Karlsruher Institut für Technologie

Malte Voß
David Knothe

Vokabeln der Elementaren Geometrie

12. Februar 2020, `https://github.com/vossmalte/ElementareGeometrie`

1 Euklidische Geometrie

2 Topologie

Def **Topologie**. Sei $(X, \mathcal{O})$ mit $\mathcal{O} \subset 2^X$. $U \in \mathcal{O}$ nennt man offen. $\mathcal{O}$ heißt Topologie auf X, falls gelten:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
2. Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen
3. Endliche Schnitte offener Mengen sind offen

Def **Stetigkeit**. $f : X \to Y$ heißt stetig, wenn die Urbilder offener Mengen stets offen sind.

Def **Abgeschlossen**. $A \subset X$ abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \backslash A$ offen

Def **Umgebung**. $U \subset X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls $\exists V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subset U$

Def **Innen, außen, Rand, Abschluss**. Sei $M \in X$.

- Ein Punkt P ist im Inneren von M, wenn es ein $o \in \mathcal{O}$ gibt, sodass $x \in o \subseteq M$.
- Ein Punkt P ist im Äußeren von M, wenn er im Inneren von $X \backslash M$ ist.
- Das Innere des Komplements ist das Äußere.
- Ein Randpunkt von M ist ein Punkt, der weder außen noch innen ist.
- Der Abschluss von M ist $\overline{M}$, der Schnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die M enthalten, also $\overline{M} = \cap\{A \in X \backslash \mathcal{O} : M \subset A\}$.
- Der Rand von M ist $\delta M = \overline{M} \backslash {}^\circ M$.

Def **Topologie eines metrischen Raums**. Jeder metrische Raum ist ein topologischer Raum. Die induzierte Topologie $\mathcal{O}(d)$ geht so: V heißt offen, wenn für jedes $x \in V$ ein ε-Ball um x in V liegt.

Def $\mathcal{O}$ **metrisierbar**. $:\Leftrightarrow \exists d : \mathcal{O} = \mathcal{O}(d)$

Def **fein, grob**. $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \Leftrightarrow \mathcal{O}'$ feiner als $\mathcal{O}$

Def **disjunkte Summe / Vereinigung**. von X, Y erklärt als $X + Y = X \times Y := X \times 0 \cup Y \times 1$

Def **Topologische Summe**. $(X, \mathcal{O}), (Y, (O)')$ top. Räume. $\{U + V | U \in \mathcal{O}, V \in \mathcal{O}'\}$ ist Topologie auf $X + Y$. $X + Y$ dann top. Summe.

Def **Produkttopologie**. $W \subset X \times Y$ offen $:\Leftrightarrow \forall (x, y) \in W : \exists$ Umgebung U von x in X und Umgebung V von y in Y mit $U \times V \subset W$.

Bem. Solche „Rechtecke“ sind offen in der Produkttopologie, aber nicht alle offenen Mengen sind solche Rechtecke.

Def **Basis**. Menge $\mathcal{B}$ Basis $:\Leftrightarrow$ jede offene Menge in X ist Vereinigung von solchen aus $\mathcal{B}$

Def **Subbasis**. Menge $\mathcal{S}$ Subbasis $:\Leftrightarrow$ jede offene Menge in X ist Vereinigung von endlich viele Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{B}$
$\Leftrightarrow$ endliche Schnitte in $\mathcal{S}$ sind Basis.

Bem. Für $S \subset 2^X$ gibt es genau eine Topologie für die S Subbasis ist.

Bem.
- Kompositionen stetiger Abbildungen sind stetig
- $f : X \to Y$ stetig, $X_0 \subset X \Rightarrow f|_{X_0}$ stetig
- $f : X + Y \to Z$ stetig $\Leftrightarrow f|_X, f|_Y$ stetig
- $(f, g) : Z \to X \times Y$ stetig $\Leftrightarrow f : Z \to X, g : Z \to Y$ stetig

Def **Homömorphismus**. $f : X \to Y$ heißt Homömorphismus, wenn f bijektiv, f stetig, f^{-1} stetig.
X und Y sind dann homöomorph ($X \approx Y$).

