Μέθοδοι BDF για την προσέγγιση της λύσης συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Νικόλαος Βουγιαντζής
Επιβλέπων: Γεώργιος Ζουράρης

Φεβρουάριος 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γιώργο Ζουράρη για όλη την καθοδήγηση και για όλες τις γνώσεις που μου μετέδωσε κατά την διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας, καθώς και για όλες τις ώρες που αφίερωσε προκειμένου να ολοκληρωθεί.

Περίληψη

Μετά από μια ανασκόπηση στην κατασκευή και την μελέτη συγκλισης γραμμικών πολυβηματικών μεθόδων BDF για την προσέγγιση της λύσης ενός προβλήματος αρχικών τιμών για ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, διατυπώνουμε μια μέθοδο που συνδυάζει την μέθοδο BDF2 και τη μεθοδο του τραπεζίου πάνω σε μια μη ομοιόμορφη διαμέριση του χρονικού διαστήματος. Αποδεικνύουμε ένα αποτέλεσμα σύγκλισης και προτείνουμε ένα αλγόριθμο αυτόματης επιλογής βήματος βασισμένο σε κάταλληλη προσέγγιση του τοπικού σφάλματος. Η λειτουργικότητα του προτεινόμενου αλγορίθμου επιβεβαιώνεται με μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι μέθοδοι BDF

1.1 Κατασκευή των μεθόδων BDF

Έστω $T > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$, μία συνάρτηση $f(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ και το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [0,T], \\ &y(0) = y^0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $\tau := \frac{T}{N}$ και $t_n = n\tau$ για $n = 0, ..., N$ οι κόμβοι μια ομοιόμορφης διαμέρισης του διαστήματος $[0,T]$. Έστω επίσης $P_{n,k}$ το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ k τέτοιο ώστε

$$P_{n,k}(t_{n+i}) = y(t_{n+i}), \quad i = 0, ..., k,$$

δηλαδή $P_{n,k}$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange της $y(t)$ στα $(t_{n+i})_{i=0}^k$ και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$P_{n,k}(t) = \sum_{i=0}^{k} y(t_{n+i}) L_i(t)$$

όπου

$$L_i(t) = \prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{t - t_{n+j}}{t_{n+i} - t_{n+j}} \quad i = 0, ..., k.$$

Αν στη σχέση $y'(t_{n+k}) = f(t_{n+k}, y(t_{n+k}))$ προσεγγίσουμε την $y'(t_{n+k})$ με την παράγωγο $P'_{n,k}(t_{n+k})$ του πολυωνύμου $P_{n,k}$ στο ίδιο σημείο έχουμε

$$f(t_{n+k}, y(t_{n+k})) = y'(t_{n+k}) \approx \sum_{i=0}^{k} y(t_{n+i}) L'_i(t_{n+k}), \tag{1.2}$$

όπου η παράγωγος του $L_i(t)$ είναι ιση με

$$L'_i(t) = \sum_{l=0, l\neq i}^{k} \left[\frac{1}{t_{n+i} - t_{n+l}} \prod_{j=0, j\neq i, j\neq l}^{k} \frac{t - t_{n+j}}{t_{n+i} - t_{n+j}} \right] \quad i = 0, ..., k.$$

Περίπτωση 1: $k = 1$.

Στην περίπτωση $k = 1$ χρειάζεται να υπολογίσουμε τα $L_1'(t_{n+1})$ και $L_0'(t_{n+1})$, όπου

$$L_0(t) = \frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n}, \quad L_1(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}.$$

Έτσι

$$L_0'(t_{n+1}) = \frac{1}{t_n - t_{n+1}} = -\frac{1}{\tau}, \quad L_1'(t_{n+1}) = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} = \frac{1}{\tau}.$$

Περίπτωση 2 $(k \geq 2)$

Υπολογίζουμε τώρα το $L_k'(t_{n+k})$ και το $L_i'(t_{n+k})$ για $i \neq k$ για $k \geq 2$ ξεχωριστά, έχουμε

$$\begin{aligned}
L_k'(t_{n+k}) &= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{t_{n+k} - t_{n+l}} \prod_{j=0, j\neq l}^{k-1} \frac{t_{n+k} - t_{n+j}}{t_{n+k} - t_{n+j}} \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(k-l)\tau} \prod_{j=0, j\neq l}^{k-1} \frac{(k-j)\tau}{(k-j)\tau} \\
&= \frac{1}{\tau} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k-l}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_i'(t_{n+k}) &= \sum_{l=0, l\neq i}^{k} \left[\frac{1}{t_{n+i} - t_{n+l}} \prod_{j=0, j\neq i, j\neq l}^{k} \frac{t_{n+k} - t_{n+j}}{t_{n+i} - t_{n+j}} \right] \\
&= \frac{1}{\tau} \sum_{l=0, l\neq i}^{k} \left[\frac{1}{i-l} \prod_{j=0, j\neq i, j\neq l}^{k} \frac{k-j}{i-j} \right].
\end{aligned}$$

Έτσι η (1.2) γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned}
\tau f(t_{n+k}, y(t_{n+k})) &= \tau y(t_{n+k}) L_k'(t_{n+k}) + \tau \sum_{i=0}^{k-1} y(t_{n+i}) L_i'(t_{n+k}) \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k-l} y(t_{n+k}) + \sum_{i=0}^{k-1} y(t_{n+i}) \sum_{l=0, l\neq i}^{k} \left[\frac{1}{i-l} \prod_{j=0, j\neq i, j\neq l}^{k} \frac{k-j}{i-j} \right]
\end{aligned}$$

και οδηγούμαστε στη γενική διατύπωση των γραμμικών πολυβηματικών μεθόδων τύπου BDF

$$\begin{aligned}
&Y^0, Y^1, ..., Y^{k-1} \quad \text{δεδομένα}, \\
&a_k \Upsilon^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i Y^{n+i} = \tau f(t_{n+k}, Y^{n+k}), \quad n = 0, ..., N-k.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Για $k = 1, 2, 3$ η αντίστοιχη μέθοδος BDFk προσδιορίζεται από τους συντελεστές

$$\begin{aligned}
k = 1 :& \quad \alpha_1 = 1, \, \alpha_0 = -1, \\
k = 2 :& \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}, \, \alpha_1 = -2, \, \alpha_0 = \frac{1}{2}, \\
k = 3 :& \quad \alpha_3 = \frac{11}{6}, \, \alpha_2 = -3, \, \alpha_1 = \frac{3}{2}, \, \alpha_0 = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

1.2 Μέθοδος BDF1

Η BDF1, γνωστή και ως πεπλεγμένη μέθοδος του Euler, δίνεται από τον γενικό τύπο των μεθόδων BDF (1.3) για $k = 1$, δηλαδή

$$Y^{n+1} = Y^n + \tau f(t_{n+1}, Y^{n+1}), \quad n = 0, ..., N-1. \tag{1.4}$$

1.2.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα

Πρόταση 1.2.1. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$\|f(t,v) - f(t,w)\|_\infty < \mathcal{L}\|v-w\|_\infty \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^m, \tag{1.5}$$

όπου $\|\cdot\|_\infty$ είναι η νόρμα μεγίστου του $\mathbb{R}^m$ και $\mathcal{L} \geq 0$ μια σταθερά. Όταν $\tau\mathcal{L} < 1$, τότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα των προσεγγίσεων της BDF1.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει από ένα επαγωγικό επιχείρημα.Αρχικά παρατηρούμε ότι η Y^0, ως δεδομένη, υπάρχει και είναι μοναδική.Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \{0, ..., N-1\}$, ότι η προσέγγιση Y^n υπάρχει και είναι μοναδική.Τότε, μπορούμε να δούμε την προσέγγιση Y^{n+1} ως σταθερό σημείο της απεικόνισης $F_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ με

$$F_n(x) := Y^n + \tau f(t_{n+1}, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|F_n(x) - F_n(z)\|_\infty &= \tau\|f(t_{n+1}, x) - f(t_{n+1}, z)\|_\infty \\ &\leq^{(1.5)} \tau\mathcal{L}||x-z||_\infty \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^m.\end{aligned}$$

Επειδή $\mathcal{L}\tau < 1$ συμπεραίνουμε ότι η F_n είναι συστολή στον $\mathbb{R}^m$.Τότε το θέωρημα σταθερού σημείου του Banach εξασφαλίζει ότι η F_n έχει μοναδικό σταθερό σημείο $Y \in \mathbb{R}^m$ το οποίο είναι η προσέγγιση Y^{n+1} της μεθόδου. □

Θα διατυπώσουμε στη συνέχεια ένα θεώρημα καθώς και ένα λήμμα αυτού που θα χρειαστούν για να αποδείξουμε την ύπαρξη των προσεγγίσεων.

Θεώρημα 1.2.1 (Σταθερού σημείου του Brouwer)**.** *Έστω K ένα μή-κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και $F : K \to K$ μια συνάρτηση συνεχής στο K.Αν το K είναι κυρτό,κλειστό και φραγμένο,τότε υπάρχει $x_\star \in K$ τέτοιο ώστε $F(x_\star) = x_\star$,δηλαδή η F έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο K.*

Λήμμα 1.2.2. *Έστω $(.,.)$ ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$,$||.||$ η επαγώμενη νόρμα και $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής απεικόνιση.Αν υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε $(F(x), x) \geq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}^m$ με $||x|| = a$,τότε υπάρχει $z \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $F(z) = 0$ και $||z|| \leq a$.*

Πρόταση 1.2.3. *Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί μία μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz, δηλαδή ότι υπάρχει $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$(f(t,v) - f(t,w), v-w) \leq \mathcal{L}||v-w||^2 \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^m, \tag{1.6}$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ κάποιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$ και $\|\cdot\|$ η επαγώμενη νόρμα,δηλ. $\|v\| := \sqrt{(v,v)}, v \in \mathbb{R}^m$. Όταν $\tau\mathcal{L} < 1$ οι προσεγγίσεις της BDF1 υπάρχουν και είναι μοναδικές.

Απόδειξη.
Μοναδικότητα
Θα ακολουθήσουμε ένα επαγωγικό επιχείρημα.Αρχικά παρατήρουμε ότι η προσέγγιση Y^0 υπάρχει και είναι μοναδική από τον τρόπο που έχουμε κατασκευάσει την μέθοδο.Τότε υποθέτουμε ότι οι προσέγγιση Y^k είναι επίσης μοναδική για κάποιο $k \in \{0, ..., N-1\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι και η προσέγγιση Y^{k+1} είναι επίσης μοναδική.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $W \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε

$$W = Y^k + \tau f(t_{k+1}, W)$$

Τότε χρησιμοποιώντας τον τύπο της μεθόδου (1.6) έχουμε

$$\begin{aligned} ||W - Y^{k+1}||^2 &= (W - Y^{k+1}, W - Y^{k+1}) \\ &= \tau(f(t_{k+1}, W) - f(t_{k+1}, Y^{k+1}), W - Y^{k+1}) \\ &\leq^{(1.6)} \tau\mathcal{L}||W - Y^{k+1}||^2. \end{aligned}$$

Όταν $\mathcal{L} \leq 0$, τότε έχουμε $||W - Y^{k+1}||^2 \leq 0$ το οποίο, επειδή $\tau\mathcal{L} < 1$, συνεπάγεται ότι $W = Y^{k+1}$. Όταν $\mathcal{L} > 0$ τότε παίρνουμε

$$(1 - \tau\mathcal{L})||W - Y^{k+1}||^2 \leq 0$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $||W - Y^{k+1}||^2 \leq 0$ και επομένως $W = Y^{k+1}$.
Ύπαρξη
Τώρα έχοντας το Λήμμα 1.2.2 μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη των προσεγγίσεων ακολουθώντας ένα επαγωγικό επιχείρημα. Προφανώς η Y^0 υπάρχει. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $k \in \{0, ..., N-1\}$ υπάρχει η προσέγγιση Y^k. Ορίζουμε συνεχή απεικόνιση $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ως εξης

$$F(x) := x - Y^k - \tau f(t_{k+1}, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Έστω $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}^m$ με $||x|| = a$. Τότε

$$\begin{aligned} (F(x), x) &= ||x||^2 - (Y^k, x) - \tau(f(t_{k+1}, x), x) \\ &= ||x||^2 - (Y^k, x) - \tau(f(t_{k+1}, 0), x - \tau(f(t_{k+1}, x) - f(t_{k+1}, 0), x). \end{aligned}$$

Θέτωντας $M^k := Y^k - \tau f(t_{k+1}, 0) \in \mathbb{R}^m$, τότε μέσω της (1.6) και τις ανισότητας Cauchy-Schwarz,έχουμε

$$\begin{aligned} (F(x), x) &\geq ||x||^2 - (M^k, x) - \mathcal{L}\tau||x||^2 \\ &\geq (1 - \tau\mathcal{L})||x||^2 - \|M^k\|\|x\| \\ &\geq ||x|| \left[(1 - \tau\mathcal{L}))||x|| - ||M^k||\right] \\ &\geq (1 - \tau\mathcal{L})a \left[a - \frac{||M^k||}{1 - \tau\mathcal{L}}\right]. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $a = 1 + \frac{||M^k||}{1-\tau\mathcal{L}}$,έχουμε $(F(x), x) > 0$.Τότε το Λήμμα 1.2.2 μας δίνει την ύπαρξη ενός $Y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $F(x) = 0$ το οποίο ισοδυναμεί με

$$Y = Y^k + \tau f(t_{k+1}, Y).$$

Συνεπώς μπορούμε να δούμε το Y ως την Y^{k+1} προσέγγιση της BDF1. $\square$

1.2.2 Εκτίμηση σφάλματος συνέπειας

Τα διανύσματα σφαλμάτων συνέπειας $(r^n)_{n=0}^{N-1}$ της μεθόδου ορίζονται από τη σχέση

$$r^n := y(t_{n+1}) - y(t_n) - \tau f(t_{n+1}, y(t_{n+1})), \quad n = 0, ..., N-1, \tag{1.7}$$

όπου $y(t)$ είναι η ακριβής λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών.

