

Modelos matemáticos: importancia y como enfrentarlos.

Víctor Osores

Departamento de Matemática, Física y Estadística,
Facultad de Ciencias Básicas.

Universidad Católica del Maule, Talca, Chile
Abril, 2022



ucm

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE



Outline

1 Modelos clásicos

- Ecuación del calor
- Ecuaciones de Navier-Stokes
- Sistema de EDPs advección-difusión-reacción
- Modelo de sedimentación polidispersa
- Shallow water multicapa

2 Importancia

- Asentamiento y transporte en contextos geofísicos
- Minería de cobre en Chile

3 Herramientas y como abordarlos

4 Simulación numérica

Ecuación de Poisson y del Calor

Ecuación de *Poisson*

$$-\Delta u = f, \quad (1)$$

$x \in U$ y $u = u(x)$ es la incógnita, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto dado y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es dada.

La ecuación del *calor* no homogenea

$$u_t - \Delta u = f, \quad (2)$$

+ condición inicial y de frontera. $t > 0$ y $x \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. La incógnita es $u : U \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Describe: Evolución en el tiempo de la densidad u de alguna cantidad como calor (variaciones de la temperatura), concentración química. Problema de valores propios de la membrana (explica funcionamiento de instrumentos de percusión y tímpano), entre otros.

Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones incompresibles de *Navier-Stokes* forman un sistema de ecuaciones para la velocidad \mathbf{u} y la presión p en un fluido incompresible:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}$$

f es una fuerza dada por unidad de volumen, $\sigma(\mathbf{u}, p)$ denota el *tensor de tensión*. Para un fluido newtoniano viene dado por $\sigma(\mathbf{u}, p) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) - pI$. $\epsilon(\mathbf{u})$ (tensor de *tasa de deformación*)

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T).$$

Describe: el movimiento de un fluido viscoso (agua, aire), las corrientes oceánicas, fenómenos atmosféricos, flujo alrededor de objetos (aeronaves, automóviles, cohetes). Flujo sanguíneo (bajo generalizaciones).

Advección-difusión-reacción

Ecuaciones de *Navier-Stokes* acopladas con ecuaciones de *advección-difusión-reacción*:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \right) = \nabla \cdot \sigma(\mathbf{w}, p) + f,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla u_1 - \nabla \cdot (\epsilon \nabla u_1) = f_1 - Ku_1u_2,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla u_2 - \nabla \cdot (\epsilon \nabla u_2) = f_2 - Ku_1u_2,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla u_3 - \nabla \cdot (\epsilon \nabla u_3) = f_3 + K(u_1u_2 - u_3).$$

Describe: Reacción química entre dos especies A y B en algún dominio Ω , $A + B \rightarrow C$.

Sistemas de leyes de conservación

Un sistema de *leyes de conservación* en varias variables espaciales:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0,$$

+ condición inicial y de frontera. \mathbf{F} es una función matricial, Ω subconjunto abierto de \mathbb{R}^p , \mathbf{u} es una función vectorial de $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[$ en Ω .

Describe: Tráfico vehicular, gas dinámica (euler system with gravity and friction), procesos de sedimentación, fenómenos geofísicos: avalanchas, aluviones, rompimientos de represas, entre otras (tras generalizaciones).

Modelo de sedimentación polidispersa

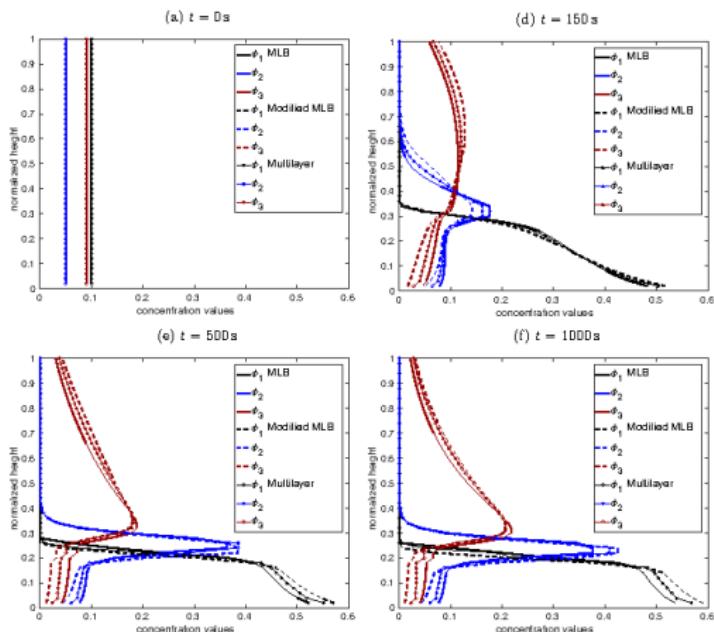
Para N especies de partículas sólidas.

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \frac{\partial f_j^M(\Phi)}{\partial z} = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

donde $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)^T$, t el tiempo y z la altura. Para $j = 1, \dots, N$

$$f_j^M(\Phi) := \phi_j v_j^{\text{MLB}} = \phi_j \mu V(\phi) \left(\delta_j (\bar{\rho}_j - \bar{\rho}^T \Phi) - \sum_{k=1}^N \delta_k \delta_k (\bar{\rho}_k - \bar{\rho}^T \Phi) \right).$$

Proceso de sedimentación polidispersa unidimensional

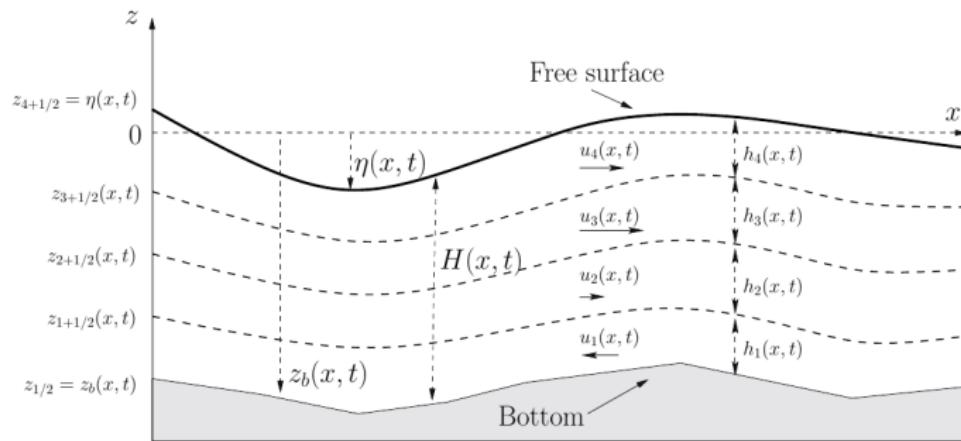


A dynamic multilayer shallow water model for polydisperse sedimentation. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. Raimund Bürger, Enrique D. Fernández-Nieto, Víctor Osorio.

Shallow water multicapa

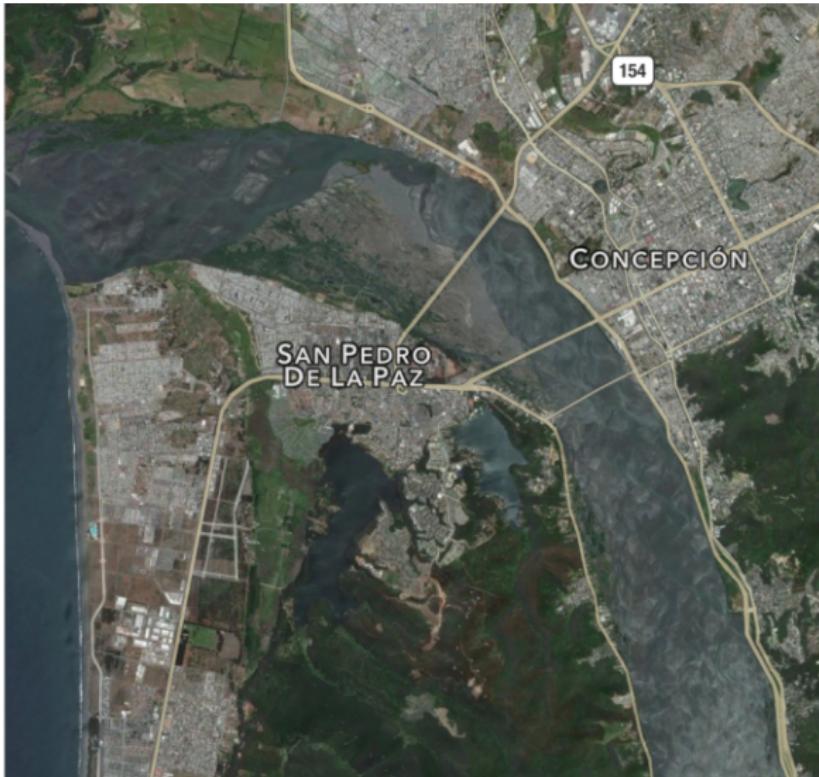
Para cada $\alpha = 1, \dots, M$, el sistema de EDPs viene dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(h_\alpha u_\alpha)}{\partial x} &= G_{\alpha+1/2} - G_{\alpha-1/2}, \\ \frac{\partial(h_\alpha u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_\alpha u_\alpha^2) + gh_\alpha \frac{\partial H}{\partial x} &= -gh_\alpha \frac{\partial z_b}{\partial x} + u_{\alpha+1/2} G_{\alpha+1/2} \\ &\quad - u_{\alpha-1/2} G_{\alpha-1/2}. \end{aligned}$$



Asentamiento y transporte en contextos geofísicos.

