Μοντελοποίηση: Τρείς δίνες

Νικόλαος Βουγιαντζής, AM2476 (TEM)

Μάιος 2022

1 Περιγραφή του συστήματος

Θα μελετήσουμε ένα σύστημα τριών δινών με ισχές $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$,που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.Θα συμβολίσουμε τις θέσεις τους στο επίπεδο με $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2), \mathbf{r}_3 = (x_3, y_3)$.Εφόσον η μελέτη μας αφορά σημειακές δίνες μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτές είναι κορυφές ενός τριγώνου. Θέλουμε σε πρώτη φάση να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης τους χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange([1]σελ43). Εφαρμόζοντας τον γενικό τύπο της Λαγκραζιανής([1]σελ.97) συστήματος N δινών για $N = 3$ μπορούμε να γράψουμε την Λαγκραζιανή του συστήματος

$$L = \frac{\gamma_1}{2}(y_1\dot{x}_1 - x_1\dot{y}_1) + \frac{\gamma_2}{2}(y_2\dot{x}_2 - x_2\dot{y}_2) + \frac{\gamma_3}{2}(y_3\dot{x}_3 - x_3\dot{y}_3) + \gamma_1\gamma_2 \ln|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| + \gamma_1\gamma_3 \ln|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1| + \gamma_2\gamma_3 \ln|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2| \tag{1}$$

Θα συμβολίσουμε με $C_1 = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|, C_2 = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|, C_3 = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ τις μεταξυ τους αποστάσεις και $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$. Όπου $|r_i - r_j| \equiv \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

Γράφοντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange που αντιστοιχούν στην Λαγκραζιανή (1) παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης των τριών δινών

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow \dot{y}_1 = \gamma_2 \frac{x_1 - x_2}{C_3^2} - \gamma_3 \frac{x_3 - x_1}{C_2^2} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y_1} \Rightarrow \dot{x}_1 = -\gamma_2 \frac{y_1 - y_2}{C_3^2} + \gamma_3 \frac{y_3 - y_1}{C_2^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x_2} \Rightarrow \dot{y}_2 = \gamma_3 \frac{x_2 - x_3}{C_1^2} - \gamma_1 \frac{x_1 - x_2}{C_3^2} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y_2} \Rightarrow \dot{x}_2 = -\gamma_3 \frac{y_2 - y_3}{C_1^2} + \gamma_1 \frac{y_1 - y_2}{C_3^2}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x_3} \Rightarrow \dot{y}_3 = \gamma_1 \frac{x_3 - x_1}{C_2^2} - \gamma_2 \frac{x_2 - x_3}{C_1^2} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y_3} \Rightarrow \dot{x}_3 = -\gamma_1 \frac{y_3 - y_1}{C_2^2} + \gamma_2 \frac{y_2 - y_3}{C_1^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

2 Μελέτη του συστήματος

Έχοντας γράψει τις εξισώσεις κίνησης μπορούμε να δούμε οτι πρόκειται για ενα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με 6 εξισώσεις,το συγκεκριμένο μπορει να λυθεί αναλυτικά([3]) ομώς είναι αρκετά δύσκολο πρόβλημα.Μπορούμε όμως χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις να βγάλουμε αρκετά αποτελέσματα,ένα από αυτα είναι οι διατηρήσιμες ποσότητες.

Χρησιμοποιώντας απλούς συνδιάσμους μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2+\gamma_3 x_3)=\gamma_1\dot{x}_1+\gamma_2\dot{x}_2+\gamma_3\dot{x}_3=\\&=-\gamma_1\gamma_2\frac{y_1-y_2}{C_3^2}+\gamma_1\gamma_3\frac{y_3-y_1}{C_2^2}-\gamma_2\gamma_3\frac{y_2-y_3}{C_1^2}+\gamma_2\gamma_1\frac{y_1-y_2}{C_3^2}-\gamma_3\gamma_1\frac{y_3-y_1}{C_2^2}+\gamma_3\gamma_2\frac{y_2-y_3}{C_1^2}=0\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\gamma_1 y_1+\gamma_2 y_2+\gamma_3 y_3)=\gamma_1\dot{y}_1+\gamma_2\dot{y}_2+\gamma_3\dot{y}_3=\\&=\gamma_1\gamma_2\frac{x_1-x_2}{C_3^2}-\gamma_1\gamma_3\frac{x_3-x_1}{C_2^2}+\gamma_2\gamma_3\frac{x_2-x_3}{C_1^2}-\gamma_2\gamma_1\frac{x_1-x_2}{C_3^2}+\gamma_3\gamma_1\frac{x_3-x_1}{C_2^2}-\gamma_3\gamma_2\frac{x_2-x_3}{C_1^2}=0\end{aligned} \tag{6}$$

