

Σθεναρός Έλεγχος - MIMO System Project: Hover a multirotor

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Μέλη Ομάδας:

Βραχωρίτη Αλεξάνδρα (Α.Μ.: 1092793)
Κουβαράκης Μιχαήλ (Α.Μ.: 1092859)
Μπαθρέλος Μιχαήλ (Α.Μ.: 1092665)
Τσικνάκης Εμμανουήλ (Α.Μ.: 1092861)

1 Ιουλίου 2025

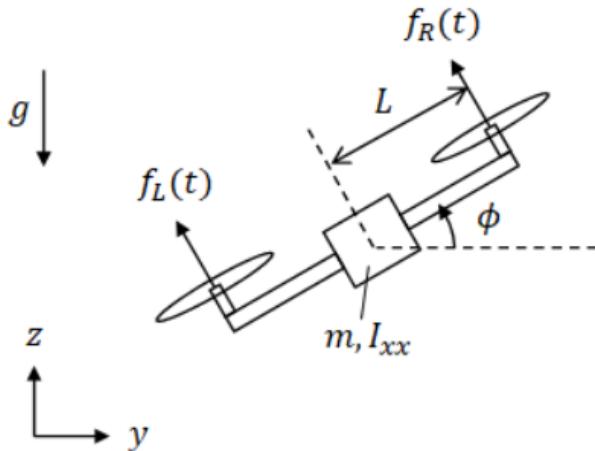
1 Περιγραφή και ανάλυση του συστήματος

1.1 Περιγραφή διάταξης και σκοπός ελέγχου

Η διάταξη που μελετάται αφορά ένα αιωρούμενο multirotor, με 2 έλικες, στον 2D χώρο, στο οποίο ασκείται η δύναμη του βάρους κατακόρυφα, με φορά προς τα κάτω και οι δυνάμεις που αναπτύσσονται οι 2 έλικες, κατακόρυφα, με φορά προς τα πάνω. Ο σκοπός του ελέγχου είναι το multirotor να ισορροπήσει σε κάποια θέση (x_0, y_0) , υπό γωνία φ_0 .

2 Ανάλυση του συστήματος

2.1 Υπολογισμός καταστατικών εξισώσεων



Εικόνα 2.1. Δυνάμεις και μεγέθη για την μελέτη του multirotor.

Στο εξής θα ισχύει: $f(t) = f = f_L(t) + f_R(t)$, $\tau(t) = \tau = (f_L(t) + f_R(t)) \cdot L$ και από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

- στον οριζόντιο άξονα (y):

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow -f \cdot \sin(\varphi) = m \cdot \ddot{y} \quad (1)$$

- Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον κατακόρυφο άξονα (z):

$$\Sigma F_z = ma_z \Rightarrow f \cdot \cos(\varphi) - mg = m \cdot \ddot{z} \quad (2)$$

- Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον άξονα περιστροφής:

$$\tau = I_{xx} \cdot \ddot{\varphi} \quad (3)$$

Ορίζοντας ως καταστάσεις του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ως εισόδους:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} \quad (5)$$

και ως εξόδους:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (6)$$

οι εξισώσεις του multirotor προκύπτουν:

$$\dot{x}_1 = x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_5$$

$$\dot{x}_3 = x_6$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{m}u_1 \cdot \sin(x_3)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{m}u_1 \cdot \cos(x_3) - g$$

$$\dot{x}_6 = \frac{1}{I_{xx}}u_2$$

Ορίζοντας ως σημείο λειτουργίας:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

και

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

μπορεί να γίνει γραμμικοποίηση του συστήματος. Έτσι, αξιοποιούμε τις καταστατικές εξισώσεις:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

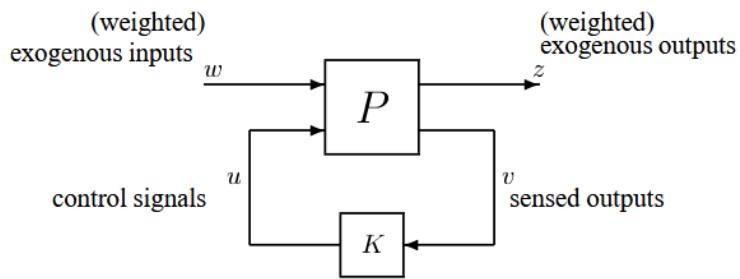
και μπορεί να υπολογισθεί ο πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς G του συστήματος:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \\ -\frac{117.7}{s^4} & 0 & \frac{12}{s^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

όπου το πλήθος των στηλών δηλώνει το πλήθος των εξόδων και το πλήθος των γραμμών το πλήθος των εισόδων.

2.2 Δημιουργία γενικευμένου συστήματος P

Σκοπός είναι η μετατροπή του συστήματος στην PK δομή.