Bem. Homömorphismen sind strukturerhaltende (offen, abgeschlossen, Umgebung, (Sub-)Basis) Abbildungen zwischen top. Räumen.

Def **Zusammenhang**. X heißt zusammenhängend, wenn er sich nicht in zwei nichtleere, offene und disjunkte Teilmengen zerlegen lässt.
$\Leftrightarrow X, \emptyset$ sind die einzigen Teilmengen, die offen und abgeschlossen sind.

Bem. Zusammenhang ist eine Invariante, also X, Y nicht homöomorph, wenn einer zusammenhängend, der andere nicht.

Bsp. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ sind nicht homöomorph.

Def **Wegzusammenhang**. Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in X$ einen Weg von a nach b gibt, d.h. eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \to X$ mit $f(0) = a$, $f(1) = b$.

Bem. Es gilt:
- Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.
- Nichtdisjunkte Vereinigungen von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind (weg-)zusammenhängend
- $X \times Y$ wegzusammenhängend $\Leftrightarrow$ X und Y jeweils wegzusammenhängend
- Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Mengen sind (weg-)zusammenhängend.

Def **Hausdorffsch**. Ein topologischer Raum X heißt *hausdorffsch*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ disjunkte Umgebungen von x und y gibt.

Bem. Jeder metrische Raum ist hausdorffsch.

Def **Kompaktheit**. Eine Menge / topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Bem. $X \neq \emptyset \neq Y$ sind kompakt $\Leftrightarrow X + Y$ kompakt $\Leftrightarrow X \times Y$ kompakt.

Bsp. Es gilt:
- Auf der diskreten Topologie gilt: X kompakt $\Leftrightarrow$ X endlich.
- Abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind kompakt.
- Alle abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ sind kompakt.
- Abgeschlossene Teilmengen von einem Kompaktum sind kompakt.

Bem. Kompaktheit erlaubt *Schlüsse von lokalen auf globale Eigenschaften*. Bspw.:
- Ist $f : X \to \mathbb{R}$ (stetig) lokal beschränkt, so auch global.
- Ist $\{A_i\}$ eine lokal endliche Überdeckung von X, so ist die Überdeckung endlich.

Satz **von Heine-Borel**. Die kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind genau die abgeschlossenen und beschränkten.

Korollar. Stetige Funktionen auf Kompakta sind beschränkt.

Korollar. X Hausdorff-Raum, $K \subseteq X$ kompakt, so K abgeschlossen in X.

Def **Limes**. (x_n) Folge in X. Dann ist $a \in X$ ist *Limes* der Folge, wenn sich in jeder Umgebung U von a fast alle Folgenglieder befinden.

Bem. In Hausdorff-Räumen sind Limiten eindeutig.

3 Mannigfaltigkeiten

Def **Topologische Mannigfaltigkeit**. Eine *topologische Manngifaltigkeit* M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, sodass jeder Punkt p aus M eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Menge von $\mathbb{R}^N$ ist. ("die lokal so aussieht wie der $\mathbb{R}^N$")

Def **Karte, Atlas**. Ein solcher Homöomorphismus $\phi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt *Karte (um p)*; ein *Atlas* von M ist eine Menge $\mathcal{A}$ von Karten von M, deren Definitionsbereiche ganz M überdecken.

Def **Kartenwechsel**. Für (U, ϕ) und (V, ψ) aus $\mathcal{A}$ heißt $\underline{\psi \circ \phi^{-1}} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ *Kartenwechsel*.