Άρα, οι ακόλουθες ποσότητες είναι διατηρήσιμες ποσότητες

$$I_x := \gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2+\gamma_3 x_3, I_y := \gamma_1 y_1+\gamma_2 y_2+\gamma_3 y_3 \tag{7}$$

Η μέση θέση των τριών δινών (R_x, R_y) ορίζεται να είναι

$$R_x=\frac{\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2+\gamma_2 x_2}{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}=\frac{I_x}{\Gamma}, R_y=\frac{\gamma_1 y_1+\gamma_2 y_2+\gamma_2 y_2}{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}=\frac{I_y}{\Gamma} \tag{8}$$

Όπου

$$\Gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \tag{9}$$

Αυτός ο ορισμός είναι ανάλογος του κέντρου μάζας για σύστημα υλικών σημείων και ισχύει μόνο στην περίπτωση που η ολική ισχύς Γ είναι διάφορη του μηδενός.Μπορούμε να δούμε ότι για $\Gamma \neq 0$ πρόκειται για μία διατηρήσιμη ποσότητα,δηλαδή το τρίγωνο που σχηματίζουν οι δίνες κινείται γύρω από μία σταθερή θέση.Τώρα στην περίπτωση που η ολική ισχύς είναι μηδέν($\Gamma = 0$) μετατοπίσεις του συστήματος δεν αποκλείονται.Αυτό μπορεί κάποιος να το επιβεβαιώσει πραγματικά αν λύσει αναλυτικά ή και αριθμητικά το σύστημα των εξισώσεων..

Θα ορίσουμε την ενέργεια του συστήματος χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για την ενέργεια αλληλεπίδρασης N δινών([1]σελ.94) για N=3.

Μπορούμε να δούμε ότι η ενέργεια του συστήματος δίνεται από

$$E=-\gamma_1\gamma_3\ln|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|-\gamma_2\gamma_3\ln|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|-\gamma_1\gamma_2\ln|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1| \tag{10}$$

Θα ελέγξουμε αν υπάρχει η διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}(-\gamma_1\gamma_3\ln C_2)+\frac{d}{dt}(-\gamma_2\gamma_3\ln C_1)+\frac{d}{dt}(-\gamma_1\gamma_2\ln C_3) \tag{11}$$

Για να επιβεβαιώσουμε το παραπάνω θα πρέπει να υπολογίσουμε ξεχωριστά τους τρείς όρους της (11)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(-\gamma_1\gamma_3\ln C_2)&=\frac{-\gamma_1\gamma_3}{2C_2^2}[2(x_3-x_1)(\dot{x}_3-\dot{x}_1)+2(y_3-y_1)(\dot{y}_3-\dot{y}_1)]\\\frac{d}{dt}(-\gamma_2\gamma_3\ln C_1)&=\frac{-\gamma_2\gamma_3}{2C_1^2}[2(x_3-x_2)(\dot{x}_3-\dot{x}_2)+2(y_3-y_2)(\dot{y}_3-\dot{y}_2)]\\\frac{d}{dt}(-\gamma_1\gamma_2\ln C_3)&=\frac{-\gamma_2\gamma_1}{2C_3^2}[2(x_2-x_1)(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+2(y_2-y_1)(\dot{y}_2-\dot{y}_1)]\end{aligned} \tag{12}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τις εξισώσεις (2)(3)(4),μπορούμε να δούμε ότι η ενέργεια όντως διατηρείται, δηλαδή

$$\frac{dE}{dt}=0 \tag{13}$$

Ένας ακόμα συνδιάσμος που διατηρείται είναι ο ακόλουθος

$$M=\frac{\gamma_1}{2}(x_1^2+y_1^2)+\frac{\gamma_2}{2}(x_2^2+y_2^2)+\frac{\gamma_3}{2}(x_3^2+y_3^2) \tag{14}$$

