Σθεναρός Έλεγχος - Εργασία 3: Elements of Linear System Theory, MIMO Systems and Norms

Ονοματεπώνυμο: Βραχωρίτη Αλεξάνδρα (Α.Μ.: 1092793)

25 Μαΐου 2025

Tasks

1. Δίνεται ο πίνακας μεταφοράς ενός συστήματος ως:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{11s^3-18s^2-70s-50}{s(s+10)(s+1)(s-5)} & \frac{s+2}{(s+1)(s-5)} \\ \frac{5(s+2)}{(s+1)(s-5)} & \frac{5(s+2)}{(s+1)(s-5)} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s-5)} \begin{bmatrix} \frac{11s^3-18s^2-70s-50}{s(s+10)} & s+2 \\ 5(s+2) & 5(s+2) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Πρόκειται για ένα MIMO σύστημα και άρα ο προσδιορισμός των μηδενικών και των πόλων του θα πρέπει να γίνει προσεκτικά. Ξεκινώντας από τους πόλους, θα προσδιορίσουμε τα minors, δηλαδή τις ορίζουσες κάθε υποπίνακα του G και έπειτα, θα εξάγουμε τον ελάχιστο κοινό παρονομαστή τους ($\varphi(s)$). Έχουμε, λοιπόν, τα minors 1ης τάξης:

$M_{11}(s) = \frac{11s^3-18s^2-70s-50}{s(s+10)(s+1)(s-5)}$

$M_{12}(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-5)}$

$M_{13}(s) = \frac{5(s+2)}{(s+1)(s-5)}$

$M_{14}(s) = \frac{5(s+2)}{(s+1)(s-5)}$

και το minor 2ης τάξης:

$M_{21}(s) = det(G(s)) = \frac{11s^3-18s^2-70s-50}{s(s+10)(s+1)(s-5)} \cdot \frac{5(s+2)}{(s+1)(s-5)} - \frac{5(s+2)}{(s+1)(s-5)} \cdot \frac{s+2}{(s+1)(s-5)} = \frac{50(s+2)}{s(s+10)(s-5)}$

Έτσι, ο ελάχιστος κοινός παρονομαστής των minors είναι: $\boldsymbol{\varphi(s) = s(s+1)(s-5)(s+10)}$ και τελικά οι πόλοι είναι: $s = 0$, $s = -1$, $s = 5$, $s = -10$. Επειδή ο πίνακας μεταφοράς είναι 2×2 υπάρχει μόνο 1 minor 2ης τάξης, όπως δείξαμε παραπάνω και είναι αυτό που καθορίζει τα μηδενικά του συστήματος. Γενικά, ισχύει:

$$det(G(s)) = \frac{z(s)}{\varphi(s)} \tag{2}$$

και σύμφωνα με το $M_{12}(s)$ προκύπτει:

$det(G(s)) = \frac{50(s+2)(s+1)^4(s-5)^3}{s(s+10)(s-5)^4(s+1)^4} = \frac{50(s+2)(s+1)}{s(s+10)(s-5)(s+1)}$

και εφόσον η det(G(s)) είναι στη μορφή $\frac{z(s)}{\varphi(s)}$, προκύπτει: $\mathbf{z(s) = 50(s+2)(s+1)}$. Επομένως, υπάρχουν 2 LHP-zeros στο $s = -1$ και στο $s = -2$. Ωστόσο, όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, δεν αρκεί μόνο να προσδιορίσουμε την ύπαρξη πόλων και μηδενικών σε ένα MIMO σύστημα. Πολύ σημαντικό ρόλο παίζει και η κατεύθυνση των διανυσμάτων εισόδου/εξόδου των πόλων και των μηδενικών.

Input/Output (u_z/y_z) Zero Direction

- Θα προσδιορίσουμε την **(1)**, για $s = -1$:

$$G(z_1+\varepsilon) = G(-1+\varepsilon) = \tfrac{1}{(-1+\varepsilon+1)(-1+\varepsilon-5)} \begin{bmatrix} \frac{11(-1+\varepsilon)^3-18(-1+\varepsilon)^2-70(-1+\varepsilon)-50}{(-1+\varepsilon)((-1+\varepsilon)+10)} & (-1+\varepsilon)+2 \\ 5((-1+\varepsilon)+2) & 5((-1+\varepsilon)+2) \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας το ε μια πολύ μικρή ποσότητα αρκετά κοντά στο 0, μπορούμε να θεωρήσουμε:

$$G(z_1+\varepsilon) = G(-1+\varepsilon) = \tfrac{1}{\varepsilon(-6)} \begin{bmatrix} \frac{-9}{(-1)9} & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{-6\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας πρέπει να γραφεί στη μορφή $G(s) = U\Sigma V^H$, με τον πίνακα Σ να είναι της μορφής $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Για την εξαγωγή των U, Σ, V θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση svd() της MATLAB:

$$G(z_1+\varepsilon) = G(-1+\varepsilon) = \tfrac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} -0.1961 & -0.9806 \\ -0.9806 & 0.1961 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2019 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}^H$$

Τα u_{z_1}, y_{z_1} σχετίζονται με την μηδενική singular value του πίνακα Σ, δηλαδή το στοιχείο με τιμή 0 στην κύρια διαγώνιο. Το u_{z_1} ταυτίζεται με την δεξιά στήλη του V (πίνακας που δηλώνει τη βάση της εισόδου) και το y_{z_1} ταυτίζεται με την δεξιά στήλη του U (πίνακας που δηλώνει τη βάση της εξόδου). Άρα, έχουμε:

$$u_{z_1} = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix} \text{ και } y_{z_1} = \begin{bmatrix} -0.9806 \\ 0.1961 \end{bmatrix}$$

- Θα προσδιορίσουμε την **(1)**, για $s = -2$:

$$G(z_2) = G(-2) = \tfrac{1}{(-2+1)(-2-5)} \begin{bmatrix} \frac{11(-2)^3-18(-2)^2-70(-2)-50}{(-2)((-2)+10)} & (-2)+2 \\ 5((-2)+2) & 5((-2)+2) \end{bmatrix} = \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} \frac{35}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας πρέπει να γραφεί στη μορφή $G(s) = U\Sigma V^H$, άρα:

$$G(z_2) = G(-2) = \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{35}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^H$$

$$u_{z_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } y_{z_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Input/Output (u_{p_i}/y_{p_i}) Pole Direction

- Θα προσδιορίσουμε την **(1)**, για $s = 0$:

$$G(p_1+\varepsilon) = G(0+\varepsilon) = G(\varepsilon) = \tfrac{1}{(\varepsilon+1)(\varepsilon-5)} \begin{bmatrix} \frac{11\varepsilon^3-18\varepsilon^2-70\varepsilon-50}{\varepsilon(\varepsilon+10)} & \varepsilon+2 \\ 5(\varepsilon+2) & 5(\varepsilon+2) \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας το ε μια πολύ μικρή ποσότητα αρκετά κοντά στο 0, ο όρος $11\varepsilon^3 - 18\varepsilon^2 - 70\varepsilon$ λαμβάνει πολύ μικρή τιμή σε σχέση με το -50, όπως επίσης και ο όρος $\varepsilon + 10$ μπορεί να θεωρηθεί ίσος με 10. Κάνοντας, λοιπόν, όλες τις αντίστοιχες παραδοχές στους υπόλοιπους όρους καταλήγουμε στο:

$$G(p_1+\varepsilon) = G(0+\varepsilon) = G(\varepsilon) \approx -\tfrac{1}{5} \begin{bmatrix} \frac{-50}{10\varepsilon} & 2 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{5} \begin{bmatrix} -\frac{5}{\varepsilon} & 2 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5}\varepsilon \\ -2\varepsilon & -2\varepsilon \end{bmatrix}$$

Για $\varepsilon \to 0$, από την ανάλυση SVD έχουμε: $G(p_1+\varepsilon) = \tfrac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^H$

Τα u_{p_1}, y_{p_1} σχετίζονται με την μέγιστη singular value του πίνακα Σ, δηλαδή το στοιχείο με τιμή 1 στην κύρια διαγώνιο. Το u_{p_1} ταυτίζεται με την αριστερή στήλη του V (πίνακας που δηλώνει τη βάση της εισόδου) και το y_{p_1} ταυτίζεται με την αριστερή στήλη του U (πίνακας που δηλώνει τη βάση της εξόδου). Άρα, έχουμε:

$$u_{p_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } y_{p_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Τώρα, θα προσδιορίσουμε την **(1)**, για $s = -1$:

$$G(p_2 + \varepsilon) = G(-1 + \varepsilon) = \frac{1}{(-1+\varepsilon+1)(-1+\varepsilon-5)} \begin{bmatrix} \frac{11(-1+\varepsilon)^3 - 18(-1+\varepsilon)^2 - 70(-1+\varepsilon) - 50}{(-1+\varepsilon)(-1+\varepsilon+10)} & -1 + \varepsilon + 2 \\ 5(-1 + \varepsilon + 2) & 5(-1 + \varepsilon + 2) \end{bmatrix}$$

$$\approx \frac{1}{-6\varepsilon} \begin{bmatrix} \frac{-11(-1) - 18(1) - 70(-1) - 50}{-9} & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6\varepsilon} \begin{bmatrix} -\frac{13}{9} & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \frac{13}{54} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Για $\varepsilon \to 0$, από την ανάλυση SVD έχουμε: $G(p_2+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} -0.0472 & 0.9989 \\ 0.9989 & 0.0472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1797 & 0 \\ 0 & 0.2878 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7152 & 0.6989 \\ -0.6989 & -0.7152 \end{bmatrix}^H$

Τα u_{p_2}, y_{p_2} σχετίζονται με την μέγιστη singular value του πίνακα Σ, δηλαδή το στοιχείο με τιμή 1.1797 στην κύρια διαγώνιο. Άρα, έχουμε:

$$u_{p_2} = \begin{bmatrix} -0.7152 \\ -0.6989 \end{bmatrix} \text{ και } y_{p_2} = \begin{bmatrix} -0.0472 \\ 0.9989 \end{bmatrix}$$

- Αντίστοιχα, η **(1)**, για $s = 5$:

$$G(p_3 + \varepsilon) = G(5 + \varepsilon) = \frac{1}{(5+\varepsilon+1)(5+\varepsilon-5)} \begin{bmatrix} \frac{11(5+\varepsilon)^3 - 18(5+\varepsilon)^2 - 70(5+\varepsilon) - 50}{(5+\varepsilon)(5+\varepsilon+10)} & 5 + \varepsilon + 2 \\ 5(5 + \varepsilon + 2) & 5(5 + \varepsilon + 2) \end{bmatrix}$$

$$\approx \frac{1}{6\varepsilon} \begin{bmatrix} \frac{11(5^3) - 18(5^2) - 70(5) - 50}{(5)(15)} & 7 \\ 35 & 35 \end{bmatrix} = \frac{1}{6\varepsilon} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 35 & 35 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{7}{6} \\ \frac{35}{6} & \frac{35}{6} \end{bmatrix}$$

Για $\varepsilon \to 0$, από την ανάλυση SVD έχουμε: $G(p_3+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} -0.1961 & -0.9806 \\ -0.9806 & 0.1961 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.413 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}^H$

Τα u_{p_3}, y_{p_3} σχετίζονται με την μέγιστη singular value του πίνακα Σ, δηλαδή το στοιχείο με τιμή 8.413 στην κύρια διαγώνιο. Άρα, έχουμε:

$$u_{p_3} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix} \text{ και } y_{p_3} = \begin{bmatrix} -0.1961 \\ -0.9806 \end{bmatrix}$$

- Τέλος, η **(1)**, για $s = -10$:

$$G(p_4 + \varepsilon) = G(-10 + \varepsilon) = \frac{1}{(-10+\varepsilon+1)(-10+\varepsilon-5)} \begin{bmatrix} \frac{11(-10+\varepsilon)^3 - 18(-10+\varepsilon)^2 - 70(-10+\varepsilon) - 50}{(-10+\varepsilon)(-10+\varepsilon+10)} & -10 + \varepsilon + 2 \\ 5(-10 + \varepsilon + 2) & 5(-10 + \varepsilon + 2) \end{bmatrix}$$

$$\approx \frac{1}{(-9)(-15)} \begin{bmatrix} \frac{11(-10)^3 - 18(-10)^2 - 70(-10) - 50}{(-10)\varepsilon} & -8 \\ -40 & -40 \end{bmatrix} = \frac{1}{135} \begin{bmatrix} \frac{-12150}{(-10)\varepsilon} & -8 \\ -40 & -40 \end{bmatrix} = \frac{1}{135\varepsilon} \begin{bmatrix} 1215 & -8\varepsilon \\ -40\varepsilon & -40\varepsilon \end{bmatrix}$$

