

Σθενναρός Έλεγχος - SISO System Project: Block on slope

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Μέλη Ομάδας:

Βραχωρίτη Αλεξάνδρα (Α.Μ.: 1092793)

Κουβαράκης Μιχαήλ (Α.Μ.: 1092859)

Μπαθρέλλος Μιχαήλ (Α.Μ.: 1092665)

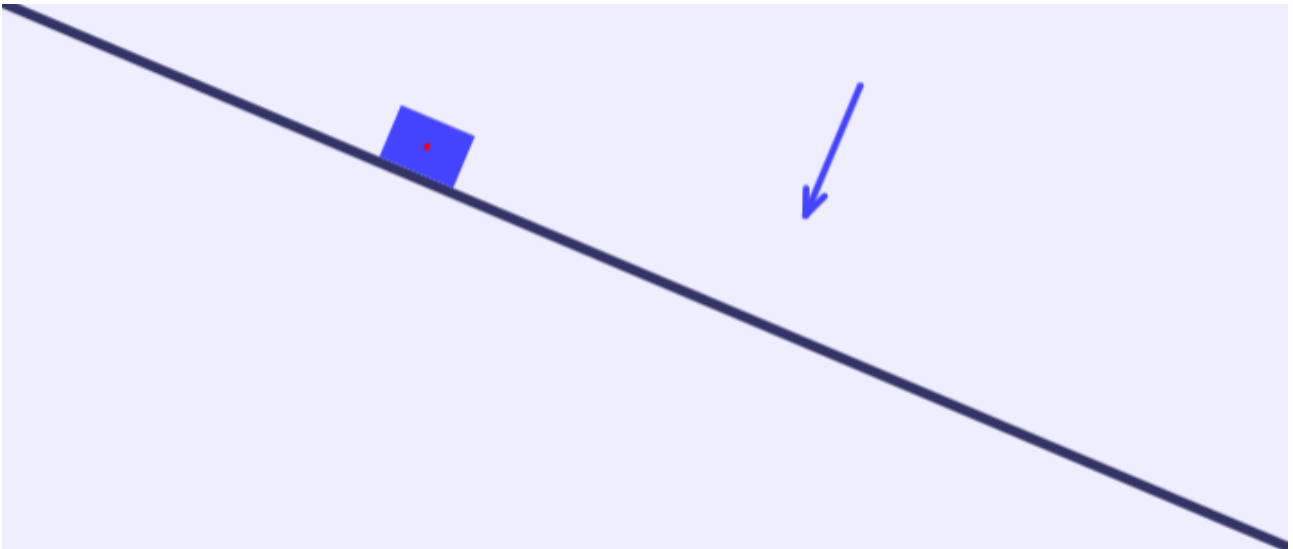
Τσικνάκης Εμμανουήλ (Α.Μ.: 1092861)

1 Ιουλίου 2025

1 Περιγραφή και ανάλυση του συστήματος

1.1 Περιγραφή διάταξης και σκοπός ελέγχου

Η διάταξη που μελετάται αφορά ένα σώμα τοποθετημένο πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, χωρίς τριβή, στο οποίο ασκείται η δύναμη του βάρους και εξωτερική δύναμη F . Για το σύστημα πρέπει να δημιουργηθεί ελεγκτής τέτοιος ώστε το σώμα να ισορροπεί σε ένα σημείο x μετά από κάποιο χρόνο t και ταυτόχρονα να απορρίπτει διαταραχές, όπως η δύναμη του βάρους.



Εικόνα 1. Αναπαράσταση συστήματος. Το μπλε σώμα έχει το κέντρο του στην κόκκινη κουκίδα, ενώ το μπλε βέλος υποδεικνύει το $x = 0$.