Διότι
$$\frac{dM}{dt} = \gamma_1(x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1) + \gamma_2(x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2) + \gamma_3(x_3\dot{x}_3 + y_3\dot{y}_3) = 0 \tag{15}$$
Θα υπολογίσουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά
$$\begin{aligned}
\gamma_1(x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1) &= \gamma_1 x_1(-\gamma_2\frac{y_1-y_2}{C_3^2} + \gamma_3\frac{y_3-y_1}{C_2^2}) + \gamma_1 y_1(\gamma_2\frac{x_1-x_2}{C_3^2} - \gamma_3\frac{x_3-x_1}{C_2^2}) \\
\gamma_2(x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2) &= \gamma_2 x_2(-\gamma_3\frac{y_2-y_3}{C_1^2} + \gamma_1\frac{y_1-y_2}{C_3^2}) + \gamma_2 y_2(\gamma_3\frac{x_2-x_3}{C_1^2} - \gamma_1\frac{x_1-x_2}{C_3^2}) \\
\gamma_3(x_3\dot{x}_3 + y_3\dot{y}_3) &= \gamma_3 x_3(-\gamma_1\frac{y_3-y_1}{C_2^2} + \gamma_2\frac{y_2-y_3}{C_1^2}) + \gamma_3 y_3(\gamma_1\frac{x_3-x_1}{C_2^2} - \gamma_2\frac{x_2-x_3}{C_1^2})
\end{aligned} \tag{16}$$
Προσθέτωντας τους τρείς παραπάνω όρους διαπιστώνουμε ότι το M διατηρείται.Η ποσότητα M έχει την έννοια της στροφορμής στο σύστημα μας.

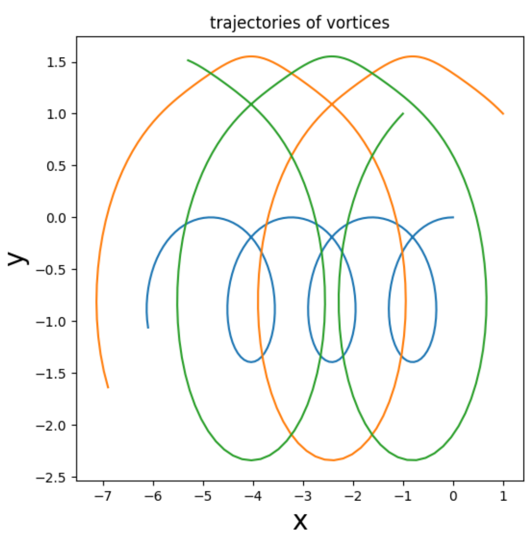
Όπως είναι αναμενόμενο και οποιοσδήποτε συνδιασμός των I_x, I_y, M, E αποτελεί και αυτός διατηρήσιμη ποσότητα.

Προκειμένου να ελέγξουμε τα αποτελέσματα μας, όσον αφορά τις διατηρήσιμες ποσότητες αλλα και την υπόθεση που κάναμε για την σχετική θέση των τριών δινών, θα επιλύσουμε αριθμητικά το πρόβλημα μας με τη χρήση ενός προγράμματος python .Το πρόγραμμα μας διαβάζει ένα αρχείο το οποίο περιέχει σαν πληροφορίες την ισχύ γ και την αρχική θέση (x_0, y_0) κάθε δίνης.Και στις δύο περιπτώσεις που θα δούμε αμέσως μετά χρησιμοποιήθηκε το χρονικό διάστημα $[0, 50]s$.

1η Περίπτωση:$(\Gamma = 0)$

Τα δεδομένα που δίνουμε στο πρόγραμμα μας είναι: $\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0.5, \gamma_3 = 0.5$

Καθώς και οι αρχικές θέσεις $(x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (1, 1), (x_3, y_3) = (-1, 1)$ Αυτό μας επιστρέφει το Σχήμα 1 για τις τροχίες των δινών και όπως φαίνεται δεν υπάρχει μια σταθερή μέση θέση (R_x, R_y) γύρω από την οποία να περιστρέφονται.



Σχήμα 1: Τροχίες τριών δινών με Γ=0.

Το δεύτερο αποτέλεσμα που παίρνουμε από το πρόγραμμα μας είναι ο έλεγχος των τιμών των διατηρήσιμων ποσοτήτων E, I_x, I_y, M στην αρχική και στην τελική θέση των τροχιών.

