

# Συνάρτηση μεταφοράς Ελεγχος - Εργασία 1: Classical control / SISO loop-shaping

Ονοματεπώνυμο: Βραχωρίτη Αλεξάνδρα (Α.Μ.: 1092793)

06 Απριλίου 2025

## Tasks

1. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός Συστήματος Ανοιχτού Βρόχου (ΣΑΒ) δίνεται από τη σχέση:

$$L(s) = KG(s) = K \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{m-1})(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{n-1})(s-p_n)}, \text{ όπου:}$$

$N(s)$  το πολυώνυμο που εκφράζει τα μηδενικά του ΣΑΒ,  
 $D(s)$  το πολυώνυμο που εκφράζει τους πόλους του ΣΑΒ.

- Αν το σύστημα έχει έναν πόλο ( $p_k$ ) στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο (RHP pole), τότε θα ισχύει:

$$\lim_{s \rightarrow p_k} K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{m-1})(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{n-1})(s-p_n)} = \lim_{s \rightarrow p_k} L(s) = \infty, \text{ με } 0 \leq k \leq n \text{ και } p_k \geq 0$$

Η συνάρτηση ευασθησίας ( $S(s)$ ) του Συστήματος Κλειστού Βρόχου (ΣΚΒ) δίνεται από τη σχέση:

$$S(s) = \frac{1}{1+KG(s)} = \frac{1}{1+L(s)}. \text{ Όταν } s \rightarrow p_k, L(s) \rightarrow \infty, \text{ επομένως και } 1+L(s) \rightarrow \infty. \text{ Συνεπώς, θα ισχύει:}$$

$$\lim_{s \rightarrow p_k} S(s) = \lim_{s \rightarrow p_k} \frac{1}{1+L(s)} = 0.$$

Θεωρώντας την  $S(s)$  ρητή συνάρτηση, ο μόνος τρόπος για να μηδενιστεί στο σημείο  $s = p_k$  είναι ο αριθμητής να μηδενίζεται στο σημείο αυτό. Επομένως, διαπιστώνουμε πως η  $S(s)$  έχει μηδενικό στο  $s = p_k$  (RHP zero). Αυτό, μπορούμε εύκολα να το διαπιστώσουμε γράφοντας αναλυτικότερα την  $S(s)$ :

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1+L(s)} \Rightarrow \\ S(s) &= \frac{1}{1+K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{m-1})(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{n-1})(s-p_n)}} \Rightarrow \\ S(s) &= \frac{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{n-1})(s-p_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{n-1})(s-p_n)+K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{m-1})(s-z_m)}, \end{aligned}$$

όπου στο  $s = p_k$  ο αριθμητής μηδενίζεται, άρα η συνάρτηση ευασθησίας του ΣΚΒ έχει μηδενικό στο ίδιο σημείο όπου η συνάρτηση μεταφοράς του ΣΑΒ έχει πόλο.

- Αν το σύστημα έχει έναν μηδενικό ( $z_k$ ) στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο (RHP zero), τότε θα ισχύει:

$$\lim_{s \rightarrow z_k} K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{m-1})(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{n-1})(s-p_n)} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow z_k} L(s) = 0, \text{ με } 0 \leq k \leq n \text{ και } z_k \geq 0$$

Η συνάρτηση συμπληρωματικής ευασθησίας ( $T(s)$ ) του ΣΚΒ δίνεται από τη σχέση:

$$T(s) = \frac{GK(s)}{1+KG(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}. \text{ Όταν } s \rightarrow z_k, L(s) \rightarrow 0, \text{ επομένως } 1+L(s) \rightarrow 1. \text{ Συνεπώς, θα ισχύει:}$$

$$\lim_{s \rightarrow z_k} T(s) = \lim_{s \rightarrow z_k} \frac{L(s)}{1+L(s)} = 0.$$

Θεωρώντας την  $T(s)$  μια ρητή συνάρτηση, ο μόνος τρόπος για να μηδενιστεί στο σημείο  $s = z_k$  είναι ο αριθμητής να μηδενίζεται στο σημείο αυτό. Επομένως, διαπιστώνουμε πως η  $T(s)$  έχει μηδενικό στο  $s = z_k$  (RHP zero). Αυτό, μπορούμε εύκολα να το διαπιστώσουμε γράφοντας αναλυτικότερα την  $T(s)$ :

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{L(s)}{1+L(s)} \Rightarrow \\ T(s) &= \frac{K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{m-1})(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{n-1})(s-p_n)}}{1+K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{m-1})(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{n-1})(s-p_n)}} \Rightarrow \\ T(s) &= \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{m-1})(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{n-1})(s-p_n)+K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{m-1})(s-z_m)}, \end{aligned}$$

όπου στο  $s = z_k$  ο αριθμητής μηδενίζεται, άρα η συνάρτηση συμπληρωματικής ευασθησίας του ΣΚΒ έχει μηδενικό στο ίδιο σημείο όπου η συνάρτηση μεταφοράς του ΣΑΒ έχει μηδενικό.

**2.** Δεδομένων των συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος και των διαταραχών που δίνονται, και σε συνδυασμό με τις προδιαγραφές του συστήματος θα προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε έναν κατάλληλο ελεγκτή που να τις ικανοποιεί όλες. Πριν από αυτό θα πρέπει να κανονικοποιήσουμε το σύστημα, προκειμένου να απλοποιήσουμε την ανάλυση και να εξάγουμε ευκολότερα τα συμπεράσματά μας. Από δεδομένα έχουμε (τις μη-κανονικοποιημένες):

$$\hat{y} = \hat{G}(s)\hat{u} + \hat{G}_d(s)\hat{d} \quad (1), \text{ με } |\hat{d}| < 2, |\hat{u}| < 3 \text{ και } |\hat{y}| < 0.1, \forall t$$

$$\hat{G}(s) = \frac{6}{(8s+1)(0.04s+1)^2}$$

$$\hat{G}_d(s) = \frac{4.5}{8s+1}$$

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, πως  $d_{max} = 2$ ,  $u_{max} = 3$  και  $y_{max} = 0.1$ . Επομένως, οι κανονικοποιημένες τιμές θα είναι:

$$\begin{aligned} d &= \hat{d}/\hat{d}_{max} \Rightarrow \hat{d} = d \cdot \hat{d}_{max} \Rightarrow \hat{d} = 2d \\ u &= \hat{u}/\hat{u}_{max} \Rightarrow \hat{u} = u \cdot \hat{u}_{max} \Rightarrow \hat{u} = 3u \\ y &= \hat{y}/\hat{y}_{max} \Rightarrow \hat{y} = y \cdot \hat{y}_{max} \Rightarrow \hat{y} = 0.1y \end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow 0.1y = \hat{G}(s)3u + \hat{G}_d(s)2d$$

$$\Rightarrow y = [30\hat{G}(s)]u + [20\hat{G}_d(s)]d$$

$$\Rightarrow y = G(s)u + G_d(s)d \quad (2), \text{ όπου } G(s) = \frac{180}{(8s+1)(0.04s+1)^2} \text{ και } G_d(s) = \frac{90}{8s+1}$$

**Ερώτημα A.** Βάσει των παραπάνω κανονικοποιημένων συναρτήσεων θα μελετήσουμε το πρόβλημα. Θα ξεκινήσουμε με το Loop-shaping της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος ανοιχτού βρόχου, δηλαδή της L.

#### • Inverse-based controller

Βάσει της  $G(s)$  δεν υπάρχει μηδενικό στο δεξί μιγαδικό ημεπίπεδο (RHP zero). Επομένως, η  $L(s)$  δεν περιέχει κάποιο μηδενικό, ώστε να αντισταθμίσει την ασταθή συμπεριφορά που εισάγουν τα μηδενικά στο σύστημα. Ορίζουμε, λοιπόν, την  $L(s) = \frac{\omega_c}{s}$  και γνωρίζουμε από το Σύστημα Ανοιχτού Βρόχου (ΣΑΒ) ότι  $L(s) = K(s)G(s)$ . Επομένως, θα ισχύει  $\frac{\omega_c}{s} = K(s)G(s) \Rightarrow K(s) = \frac{\omega_c}{s}G^{-1}(s)$ .  $K(s)$  είναι ο ελεγκτής του συστήματος και είναι υλοποιήσιμος, αφού η  $G(s)$  αντιστρέφεται. Μένει μόνο να προσδιορίσουμε την συχνότητα αποκοπής (crossover frequency  $\omega_c$ ) του συστήματος. Μια βασική προδιαγαφή είναι η απόρριψη διαταραχών, που σημαίνει ότι το σύστημα θα πρέπει να λειτουργεί στη συχνότητα που ορίζεται από τη σχέση:

$$|G_d(j\omega_d)| = 1 \Rightarrow \left| \frac{90}{8j\omega_d + 1} \right| = 1 \Rightarrow \frac{90}{\sqrt{(8\omega_d)^2 + 1^2}} = 1$$

$$\Rightarrow 90 = \sqrt{(8\omega_d)^2 + 1^2}$$

$$\Rightarrow 90^2 = (8\omega_d)^2 + 1^2$$

$$\Rightarrow 8100 = 64\omega_d^2 + 1$$

$$\Rightarrow 8099 = 64\omega_d^2$$

$$\Rightarrow \omega_d = \sqrt{\frac{8099}{64}}$$

$$\Rightarrow \omega_d = 11.249 \frac{rad}{sec}, \text{ árxa } \omega_c = \omega_d = 11.249 \frac{rad}{sec}.$$

Ο ελεγκτής  $K(s)$ , θα είναι:

$$K_0(s) = \frac{\omega_c}{s} G^{-1}(s)$$

$$\Rightarrow K_0(s) = \frac{11.249}{s} \frac{(8s+1)(0.04s+1)^2}{180}$$

$$\Rightarrow K_0(s) = \frac{11.249}{s} \frac{(8s+1)((0.04s)^2 + 0.08s + 1)}{180}.$$

Εδώ, μπορούμε να απλοποιήσουμε τον όρο  $(0.04s)^2$ , γιατί στις χαμηλές συχνότητες που μας ενδιαφέρει η λειτουργία του συστήματος (δηλαδή για μικρό  $\omega$ ), ο όρος αυτός μικραίνει πολύ γρήγορα (λόγω του τετραγώνου) και άρα η επίδρασή του στο αποτέλεσμα είναι αμελητέα. Έτσι, προκύπτει:

$$K_0(s) = \frac{11.249}{s} \frac{(8s+1)(0.08s+1)}{180},$$

αλλά παρατηρούμε πως η συνάρτηση φέρει περισσότερα μηδενικά από πόλους, πράγμα το οποίο είναι ανεπιθύμητο. Επομένως, πρέπει να κάνουμε αντιστάθμιση, εστιάζοντας στον αργό πόλο του συστήματος, ο οποίος δίνεται από τον όρο  $0.08s + 1$ . Μια καλή προσέγγιση είναι ο όρος  $\frac{0.08}{11.249}s + 1 \approx 0.007s + 1$  και τελικά έχουμε:

$$K_0(s) = \frac{11.249}{s} \frac{(8s+1)(0.08s+1)}{180(0.007s+1)}.$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του ΣΑΒ θα είναι:

$$L_0(s) = K_0(s)G(s)$$

$$\Rightarrow L_0(s) = \frac{11.249}{s} \frac{(8s+1)(0.08s+1)}{180(0.007s+1)} \frac{180}{(8s+1)(0.04s+1)^2}$$