1.2 Ανάλυση συστήματος

Η δύναμη του βάρους W ασκείται στο κέντρο του σώματος, που φαίνεται με κόκκινο και με φορά προς τα κάτω, κάθετα σε αυτό. Η δύναμη αυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες, η μία παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο (W_x) και η άλλη κάθετη προς αυτό (W_y). Θεωρώντας ως άξονα x το κεκλιμένο επίπεδο και με τις θετικές τιμές του προς τα δεξιά, τότε ισχύει $W_x = m \cdot g \cdot \sin\theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των δυνάμεων W και W_y και g η επιτάχυνση της βαρύτητας, που ισούται με $9.8 \frac{m}{s^2}$. Αξιοποιώντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον άξονα x έχουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot a \Rightarrow W_x - F = m \cdot a \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin\theta - F = m \cdot a \Rightarrow g \cdot \sin\theta - \frac{F}{m} = a \quad (1)$$

Θεωρώντας την εξωτερική δύναμη F κανονικοποιημένη ως προς τη μάζα του σώματος ($F_{normalized}$), ορίζεται το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = g \cdot \sin\theta - \frac{F}{m} = a$$

1.3 Συναρτήσεις μεταφοράς $G(s)$ και $G_d(s)$

Για την συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ του συστήματος εφαρμόζεται η

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2)$$

Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος, χωρίς την παρουσία της διαταραχής προκύπτουν από την $\dot{x}_2 = -\frac{F}{m}$ ως

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot F_{normalized} \quad (3)$$

και με την βοήθεια της (2) προκύπτει η (μη-κανονικοποιημένη) συνάρτηση μεταφοράς του.

$$G(s) = -\frac{1}{s^2} \quad (4)$$

Με όμοιο τρόπο, οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος παρουσία της διαταραχής ορίζονται από την $\dot{x}_2 = g \cdot \sin\theta$ ως

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (g \cdot \sin\theta) \quad (5)$$

και από την (2) προκύπτει η (μη-κανονικοποιημένη) συνάρτηση μεταφοράς της διαταραχής

$$G_d(s) = \frac{1}{s^2} \quad (6)$$

1.4 Σημεία λειτουργίας και μέγιστες αποκλίσεις μεγεθών

$$F_{normalized}^* = -5$$

$$x^* = 0$$

$$(g \cdot \sin\theta)^* = 5$$

$$\max\{\delta F_{normalized}\} = 10$$

$$\max\{\delta x\} = 2$$

$$\max\{\delta(g \cdot \sin\theta)\} = 5$$

1.5 Κανονικοποιημένες συναρτήσεις μεταφοράς $G(s)$ και $G_d(s)$

Οι κανονικοποιημένες συναρτήσεις μεταφοράς της εξόδου ως προς την είσοδο και της εξόδου ως προς την διαταραχή, με βάση τις μέγιστες αποκλίσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω είναι αντίστοιχα:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\delta y / \delta y_{max}}{\delta u / \delta u_{max}} = -\frac{1}{s^2} \frac{\delta u_{max}}{\delta y_{max}} = -\frac{1}{s^2} \frac{\max\{\delta F_{normalized}\}}{\max\{\delta x\}} = -\frac{5}{s^2}$$

$$G_d(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{\delta y / \delta y_{max}}{\delta d / \delta d_{max}} = \frac{1}{s^2} \frac{\delta d_{max}}{\delta y_{max}} = \frac{1}{s^2} \frac{\max\{\delta(g \cdot \sin\theta)\}}{\max\{\delta x\}} = \frac{2.5}{s^2}$$

2 Διαμόρφωση της συνάρτησης μεταφοράς ανοιχτού βρόχου L - Loop shaping

Η μέθοδος αυτή αποτελεί μια κλασική προσέγγιση διαμόρφωσης του πλάτους της συνάρτησης μεταφοράς $L = KG$ του συστήματος ανοιχτού βρόχου (ΣΑΒ). Διαμόρφωση σημαίνει η L να αποκτήσει ένα επιθυμητό εύρος ζώνης, κατάλληλη κλίση κ.α.. Ως K ορίζεται ο ελεγκτής του συστήματος κλειστού βρόχου (ΣΚΒ) και G η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, που αφορά την είσοδο (plant), τον ενεργοποιητή (actuator) και τη συσκευή μέτρησης (measurement device). Πώς επιλέγεται, λοιπόν, ο K ώστε να διαμορφωθεί κατάλληλα το κέρδος της L ; Αυτό είναι κάτι που θα εξετασθεί αναλυτικά παρακάτω, αλλά πρώτα θα παρουσιασθούν κάποιοι "συμβιβασμοί" (trade-offs) για την συνάρτηση μεταφοράς του ΣΑΒ.