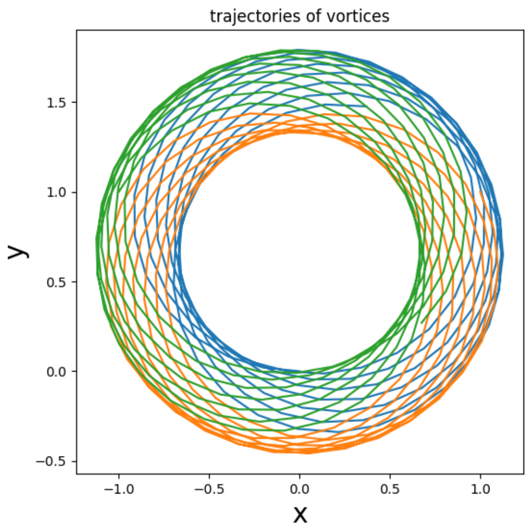
Στην αρχική θέση οι τιμές είναι $(E, I_x, I_y, M) = (0.3465735902799726, 0.0, 1.0, 1.0)$,ενώ στη τελική θέση οι τιμές είναι $(E, I_x, I_y, M) = (0.3465735080368606, 4.440892098500626e{-}15, 1.0000000000000007, 0.9999999057946924)$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές διαφέρουν για πολύ λίγο, σχεδόν αμελητέα.Αυτή η απόκλιση προήλθε από την χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης για την επίλυση του συστήματος και ήταν αναμενόμενη.Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι όντως αυτές οι ποσότητες είναι διατηρήσιμες.

2η Περίπτωση:$(\Gamma \neq 0)$

Τα δεδομένα που δίνουμε στο πρόγραμμα μας είναι: $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 1$

Καθώς και οι αρχικές θέσεις $(x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (1, 1), (x_3, y_3) = (-1, 1)$ Και φαινομενικά στο Σχήμα 2, υπάρχει μια σταθερή μέση θέση (R_x, R_y) γύρω από την οποία περιστρέφονται, χωρίς αυτό να αποτελεί απόδειξη ύπαρξης μίας τέτοιας θέσης.



Σχήμα 2: Τροχίες τριών δινών με Γ=3.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση θα ελέγξουμε τις τιμές των διατηρήσιμων ποσοτήτων E, I_x, I_y, M στην αρχική και στην τελική θέση των τροχιών.

Στην αρχική θέση οι τιμές είναι $(E, I_x, I_y, M) = (-2.772588722239781, 0.0, 2.0, 2.0)$,ενώ στη τελική θέση οι τιμές είναι $(E, I_x, I_y, M) = (-2.7725892716471066, -1.1102230246251565e{-}16, 1.9999999999999982, 2.0000001101056495)$

Και πάλι η απόκλιση στις τιμές στις δύο θέσεις θα θεωρηθεί αμελητέα,συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι όντως αυτές οι ποσότητες είναι διατηρήσιμες.

3 Μελέτη του συστήματος ως προς τις αποστάσεις των τριών δινών

Παρόλο που το σύστημα των εξισώσεων (2),(3),(4) προκύπτει ότι είναι πλήρως ολοκληρώσιμο και μπορεί να λυθεί αναλυτικά είναι ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα.Υπάρχει όμως μία σημαντική απλοποίηση που μπορούμε να κάνουμε στο σύστημα μας προκειμένου να βγάλουμε κάποιες απλές λύσεις.

Στο σύστημα έχουμε ορίσει ως C_1, C_2, C_3 τις αποστάσεις των τριών δινών ανά δύο,μάλιστα αυτές αποτελούν τις πλευρές του τριγώνου που σχηματίζεται από τις τρείς σημειακές δίνες.Αυτές οι ποσότητες είναι συναρτήσεις του χρόνου,συνεπώς μπορούμε να εξάγουμε εξισώσεις κίνησης.

