau, x_j),$$

y por lo tanto

$$A_j = \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\tau, x_j),$$

y de manera similar para B_j obtenemos para $\xi \in]x_j, x_{j+1}[$ (Lema (6.1.1)):

$$B_j = \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_n, \xi).$$

Obtenemos fácilmente la consistencia y el orden de precisión del esquema explícito a partir de estas fórmulas. ■

Corolario 6.3.3 *Si la razón $\nu\delta/h^2 = 1/6$ se mantiene constante cuando δ y h tienden a cero, entonces el esquema explícito (6.3.4) es de segundo orden en el tiempo y de cuarto orden en el espacio.*

6.3.4 Otros esquemas

Cambiar la aproximación de la derivada temporal por una diferencia hacia atrás resultaría en el siguiente esquema implícito:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\delta} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f(t_n, x_j),$$

que requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales para calcular los valores $\{u_j^n\}_{1 \leq j \leq N}$ en el tiempo t_n utilizando los valores del nivel de tiempo anterior t_{n-1} . El esquema puede escribirse en forma vectorial como:

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{\delta} + A_h U^n = C^n, \quad \forall n \in \{1, \dots, M+1\}, \quad (6.3.6)$$

donde la matriz A_h y los vectores C^n y U^0 son idénticos a los correspondientes términos en el esquema explícito (6.3.4). Sin embargo, calcular los valores u_j^n con respecto a los valores u_j^{n-1} requiere encontrar la inversa de la matriz tridiagonal A_h .

Proposición 6.3.1 La matriz A_h es definida positiva y, por lo tanto, es invertible.

Lemma 6.3.5 El esquema numérico (6.3.6) es consistente y de primer orden en el tiempo para la norma $\|\cdot\|_\infty$ y de segundo orden en el espacio para la norma $\|\cdot\|_2$.

Demostración: Se deja esta demostración como ejercicio. ■

Utilizando una combinación convexa de los esquemas explícito e implícito, definimos, para $0 \leq \theta \leq 1$, el llamado esquema θ :

$$\begin{aligned} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\delta} - \theta \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - (1-\theta) \nu \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{h^2} \\ = \theta f(t_n, x_j) + (1-\theta) f(t_{n-1}, x_j), \end{aligned}$$

que da el esquema explícito (resp. implícito) si $\theta = 0$ (resp. $\theta = 1$). Nótese que este esquema es implícito para $\theta \neq 0$. Para el valor $\theta = 1/2$, el esquema se llama esquema de Crank-Nicholson.

Todos estos esquemas son esquemas de múltiples niveles (aquí de dos niveles), ya que involucran dos índices temporales u^n y u^{n-1} , de modo que la matriz del sistema es tridiagonal, es decir, tiene elementos no nulos solo en la diagonal y en las posiciones inmediatamente a la izquierda y a la derecha de la diagonal. Aquí hay algunos otros ejemplos de esquemas de múltiples niveles:

Esquema de Richardson:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\delta} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f(t_n, x_j)$$

Esquema de DuFort-Frankel:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\delta} + \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n + u_{j-1}^{n-1}}{h^2} = f(t_n, x_j)$$

Esquema de Gear:

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\delta} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = f(t_n, x_j).$$

Podemos entonces considerar una forma más general para estos sistemas:

$$B_l U^{n+l} + B_{l-1} U^{n+l-1} + \dots + B_0 U^n + \dots + B_{-m} U^{n-m} = C^n,$$

para $n \geq m$, $l, m \geq 0$, $l+m \geq 1$, B_l invertible y U^0, \dots, U^{l+m-1} dados. Dicho esquema involucra $l+m$ niveles. Si la matriz B_l es diagonal, el esquema es explícito, e implícito de otro modo.

6.3.5 Estabilidad y análisis de Fourier

En términos generales, la inestabilidad consiste en la aparición de oscilaciones no acotadas en la solución numérica.