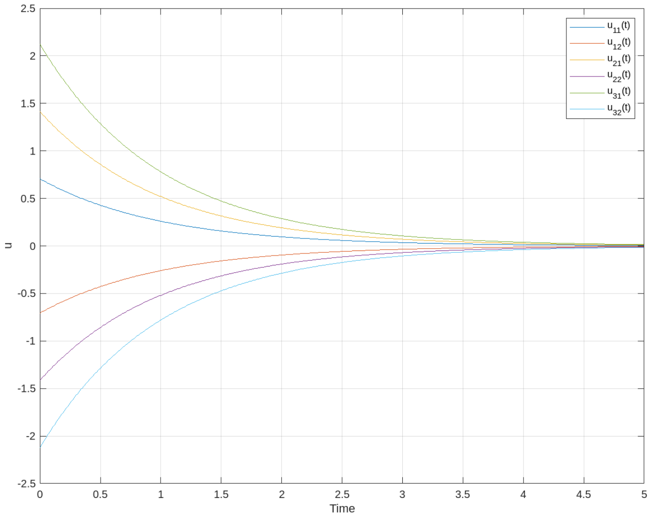
$$= \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \frac{1215}{135} & \frac{-8\varepsilon}{135} \\ \frac{-40\varepsilon}{135} & \frac{-40\varepsilon}{135} \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 9 & \frac{-8\varepsilon}{135} \\ \frac{-8\varepsilon}{27} & \frac{-8\varepsilon}{27} \end{bmatrix}$$

Για $\varepsilon \to 0$, από την ανάλυση SVD έχουμε: $G(p_4 + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^H$

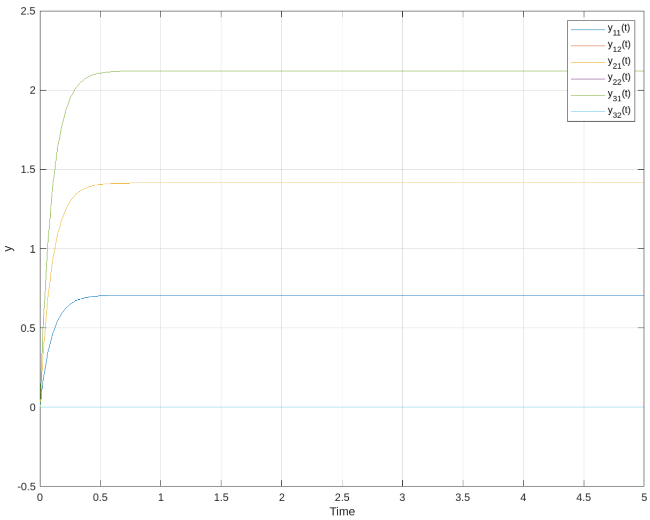
Τα u_{p_4}, y_{p_4} σχετίζονται με την μέγιστη singular value του πίνακα Σ, δηλαδή το στοιχείο με τιμή 9 στην κύρια διαγώνιο. Άρα, έχουμε:

$$u_{p_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } y_{p_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένα σήμα εισόδου δεν επιδρά στην έξοδο όταν έχει την κατεύθυνση ενός μηδενικού. Παραπάνω, ορίσαμε 2 μηδενικά με διαφορετικές κατευθύνσεις. Παίρνοντας την κατεύθυνση εισόδου u_{z_1} δημιουργούμε το διάνυσμα εισόδου $u(t) = u_{z_1} e^{z_1 t}$, όπου $z_1 = -1$ και με τη βοήθεια της lsim() προσδιορίζουμε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος. Για να εντοπίσουμε αν πραγματικά η είσοδος δεν επιδρά στην έξοδο θα κάνουμε plot με τη βοήθεια της MATLAB την τιμή της εξόδου για είσοδο $u(t)$, $2u(t)$ και $3u(t)$.