Def **glatt, maximal,** C^∞. Ein C^∞-Atlas ist ein Atlas auf M, für den alle Kartenwechsel C^∞-Diffeomorphismen sind, und er heißt *maximal*, wenn er in keinem anderen echt enthalten ist. In diesem Fall nennt man $\mathcal{A}$ auch *differenzierbare* oder *glatte Struktur* auf M und nennt M *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

Bsp. Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten:
- $\mathbb{R}^N$ und alle offenen Teilmengen
- S^1
- Produkte $M \times N$ von glatten Mannigfaltigkeiten
- $T^N := S^1 \times \cdots \times S^1$, der *N-dimensionale Torus*
- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$

Bsp **Stereographische Projektion**. Die Quotientenabbildung $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{RP}^n$ bildet die $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ surjektiv auf $\mathbb{RP}^n$ ab.
$\Leftarrow \mathbb{RP}^n$ ist kompakt als stetiges Bild eines Kompaktums.

4 Projektive Räume

Def **Projektiver Raum**. Wir definieren $\mathbb{RP}^N = P(\mathbb{R}^{N+1})$, den *n-dimensionalen reellen projektiven Raum*, als die Menge der Äquivalenzklassen von Elementen aus $\mathbb{R}^{N+1}$ unter der Äquivalenzrelation $\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : x = \lambda \cdot y$.

Satz. Der $\mathbb{RP}^N$ ist eine N-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Bem. Der $\mathbb{CP}^N = P(\mathbb{C}^{N+1})$ wird mit der gleichen Äquivalenzrelation wie oben definiert, nur dass jetzt $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Der $\mathbb{CP}^N$ ist eine *reelle* (!) $2N$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Bem **Isomorphie zur** S^N. Es gilt:
- $\mathbb{RP}^N \cong S^N/\sim$ mit $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$.
- $\mathbb{CP}^N \cong S^{2N+1}/\sim$ mit $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda \cdot y$ für $\lambda \in S^1$.

5 Vektorfelder

...

Def **Vollständiges VF**. Ein Vektorfeld X auf M hei§t *vollständig*, wenn es einen globalen Fluss Φ besitzt.

Def **Riemannsche Mf**. Eine *riemannsche Metrik* g auf einer glatten Mf M ordnet jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt $g(p) = g_p$ auf T_pM zu, sodass: für je zwei glatte VFer $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ist $g(X, Y)$ glatt, wobei $g(X, Y) := g_p(X_p, Y_p)$.
Eine *riemannsche Mannigfaltigkeit* ist eine glatte Mf mit einer riemannschen Metrik.

6 Flächen

Def **Fläche**. Eine *Fläche* ist eine glatte 2-dimensionale Mf.

Def **Orientierbarkeit**. Eine Fläche heißt *nicht orientierbar*, wenn sie eine Teilmenge enthält, die zum Möbiusband homöomorph ist.

Bsp **für nicht orientierbar**. Möbiusband; $\mathbb{RP}^2 = \{$ Geraden durch $0 \in \mathbb{R}^3$ $\}$.

Bem. Um neue Flächen zu gewinnen kann man Polygone mit gerader Kantenzahl nehmen und paarweise kanten identifizieren.

Bem **Systematisches Vorgehen**. Gehe gegen den Uhrzeigersinn die Seiten des Polygons ab und gebe jeder Seite ein Symbol, e.g. a, falls a in Durchlaufrichtung zeigt, sonst a^-1.

Bsp. $S^2 = aa^{-1}$, Donut $T^2 = aba^{-1}b^{-1}$, $\mathbb{RP}^2 = abab = aa$, Kleinsche Flasche $K^2 = aba^{-1}b^{-1}$

Def **Zusammenhängende Summe**. Schneide aus F und F' eine abgeschlossene Kreisscheibe aus, identifiziere die Ränder der Scheiben mit einem Homöomorphismus. $\Rightarrow$ Zusammenhängende Summe $F\#F'$.

Bem. $\#$ ist kommutativ, assoziativ und das neutrale Element ist S^2. $(\{F\}, \#)$ ist also eine Halbgruppe.

Bem. Entspricht F dem Zeichensatz A und F' dem Zeichensatz B, so $F\#F'$ dem Zeichensatz AB.

Bsp. $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ entspricht einer geschlossenen orientierbaren Fläche mit g Löchern.

