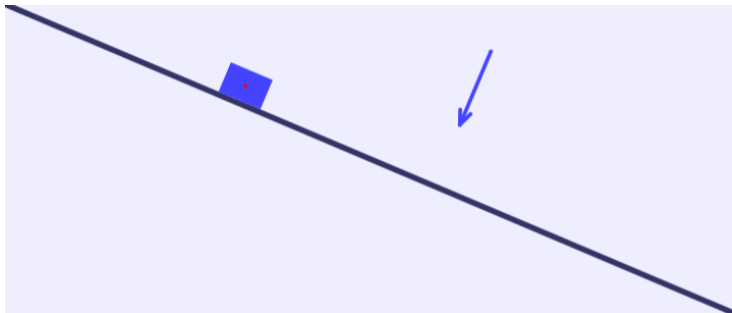


# Block on slope

Using online platform of Control Challenges

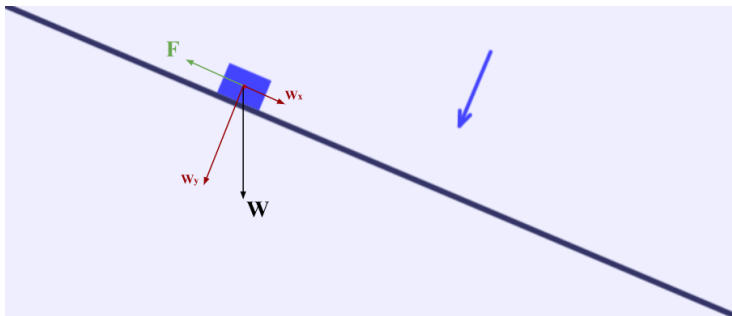


Βραχωρίτη Αλεξάνδρα, Κουβαράκης Μιχαήλ, Μπαθρέλλος Μιχαήλ, Τσιγκάκης Εμμανουήλ

**Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών,  
Πανεπιστήμιο Πατρών**

1 Ιουλίου 2025

# Περιγραφή του συστήματος



Σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο, χωρίς τριβή, στο οποίο ασκούνται:

- η δύναμη του βάρους  $W$  και
- εξωτερική δύναμη  $F$ .

# Στόχος της ανάλυσης

Σχεδιασμός κατάλληλου ελεγκτή  $K$  ώστε:

- το σώμα να ισορροπεί στο  $x = 0$  μετά από χρόνο  $T$  και
- το σύστημα να απορρίπτει τις διαταραχές.

# Στόχος της ανάλυσης

Σχεδιασμός κατάλληλου ελεγκτή  $K$  ώστε:

- το σώμα να ισορροπεί στο  $x = 0$  μετά από χρόνο  $T$  και
- το σύστημα να απορρίπτει τις διαταραχές.

Διαταραχή; Η δύναμη του βάρους, που αναλύεται σε δύο συνιστώσες:

- την παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο  $W_x = mgsin\theta$  και
- την κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο  $W_y = mgcos\theta$

# Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον άξονα x:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg \sin \theta - F = ma \quad (1)$$

# Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον άξονα  $x$ :

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg \sin \theta - F = ma \quad (1)$$

Ορίζονται οι καταστάσεις του συστήματος:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = g \sin \theta - \frac{F}{m} = a \quad (2)$$

# Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον άξονα  $x$ :

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg \sin \theta - F = ma \quad (1)$$

Ορίζονται οι καταστάσεις του συστήματος:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = g \sin \theta - \frac{F}{m} = a \quad (2)$$

Απουσία διαταραχής και βάσει των εξισώσεων (2) προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot F_{normalized}$$

# Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον άξονα  $x$ :

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg \sin \theta - F = ma \quad (1)$$

Ορίζονται οι καταστάσεις του συστήματος:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = g \sin \theta - \frac{F}{m} = a \quad (2)$$

Απουσία διαταραχής και βάσει των εξισώσεων (2) προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot F_{normalized}$$