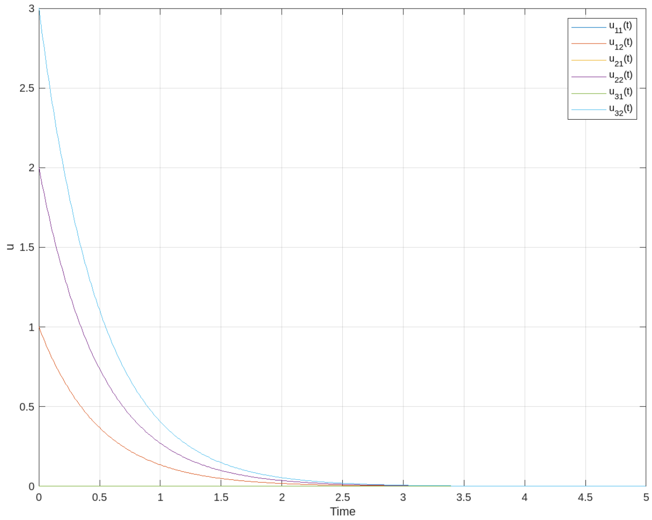
Διάγραμμα 1.1. Το σήμα εισόδου $a \cdot u(t)$ στην κατεύθυνση u_{z_1}, για $a = 1,\ 2,\ 3$.



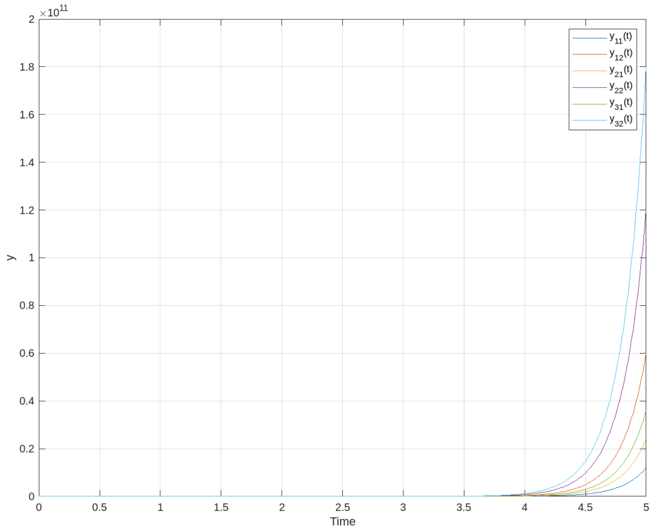
Διάγραμμα 1.2. Το σήμα εξόδου $y(t)$ για είσοδο στην κατεύθυνση u_{z_1}, για $a = 1,\ 2,\ 3$.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα Διαγράμματα 1.1 και 1.2, διπλασιάζοντας την είσοδο, διπλασιάζεται και η έξοδος. Ομοίως, τριπλασιάζοντας την είσοδο, τριπλασιάζεται και η έξοδος. Επιπλέον, η τιμή της εξόδου δεν είναι μηδενική για την μία εκ των δύο εισόδων του διανύσματος u και στις 3 περιπτώσεις. Η επίδραση της εισόδου στην έξοδο είναι εμφανής.

Παίρνοντας τώρα την κατεύθυνση εισόδου u_{z_2} δημιουργούμε το διάνυσμα εισόδου $u(t) = u_{z_2} e^{z_2 t}$, όπου $z_2 = -1$. Όμοια με πριν έχουμε:



Διάγραμμα 2.1. Το σήμα εισόδου $a \cdot u(t)$ στην κατεύθυνση u_{z_2}, για $a = 1,\ 2,\ 3.$



Διάγραμμα 2.2. Το σήμα εξόδου $y(t)$ για είσοδο στην κατεύθυνση u_{z_2}, για $a = 1,\ 2,\ 3.$

Από τα Διαγράμματα 2.1 και 2.2, διπλασιάζοντας την είσοδο, διπλασιάζεται και η έξοδος. Ομοίως, τριπλασιάζοντας την είσοδο, τριπλασιάζεται και η έξοδος. Επιπλέον, η τιμή της εξόδου δεν είναι μηδενική για την μία εκ των δύο εισόδων του διανύσματος u και στις 3 περιπτώσεις. Στο διάγραμμα φαίνεται σαν να είναι μηδέν για κάποιο χρόνο η έξοδος, αλλά αν κάνουμε μεγένθυση του διαγράμματος θα διαπιστώσουμε πως αυτό δεν ισχύει. Άρα, η είσοδος δεν αφήνει ανεπηρέαστη την έξοδο.

Τελικά, δεν υπάρχει κάποια είσοδος για την οποία η έξοδος παραμένει ανεπηρέαστη.