Satz **Klassifikationssatz für Flächen**. Eine geschlossene Fläche ist entweder homöomorph zu
- S^2 oder
- einer zusammenhängenden Summe von T^2 (Tori) oder
- einer zusammenhängenden Summe von $\mathbb{RP}^2$.

Lemma. $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2 \approx K^2$ (Kleinsche Flasche).

Lemma. $3\mathbb{RP}^2 \approx T^2\#\mathbb{RP}^2$ (Kleinsche Flasche).

Def **Simplex**. $k \leq n$, $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig erzeugen den k-Simplex $\sigma = \sigma^k$ als konvexe Hülle der Punkte $v_0, \dots, v_k$.
Also $\sigma = [v_0, \dots, v_k] = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=0}^n a_iv_i \text{ mit } a_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^n a_i = 1\}$.

Bem **Dimension, Seiten, Standardsimplex**.
- k heißt die Dimension von σ^k.
- konvexe Hülle von einer Teilmenge an v_i heißt Seite.
- Seiten sind auch immer Simplizes.
- 0-dim Seite: Ecke, 1-dim Seite: Kante von σ.
- $(k-1)$-dim Seite von σ^k: Seitenfläche, Seiten von Dimension $< k$: echte Seiten
- Standardsimplex aufgespannt von $[0, e_1, \dots, e_n] =: \Delta^k$
- Simplizes tragen Teilraum-Topologie, innere Punkte liegen *nicht* auf einer echten Seite

Bsp **Simplizes**. Strecke, Dreieck, Punkt.
keine Simplizes: Strecke mit Punkt drauf, Viereck

Bem **Baryzentrische Koordinaten**. $x = \sum_{i=0}^n a_iv_i$, dann heißt $(a_0, \dots, a_k)$ baryzentrische Koordinaten von x. Baryzentrum = Schwerpunkt, a_i Masse auf v_i.
Baryzentrische Unterteilung in $(k+1)!$ kleinere Simplizes.

Def **Simplizialkomplex**. ist eine Menge $K = \{\sigma_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ von Simplizes in $\mathbb{R}^n$, wobei:
1. Die Vereinigung der Simplizes ist lokal endlich, d.h. jeder Punkt in $|K| := \cup\sigma_\lambda$ besitzt Umgebung, die nur endlich viele der σ_λ trifft.
2. Mit σ_λ enthält K auch alle Seiten von σ_λ.
3. $\sigma_{\lambda_1} \cap \sigma_{\lambda_2}$ ist entweder leer oder eine gemeinsame Seite beider Simplizes.

Für $\{\sigma_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ endlich heißt K endlicher Simplizialkomplex. $|K| in \mathbb{R}^n$ (mit Teilraum-Topologie) heißt der K zugrunde liegende topologische Raum oder zu K gehörige Polyeder;
$\dim K = \max\{\dim \sigma_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$;
$K' \subset K$ Teilkomplex als Vereinigung ausgewählter σ_λ.

Def **Triangulierbar**. Ein topologischer Raum X ist triangulierbar (Polyeder), wenn er Isomorph zu einem Simplizialkomplex K (zu dessen $|K|$) ist. K ist dann Triangulierung von X.

Bsp. $|K|$ ist natürlich triangulierbar mit Homöomorphismus $id_{|K|}$.
Tetraeder ist homöomorph zur S^2.

Bem. Ein Raum kann mehrere Triangulierungen besitzen.

Bem. Mit dem ebenen Polygonmodell sieht man, dass jede geschlossene Fläche triangulierbar ist, wenn man sie mit dem richtigen Netz aus 0-, 1-, und 2-Simplizes überdeckt.

Bem. Differenzierbare Mf sind immer triangulierbar, topologische Mf i.A. nur bis Dim 3. Dort tragen sie eine eindeutig bestimmbare differenzierbare Struktur.

Satz **Euler'scher Polyerder-Satz**. In konvexen Polyedern P gilt stets $\chi := v - e + f = 2$, wenn P v Ecken, e Kanten und f Seiten hat.