Γενικά, στόχος του ελέγχου σε ένα σύστημα είναι να μειώσει όσο το δυνατόν περισσότερο το σφάλμα παρακολούθησης $e = y - r$ στο ΣΚΒ και ιδανικά να το μηδενίσει. Στην ιδανική περίπτωση ελέγχου θα πρέπει:

$e = -S \cdot r + SG_d \cdot d - T \cdot n \approx 0$, που σημαίνει ότι:

- πρέπει να μηδενιστούν οι διαταραχές (disturbance rejection με τον όρο $SG_d \cdot d$) και να γίνει παρακολούθηση των εντολών (command tracking με τον όρο $S \cdot r$), που σημαίνει ότι η συνάρτηση ευαισθησίας S θα πρέπει να είναι $S \approx 0$ ή αντίστοιχα η συμπληρωματική συνάρτηση ευαισθησίας να είναι $T \approx I$ (διότι ισχύει $S + T = 1, \forall \omega$). Αυτό επιτυγχάνεται διαμορφώνοντας την L έτσι ώστε να έχει μεγάλο πλάτος,
- πρέπει να εξαλειφθεί ο θόρυβος (zero noise transmission με τον όρο $T \cdot n$), άρα θα πρέπει $T \approx 0$ ή $S \approx I$, που επιτυγχάνεται με χαμηλό κέρδος της L ($L \approx 0$).

Οι παραπάνω δύο προτάσεις έρχονται σε σύγκρουση και αποτελούν τους κύριους συμβιβασμούς που πρέπει να ρυθμιστούν κατάλληλα, ώστε το σύστημα να λειτουργεί αποδοτικά και το σφάλμα να λαμβάνει μικρή τιμή, κοντά στο 0. Ευτυχώς, οι δύο αντικρουόμενες προτάσεις που αναφέρθηκαν συμβαίνουν σε διαφορετικές συχνότητες, οπότε είναι δυνατόν να επιτευχθούν και οι δύο στόχοι (απόρριψη διαταραχών-παρακολούθηση και εξάλειψη θορύβου) διαμορφώνοντας την L έτσι ώστε να έχει μεγάλο κέρδος στις χαμηλές συχνότητες, και μικρό κέρδος στις υψηλές συχνότητες, δηλαδή πάνω από την συχνότητα αποκοπής ω_c .

2.1 Ελεγκτής inverse-based

Η (4), άρα και η $L(s)$ δε φέρουν μηδενικό στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο (RHP-zero), επομένως δεν είναι αναγκαίο να αντισταθμιστεί η ασταθής συμπεριφορά που εισάγουν τα μηδενικά στο σύστημα. Ορίζουμε, λοιπόν, την $L(s) = \frac{\omega_c}{s}$

$$K(s)G(s) = \frac{\omega_c}{s}$$

$$K(s) = \frac{\omega_c}{s} G^{-1}(s)$$

Εφόσον η $G(s)$ αντιστρέφεται, ο $K(s)$ είναι υλοποιήσιμος. Η ω_c του συστήματος βασίζεται στην απόρριψη διαταραχών, που σημαίνει ότι το σύστημα θα πρέπει να λειτουργεί στη συχνότητα που ορίζεται από τη σχέση:

$$|G_d(j\omega_d)| = 1 \Rightarrow \left| \frac{2.5}{j\omega_d} \right| = 1 \Rightarrow \frac{2.5}{\omega_d^2} = 1 \Rightarrow \omega_d = \sqrt{2.5} \frac{rad}{sec} \text{ και έστω η συνάρτηση αποκοπής } \omega_c = \omega_d = \sqrt{2.5} \frac{rad}{sec}$$

Επομένως, ο ελεγκτής θα είναι:

$$K_0(s) = \frac{\omega_c}{s} G^{-1}(s) \Rightarrow K_0(s) = \frac{\sqrt{2.5} \frac{s^2}{-5}}{s} \Rightarrow \boxed{K_0(s) = -0.31623s}$$

Ο βαθμός του αριθμητή του ελεγκτή K είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή, άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι improper και δεν έχει νόημα περαιτέρω μελέτη του συγκεκριμένου ελεγκτή.

