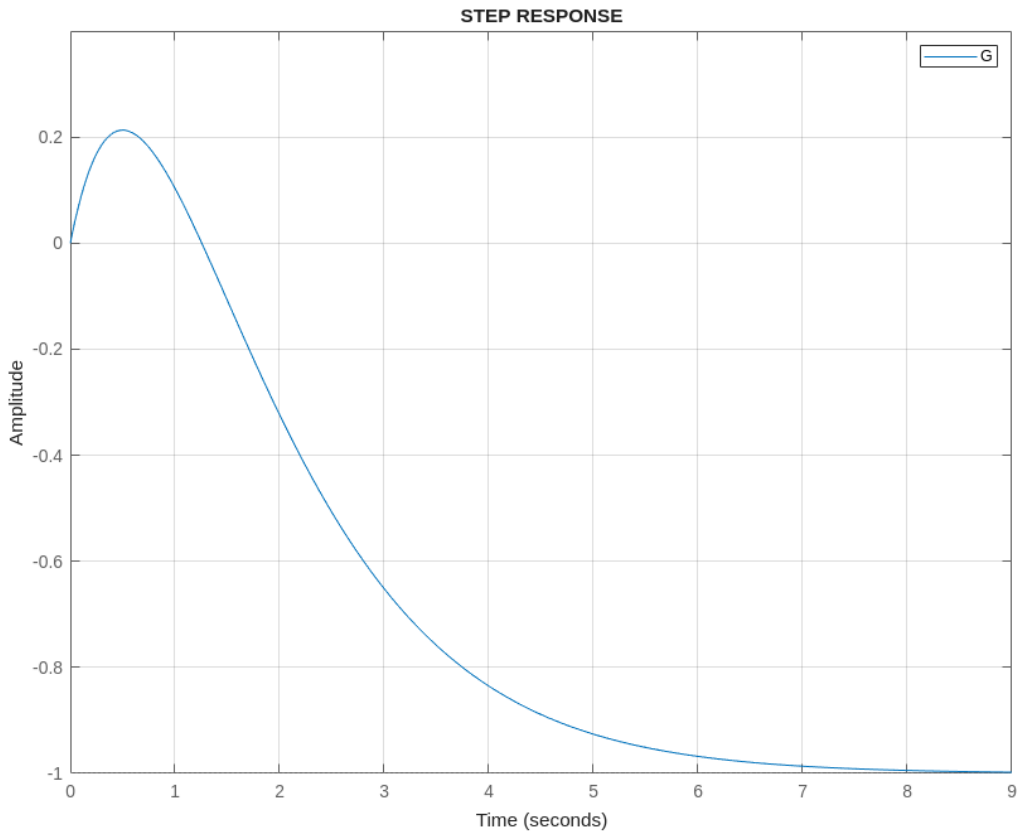
Σθεναρός Έλεγχος - Εργασία 2: Controllability of SISO Systems, Uncertainty and Robustness

Ονοματεπώνυμο: Βραχωρίτη Αλεξάνδρα (Α.Μ.: 1092793)

01 Μαΐου 2025

Tasks

1. Δεδομένης της συνάρτησης μεταφοράς $G(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}$ και της συνάρτησης βάρους $w_p(s) = \frac{0.5s+1}{s}$ του συστήματος θα εξάγουμε συμπεράσματα από το διάγραμμα Bode πλάτους της συνάρτησης ευαισθησίας S, της αντίστροφης συνάρτησης βάρους $1/w_p$ και της άπειρης νόρμας του γινομένου w_pS. Πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη των διαγραμμάτων, μπορούμε να παρατηρήσουμε την μορφή της συνάρτησης $G(s)$, όπου μας δείχνει ότι υπάρχει ένα μηδενικό στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο (RHP). Αυτό μετατρέπει το σύστημά μας σε σύστημα μη-ελάχιστης φάσης (non-minimum phase), που σημαίνει πως η βηματική απόκριση της εξόδου κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση από την αναμενόμενη και έπειτα κινείται προς την σωστή κατεύθυνση.