Έτσι, η (μη-κανονικοποιημένη) συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι:

$$G(s) = -\frac{1}{s^2} \quad (3)$$



# Συνάρτηση μεταφοράς διαταραχής

Παρουσία της διαταραχής και βάσει των εξισώσεων (2) προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (g \sin \theta)$$

# Συνάρτηση μεταφοράς διαταραχής

Παρουσία της διαταραχής και βάσει των εξισώσεων (2) προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (g \sin \theta)$$

Έτσι, η (μη-κανονικοποιημένη) συνάρτηση μεταφοράς της διαταραχής είναι:

$$G_d(s) = \frac{1}{s^2} \quad (4)$$

# Σημεία λειτουργίας και μέγιστες αποκλίσεις

$$F_{normalized}^* = -5$$

$$x^* = 0$$

$$(g \cdot \sin\theta)^* = 5$$

$$\max\{\delta F_{normalized}\} = 10$$

$$\max\{\delta x\} = 2$$

$$\max\{\delta(g \cdot \sin\theta)\} = 5$$

# Κανονικοποιημένες συναρτήσεις μεταφοράς

## Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\delta y / \delta y_{max}}{\delta u / \delta u_{max}} = -\frac{1}{s^2} \frac{\delta u_{max}}{\delta y_{max}} = -\frac{1}{s^2} \frac{\max\{\delta F_{normalized}\}}{\max\{\delta x\}} = -\frac{5}{s^2}$$

## Συνάρτηση μεταφοράς διαταραχής

$$G_d(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{\delta y / \delta y_{max}}{\delta d / \delta d_{max}} = \frac{1}{s^2} \frac{\delta d_{max}}{\delta y_{max}} = \frac{1}{s^2} \frac{\max\{\delta(g \cdot \sin\theta)\}}{\max\{\delta x\}} = \frac{2.5}{s^2}$$

# Διαμόρφωση συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος ανοιχτού βρόχου (ΣΑΒ)

Loop shaping

Διαμόρφωση σημαίνει η  $L = KG$  να αποκτήσει συγκεκριμένο πλάτος, το οποίο θα οδηγήσει σε καθορισμένο εύρος ζώνης και περιθώριο φάσης.

Ο ελεγκτής  $K$  επιλέγεται ώστε:

- να μεγιστοποιηθεί το κέρδος στην περιοχή εύρους ζώνης.

# Inverse-based ελεγκτής

Ο inverse-based ελεγκτής ορίζεται ως:

$$K_0(s) = \frac{\omega_c}{s} G^{-1}(s)$$

και για  $\omega_c = \sqrt{2.5} \frac{rad}{sec}$  προκύπτει:

$$K_0(s) = \frac{\sqrt{2.5}}{s} \frac{s^2}{-5} \Rightarrow \boxed{K_0(s) = -0.31623s} \quad (5)$$

# Inverse-based ελεγκτής

Ο inverse-based ελεγκτής ορίζεται ως:

$$K_0(s) = \frac{\omega_c}{s} G^{-1}(s)$$

και για  $\omega_c = \sqrt{2.5} \frac{rad}{sec}$  προκύπτει:

$$K_0(s) = \frac{\sqrt{2.5}}{s} \frac{s^2}{-5} \Rightarrow \boxed{K_0(s) = -0.31623s} \quad (5)$$

Ο ελεγκτής είναι improper, άρα δεν είναι υλοποιήσιμος.

# Αναλογικός ελεγκτής - P controller (1)

## Ανάλυση ελεγκτή

Ο  $P$  ελεγκτής σχεδιάστηκε για την απόρριψη διαταραχών και ορίζεται ως:

$$K_1(s) = L_{min} G^{-1}$$

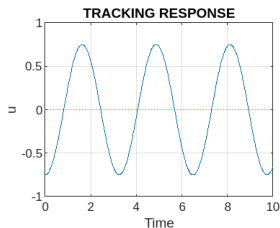
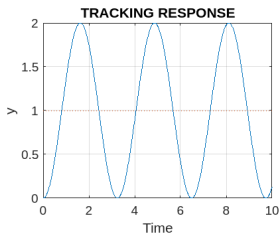
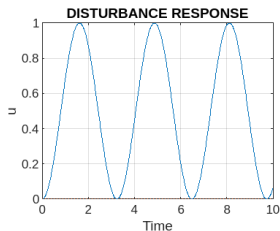
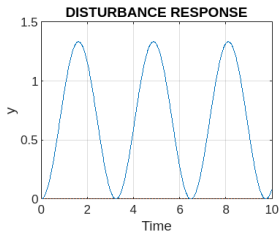
Για  $L_{min} = G_d$  προκύπτει:

$$K_1(s) = \frac{2.5}{s^2} \left( -\frac{s^2}{5} \right) \Rightarrow \boxed{K_1(s) = -0.5} \quad (6)$$



# Αναλογικός ελεγκτής - P controller (2)

Ανάλυση διαγραμμάτων απόκρισης



# Αναλογικός-Ολοκληρωτικός ελεγκτής - PI controller (1)

Ανάλυση ελεγκτή

Ο  $PI$  ελεγκτής σχεδιάστηκε για την προσθήκη κέρδους στις χαμηλές συχνότητες και ορίζεται ως:

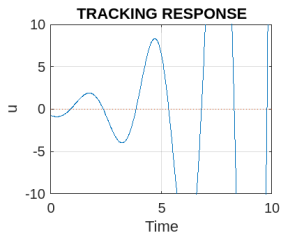
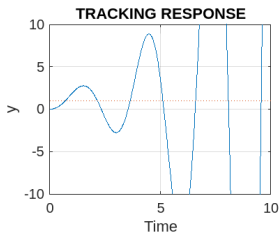
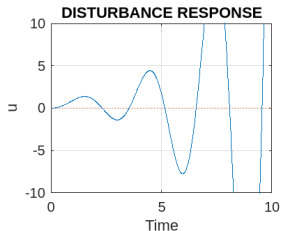
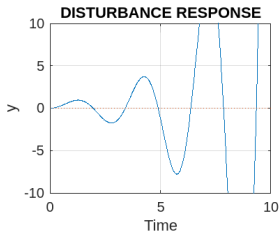
$$K_2(s) = K_1(s) \cdot \frac{s + \omega_I}{s}$$

Για  $\omega_I = 0.2\omega_c$  προκύπτει:

$$K_2(s) = -0.5 \cdot \frac{s + 0.3162}{s} \quad (7)$$

# Αναλογικός-Ολοκληρωτικός - PI controller (2)

Ανάλυση διαγραμμάτων απόκρισης



# Αναλογικός-Ολοκληρωτικός-Παραγωγικός Ελεγκτής - PID controller (1)

## Ανάλυση ελεγκτή

Ο *PID* ελεγκτής σχεδιάστηκε για την βελτίωση του περιθωρίου φάσης και ορίζεται ως:

$$K_3(s) = K_2(s) \frac{\tau_{lead}s + 1}{\tau_{lag}s + 1}$$

Για  $\tau_{lead} = \frac{1}{2\omega_c}$  και  $\tau_{lag} = \frac{1}{20\omega_c}$  προκύπτει:

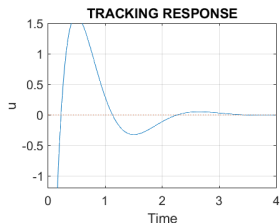
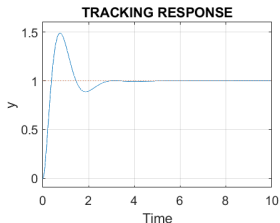
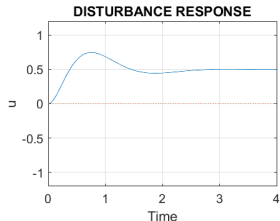
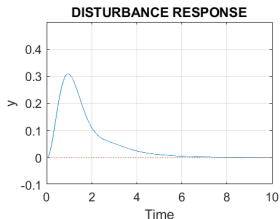
$$K_3(s) = K_2(s) \frac{\frac{1}{2\omega_c}s + 1}{\frac{1}{20\omega_c}s + 1}$$

και έπειτα από ρύθμιση των κερδών:

$$K_3(s) = -0.94868 \frac{(0.7906s + 1)(0.9882s + 1)}{s(0.09882s + 1)} \quad (8)$$