2.2 Ελεγκτής για την απόρριψη διαταραχών

2.2.1 Αναλογικός ελεγκτής - P controller

Το σφάλμα παρακολούθησης του συστήματος ορίζεται ως $e = y - r$ και για να γίνει κατανοητό πόσο καλά το σύστημα απορρίπτει τη διαταραχή, ορίζεται $r = 0$, άρα $e = y \Rightarrow e = SG_d d$. Η χειρότερη περίπτωση υφίσταται όταν

η διαταραχή είναι $|d(\omega) = 1|$. Ακόμη και τότε πρέπει το σφάλμα να ικανοποιεί την ανίσωση:

$$|e(\omega)| \leq 1$$

$$\Rightarrow |SG_d| \leq 1 \text{ και } |d| < 1$$

$$\Rightarrow |SG_d| \leq 1$$

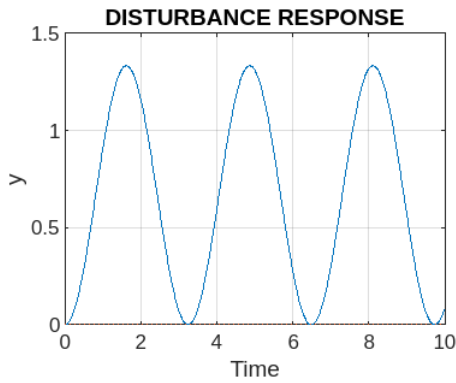
$$\Rightarrow \left| \frac{1}{1+L(j\omega)} G_d(j\omega) \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow |G_d(j\omega)| \leq |1 + L(j\omega)|, \forall \omega$$

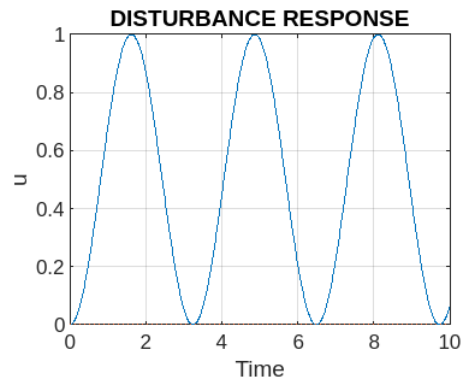
$$\Rightarrow |L(j\omega)| \geq |G_d(j\omega)|, \forall \omega$$

$$\Rightarrow |L_{min}| \approx |G_d| \Rightarrow |K_{min}G| \approx |G_d| \Rightarrow |K_{min}| \approx |G^{-1}G_d| \Rightarrow |K_{min}| \approx |G^{-1}L_{min}| = |G^{-1}G_d|$$

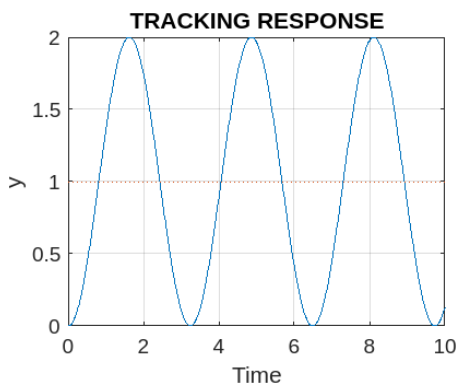
$$\text{Σύμφωνα με τα παραπάνω ο ελεγκτής γίνεται } K_1(s) = L_{min}G^{-1} \Rightarrow K_1(s) = \frac{2.5}{s^2}(-\frac{s^2}{5}) \Rightarrow \boxed{K_1(s) = -0.5}$$



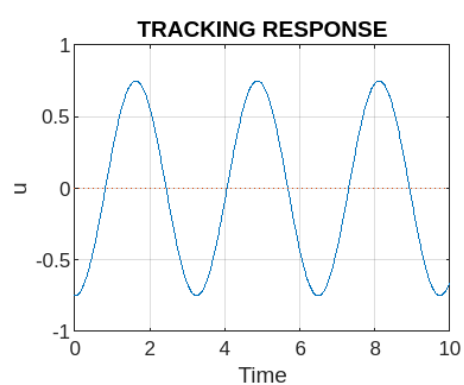
Διάγραμμα 1.1. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος εξόδου (y_1) σχετικά με την διαταραχή.



