Σθεναρός Έλεγχος - Εργασία 4: Performance limitations & Robust stability and performance for MIMO systems

Ονοματεπώνυμο: Βραχωρίτη Αλεξάνδρα (Α.Μ.: 1092793)

2 Ιουλίου 2025

Tasks

1. Δίνεται ο πίνακας μεταφοράς ενός συστήματος:

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{10s+1}\begin{bmatrix} 1 & -(s+1) \\ 1 & -1.1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

και ο πίνακας μεταφοράς των διαταραχών:

$$\hat{G}_d(s) = \frac{1}{(5s+1)(10s+1)}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Για να γίνει η ανάλυση της ελεγξιμότητας του MIMO συστήματος θα πρέπει πρώτα να κανονικοποιήσουμε τις συναρτήσεις (1) και (2). Από την εκφώνηση έχουμε τις μέγιστες τιμές των εισόδων, των διαταραχών και του σφάλματος, θα δημιουργήσουμε:

- τον διαγώνιο πίνακα κλιμάκωσης εισόδων $D_u = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$, αφού κάθε είσοδος ελέγχου πρέπει να διατηρείται κάτω από 10,
- τον διαγώνιο πίνακα κλιμάκωσης διαταραχών $D_d = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, αφού $|d_1| < 0.5$ και $|d_2| < 0.2$,
- τον διαγώνιο πίνακα κλιμάκωσης σφαλμάτων $D_e = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, αφού $|e| < 0.1$.

Έτσι, προκύπτουν οι κανονικοποιημένοι πίνακες μεταφοράς

$$G(s) = D_e^{-1}\hat{G}(s)D_u = \frac{1}{10s+1}\begin{bmatrix} 0.01 & -(0.01s+0.01) \\ 0.01 & -0.011 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$G_d(s) = D_e^{-1}\hat{G}_d(s)D_d = \frac{1}{(5s+1)(10s+1)}\begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -1 & 1.25 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Το σύστημα είναι MIMO, επομένως ο προσδιορισμός των μηδενικών και των πόλων του θα πρέπει να γίνει προσεκτικά. Ξεκινώντας από τους πόλους, θα προσδιορίσουμε τα minors, δηλαδή τις ορίζουσες κάθε υποπίνακα του G και έπειτα, θα εξάγουμε τον ελάχιστο κοινό παρονομαστή τους ($\varphi(s)$). Έχουμε, λοιπόν, τα minors 1ης τάξης:

$M_{11}(s) = \frac{0.01}{10s+1}$

$M_{12}(s) = \frac{-(0.01s+0.01)}{10s+1}$

$M_{13}(s) = \frac{0.01}{10s+1}$

$M_{14}(s) = \frac{-0.011}{10s+1}$

και το minor 2ης τάξης:

$M_{21}(s) = det(G(s)) = 10^{-4}\frac{s-0.1}{(10s+1)^2}$

Έτσι, ο ελάχιστος κοινός παρονομαστής των minors είναι $\varphi(s) = (10s+1)^2$, άρα υπάρχει ένας διπλός LHP-pole στο $s = -0.1$. Επειδή ο πίνακας μεταφοράς είναι 2×2 υπάρχει μόνο 1 minor 2ης τάξης, όπως δείξαμε παραπάνω και είναι αυτό που καθορίζει τα μηδενικά του συστήματος. Γενικά, ισχύει:

$$det(G(s)) = \frac{z(s)}{\varphi(s)} \tag{5}$$

και σύμφωνα με το $M_{21}(s)$ προκύπτει:

$det(G(s)) = \frac{z(s)}{\varphi(s)} = \frac{0.0001s-0.00001}{(10s+1)^2}$, με $z(s) = 0.0001s - 0.00001$. Επομένως, υπάρχει 1 RHP-zero στο $s = 0.1$. Ωστόσο, όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, δεν αρκεί μόνο να προσδιορίσουμε την ύπαρξη πόλων και μηδενικών σε ένα MIMO σύστημα. Το σημαντικότερο είναι η κατεύθυνση των διανυσμάτων εισόδου/εξόδου των πόλων και των μηδενικών.