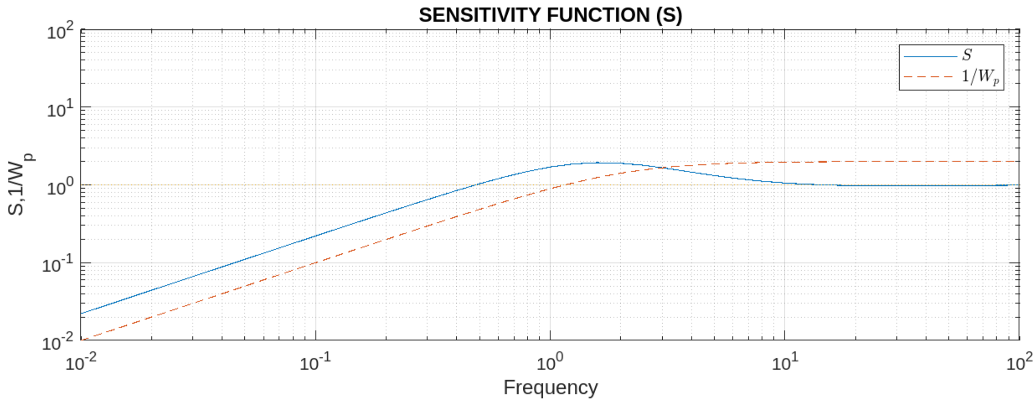


Διάγραμμα 1.1. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η βηματική απόκριση του συστήματος.

Το DC gain της $G(s)$ είναι: $\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s-1}{(s+1)^2} = \frac{-1}{1^2} = -1 < 0$, που σημαίνει ότι με θετικό βήμα (λόγω της βηματικής) αναμένουμε η απόκριση να είναι και αυτή αρνητική. Ωστόσο, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 1, η απόκριση αρχικά κατευθύνεται προς τα θετικά και έπειτα πέφτει, πλησιάζοντας την τιμή του DC gain.

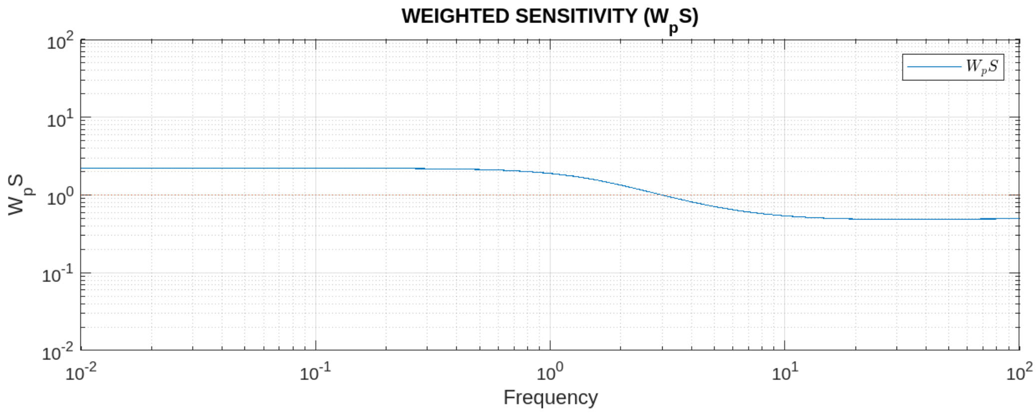
Προχωρώντας στην ανάλυση της συνάρτησης βάρους:

$w_p(s) = \frac{\frac{s}{M}+w_B^*}{s+w_B^* A}$ και $w_p(s) = \frac{0.5s+1}{s}$, άρα προκύπτει ότι: $\frac{1}{M} = 0.5 \Rightarrow M = 2$, $w_B^* = 1\frac{rad}{sec}$ και $A = 0$. Ωστόσο, στην μοντελοποίηση της $1/w_p$ με την συνάρτηση mixsyn() της MATLAB δεν μπορούμε να έχουμε A = 0, γιατί προκύπτει πόλος στο 0 (οριακή αστάθεια) και η συνάρτηση δεν το επιτρέπει. Πρέπει όλοι οι πόλοι να είναι στο αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Γι' αυτό επιλέγουμε $A = 10^{-10} \approx 0$.



Διάγραμμα 1.2. Το Bode διάγραμμα της συνάρτησης ευαισθησίας S και της $1/w_p$.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η S είναι μεγαλύτερη της $1/w_p$ μέχρι και τη συχνότητα των $3\frac{rad}{sec}$. Στις χαμηλές συχνότητες, δηλαδή, που μας ενδιαφέρει η τιμή της S να είναι μικρή, αυτή ξεπερνά το ανώτερο όριο που έχει τεθεί. Σε αντίθεση με τις χαμηλές συχνότητες, στις υψηλές η τιμή της S είναι ικανοποιητική, χωρίς όμως αυτό αν αρκεί.



Διάγραμμα 1.3. Το Bode διάγραμμα της συνάρτησης $w_p S$.