Διάγραμμα 1.2. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος ελέγχου (u_1) σχετικά με την διαταραχή.



Διάγραμμα 1.3. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος εξόδου (y_1) σχετικά με την είσοδο αναφοράς (r).



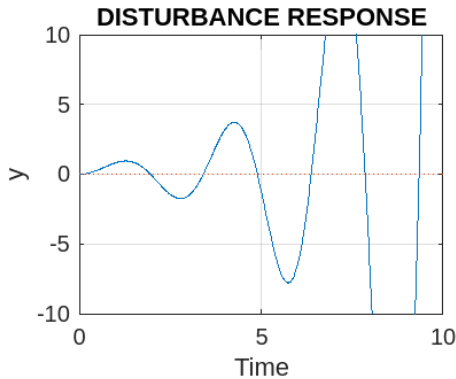
Διάγραμμα 1.4. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος ελέγχου (u_1) σχετικά με την είσοδο αναφοράς (r).

Από τα διαγράμματα φαίνεται πως δεν επιτυγχάνεται απόρριψη διαταραχών, αλλά ούτε και παρακολούθηση της εισόδου αναφοράς. Επομένως, ο ελεγκτής K_1 δεν είναι κατάλληλος και το σύστημα είναι ασταθές.

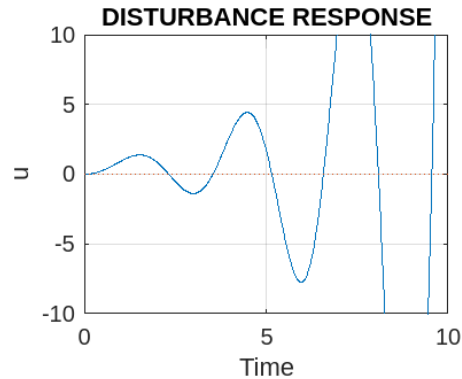
2.2.2 Αναλογικός-Ολοκληρωτικός ελεγκτής για προσθήκη κέρδους στις χαμηλές συχνότητες - PI controller

Στόχος είναι η αύξηση του κέρδους της L στις χαμηλές συχνότητες. Έτσι, ο προηγούμενος ελεγκτής πολλαπλασιάζεται με τον ολοκληρωτικό όρο $\frac{s+\omega_I}{s}$. Ως ω_I ορίζεται η συχνότητα μέχρι την οποία ο ολοκληρωτικός όρος επιδρά. Για την διατήρηση ικανοποιητικού περιθωρίου φάσης στις υψηλές συχνότητες μία επιλογή για το ω_I είναι $\omega_I = 0.2\omega_c$. Ο νέος ελεγκτής, λοιπόν, θα έχει τη μορφή:

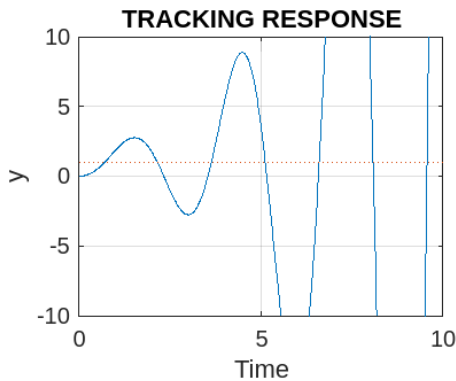
$$K_2(s) = K_1(s) \cdot \frac{s+\omega_I}{s} \Rightarrow K_2(s) = -0.5 \cdot \frac{s + 0.3162}{s}$$



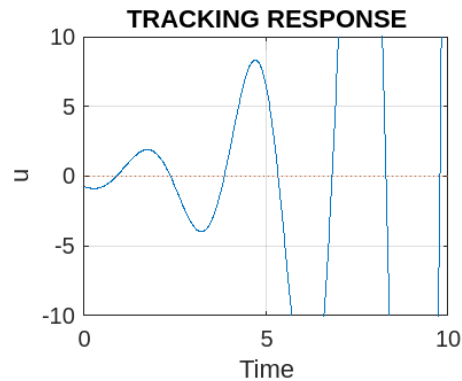
Διάγραμμα 2.1. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος εξόδου (y_2) σχετικά με την διαταραχή.