Input/Output (u_z/y_z) Zero Direction

Θα προσδιορίσουμε την **(3)**, για $s_z = z = 0.1$:

$G(z) = G(0.1) = \frac{1}{10\cdot 0.1+1}\begin{bmatrix} 0.01 & -(0.01\cdot(0.1)+0.01) \\ 0.01 & -0.011 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.011 \\ 0.01 & -0.011 \end{bmatrix}$

Ο παραπάνω πίνακας πρέπει να γραφεί στη μορφή $G(z) = U\Sigma V^H$, με τον πίνακα Σ να είναι της μορφής $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Για την εξαγωγή των U, Σ, V θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση svd() της MATLAB:

$G(z) = G(0.1) = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.0210 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.6727 & -0.7399 \\ 0.7399 & -0.6727 \end{bmatrix}^H$

Τα u_z, y_z σχετίζονται με την μηδενική Singular Value του πίνακα Σ, δηλαδή το στοιχείο με τιμή 0 στην κύρια διαγώνιο. Το u_z ταυτίζεται με την δεξιά στήλη του V (πίνακας που δηλώνει τη βάση της εισόδου) και το y_z ταυτίζεται με την δεξιά στήλη του U (πίνακας που δηλώνει τη βάση της εξόδου). Άρα, έχουμε:

$u_z = \begin{bmatrix} -0.7399 \\ -0.6727 \end{bmatrix}$ και $y_z = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$

Διαταραχές και RHP-zero

Λόγω του μηδενικού του $G(s)$, η απόδοση του συστήματος μπορεί να είναι κακή εάν η κατεύθυνση της διαταραχής ευθυγραμμίζεται με την κατεύθυνση εξόδου του μηδενικού. Εφαρμόζοντας την αρχή του μέγιστου συντελεστή στην $f(s) = y_z^H S G_d$, παίρνουμε: $||Sg_d||_\infty \geqslant |y_z^H g_d(z)| = |y_z^H y_d| \cdot ||g_d(z)||_2$. Για να πετύχουμε $||Sg_d||_\infty < 1$, θα πρέπει να ισχύει $|y_z^H g_d(z)| < 1$. Πάμε να το ελέγξουμε.

Για την διαταραχή d_1:

$|y_z^H g_{d_1}(z)| = |\begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{0.2}{(5z+1)(10z+1)} \\ \frac{-1}{(5z+1)(10z+1)} \end{bmatrix}| = |\begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1212 \\ -0.3333 \end{bmatrix}| = 0.3214$

και για την διαταραχή d_2:

$$|y_z^H g_{d_2}(z)| = |\begin{bmatrix}-0.7071 & 0.7071\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{0.2}{(5z+1)(10z+1)} \\ \frac{1.25}{(5z+1)(10z+1)}\end{bmatrix}| = |\begin{bmatrix}-0.7071 & 0.7071\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1212 \\ 0.4167\end{bmatrix}| = 0.2089$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $0.3214 < 1$ και $0.2089 < 1$, άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο για οποιαδήποτε διαταραχή του επιβληθεί.

Περιορισμοί που εισάγονται από τους περιορισμούς εισόδου

Για την "τέλεια" απόρριψη διαταραχών, άρα και τον "τέλειο" έλεγχο, χρειαζόμαστε είσοδο:

$$u = G^{-1}G_d = \begin{bmatrix}4 & \frac{25(s+1.88)}{(s-0.1)(s+0.2)} \\ 0 & \frac{45}{(s-0.1)(s+0.2)}\end{bmatrix}$$

αφού $y = Gu + G_d = Gu + g_{d_i}d_i$, για $y = 0$.