Πρόταση 1.2.4. *Έστω ότι $y \in C^2([0,T], \mathbb{R}^m)$, τότε*

$$||r^n||_\infty \leq \frac{1}{2}\tau^2 \sup_{[0,T]} ||y''(t)||_\infty, \text{για} \quad n = 0, ..., N-1. \tag{1.8}$$

Απόδειξη. Έστω $n \in 0, ..., N-1$ και $i \in 1, .., m$. Τότε, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor, έχουμε

$$\begin{aligned} r_i^n &= y_i(t_{n+1}) - y_i(t_n) - \tau f_i(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \\ &= y_i(t_{n+1}) - y_i(t_n) - \tau y_i'(t_{n+1}) \\ &= y_i(t_{n+1}) - \left[y_i(t_{n+1}) - \tau y_i'(t_{n+1}) + \frac{\tau^2}{2} y_i''(\xi_i^n) \right] - \tau y_i'(t_{n+1}) \\ &= -\frac{\tau^2}{2} y_i''(\xi_i^n), \quad \xi_i^n \in (t_n, t_{n+1}). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Εύκολα μπορεί τώρα κάποιος να δεί ότι η (1.9) μας δίνει την (1.8) □

1.2.3 Σύγκλιση

Πρόταση 1.2.5. *Έστω ότι $y \in C^2([0,T], \mathbb{R}^m)$, $\tau\mathcal{L} \leq \frac{1}{2}$ και*

$$\|f(t,v) - f(t,w)\|_\infty \leq \mathcal{L}\|v - w\|_\infty \quad \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^m,$$

όπου $\mathcal{L} \geq 0$ και $\|\cdot\|_\infty$ είναι η νόρμα μεγίστου στον $\mathbb{R}^m$.Τότε ισχύει ότι

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|Y^n - y(t_n)\|_\infty \leq \frac{e^{2\mathcal{L}T}}{2} \tau T \sup_{[0,T]} ||y''||_\infty$$

Απόδειξη. Έστω $(r^l)_{l=0}^{N-1}$ και $(Y^l)_{l=0}^{N}$ όπως προσδιορίζονται στις (1.4) και (1.7). Στη συνέχεια ορίζουμε $E^n := Y^n - y(t_n)$ για $n = 0, ..., N$, και χρησιμποιώντας την συνθήκη Lipschitz έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \|E^{n+1}\|_\infty &= \|E^n + \tau(f(t_{n+1}, Y^{n+1}) - f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - r^n\|_\infty \\ &\leq \|E^n\|_\infty + \tau\|f(t_{n+1}, Y^{n+1}) - f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\|_\infty + \|r^n\|_\infty \\ &\leq \|E^n\|_\infty + \tau\mathcal{L}\|E^{n+1}\|_\infty + \|r^n\|_\infty. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Επειδή $0 \leq \tau\mathcal{L} \leq \frac{1}{2}$, χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις $\frac{1}{1-x} \leq e^{2x}$ και $\frac{1}{1-x} \leq 2$,που ισχύουν για κάθε $x \in [0, \frac{1}{2}]$ η (1.10) γράφεται ισοδύναμα

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq e^{2\tau\mathcal{L}}\|E^n\|_\infty + 2\|r^n\|_\infty, \quad n = 0, ..., N-1.$$

Επαγωγικά καταλήγουμε στην σχέση

$$\|E^n\|_\infty \leq e^{2t_n\mathcal{L}}(\|E^0\|_\infty + 2\sum_{l=0}^{N-1} \|r^l\|_\infty).$$

Από κατασκευή της μεθόδου έπεται ότι $E^0 = 0$ και σύμφωνα με την (1.8) έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}\max_{0\le n\le N} \|Y^n - y(t_n)\|_\infty &\le 2e^{2\mathcal{L}T}\sum_{l=0}^{N-1}\|r^l\|_\infty \\ &\le \frac{1}{2}e^{2\mathcal{L}T}\sup_{[0,T]}||y''||_\infty \sum_{l=0}^{N-1}\tau^2 \\ &\le \frac{e^{2\mathcal{L}T}}{2}\sup_{[0,T]}||y''||_\infty \tau T.\end{aligned}$$

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη της Πρότασης, όπου μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου ως προς τ είναι ίση με 1. □

Πρόταση 1.2.6. *Η μέθοδος BDF1 ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών*

Απόδειξη. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της είναι

$$\rho(z) = a_1 z + a_0 = z - 1$$

και έχει μία απλή ρίζα

$$\rho(z) = 0 \Rightarrow z = 1,$$

για την οποία ισχύει ότι $|z| \le 1$. □

Πρόταση 1.2.7. *Έστω ότι $y \in C^2([0,T],\mathbb{R}^m)$ και υπάρχει $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$(f(t,v) - f(t,w), v - w) \le \mathcal{L}||v - w||^2 \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^m,$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$ και $\|\cdot\|$ η επαγώμενη νόρμα,δηλ. $\|v\| := \sqrt{(v,v)}, v \in \mathbb{R}^m$. Αν $\tau\mathcal{L} \le \frac{1}{2}$ τότε

$$\max_{0\le n\le N} ||Y^n - y(t_n)|| \le Ce^{2TL_\star}T\sup_{[0,T]}||y''||_\infty \tau,$$

όπου $L_\star := \max\{0,\mathcal{L}\}$ και C θετική σταθερά τέτοια ώστε

$$||v|| \le C||v||_\infty, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

Απόδειξη.
Ορίζουμε $E^n := Y^n - y(t_n)$ για $n = 0,...,N$. Έστω $(r^l)_{l=0}^{N-1}$ και $(Y^l)_{l=0}^{N}$ όπως προσδιορίζονται στις (1.4) και (1.7), τότε

$$E^{n+1} = E^n + \tau(f(t_{n+1}, y(t_{n+1}) - f(t_{n+1}, Y^{n+1})) + r^n, \quad n = 0,..,N-1 \tag{1.11}$$

Στη συνέχεια παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με το E^{n+1} και στα δύο μέλη της (1.11)

$$\|E^{n+1}\|^2 = (E^n, E^{n+1}) + \tau(f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, Y^{n+1}), E^{n+1}) + (r^n, E^{n+1}).$$

Με τη χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz και της μονόπλευρης συνθήκης Lipschitz καταλήγουμε

$$\|E^{n+1}\|^2 \le \|E^n\|\|E^{n+1}\| + \tau\mathcal{L}\|E^{n+1}\|^2 + \|r^n\|\|E^{n+1}\|$$

από την οποία έπεται η ακόλουθη

$$\|E^{n+1}\| \le \|E^n\| + \tau\mathcal{L}\|E^{n+1}\| + \|r^n\|.$$

Όταν $\mathcal{L} \leq 0$, έχουμε

$$\|E^{n+1}\| \leq \|E^n\| + 2||r^n||, \quad n = 0, ..., N-1.$$

Επαγωγικά καταλήγουμε στην

$$||E^k|| \leq ||E^0|| + 2C \sum_{l=0}^{k-1} ||r^l||_\infty, \quad k = 1, ..., N,$$

από την οποία έπεται ότι

$$\max_{0 \leq n \leq N} ||E^n|| \leq 2C \sum_{l=0}^{N-1} ||r^l||_\infty. \tag{1.12}$$

Όταν $\mathcal{L} > 0$,γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{1-\tau\mathcal{L}} \leq e^{2\tau\mathcal{L}}$ και $\frac{1}{1-\tau\mathcal{L}} \leq 2$ συνεπώς

$$\|E^{n+1}\| \leq e^{2\tau\mathcal{L}} \|E^n\| + 2\|r^n\|, \quad n = 0, ..., N-1.$$

Επαγωγικά καταλήγουμε στη σχέση

$$||E^k|| \leq e^{2\mathcal{L}t_k} \left[||E^0|| + 2C \sum_{n=0}^{k-1} \|r^n\|_\infty \right] \quad k = 1, ..., N$$

από την οποία έπεται ότι

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|E^n\| \leq 2Ce^{2\mathcal{L}T} \sum_{l=0}^{N-1} \|r^l\|_\infty. \tag{1.13}$$

Συνδυάζοντας τις (1.12), (1.13) με την Πρόταση 1.2.4 ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

1.3 Μέθοδος BDF2

Η μέθοδος BDF2 προκύπτει στην περίπτωση $k = 2$ του γενικού τύπου των μεθόδων BDF (1.3),δηλαδή

$$Y^{n+2} = \frac{4}{3} Y^{n+1} - \frac{1}{3} Y^n + \frac{2}{3} \tau f(t_{n+2}, Y^{n+2}), \quad n = 0, ..., N-2. \tag{1.14}$$

1.3.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα

Πρόταση 1.3.1. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$\|f(t, v) - f(t, w)\|_\infty \leq \mathcal{L} \|v - w\|_\infty \quad \forall\, t \in [0, T],\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^m. \tag{1.15}$$

όπου $\| \cdot \|_\infty$ είναι η νόρμα μεγίστου του $\mathbb{R}^m$ και $\mathcal{L} \geq 0$ μια σταθερά.
Εάν $\frac{2}{3}\tau\mathcal{L} < 1$ τότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα των προσεγγίσεων της BDF2.

Απόδειξη.
Έστω $n \in \{0, .., N-2\}$ και $(Y^l)_{l=0}^n$ τέτοια ώστε να ικανοποιούν τον τύπο της BDF2.
Θεωρούμε την απεικόνιση $F_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ με τύπο

$$F_n(x) = \frac{4}{3} Y^{n+1} - \frac{1}{3} Y^n + \frac{2}{3} \tau f(t_{n+2}, x), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Το Y^{n+2} μπορούμε να το δούμε ως σταθερό σημείο της $F_n(x)$.Επίσης

$$\|F_n(v) - F_n(w)\|_\infty = \frac{2}{3}\tau\|f(t_{n+2}, v) - f(t_{n+2}, w)\|_\infty \leq^{(1.15)} \frac{2}{3}\tau\mathcal{L}\|v - w\|_\infty. \qquad (1.16)$$

Η σχέση (1.16) συνεπάγεται ότι η F_n είναι συστολή υπό τη συνθήκη $\frac{2}{3}\mathcal{L}\tau < 1$ και συνεπώς υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο $Y \in \mathbb{R}^m$,σύμφωνα με το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, που είναι η προσέγγιση Υ^{n+2} $\square$

Πρόταση 1.3.2. *Ας υποθέσουμε ότι η f ικανοποιεί μία μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz, δηλαδή ότι υπάρχει $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$(f(t, v) - f(t, w), v - w) \leq \mathcal{L}\|v - w\|^2 \quad \forall\, t \in [0, T],\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^m, \qquad (1.17)$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ κάποιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$ και $\|\cdot\|$ η επαγώμενη νόρμα,δηλ. $\|v\| := \sqrt{(v, v)}, v \in \mathbb{R}^m$. Αν $\frac{2}{3}\tau\mathcal{L} < 1$,τότε οι προσεγγίσεις της BDF2 υπάρχουν και είναι μοναδικές.

Απόδειξη.

<u>Μοναδικότητα</u>

Θα ακολουθήσουμε ένα επαγωγικό επιχείρημα.Αρχικά παρατήρουμε ότι οι προσεγγίσεις Y^0, Y^1 υπάρχουν και είναι μοναδικές από τον τρόπο που έχουμε κατασκευάσει την μέθοδο.Τότε υποθέτουμε ότι οι προσεγγίσεις BDF2 Y^k, Y^{k+1} είναι επίσης μοναδικές για κάποιο $k \in 0, ..., N-2$. Αρκεί να δείξουμε ότι και η προσέγγιση Y^{k+2} είναι επίσης μοναδική.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα $W \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε να ικανοποιεί την (1.13),δηλαδή

$$W = \frac{4}{3}Y^{k+1} - \frac{1}{3}Y^k + \frac{2}{3}\tau f(t_{k+2}, W)$$

Τότε συκρίνοντας το W με το Y^{n+2} γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|W - Y^{k+2}\|^2 &= (W - Y^{k+2}, W - Y^{k+2}) \\
&= \frac{2}{3}\tau(f(t_{k+2}, W) - f(t_{k+2}, Y^{k+2}), W - Y^{k+2}) \\
&\leq^{(1.16)} \frac{2}{3}\tau\mathcal{L}\|W - Y^{k+2}\|^2.
\end{aligned}$$

Αν $\mathcal{L} \leq 0$,τότε παίρνουμε $\|W - Y^{k+2}\|^2 \leq 0$.

Αν $\mathcal{L} > 0$ τότε παίρνουμε $(1 - \frac{2}{3}\tau\mathcal{L})||W - Y^{k+2}||^2 \leq 0$, το οποίο επίσης συνεπάγεται ότι $||W - Y^{k+2}||^2 \leq 0$,εάν $\frac{2}{3}\tau\mathcal{L} \leq 1$.

Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε ότι $W = Y^{k+2}$ δηλαδή ότι Υ^{k+2} είναι μοναδική.

<u>Ύπαρξη</u>

Η ύπαρξη δίνεται μέσω του λήμματος που χρησιμοποιήσαμε και στην περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler.Θα αποδείξουμε την ύπαρξη των προσεγγίσεων ακολουθώντας ένα επαγωγικό επιχείρημα.Προφανώς οι Y^0, Y^1 υπάρχουν. Ας υποθέσουμε ότι,για κάποιο $k \in 0, ..., N-2$ υπάρχει $(Y^l)_{l=0}^k$ που ικανοποιεί την (1.14).Ορίζουμε συνεχή απεικόνιση $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ως εξης

$$F(x) := x - \frac{4}{3}Y^{k+1} + \frac{1}{3}Y^k - \frac{2}{3}\tau f(t_{k+2}, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Έστω $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}^m$ με $||x|| = a$.Τότε

$$\begin{aligned}
(F(x), x) &= \|x\|^2 - (\frac{4}{3}Y^{k+1} - \frac{1}{3}Y^k, x) - \frac{2}{3}\tau(f(t_{k+2}, x), x) \\
&= \|x\|^2 - (\frac{4}{3}Y^{k+1} - \frac{1}{3}Y^k + \frac{2}{3}f(t_{n+2}, 0), x) - \frac{2}{3}\tau[(f(t_{k+2}, x) - f(t_{k+2}, 0), x)].
\end{aligned}$$

Θέτωντας $M^k := \frac{4}{3}Y^{k+1} - \frac{1}{3}Y^k + \frac{2}{3}f(t_{n+2}, 0) \in \mathbb{R}^m$,τότε μέσω της (1.16) και τις ανισότητας Cauchy-Schwarz,έχουμε

$$\begin{aligned}(F(x), x) &\geq \|x\|^2 - (M^k, x) - \frac{2}{3}L\tau\|x\|^2 \\ &\geq (1 - \frac{2}{3}\tau\mathcal{L})\|x\|^2 - \|M^k\|\|x\| \\ &\geq \|x\|\left[(1 - \frac{2}{3}\tau\mathcal{L})\|x\| - \|M^k\|\right] \\ &\geq (1 - \frac{2}{3}\tau\mathcal{L})a[a - \frac{\|M^k\|}{1 - \frac{2}{3}\tau\mathcal{L}}].\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $a = 1 + \frac{\|M^k\|}{1-\frac{2}{3}\tau\mathcal{L}}$,έχουμε $(F(x), x) > 0$.Τότε το Λήμμα 1.2.2 μας δίνει την ύπαρξη ενός $Y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $F(Y) = 0$ το οποίο ισοδυναμεί με

$$Y = \frac{4}{3}Y^{k+1} - \frac{1}{3}Y^k + \frac{2}{3}\tau f(t_{k+2}, Y).$$

Συνεπώς μπορούμε να σκεφτούμε το Y ώς την Y^{k+2} προσέγγιση της μεθόδου BDF2. □

1.3.2 Εκτίμηση σφάλματος συνέπειας

Τα διανύσματα σφαλμάτων συνέπειας $(r^n)_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^m$ ορίζονται από τη σχέση

$$r^n := y(t_{n+2}) - \frac{4}{3}y(t_{n+1}) + \frac{1}{3}y(t_n) - \frac{2}{3}\tau f(t_{n+2}, y(t_{n+2})). \tag{1.18}$$

Όπου $n = 0, ..., N-2$ και $y(t_n)$ η τίμη στο t_n της ακριβής λύση του Π.Α.Τ.