Εικόνα 2.1. PK δομή.

Με τη βοήθεια της MATLAB και συγκεκριμένα της μεθόδου sysic προσδιορίστηκε το σύστημα P .

3 Υλοποίηση ελεγκτή

Για την υλοποίηση ελεγκτή του συστήματος έγινε έρευνα στην διεύθυνη βιβλιογραφία αλλά δεν βρέθηκε κάτι κατάλληλο για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Στη συνέχεια έγινε προσπάθεια με τη χρήση της μεθόδου $\|H\|_\infty$, χρησιμοποιώντας την hinfsyn της MATLAB. Δυστυχώς, λόγω της πολυπλοκότητας του συστήματος, η MATLAB δεν μπόρεσε να βρει ελεγκτή και σύμφωνα με το documentation της, αυτό συμβαίνει όταν το σύστημα δεν είναι stabilizable ή detectable. Τελικά, ο ελεγκτής που αποφασίστηκε να υλοποιηθεί είναι ένας Proportional-Derivative (PD), ώστε να προσδιοριστούν κατάλληλα οι επιταχύνσεις των εξόδων \dot{y} , \dot{z} , $\dot{\varphi}$ και το multirotor να φτάνει στον στόχο. Οι εξισώσεις που χαρακτηρίζουν τον ελεγκτή για κάθε έξοδο είναι:

$$\ddot{y}_{command}(t) = K_{py}(y_{desired} - y) + K_{dy}(\dot{y}_{desired} - \dot{y}) \quad (10)$$

$$\ddot{z}_{command}(t) = K_{pz}(z_{desired} - z) + K_{dz}(\dot{z}_{desired} - \dot{z}) \quad (11)$$

$$\ddot{\varphi}_{command}(t) = K_{p\varphi}(\varphi_{desired} - \varphi) + K_{d\varphi}(\dot{\varphi}_{desired} - \dot{\varphi}) \quad (12)$$

Από τις εξισώσεις (1), (2), (3) και (7), (8), (9):

$$f(t) = m \cdot g + m \cdot \ddot{z}_{command}$$

$$\tau(t) = I_{xx} \ddot{\varphi}_{command}$$

$$\varphi_{command}(t) = -\frac{1}{g} \cdot \ddot{y}_{command}$$

$$\text{Λύνοντας ως προς τα } f_L, f_R: \boxed{f_L = \frac{f}{2} - \frac{\tau}{2L}}, \boxed{f_R = \frac{\tau}{L} + f_L}$$

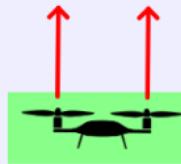
Από τον M/Σ Laplace των ελεγκτών:

$$K_1 = K_{pz} \cdot m \cdot \frac{1 + s \frac{K_{dz}}{K_{pz}}}{1 + \frac{K_{dz}}{10 \cdot K_{pz}} s} \quad K_2 = K_{p\varphi} \cdot m \cdot \frac{1 + s \frac{K_{d\varphi}}{K_{p\varphi}}}{1 + \frac{K_{d\varphi}}{10 \cdot K_{p\varphi}} s}$$

Με ρύθμιση των κερδών στις τιμές $K_{pz} = 0.4$, $K_{dz} = 1.5$, $K_{p\varphi} = 0.805$, $K_{d\varphi} = 0.02$ προκύπτουν τελικά οι ελεγκτές:

$$K_1 = 0.4 \cdot \frac{1 + 3.75s}{1 + 0.375s} \quad K_2 = 0.805 \cdot \frac{1 + 0.025s}{1 + 0.0025s} \quad (13)$$

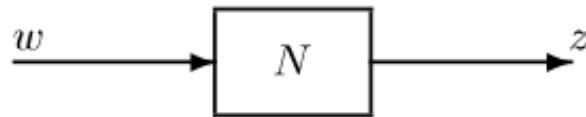
```
/* Horizontal position */ vehicle.x      = 0.01
/* Horizontal velocity */ vehicle.dx     = -0.01
/* Vertical position */ vehicle.y       = 0
/* Vertical velocity */ vehicle.dy      = 0
/* Angle from vertical */ vehicle.theta = 0.01
/* Angular velocity */ vehicle.dtheta   = 0
/* Simulation time */ vehicle.T        = 60.14
```



Εικόνα 3.1. To multirotor ισορροπεί στο σημείο $(y, z, \varphi) = (0, 0, 0)$ μετά από 60.14 sec.

4 Ονομαστική ευστάθεια και απόδοση

Έχοντας ελεγκτή N για το σύστημα και ενσωματώνοντας τον βρόχο στην δομή P , προκύπτει η δομή N .