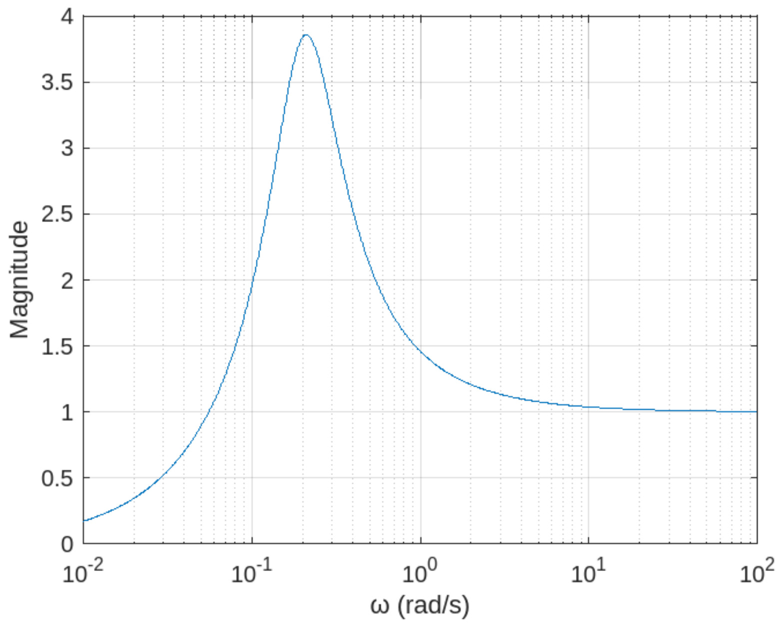
2. Για το σύστημα που μας δίνεται θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ανοιχτού βρόχου L(s) και έπειτα, τη συνάρτηση ευαισθησίας $S(s)$:

$L(s) = G(s)K(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10s} & -\frac{9}{200s} \\ \frac{7}{10s} & \frac{1}{10s} \end{bmatrix}$ και $S(s) = (I + G(s)K(s))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s(10s+1)200}{2000s^2+400s+83} & \frac{90s}{2000s^2+400s+83} \\ \frac{1400s}{2000s^2+400s+83} & \frac{s(10s+1)200}{2000s^2+400s+83} \end{bmatrix}$

Η άπειρη νόρμα της συνάρτησης ευαισθησίας ισούται με τη μέγιστη singular value της συνάρτησης, δηλαδή: $||S(s)||_\infty = max\bar{\sigma}(S(j\omega))$. Για να βρούμε την τιμή αυτή θα πρέπει:

1. να προσδιορίσουμε την $S(j\omega)$, $\forall\omega$,
2. $\forall S(j\omega_i)$ να βρούμε τον πίνακα Σ_i από την SVD ανάλυση,
3. να αποθηκεύσουμε την μέγιστη τιμή του Σ_i, δηλαδή το πρώτο στοιχείο, σε έναν ξεχωριστό πίνακα, τον οποίο έχουμε δημιουργήσει για να αποθηκεύουμε όλες τις μέγιστες singular values της $S(j\omega), \forall\omega$,
4. από τον παραπάνω πίνακα να εξάγουμε την μέγιστη singular value.

Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα με τη βοήθεια της MATLAB καταλήγουμε στην $||S(s)||_\infty = 3.8568$, στην συχνότητα $\omega = 0.21151\frac{rad}{sec}$.



Διάγραμμα 3. Το Bode διάγραμμα της συνάρτησης ευαισθησίας S.

Για να προσδιορίσουμε ένα reference input signal r(t) το οποίο μεγιστοποιεί το σφάλμα παρακολούθησης (trachinkg error) θα πρέπει να εργαστούμε ως εξής:

1. Tracking Error: $e(t) = r(t) - y(t)$
2. Μετασχηματισμός Laplace: $e(s) = r(s) - y(s)$
3. Για το σύστημα κλειστού βρόχου: $r(s)T(s) = y(s)$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε: $e(s) = r(s) - r(s)T(s) = r(s)(I - T(s)) = r(s)S(s)$. Έτσι, το μέγιστο σφάλμα παρακολούθησης επιτυγχάνεται για είσοδο που βρίσκεται στην κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος εκείνου που προκύπτει από την ανάλυση SVD που δίνει τη μέγιστη singular value της $S(j\omega)$. Παραπάνω, δείξαμε ότι στη συχνότητα $\omega = 0.21151\frac{rad}{sec}$ έχουμε:

$$U = \begin{bmatrix} -0.1374 - 0.2672i & -0.8791 - 0.3701i \\ 0.9507 - 0.0771i & -0.2139 + 0.2109i \end{bmatrix}$$