Πρόταση 1.3.3. *Έστω ότι $y \in C^3([0, T], \mathbb{R}^m)$, τότε*

$$\|r^n\|_\infty \leq \frac{26}{9}(t_{n+1} - t_n)^3 \sup_{t \in [tn, t_{n+1}]} \|y^{(3)}(t)\|_\infty, \text{για} \quad n = 0, ..., N-2. \tag{1.19}$$

Απόδειξη. Έστω $n \in \{0, ..., N-2\}$, $i \in \{1, .., m\}$ και $\tau = t_{n+1} - t_n$.Τότε με χρήση του αναπτύγματος Taylor έχουμε

$$\begin{aligned}r_i^n &= y_i(t_{n+2}) - \frac{4}{3}y_i(t_{n+1}) + \frac{1}{3}y_i(t_n) - \frac{2}{3}\tau f_i(t_{n+2}, y_i(t_{n+2})) \\ &= y_i(t_{n+2}) - \frac{4}{3}y_i(t_{n+1}) + \frac{1}{3}y_i(t_n) - \frac{2}{3}\tau y_i'(t_{n+2}) \\ &= y_i(t_n) + (t_{n+2} - t_n)y_i'(t_n) + \frac{(t_{n+2} - t_n)^2}{2}y_i''(t_n) + \frac{(t_{n+2} - t_n)^3}{6}y_i^{(3)}(\xi_i^n) \\ &\quad - \frac{4}{3}[y_i(t_n) + (t_{n+1} - t_n)y_i'(t_n) + \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2}y_i''(t_n) + \frac{(t_{n+1} - t_n)^3}{6}y_i^{(3)}(\zeta_i^n)] \\ &\quad + \frac{1}{3}y_i(t_n) - \frac{2}{3}\tau[y_i'(t_n) + (t_{n+2} - t_n)y_i''(t_n) + \frac{(t_{n+2} - t_n)^2}{2}y_i^{(3)}(\delta_i^n)] \\ &= \frac{8}{6}\tau^3 y_i^{(3)}(\xi_i^n) - \frac{4}{18}\tau^3 y_i^{(3)}(\zeta_i^n) - \frac{8}{6}\tau^3 y_i^{(3)}(\delta_i^n) \\ &\quad \text{όπου,} \quad \xi_i^n \in [t_n, t_{n+2}], \zeta_i^n \in [t_n, t_{n+1}], \delta_i^n \in [t_n, t_{n+2}].\end{aligned} \tag{1.20}$$

Εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη την νόρμα $\|.\|_\infty$ και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα η (1.20) μας δίνει την (1.19) □

1.3.3 Σύγκλιση

Πρόταση 1.3.4. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$|f(t,v) - f(t,w)| < \mathcal{L}|v-w| \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\, v,w \in \mathbb{R} \tag{1.21}$$

όπου $\|\cdot\|_\infty$ είναι η νόρμα μεγίστου του $\mathbb{R}^m$ και $\mathcal{L} \geq 0$ μια σταθερά.
Εάν $c\mathcal{L}\tau < \frac{1}{2}$,όπου c σταθερά ώστε $\|u\|_\infty \leq c\|u\|$, τότε ισχύει

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t_n) - Y^n| \leq C_\star \left[|y(t_1) - Y^1| + \max_{[0,T]} |y^{(3)}|\tau^2 \right]. \tag{1.22}$$

όπου $C_\star$ σταθερά ανεξάρτητη του βήματος τ.

Απόδειξη. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση $m = 1$ για την απλούστευση της αποδειξης.
Έστω $(Y^n)_{n=0}^N, (y(t_n))_{n=0}^N, (r^n)_{n=0}^N$ στοιχεία του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιούν τις (1.14),(1.18).Ορίζουμε $E^n = y(t_n) - Y^n$ και τότε έχουμε

$$E^{n+2} - \frac{4}{3}E^{n+1} + \frac{1}{3}E^n = \frac{2}{3}\tau \left[f(t_{n+2}, y(t_{n+2})) - f(t_{n+2}, Y^{n+2}) \right] + r^n. \tag{1.23}$$

Αν ορίσουμε $b^n := \begin{cases} \frac{f(t_n,y(t_n)) - f(t_n,Y^n)}{y(t_n)-Y^n} & \text{για} \quad Y^n \neq y(t_n) \\ 0 & \text{για} \quad Y^n = y(t_n) \end{cases}$,τα b^n είναι φραγμένα εφόσον η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz.Προφανώς η περίπτωση $b^n = 0$ δίνει κατευθείαν $Y^n = y(t_n)$ επομένως μας ενδιαφέρει η περίπτωση $b^n \neq 0$. Η (1.23) τώρα γράφεται

$$E^{n+2} - \frac{4}{3}E^{n+1} + \frac{1}{3}E^n = \frac{2}{3}\tau b^{n+2}E^{n+2} + r^n. \tag{1.24}$$

Ορίζουμε $U^j := \begin{pmatrix} E^{j+1} \\ E^j \end{pmatrix}$,$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,$G^j := \begin{pmatrix} \tau\frac{2}{3}b^{j+2}E^{j+2} + r^j \\ 0 \end{pmatrix}$,μπορούμε τώρα να γράψουμε την (1.24) ισοδύναμα ως την διανυσματική σχέση

$$U^{n+1} = AU^n + G^n, \quad n = 0, ..., N-2.$$

Η τριγωνική ανισότητα και η ανισότητα Cauchy-Schwarz μας δίνει

$$\|U^{n+1}\| \leq \|A\|\|U^n\| + \|G^n\|. \tag{1.25}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και μπορεί να γραφεί ως $A = SDS^{-1}$, όπου S ορθογώνιος και $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ με λ_1, λ_2 να είναι οι ιδιοτιμές του A.Τελικα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Έστω $\|x\| := \|S^{-1}x\|_\infty$ μία νόρμα διανυσμάτων,η οποία είναι η ίδια που χρησιμοποιήσαμε στη (1.25),τότε η επαγώμενη νόρμα πινάκων για τον πίνακα A είναι

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|S^{-1}Ax\|_\infty}{\|S^{-1}x\|_\infty} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|DS^{-1}x\|_\infty}{\|S^{-1}x\|_\infty} = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Dy\|_\infty}{\|y\|_\infty} = \|D\|_\infty.$$

Άρα $\|A\| = \|D\|_\infty = 1$
Επιπλέον $\|G^n\| = \|S^{-1}G^n\|_\infty = |\tau b^{n+2}E^{n+2} + \frac{3}{2}r^n|$, η (1.25) τώρα γράφεται

$$\|U^{n+1}\| \leq \|U^n\| + \tau|b^{n+2}||E^{n+2}| + \frac{3}{2}|r^n|, \quad n = 0, ..., N-2$$
$$\|U^{n+1}\| \leq \|U^n\| + \tau\mathcal{L}c\|U^{n+1}\| + \frac{3}{2}|r^n|, \quad n = 0, ..., N-2.$$

όπου c σταθερά τέτοια ώστε $\|v\|_\infty \leq c\|v\|$.Εάν τωρα $c\mathcal{L}\tau \in (0, \frac{1}{2}]$ τότε γνωρίζοντας ότι για κάθε $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ισχύει $\frac{1}{1-x} \leq 2$ και $\frac{1}{1-x} \leq e^{2x}$,μας εξασφαλίζει ότι

$$\|U^{n+1}\| \leq e^{2c\mathcal{L}\tau}\|U^n\| + 3|r^n|, \quad n = 0, ..., N-2.$$

Επαγωγικά καταλήγουμε στην

$$\|U^k\| \leq e^{2c\mathcal{L}t_k}\left[\|U^0\| + 3\sum_{l=0}^{N-2}|r^l|\right] \quad k = 1, ..., N$$

Έπεται ότι

$$C\|U^n\|_\infty \leq e^{2c\mathcal{L}t_n}\left[\frac{3}{2}|E^1| + 3\sum_{l=0}^{N-2}|r^l|\right]$$
$$C|E^n| \leq e^{2c\mathcal{L}t_n}\left[\frac{3}{2}|E^1| + 3\sum_{l=0}^{N-2}|r^l|\right]$$
$$|E^n| \leq \frac{e^{2c\mathcal{L}t_n}}{C}\left[\frac{3}{2}|E^1| + 3\sum_{l=0}^{N-2}|r^l|\right] \quad n = 2, ..., N.$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.3.3 παίρνουμε την σχέση

$$|E^n| \leq \frac{e^{2c\mathcal{L}t_n}}{C}\left[\frac{3}{2}|E^1| + 3\sum_{l=0}^{N-2}\frac{26}{9}\tau^3\max_{[0,T]}|y^{(3)}|\right]$$

η οποία μας δίνει την

$$\begin{aligned}\max_{0\leq n\leq N}|y(t_n) - Y^n| &\leq \frac{e^{2c\mathcal{L}T}}{C}\left[\frac{3}{2}|E^1| + 3\frac{26}{9}\tau^2\max_{[0,T]}|y^{(3)}|\sum_{l=0}^{N-2}\tau\right]\\ &\leq \frac{e^{2c\mathcal{L}T}}{C}\left[\frac{3}{2}|y(t_1) - Y^1| + \frac{26}{3}\max_{[0,T]}|y^{(3)}|\tau^2 T\right]\\ &\leq C_\star\left[|y(t_1) - Y^1| + \max_{[0,T]}|y^{(3)}|\tau^2\right].\end{aligned}$$

Όπου $C_\star = \max\{\frac{e^{2c\mathcal{L}T}}{C}\frac{3}{2}, \frac{e^{2c\mathcal{L}T}}{C}\frac{26}{3}T\}$ σταθερά ανεξάρτητη του τ, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Πρόταση 1.3.5. *Η μέθοδος BDF2 ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών*

Απόδειξη. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της είναι

$$\rho(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}$$

και έχει 3 απλές ρίζες που δίνονται από

$$\rho(z) = 0 \Rightarrow z_1 = 1,\, z_2 = \frac{1}{3},$$

για οποίες ισχύει ότι $|z_i| \leq 1$ για $i = 1, 2$. $\square$

Πρόταση 1.3.6. *Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f ικανοποιεί μία μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz, δηλαδή ότι υπάρχει $L \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$(f(t,v) - f(t,w), v - w) \leq \mathcal{L}\|v - w\|^2 \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^m, \tag{1.26}$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ κάποιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$ και $\|\cdot\|$ η επαγώμενη νόρμα,δηλ. $\|v\| := \sqrt{(v,v)}, v \in \mathbb{R}^m$. Εάν $C\tau < \frac{1}{2}$,όπου $C = \max\{4\mathcal{L}, 3\}$, τότε για τις προσεγγίσεις της BDF2 ισχύει

$$\max_{0\leq n\leq N} \|y(t_n) - Y^n\|_\infty^2 \leq c\left(\|y(t_1) - Y^1\|_\infty^2 + \tau^4 \sup_{[0,T]} ||y^{(3)}(t)||_\infty^2\right).$$

Απόδειξη. Έστω $(Y^n)_{n=0}^N, (r^n)_{n=0}^N$ διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ όπως προσδιορίζονται στις (1.14), (1.18).Ορίζουμε $E^n = y(t_n) - Y^n$ για $n = 0, ..., N$ και έχουμε

$$E^{n+2} - \frac{4}{3}E^{n+1} + \frac{1}{3}E^n = \frac{2}{3}\tau\left[f(t_{n+2}, y(t_{n+2})) - f(t_{n+2}, Y^{n+2})\right] + r^n. \tag{1.27}$$

Γνωρίζουμε από την Πρόταση 1.3.3 ότι το σφάλμα συνέπειας r^n είναι τάξης 3 ως προς τ συνεπώς μπορούμε να γράψουμε $r^n = \tau w^n$ όπου w^n είναι τάξης 2.Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της (1.27) με το E^{n+2} έχουμε

$$\begin{aligned}\left(E^{n+2} - \frac{4}{3}E^{n+1} + \frac{1}{3}E^n, E^{n+2}\right) &= \frac{2}{3}\tau\left(f(t_{n+2}, y(t_{n+2})) - f(t_{n+2}, Y^{n+2}), E^{n+2}\right)\\ &\quad + \tau(w^n, E^{n+2})\end{aligned}$$

επίσης λαμβάνοντας υπόψη την γνωστή αλγεβρική σχέση

$$2(3a - 4b + c)a = a^2 + |2a - b|^2 - b^2 - |2b - c|^2 + |a - 2b + c|^2, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\left[\|E^{n+2}\|^2 + \|2E^{n+2} - E^{n+1}\|^2 + \|E^{n+2} - 2E^{n+1} + E^n\|^2\right] &\leq \frac{1}{6}\left[\|E^{n+1}\|^2 + \|2E^{n+1} - E^n\|^2\right]\\ &\quad + \frac{2}{3}\tau\mathcal{L}\|E^{n+2}\|^2 + \tau\|w^n\|\|E^{n+2}\|\end{aligned}$$

και από την οποία έπεται

$$\|E^{n+2}\|^2 + \|2E^{n+2} - E^{n+1}\|^2 \leq \|E^{n+1}\|^2 + \|2E^{n+1} - E^n\|^2 + 4\tau\mathcal{L}\|E^{n+2}\|^2 + 6\tau\|w^n\|\|E^{n+2}\|. \tag{1.28}$$

Ορίζουμε

$$a_n := \sqrt{\|E^{n+1}\|^2 + \|2E^{n+1} - E^n\|^2}, \quad n = 0, ..., N-1$$

και παρατηρούμε ότι $\|E^{n+1}\|^2 \leq a_{n+1}^2$. Επίσης γνωρίζουμε ότι για οποιονδήποτε συνδιασμό αριθμών $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει πάντα $(x-y)^2 \geq 0$ δηλαδή $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$. Μπορούμε τώρα να δούμε ότι η (1.28) γίνεται

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}^2 &\leq a_n^2 + 4\tau\mathcal{L}a_{n+1}^2 + 6\tau\frac{\|w^n\|^2 + \|E^{n+1}\|^2}{2} \\
&\leq a_n^2 + 4\tau\mathcal{L}a_{n+1}^2 + 3\tau\|w^n\|^2 + 3\tau a_{n+1}^2
\end{aligned}
$$

από την οποία καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$(1 - C\tau)a_{n+1}^2 \leq a_n^2 + 3\tau\|w^n\|^2. \tag{1.29}$$

όπου $C = \max\{4\mathcal{L}, 3\}$. Επειδή $C\tau \leq \frac{1}{2}$ και χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις, $\frac{1}{1-x} \leq e^{2x}$ και $\frac{1}{1-x} \leq 2$,που ισχύουν για κάθε $x \in [0, \frac{1}{2}]$ η (1.29) γράφεται ισοδύναμα

$$a_{n+1}^2 \leq e^{2C\tau}(a_n^2 + 3\tau\|w^n\|^2). \tag{1.30}$$

Επαγωγικά η (1.30) μας δίνει

$$
\begin{aligned}
a_n^2 &\leq e^{2CT}(a_0^2 + 3\tau\sum_{l=0}^{N-2}\|w^n\|^2) \\
a_n^2 &\leq e^{2CT}(a_0^2 + 3C_1^2\tau\sum_{l=0}^{N-2}\frac{\|r^n\|_\infty^2}{\tau^2}).
\end{aligned}
$$