Definición 6.3.1 *Un esquema de diferencias finitas se dice que es estable para la norma $\|\cdot\|_p$ definida por (6.3.5), si existen dos constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$, independientes de h y δ , tales que cuando h y δ tienden a cero:*

$$\|u^n\|_p \leq C_1 \|u^0\|_p + C_2 \|f\|_p, \quad \forall n \geq 0,$$

independientemente de los datos iniciales u^0 y del término fuente f .

Remark 6.3.1 *Supongamos que $f \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$ y que consideramos la norma $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{R}^N . Entonces, la estimación anterior de estabilidad es exactamente el análogo discreto de la estimación proporcionada por el Lema (6.3.1) (con $C_1 = 1$ y $C_2 = \sqrt{T}$).*

Remark 6.3.2 *Dado que todas las normas son equivalentes en \mathbb{R}^N , podría parecer tentador concluir que la estabilidad con respecto a una norma implica estabilidad con respecto a todas las demás normas. Desafortunadamente, esto no es cierto porque, en la definición, el límite es uniforme con respecto a h , pero las normas $\|\cdot\|_p$ dependen de h .*

6.4 Implementación en Python

En lo que sigue se consideran las siguientes aproximaciones de las derivadas,

$$\begin{aligned} u''(x_i) &\approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \\ u'(x_i) &\approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad (\text{diferencia centrada}) \\ u'(x_i) &\approx \frac{u_{i-1} - u_i}{h}, \quad (\text{diferencia atrasada}) \\ u'(x_i) &\approx \frac{u_i - u_{i+1}}{h}, \quad (\text{diferencia adelantada}) \end{aligned}$$

donde $h = \frac{b-a}{N+1}$ el paso en x , $x_i = a + ih$ (discretización del intervalo $[a, b]$) para $i = 1, \dots, N$, a menos que se diga explícitamente otra cosa. Si necesita ver como se obtienen las aproximaciones anteriores vea Philippe G. Ciarlet, Introduction to numerical linear algebra and optimisation.

6.4.1 Aplicación a una EDO

Ejemplo 1: Considere el problema $x^2 u''(x) + 4xu'(x) + 2u(x) = 2\ln(x) + 3$, con condiciones de contorno $u(1) = 0$, $u(2) = 1/4 + \ln(2)$, considerando $h \in \{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001\}$. La solución exacta

es $u(x) = x^{-1} - x^{-2} + \ln(x)$.

Una aproximación del problema a través del método de diferencias finitas viene dado por,

$$\frac{x_i^2}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + 4\frac{x_i}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + 2u_i = f_i, \quad \text{para } i \in \{1, \dots, N\},$$

$$u_0 = 0, u_{N+1} = 1/4 + \ln(2),$$

el cual puede ser reescrito de la siguiente manera

$$(x_i^2 - 2hx_i)u_{i-1} + (2h - 2x_i^2)u_i + (x_i^2 + 2hx_i)u_{i+1} = h^2 f_i, \quad \text{para } i \in \{1, \dots, N\}. \quad (6.4.1)$$

$$u_0 = 0, u_{N+1} = 1/4 + \ln(2),$$

Antes de continuar notemos lo siguiente

- Si $i = 1$

$$\underbrace{(x_1^2 - 2hx_1)u_0}_{u_0=0} + (2h - 2x_1^2)u_1 + (x_1^2 + 2hx_1)u_2 = h^2 f_1$$

- Si $1 < i < N$

$$(x_i^2 - 2hx_i)u_{i-1} + (2h - 2x_i^2)u_i + (x_i^2 + 2hx_i)u_{i+1} = h^2 f_i$$

- Si $i = N$

$$(x_N^2 - 2hx_N)u_{N-1} + (2h - 2x_N^2)u_N + (x_N^2 + 2hx_N)u_{N+1} = h^2 f_i$$

$$\Rightarrow (x_N^2 - 2hx_N)u_{N-1} + (2h - 2x_N^2)u_N = h^2 f_i - (x_N^2 + 2hx_N)u_{N+1}.$$