Για να απορριφθεί η διαταραχή $d_1 = 1$, που είναι το χειρότερο δυνατό σενάριο, πρέπει το πλάτος της εισόδου $u = \begin{bmatrix}4 & 0\end{bmatrix}^T$ να είναι < 1. Στην προκειμένη περίπτωση, αυτό δεν ισχύει και παραβιάζεται η προδιαγραφή που έχουμε θέσει για τις εισόδους, αφού το πλάτος είναι 4. Αντίστοιχα, για $d_2 = 1$ η είσοδος είναι $u = \begin{bmatrix}\frac{25(s+1.88)}{(s-0.1)(s+0.2)} & \frac{45}{(s-0.1)(s+0.2)}\end{bmatrix}^T$, με μέγιστο πλάτος πολύ μεγαλύτερο του 1 (προέκυψε μέσω MATLAB). Άρα, φαίνεται να μην είναι εφικτή η απόρριψη των διαταραχών χωρίς να παραβιαστούν οι περιορισμοί εισόδων και ταυτόχρονα, η διαταραχή d_2 έχει απαιτήσεις μεγαλύτερων εισόδων από την d_1 για να απορριφθεί.

2. Δεδομένου ότι η δομή M έχει σχεδιαστεί ευσταθής, προχωράμε στην ανάλυση του interconnected συστήματος, δηλαδή της $M\Delta$-δομής.

Περίπτωση A: διαταραχή Δ που είναι full matrix (unstructured)

- SVD ανάλυση M-δομής: $U\Sigma V^H = \begin{bmatrix}-0.0501 & -0.9987 \\ -0.9987 & 0.0501\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14.1598 & 0 \\ 0 & 0.7062\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.7089 & -0.7053 \\ -0.7053 & 0.7089\end{bmatrix}$
- $\Delta = \frac{1}{\sigma_1}v_1u_1^H = \frac{1}{14.1598}\begin{bmatrix}-0.7089 \\ -0.7053\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.0501 & -0.9987\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.0025 & 0.0500 \\ 0.0025 & 0.0497\end{bmatrix}$
- $\bar{\sigma}(\Delta) = 1/\bar{\sigma}(M) = 1/14.1598 = 0.0607$, που οδηγεί την ορίζουσα του πίνακα $I - M\Delta = \begin{bmatrix}0.9975 & -0.0500 \\ -0.0500 & 0.0030\end{bmatrix}$ στο 0.

Έτσι, $\mu(M) = 14.1598$.

Περίπτωση B: διαταραχή Δ που είναι diagonal matrix (structured)

- $M = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 10 & 10\end{bmatrix}$
- $\Delta = \begin{bmatrix}\delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2\end{bmatrix}$ και θα πρέπει να τον υπολογίσουμε, άρα:

  $I - M \cdot \Delta = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 10 & 10\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-\delta_1 & 0 \\ 10\delta_1 & 1-10\delta_2\end{bmatrix}$

  $det(I - M\Delta) = 0 \Rightarrow (1-\delta_1)\cdot(1-10\delta_2) - 0 = 0 \Rightarrow (1-\delta_1)\cdot(1-10\delta_2) = 0 \Rightarrow \delta_1 = 1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ ή $\delta_2 = 0.1, \delta_1 \in \mathbb{R}$. Επειδή ψάχνουμε τον μικρότερο διαγώνιο πίνακα που θα μηδενίζει την ορίζουσα, ορίζουμε: $\Delta = \begin{bmatrix}0.1 & 0 \\ 0 & 0.1\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

- $\bar{\sigma}(\Delta) = 0.1$, που οδηγεί την ορίζουσα του πίνακα $I - M\Delta$ στο 0.

Έτσι, $\mu(M) = 10$.

Ανάλυση με τη χρήση του εργαλείου mussv της MATLAB Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση mussv() και mussvunwrap(), παίρνουμε τον πίνακα $\Delta = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0.0500 \\ 0.0025 & 0.0497 \end{bmatrix}$ για την περίπτωση του unstructured και τον πίνακα $\Delta = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ για την περίπτωση του structured, οι οποίοι ταυτίζονται με την ανάλυση που έγινε παραπάνω.