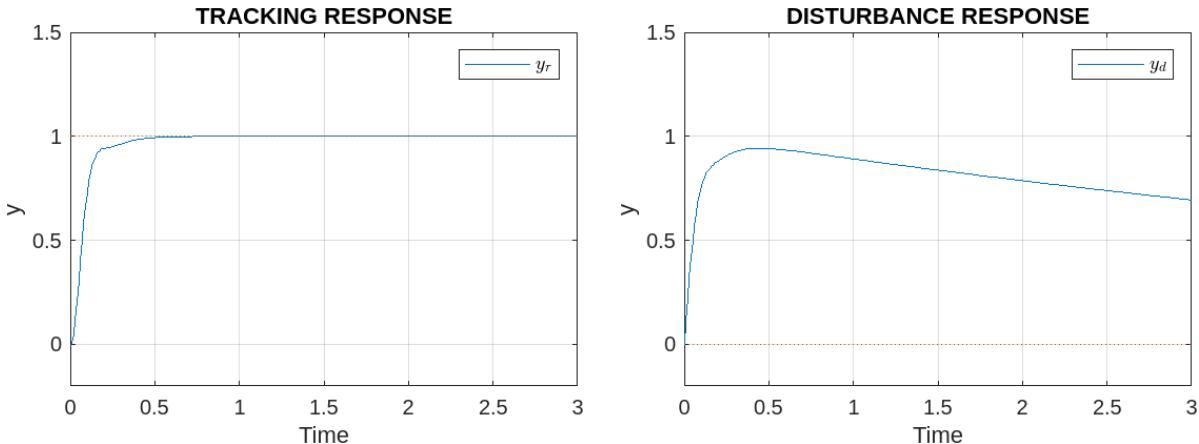
$$\Rightarrow L_0(s) = \frac{11.249}{s} \frac{0.08s+1}{(0.007s+1)(0.04s+1)^2}.$$

Θα ορίσουμε τώρα για το ΣΚΒ την συνάρτηση ευασθησίας (sensitivity function)  $S$  και την συνάρτηση συμπληρωματικής ευασθησίας (complementary sensitivity function)  $T$ :

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}.$$

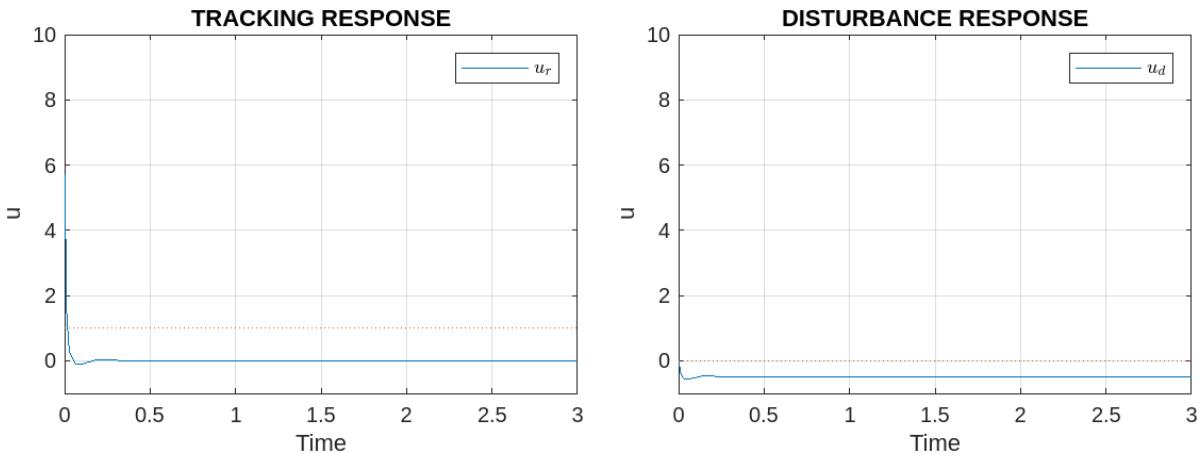
Παρακάτω παρουσιάζονται διαγράμματα στο πεδίο του χρόνου τα οποία περιγράφουν τις αποκρίσεις της εξόδου γ του συστήματος και της εισόδου υ αναφορικά με τις διαταραχές και την παρακολούθηση.



**Διάγραμμα 1.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input.

**Διάγραμμα 1.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την απόρριψη διαταραχών.

Βάσει του Διαγράμματος 1.1 μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι γίνεται καλή παρακολούθηση του σήματος αναφοράς  $r$ , το οποίο φαίνεται με τη διακεκομένη κόκκινη γραμμή και επιπλέον, ο χρόνος ανόδου  $t_r$  είναι περίπου 0.17 sec, δηλαδή μικρότερος από 0.3 sec, όπως ακριβώς απαιτούν οι προδιαγραφές. Παράλληλα δεν υπάρχει σημαντική υπερύψωση και η  $y$  παραμένει σχεδόν  $< 1$ . Αντίθετα, στο Διάγραμμα 1.2 παρατηρούμε πως η επίδραση των διαταραχών στην έξοδο  $y$  δεν αντισταθμίζεται.



**Διάγραμμα 2.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος ελέγχου ( $u$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input.

**Διάγραμμα 2.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση της εισόδου ( $u$ ) σχετικά με την απόρριψη διαταραχών.

Βάσει του Διαγράμματος 2.1 παρατηρούμε ότι τη στιγμή  $t = 0 \text{ sec}$  το σήμα ελέγχου λαμβάνει πολύ μεγάλη τιμή που σημαίνει ότι ο ελεγκτής δρα πολύ έντονα στην αρχή, γεγονός το οποίο δεν είναι επιθυμητό. Επίσης, δεν παρακολουθεί καλά το σήμα αναφοράς  $r$ . Ταυτόχρονα, στο Διάγραμμα 2.2 παρατηρούμε πως ο ελεγκτής προσπαθεί να αντισταθμίσει τη διαταραχή, αλλά δεν τα καταφέρνει. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ο ελεγκτής αυτός δεν είναι κατάλληλος και προχωράμε στον σχεδιασμό ένος P controller.

- P controller

Ορίζουμε το σφάλμα ως  $e = y - r$  και με δεδομένο ότι στην αρχή  $r = 0$ , προκύπτει σφάλμα  $e = y$ . Ουσιαστικά, θέλουμε να δούμε τι συμβαίνει στο σύστημα χωρίς καμία εντολή εισόδου, ώστε να κατανοήσουμε πόσο καλά απορρίπτει την διαταραχή. Τελικά,  $e = y = SG_d d$  και στην χειρότερη περίπτωση το μέτρο της διαταραχής στο σύστημα είναι  $|d(\omega)| = 1$ . Ακόμη και τότε θέλουμε το σφάλμα να ικανοποιεί την ανίσωση:

$$|e(\omega)| \leq 1$$

$$\Rightarrow |SG_d d| \leq 1 \text{ και } |d| < 1$$

$$\Rightarrow |SG_d| \leq 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{1+L(j\omega)} G_d(j\omega) \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow |G_d(j\omega)| \leq |1 + L(j\omega)|, \forall \omega$$

$$\Rightarrow |L(j\omega)| \geq |G_d(j\omega)|, \forall \omega$$

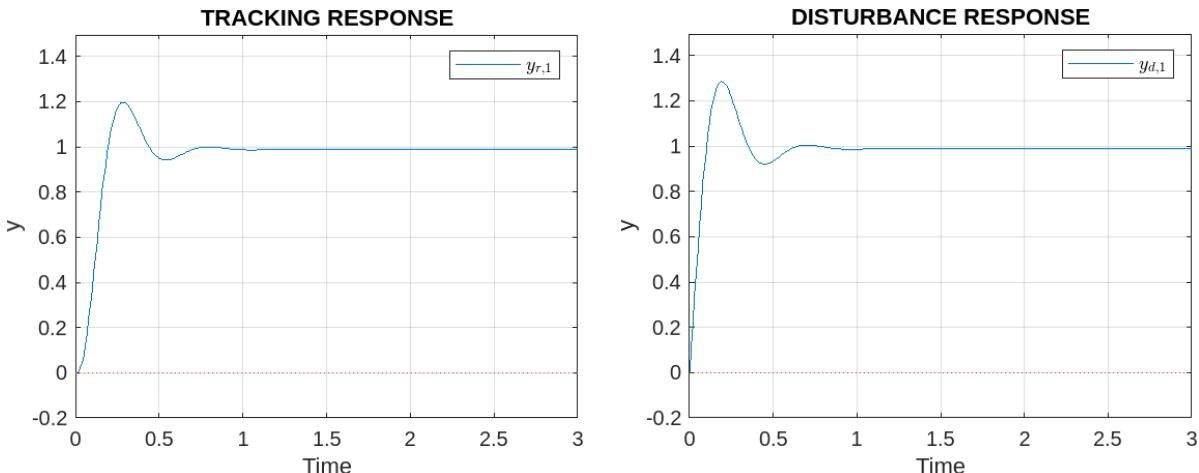
$$\Rightarrow |L_{min}| \approx |G_d| \Rightarrow |K_{min}G| \approx |G_d| \Rightarrow |K_{min}| \approx |G^{-1}G_d| \Rightarrow |K_{min}| \approx |G^{-1}L_{min}|$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ορίζουμε τον ελεγκτή:

$$K_1 = L_{min}G^{-1}$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{90}{8s+1} \frac{(8s+1)(0.04s+1)^2}{180}$$