De esta manera el método de diferencias finitas induce el siguiente sistema de ecuaciones

$$A\mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h, \quad (6.4.2)$$

donde $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^N$ con u_i una aproximación de $u(x_i)$, $A_h \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b}_h \in \mathbb{R}^N$ como sigue

$$A_h = \begin{bmatrix} 2h^2 - 2x_1^2 & x_1^2 + 2hx_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x_2^2 - 2hx_2 & 2h^2 - 2x_2^2 & x_2^2 + 2hx_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & x_{N-1}^2 - 2hx_{N-1} & (2h - 2x_{N-1}^2) & (x_{N-1}^2 + 2hx_{N-1}) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & x_N^2 - 2hx_N & 2h^2 - 2x_N^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_h = \begin{bmatrix} h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f_N - (x_N^2 + 2hx_N)(1/4 + \ln(2)) \end{bmatrix},$$

donde $f_i = f(x_i) = 2\ln(x_i) + 3$. La solución del sistema de ecuaciones lineales (6.4.2) entrega la siguiente solución numérica al problema planteado.

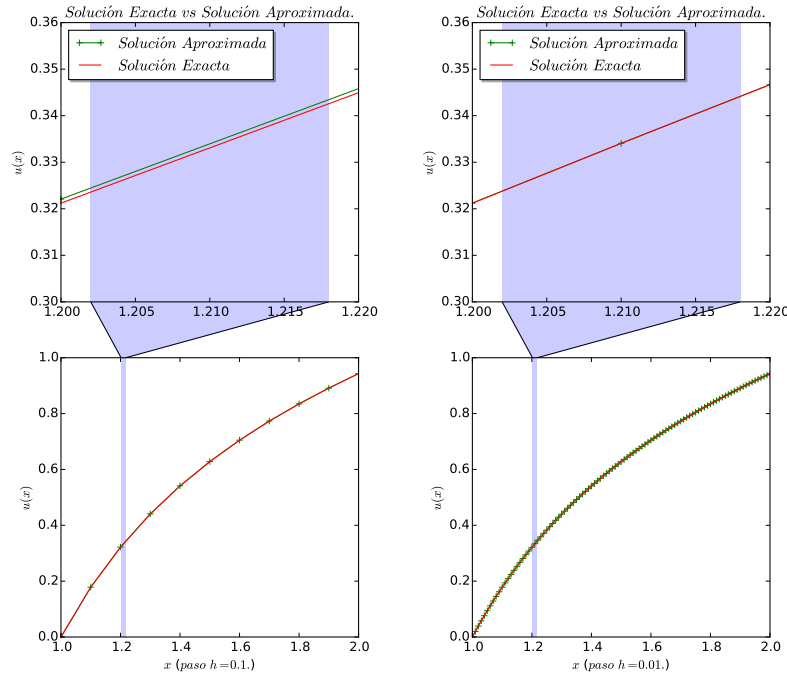


Figura 6.1: Solución numérica del problema a) con paso $h = 0.1$ y $h = 0.01$.