Θυμόμαστε τώρα και το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.3.3

$$
\begin{aligned}
a_n^2 &\leq e^{2CT}\left(a_0^2 + 3C_1^2\tau\sum_{l=0}^{N-2}\frac{\left(\frac{26}{9}\tau^3\sup_{[t_n,t_{n+1}]}||y^{(3)}(t)||_\infty\right)^2}{\tau^2}\right) \\
&\leq e^{2CT}\left(a_0^2 + 3C_1^2\tau\sup_{[0,T]}||y^{(3)}(t)||_\infty^2\left(\frac{26}{9}\right)^2\sum_{l=0}^{N-2}\tau^4\right) \\
&\leq e^{2CT}\left(a_0^2 + 3C_1^2\tau^4 T\sup_{[0,T]}||y^{(3)}(t)||_\infty^2\left(\frac{26}{9}\right)^2\right) \\
&\leq e^{2CT}C_1^2\left(2\|E^1\|_\infty + 3T\left(\frac{26}{9}\right)^2\tau^4\sup_{[0,T]}||y^{(3)}(t)||_\infty^2\right)
\end{aligned}
$$

από την οποία τελικά έχουμε

$$\max_{0\leq n\leq N-1}\|y(t_{n+1}) - Y^{n+1}\|_\infty^2 \leq c\left(\|y(t_{n+1}) - Y^1\|_\infty^2 + \tau^4\sup_{[0,T]}||y^{(3)}(t)||_\infty^2\right).$$

Προφανώς η σταθερά c είναι ανεξάρτητη του τ. Η τάξη του σφάλαματος στο τετράγωνο όπως φαίνεται είναι 4 ως προς τ,επομένως η τάξη του σφάλματος είναι 2. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

1.4 Μέθοδος BDF3

Η μέθοδος BDF3 προκύπτει στην περίπτωση $k = 3$ του γενικού τύπου των μεθόδων BDF (1.4),δηλαδή

$$Y^{n+3} = \frac{18}{11}Y^{n+2} - \frac{9}{11}Y^{n+1} + \frac{2}{11}Y^n + \frac{6}{11}\tau f(t_{n+3}, Y^{n+3}), \quad n = 0, ..., N-3. \tag{1.31}$$

1.4.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα

Πρόταση 1.4.1. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$\|f(t,v)-f(t,w)\|_\infty < \mathcal{L}\|v-w\|_\infty \quad \forall\, t\in[0,T],\ \forall\, v,w\in\mathbb{R}^m, \tag{1.32}$$

όπου $\|\cdot\|_\infty$ *είναι η νόρμα μεγίστου του* $\mathbb{R}^m$ *και* $\mathcal{L}\geq 0$ *μια σταθερά.*
Εάν $\frac{6}{11}\tau\mathcal{L}<1$ *,τότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα των προσεγγίσεων της BDF3.*

Απόδειξη. Έστω $n\in\{0,..,N-3\}$ και $(Y^l)_{l=0}^n$ τέτοια ώστε να ικανοποιούν τον τύπο της BDF3. Θεωρούμε την απεικόνιση $F_n:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ με τύπο

$$F_n(x)=\frac{18}{11}Y^{n+2}-\frac{9}{11}Y^{n+1}+\frac{2}{11}Y^n+\frac{6}{11}\tau f(t_{n+3},x),\quad x\in\mathbb{R}^m.$$

Το Y^{n+3} μπορούμε να το δούμε ως σταθερό σημείο της $F_n(x)$.Επίσης

$$\|F_n(v)-F_n(w)\|_\infty=\frac{6}{11}\tau\|f(t_{n+3},v)-f(t_{n+3},w)\|_\infty \leq^{(1.29)} \frac{6}{11}\tau\mathcal{L}\|v-w\|_\infty. \tag{1.33}$$

Η σχέση (1.33) συνεπάγεται ότι η F_n είναι συστολή υπό τη συνθήκη $\frac{6}{11}\mathcal{L}\tau<1$ και συνεπώς υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο $Y\in\mathbb{R}^m$,σύμφωνα με το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, που μπορούμε να το δούμε ως την προσέγγιση Υ^{n+3} □

1.4.2 Εκτίμηση σφάλματος συνέπειας

Τα διανύσματα σφαλμάτων συνέπειας $(r^n)_{n=0}^{N-1}\in\mathbb{R}^m$ ορίζονται από τη σχέση

$$r^n := y(t_{n+3})-\frac{18}{11}y(t_{n+2})+\frac{9}{11}y(t_{n+1})-\frac{2}{11}y(t_n)-\frac{6}{11}\tau f(t_{n+3},y(t_{n+3})). \tag{1.34}$$

Όπου $n=0,...,N-3$ και $y(t_n)$ η τίμη στο t_n της ακριβής λύσης του Π.Α.Τ.

Πρόταση 1.4.2. *Έστω ότι* $y\in C^4([0,T],\mathbb{R}^m)$*, τότε*

$$||r^n||_\infty \leq \frac{657}{88}(t_{n+1}-t_n)^4\sup_{[0,T]}\|y^{(4)}\|_\infty, \gamma\iota\alpha \quad n=0,...,N-3. \tag{1.35}$$

Απόδειξη. Αναπτύσοντας με τον τύπο του Taylor στο σημείο t_n προκύπτει

$$\begin{aligned}
r_i^n &= y_i(t_{n+3})-\frac{18}{11}y_i(t_{n+2})+\frac{9}{11}y_i(t_{n+1})-\frac{2}{11}y_i(t_n)-\frac{6}{11}\tau y_i'(t_{n+3}) \Rightarrow\\
r_i^n &= [y_i(t_n)-3\tau y_i'(t_n)+\frac{9\tau^2}{2!}y_i''(t_n)+\frac{27\tau^3}{3!}y_i^{(3)}(t_n)+\frac{81\tau^4}{4!}y_i^{(4)}(\zeta_i^n)]\\
&\quad -\frac{18}{11}[y_i(t_n)-2\tau y_i'(t_n)+\frac{4\tau^2}{2!}y_i''(t_n)+\frac{8\tau^3}{3!}y_i^{(3)}(t_n)+\frac{16\tau^4}{4!}y_i^{(4)}(\xi_i^n)]\\
&\quad +\frac{9}{11}[y_i(t_n)-\tau y_i'(t_n)+\frac{\tau^2}{2!}y_i''(t_n)+\frac{\tau^3}{3!}y_i^{(3)}(t_n)+\frac{\tau^4}{4!}y_i^{(4)}(\phi_i^n)]\\
&\quad -\frac{2}{11}y_i(t_n)-\frac{6}{11}\tau[y_i'(t_n)-3\tau y_i''(t_n)+\frac{9\tau^2}{2!}y_i^{(3)}(t_n)+\frac{27\tau}{3!}y_i^{(4)}(\omega_i^n)] \Rightarrow\\
r_i^n &= \frac{27\tau^4}{8}y_i^{(4)}(\zeta_i^n)-\frac{12\tau^4}{11}y_i^{(4)}(\xi_i^n)-\frac{27\tau^4}{11}y_i^{(4)}(\omega_i^n)+\frac{6}{11}\tau^4y_i^{(4)}(\phi_i^n).
\end{aligned}$$

Όπου $\zeta\in[t_n,t_{n+3}],\xi\in[t_n,t_{n+2}],\phi\in[t_n,t_{n+1}],\omega\in[t_n,t_{n+3}]$
Συνεπώς η μέθοδος είναι τάξης 3 και εφαρμόζοντας την νόρμα $\|.\|_\infty$ και στα 2 μέλη έχουμε την (1.35) □

1.4.3 Σύγκλιση

Πρόταση 1.4.3. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$|f(t,v)-f(t,w)| < \mathcal{L}|v-w| \quad \forall\, t\in[0,T],\ \forall\, v,w\in\mathbb{R}, \tag{1.36}$$

όπου $\mathcal{L}\geq 0$ σταθερά.
Εαν $C_2\tau\mathcal{L}<1$ τότε για τις προσεγγίσεις BDF3 ισχύει

$$\max_{0\leq n\leq N}|y(t_n)-Y^n| \leq e^{2C_2TL}\left[\sum_{i=0}^{2}|y(t_i)-Y^i| + 3\frac{609}{88}\frac{C_1}{C_3}\tau^3 T\sup_{[0,T]}|y^{(4)}|\right], \tag{1.37}$$

όπου C_1,C_2,C_3 σταθερές που προκύπτουν από την ισοδυναμία νορμών στον $\mathbb{R}^m$

Απόδειξη. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση $m=1$ για την απλούστευση της απόδειξης.
Έστω $(Y^n)_{n=0}^N$,$(r^n)_{n=0}^N$ διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ όπως προσδιορίζονται στις (1.34), (1.31).Ορίζουμε $E^n = y(t_n)-Y^n$ και έχουμε

$$E^{n+3}-\frac{18}{11}E^{n+2}+\frac{9}{11}E^{n+1}-\frac{2}{11}E^n = \frac{6}{11}\tau\left[f(t_{n+3},y(t_{n+3}))-f(t_{n+3},Y^{n+3})\right]+r^n \tag{1.38}$$

Αν ορίσουμε $b^n := \begin{cases} \frac{f(t_n,y(t_n))-f(t_n,Y^n)}{y(t_n)-Y^n} & \text{για} \quad Y^n\neq y(t_n) \\ 0 & \text{για} \quad Y^n = y(t_n)\end{cases}$,τα b^n είναι φραγμένα από $\mathcal{L}$ εφόσον η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz.Προφανώς η περίπτωση $b^n=0$ δίνει κατευθείαν $Y^n=y(t_n)$ επομένως μας ενδιαφέρει η περίπτωση $b^n\neq 0$. Η (1.38) τώρα γράφεται

$$E^{n+3}-\frac{18}{11}E^{n+2}+\frac{9}{11}E^{n+1}-\frac{2}{11}E^n = \frac{6}{11}\tau b^{n+3}E^{n+3}+r^n \tag{1.39}$$

Ορίζουμε $U^j := \begin{pmatrix} E^{j+2}\\ E^{j+1}\\ E^j\end{pmatrix}$,$A=\begin{pmatrix}\frac{18}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{2}{11}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$,$G^j := \begin{pmatrix}\tau\frac{6}{11}b^{j+3}E^{j+3}+r^j\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$,μπορούμε τώρα να γράφουμε την (1.39) ισοδύναμα ως την διανυσματική σχέση

$$U^{n+1} = AU^n + G^n, \quad n=0,...,N-3$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\|U^{n+1}\| \leq \|A\|\|U^n\| + \|G^n\| \tag{1.40}$$

Γνωρίζουμε τώρα ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας J ώστε ο A να είναι όμοιος του δηλαδή να ισχύει $J=T^{-1}AT$, όπου J η κανονική μορφή Jordan του A.Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{7}{22}+i\frac{\sqrt{39}}{22},\lambda_3=\frac{7}{22}-i\frac{\sqrt{39}}{22}$ και είναι και οι τρείς απλές ρίζες συνεπώς ο J είναι της μορφής

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

Εύκολα τώρα μπορούμε να δούμε ότι $\|J\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 3}\{|\lambda_i|\}=1$
Έστω $\|x\| := \|T^{-1}x\|_\infty$ μία νόρμα διανυσμάτων,η οποία είναι η ίδια που χρησιμοποιήσαμε στη (1.40),τότε η επαγώμενη νόρμα πινάκων για τον πίνακα A είναι

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|T^{-1}Ax\|_\infty}{\|T^{-1}x\|_\infty} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|JT^{-1}x\|_\infty}{\|T^{-1}x\|_\infty} = \sup_{y\neq 0}\frac{\|Jy\|_\infty}{\|y\|_\infty} = \|J\|_\infty$$

Άρα $\|A\| = \|J\|_\infty = 1$
Επιπλέον

$$\|G^n\| \leq C_1 \|G^n\|_\infty \leq C_1 \frac{6\tau}{11} \mathcal{L} |E^{n+3}| + C_1 |r^n|,$$

η (1.40) τώρα γράφεται

$$\begin{aligned}
\|U^{n+1}\| &\leq \|U^n\| + C_1 \frac{6\tau}{11} \mathcal{L} |E^{n+3}| + C_1 |r^n| \\
&\leq \|U^n\| + C_2 \tau \mathcal{L} \|U^{n+1}\| + C_1 |r^n| \\
&\leq \frac{1}{1 - C_2 \tau \mathcal{L}} \left(\|U^n\| + C_1 |r^n| \right).
\end{aligned}$$

όπου C_1, C_2 σταθερές που προκύπτουν από την ισοδυναμία νορμών.Εάν τώρα $C_2 \tau L \in (0, \frac{1}{2}]$ και το γεγονός ότι για κάθε $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ισχύει $\frac{1}{1-x} \leq 2$ και $\frac{1}{1-x} \leq e^{2x}$,μας εξασφαλίζει ότι

$$\|U^{n+1}\| \leq e^{2\tau C_2 L} \|U^n\| + 2C_1 |r^n|$$

Επαγωγικά καταλήγουμε στην

$$\|U^k\| \leq e^{2C_2 t_k \mathcal{L}} \left[\|U^0\| + 2C_1 \sum_{l=0}^{k-3} |r^l| \right], \quad k = 3, ..., N$$

η οποία έπεται οτι

$$\begin{aligned}
C_3 \|U^n\|_\infty &\leq e^{2C_2 t_n \mathcal{L}} \left[C_3 \|U^0\|_\infty + 2C_1 \sum_{l=0}^{N-3} |r^l| \right] \\
\Rightarrow |E^n| &\leq e^{2C_2 t_n \mathcal{L}} \left[|E^0| + |E^1| + |E^2| + 3 \frac{C_1}{C_3} \sum_{l=0}^{N-3} |r^l| \right].
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.3.3 καταλήγουμε στην

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - Y^n| \leq e^{2C_2 T L} \left[\sum_{i=0}^{2} |y(t_i) - Y^i| + 3 \frac{609}{88} \frac{C_1}{C_3} \tau^3 T \sup_{[0,T]} |y^{(4)}| \right].$$

Επομένως η μέθοδος συγκλίνει και έχει τάξη σύγκλισης 3 □

Πρόταση 1.4.4. *Η μέθοδος BDF3 ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών*

Απόδειξη. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της είναι

$$\rho(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = z^3 - \frac{18}{11} z^2 + \frac{9}{11} z - \frac{2}{11}$$

και έχει 3 απλές ρίζες που δίνονται από

$$\rho(z) = 0 \Rightarrow z_1 = 1,\ z_{2,3} = \frac{7}{22} \pm i \frac{\sqrt{39}}{22},$$

για τις οποίες ισχύει ότι $|z_i| \leq 1$ για $i = 1, 2, 3$. □

Κεφάλαιο 2

Η μέθοδος του τραπεζίου

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.1), αν ολοκληρώσουμε το σύστημα στο διάστημα $[t_n, t_{n+1}]$ έχουμε

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \Rightarrow y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

Αν τώρα προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με τον τύπου του τραπεζίου οδηγούμαστε στην μέθοδο

$$\begin{cases} Y^0 = y(t_0) \\ Y^{n+1} = Y^n + \frac{\tau}{2}\left[f(t_n, Y^n) + f(t_{n+1}, Y^{n+1})\right], \quad n = 0, ..., N-1. \end{cases} \tag{2.1}$$

όπου $\tau_n = t_{n+1} - t_n$.