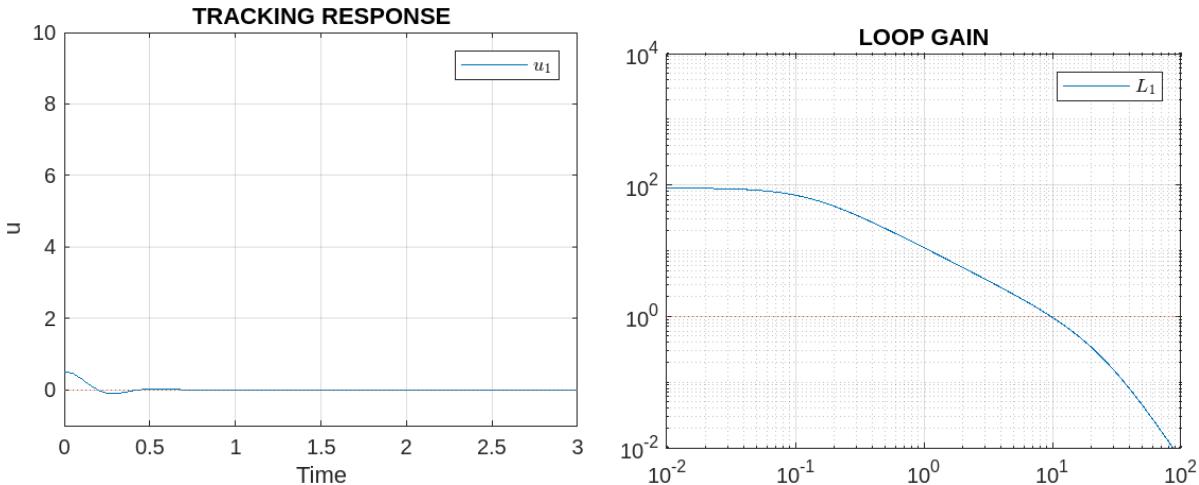
$\Rightarrow K_1 = 0.5(0.04s + 1)^2$ , ο οποίος έχει περισσότερα μηδενικά από πόλους και επιπλέον, ο όρος  $(0.04s + 1)^2$  επηρεάζει το σύστημα σε συχνότητα  $\frac{1}{0.04} = 25 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ , δηλαδή αρκετά μακριά από την  $\omega_c$ . Έτσι, απλοποιούμε τον ελεγκτή μας και έχουμε τελικά:  $K_1 = 0.5$ .



**Διάγραμμα 3.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input.

**Διάγραμμα 3.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την απόρριψη διαταραχών.

Βάσει του Διαγράμματος 3.1 μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι γίνεται καλή παρακολούθηση του σήματος αναφοράς  $r$ , το οποίο φάίνεται με τη διακεκομένη κόκκινη γραμμή και επιπλέον, ο χρόνος ανόδου  $t_r = 0.17\text{sec}$ , δηλαδή μικρότερος από 0.3 sec, όπως ακριβώς απαιτούν οι προδιαγραφές. Επίσης, δεν υπάρχει σημαντική υπερύψωση ( $Overshoot = 1.2$ ) με την έξοδο να σταθεροποιείται στην τιμή  $y = 0.999 < 1$ . Στο Διάγραμμα 3.2 παρατηρούμε πως η επίδραση των διαταραχών στην έξοδο  $y$  δεν αντισταθμίζεται.



**Διάγραμμα 4.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος ελέγχου ( $u$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input.

**Διάγραμμα 4.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται το Bode πλάτους της συνάρτησης μεταφοράς του ΣΑΒ ( $L_1$ ).

Βάσει του Διαγράμματος 4.1 παρατηρούμε ότι τη στιγμή  $t = 0 \text{ sec}$  το σήμα ελέγχου λαμβάνει ξανά πολύ μεγάλη τιμή που σημαίνει ότι ο ελεγκτής δρα πολύ έντονα στην αρχή, γεγονός το οποίο δεν είναι επιθυμητό. Επίσης, δεν παρακολουθεί καλά το σήμα αναφοράς  $r$ . Ταυτόχρονα, από το Διάγραμμα 4.2 εξάγουμε το περιθώριο κέρδους και φάσης, τα οποία έχουν σχετικά μικρές τιμές ( $GM = 4.49$  και  $PM = 48.1^\circ$ ) και μπορούν να βελτιωθούν. Στόχος είναι να έχουμε μεγαλύτερο κέρδος στις χαμηλές συχνότητες, αλλά και περιθώριο φάσης. Ετσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ο P controller δεν είναι κατάλληλος και προχωράμε στον σχεδιασμό ένος PI controller.

### • PI controller

Σε συνέχεια του προηγούμενου ελεγκτή θα προσθέσουμε έναν ακόμη όρο της μορφής:  $\frac{s+\omega_I}{s}$ , αλλά στην επιλογή της συχνότητας  $\omega_I$  θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, καθώς ο όρος αυτός αφαιρεί φάση από το σύστημά μας. Δεν θέλουμε το περιθώριο φάσης να μειωθεί πολύ, ενώ ταυτόχρονα θέλουμε να αυξήσουμε το περιθώριο κέρδους. Μια καλή επιλογή είναι  $\omega_I = 0.2\omega_c$ , αφού  $\arctan(\frac{\omega_c}{\omega_I}) - 90^\circ \approx -11.31^\circ$ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω ορίζουμε τον ελεγκτή:

$$K_2 = 0.5 \frac{s+\omega_I}{s},$$

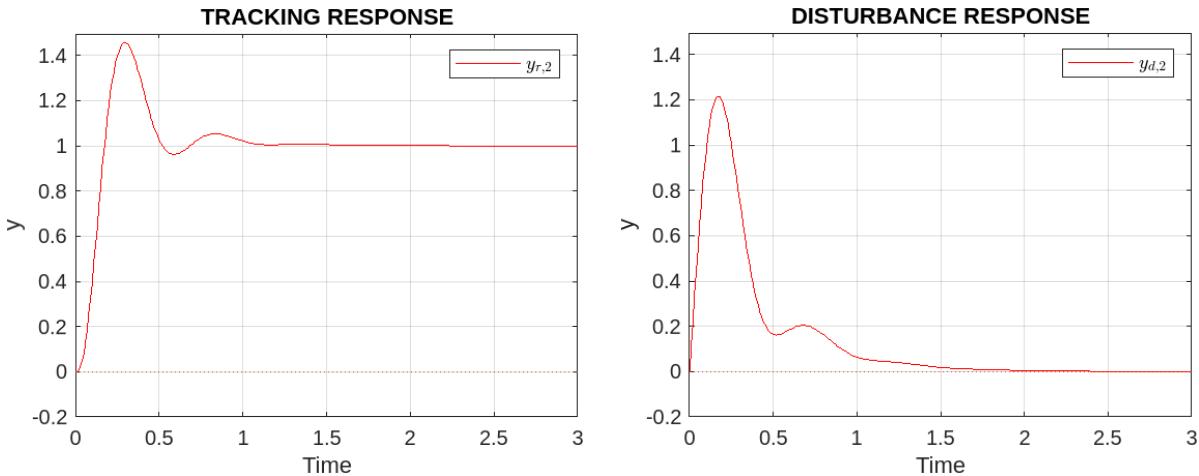
$$\text{έχοντας } \omega_I = 0.2 \cdot 11.249 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \Rightarrow \omega_I = 2.2498 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}.$$

Επομένως, προκύπτει:

$$K_2 = 0.5 \frac{s+2.2498}{s}$$

$$\Rightarrow K_2 = 0.5 \cdot 2.2498 \frac{\frac{1}{2.2498}s+1}{s}$$

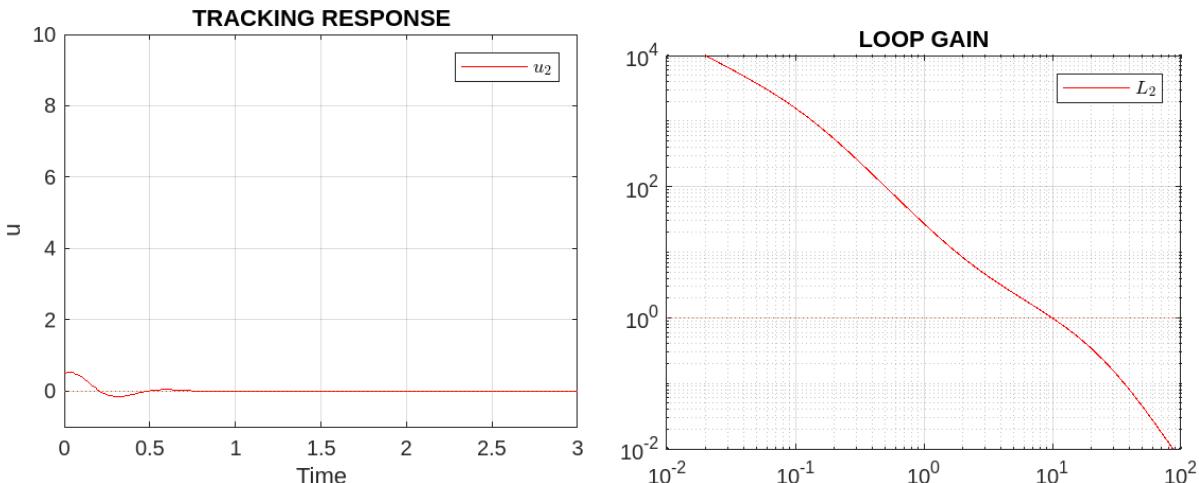
$$\Rightarrow K_2 = 1.1249 \frac{0.4445s+1}{s}$$



**Διάγραμμα 5.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την παραχολούμενη τιμή του reference input.

**Διάγραμμα 5.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την απόρριψη διαταραχών.

Βάσει του Διαγράμματος 5.1 μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι γίνεται καλή παραχολούμενη τιμή του σήματος αναφοράς  $r$ , το οποίο φάνεται με τη διακεκομένη κόκκινη γραμμή και επιπλέον, ο χρόνος ανόδου  $t_r = 0.16sec$ , δηλαδή μικρότερος από 0.3 sec, όπως ακριβώς απαιτούν οι προδιαγραφές, αλλά και μειωμένος σε σχέση με τον χρόνο ανόδου που είχαμε με τον P controller. Όμως, υπάρχει μεγαλύτερη υπερύψωση ( $Overshoot = 1.46$ ) σε σχέση με αυτή που είδαμε στον P controller, με την έξοδο να σταθεροποιείται στην τιμή  $y \approx 1$ . Επιπλέον, στο Διάγραμμα 5.2 παρατηρούμε πως η επίδραση των διαταραχών στην έξοδο  $y$  αντισταθμίζεται, αλλά έχοντας στην αρχή μια πολύ μεγάλη τιμή, πάνω από τη μονάδα.



**Διάγραμμα 6.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος ελέγχου ( $u$ ) σχετικά με την παραχολούμενη τιμή του reference input.

**Διάγραμμα 6.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται το Bode πλάτους της συνάρτησης μεταφοράς του ΣΑΒ ( $L_2$ ).