Εικόνα 4.1. N δομή.

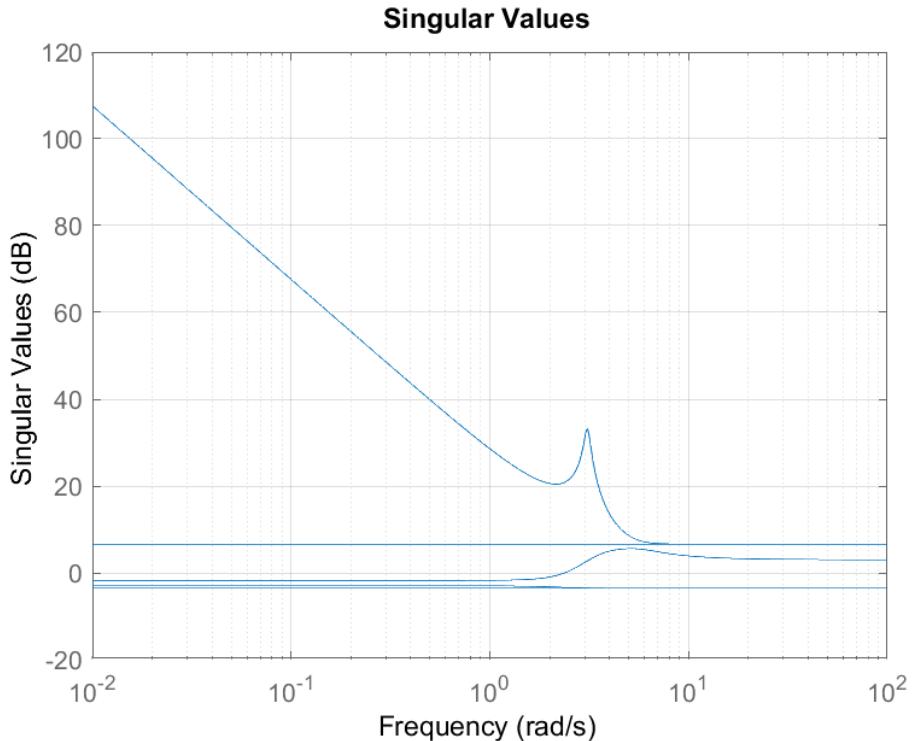
Βάσει της N , που εμπεριέχει το σύστημα P και τον ελεγκτή K ορίζονται τα κριτήρια ονομαστικής ευστάθειας και απόδοσης:

$$NS \Leftrightarrow N \text{ is internally stable}$$

$$NP \Leftrightarrow \|N_{22}\|_\infty < 1$$

όπου N_{22} είναι το στοιχείο του N που συνδέει το διάνυσμα εισόδου w με το διάνυσμα εξόδου z . Σε αυτή την περίπτωση που δεν έχουμε συμπεριλάβει την αβεβαιότητα, ισχύει $N_{22} = N$.

Το σύστημα N μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ευσταθές εάν όλοι οι πόλοι του είναι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Μέσω της MATLAB αυτό αποδεικνύεται. Άρα το σύστημα είναι ονομαστικά ευσταθές. Για την ονομαστική απόδοση πρέπει να βρεθεί η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή σε κάθε συχνότητα.



Διάγραμμα 4.1. Ιδιάζουσες τιμές του συστήματος N για κάθε συχνότητα.

Από το Διάγραμμα 4.1 φαίνεται πως η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή της N είναι πολύ μεγαλύτερη του 1 για χαμηλές συχνότητες. Αυτό σημαίνει πως το σύστημα δεν έχει ονομαστική απόδοση.

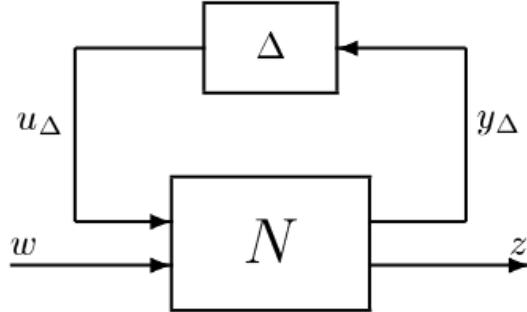
5 Αβεβαιότητα

Παρακάτω ακολουθεί μία θεωρητική ανάλυση της μοντελοποίησης της αβεβαιότητας του συστήματος, των κριτηρίων σύνεναρής ευστάθειας και απόδοσης, καθώς και των μεθόδων υλοποίησης σύνεναρών ελεγκτών.