2.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα

Πρόταση 2.1.1. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$||f(t, v) - f(t, w)||_\infty \leq \mathcal{L}||v - w||_\infty \quad \forall\, t \in [0, T],\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^m, \tag{2.2}$$

όπου $||.||_\infty$ είναι η νόρμα μεγίστου του $\mathbb{R}^m$ και $\mathcal{L} \geq 0$ μια σταθερά.
Εαν $\frac{\tau\mathcal{L}}{2} < 1, \quad n \in \{0, 1, ..., N-1\}$ τότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα των προσεγγίσεων της μεθόδου του τραπεζίου.

Απόδειξη.
Έστω $n \in \{0, .., N-1\}$ και $(Y^l)_{l=0}^n$ τέτοια ώστε να ικανοποιούν τον τύπο της μεθόδου του τραπεζίου. Θεωρούμε την απεικόνιση $F_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ με τύπο

$$F_n(x) = \Upsilon^n + \frac{\tau_n}{2}\left[f(t_n, Y^n) + f(t_{n+1}, x)\right], \quad x \in \mathbb{R}^m$$

Το Y^{n+1} μπορούμε να το δούμε ως σταθερό σημείο της $F_n(x)$.Επίσης

$$||F_n(v) - F_n(w)||_\infty = \frac{\tau_n}{2}||f(t_{n+1}, v) - f(t_{n+1}, w)||_\infty \overset{(2.2)}{\leq} \frac{\tau_n}{2}\mathcal{L}||v - w||_\infty \tag{2.3}$$

Η σχέση (2.3) συνεπάγεται ότι η F_n είναι συστολή υπό τη συνθήκη $\frac{\mathcal{L}\tau_n}{2} < 1$ και συνεπώς υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο το $Y \in \mathbb{R}^m$,σύμφωνα με το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, που μπορούμε να το σκεφτούμε ως την προσέγγιση Υ^{n+1}. □

2.2 Εκτίμηση σφάλματος συνέπειας

Τα διανύσματα σφαλμάτων συνέπειας $(w^n)_{n=0}^{N-1}$ της μεθόδου ορίζονται από τη σχέση

$$w^n := y(t_{n+1}) - y(t_n) - (t_{n+1} - t_n)[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] \tag{2.4}$$

Όπου $n = 0, ..., N-1$ και $y(t_n)$ είναι τιμή στο t_n της ακριβής λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω ότι $y \in C^3([0,T], \mathbb{R}^m)$, τότε*

$$||w^n||_\infty \leq \frac{5}{12}(t_{n+1} - t_n)^3 \sup_{[0,T]} ||y^{(3)}(t)||_\infty, \qquad n = 0, ..., N-1 \tag{2.5}$$

Απόδειξη.
Έστω $n \in \{0, ..., N-1\}$.Τότε με χρήση του αναπτύγματος Taylor έπεται ότι

$$\begin{aligned}
w_i^n &= y_i(t_{n+1}) - y_i(t_n) - (t_{n+1} - t_n)[f(t_n, y_i(t_n)) + f(t_{n+1}, y_i(t_{n+1}))] \\
&= y_i(t_{n+1}) - y_i(t_n) - \tau_n[y'(t_n) + y'(t_{n+1})] \\
&= y_i(t_n) + \tau_n y_i'(t_n) + \frac{\tau_n^2}{2} y_i''(t_n) + \frac{\tau_n^3}{6} y^{(3)}(\xi_i^n) \\
&\quad - y_i(t_n) - \frac{\tau_n}{2}[y_i'(t_n) + y_i'(t_n) + \tau_n y_i''(t_n) + \frac{\tau_n^2}{2} y_i^{(3)}(\zeta_i^n)] \\
&= \frac{\tau_n^3}{6} y^{(3)}(\xi_i^n) - \frac{\tau_n^3}{4} y^{(3)}(\zeta_i^n)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Όπου $\xi_i^n, \zeta_i^n \in [t_n, t_{n+1}]$
Εφαρμόζουμε την νόρμα $\|.\|_\infty$ και καταλήγουμε στην (2.5). □

2.3 Σύγκλιση

Πρόταση 2.3.1. *Έστω ότι $y \in C^3([0,T], \mathbb{R}^m)$ και ότι*

$$\|f(t,v) - f(t,w)\|_\infty \leq \mathcal{L}\|v - w\|_\infty \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^m,$$

όπου $\mathcal{L} \geq 0$ και $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα μεγίστου στον $\mathbb{R}^m$.Εαν $\tau = \max_{0 \leq n \leq N}(t_{n+1} - t_n)$ και $\tau\mathcal{L} \leq \frac{1}{2}$ τότε ισχύει ότι

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|Y^n - y(t_n)\|_\infty \leq e^{2LT} \frac{5}{6} \tau^2 T \sup_{[0,T]} \|y^{(3)}\|_\infty$$

Απόδειξη.
Έστω $(w^n)_{l=0}^N, (Y^n)_{l=0}^N, (y(t_n))_{l=0}^N$ ώστε να ικανοποιούν τις (2.4), (2.1).Ορίζουμε $E^n := Y^n - y(t_n)$ και τότε έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\|E^{n+1}\|_\infty &= \|E^n + \frac{\tau_n}{2}[f(t_n, Y^n) + (f(t_{n+1}, Y^{n+1}) - f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_n, y(t_n))] - w^n\|_\infty \\
&\leq \|E^n\|_\infty + \frac{\tau_n}{2}\|f(t_{n+1}, Y^{n+1}) - f(t_{n+1}, y(t_{n+1})\|_\infty + \frac{\tau_n}{2}\|f(t_n, Y^n) - f(t_n, y(t_n)\|_\infty + \|w^n\|_\infty \\
&\leq \|E^n\|_\infty + \frac{\tau_n\mathcal{L}}{2}\|E^{n+1}\|_\infty + \frac{\tau_n\mathcal{L}}{2}\|E^n\|_\infty + \|w^n\|_\infty \\
&\leq \frac{1 + \frac{\tau_n\mathcal{L}}{2}}{1 - \frac{\tau_n\mathcal{L}}{2}}\|E^n\|_\infty + \frac{1}{1 - \frac{\tau_n\mathcal{L}}{2}}\|w^n\|_\infty
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Εφόσον $0 \leq \frac{\tau L}{2} \leq \frac{1}{2}$ και χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις, $\frac{1}{1-x} \leq e^{2x}$, $1+x \leq e^x$ και $\frac{1}{1-x} \leq 2$, που ισχύουν για κάθε $x \in [0, \frac{1}{2}]$ η (2.7) γράφεται ισοδύναμα

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq e^{\tau_n \mathcal{L}} e^{\frac{\tau_n \mathcal{L}}{2}} \|E^n\|_\infty + 2\|w^n\|_\infty, \quad n = 0, ..., N-1$$

Επαγωγικά καταλήγουμε στην σχέση

$$\begin{aligned}\|E^n\|_\infty &\leq e^{\frac{3t_n\mathcal{L}}{2}} (\|E^0\|_\infty + 2\sum_{l=0}^{N-1} \|w^l{}_\infty|) \\ &\leq e^{\frac{3t_n\mathcal{L}}{2}} (\|E^0\| + 2\sum_{l=0}^{N-1} \|w^l\|_\infty) \Rightarrow\end{aligned}$$

Από κατασκευή της μεθόδου έπεται $E^0 = 0$ και σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.1, έχουμε

$$\begin{aligned}\max_{0\leq n\leq N} \|Y^n - y(t_n)\|_\infty &\leq 2e^{2\mathcal{L}T} \sum_{l=0}^{N-1} \|w^l\|_\infty \\ &\leq e^{2\mathcal{L}T} \frac{5}{6}\tau^2 T \sup_{[0,T]} \|y^{(3)}\|_\infty\end{aligned}$$

και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της Πρότασης 2.3.1,όπως μπορούμε να δούμε η τάξη σύγκλισης της μεθόδου ως προς τ είναι ίση με 2. □

Πρόταση 2.3.2. *Η μέθοδος τραπεζίου ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών*

Απόδειξη. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της είναι

$$\rho(z) = a_1 z + a_0 = z - 1$$

και έχει 1 απλή ρίζα που δίνεται από

$$\rho(z) = 0 \Rightarrow z = 1,$$

για την οποία ισχύει ότι $|z| \leq 1$. □

Κεφάλαιο 3

Συνδυασμός των μεθόδων BDF2 και Τραπεζίου

3.1 Περιγραφή της μεθόδου

Έστω $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ και μια διαμέριση του $[0, T]$ με κόμβους t_n,$n = 0, ..., N-1$. Σε κάθε διάστημα $[t_n, t_{n+1}]$ θέλουμε να εφαρμόσουμε ένα συνδυασμό της BDF2 και της μεθόδου του τραπεζίου,χωρίζουμε κάθε τέτοιο διάστημα σε 4 ίσα υποδιαστήματα και κάνουμε 3 ενδιάμεσα βήματα πρωτού φτάσουμε στο t_{n+1}. Εφαρμόζουμε τα παρακάτω βήματα

Βήμα 0: $U^0 = y_0$
Βήμα 1: Για $n = 0, .., N-1$ υπολογίζουμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις

$$\begin{aligned}
U^{n+\frac{1}{4}} &= U^n + \frac{\tau_n}{8}\Big[f(t_n, U^n) + f(t_{n+\frac{1}{4}}, U^{n+\frac{1}{4}})\Big] \\
U^{n+\frac{2}{4}} &= \frac{4}{3}U^{n+\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}U^n + \frac{\tau_n}{6}f(t_{n+1}, U^{n+\frac{2}{4}}) \\
U^{n+\frac{3}{4}} &= U^{n+\frac{2}{4}} + \frac{\tau_n}{8}\Big[f(t_{n+\frac{2}{4}}, U^{n+\frac{2}{4}}) + f(t_{n+\frac{3}{4}}, U^{n+\frac{3}{4}})\Big] \\
U^{n+1} &= \frac{4}{3}U^{n+\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}U^{n+\frac{2}{4}} + \frac{\tau_n}{6}f(t_{n+1}, U^{n+1}).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2 Σύγκλιση

Πρόταση 3.2.1. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$\|f(t, v) - f(t, w)\|_\infty \le \mathcal{L}\|v - w\|_\infty \quad \forall\, t \in [0, T],\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^m, \tag{3.2}$$

όπου $\|\cdot\|_\infty$ *είναι η νόρμα μεγίστου του* $\mathbb{R}^m$ *και* $\mathcal{L} \ge 0$ *μια σταθερά.Εαν* $\frac{1}{6}\tau L < \frac{1}{2}$, *τότε για τις προσεγγίσεις της μεθόδου (3.1) ισχύει*

$$\max_{0\le n\le N}\|y(t_n) - U^n\|_\infty \le 48e^{8T\mathcal{L}}T\tau^2 \sup_{[0,T]}\|y^{(3)}\|_\infty \tag{3.3}$$

όπου $\tau = \max_{0\le n\le N-1}(t_{n+1} - t_n)$.

Απόδειξη. Έστω $E^n = y(t_n) - U^n$ με $y(t)$ να είναι η ακριβής λύση και U^n οι προσεγγίσεις της μεθόδου (3.1).Επιπλέον ορίζουμε $E^{n+\frac{1}{4}} = y(t_{n+\frac{1}{4}}) - U^{n+\frac{1}{4}}$, $E^{n+\frac{2}{4}} = y(t_{n+\frac{2}{4}}) - U^{n+\frac{2}{4}}$, $E^{n+\frac{3}{4}} = y(t_{n+\frac{3}{4}}) - U^{n+\frac{3}{4}}$

για $n=0,...,N-1$.Αν τώρα αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις (3.1) την ακριβή λύση του Π.Α.Τ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= \frac{4}{3}y(t_{n+\frac{3}{4}}) - \frac{1}{3}y(t_{n+\frac{2}{4}}) + \frac{2}{3}\frac{\tau_n}{4}f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + r_2^n \\ y(t_{n+\frac{3}{4}}) &= y(t_{n+\frac{2}{4}}) + \frac{\tau_n}{8}\left[f(t_{n+\frac{2}{4}}, y(t_{n+\frac{2}{4}})) + f(t_{n+\frac{3}{4}}, y(t_{n+\frac{3}{4}}))\right] w_2^n \\ y(t_{n+\frac{2}{4}}) &= \frac{4}{3}y(t_{n+\frac{1}{4}}) - \frac{1}{3}y(t_n) + \frac{2}{3}\frac{\tau_n}{4}f(t_{n+1}, y(t_{n+\frac{2}{4}})) + r_1^n \\ y(t_{n+\frac{1}{4}}) &= y(t_n) + \frac{\tau_n}{8}\left[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+\frac{1}{4}}, y(t_{n+\frac{1}{4}}))\right] + w_1^n \end{aligned} \tag{3.4}$$

όπου $(r_2^n)_{n=0}^N$ τα σφάλματα συνέπειας της BDF2 στο t_{n+1}, $(r_1^n)_{n=0}^N$ τα σφάλματα συνέπειας της BDF2 στο $t_{n+\frac{2}{4}}$, $(w_2^n)_{n=0}^N$ τα σφάλματα συνέπειας της μεθόδου του τραπεζίου στο $t_{n+\frac{3}{4}}$ και $(w_1^n)_{n=0}^N$ τα σφάλματα συνέπειας της μεθόδου του τραπεζίου στο $t_{n+\frac{1}{4}}$.
Αφαιρώντας τις (3.1) από τις (3.4) καταλήγουμε στις εξισώσεις σφαλμάτων

$$E^{n+1} = \frac{4}{3}E^{n+\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}E^{n+\frac{2}{4}} + \frac{\tau_n}{6}[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, U^{n+1})] + r_2^n \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} E^{n+\frac{3}{4}} =& E^{n+\frac{2}{4}} + \frac{\tau_n}{8}\Big[f(t_{n+\frac{2}{4}}, y(t_{n+\frac{2}{4}})) + f(t_{n+\frac{3}{4}}, y(t_{n+\frac{3}{4}})) \\ & -f(t_{n+\frac{2}{4}}, U^{n+\frac{2}{4}}) - f(t_{n+\frac{3}{4}}, U^{n+\frac{3}{4}})\Big] + w_2^n \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$E^{n+\frac{2}{4}} = \frac{4}{3}E^{n+\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}E^n + \frac{\tau_n}{6}[f(t_{n+1}, y(t_{n+\frac{2}{4}})) - f(t_{n+1}, U^{n+\frac{2}{4}})] + r_1^n \tag{3.7}$$

$$E^{n+\frac{1}{4}} = E^n + \frac{\tau_n}{8}\left[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+\frac{1}{4}}, y(t_{n+\frac{1}{4}})) - f(t_n, U^n) - f(t_{n+\frac{1}{4}}, U^{n+\frac{1}{4}})\right] + w_1^n \tag{3.8}$$