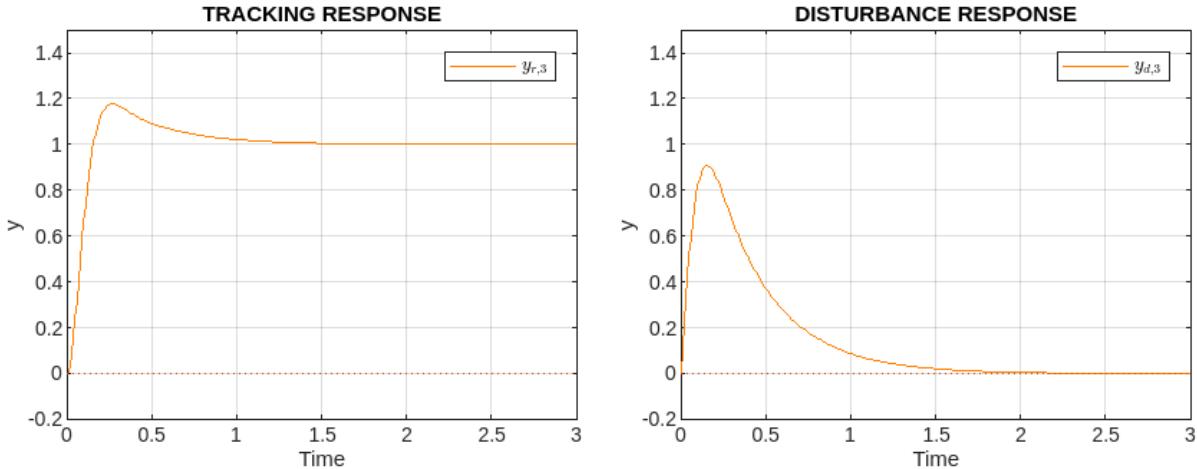
Βάσει του Διαγράμματος 6.1 παρατηρούμε ότι τη στιγμή  $t = 0 sec$  το σήμα ελέγχου λαμβάνει μια τιμή μικρότερη της μονάδας, γεγονός που σημαίνει ότι ικανοποιείται η προδιαγραφή  $|u| < 1, \forall t$ . Επίσης, το σύστημα παραχολουθεί καλά το σήμα αναφοράς  $r$ , αφού η τιμή της  $u$  σταθεροποιείται στο 0. Ταυτόχρονα, από το Διάγραμμα 6.2 παρατηρούμε πως το περιθώριο κέρδους και φάσης μείωνεται ( $GM = 3.68$  και  $PM = 34.6^\circ$ ). Στόχος είναι να έχουμε μεγαλύτερο κέρδος στις χαμηλές συχνότητες, αλλά και περιθώριο φάσης. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ο PI controller δεν είναι κατάλληλος και προχωράμε στον σχεδιασμό ένος PID controller.

- **PID controller**

Σε συνέχεια του προηγούμενου ελεγκτή θα προσθέσουμε έναν ακόμη όρο της μορφής:  $\frac{\tau_{lead}s+1}{\tau_{lag}s+1}$ , επιλέγοντας τους όρους  $\tau_{lead}$  και  $\tau_{lag}$  κατάλληλα, προκειμένου να αυξήσουμε το περιθώριο κέρδους και φάσης, αλλά και να εξασφαλίσουμε τη σταθερότητα, περιορίζοντας την επίδραση των μηδενικών σε συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων.

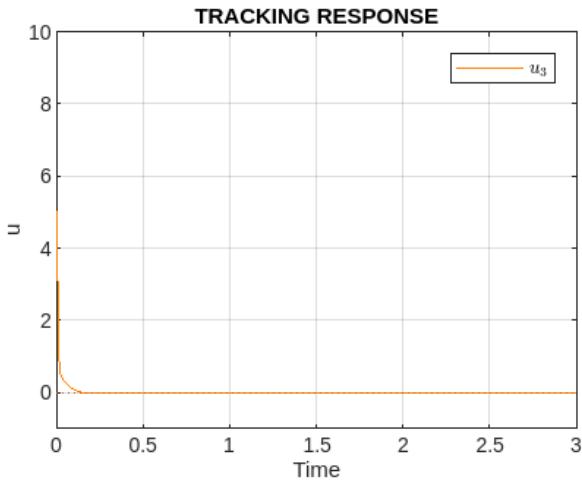
Σύμφωνα με τα παραπάνω ορίζουμε τον ελεγκτή:

$$K_3 = 1.1249 \frac{0.4445s+1}{s} \frac{0.05s+1}{0.005s+1}.$$

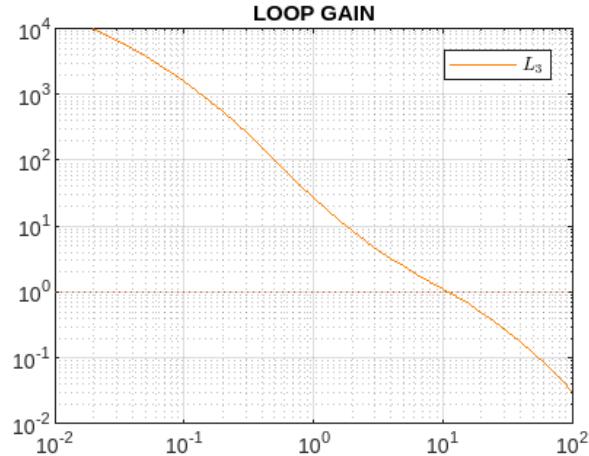


**Διάγραμμα 7.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input.

**Διάγραμμα 7.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την απόρριψη διαταραχών.



**Διάγραμμα 8.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος ελέγχου ( $u$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input.

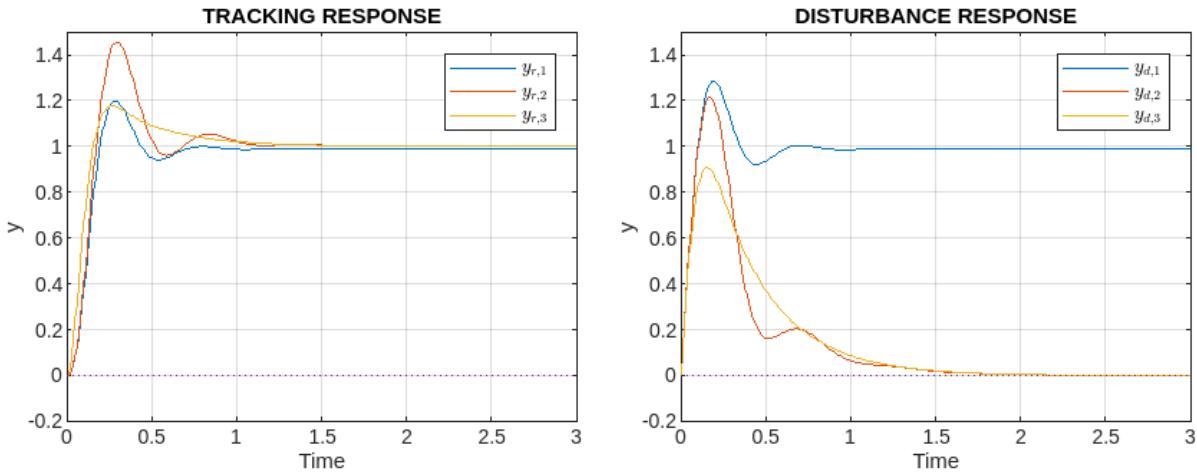


**Διάγραμμα 8.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται το Bode πλάτους της συνάρτησης μεταφοράς του ΣΑΒ ( $L_3$ ).

Βάσει του Διαγράμματος 7.1 διαπιστώνουμε ότι γίνεται καλή παρακολούθηση του σήματος αναφοράς  $r$  και ο χρόνος ανόδου  $t_r = 0.14sec$ , δηλαδή μικρότερος από 0.3 sec, όπως ακριβώς απαιτούν οι προδιαγραφές, αλλά και μειωμένος σε σχέση με τον χρόνο ανόδου που είχαμε με τους προηγούμενους ελεγκτές. Παράλληλα με περύψωση μειωθεί σημαντικά ( $Overshoot = 0.91$ ) σε σχέση με αυτές που είδαμε νωρίτερα, με την έξοδο να

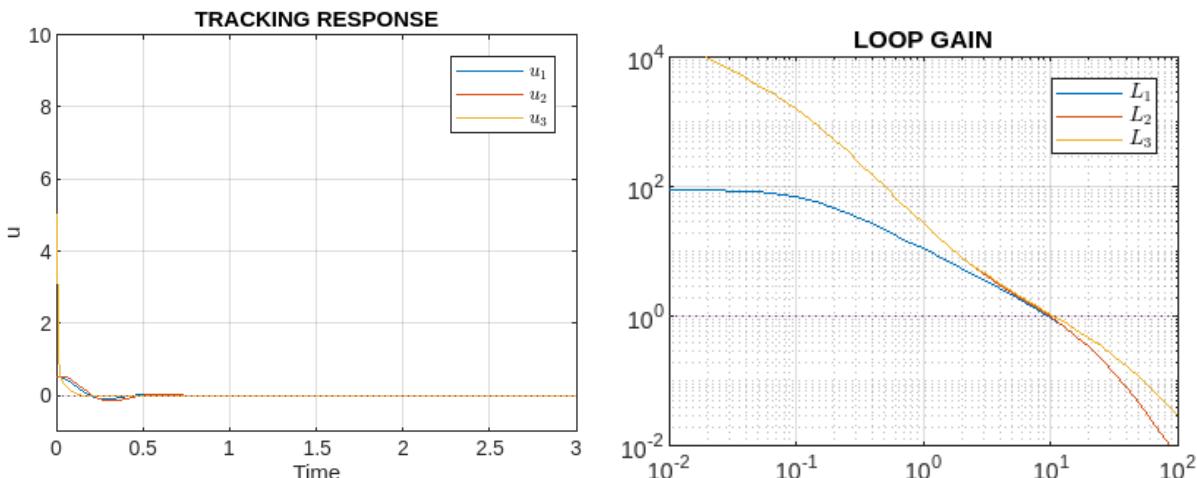
σταθεροποιείται στην τιμή  $y \approx 1$ . Επιπλέον, στο Διάγραμμα 7.2 παρατηρούμε πως η επίδραση των διαταραχών στην έξοδο  $y$  αντισταθμίζεται, έχοντας βέβαια στην αρχή μια μεγάλη τιμή, που δεν ξεπερνάει τη μονάδα και παρόλληλα, μετά τα 1.5 sec η τιμή της εξόδου είναι μικρότερη του 0.1, όπως ακριβώς ορίζουν οι προδιαγραφές.