Παρατηρούμε ότι η τιμή της $||w_p S||_\infty$ μέχρι και τη συχνότητα των $3\frac{rad}{sec}$ ξεπερνάει το 1, γεγονός το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν είναι εφικτή η δημιουργία ελεγκτή που να ικανοποιεί τη σχέση $||w_p S||_\infty < 1$ δεδομένου του w_p στην εκφώνηση.

2. Η συνάρτηση μεταφοράς που μας δίνεται εμφανίζει ένα μηδενικό στο -z, το οποίο λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[-2, -1]$. Για την επιλογή μιας nominal συνάρτησης θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή: $\overline{z} = \frac{2+1}{2} = 1.5$. Άρα, $G_{nominal}(s) = \frac{2(s+1.5)}{8s+1}$.

Ερώτημα Α. Για το μοντέλο πολλαπλασιαστικής αβεβαιότητας (multiplicative (relative) uncertainty) θα ορίσουμε την μικρότερη ακτίνα $l_I(\omega)$ η οποία συμπεριλαμβάνει όλα τα πιθανά μοντέλα που μπορούν να δημιουργηθούν:

$l_I(\omega) = \max_{G_p \in \mathcal{I}} |\frac{G_p(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)}|$

$\Rightarrow l_I(\omega) = \max_{G \in I} |\frac{G(j\omega) - G_{nominal}(j\omega)}{G_{nominal}(j\omega)}|$

$\Rightarrow l_I(\omega) = \max_{G \in I} |\frac{\frac{2(j\omega+z)}{8j\omega+1} - \frac{2(j\omega+1.5)}{8j\omega+1}}{\frac{2(j\omega+1.5)}{8j\omega+1}}|$

$\Rightarrow l_I(\omega) = \max_{G \in I} |\frac{2(j\omega+z) - 2(j\omega+1.5)}{2(j\omega+1.5)}|$

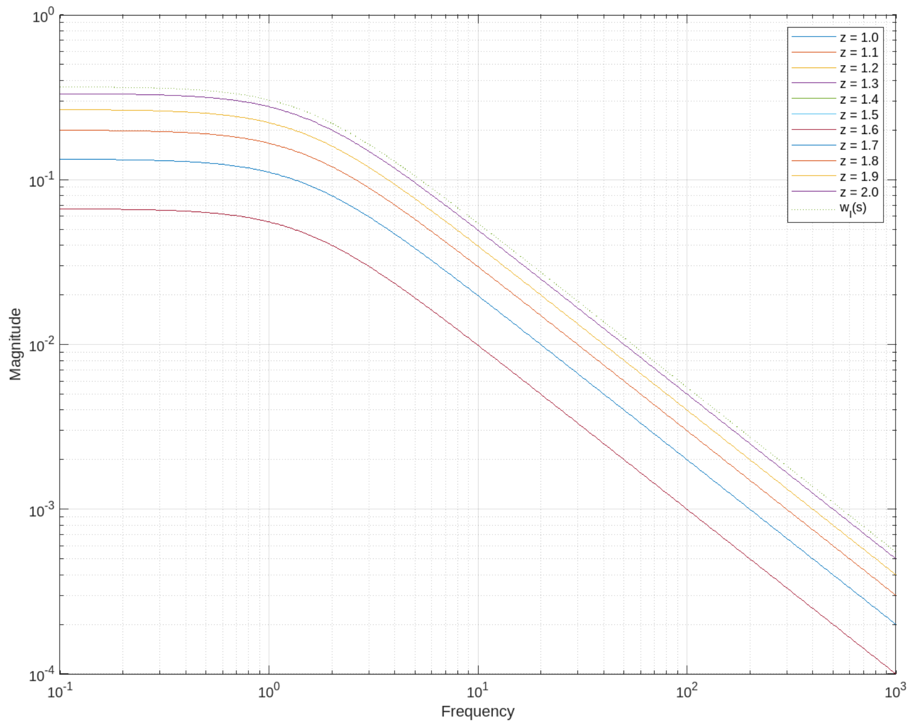
$\Rightarrow l_I(\omega) = \max_{G \in I} |\frac{2j\omega+2z-2j\omega-3}{2j\omega+3}|$

$\Rightarrow l_I(\omega) = \max_{G \in I} |\frac{2z-3}{2j\omega+3}|$

Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει παραπάνω είναι εξαιρετικά απλή. Ο αριθμητής του κλάσματος μεγιστοποιείται για την μέγιστη τιμή της z, επομένως:

$l_I(\omega) = \max_{G \in I} |\frac{2 \cdot 2-3}{2j\omega+3}|$

$\Rightarrow l_I(\omega) = \max_{G \in I} |\frac{1}{2j\omega+3}|$ και $|\frac{1}{2j\omega+3}| = \frac{1}{\sqrt{4\omega^2+9}}$, το οποίο μεγιστοποιείται εκεί όπου ο παρονομαστής ελαχιστοποιείται, δηλαδή στη συχνότητα $\omega = 0$. Έτσι, έχουμε το ανώτατο όριο της σχετικής αβεβαιότητας (relative uncertainty) να είναι $l_I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9}} = 1/3$. Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε σαν συνάρτηση βάρους την $w_I(s) = \frac{1.1}{2s+3}$, η οποία υπερκαλύπτει όλες τις συναρτήσεις για κάθε πιθανή τιμή του z.