Ο σκοπός μας είναι να απαλοίψουμε τα ενδιάμεσα σφάλματα και να καταλήξουμε σε μια ανισωτική σχέση για τα E^{n+1}, E^n.
Εφαρμόζουμε τη νόρμα μεγίστου στη σχέση (3.7) και έχουμε

$$\begin{aligned} \|E^{n+\frac{2}{4}}\|_\infty &\le \frac{1}{3}\|4E^{n+\frac{1}{4}} - E^n\|_\infty + \frac{\tau}{6}\|f(t_{n+1}, y(t_{n+\frac{2}{4}})) - f(t_{n+1}, U^{n+\frac{2}{4}})\|_\infty + \|r_1^n\|_\infty \\ &\le \frac{1}{3}\|4E^{n+\frac{1}{4}} - E^n\|_\infty + \frac{\tau\mathcal{L}}{6}\|E^{n+\frac{2}{4}}\|_\infty + \|r_1^n\|_\infty \end{aligned} \tag{3.9}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3.8) με 4 για να πάρουμε την ακόλουθη σχέση

$$4E^{n+\frac{1}{4}} = 4E^n + \frac{\tau}{2}\left[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+\frac{1}{4}}, y(t_{n+\frac{1}{4}})) - f(t_n, U^n) - f(t_{n+\frac{1}{4}}, U^{n+\frac{1}{4}})\right] + 4w_1^n.$$

Επαναλμβάνοντας την ίδια διαδικασία έχουμε

$$\begin{aligned} \|4E^{n+\frac{1}{4}} - E^n\|_\infty &\le 3\|E^n\|_\infty + \frac{\tau\mathcal{L}}{2}\left[\|E^n\|_\infty + \|E^{n+\frac{1}{4}}\|_\infty\right] + 4\|w_1^n\|_\infty \\ &\le \left(3 + \frac{\tau\mathcal{L}}{2}\right)\|E^n\|_\infty + \frac{\tau\mathcal{L}}{2}\frac{1}{4}\|4E^{n+\frac{1}{4}} + E^n - E^n\|_\infty + 4\|w_1^n\|_\infty. \end{aligned}$$

Επειδή $\frac{\tau\mathcal{L}}{8} < \frac{1}{2}$ έπεται

$$\begin{aligned} \|4E^{n+\frac{1}{4}} - E^n\|_\infty &\le \frac{(3 + \frac{\tau\mathcal{L}}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}}{8})}{1 - \frac{\tau\mathcal{L}}{8}}\|E^n\|_\infty + 8\|w_1^n\|_\infty \\ &\le 3\frac{(1 + \frac{5\tau\mathcal{L}}{24})}{1 - \frac{\tau\mathcal{L}}{8}}\|E^n\|_\infty + 8\|w_1^n\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\|4E^{n+\frac{1}{4}}-E^n\|_\infty &\le \frac{1+\frac{5\tau\mathcal{L}}{24}}{1-\frac{\tau\mathcal{L}}{8}}\|E^n\|_\infty+\frac{8}{3}\|w_1^n\|_\infty \\ &\le (1+\frac{2\tau\mathcal{L}}{3})\|E^n\|_\infty+\frac{8}{3}\|w_1^n\|_\infty\end{aligned} \tag{3.10}$$

Επιστρέφουμε τώρα στην (3.9) και χρησιμοποιώντας την (3.10) έχουμε

$$\|E^{n+\frac{2}{4}}\|_\infty \le \left(1+\frac{2\tau\mathcal{L}}{3}\right)\|E^n\|_\infty+\frac{8}{3}\|w_1^n\|_\infty+\frac{\tau\mathcal{L}}{6}\|E^{n+\frac{2}{4}}\|_\infty+\|r_1^n\|_\infty$$

Επειδή $\frac{\tau\mathcal{L}}{6}<\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\|E^{n+\frac{2}{4}}\|_\infty &\le \frac{1+\frac{2\tau\mathcal{L}}{3}}{1-\frac{\tau\mathcal{L}}{6}}\|E^n\|_\infty+\frac{16}{3}\|w_1^n\|_\infty+2\|r_1^n\|_\infty \\ &\le \left(1+\frac{5\tau\mathcal{L}}{3}\right)\|E^n\|_\infty+\frac{16}{3}\|w_1^n\|_\infty+2\|r_1^n\|_\infty\end{aligned} \tag{3.11}$$

Συνεχίζουμε με ανάλογο τρόπο για τις (3.5),(3.6).Αρχίζουμε με την (3.5)

$$\begin{aligned}\|E^{n+1}\|_\infty &\le \frac{1}{3}\|4E^{n+\frac{3}{4}}-E^{n+\frac{2}{4}}\|_\infty+\frac{\tau}{6}\|f(t_{n+1},y(t_{n+1}))-f(t_{n+1},U^{n+1})\|_\infty+\|r_2^n\|_\infty \\ &\le \frac{1}{3}\|4E^{n+\frac{3}{4}}-E^{n+\frac{2}{4}}\|_\infty+\frac{\tau\mathcal{L}}{6}\|E^{n+1}\|_\infty+\|r_2^n\|_\infty\end{aligned} \tag{3.12}$$

Η διαδικασία για την (3.6) είναι η ίδια με την (3.8),καταλήγουμε στην

$$\frac{1}{3}\|4E^{n+\frac{3}{4}}-E^{n+\frac{2}{4}}\|_\infty \le (1+\frac{2\tau\mathcal{L}}{3})\|E^{n+\frac{2}{4}}\|_\infty+\frac{8}{3}\|w_2^n\|_\infty \tag{3.13}$$

Συνδυάζουμε τις (3.12),(3.13),(3.11)και έχουμε

$$\begin{aligned}\|E^{n+1}\|_\infty &\le (1+\frac{2\tau\mathcal{L}}{3})\|E^{n+\frac{2}{4}}\|_\infty+\frac{8}{3}\|w_2^n\|_\infty+\frac{\tau\mathcal{L}}{6}\|E^{n+1}\|_\infty+\|r_2^n\|_\infty \\ &\le \frac{(1+\frac{2\tau\mathcal{L}}{3})(1+\frac{5\tau\mathcal{L}}{3})}{1-\frac{\tau\mathcal{L}}{6}}\|E^n\|_\infty+\frac{16}{3}\|w_2^n\|_\infty+2\|r_2^n\|_\infty+(1+\frac{5\tau\mathcal{L}}{3})\left(\frac{16}{3}\|w_1^n\|_\infty+2\|r_1^n\|_\infty\right) \\ &\le e^{\frac{2\tau\mathcal{L}}{3}}e^{\frac{5\tau\mathcal{L}}{3}}e^{\frac{\tau\mathcal{L}}{3}}\|E^n\|_\infty+\frac{16}{3}\|w_2^n\|_\infty+2\|r_2^n\|_\infty+5\left(\frac{16}{3}\|w_1^n\|_\infty+2\|r_1^n\|_\infty\right) \\ &\le e^{\frac{8\tau\mathcal{L}}{3}}\|E^n\|_\infty+\frac{16}{3}\|w_2^n\|_\infty+2\|r_2^n\|_\infty+\frac{80}{3}\|w_1^n\|_\infty+10\|r_1^n\|_\infty\end{aligned}$$

Μπορούμε να φράξουμε τα w_1^n, w_2^n με την ίδια ποσότητα $\|w^n\|_\infty \le \frac{5}{12}\tau^3\sup_{[0,T]}||y^{(3)}(t)||_\infty$ και τα r_1^n, r_2^n με το $\|r^n\|_\infty \le \frac{26}{9}\tau^3\sup_{[0,T]}\|y^{(3)}(t)\|_\infty$, τότε έχουμε

$$\|E^{n+1}\|_\infty \le e^{\frac{8\tau\mathcal{L}}{3}}\|E^n\|_\infty+\frac{96}{3}\|w^n\|_\infty+12\|r^n\|_\infty \tag{3.14}$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή και τα αποτελέμαστα των Προτάσεων 2.2.1, 1.3.3 έχουμε

$$\begin{aligned} \|E^n\|_\infty &\le e^{8t_n\mathcal{L}}\left[\|E^0\|_\infty + 32\sum_{l=0}^{N-1}\|w^n\|_\infty + 12\sum_{l=0}^{N-1}\|r^n\|_\infty\right] \\ \Rightarrow \max_{0\le n\le N}\|E^n\|_\infty &\le e^{8T\mathcal{L}}\left[\|E^0\|_\infty + 32\sum_{l=0}^{N-1}\|w^n\|_\infty + 12\sum_{l=0}^{N-1}\|r^n\|_\infty\right] \\ &\le e^{8T\mathcal{L}}\left[32\frac{5}{12}T\tau^2\sup_{[0,T]}\|y^{(3)}\|_\infty + 12\frac{26}{9}\tau^2 T\sup_{[0,T]}\|y^{(3)}\|_\infty\right] \\ \Rightarrow \max_{0\le n\le N}\|y(t_n)-U^n\|_\infty &\le 48e^{8T\mathcal{L}}T\tau^2\sup_{[0,T]}\|y^{(3)}\|_\infty \end{aligned} \tag{3.15}$$

Συνεπώς από την (3.15) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέθοδος συγκλίνει και ότι η τάξη σύγκλισης είναι 2 □

Κεφάλαιο 4

Πειραματικά Αποτελέσματα

Όλες οι αριθμητικές μέθοδοι έχουν υλοποιηθεί με προγράμματα στην Python και όλα τα μη γραμμικά συστήματα που προκύπτουν λύνονται με τη μέθοδο σταθερού σημείου.Για όλες τις μεθόδους έχουμε δεδομένη την Y^0.Στην μέθοδο BDF2 προσεγγίζουμε με άμεση Euler το Y^1.Για την BDF3 προσεγγίζουμε τις αρχικές συνθήκες με την παρακάτω modified Euler

$$\begin{aligned} Y^0 &= y(0), \\ Y^{\frac{1}{2}} &= Y^0 + \frac{\tau}{2} f(t_0, Y^0), \\ Y^1 &= Y^0 + \tau f(\frac{t_0+t_1}{2}, Y^{\frac{1}{2}}), \\ Y^{1+\frac{1}{2}} &= Y^1 + \frac{\tau}{2} f(t_1, Y^1), \\ Y^2 &= Y^1 + \tau f(\frac{t_1+t_2}{2}, Y^{1+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Ορίζουμε $E(N) := \max\limits_{0\le n\le N} \|Y^n - y(t_n)\|_\infty$, τότε για δοθείσες τιμές N_1, N_2 υπολογίζουμε την αντίστοιχη πειραματική τάξη σύγκλισης $\mathcal{T}(N_1, N_2)$ μέσω του τύπου:

$$\mathcal{T}(N_1, N_2) = \ln(E(N_1)/E(N_2))/\ln(N_2/N_1).$$

Έστω $y : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ η λύση του ΠΑΤ:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -y_1(t) - e^{-2t} y_2(t) \\ y_2(t) + e^{2t} y_1(t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = (1,0)^T, \tag{4.1}$$

η οποία δίνεται από τον τύπο $y(t) = (e^{-t}\cos(t), e^t \sin(t))^T$. Οι παρακάτω πίνακες περιέχουν τις πειραματικές τάξεις σύγκλισης κάθε μεθόδου για το πρόβλημα (4.1) οι οποίες είναι σύμφωνες με τις προβλεπόμενες από την θεωρία.

BDF1		
N	$E(N)$	Τάξη σύγκλισης
20	1.179193(-1)	–
40	5.806158(-2)	1.022
80	2.881011(-2)	1.011
160	1.435036(-2)	1.005
320	7.161563(-3)	1.002

BDF2		
N	$E(N)$	Τάξη σύγκλισης
20	4.354659(-3)	–
40	1.073479(-3)	2.02
80	2.666148(-4)	2.009
160	6.643950(-5)	2.004
320	1.658338(-5)	2.002

BDF3		
N	$E(N)$	Τάξη σύγκλισης
20	3.8047855(-4)	–
40	5.1805891(-5)	2.876
80	6.7370801(-6)	2.942
160	8.5831960(-7)	2.972
320	1.0829642(-7)	2.986

Τραπεζίου		
N	$E(N)$	Τάξη σύγκλισης
20	2.300498(-3)	–
40	5.938204(-4)	1.953
80	1.507388(-4)	1.977
160	3.796702(-5)	1.989
320	9.526844(-6)	1.994

BDF2/Τραπεζίου		
N	$E(N)$	Τάξη σύγκλισης
20	7.6495646(-5)	–
40	1.9123692(-5)	2.000
80	4.7809093(-6)	2.000
160	1.1952264(-6)	2.000
320	1.7944678(-7)	2.262

Κεφάλαιο 5

Προσέγγιση τοπικού σφάλματος και αυτόματη μεταβολή βήματος

5.1 Προσέγγιση 3ης παραγώγου σε σημείο μέσω του αναπτύγματος Taylor

Πρόταση 5.1.1. *Έστω $y \in C^4([0,T],\mathbb{R}^m)$. Έστω υποδιάστημα $[t_n, t_{n+1}] \subset [0,T]$ μήκους $\tau = t_{n+1} - t_n$ το οποίο διαμερίζουμε ομοιόμορφα σε 4 υποδιαστήματα. Τότε για την 3η παράγωγο της $y(t)$ στο σημείο $t = t_{n+1}$ ισχύει*

$$y(t_{n+1}) - 3y(t_{n+\frac{3}{4}}) + 3y(t_{n+\frac{2}{4}}) - y(t_{n+\frac{1}{4}}) = \left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y^{(3)}(t_{n+1}) + O(\tau^4) \tag{5.1}$$

όπου $t_{n+\frac{1}{4}} = t_n + \frac{\tau}{4}$, $t_{n+\frac{2}{4}} = t_n + \frac{2\tau}{4}$ και $t_{n+\frac{3}{4}} = t_n + \frac{3\tau}{4}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις

$$y(t_{n+\frac{3}{4}}) = y(t_{n+1}) - \frac{\tau}{4}y'(t_{n+1}) + \frac{\tau^2}{4^2 2}y''(t_{n+1}) - \frac{\tau^3}{4^3 6}y^{(3)}(t_{n+1}) + O(\tau^4), \tag{5.2}$$

$$y(t_{n+\frac{2}{4}}) = y(t_{n+1}) - \frac{2\tau}{4}y'(t_{n+1}) + \frac{4\tau^2}{4^2 2}y''(t_{n+1}) - \frac{8\tau^3}{4^3 6}y^{(3)}(t_{n+1}) + +O(\tau^4), \tag{5.3}$$

$$y(t_{n+\frac{1}{4}}) = y(t_{n+1}) - \frac{3\tau}{4}y'(t_{n+1}) + \frac{9\tau^2}{4^2 2}y''(t_{n+1}) - \frac{27\tau^3}{4^3 6}y^{(3)}(t_{n+1}) + +O(\tau^4). \tag{5.4}$$