Βάσει του Διαγράμματος 8.1 παρατηρούμε ότι τη στιγμή  $t = 0 \text{ sec}$  το σήμα ελέγχου λαμβάνει μια τιμή μεγαλύτερη της μονάδας, γεγονός που σημαίνει ότι δεν ικανοποιείται η προδιαγραφή  $|u| < 1, \forall t$ . Επίσης, το σύστημα παρακολουθεί καλά το σήμα αναφοράς  $r$ , αφού η τιμή της  $y$  σταθεροποιείται στο 0. Ταυτόχρονα, από το Διάγραμμα 8.2 παρατηρούμε πως το περιθώριο κέρδους και φάσης αυξήθηκαν σημαντικά ( $GM = 18.1$  και  $PM = 57.3^\circ$ ). Ας δούμε συνολικά τα διαγράμματα από όλους τους ελεγκτές:



**Διάγραμμα 9.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζονται οι χρονικές αποκρίσεις της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input.

**Διάγραμμα 9.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζονται οι χρονικές αποκρίσεις της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την απόρριψη διαταραχών.



**Διάγραμμα 10.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζονται οι χρονικές αποκρίσεις του σήματος ελέγχου ( $u$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input.

**Διάγραμμα 10.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα Bode πλάτους των συναρτήσεων μεταφοράς του ΣΑΒ για τους ελεγκτές P, PI και PID.

## • 2 Degrees of Freedom Controller

Βάσει των παραπάνω διαπιστώνουμε ότι δεν ικανοποιούνται όλες οι προδιαγραφές. Δεν μπορούμε με έναν μόνο

ελεγκτή να έχουμε και καλή παρακολούθηση, αλλά και απόρριψη διαταραχών. Ενώ έχουμε πετύχει πολύ καλή απόρριψη διαταραχών, η παρακολούθηση δεν είναι ικανοποιητική. Η λύση, λοιπόν, είναι ένας ελεγκτής 2 βαθμών ελευθερίας. Έτσι, έχουμε τους ελεγκτές  $K_y$  και  $K_r$ . Ξεκινώντας από τον  $K_y$ , που χρησιμοποιείται για την απόρριψη διαταραχών, μπορούμε να κρατήσουμε τον ελεγκτή  $K_3$  που σχεδιάσαμε πριν και ο οποίος τις απορρίπτει ικανοποιητικά. Έτσι, έχουμε:  $K_y = K_3 = 1.1249 \frac{0.4445s+1}{s} \frac{0.05s+1}{0.005s+1}$ . Πάμε τώρα στον  $K_r$ , που σχετίζεται με την παρακολούθηση. Γενικά, ορίζουμε:

$$K_r(s) = T^{-1}(s)T_{ref}(s)$$

Για τον υπολογισμό της  $T(s)$  είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε την  $L(s)$ :  $L(s) = G(s)K_y(s)$ , που προέρχεται από το ΣΑΒ.

$$L(s) = G(s)K_y(s)$$

$$\Rightarrow L(s) = \left( \frac{180}{(8s+1)(0.04s+1)^2} \right) \left( 1.1249 \frac{0.4445s+1}{s} \frac{0.05s+1}{0.005s+1} \right)$$

$$\Rightarrow L(s) = 202.482 \frac{(0.4445s+1)(0.05s+1)}{s(8s+1)(0.005s+1)(0.04s+1)^2}$$

Επομένως, προκύπτει η συνάρτηση συμπληρωματικής ευασθησίας  $T(s)$ :  $T(s) = \frac{L}{1+L}$ . Με τη βοήθεια της MATLAB ο υπολογισμός αυτός γίνεται εύκολα και καταλήγουμε σε μια συνάρτηση μεταφοράς με 7 μηδενικά και 10 πόλους. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση `minreal()` της MATLAB, η οποία απλοποιεί την  $T(s)$  απαλοίφοντας τις μη ελέγξιμες και μη παρατηρήσιμες κατάστασεις του μοντέλου. Έτσι, έχουμε:

$$T(s) = \frac{(0.4445s+1)(0.05s+1)}{((0.05478s)^2 + 1.587(0.05478s) + 1)(0.346s+1)(0.06148s+1)(0.00495s+1)}$$

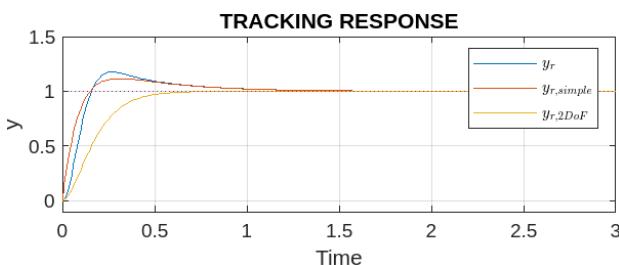
Μιας και από τις προδιαγραφές του συστήματος απαιτείται χρόνος αποκατάστασης  $t_r < 0.3sec$  και  $2.2\tau \approx t_r \Rightarrow \tau \approx 0.13$ , αλλά όχι το θεωρήσουμε και πιο μικρό, ώστε να μην είμαστε στο όριο του χρόνου ανόδου:

$$T_{ref}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \Rightarrow T_{ref}(s) = \frac{1}{0.05s + 1} \text{ και προκύπτει } K_r(s) = \frac{((0.05478s)^2 + 1.587(0.05478s) + 1)(0.346s + 1)(0.06148s + 1)(0.00495s + 1)}{(0.4445s + 1)(0.05s + 1)^2}$$

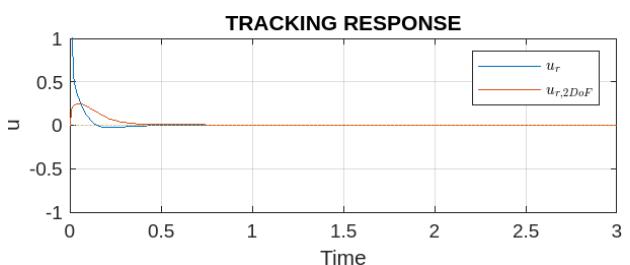
Απλοποιώντας τις  $T(s)$  και  $K_r(s)$  έχω:

$$T_{ref}(s) = K_{r,simple}(s)T_{simple}(s)$$

$$\Rightarrow T_{ref}(s) = \frac{0.346s+1}{(0.05s+1)(0.4445s+1)} \frac{0.4445s+1}{(0.346s+1)(1.587(0.05478s)+1)}$$



**Διάγραμμα 11.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόχριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input.



**Διάγραμμα 11.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόχριση του σήματος ελέγχου ( $u$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο Διάγραμμα 11.1 -για σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας- η έξοδος για παρακολούθηση το reference input, χωρίς υπερύψωση και ο χρόνος ανόδου είναι  $t_r = 0.27sec < 0.3sec$  (με την πορτοκαλί

γραμμή). Επιπλέον, βάσει του Διαγράμματος 11.2 διαπιστώνουμε πως και η υ πληροί την προδιαγραφή που ορίζει  $|u| < 1, \forall t$  (με την κόκκινη γραμμή).

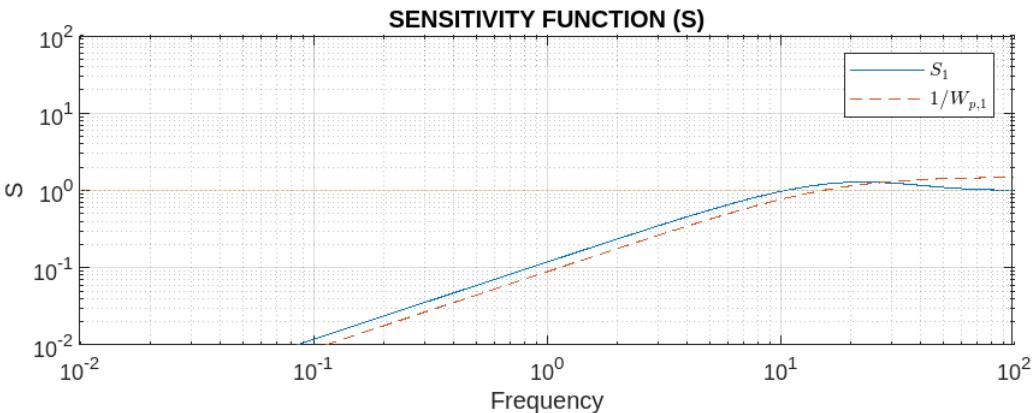
**Ερωτήματα B/C.** Οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν παραπάνω είναι δύσκολο να εφαρμοστούν σε περισσότερο σύνθετα συστήματα, με αποτέλεσμα να πρέπει να καταφύγουμε σε διαφορετικό τρόπο επίλυσης των προβλημάτων. Μια νέα μέθοδος που μπρούμε να χρησιμοποιούμε είναι ο σχεδιασμός με  $H_\infty - mixed sensitivity$ . Στην πράξη θα προσπαθήσουμε να διαμορφώσουμε τα μεγέθη των συναρτήσεων μεταφοράς του ΣΚΒ θέτοντας έναν στόχο απόδοσης του συστήματος, που στην πράξη είναι το  $H_\infty$ . Το βασικό πρόβλημα με τις προηγούμενες μεθόδους είναι ότι δεν μπορούσαμε να επέμβουμε σε σημεία όπου οι συχνότητα δεν ήταν ούτε μεγάλη, ούτε μικρή. Είναι, λοιπόν, απαραίτητο να διαμορφώσουμε άμεσα τις  $S(s)$  και  $T(s)$ , οι οποίες είναι και άμεσα υπεύθυνες για την απόκριση του συστήματος. Ως τώρα διαμορφώναμε την συνάρτηση μεταφοράς του ΣΑΒ και ήταν ξεκάθαρη η επιρροή που είχε αυτό σε κάθε ελεγκτή που δημιουργούσαμε. Η  $H_\infty - norm$  δηλώνει την μέγιστη τιμή της συνάρτησης, στην οποία μπορούμε να έχουμε και γνώση της συχνότητας στην οποία την εντοπίζουμε. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, θέλουμε η  $S(j\omega)$  να έχει μικρές τιμές στις χαμηλές συχνότητες και μάλιστα, με την  $H_\infty - norm$  θα εντοπίσουμε την μέγιστη τιμή της στο διάγραμμα Bode του πλάτους της και θα προσπαθήσουμε να την ελαχιστοποιήσουμε. Υπάρχουν κάποιες προδιαγραφές που πρέπει να ικανοποιούνται και όλες μαζί συνοψίζονται σε μια συνάρτηση βάρους  $w_p$ , όπου πρέπει  $|w_p S| < 1, \forall \omega \Leftrightarrow \|w_p S\|_\infty < 1$ . Έτσι, ορίζουμε:

$$w_p(s) = \frac{\frac{s}{M} + w_B^*}{s + w_B^* A} \quad (3)$$

Αν θέλουμε πιο απότομη κλίση κάτω από το εύρος ζώνης, τότε χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συνάρτηση βάρους:

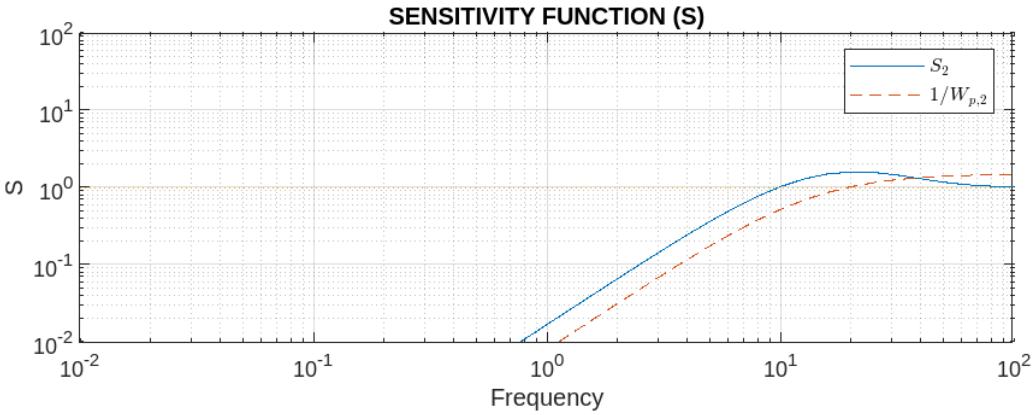
$$w_p(s) = \frac{((\frac{s}{M})^{1/2} + w_B^*)^2}{(s + w_B^* A^{1/2})^2} \quad (4)$$

Αφού προσδιορίσουμε κατάλληλα τους συντελεστές  $M, A, w_B^*$  θα προχωρήσουμε στον σχεδιασμό των συναρτήσεων βάρους και θα εξάφουμε τα αντίστοιχα Bode διάγραμμα με τη βοήθεια της MATLAB. Επιλέγοντας:  $M = 1.5$ ,  $A = 10^{-4}$ ,  $w_B^* = \omega_c = 11.1249 \frac{rad}{sec}$  και  $w_u = 1$ , ενσωματώνουμε την (3) (ή (4)) μαζί με την  $G(s)$  του συστήματος στην `mixsyn()` της MATLAB, η οποία δημιουργεί έναν ελεγκτή που ελαχιστοποιεί την  $H_\infty - norm$  της συνάρτησης μεταφοράς του ΣΚΒ. Χρησιμοποιούμε αυτό τον ελεγκτή και προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα για το σύστημά μας:



**Διάγραμμα 12.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται το Bode πλάτους της συνάρτησης ευαισθησίας  $S$  και της αντίστροφης συνάρτησης βάρους  $w_p$  που δίνεται στην (3).

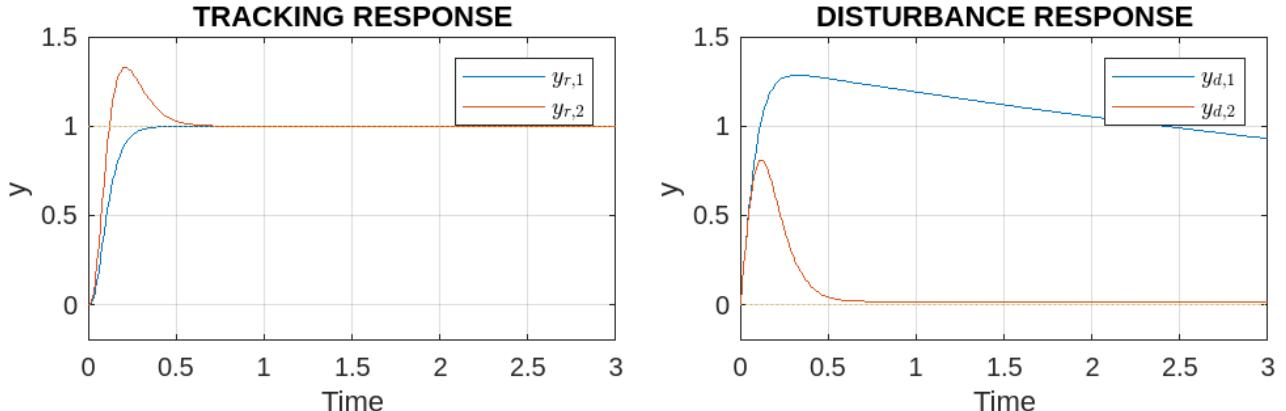
Στο Διάγραμμα 12 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πλάτος της  $S_1$  παραμένει μικρότερο από το μέτρο της  $1/w_{p,1}$  μετά από μια καθορισμένη συχνότητα, περίπου στα  $25 \frac{rad}{sec}$ . Για μικρότερες συχνότητες από αυτή, η απαίτηση που έχουμε θέσει δεν ικανοποιείται. Επιπλέον, η  $H_\infty - norm$  της  $S_1$  είναι  $M_{S_1} = 1.2937$  στη συχνότητα  $\omega = 22.6117 \frac{rad}{sec}$ .



**Διάγραμμα 13.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται το Bode πλάτους της συνάρτησης ευαισθησίας  $S$  και της αντίστροφης συνάρτησης βάρους  $w_p$  που δίνεται στην (4).

Στο Διάγραμμα 13 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πλάτος της  $S_2$  παραμένει και πάλι μικρότερο από το μέτρο της  $1/w_{p,2}$  μετά από μια καθορισμένη συχνότητα, περίπου στα  $39.8107 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ . Για μικρότερες συχνότητες από αυτή, η απαίτηση που έχουμε θέσει δεν ικανοποιείται. Επιπλέον, η  $H_\infty - \text{norm}$  της  $S_2$  είναι  $M_{S_2} = 1.5951$  στη συχνότητα  $\omega = 21.3757 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ .

Βάσει των παραπάνω δεν ικανοποιούνται πλήρως οι προδιαφραδές που τέθηκαν, αλλά είναι αρκετά ικανοποιητικές προσεγγίσεις. Ας εξετάσουμε τώρα τη συμπεριφορά της εξόδου  $y$  στο πεδίο του χρόνου.



**Διάγραμμα 14.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόχριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την παραχολούμενη του reference input.

**Διάγραμμα 14.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόχριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την απόρριψη διαταραχών.

Είναι ξεκάθαρο πως, ενώ με τη συνάρτηση βάρους της σχέσης (3) έχουμε πολύ καλή παραχολούμενη του σήματος αναφοράς ( $y_{r,1}$ ), η απόρριψη διαταραχών είναι πάρα πολύ κακή ( $y_{d,1}$ ), όπως ακριβώς συνέβαινε και με τον Inverse-based controller (Διάγραμμα 1.1 και Διάγραμμα 1.2). Στην περίπτωση αυτή έχουμε  $GM = 17.93 \text{ dB}$  και  $PM = 71.65^\circ$  σε συχνότητα  $\omega_c = 8.32 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ . Αντίθετα, με τη συνάρτηση βάρους της σχέσης (4) δεν έχουμε τόσο καλή παραχολούμενη του σήματος αναφοράς ( $y_{r,2}$ ) (υπάρχει overshoot), αλλά πετυχαίνουμε καλή απόρριψη διαταραχών ( $y_{d,2}$ ), με  $GM = 13.68 \text{ dB}$  και  $PM = 44.58^\circ$  σε συχνότητα  $\omega_c = 13.03 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ . Έτσι, παρατηρούμε και πάλι πώς κάθε ένας από τους 2 ελεγκτές είναι χρήσιμος για διαφορετικό σκοπό και τελικά χρειαζόμαστε έναν ελεγκτή 2 βαθμών ελευθερίας προκειμένου να επιτευχθούν όλες οι προδιαγραφές του συστήματός μας.

**3.** Για την υλοποίηση του PI controller S/SK  $H_\infty$  θα χρησιμοποιήσουμε την διαδικασία βελτιστοποίησης που είναι ενσωματωμένη στη MATLAB, η οποία εντοπίζει την ελάχιστη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης. Εμάς στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε την μέγιστη τιμή του μέτρου της συνάρτησης μεταφοράς του ΣΚΒ και συγκεκριμένα, να πληρείται η προδιαγραφή:  $|w_p S| < 1, \forall \omega$ . Επιπλέον, θα πρέπει  $|w_u K S| < 1, \forall \omega$ ,

Τις σχέσεις αυτές τις συνοψίζουμε σε ένα διάνυσμα της μορφής:

$$N = \begin{bmatrix} w_p S \\ w_u K S \end{bmatrix}$$

με τις  $w_p$  και  $w_u$  να είναι:

$$w_p(s) = \frac{\frac{s}{M} + w_B^*}{s + w_B^* A} \quad \text{ή} \quad w_p(s) = \frac{((\frac{s}{M})^{1/2} + w_B^*)^2}{(s + w_B^* A^{1/2})^2} \quad \text{και} \quad w_u = 1.$$

Για τον έλεγχο του συστήματός μας θα χρησιμοποιήσουμε έναν απλό PI controller, καθώς χρειαζόμαστε ένα αρχικό  $K$  για να προχωρήσουμε στη βέλτιστοποίηση του συστήματος. Το τελικό αποτέλεσμα θα είναι τα βέλτιστα κέρδη  $K_p$  και  $K_i$ . Αρχικά, για  $M = 1.5$ ,  $A = 10^{-4}$ ,  $w_B^* = \omega_c = 10 \frac{rad}{sec}$  έχουμε:

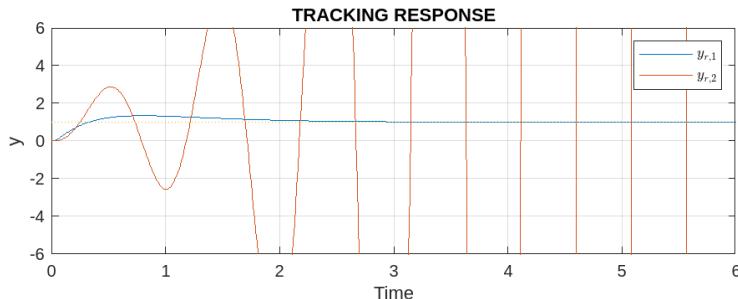
$$w_{p,1}(s) = \frac{\frac{s}{1.5} + 10}{s + 10 \cdot 10^{-4}} = \frac{\frac{2s}{3} + 10}{s + 10^{-3}}$$

$$w_{p,2}(s) = \frac{((\frac{s}{1.5})^{1/2} + 10)^2}{(s + 10^{1/2})^2}$$

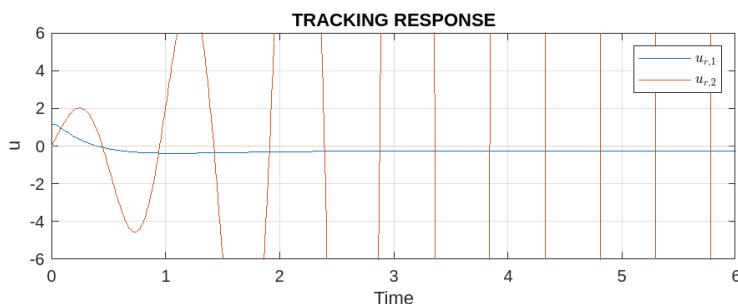
$$w_u = 1$$

$$K_{initial} = K_p + \frac{K_i}{s} = 1 + \frac{1}{s}$$

και προσπαθούμε να βελτιστοποιήσουμε το  $N$ . Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `fminimax()` της MATLAB, η οποία παίρνει ως όρισμα την  $N$  και τα αρχικά κέρδη του PI controller. Το αποτέλεσμα συνοψίζεται στα ακόλουθα διαγράμματα.