Río Bio-Bio, Concepción:



Modelos clásicos
oooooooo

Importancia
○●○○○

Herramientas y como abordarlos
○○○○

Simulación numérica
○○○○○

Río Bio-Bio, Concepción.



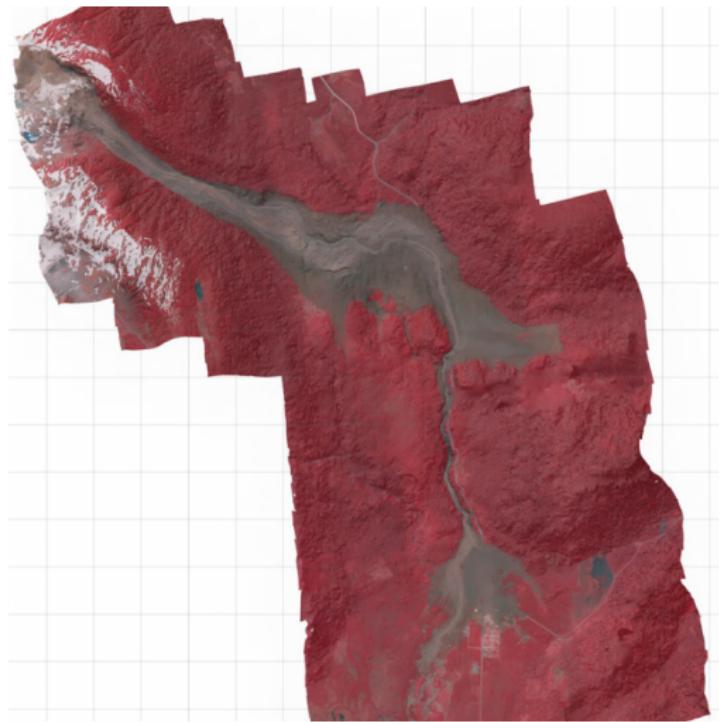
Aluvión de Villa Santa Lucía, Chaitén.



Datos:

- Volumen movilizado: $7.200.000 \text{ m}^3$
- Volumen depositado en VSL: $2.000.000 \text{ m}^3$
- Velocidad media: 72 km/hr.
- Área afectada total: Destrucción de 50% de Villa Santa Lucía.

Aluvión de Villa Santa Lucía, Chaitén.



Datos:

- Longitud: 10 kilómetros

Procesos de sedimentación

- Chile es el mayor exportador mundial de cobre, $\sim 40\%$ de los yacimientos mundiales, 5 de las 10 minas de cobre más grandes están en Chile.
- El cobre representa $\sim 50\%$ de las exportaciones del país y $\sim 20\%$ de los ingresos del gobierno.
- La minería requiere grandes cantidades de agua, que es un recurso escaso.
- Enormes cantidades de relaves de partículas de ganga (sin valor) suspendidas en el agua se producen continuamente. El agua se recupera mediante espesadores o tanques de clarificación.



Abordar y analizar un modelo

• Problemas bien planteados, búsqueda de solución clásica:

Descubrir una manera de resolver.

- i) Existencia de solución.
- ii) Unicidad de solución.
- iii) La solución depende continuamente del dato.

Dificultades:

- Ecuaciones no lineales son más difíciles que las ecuaciones lineales.
- Para la mayoría de las EDP no es posible escribir fórmulas explícitas para las soluciones.

• Soluciones débiles y regularidad:

Definir una noción mas amplia.

Pedir menos suavidad. Es mas fácil establecer i), ii) y iii).

- a) Si la solución débil es lo suficientemente regular podría ser una solución clásica.
- b) Estudio de la regularidad de tales soluciones.
- c) El estudio se enfoca a la existencia de soluciones.

Métodos numéricos

1. **Método de diferencias finitas:** $\Omega =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ y $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ solución del problema dirichlet no homogéneo:

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta, \end{cases}$$

Se introduce una discretización de Ω y una aproximación de u y sus derivadas cada nodo.

$$u_i \approx u(x_i), \quad u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad y \quad u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

	Theory (continuous)	Finite differences (discrete)
domain	$\Omega = [0, 1]$	$I_N = \{0, \frac{1}{N+1}, \dots, 1\}$
unknown	$u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u \in C^2(\Omega)$	$u_h = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$
conditions	$u(0) = \alpha, u(1) = \beta$	$u_0 = \alpha, u_{N+1} = \beta$
equation	$-u'' + cu = f$	$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j)$

Métodos numéricos

2. **Método de volúmenes finitos:** Consideremos la siguiente ley de conservación.

$$q_t(x, t) + f(q(x, t))_x = 0,$$

Se introduce una discretización de $\Omega = [a, b]$ y luego se integra sobre sobre $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt \right] \end{aligned}$$

Versión discreta:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n),$$

$$\text{con } Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx \text{ y } F_{i+1/2}^n \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+1/2}, t)) dt.$$

Métodos numéricos

3. Otros:

- Método de elementos finitos,
- Métodos de Galerkin discontinuos,
- Método de elementos finitos estabilizado adaptativo (AS-FEM),
- Métodos Petrov–Galerkin discontinuo (DPG), etc.