Διάγραμμα 2.1. Το Bode διάγραμμα του πλάτους της συνάρτησης $\frac{2z-3}{2j\omega+3}$, $\forall z \in [1, 2]$, καθώς και της συνάρτησης βάρους $w_I(s)$.

Ερώτημα Β. Το σύνολο όλων των πιθανών plants δίνεται από την συνάρτηση μεταφοράς της εκφώνησης:

$$G(s) = \frac{2(s+z)}{8s+1}, \;\; z \in [1,2] \tag{1}$$

όπου το μηδενικό z είναι αβέβαιο. Θα πρέπει να περιγράψουμε την $G(s)$ με ένα μοντέλο αβεβαιότητας, ξεκινώντας από την εξής μετατροπή:

$z = \bar{z}(1 + r\Delta)$, όπου $\bar{z} = \frac{z_{max}+z_{min}}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

$r = \frac{z_{max}-z_{min}}{2\bar{z}} = \frac{2-1}{2\cdot 1.5} = \frac{1}{3}$

Έτσι, έχουμε:

$G(s) = \frac{2(s+z)}{8s+1}$

$\Rightarrow G(s) = \frac{2(s+(\bar{z}(1+r\Delta)))}{8s+1}$

$\Rightarrow G(s) = \frac{2(s+(1.5(1+\frac{1}{3}\Delta)))}{8s+1}$

$\Rightarrow G(s) = \frac{2(s+(1.5+0.5\Delta))}{8s+1}$

$\Rightarrow G(s) = \frac{2(s+1.5+0.5\Delta)}{8s+1}$

$\Rightarrow G(s) = \frac{2(s+1.5)(1+\frac{0.5}{s+1.5}\Delta)}{8s+1}$

Τελικά,

$$G(s) = \frac{2(s+1.5)}{8s+1}(1 + \frac{0.5}{s+1.5}\Delta) \tag{2}$$

Τα 3 πιθανά μοντέλα αβεβαιότητας που έχουμε διαθέσιμα είναι:

- Additive Uncertainty Model: $G_A(s) = G_o(s) + W_A(s)\Delta_A(s)$, $|\Delta_A(j\omega) < 1|$, $\forall\omega$
- Multiplicative Uncertainty Model: $G_I(s) = G_o(s)(1 + W_I(s)\Delta_I(s))$, $|\Delta_I(j\omega) < 1|$, $\forall\omega$
- Inverse Multiplicative Uncertainty Model: $G_{i,I}(s) = G_o(s)(1 + W_{i,I}(s)\Delta_{i,I}(s))^{-1}$, $|\Delta_{i,I}(j\omega) < 1|$, $\forall\omega$

με την $G_o(s)$ να δηλώνει τη συνάρτηση μεταφοράς που δε φέρει αβεβαιότητα.

Δεδομένης της σχέσης (2) και έχοντας θεωρήσει ήδη από το προηγούμενο ερώτημα $G_{nominal}(s) = \frac{2(s+1.5)}{8s+1}$, διαπιστώνουμε ότι καταλήξαμε σε Multiplicative Uncertainty Model με:

$G_o(s) = \frac{2(s+1.5)}{8s+1}$

$W_I(s) = \frac{0.5}{s+1.5}$

$|\Delta_I(j\omega) < 1|, \;\; \forall\omega$

Η επιλογή της $W_I(s)$ είναι ευσταθής συνάρτησης και ελάχιστη φάσης (LHP-pole s = -1.5, χωρίς μηδενικά στο RHP). Επιπλέον, ικανοποιείται η σχέση $|w_I(j\omega)| \geqslant l_I(\omega)$.

