Curvas de ancho constante

Víctor Osores
Departamento de Matemática, Física y Estadística, Universidad Católica del Maule.
vosores@ucm.cl

Curva de ancho constante

Una curva de ancho constante es una curva plana convexa C en el plano tal que la distancia entre cualquier par de rectas paralelas tangentes a C es constante, sin importar la dirección de las rectas.

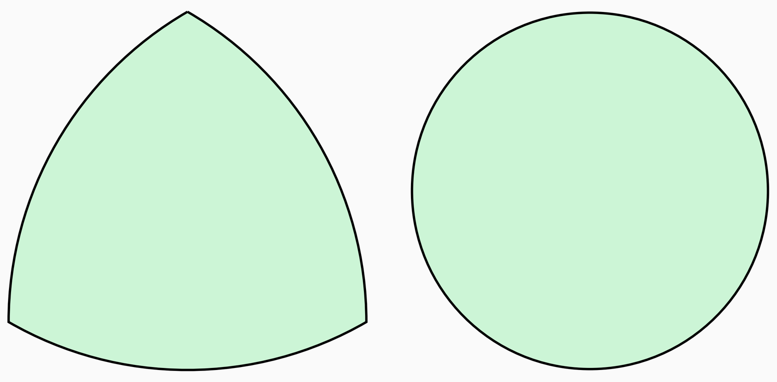


Fig. 1: El círculo es, por definición, el ejemplo más evidente de curva de ancho constante.

El triángulo de Reuleaux: La curva de la izquierda en la fig. 1. se llama triángulo de Reuleaux, en honor a Franz Reuleaux (1829 – 1905), ingeniero alemán que lo utilizó en sus diseños.

¿Cómo construir el triángulo de Reuleaux?

El triángulo de Reuleaux es una curva de ancho constante construida a partir de un triángulo equilátero. Los pasos para construirlo son los siguientes:

- Dibuja un triángulo equilátero con lados de longitud l.
- Dibuje un arco de circunferencia de centro en uno de los vértices del triángulo y de radio l que una entre sí a los dos vértices restantes.
- Repita la operación para cada vértice y ya habrá obtenido el triángulo de Reuleaux.
- Borre el triángulo equilátero inicial, el espacio central delimitado por las tres circunferencias es el triángulo de Reuleaux buscado.

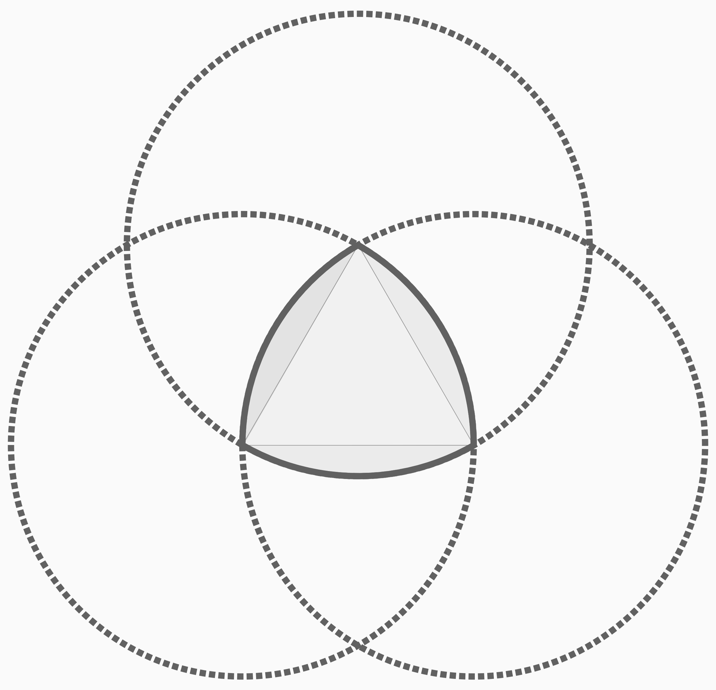


Fig. 2: Triángulo de Reuleaux.

Algunos teoremas importantes

Teorema de Barbier

Si el ancho del convexo K es constante, digamos d en todas las direcciones, entonces el perímetro de K es πd.

Teorema de Blaschke-Lebesgue

El área encerrada por un triángulo de Reuleaux con ancho w viene dada por

$$a_1 = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})w^2 \approx 0.70477w^2$$

y la del círculo

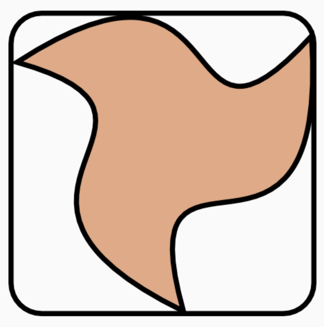
$$a_2 = \frac{\pi}{4}w^2 \approx 0.78539w^2.$$

El teorema de Blaschke-Lebesgue afirma que a_1 es el área mínima única posible de una curva de ancho constante, y la desigualdad de Blaschke-Lebesgue establece que cada conjunto convexo de ancho w tiene un área al menos de este tamaño, siendo la igualdad solo cuando el conjunto está limitado por un triángulo de Reuleaux.

Generalización Es posible construir polígonos de Reuleaux de forma análoga a como lo hemos hecho con el triángulo con la única condición de que el número de lados sea impar.

Aplicaciones

- En 1914, el ingeniero británico Harry James Watt patentó una broca con forma de triángulo de Reuleaux. Esta broca está montada en un dispositivo especial que le permite girar de manera excéntrica, permitiéndole perforar un agujero con una forma casi cuadrada.