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$

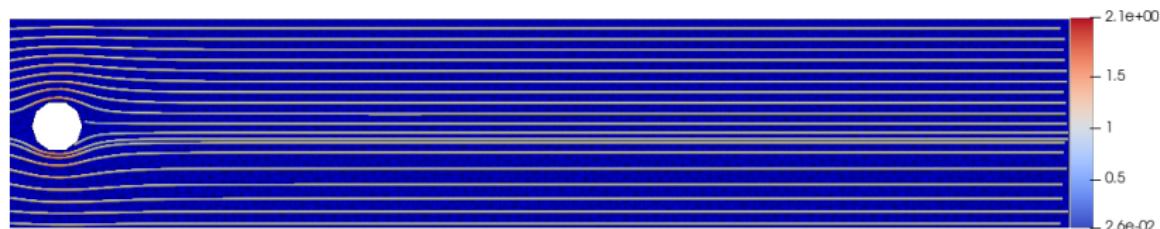


Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$



Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$

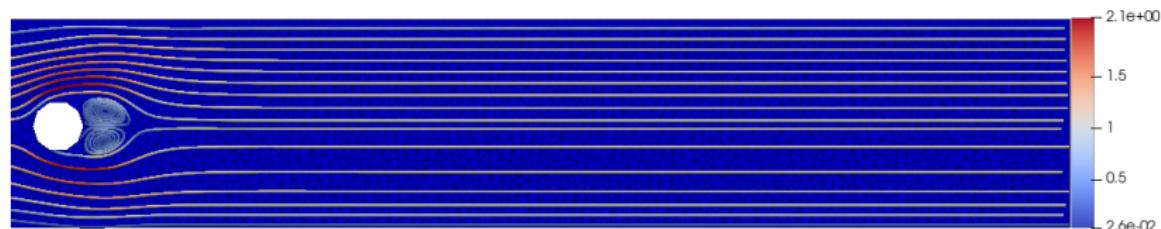


Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$

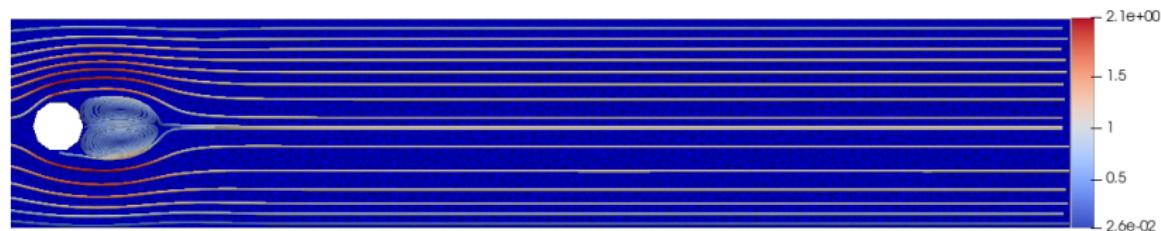


Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$

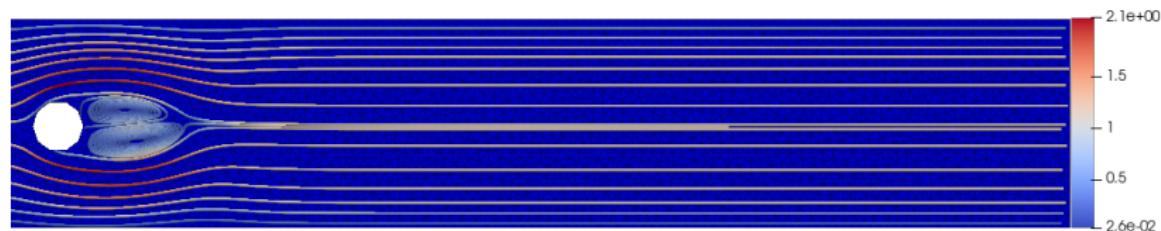


Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$

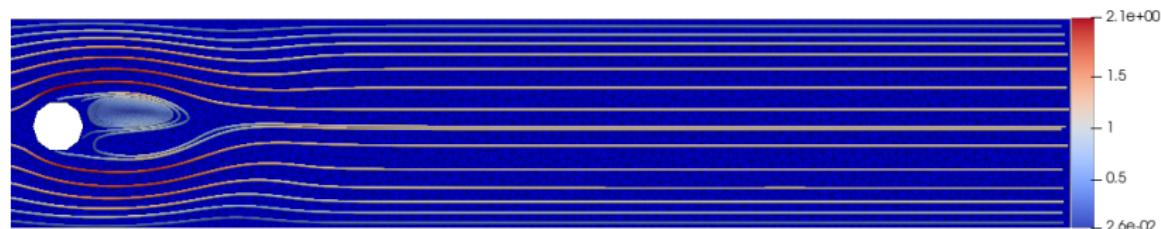


Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$

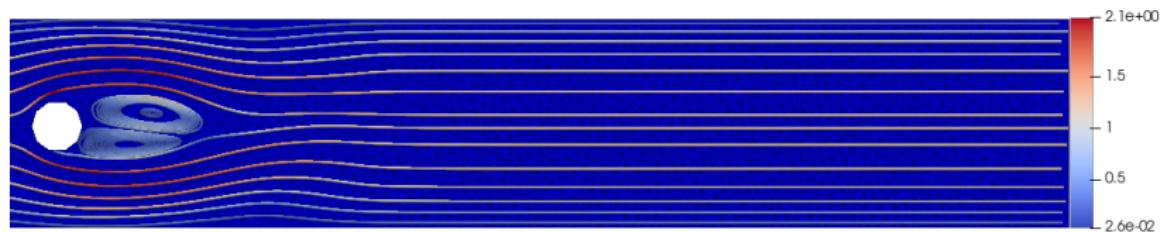


Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$



Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$

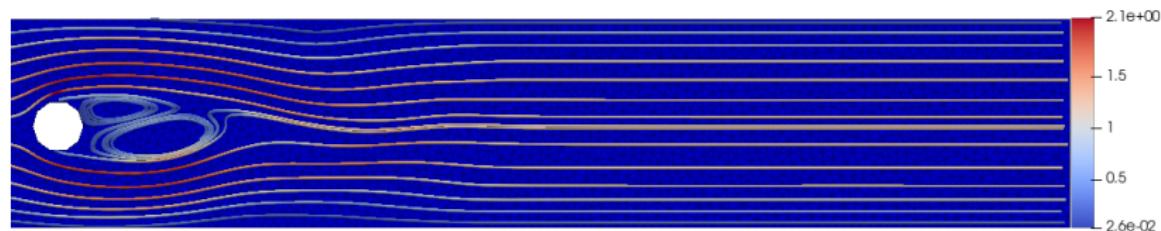


Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$

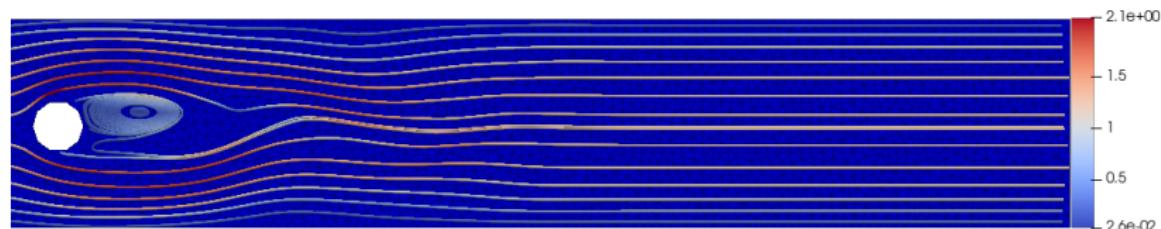


Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* para fluido incompresible: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot w = 0.$$

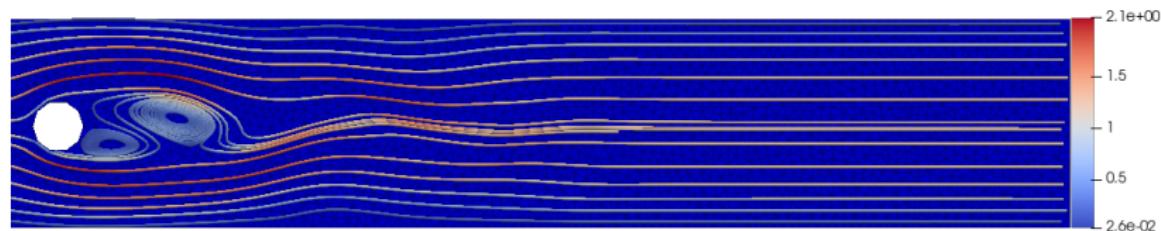


Figura: Flujo a través de un cilindro circular, $r = 0.05$, $\rho = 1.0$, viscosidad cinemática $\nu = 0.001$, $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$

Simulación numérica

Ecuaciones de *Navier-Stokes* acopladas con un sistema *advección-difusión-reacción*: $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41] \setminus B_r(0.2, 0.2)$

$$w_t - \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla p = 0,$$

$$\nabla \cdot w = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + w \cdot \nabla u_1 - \nabla \cdot (\epsilon \nabla u_1) = f_1 - Ku_1 u_2,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + w \cdot \nabla u_2 - \nabla \cdot (\epsilon \nabla u_2) = f_2 - Ku_1 u_2,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + w \cdot \nabla u_3 - \nabla \cdot (\epsilon \nabla u_3) = f_3 + K(u_1 u_2 - u_3).$$

Condición inicial y de frontera: $w|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_3} = w|_S = 0$, $w(0, y) = \left(1.5 \frac{4y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$. $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ en $t = 0$, f_1 y f_2 distintas de cero y $f_3 = 0$.

Simulación numérica

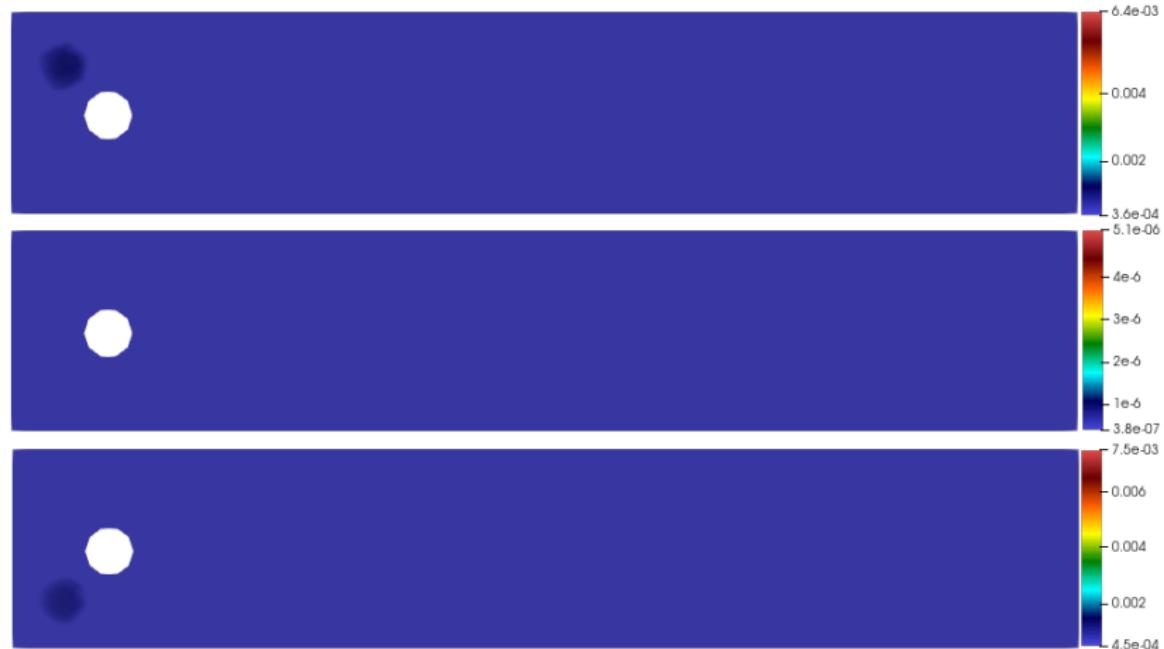


Figura: Concentraciones de las tres especies B , C y A , respectivamente.