Θα εξάγουμε τις εξίσωσεις αυτές παραγωγίζοντας τις C_1^2, C_2^2, C_3^2 ως προς το χρόνο,εδώ παίρνουμε τα τετράγωνα των ποσοτήτων αυτών διότι αυτό θα απλοποιήσει τους αριθμητικούς υπολογισμούς.Έχουμε:

$$\frac{d}{dt}C_1^2 = \frac{d}{dt}\left[(x_2 - x_3)^2 + (y_3 - y_2)^2\right] = 2(x_2 - x_3)(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + 2(y_2 - y_3)(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) \tag{17}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης τώρα και αντικαθιστώντας στην (17) μπορούμε να την φέρουμε στην μορφή

$$\frac{d}{dt}C_1^2 = 2\gamma_1 \left[-\frac{1}{C_3^2}[(x_2 - x_3)(y_2 - y_1) - (y_2 - y_3)(x_2 - x_1)] + \frac{1}{C_2^2}[(x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1)] \right] \tag{18}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να γράψουμε τις εξίσωσεις για τις άλλες 2 πλευρές

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}C_2^2 &= 2\gamma_2 \left[\frac{1}{C_3^2}[(x_3 - x_1)(y_2 - y_3) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_3)] - \frac{1}{C_1^2}[(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)] \right] \\ \frac{d}{dt}C_3^2 &= 2\gamma_3 \left[\frac{1}{C_1^2}[(x_1 - x_2)(y_3 - y_1) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_1)] - \frac{1}{C_2^2}[(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_2)] \right] \end{aligned} \tag{19}$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των $\frac{1}{C_i^2}, \quad i = 1, 2, 3$ αντιστοιχούν σε εσωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων $r_1 - r_2, r_1 - r_3, r_1 - r_3$ αν επιλέξουμε 2 κάθε φορά, που προκείπτουν από τις θέσεις των δινών και μάλιστα αν ήταν σε απόλυτη τιμή θα αντιστοιχούσαν στο διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου.Μπορούμε λοιπόν να αντιστοιχίσουμε αυτές τις ποσότητες στην ποσότητα A που θα είναι η επιφάνεια του τριγώνου αυτού και θα θεωρήσουμε ότι θα έχει θετικό πρόσημο αν οι δίνες (1,2,3) εμφανίζονται αριστερόστροφα στο επίπεδο ενώ αρνητικό αλλιώς.Αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε τις εξισώσεις ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}C_1^2 &= 4\gamma_1 A \left(\frac{1}{C_2^2} - \frac{1}{C_3^2} \right) \\ \frac{d}{dt}C_2^2 &= 4\gamma_2 A \left(\frac{1}{C_3^2} - \frac{1}{C_1^2} \right) \\ \frac{d}{dt}C_3^2 &= 4\gamma_3 A \left(\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{C_2^2} \right) \end{aligned} \tag{20}$$

Από την Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το εμβδαδό του τριγώνου που σχηματίζουν οι δίνες είναι

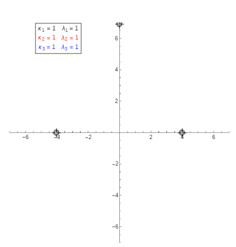
$$|A| = \sqrt{C(C - C_1)(C - C_2)(C - C_3)}, \quad C := \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3) \tag{21}$$

Αυτό μας δείχνει ότι το σύστημα που έχουμε κατασκευάσει είναι κλειστό ως προς C_1, C_2, C_3, ένα σημαντικό αποτέλεσμα διότι μπορούμε τώρα να μελετήσουμε την δυναμική των δινών μέσω του νέου συστήματος που αποτέλειται από τρείς εξισώσεις σε αντίθεση με το αρχικό που αποτελούνταν από έξι.

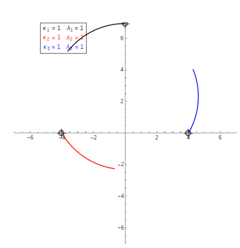
Οι εξισώσεις (20) μπορούν να μας δώσουν κάποιες ειδικές λύσεις για το σύστημα, όπως την λύση:

$$C_1 = C_2 = C_3 \quad \text{:σταθερά} \tag{22}$$

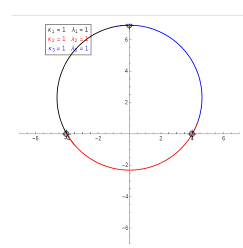
Σε αυτή την περίπτωση οι δίνες βρίσκονται αρχικά στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου και συνεχίζουν να ισαπέχουν για κάθε χρονική στιγμή $t > 0$.Στα Σχήματα 3,4,5 [2] φαίνεται η χρονική εξέλιξη του συστήματος