- Por su elegancia y sencillez de su trazado ha sido muy utilizado en arquitectura, sobre todo en el periodo gótico.

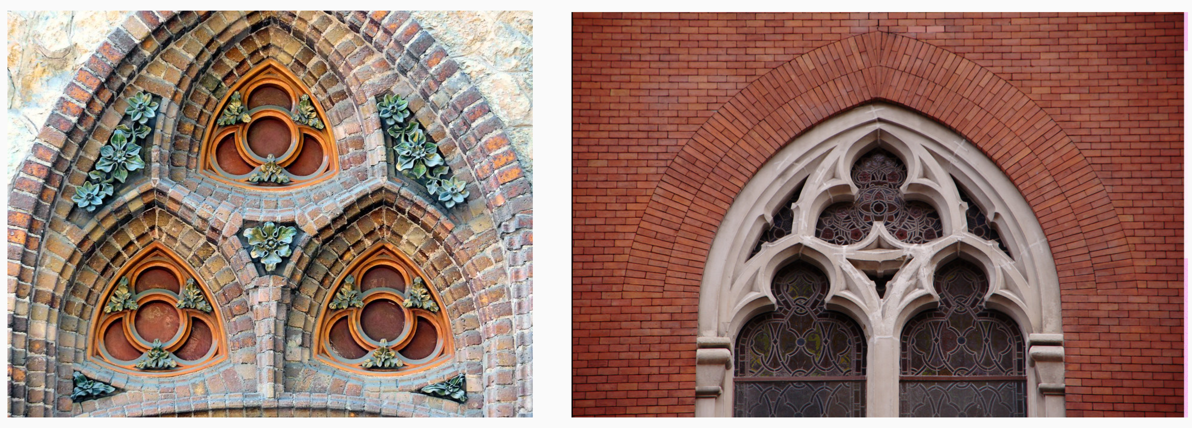
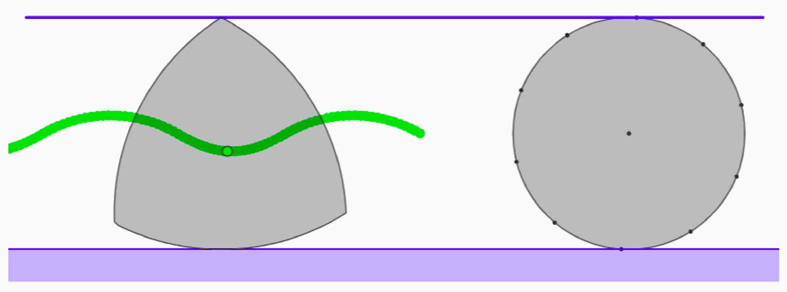


Fig. 4: A la izquierda Casa Golferichs (1900), Barcelona. A la derecha la Parroquia de Santa Cruz, Madrid.

- Aunque un triángulo de Reuleaux puede rodar con relativa facilidad, no es ideal como rueda debido a la falta de un centro de rotación fijo. Sin embargo, como se muestra en la figura adjunta, una tabla montada sobre un triángulo de Reuleaux puede moverse de manera perfectamente horizontal.



- Las curvas de ancho constante permiten diseñar tapas de alcantarilla con la propiedad de que, si se fabrican ligeramente más anchas que el hueco, no podrán caer accidentalmente dentro de él. No hay forma de que esto ocurra.

- Las monedas británicas de 20 y 50 peniques tienen la forma de heptágonos de Reuleaux. Esta geometría facilita el reconocimiento táctil para personas con discapacidad visual y, además, permite que las monedas superen la prueba de ancho en las máquinas expendedoras, de manera similar a las monedas circulares.

Fig. 7: A la izquierda la moneda de 20 peniques. A la derecha la moneda de 50 peniques.

Polígonos de Reuleaux

Los polígonos de Reuleaux son una familia de curvas de ancho constante que generalizan el concepto del triángulo de Reuleaux. Se construyen a partir de polígonos regulares con un número impar de lados, y su principal característica es que mantienen un ancho constante en todas las direcciones, a pesar de no ser figuras perfectamente circulares.

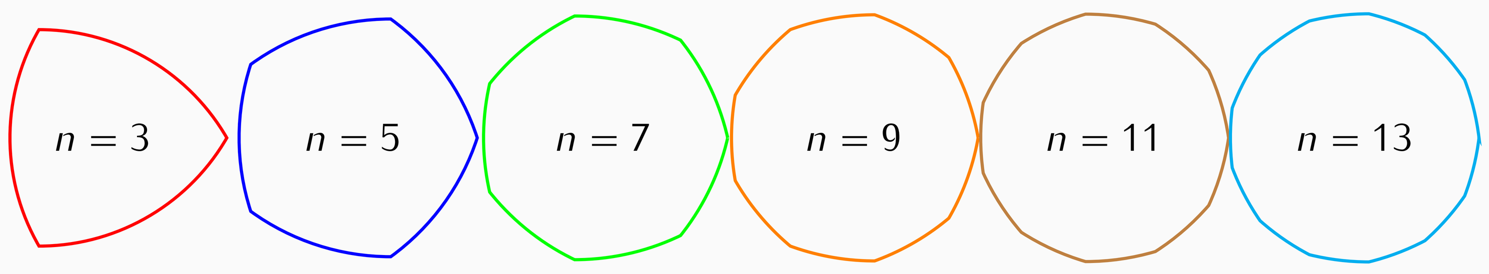


Fig. 8: Polígonos de Reuleaux de n lados.