Simulación numérica

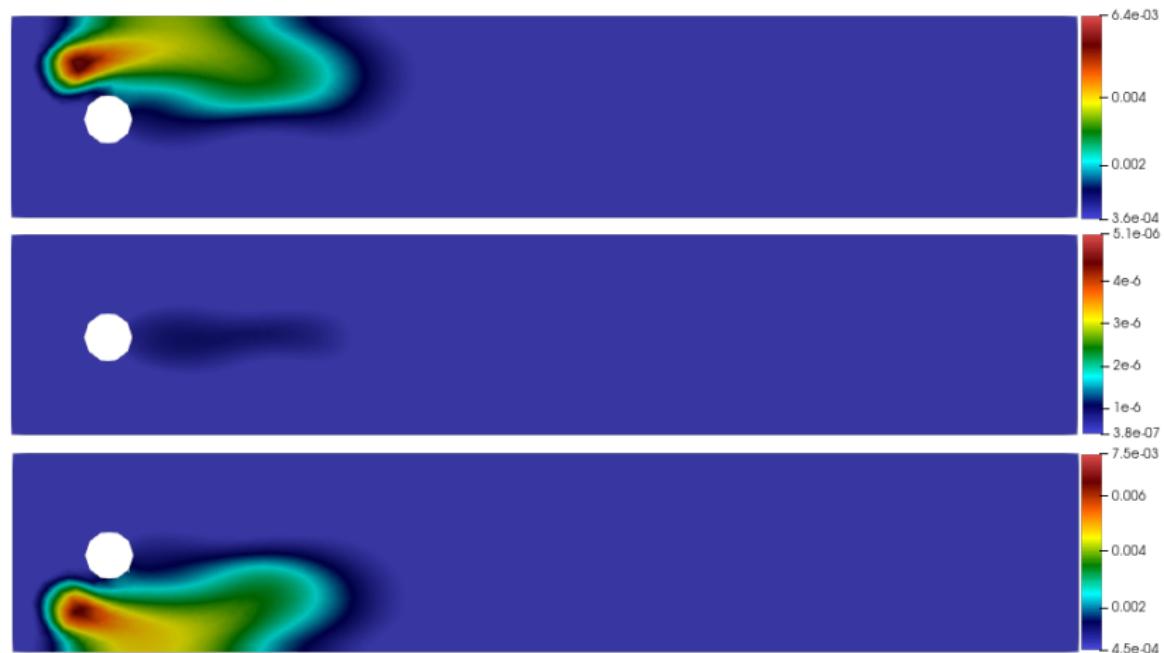


Figura: Concentraciones de las tres especies B , C y A , respectivamente.

Simulación numérica

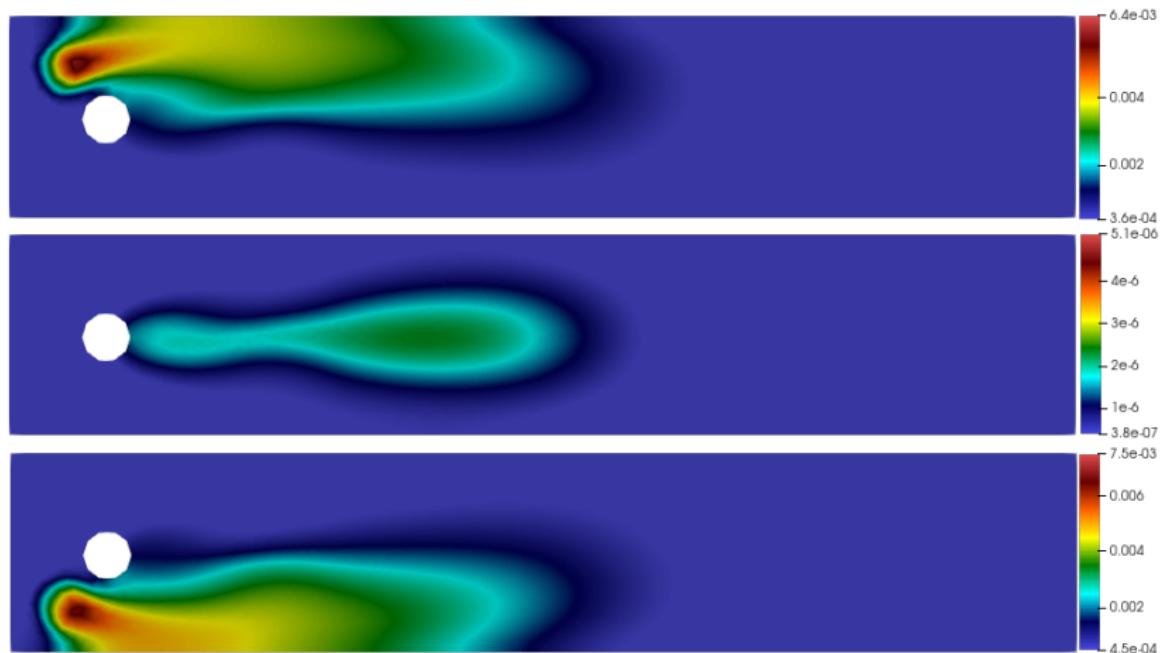


Figura: Concentraciones de las tres especies B , C y A , respectivamente.

Simulación numérica

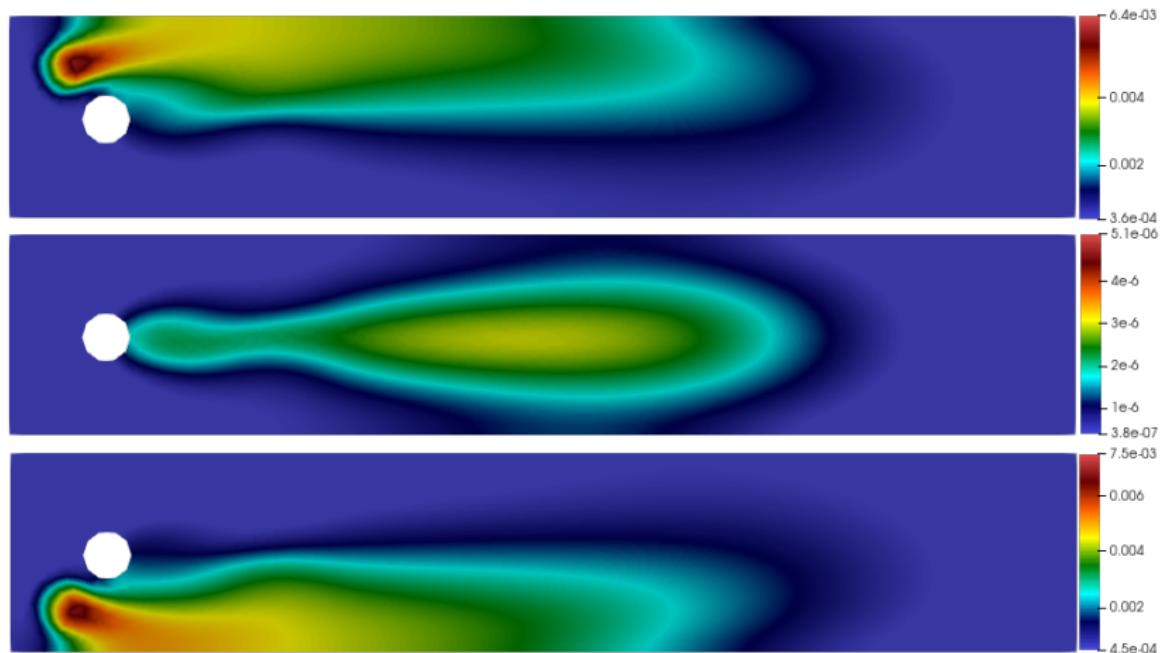


Figura: Concentraciones de las tres especies B , C y A , respectivamente.