# Αναλογικός-Ολοκληρωτικός-Παραγωγικός Ελεγκτής - PID controller (2)

Ανάλυση διαγραμμάτων απόκρισης



# Υλοποίηση PID ελεγκτή στο πραγματικό σύστημα

Μετασχηματισμός ελεγκτή στον διακριτό χρόνο, με ρυθμό δειγματοληψίας 0.02 sec:

$$K_{3,discrete}(z) = \frac{-7.5z^2 + 14.6890z - 7.1925}{z^2 - 1.8168z + 0.8168} \quad (9)$$

# Υλοποίηση PID ελεγκτή στο πραγματικό σύστημα

Μετασχηματισμός ελεγκτή στον διακριτό χρόνο, με ρυθμό δειγματοληψίας 0.02 sec:

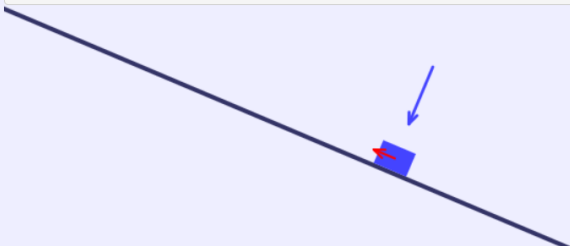
$$K_{3,discrete}(z) = \frac{-7.5z^2 + 14.6890z - 7.1925}{z^2 - 1.8168z + 0.8168} \quad (9)$$

Εφαρμόζοντας είσοδο:  $a^* + \Delta a_{max} \cdot u(k) = -5 + 10 \cdot u(k)$  με  $u(k) = 1.8168u(k-1) - 0.8168u(k-2) - 7.5e(k) + 14.6890e(k-1) - 7.1925e(k-2)$  το σώμα ισορροπεί στη θέση  $x = 0$  μετά από χρόνο  $T = 2.6$  sec.

# Αποτελέσματα Προσομοίωσης

Το σώμα ισορροπεί σε 2.6 sec!

```
u = 2.4877  
dt = 0.02  
error = 0.0026  
/* Position      */ block.x = 0.01  
/* Velocity      */ block.dx = 0.01  
/* Simulation time */ block.T = 2.6
```





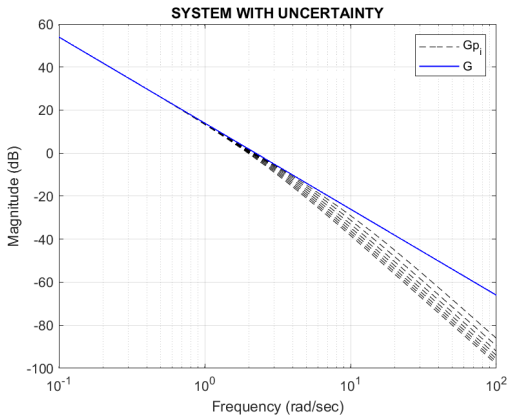
# Ανάλυση Αβεβαιότητας

- 1 Σε κανένα σύστημα δεν μπορούμε να ξέρουμε επ' ακριβώς την δυναμική του.
- 2 Από τον κώδικα της προσομοίωσης παρατηρούμε ένα βαθυπερατό φίλτρο στην εφαρμογή της  $\mu$ .
- 3 Τι σημαίνει αυτό; Η δύναμη δεν ασκείται ακαριαία. Η παράλειψη αυτής της δυναμικής στην μοντελοποίηση είναι η αβεβαιότητα του συστήματος.

# Μοντελοποίηση αβεβαιότητας (1)

Θεωρώντας ότι η  $G(s)$  έχει έναν επιπλέον πόλο, το σύνολο των

πιθανών συστημάτων είναι:  $G_{p_i}(s) = -\frac{5}{s^2} \cdot \frac{1}{\tau s + 1}$ , όπου  $\tau \in [0.1, 0.4]$ .