5.1 Μοντελοποίηση Αβεβαιότητας

Για την μοντελοποίηση της αβεβαιότητας του συστήματος πρέπει να βρεθούν, είτε αναλυτικά (structured uncertainty), είτε πειραματικά (unstructured uncertainty), οι αβεβαιότητες του συστήματος σε κάθε στοιχείο του πίνακα

G . Έτσι δημιουργείται ο πίνακας Δ που έχει μοντελοποιημένη όλη την αβεβαιότητα του συστήματος. Έτσι ορίζεται το σύστημα $N\Delta$.



Εικόνα 5.1. $N\Delta$ δομή.

5.2 Συνεναρή Ευστάθεια

Για την συνεναρή ανάλυση του συστήματος πρέπει να ορίσουμε την Structured Singular Value μ , η οποία επιτρέπει την ανάλυση συστημάτων με structured uncertainty. Ορίζεται, λοιπόν, ότι πρέπει να βρεθεί η μικρότερη structured Δ (μετρούμενη σε $\bar{\sigma}(\Delta)$), που κάνει τον πίνακα $I - M\Delta$ ιδιάζων. Τότε ισχύει $\mu(M) = 1/\bar{\sigma}(\Delta)$. Με βάση το μ μπορεί να οριστεί το κριτήριο συνεναρής ευστάθειας για κάθε αβεβαιότητα:

$$RS \Leftrightarrow \mu(M(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega \quad (14)$$

Σημείωση: ο πίνακας M είναι ο N_{11} και για unstructured uncertainty ισχύει $\mu(M) = \bar{\sigma}(M)$.

5.3 Συνεναρή απόδοση

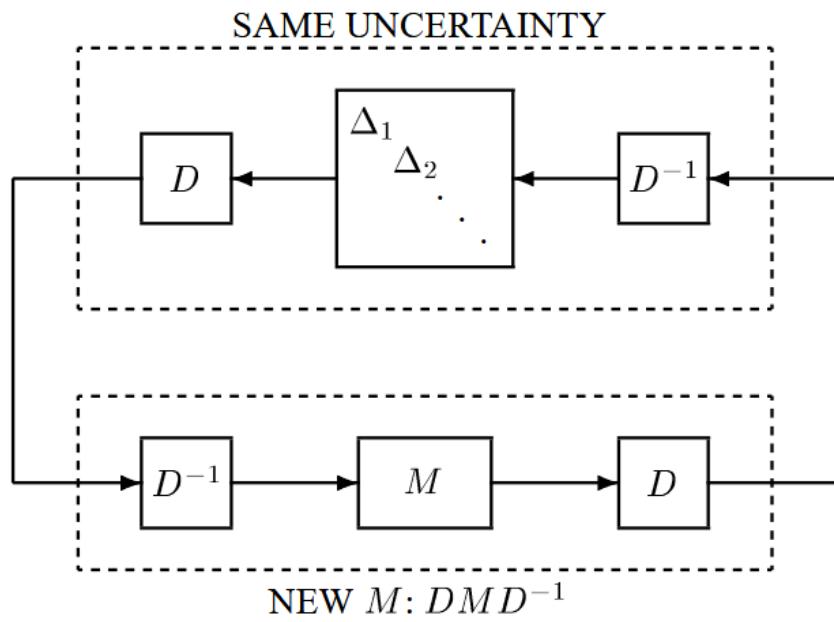
Το κριτήριο συνεναρής απόδοσης ενός συστήματος προκύπτει:

$$RP \Leftrightarrow \mu_{\tilde{\Delta}}(N) < 1, \quad \forall \omega, \quad \tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix} \text{ and } NS \quad (15)$$

όπου Δ ο πίνακας αβεβαιότητας του συστήματος και Δ_P ένας αυθαίρετος πίνακας με $\|\Delta_P\|_\infty < 1$.

5.4 Υλοποίηση συνεναρών ελεγκτών για MIMO συστήματα

Προς το παρόν δεν υπάρχουν άμεσες μέθοδοι για την εύρεση βέλτιστων συνεναρών ελεγκτών για MIMO συστήματα. Ένας αλγόριθμος για την προσέγγιση τέτοιων ελεγκτών είναι ο DK-iteration, ο οποίος ελαχιστοποιεί την νόρμα $\mu(N)$, βρίσκοντας τα κατόλληλα D , για κάθε ελεγκτή K . Ο αλγόριθμος βασίζεται στο γεγονός πως ο δεξιός και αριστερός πολλαπλασιασμός του Δ και M με D και D^{-1} δεν αλλάζει την δυναμική του συστήματος, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Εικόνα 5.1. Χρήση μπλοκ D στον αλγόριθμο DK .

6 Βιβλιογραφία

- [1] Sigurd Skogestad & Ian Postlethwaite, MULTIVARIABLE FEEDBACK CONTROL Analysis and design, 2nd ed., 2001.
- [2] 2D Quadrotor