Simulación numérica

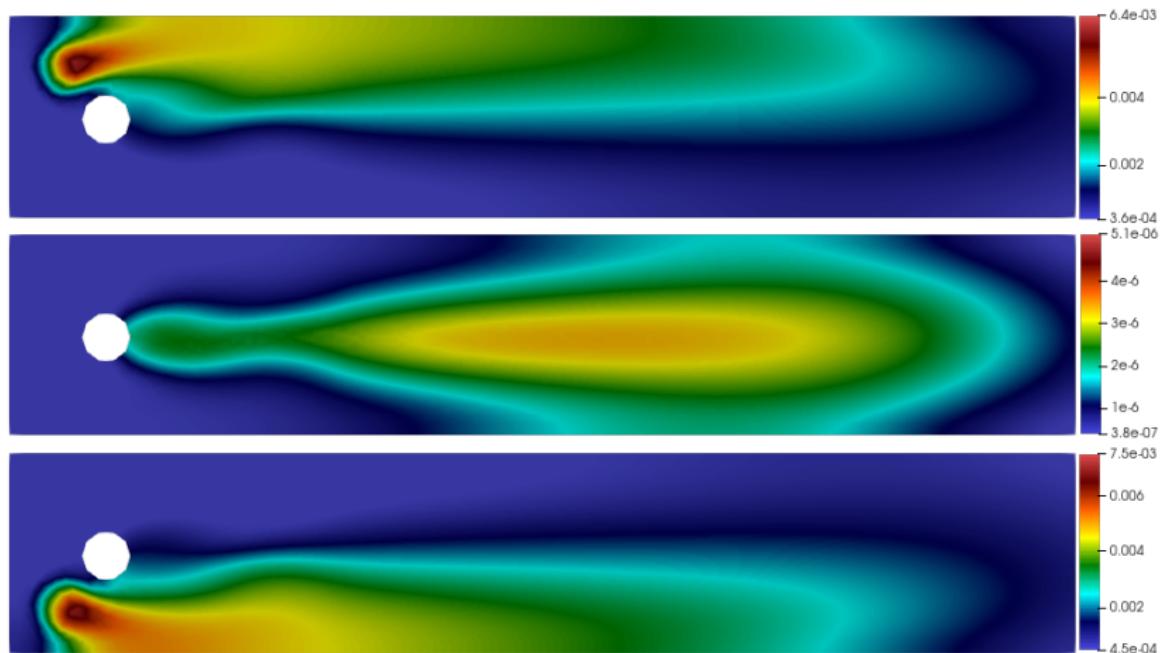


Figura: Concentraciones de las tres especies B , C y A , respectivamente.

Simulación numérica

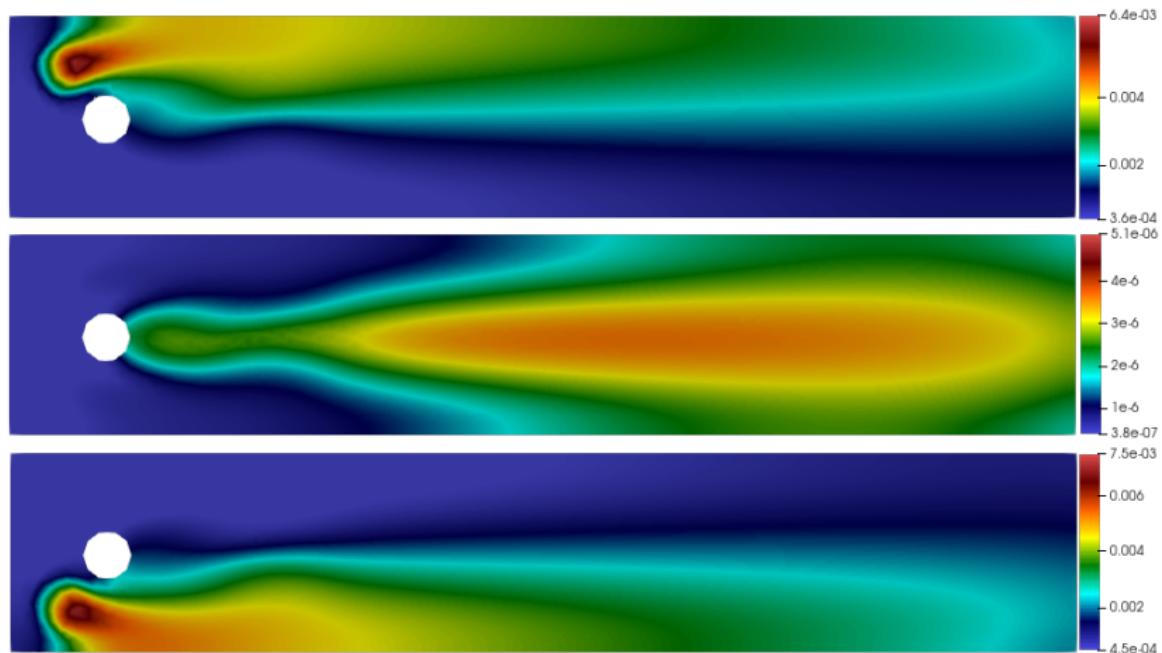


Figura: Concentraciones de las tres especies B , C y A , respectivamente.

Simulación numérica

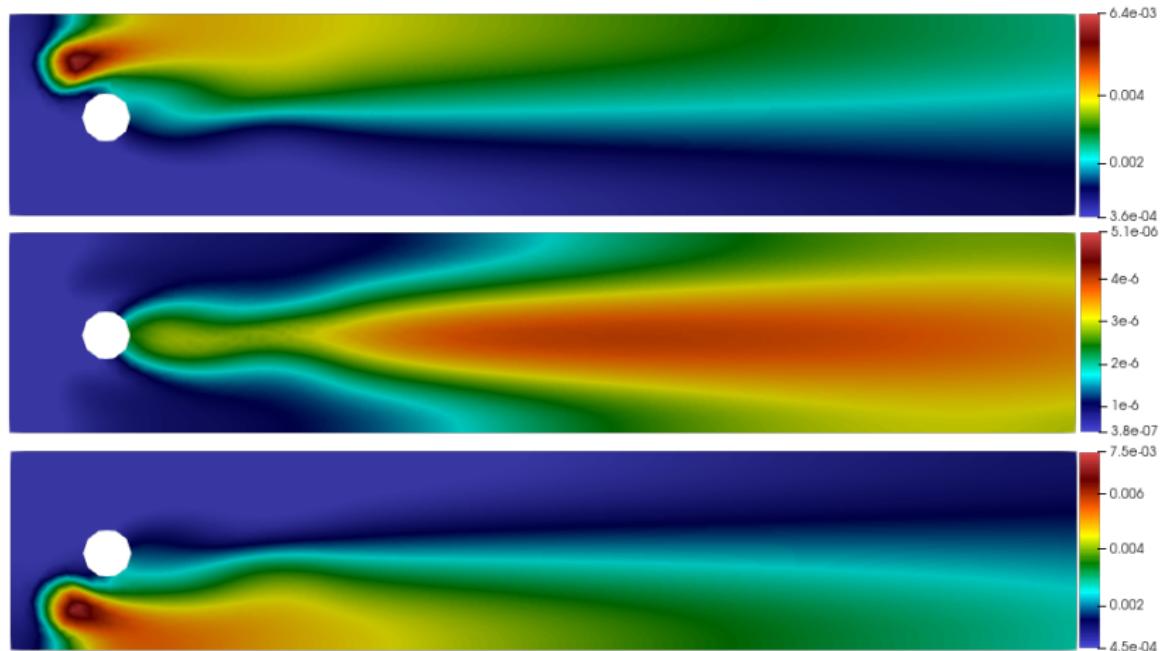


Figura: Concentraciones de las tres especies B , C y A , respectivamente.