Def **Euler-Charakteristik**. Sei S eine geschlossene Fläche und $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_f\}$ eine Triangulierung von S durch f Dreiecke (2-Simplizes). Mit v als Anzahl der Ecken und e die Anzahl der Kanten von $\mathcal{T}$ ist $\chi(S, \mathcal{T}) := v - e + f$ die Euler-Charakteristik von S bezüglich $\mathcal{T}$.

Satz. $\chi(S, \mathcal{T})$ ist unabhängig von $\mathcal{T}$ und sogar unabhängig von jeder anderen polygonalen Zerlegung.

Bem. $\chi(S^2) = 2$, $\chi(T^2) = 0$, $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$

Satz. Für geschlossene Flächen S_1, S_2 gilt: $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$

Satz. $F : S_1 \to S_2$ Homöomorphismus und $\mathcal{T}$ Triangulierung von S_1, dann ist $F(\mathcal{T})$ Triangulierung von S_2.

Satz. Sind zwei geschlossene Flächen homöomorph, so besitzen sie die gleiche Euler-Charakteristik.

Bem. Umkehrung gilt nicht, bspw: $\chi(K^2) = \chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2) = 2 - 2 = 0 = \chi(T^2)$

Satz. Zwei geschlossene Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie beide (nicht) orientierbar sind und gleiche Euler-Charakteristik besitzen.

Def **Genus**. Das Geschlecht (Genus) einer geschlossenen Fläche ist $g(S) = 0.5 \times (2 - \chi(S))$ für S orientierbar, sonst $g(S) = 2 - \chi(S)$.

Bem. Im endlichen Fall ist $g(S)$ einfach die Anzahl der Löcher in S: $g(S^2) = 0$, $g(T^2) = 1$, $g(T^2 \# T^2) = 2$

7 Geometrie von Flächen

Def **Abstand auf einer Fläche im $\mathbb{R}^3$**. Das Bogenlängeintegral $\updownarrow(\gamma) := \int ||\gamma'(t)|| dt = \int \sqrt{< \gamma'(t), \gamma'(t) >}$

Def **Abstand auf einer allgemeinen Fläche**. Hier wird eine Riemann'sche Metrik auf S (genauer: TS) benötigt. Karte von TS: $\Phi \times id : U \times \mathbb{R}^2 \to \Phi(U) \times \mathbb{R}^2$, $(p, u\partial_x + v\partial_y) \mapsto (x, y, u, v)$ mit $\Phi(p) = (x, y)$.

Def **Skalarprodukt**. Ein SP auf T_pS ist eine Funktion $< \dot{;} >_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ und es ist symmetrisch, bilinear und positiv definit.

Def **Riemann'sche Metrik**. auf S ist eine Familie von Skalarprodukten auf allen Tangentialräumen T_pS von S, die glatt von p abhängt.

Bem. Matrix A beschreibt Riemann'sche Metrik, transformiert bei Koordinatenwechsel in C^tAC mit C Jacobi-Matrix des Kartenwechsels.

Bsp **Polarkoordinaten**. $x = r\sin(\phi)$, $y = r\cos(\phi)$, $u = u(x,y)$, dann $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$ mit Kettenregel. $\rightsquigarrow r\frac{\partial}{\partial r} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$

Bem. Lokal gibt es immer Riemann'sche Metrik auf einer Mannigfaltigkeit.

Def. Für $u \in T_pS$ gilt:
- Länge (Norm): $||u||_p := \sqrt{< u, u >_p}$
- Winkel: $\alpha = \arccos \frac{<u,v>_p}{||u||_p||v||_p}$
- Parallelogramm Fläche: $||u||_p||v||_p \sin\alpha$

8 Hyperbolische Geometrie

Def. Halbebene $\mathbb{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ mit Metrik $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$

Bem. Euklidische Abstände werden also vergrößert, wenn y klein ist und verkleinert, wenn y groß ist.