Διάγραμμα 2.2. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος ελέγχου (u_2) σχετικά με την διαταραχή.



Διάγραμμα 2.3. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος εξόδου (y_2) σχετικά με την είσοδο αναφοράς (r).



Διάγραμμα 2.4. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος ελέγχου (u_2) σχετικά με την είσοδο αναφοράς (r).

Από τα διαγράμματα είναι εμφανές ότι το σύστημα παραμένει ασταθές.

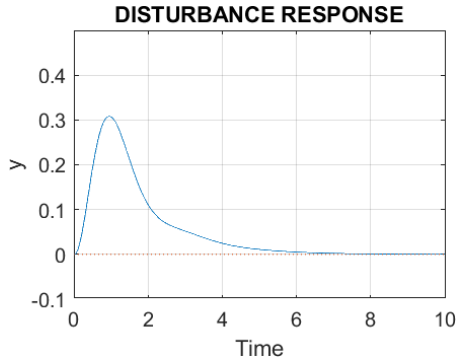
2.2.3 Αναλογικός-Ολοκληρωτικός-Παραγωγικός Ελεγκτής για ρύθμιση στις υψηλές συχνότητες - PID controller

Για την αύξηση του περιθωρίου φάσης στις υψηλές συχνότητες και την καλύτερη μεταβατική απόκριση, είναι αναγκαία η προσθήκη ενός lead-lag όρου, της μορφής $\frac{\tau_{lead}s+1}{\tau_{lag}s+1}$. Έτσι, ο ελεγκτής γίνεται:

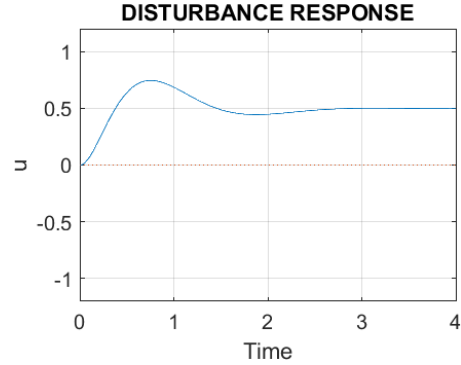
$$K_3(s) = K_2(s) \frac{\frac{1}{20\omega_c}s+1}{\frac{1}{20\omega_c}s+1}$$

Έπειτα από ρύθμιση των κερδών, ο ελεγκτής γίνεται:

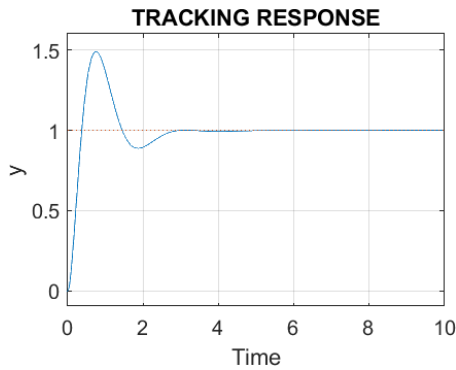
$$K_3(s) = -0.94868 \frac{(0.7906s + 1)(0.9882s + 1)}{s(0.09882s + 1)}$$



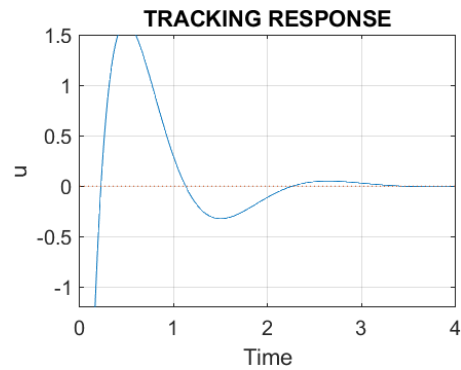
Διάγραμμα 3.1. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος εξόδου (y_3) σχετικά με την διαταραχή.



Διάγραμμα 3.2. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος ελέγχου (u_3) σχετικά με την διαταραχή.