Simulación numérica

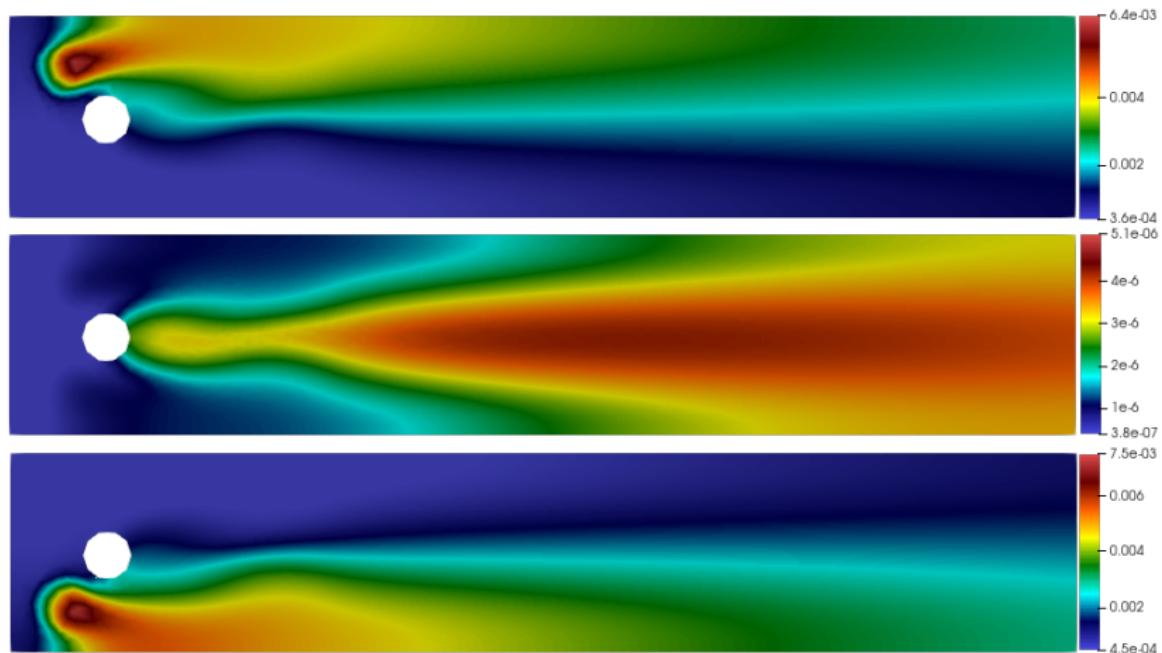


Figura: Concentraciones de las tres especies B , C y A , respectivamente.

Simulación numérica

Proceso de *sedimentación polidispersa*: Para cada $\alpha = 1, \dots, M$,

$$\partial_t \mathbf{W}_\alpha + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{W}_\alpha) + \mathcal{P}_\alpha(\hat{\mathbf{W}}) = \mathcal{G}_\alpha^+(\hat{\mathbf{W}}) - \mathcal{G}_\alpha^-(\hat{\mathbf{W}}).$$

+ Condición inicial y de frontera.

Para $\alpha = 1, \dots, M$,

$$\begin{aligned} \phi_{1,\alpha}(0, x, y) &= 0.05, \quad \phi_{2,\alpha}(0, x, y) = 0.025, \\ u_\alpha(0, x, y) &= 0, \quad (x, y) \in [0, 5.8] \times [0, 4]. \end{aligned}$$

$$h(0, x, y) = 1.7 - z_B(x, y) \text{ m.}$$

A multilayer shallow water approach for polydisperse sedimentation with sediment compressibility and mixture viscosity. Journal of Scientific Computing. Raimund Bürger, Enrique D. Fernández-Nieto, Víctor Osores.