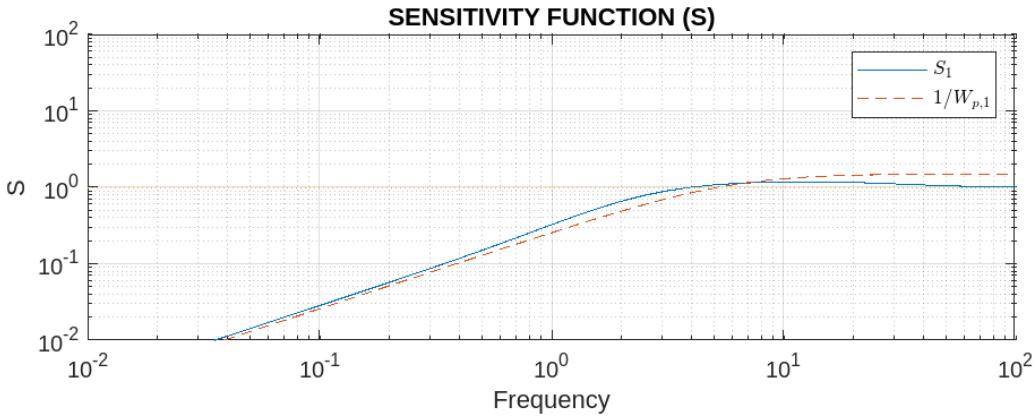


**Διάγραμμα 15.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόχριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input για τις δύο διαφορετικές συναρτήσεις βάρους  $w_p$  με τη χρήση της `fminimax()`.



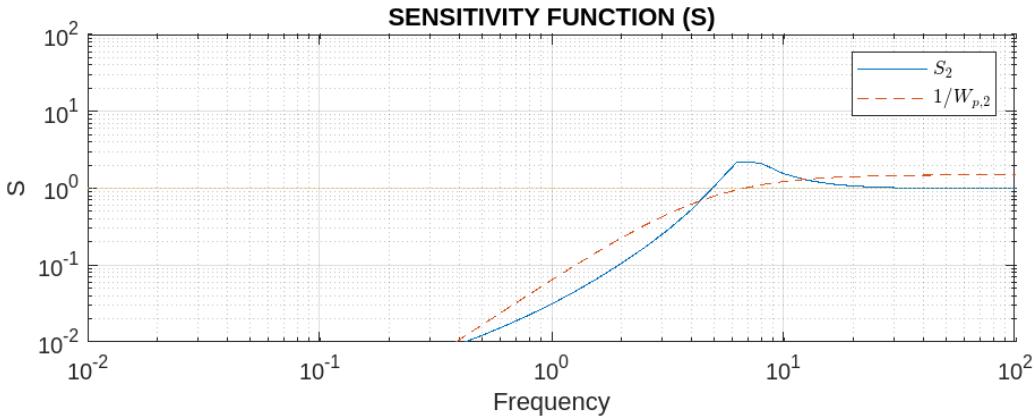
**Διάγραμμα 15.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόχριση του σήματος ελέγχου ( $u$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input για τις δύο διαφορετικές συναρτήσεις βάρους  $w_p$  με τη χρήση της `fminimax()`.

Βάσει του Διαγράμματος 15.1 είναι εμφανές ότι το σύστημα στην περίπτωση της  $w_{p,2}$  ( $y_{r,2}$ ) δεν μπορεί να παρακολουθήσει το σήμα αναφοράς και υπάρχει αστάθεια. Στην περίπτωση της  $w_{p,1}$  ( $y_{r,1}$ ) γίνεται σαφώς καλύτερη παρακολούθηση. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς το εξετάσαμε και στα προηγούμενα ερωτήματα. Όμοια, από το Διάγραμμα 15.2 διασπιστώνουμε πώς ούτε το σήμα ελέγχου ( $u_{r,2}$ ) για την  $w_{p,2}$  αποχρίνεται καλά στην παρακολούθηση. Σαφώς στην περίπτωση της  $w_{p,1}$  ( $u_{r,1}$ ) είναι καλύτερη η παρακολούθηση.



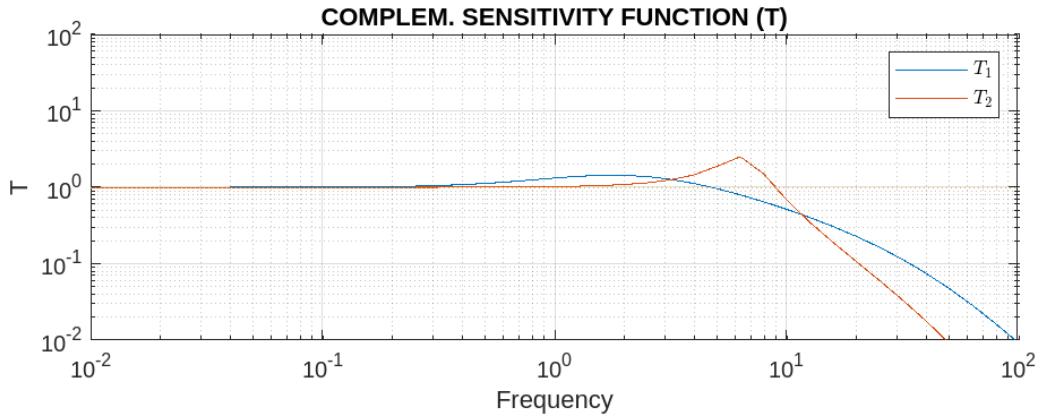
**Διάγραμμα 16.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται το Bode πλάτους της συνάρτησης ευαισθησίας  $S_1$  και της αντίστροφης συνάρτησης βάρους  $1/w_{p,1}$  με τη χρήση της `fminimax()`.

Στο Διάγραμμα 16.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πλάτος της  $S_1$  παραμένει μικρότερο από το μέτρο της  $1/w_{p,1}$  μετά από μία καθορισμένη συχνότητα, περίπου στα  $6 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ . Για μικρότερες συχνότητες από αυτή, η απαίτηση που έχουμε θέσει δεν ικανοποιείται. Επιπλέον, η  $H_\infty - \text{norm}$  της  $S_1$  είναι  $M_{S_1} \approx 1.18$  στη συχνότητα  $\omega = 11.4326 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ .

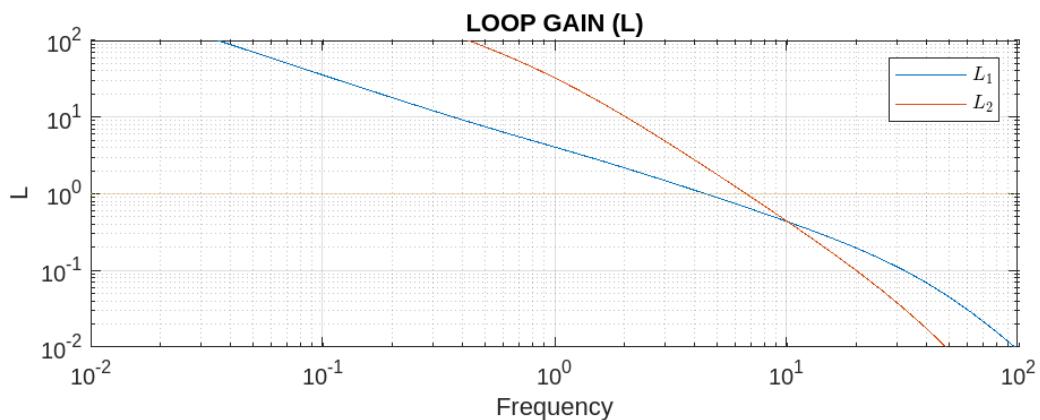


**Διάγραμμα 16.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται το Bode πλάτους της συνάρτησης ευαισθησίας  $S_2$  και της αντίστροφης συνάρτησης βάρους  $1/w_{p,2}$  με τη χρήση της `fminimax()`.

Στο Διάγραμμα 16.2 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πλάτος της  $S_2$  παραμένει μικρότερο από το μέτρο της  $1/w_{p,2}$  πριν από μία καθορισμένη συχνότητα περίπου  $4 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$  και μετά από μία καθορισμένη συχνότητα, περίπου  $12 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ . Στις ενδιάμεσες συχνότητες η απαίτηση που έχουμε θέσει δεν ικανοποιείται. Επιπλέον, η  $H_\infty - \text{norm}$  της  $S_2$  είναι  $M_{S_2} \approx 2.23$ . Αυτό ξεπερνά τα όρια που έχουν τεθεί για τον συντελεστή  $M$ . Με αντίστοιχο τρόπο καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα και από το Bode διάγραμμα της συμπληρωματικής συνάρτησης ευαισθησίας  $T$ , που ακολουθεί.



**Διάγραμμα 17.** Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα Bode πλάτους των συναρτήσεων συμπληρωματικής ευαισθησίας  $T_1$  και  $T_2$  αντίστοιχα με τη χρήση της `fminimax()`.



**Διάγραμμα 18.** Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα Bode πλάτους των συναρτήσεων μεταφοράς του ΣΑΒ με τη χρήση της `fminimax()`.