Συνδιάζοντας τις (5.2)-(5.3)-(5.4) απαλοίφουμε αρχικά την 1η παράγωγο, δηλαδή (5.2)-$\frac{1}{2}$(5.3), (5.2)-$\frac{1}{3}$(5.4), αντίστοιχα, καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις

$$y(t_{n+\frac{3}{4}}) - \frac{1}{2}y(t_{n+\frac{2}{4}}) = \frac{1}{2}y(t_{n+1}) - \frac{\tau^2}{4^2 2}y''(t_{n+1}) + \frac{3\tau^3}{4^3 6}y^{(3)}(t_{n+1}) + O(\tau^4) \tag{5.5}$$

$$y(t_{n+\frac{3}{4}}) - \frac{1}{3}y(t_{n+\frac{1}{4}}) = \frac{2}{3}y(t_{n+1}) - \frac{2\tau^2}{4^2 2}y''(t_{n+1}) + \frac{8\tau^3}{4^3 6}y^{(3)}(t_{n+1}) + O(\tau^4) \tag{5.6}$$

Στη συνέχεια απαλοίφουμε απο τις (5.5), (5.6) την 2η παράγωγο, δηλαδή (5.6)-2(5.5)για να πάρουμε τη σχέση

$$y(t_{n+\frac{3}{4}}) - \frac{1}{3}y(t_{n+\frac{1}{4}}) - 2y(t_{n+\frac{3}{4}}) + y(t_{n+\frac{2}{4}}) = -\frac{1}{3}y(t_{n+1}) + \frac{2\tau^3}{4^3 6}y^{(3)}(t_{n+1}) + O(\tau^4)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$y(t_{n+1}) - 3y(t_{n+\frac{3}{4}}) + 3y(t_{n+\frac{2}{4}}) - y(t_{n+\frac{1}{4}}) = \left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y^{(3)}(t_{n+1}) + O(\tau^4) \tag{5.7}$$

□

5.2 Εκτίμηση τοπικού σφάλματος

Κοιτάζοντας προσεκτικά τη μέθοδο (3.1) βλέπουμε ότι το σφάλμα συνέπειας δ^n στο t_{n+1} είναι άθροισμα των σφαλμάτων συνέπειας που προκύπτουν από τις επιμέρους μεθοδούς,το οποίο προκύπτει να είναι τάξης $O((\frac{\tau}{4})^3)$. Για την κατασκευή ενος αλγορίθμου αυτόματης επιλογής βήματος ορίζουμε ως τοπικό σφάλμα A_n που αντιστοιχεί στο διάστημα $[t_n, t_{n+1}]$ την ποσότητα

$$A_n = \frac{4}{\tau}\delta^n.$$

Η μέθοδος αποτελέιται απο 2 βήματα της μεθόδου του τραπεζίου και 2 βήματα της μεθόδου BDF2 αυτό συνεπάγεται ότι

$$\delta^n = {w_1}^n + {r_1}^n + {w_2}^n + {r_2}^n. \tag{5.8}$$

όπου w_1^n, w_2^n τα σφάλματα συνέπειας της μεθόδου τραπεζίου και r_1^n, r_2^n τα σφάλματα συνέπειας της μεθόδου BDF2.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Προτάσεων 2.2.1, 1.3.3 έχουμε

$${w_2}^n = \frac{\left(\frac{\tau}{4}\right)^3}{6}y'''(\xi_2^n) - \frac{\left(\frac{\tau}{4}\right)^3}{4}y'''(\zeta_2^n) + O(\tau^4) \approx -\frac{1}{12}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y'''(t_{n+\frac{3}{4}}) + O(\tau^4). \tag{5.9}$$

με $\xi_2^n, \zeta_2^n \in [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{3}{4}}]$.

$${w_1}^n = \frac{\left(\frac{\tau}{4}\right)^3}{6}y'''(\xi_1^n) - \frac{\left(\frac{\tau}{4}\right)^3}{4}y'''(\zeta_1^n) + O(\tau^4) \approx -\frac{1}{12}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y'''(t_{n+\frac{1}{4}}) + O(\tau^4). \tag{5.10}$$

με $\xi_1^n, \zeta_1^n \in [t_n, t_{n+\frac{1}{4}}]$.

$${r_2}^n = \frac{8}{6}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y'''(\xi_3^n) - \frac{4}{18}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y'''(\zeta_3^n) - \frac{8}{6}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y'''(\omega_3^n) + O(\tau^4) \approx -\frac{2}{9}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y'''(t_{n+1}) + O(\tau^4). \tag{5.11}$$

με $\xi_3^n \in [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}]$ και $\zeta_3^n, \omega_3^n \in [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{3}{4}}]$.

$${r_1}^n = \frac{8}{6}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y'''(\xi_4^n) - \frac{4}{18}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y'''(\zeta_4^n) - \frac{8}{6}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y'''(\omega_4^n) + O(\tau^4) \approx -\frac{2}{9}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 y'''(t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\tau^4). \tag{5.12}$$

με $\xi_4^n \in [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}]$ και $\zeta_4^n, \omega_4^n \in [t_n, t_{n+\frac{1}{4}}]$.

Συνδυάζοντας τις (5.9)-(5.12) το μέγιστο σφάλμα συνέπειας μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση

$$\|\delta^n\|_\infty = \frac{11}{18}\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 \|y'''(t_{n+1})\|_\infty. \tag{5.13}$$

Θυμόμαστε τώρα το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.1.1, αυτό θα μας επιτρέψει να εκτιμήσουμε το σφάλμα (5.13) χρησιμοποιώντας της τιμές $U^{n+1}, U^{n+\frac{3}{4}}, U^{n+\frac{2}{4}}, U^{n+\frac{1}{4}}$ που παράγει η μέθοδος,έχουμε

$$\|\delta^n\|_\infty = \frac{11}{18}\|y(t_{n+1}) - 3y(t_{n+\frac{3}{4}}) + 3y(t_{n+\frac{2}{4}}) - y(t_{n+\frac{1}{4}})\|_\infty \Rightarrow$$
$$\|\delta^n\|_\infty \approx \frac{11}{18}\|U^{n+1} - 3U^{n+\frac{3}{4}} + 3U^{n+\frac{2}{4}} - U^{n+\frac{1}{4}}\|_\infty.$$

Άρα τώρα έχουμε ένα τύπο για να εκτιμήσουμε το τοπικό σφάλμα σε κάθε κόμβο

$$\|A_n\|_\infty \approx \frac{11}{18}\frac{4}{\tau}\|U^{n+1} - 3U^{n+\frac{3}{4}} + 3U^{n+\frac{2}{4}} - U^{n+\frac{1}{4}}\|_\infty.$$

5.3 Αλγόριθμος αυτόματης επιλογής βήματος

Η ιδέα τώρα είναι να εφαρμόσουμε τη μέθοδο (3.1) σε μια μη-ομοιόμορφη διαμέριση δηλαδή με μεταβλητό βήμα τ_n με σκόπο να προσαρμόζουμε το βήμα ανάλογα με το πως μεταβάλλεται η λύση $y(t)$.
Θέλουμε στα σημεία όπου η λύση μεταβάλλεται γρήγορα να μικραίνουμε το βήμα ενώ γύρω από τα σημεία όπου η μεταβολλή είναι μικρή το βήμα να μεγαλώνει με σκοπό να ελαττώσουμε το υπολογιστικό κόστος.

Η προσαρμογή αυτή θα γίνεται εκτιμώντας το τοπικό σφάλμα A_n σε κάθε κόμβο t_{n+1} και ελέγχοντας σε ποιά απο τις τρείς παρακάτω περιπτώσεις ανήκει.

(I). Αν $\frac{\text{TOL}}{10} \leq \|A_n\|_\infty \leq \text{TOL}$, τότε το βήμα τ_n είναι αποδεκτό. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $t_{n+1} = t_n + \tau_n$ και συνεχίζουμε.

(II). Αν $\|A_n\|_\infty > \text{TOL}$, τότε το τοπικό σφάλμα είναι "μεγάλο". Σε αυτή τη περίπτωση θέτουμε βήμα $\tau_n = \frac{\tau_n}{2}$ και επαναλμβάνουμε τον υπολογισμό της U^{n+1}.

(III). Αν $\|A_n\|_\infty < \frac{\text{TOL}}{10}$, τότε το τοπικό σφάλμα είναι πολύ "μικρό". Σε αυτή τη περίπτωση θέτουμε βήμα $\tau_n = 2\tau_n$ και επαναλμβάνουμε τον υπολογισμό της U^{n+1}.
Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τερματίζει όταν το t_{n+1} γίνει ίσο με το β.

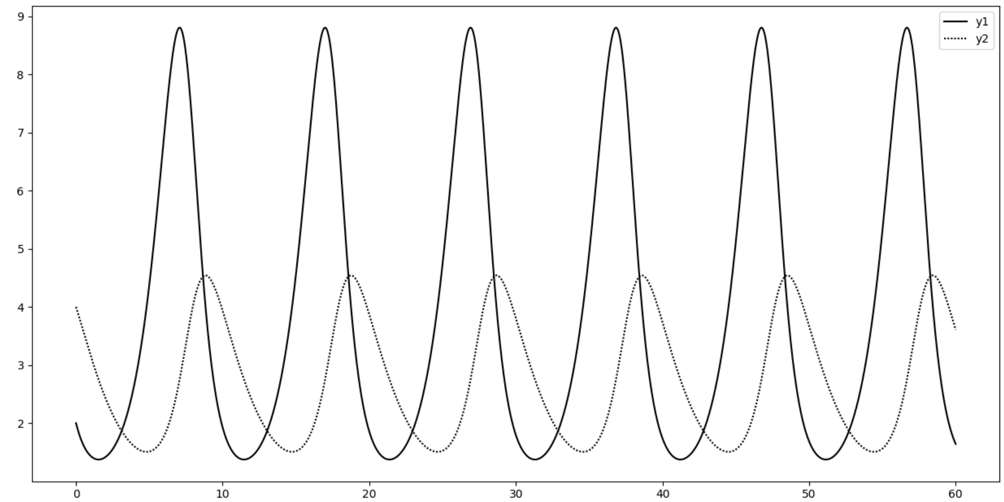
Ο στόχος του παραπάνω αλγορίθμου ειναι να εξασφαλίσει οτι το τοπικό σφάλμα σε κάθε υποδιάστημα είναι μικρότερο ή ίσο του TOL. Αυτό σε συνδυασμό με την εκτίμηση σφάλματος, οδηγεί στο συμπέρασμα οτι το σφάλμα στους κόμβους είναι $O(\text{TOL})$.

5.4 Εφαρμογή 1

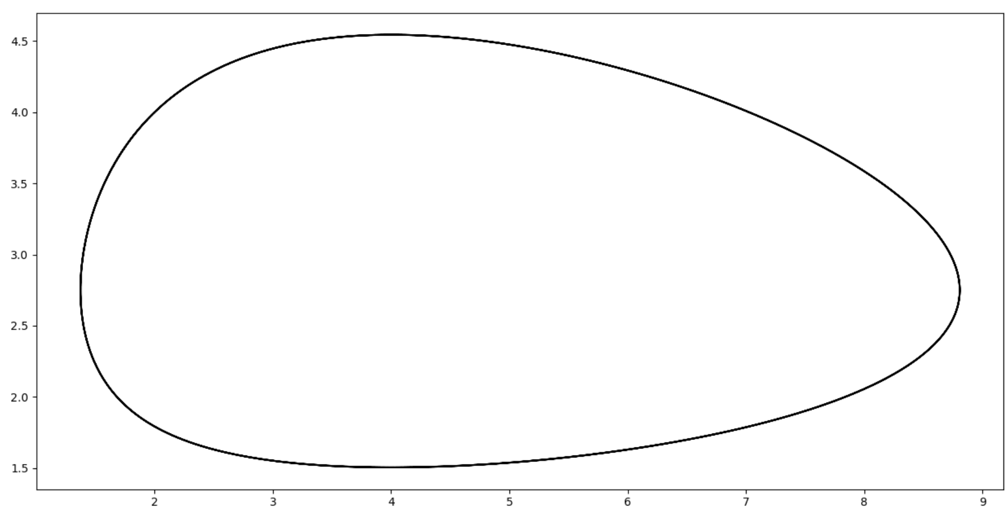
Έστω $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1.1\,y_1(t) - 0.4\,y_1(t)\,y_2(t) \\ 0.1\,y_1(t)\,y_2(t) - 0.4\,y_2(t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

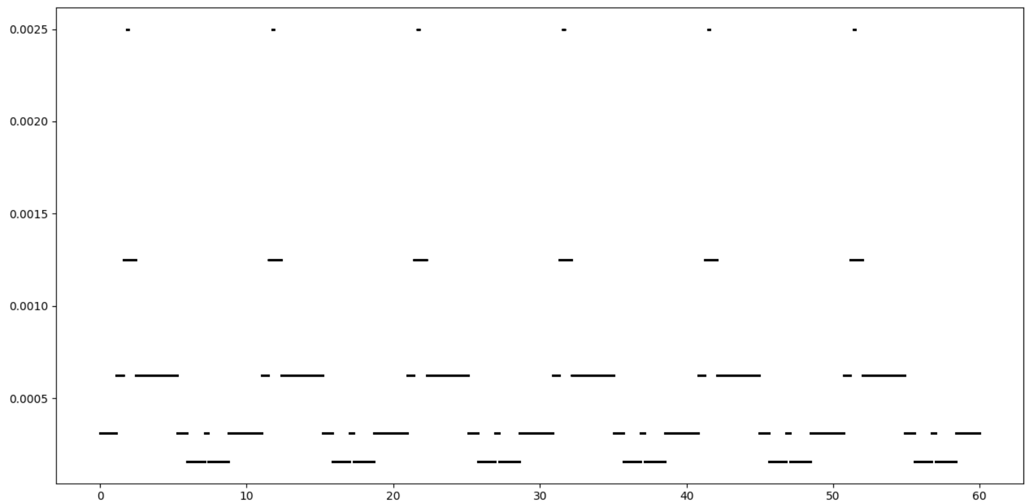
το οποίο είναι ένα σύστημα Lotka-Volterra. Προσεγγίζουμε τη λύση με τη μέθοδο (3.1), στο διάστημα $[0, 60]$, με αυτόματη επιλογή βήματος.Στα Σχήματα 5.1, 5.2 βλέπουμε τα γραφηματα των προσεγγιστικών λύσεων καθώς και το διάγραμμα φάσης αυτών και στο Σχήμα 5.3 το γράφημα της μη-ομοιόμορφης διαμέρισης.