Simulación numérica

Concentration by layers $\phi_{1,\alpha}$, $t = 0$ s

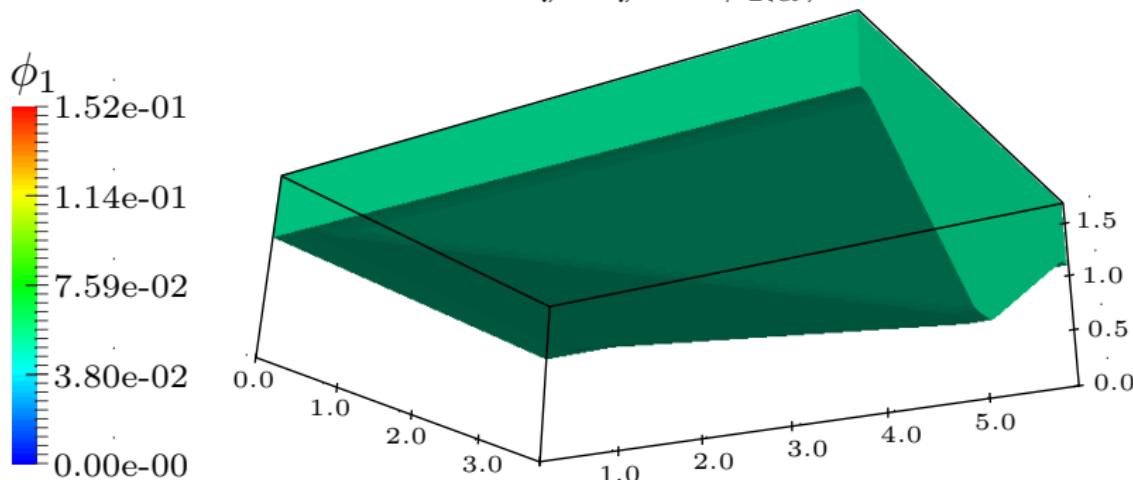


Figura: Proceso de sedimentación

Simulación numérica

Concentration by layers $\phi_{1,\alpha}$, $t = 10$ s

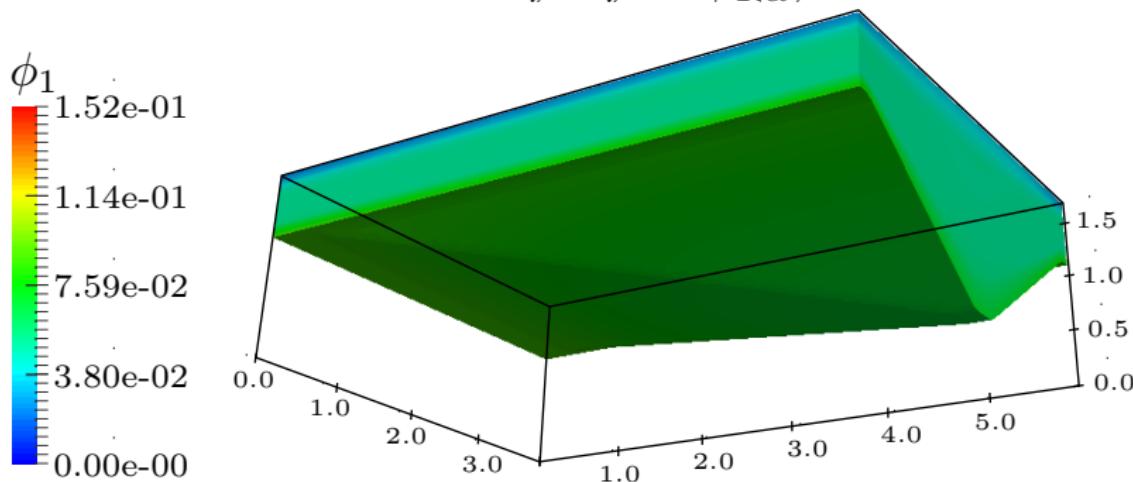


Figura: Proceso de sedimentación

Simulación numérica

Concentration by layers $\phi_{1,\alpha}$, $t = 20$ s

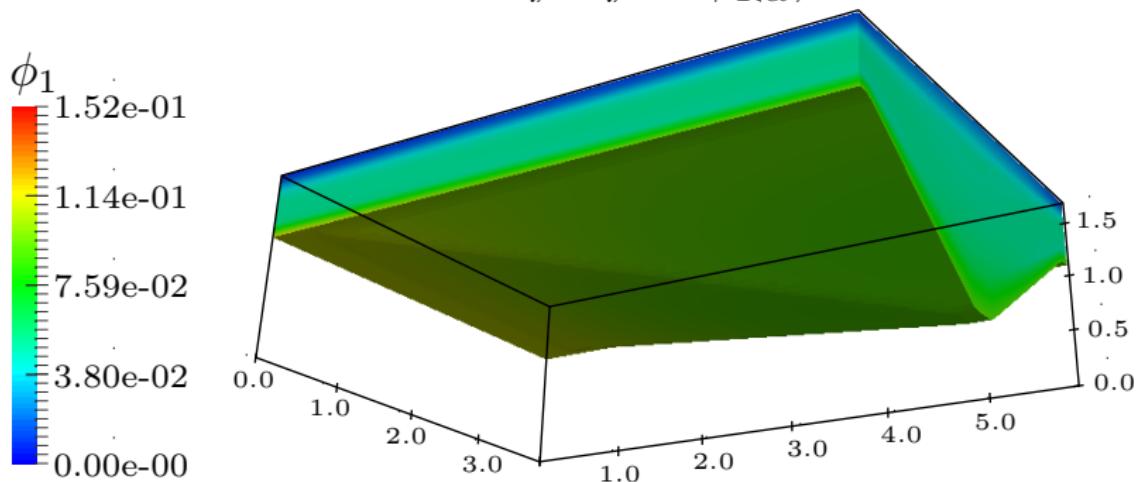


Figura: Proceso de sedimentación

Simulación numérica

Concentration by layers $\phi_{1,\alpha}$, $t = 30$ s

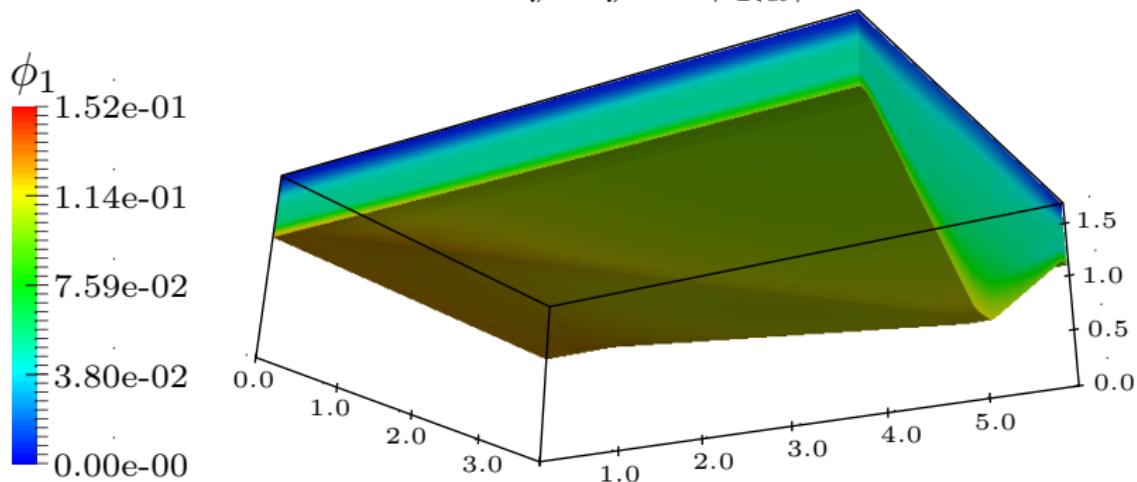


Figura: Proceso de sedimentación

Simulación numérica

Concentration by layers $\phi_{1,\alpha}$, $t = 40$ s

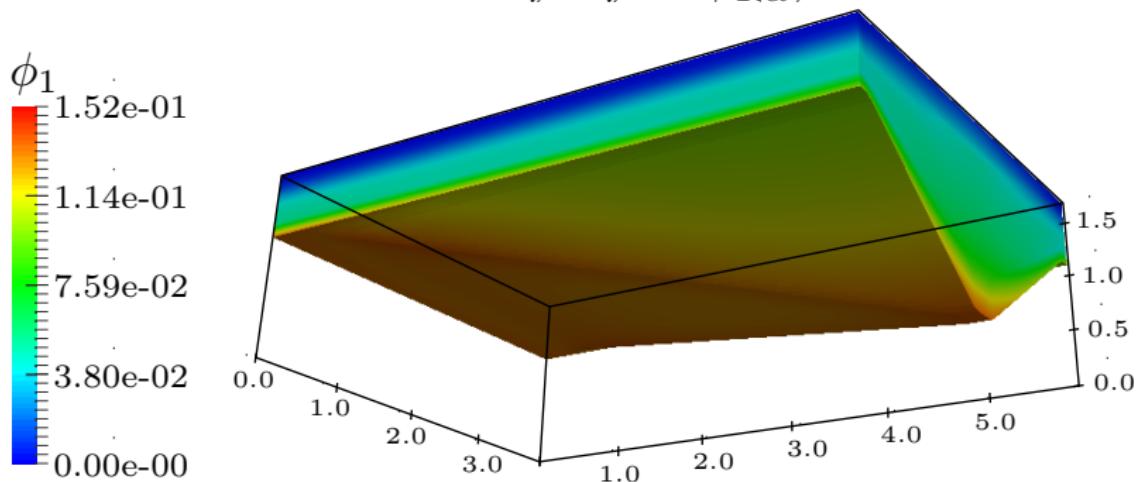


Figura: Proceso de sedimentación

Simulación numérica

Concentration by layers $\phi_{1,\alpha}$, $t = 50$ s

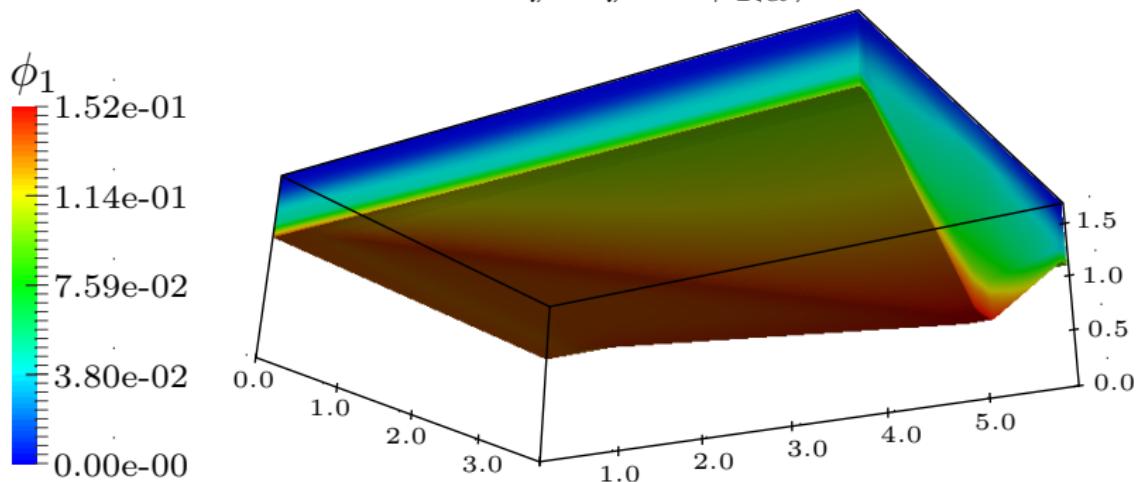


Figura: Proceso de sedimentación

Simulación numérica

Velocity field \vec{u} , $t = 5\text{s}$

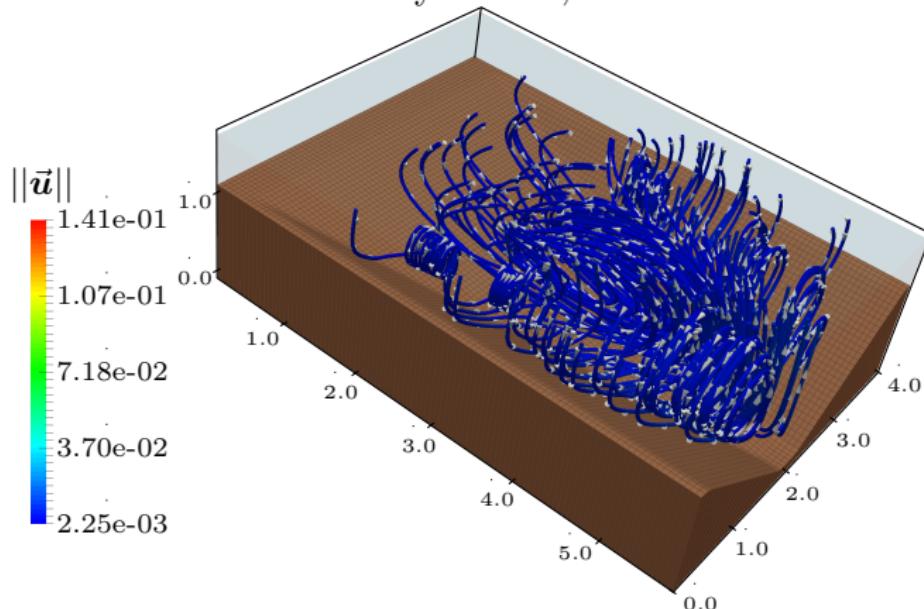


Figura: Campo de velocidades de la mezcla.