Από το Διάγραμμα 18. εξάγουμε τα περιθώρια κέρδους και φάσης για τις δύο συναρτήσεις βάρους:

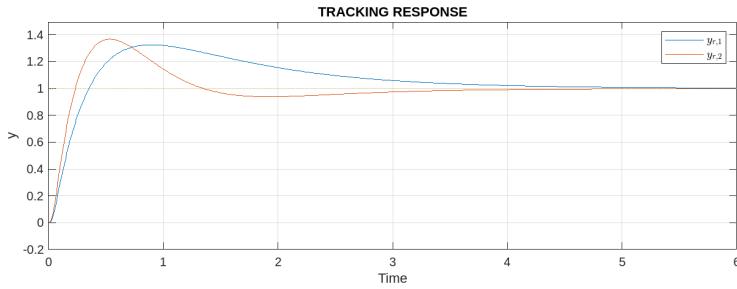
$$GM_1 = -12.89 \text{ dB}$$

$$PM_1 = 57.34^\circ \text{ με } \omega_c = 4.48 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

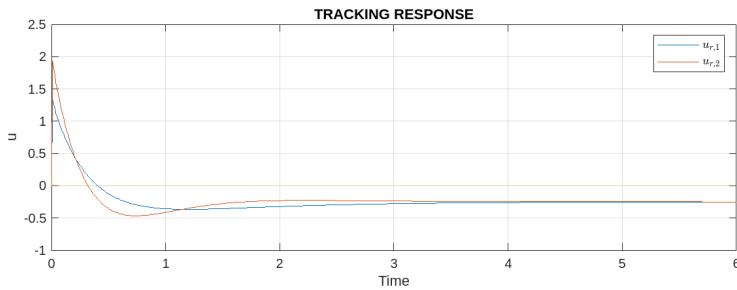
$$GM_2 = \infty$$

$$PM_2 = -23.75^\circ \text{ με } \omega_c = 6.70 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ίδια διαδικασία, αλλά χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `mixsyn()` της MATLAB, εξάγουμε τα ακόλουθα διαγράμματα.

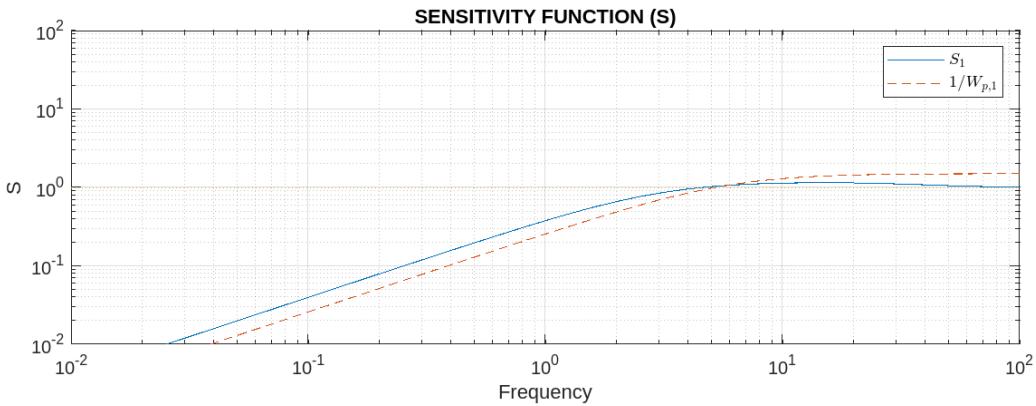


**Διάγραμμα 19.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόχριση της εξόδου του συστήματος ( $y$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input για τις δύο διαφορετικές συναρτήσεις βάρους  $w_p$  με τη χρήση της `mixsyn()`.



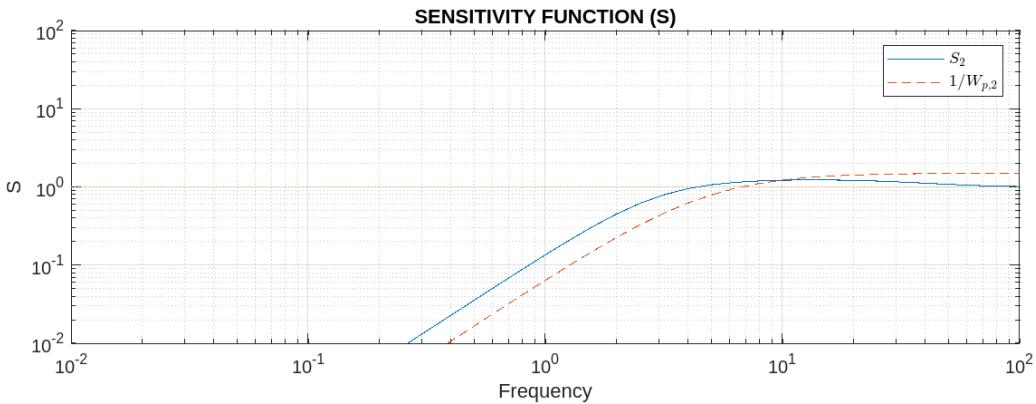
**Διάγραμμα 19.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόχριση του σήματος ελέγχου ( $u$ ) σχετικά με την παρακολούθηση του reference input για τις δύο διαφορετικές συναρτήσεις βάρους  $w_p$  με τη χρήση της `mixsyn()`.

Από τα Διαγράμματα 19.1 και 19.2 είναι ξεκάθαρο πως επιτυγχάνεται πολύ καλύτερη παρακολούθηση με τον ελεγκτή που δημιουργήθηκε.



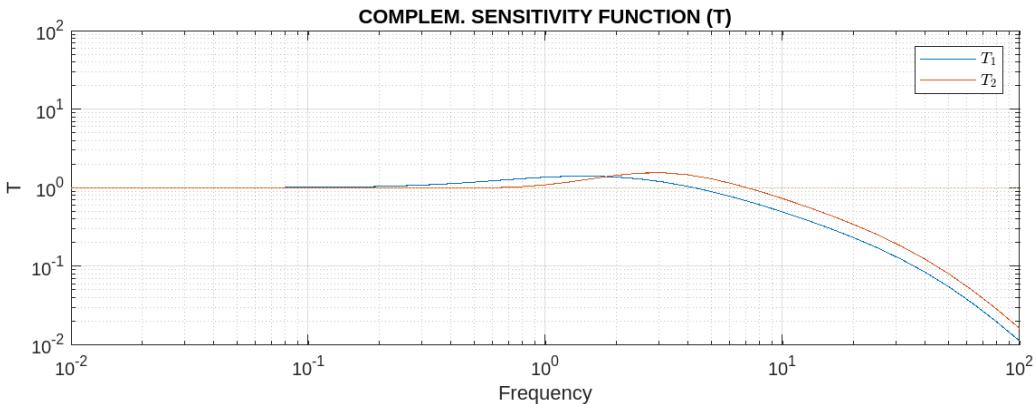
**Διάγραμμα 20.1.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται το Bode πλάτους της συνάρτησης ευαισθησίας  $S_1$  και της αντίστροφης συνάρτησης βάρους  $1/w_{p,1}$  με τη χρήση της `mixsyn()`.

Στο Διάγραμμα 20.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πλάτος της  $S_1$  παραμένει μικρότερο από το μέτρο της  $1/w_{p,1}$  μετά από μια καθορισμένη συχνότητα, περίπου στα  $6 \frac{rad}{sec}$ . Για μικρότερες συχνότητες από αυτή, η απαίτηση που έχουμε θέσει δεν ικανοποιείται. Επιπλέον, η  $H_\infty$  – norm της  $S_1$  είναι  $M_{S_1} \approx 1.15$  στη συχνότητα  $\omega = 13.6858 \frac{rad}{sec}$ , βελτιωμένη τιμή σε σχέση με της προηγούμενης ανάλυσης, καθώς βρίσκεται πιο κοντά στο 1.



**Διάγραμμα 20.2.** Στο διάγραμμα απεικονίζεται το Bode πλάτους της συνάρτησης ευαισθησίας  $S_2$  και της αντίστροφης συνάρτησης βάρους  $1/w_{p,2}$  με τη χρήση της `mixsyn()`.

Στο Διάγραμμα 20.2 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πλάτος της  $S_2$  παραμένει μικρότερο από το μέτρο της  $1/w_{p,2}$  μετά από μια καθορισμένη συχνότητα, περίπου στα  $10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ . Για μικρότερες συχνότητες από αυτή, η απαίτηση που έχουμε θέσει δεν ικανοποιείται. Επιπλέον, η  $H_\infty - \text{norm}$  της  $S_2$  είναι  $M_{S_2} \approx 1.23$ , τιμή πολύ μικρότερη από αυτή της προηγούμενης ανάλυσης. Με αντίστοιχο τρόπο καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα και από το Bode διάγραμμα της συμπληρωματικής συνάρτησης ευαισθησίας  $T$ , που ακολουθεί.



**Διάγραμμα 21.** Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα Bode πλάτους των συναρτήσεων συμπληρωματικής ευαισθησίας  $T_1$  και  $T_2$  αντίστοιχα με τη χρήση της `mixsyn()`.

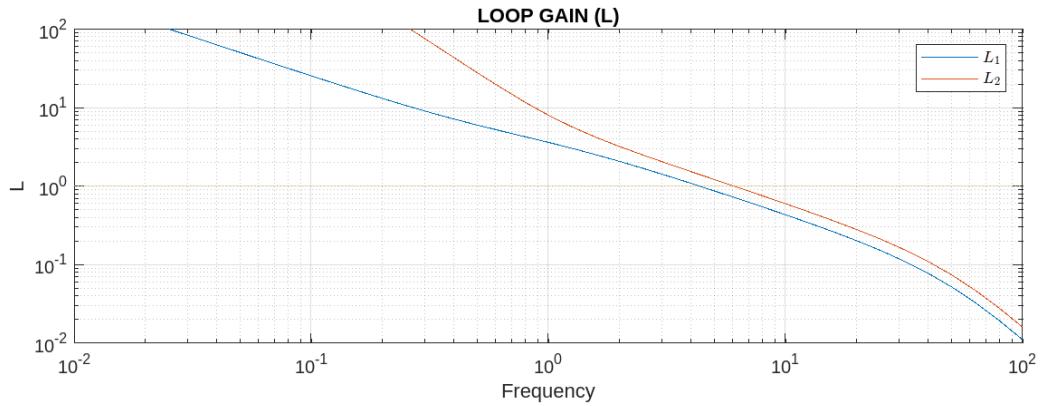
Από το Διάγραμμα 22. που ακολουθεί εξάγουμε τα περιθώρια κέρδους και φάσης για τις δύο συναρτήσεις βάρους:

$$GM_1 = -12.8 \text{ dB}$$

$$PM_1 = 61.08^\circ \text{ με } \omega_c = 4.35 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$GM_2 = -11.42 \text{ dB}$$

$$PM_2 = 52.27^\circ \text{ με } \omega_c = 6.08 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$



**Διάγραμμα 22.** Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα Bode πλάτους των συναρτήσεων μεταφοράς του ΣΑΒ με τη χρήση της `mixsyn()`.

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, πως με τη δεύτερη μέθοδο υπολογισμού έχουμε καλύτερα αποτελέσματα, αφού η `mixsyn()` δημιουργεί πιο σύνθετες συναρτήσεις μεταφοράς από την `fminimax()`, η οποία προϋποθέτει τη γνώση ενός απλού ελεγκτή προκειμένου να ολοκληρώσει τη διαδικασία της βελτιστοποίησης.