Σχήμα 5.1: Γράφημα των λύσεων y_1, y_2 της Εφαρμογής 1 για $TOL = 10^{-8}$



Σχήμα 5.2: Γράφημα φάσης των λύσεων y_1, y_2 της Εφαρμογής 1 για $TOL = 10^{-8}$



Σχήμα 5.3: Η μη-ομοιόμορφη διαμέριση της Εφαρμογής 1 για $TOL = 10^{-8}$

5.5 Εφαρμογή 2

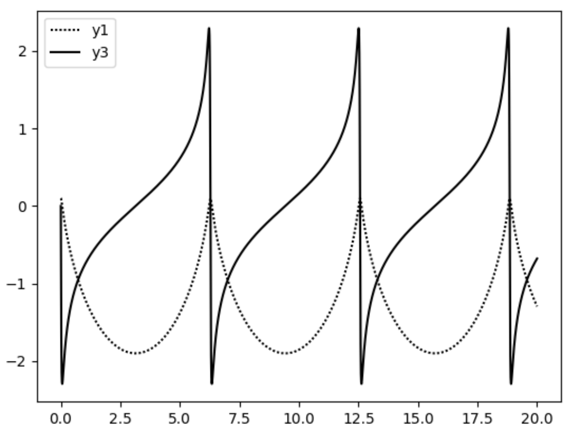
Έστω $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))^T : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^4$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_3(t) \\ \\ y_4(t) \\ \\ -\frac{y_1(t)}{(y_1^2(t)+y_2^2(t))^{\frac{3}{2}}} \\ \\ -\frac{y_2(t)}{(y_1^2(t)+y_2^2(t))^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

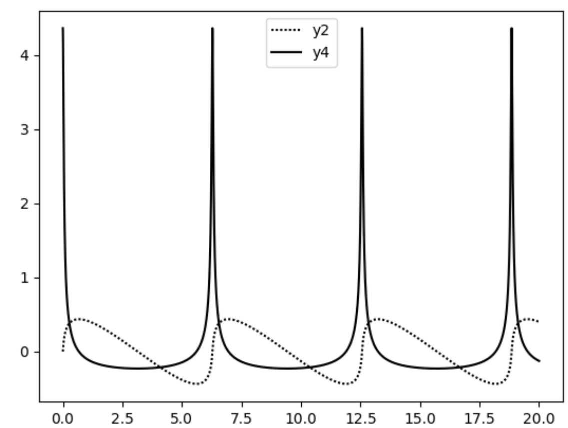
όπου $\varepsilon \in [0,1)$ η εκκεντρότητα της έλλειψης $(y_1+\varepsilon)^2 + \frac{y_2^2}{1-\varepsilon^2} = 1$ στο επίπεδο $y_1 y_2$. Η ακριβής λύση του προβλήματος είναι περιοδική με περίοδο 2π και ενώ δεν προσδιορίζεται αναλυτικά μπορεί να υπολογισθεί για κάθε t από τους τύπους

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos(\theta) - \varepsilon \\ y_2(t) &= \sqrt{1-\varepsilon^2}\sin(\theta) \\ y_3(t) &= \frac{\sin(\theta)}{\varepsilon\cos(\theta) - 1} \\ y_4(t) &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos(\theta)}{1-\varepsilon\cos(\theta)} \end{aligned} \tag{5.16}$$

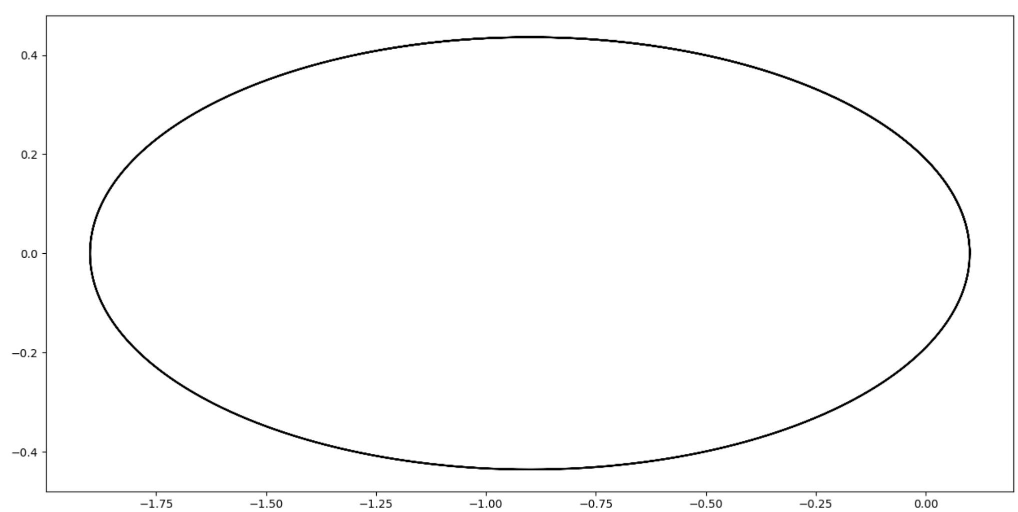
όπου $\theta = \theta(t)$ η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\theta = \varepsilon\sin(\theta) + t$, την οποία για κάθε $t \geq 0$ επιλύουμε αριθμητικά με τη μέθοδο σταθερού σημείου. Για την υλοποιήση της μεθόδου (3.1) με αυτόματη επιλογή βήματος επιλέγουμε $\varepsilon = 0.9$ και ως διάστημα λύσης το $[0, 20]$. Στα Σχήματα 5.4-7 παραθέτουμε τα γραφηματα των προσεγγιστικών λύσεων και ο Πίνακας 5.1 περιέχει τα μέγιστα σφάλματα του αλγορίθμου αυτόματης επιλογής και της ομοιόμορφης διαμέρισης για $\varepsilon = 0.9$. Στα Σχήματα 5.8-11 έχουμε τα αντίστοιχα γραφήματα για $\varepsilon = 0.7$ και στο Πίνακα 5.2 τα αντίστοιχα σφάλματα για $\varepsilon = 0.7$.



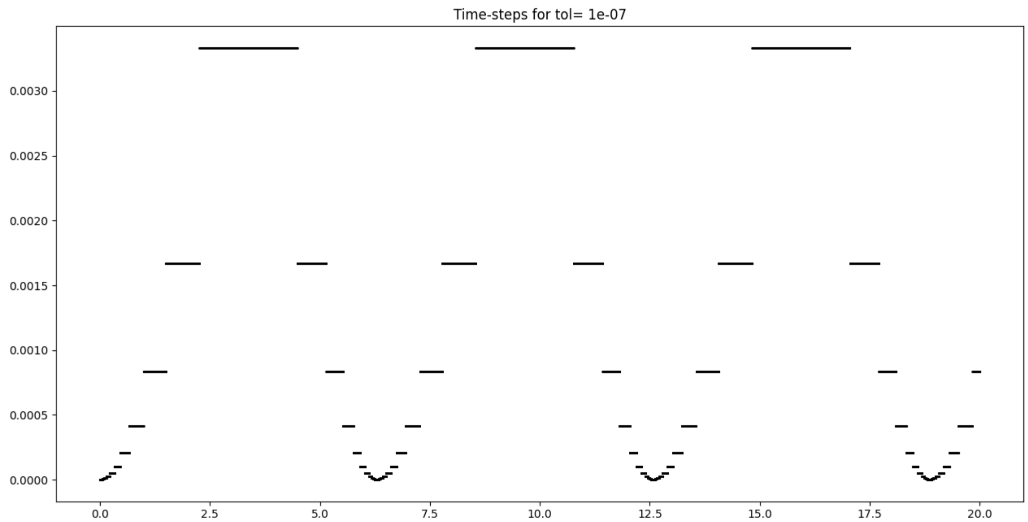
Σχήμα 5.4: Οι λύσεις y_1, y_3 της Εφαρμογής 2 για $\varepsilon = 0.9$



Σχήμα 5.5: Οι λύσεις y_2, y_4 της Εφαρμογής 2 για $\varepsilon = 0.9$



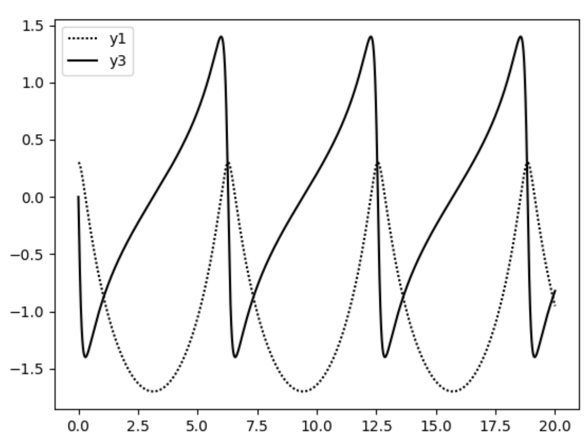
Σχήμα 5.6: Γράφημα φάσης των λύσεων y_1, y_2 της Εφαρμογής 2 για $\mathrm{TOL} = 10^{-7}$, $\varepsilon = 0.9$



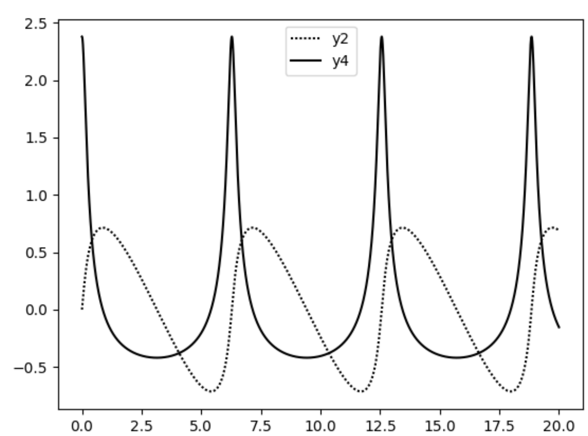
Σχήμα 5.7: Η μη-ομοιόμορφη διαμέριση της Εφαρμογής 2 για TOL $= 10^{-7}$, $\varepsilon = 0.9$

TOL	N	E(N)(αυτόματη μεταβολή)	E(N)(ομοιόμορφη διαμέριση)
10^{-3}	2821	$1.8828854(-1)$	4.40904227
10^{-4}	9620	$2.9219574(-2)$	4.31079841
10^{-5}	31518	$2.6511674(-3)$	$6.8026050(-1)$
10^{-6}	88001	$1.7149740(-4)$	$8.8095707(-2)$
10^{-7}	290832	$6.4359233(-5)$	$8.0861290(-3)$

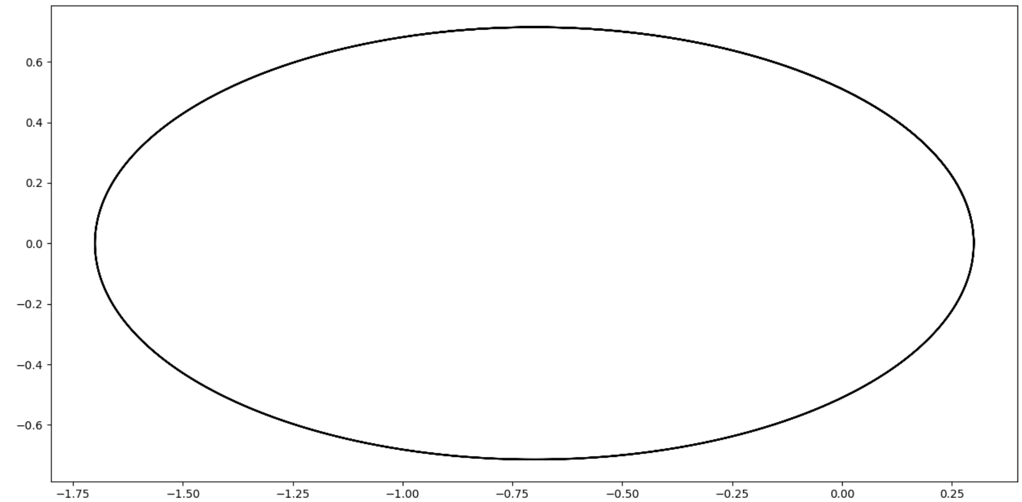
Πίνακας 5.1: Οι τιμές των μέγιστων σφαλμάτων της Εφαρμογής 2 για $\varepsilon = 0.9$.



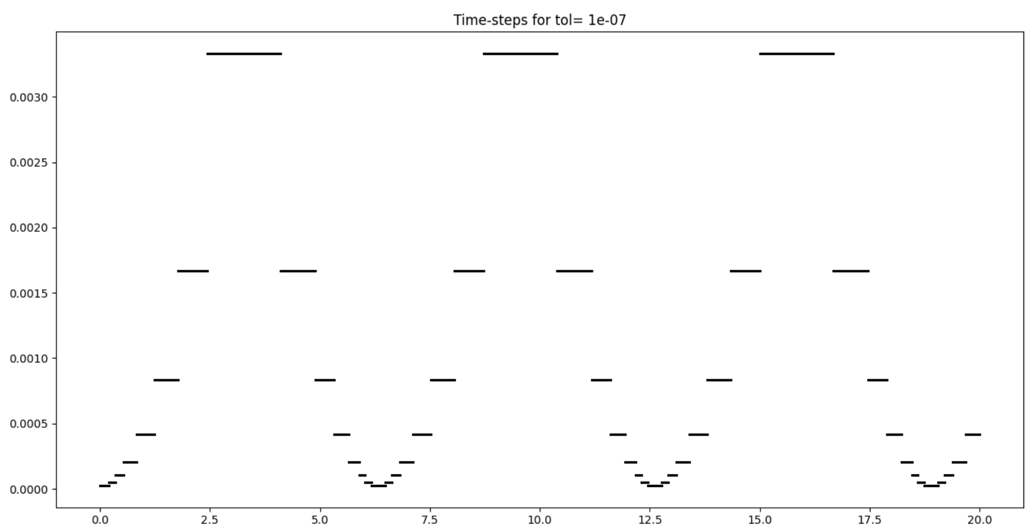
Σχήμα 5.8: Οι λύσεις y_1, y_3 της Εφαρμογής 2 για $\varepsilon = 0.7$



Σχήμα 5.9: Οι λύσεις y_2, y_4 της Εφαρμογής 2 για $\varepsilon = 0.7$



Σχήμα 5.10: Γράφημα φάσης των λύσεων y_1, y_2 της Εφαρμογής 2 για $\mathrm{TOL} = 10^{-7}$, $\varepsilon = 0.7$



Σχήμα 5.11: Η μη-ομοιόμορφη διαμέριση της Εφαρμογής 2 για $\mathrm{TOL} = 10^{-7}, \varepsilon = 0.7$

TOL	N	E(N)(αυτόματη μεταβολή)	E(N)(ομοιόμορφη διαμέριση)
10^{-3}	915	$4.5161090(-2)$	$9.7774828(-1)$
10^{-4}	3167	$4.1409177(-3)$	$8.5868400(-2)$
10^{-5}	10092	$7.2940928(-4)$	$8.5014904(-3)$
10^{-6}	28968	$3.0548603(-5)$	$1.0374641(-3)$
10^{-7}	97275	$8.0183403(-6)$	$9.5319166(-5)$

Πίνακας 5.2: Οι τιμές των μέγιστων σφαλμάτων της Εφαρμογής 2 για $\varepsilon = 0.7$.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Ακρίβης, Β. Δουγαλής *Αριθμητικές μέθοδοι για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*, 2η έκδοση, ΠΕΚ 2018

2. Γ. Ακρίβης, Β. Δουγαλής *Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση*, 5η έκδοση, ΠΕΚ 2021

3. C. W. Gear, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice-Hall 1971

4. D. E. Stewart, *Numerical Analysis: A Graduate Course*, Springer 2022

5. E. Emmrich, *Two-step BDF time discretisation of nonlinear evolution problems governed by monotone operators with strongly continuous perturbations*, COMPUTATIONAL METHODS IN APPLIED MATHEMATICS, Vol. 9 (2009), No. 1, pp. 37–62

6. J. D. Lambert, *Numerical methods for ordinary differential systems*, John Wiley & sons 1991

7. Γ. Ζουράρης, Σημειώσεις μαθήματος ΑΕΣΔΕ, ΧΕ 2021.