Simulación numérica

Velocity field \vec{u} , $t = 10\text{ s}$

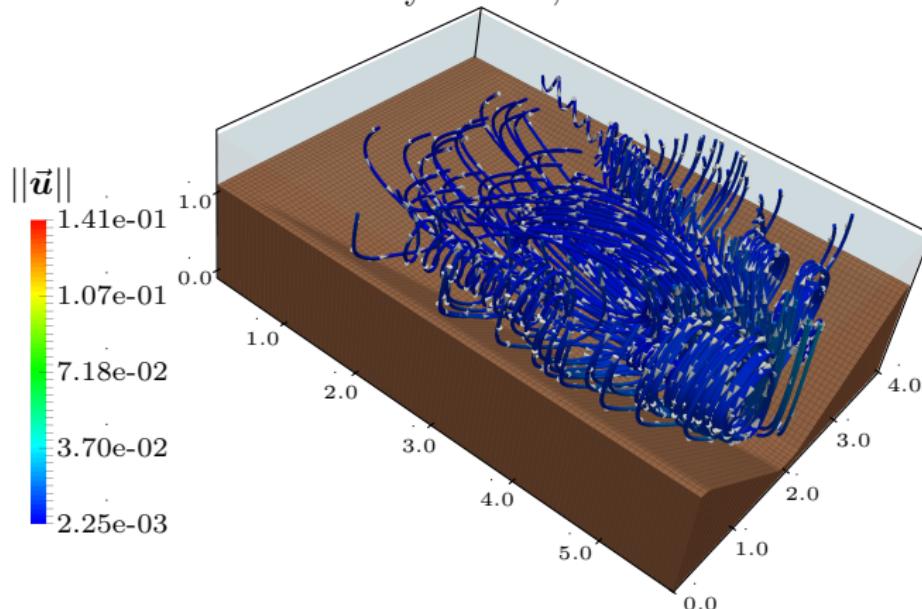


Figura: Campo de velocidades de la mezcla.

Simulación numérica

Velocity field \vec{u} , $t = 20$ s

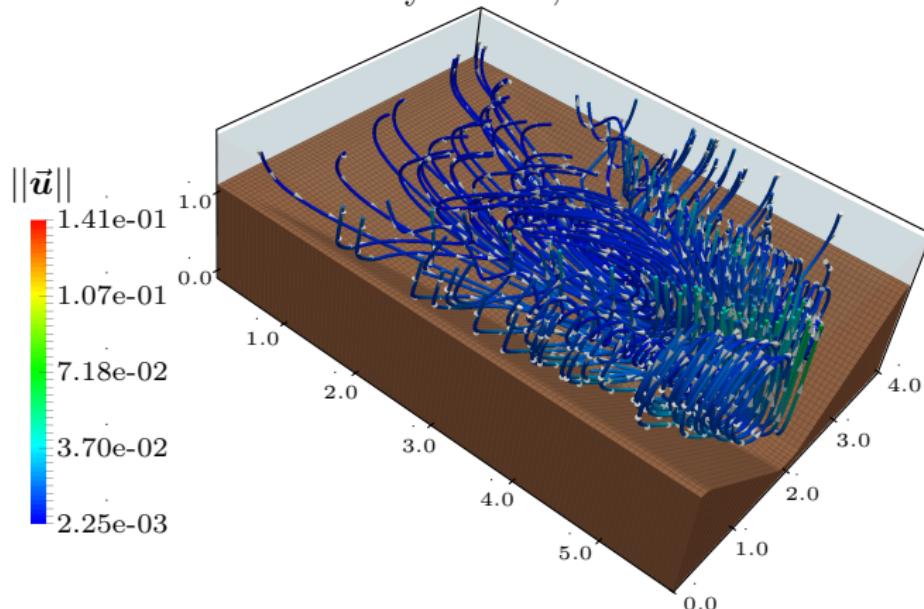


Figura: Campo de velocidades de la mezcla.

Simulación numérica

Velocity field \vec{u} , $t = 30$ s

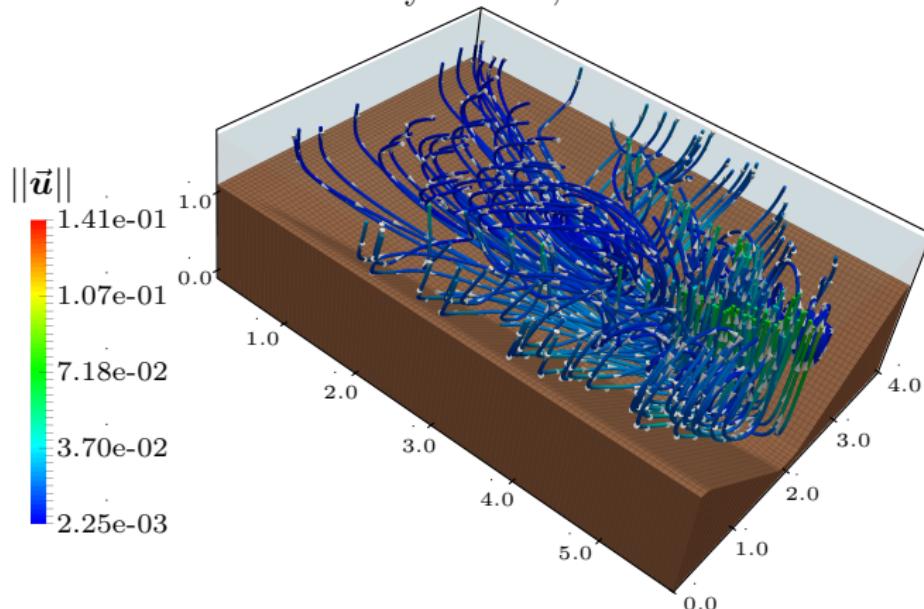


Figura: Campo de velocidades de la mezcla.

Simulación numérica

Velocity field \vec{u} , $t = 40$ s

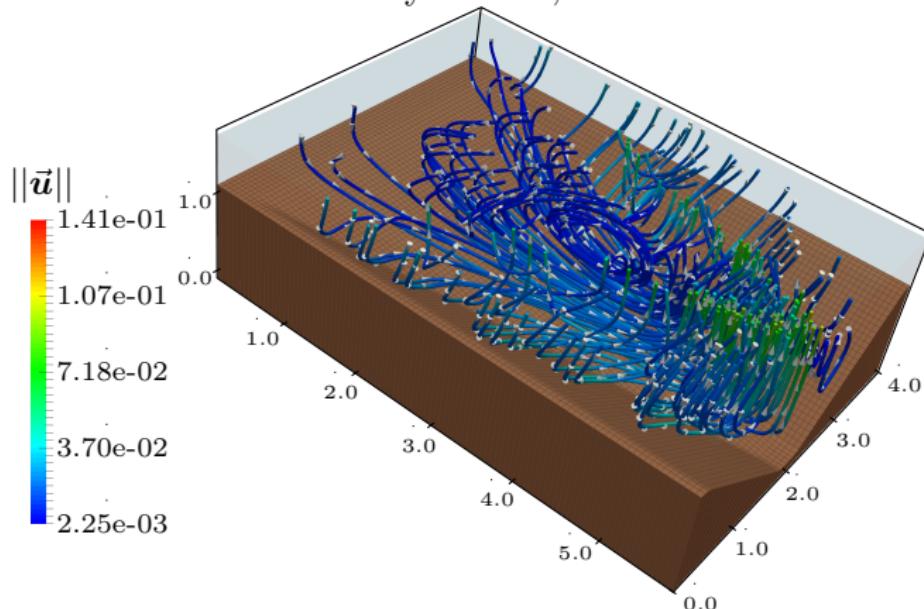


Figura: Campo de velocidades de la mezcla.

Simulación numérica

Velocity field \vec{u} , $t = 50$ s

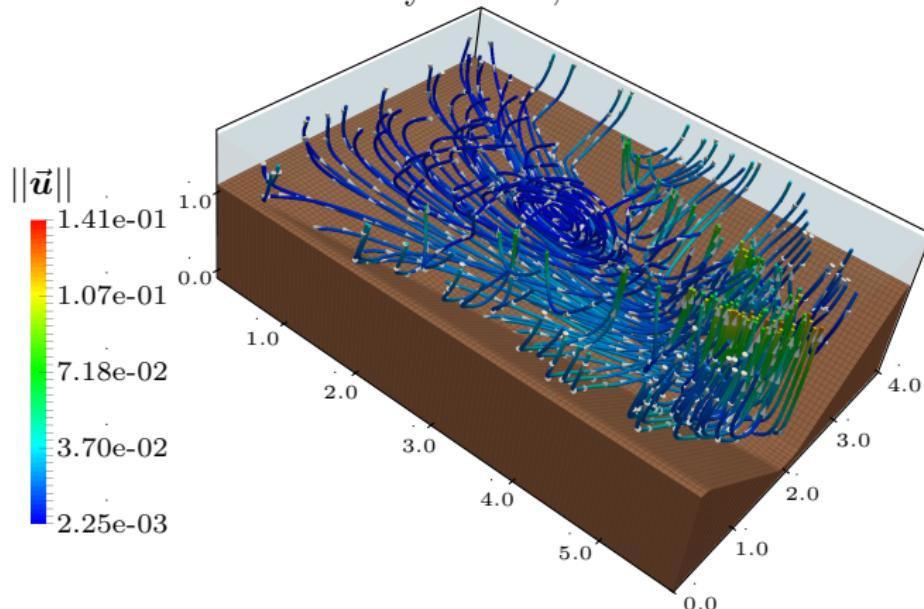


Figura: Campo de velocidades de la mezcla.

Muchas gracias.