Ερώτημα Γ. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη που εξασφαλίζει την σθεναρή ευστάθεια του συστήματος (Robust Stability condition) είναι:

$$RS \Leftrightarrow ||w_I T||_\infty < 1 \tag{3}$$

ή αλλιώς

$$RS \Leftrightarrow |T| < 1/|w_I|, \;\; \forall\omega \tag{4}$$

μιας και η γενικευμένη αβεβαιότητα του συστήματος είναι εντός του μοναδιαίου δίσκου ($|\Delta(j\omega)| \geqslant 1$). Η απαίτηση αυτή προέρχεται από το διάγραμμα του Nyquist για τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου, όπως αυτό μοντελοποιήθηκε με το Multiplicative Uncertainty Model στο προηγούμενο ερώτημα. Για να είναι ευσταθές το σύστημα, η συνάρτηση μεταφοράς του ΣΚΒ δεν πρέπει να ακουμπά ή να ξεπερνά ποτέ το -1. Ορίσουμε, λοιπόν:

$T = G_o(s)(1 + G_o(s))^{-1}$

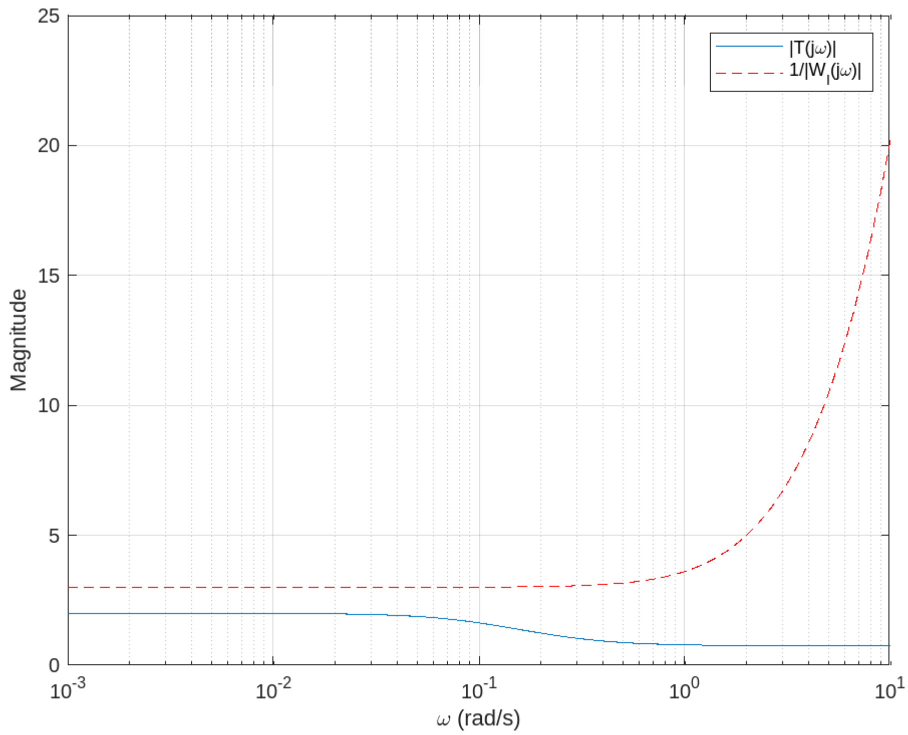
$\Rightarrow T = \frac{2(s+1.5)}{8s+1}(1 + \frac{2(s+1.5)}{8s+1})^{-1}$

$\Rightarrow T = \frac{s+1.5}{5s+2}$

και έχουμε:

$w_I T = \frac{0.5}{s+1.5}\frac{s+1.5}{5s+2} = \frac{0.5}{5s+2}$ και $||w_I T||_\infty = 0.25 < 1$, όπως ακριβώς απαιτείται από την (3).

Το Δ στην περίπτωση που εξετάζουμε είναι ένα πραγματικό, βαθμωτό μέγεθος και άρα δεν καλύπτει όλο τον μοναδιαίο δίσκο στο διάγραμμα του Nyquist. Έτσι, σύμφωνα με το βιβλίο, η συνθήκη (3) (ή (4)) δεν είναι και αναγκαία, αλλά μόνο ικανή. Αυτό σημαίνει πως όταν ικανοποιείται σίγουρα το σύστημα είναι ευσταθές, αλλά όταν δεν ικανοποιείται, δε σημαίνει πως το σύστημα δεν είναι ευσταθές. Επομένως, η συνθήκη είναι περισσότερο αυστηρή απ' όσο χρειάζεται.



Διάγραμμα 2.2. Στο διάγραμμα απεικονίζεται το Bode πλάτους της συνάρτησης συμπληρωματικής ευαισθησίας $|T_I|$ και το άνω όριο $1/|w_I|$. Διαπιστώνουμε πως ικανοποιείται η σχέση (4).