Bem. Isometriegruppe $Isom(\mathbb{H})$ wirkt transitiv auf $\mathbb{H}$, also zu $p = p_1 + ip_2, q = q_1 + iq_2$ gibt es Isometrie f mit $f(p) = q$. $p \mapsto \frac{q_2}{p_2}p + (q_1 - \frac{q_2}{p_2}p_1)$.

Def. Poincaré'sches Scheibenmodell $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ mit Metrik $ds^2 = 4\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$

Bem. D ist das Bild von $\mathbb{C}$ unter der konformen Abbildung $z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$.

Bem. Isometrien von $\mathbb{H}^2$
- Translation in x-Richtung: $t \in \mathbb{R}, z \mapsto z + t$
- Homothetien: $\lambda > 0, z \mapsto \lambda z$
- $z \mapsto -\frac{1}{z}$
- Möbiustransformation: $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$
- Isometriegruppe isomorph zu $SL_2(\mathbb{R})$

Alle Isometrien sind Möbiustransformationen!

Bem. Geodätische
- Abstand zwischen iy_1, iy_2: $\log(y_2) - \log(y_2)$ (Senkrechte)
- Vertikale Geradenstücke sind Geodätische
- $-\frac{1}{z}$ angewandt auf Vertikale Geraden = Halbkreis mit Zentrum auf der reellen Achse
- also alle solchen Halbkreise auch Geodätische

Def. Doppelverhältnis $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, so ist das Doppelverhältnis $(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} / \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$

Satz. Ist γ eine Gerade oder ein Kreis in $\mathbb{C}$ und f eine gebrochen-lineare Transformation, so ist $f(\gamma)$ auch eine Gerade oder ein Kreis.

Bem. Allgemeine Formel für $d(z_1, z_2)$ Mit Invarianz des Doppelverhältnisses: $d(z_1, z_2) = \log|\frac{z_1-w_1}{z_2-w_1}| - \log|\frac{z_1-w_2}{z_2-w_2}|$

9 Parametrisierungen

Def. Eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist eine glatte Untermannigfaltigkei der Dimension 2 des $\mathbb{R}^3$.

Bem. $F \subset \mathbb{R}^3$. Zu jedem Punkt von F gibt es eine Umgebung U und eine Abbildung $r : V \to \mathbb{R}^3$ von einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$, sodass
1. $r : V \to U$ ist Homöomorphismus.
2. $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ mit $x, y, z : V \to \mathbb{R}$ ist glatt.
3. $r_u := \frac{\partial r}{\partial u} = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}) = r_x\frac{\partial}{\partial u} = Dr \cdot \frac{\partial}{\partial u}$ und r_v sind linear unabhängig.

Def. Lokale Parametrisierung $r : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $r(V) \subset F$. Dabei gelten 2) und 3), 1) nicht notwending.

Bsp. Parametrisierungen
- Torus T^2: $r(u,v) = (a + b\cos u)(\cos v \cdot e_1 + \sin v \cdot e_2) + b \sin u \cdot e_3$
- Sphäre S^2: $r(u,v) = a \sin u \sin v \cdot e_1 + a \cos u \sin v \cdot e_2 + a \cos v \cdot e_3$
- Rotationsfläche: $r(u,v) = f(u)(\cos v \cdot e_1 + \sin v \cdot e_2) + u \cdot e_3$
- Zylinder: $r(u,v) = a(\cos v \cdot e_1 + \sin v \cdot e_2) + u \cdot e_3$
- Kegel: $r(u,v) = au(\cos v \cdot e_1 + \sin v \cdot e_2) + u\dot{e}_3$
- Helikorid: $r(u,v) = a\cos v \cdot e_1 + au \sin v \cdot e_1 + v \cdot e_3$ (Wendelfläche)

Bem. Kartenwechsel entspricht Umparametrisierung.

Def. Einheitsnormalenvektoren ...

Def. Glatte Kurve in F ist eine Immersion $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to F$ mit $\gamma'(t) \neq 0 \forall t$ (also nicht stehen bleiben).