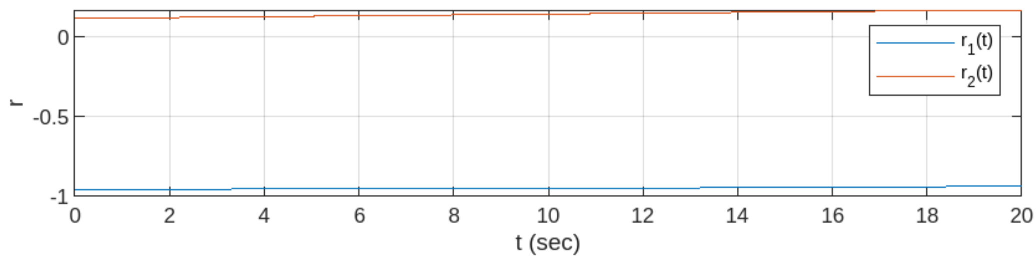
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3.8568 & 0 \\ 0 & 0.2734 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.9538 & -0.3004 \\ 0.1153 - 0.2774i & -0.3661 + 0.8807i \end{bmatrix}$$

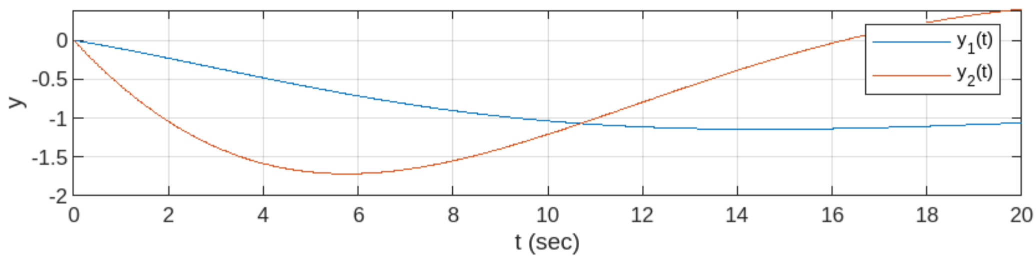
Το ιδιοδιάνυσμα που αφορά την μέγιστη singular value και σχετίζεται με την είσοδο είναι το:

$$r* = \begin{bmatrix} -0.9538 \\ 0.1153 - 0.2774i \end{bmatrix}$$

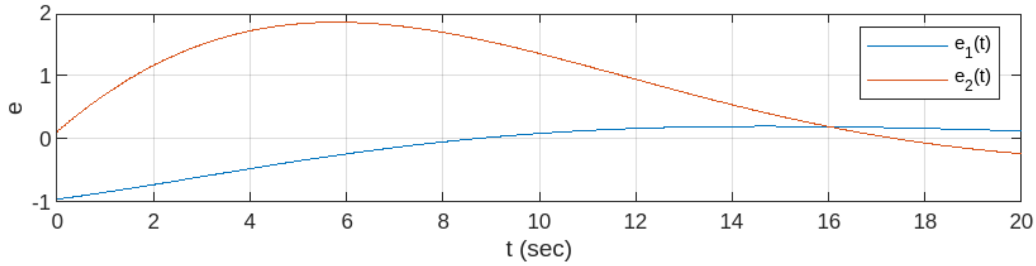
Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε το reference input signal: $r(t) = r^* e^{j\omega^* t}$, όπου $\omega^* = \omega = 0.21151 \frac{rad}{sec}$. Εδώ θα πρέπει να προσέξουμε να κρατήσουμε μόνο τις πραγματικές τιμές της συνάρτησης. Με τη βοήθεια της lsim() της MATLAB και αφού ορίσουμε την συνάρτηση συμπληρωματικής ευαισθησίας ($T(s)$), προσδιορίζουμε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος. Έτσι, έχουμε όλα όσα χρειαζόμαστε για να βρούμε το σφάλμα παρακολούθησης.



Διάγραμμα 4.1 Η χρονική απόκριση του reference input signal $r(t)$.



Διάγραμμα 4.2 Η χρονική απόκριση του output signal $y(t)$.



Διάγραμμα 4.3 Η χρονική απόκριση του tracking error $e(t)$.

Τελικά, το reference input signal που προκαλεί το μέγιστο tracking error είναι το: $r(t) = \Re(\begin{bmatrix} -0.9538 \\ 0.1153 - 0.2774i \end{bmatrix} e^{j0.21151t})$,