Σχήμα 3: t=0s



Σχήμα 4: t=15s



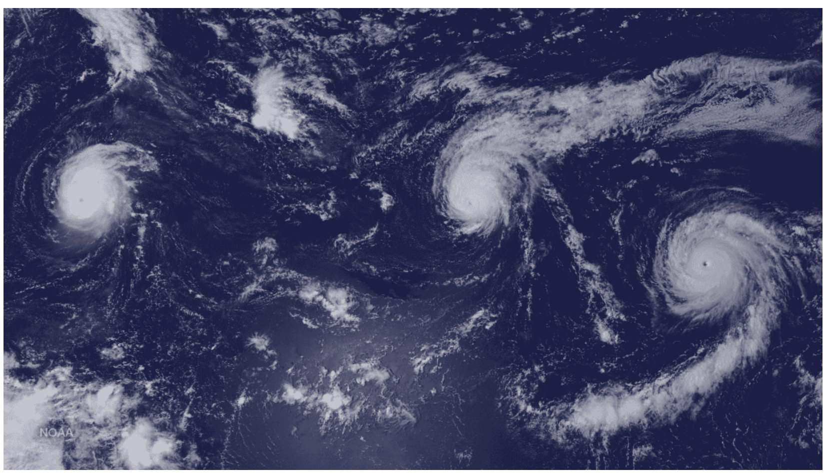
Σχήμα 5: t=45s

4 Συμπεράσματα

Χρησιμοποιώντας την Λαγκραζιανή μπορέσαμε να εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος των τριών σημειακών δινών.Καταλήξαμε σε έξι εξισώσεις κίνησης για τις συντεταγμένες κάθε δίνης και στην πορεία κάναμε μια μελέτη ως προς τις διατηρήσιμες ποσότητες του συστήματος.Είδαμε πως υπάρχουν αρκετές μάλιστα, μια από αυτές ήταν η ενέργεια μία ποσότητα που αναμένουμε να είναι διατηρήσιμη.

Παρόλο που το σύστημα είναι δύσκολο να λυθεί αναλυτικά, το γεγονός ότι αυτό ήταν ολοκληρώσιμο μας επέτρεψε να το λύσουμε αριθμητικά χρησιμοποιώντας τις έτοιμες βιβλιοθήκες της python και να φτιάξουμε γραφήματα με τις τροχιές των δινών.Σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη του συστήματος έπαιξε η ολική ισχύς Γ, είδαμε αναλυτικά τις περιπτώσεις που το Γ ήταν μηδέν αλλά και διαφορετικό του μηδενός.Στην πρώτη περίπτωση οι δίνες δεν φαίνονται να έχουν κάποιο σημείο που να περιστρέφονται γύρω από αυτό ενώ στην δεύτερη μπορούσαμε να διακρίνουμε τόσο στο γράφημα όσο και αναλυτικά ότι υπήρχε ένα κέντρο που διατηρούνταν σταθερό στην πάροδο του χρόνου και οι δίνες περιστρεφόταν γύρω από αυτό.

Τέλος χρησιμοποιώντας την ιδέα της μελέτης των πλευρών του τριγώνου που σχηματίζουν οι τρείς δίνες καταλήξαμε σε ένα απλοποιημένο σύστημα εξισώσεων κίνησης των πλευρών.Αυτή η απλοποιήση μας επέτρεψε να μελετήσουμε την μεταβολή των μηκών των πλευρών διότι επρόκειτο για ένα κλειστό ως προς C_1, C_2, C_3 σύστημα.Μία προφανής λύση ήταν η $C_1 = C_2 = C_3 \quad$: σταθερό, σύμφωνα με την οποία οι δίνες αρχικά βρίσκονται σε κορυφές ισόπλευρου τριγώνου και συνεχίζουν να ισαπέχουν μετά από κάθε χρονική στιγμή τ.



Σχήμα 6: Τρείς τυφώνες

Αναφορές

[1] Κομηνέας,Χαρμανδάρης *'Μαθηματική Μοντελοποίηση'* (Ηράκλειο,2015)

[2] https://demonstrations.wolfram.com/MotionOfThreeMagneticVortices/

[3] Gröbli, W *'Spezielle probleme über die bewegung geradliniger paralleler wirbelfäden'* (Zürich: Zürcher und Furrer, 1877)