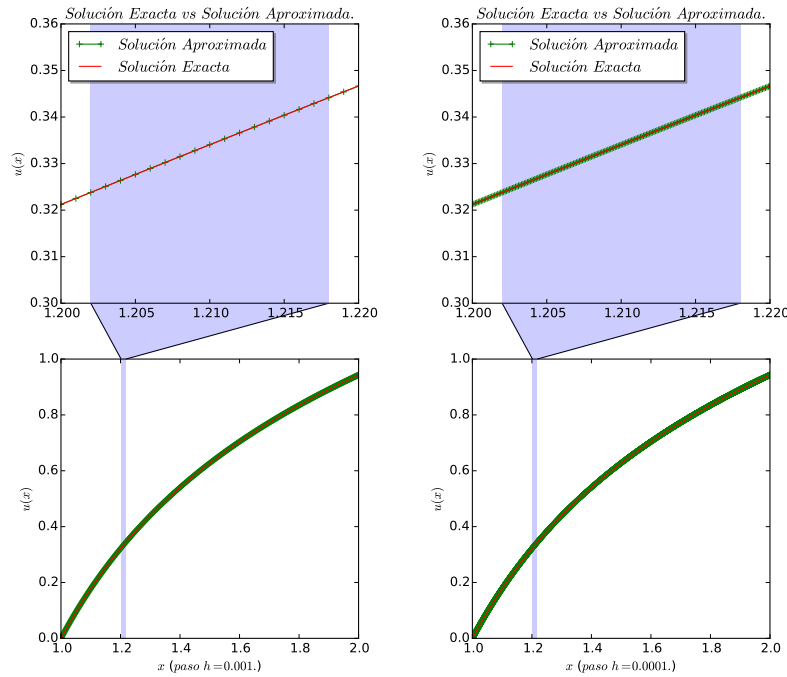


Figura 6.2: Solución numérica del problema a) con paso $h = 0.001$ y $h = 0.0001$.

La información relativa a errores de aproximación, tasas de convergencia, número de condición en las diferentes normas ($\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$) no se analizarán en este momento.

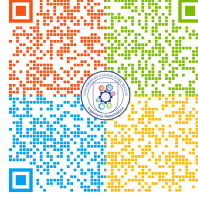


Figura 6.3: Ver un código básico [Aquí](#).

6.4.2 Aplicación a una EDP

Ejemplo 2: Considere la ecuación del calor

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \quad 0 < x < 1, \quad t \in [0, 0.5] \\ u(x, 0) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}\sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= 0, u(1, t) = e^{-\frac{\pi^2 t}{4}}, \quad t \in [0, 0.5] \end{aligned}$$

cuya solución exacta es $u(x, t) = e^{-\pi^2 t/4} \sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{2}e^{-4\pi^2 t} \sin(2\pi x)$. Usaremos el método de diferencias finitas para resolver el problema planteado, para esto consideremos $\Delta x = 0.05$ y $\Delta t \in \{0.05, 0.005, 0.0005\}$.

Consideremos el paso $h = \frac{1}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$ para la variable espacial x y Δt para el paso en la variable tiempo t . Si denotamos $u_i^n \approx u(ih, n\Delta t)$ la aproximación de la solución exacta en $(ih, n\Delta t)$, podemos aproximar las derivadas en tiempo y espacio como lo hemos hecho anteriormente, es decir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(ih, n\Delta t) \approx \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t}(ih, n\Delta t) \approx \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\ \text{o} \\ \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \end{cases}$$

De la elección de la aproximación para $u_t(ih, n\Delta t)$ se obtiene un método explícito (primera opción) o implícito (segunda opción) según sea nuestra elección. Aquí obtendremos un método explícito.

Bajo estas elecciones una versión discreta del problema dado a través del método de diferencias finitas es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad n \geq 0 \\ u_i^0 &= u_0(ih), \quad 1 \leq i \leq N \\ u_0^n &= 0, \quad u_{N+1}^n = e^{-\frac{\pi^2 n \Delta t}{4}}. \end{aligned}$$

En busca expresar el sistema resultante en forma matricial definimos $\lambda = \frac{\Delta t}{h^2}$, luego notemos que

i) Si $i = 1$

$$u_1^{n+1} = u_1^n + \lambda(-2u_1^n + u_2^n) + \lambda u_0^n$$

ii) Si $1 < i < N$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)$$

iii) Si $i = N$

$$u_N^{n+1} = u_N^n + \lambda(u_{N-1}^n - 2u_N^n) + \lambda u_{N+1}^n,$$

De lo anterior, vemos que el método de diferencias finitas induce el siguiente esquema numérico

$$u^{n+1} = (I + \lambda A)u^n + \lambda v^n, \quad (6.4.3)$$

donde $u^n = (u_i^n)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ con u_i^n una aproximación de $u(ih, n\Delta t)$, $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ y v^n como sigue

$$A_h = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad v^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N+1}^n \end{pmatrix}_N$$

Aquí λ representa el número de Courant. Podemos notar la importancia de que λ satisfaga $\lambda \leq 0.5$, de no ocurrir el método numérico no es estable como podemos ver en la figura (6.4a) y (6.4b). Cuando el número de Courant satisface $\lambda \leq 0.5$ la solución numérica es de buena calidad como se puede apreciar en la figura (6.4c) y (6.4d). Como antes, la tasa de convergencia del método no se analizará en esta instancia.