## Μοντελοποίηση Αβεβαιότητας (2)

Θα πρέπει να ισχύουν οι:

$$|w_I(j\omega)| \geq |I_I(\omega)|, \forall \omega$$

$$|I_I(\omega)| = \max \left| \frac{G_p(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right|$$

## Μοντελοποίηση Αβεβαιότητας (2)

Θα πρέπει να ισχύουν οι:

$$|w_I(j\omega)| \geq |I_I(\omega)|, \forall \omega$$

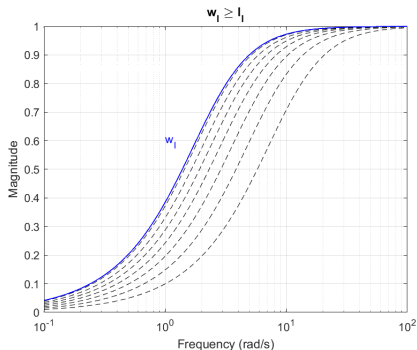
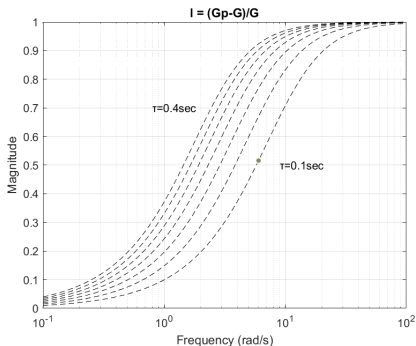
$$|I_I(\omega)| = \max \left| \frac{G_p(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right|$$

και τελικά ορίζουμε:

$$w_I = \frac{s}{s + 2.4} \quad (10)$$

$$G_{p_i}(s) = -\frac{5}{s^2} \left( 1 + \frac{s}{s + 2.4} \Delta_I(s) \right), \quad |\Delta_I(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (11)$$

# Μοντελοποίηση Αβεβαιότητας (3)



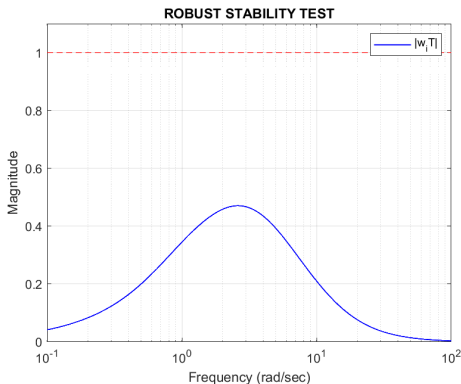
# Ανάλυση Σθεναρής Ευστάθειας

Εγγυάται ο ελεγκτής μας ευστάθεια για κάθε πιθανή αβεβαιότητα;

# Ανάλυση Σθεναρής Ευστάθειας

Εγγυάται ο ελεγκτής μας ευστάθεια για κάθε πιθανή αβεβαιότητα;

Κριτήριο Σθεναρής Ευστάθειας:  $RS \Leftrightarrow ||w_l T||_{\infty} < 1$



# Ανάλυση Σθεναρής Απόδοσης

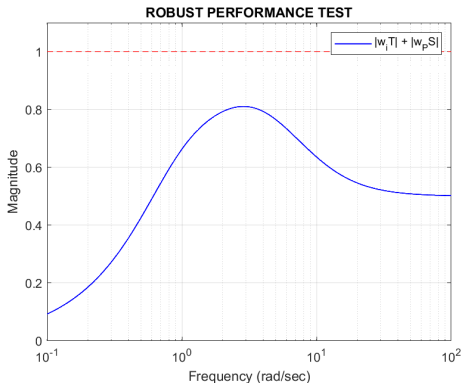
Πληροί ο ελεγκτής μας τις προδιαγραφές για κάθε πιθανή αβεβαιότητα;



# Ανάλυση Σθεναρής Απόδοσης

Πληροί ο ελεγκτής μας τις προδιαγραφές για κάθε πιθανή αβεβαιότητα;

Κριτήριο Σθεναρής Απόδοσης:  $RP \Leftrightarrow |w_I T| + |w_P S| < 1, \forall \omega$



Σας ευχαριστούμε για την προσοχή σας!

Ερωτήσεις;