Bem. r Parametrisierung von F, so ist bzgl. r eine glatte Kurve in F gegeben durch eine glatte Abbildung $t \mapsto (u(t), v(t)) \subset V$, $\gamma(t) = r(u(t), v(t)) \subset F$

Def. Erste Fundamentalform $\gamma : [a,b] \to F$ glatte Kurve bzgl r.
$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(r_u \cdot u' + r_v \cdot v')(r_u \cdot u + r_v \cdot v')} dt = \int_a^b \sqrt{E \cdot u'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt$
mit $E = r_u \cdot r_u, F = r_u \cdot r_v, G = r_v \cdot r_v$.
$I := Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ heißt erste Fundamentalform.

Bem. I ist nichts anderes als das euklidische Skalarprodukt eingeschränkt auf T_aF aufgespannt von r_u, r_v. In dieser Basis gegeben durch $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$. Also $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$!

Bem. Änderung der Parametrisierung $\begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{smallmatrix}\right)$

Bem. Flächeninhalt eines Gebiets $A(V) := \int_V |r_u \times r_v| dudv = \int_V \sqrt{EG - F^2} dudv$

Def. kurven-isometrisch Zwei Flächen heißen kurven-isometrisch, falls es einen Diffeomorphismus gibt, der Kurven auf Kurven gleicher Länge abbildet: $\ell(\gamma) = \ell(f \circ \gamma) \forall \gamma : [0,1] \to F$

Def. lokale Kurvenisometrie $f : F \to F'$, falls $\exists$ offene Teilmenge $V \subset F$, sodass $f|_V : V \to f(V)$ eine Isometrie ist.

Satz. Zwei Kartenbereiche U, U' von Flächen F, F' im $\mathbb{R}^3$ sind isometrisch genau dann, wenn $\exists$ Parametrisierungen $r : V \to U, r' : V' \to U'$, deren erste Fundamentalform übereinstimmen.

Bsp. Kegel und Ebene sind lokal isometrisch.

Def. Zweite Fundamentalform $II := -(r_u \cdot n_u \cdot du^2 + (r_u \cdot n_v + r_v \cdot n_u) dudv + r_v \cdot n_v \cdot dv^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} I(t)$
$= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ mit $L = r_{uu} \cdot n, M = r_{uv} \cdot n, N = r_v v \cdot n$

Bsp.
- Ebene: $II = 0$
- Sphäre mit Radius $a > 0$: $II = \frac{1}{a} I$

Satz. Verschwindet die zweite Fundamentalform, so ist die Fläche ein Teil der Ebene.

Def. Gauß-Krümmung ist die Funktion $K := \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det II}{\det I}$

Bsp.
- Ebene: $K = 0$
- Sphäre: $K = \frac{1}{a^2}$

Satz. Theorema Egregium $\det II$ ist durch I und ihre Ableitungen vollständig bestimmt.

Def. Geodätische Krümmung $\kappa_g := t' \cdot n \times t$ mit $t := \frac{\partial \gamma}{\partial s}$ von einer parametrisierten Kurve γ

Def. Einfach geschlossene Kurve ist eine glatte Kurve, deren Bild zu S^1 homöomorph ist.

Satz. Gauß-Bonnet I $\int_\gamma \kappa_g ds = 2\pi - \int_R K dA$, γ umschließt R.

Korollar. Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_R K dA + \int_\gamma \kappa_g ds$

Bsp. Ebene: $\kappa_g = 0, K = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$

Satz. Gauß-Bonnet II F glatte, geschlossene, orientierte Fläche, so gilt $\int_F K dA = 2\pi \cdot \chi(F)$

Bsp.
- $K(S^2) = 1 \Rightarrow \chi(S^2) = 2$
- $\chi(S^2) = 2 \Rightarrow$ Für jede Metrik auf S^2 ist $\int_{S^2} K dA = 4\pi > 0 \Rightarrow esgibtkeinenglobalenplanarenAtlas$
- $\chi(T^2) = 0 \Rightarrow$ mittlere Krümmung 0