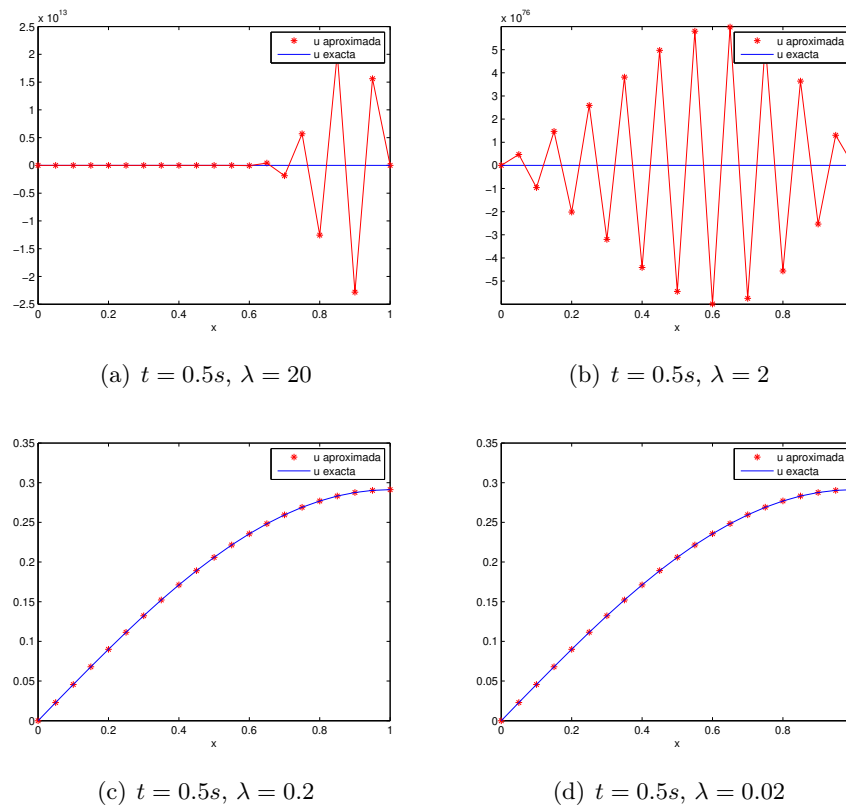


Figura 6.4: Solución exacta vs solución aproximada.



Figura 6.5: Ver un código básico [Aquí](#).

6.5 Volúmenes finitos

6.6 Elementos Finitos

Índice alfabético

- principal, 3
 abierto, 1
 bola abierta, 1
 Burger, 4
 calor, 4
 cerrado, 1
 clausura, 1
 condiciones iniciales, 9
 condición, 48
 condición de Dirichlet, 8
 condición de Neumann, 9
 curvas características planas, 20
 derivadas parciales, 2
 distancia, 1
 dominio de dependencia, 42
 ecuaciones diferenciales ordinarias, 2
 ecuación diferencial parcial, 2
 ecuación en derivadas parciales, 2
 ecuación homogénea, 6
 espacio euclideo, 1
 frontera, 1
 homogénea, 3
 interior, 1
 Laplace, 4
 lineal, 2
 linealidad, 2
 multidimensional, 8
 no lineal, 2
 número natural, 1
 números complejos, 1
 números enteros, 1
 onda, 4
 onda de choque, 46
 operador, 5, 6
 orden, 2
 Poisson, 4
 principio de superposición, 6
 problema de Cauchy, 9
 problema de Dirichlet, 12
 problema de valores de frontera, 8
 problema mixto, 10
 problemas mixtos, 9
 región de influencia, 42
 semilineales, 3
 Sine-Gordon, 4
 Sturm-Liouville, 8
 transformación, 5
 unicidad de la solución, 8
 valor inicial, 9