Διάγραμμα 3.3. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος εξόδου (y_3) σχετικά με την είσοδο αναφοράς (r).



Διάγραμμα 3.4. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η χρονική απόκριση του σήματος ελέγχου (u_3) σχετικά με την είσοδο αναφοράς (r).

Από τα διαγράμματα φαίνεται πως ο ελεγκτής κάνει ικανοποιητική παρακολούθηση της εισόδου αναφοράς και απορρίπτει τις διαταραχές στην έξοδο.

3 Υλοποίηση PID ελεγκτή στο πραγματικό σύστημα

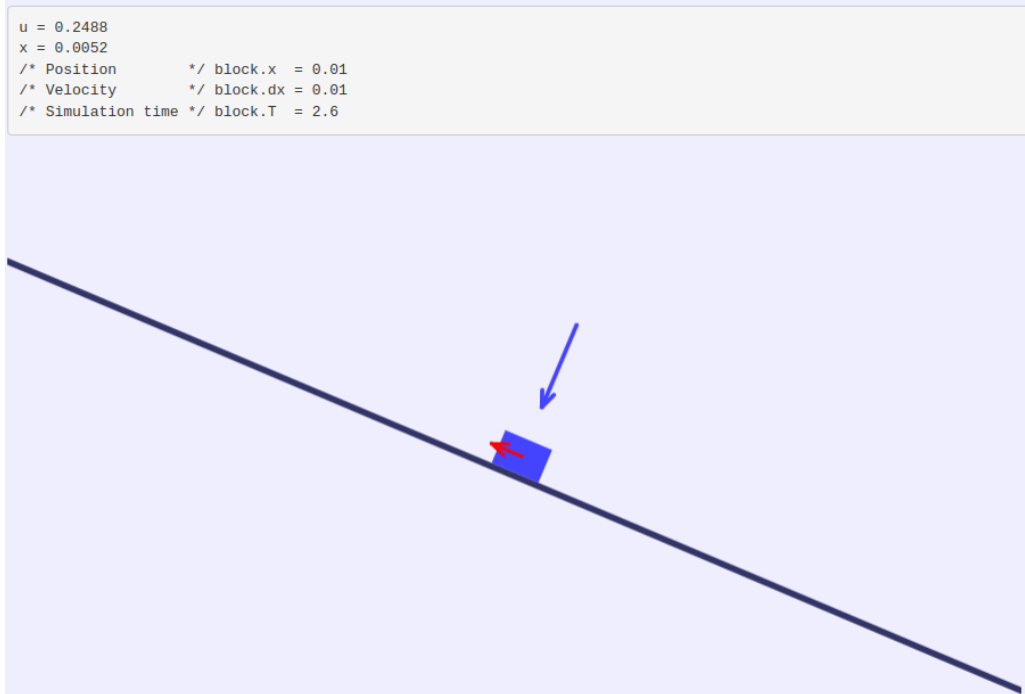
Ο ελεγκτής K_3 που υλοποιήθηκε παραπάνω θα πρέπει να μετασχηματιστεί στον διακριτό χρόνο, προκειμένου να γίνει η προσομοίωση του συστήματος. Με τη χρήση της συνάρτησης `c2d()` της MATLAB, για χρόνο δειγματοληψίας 0.02 sec και με τη μέθοδο Zero-order hold (zoh) λαμβάνουμε την:

$$K_{3,discrete} = \frac{-7.5z^2 + 14.6890z - 7.1925}{z^2 - 1.8168z + 0.8168} = \frac{u(k)}{e(k)} \Rightarrow \frac{-7.5 + 14.69z^{-1} - 7.1925z^{-2}}{1 - 1.8168z^{-1} + 0.8168z^{-2}} = \frac{u(k)}{e(k)} \Rightarrow$$

$$-7.5e(k) + 14.6890e(k-1) - 7.1925e(k-2) = u(k) - 1.8168u(k-1) + 0.8168u(k-2) \Rightarrow$$

$$u(k) = 1.8168u(k-1) - 0.8168u(k-2) - 7.5e(k) + 14.6890e(k-1) - 7.1925e(k-2)$$

Εφαρμόζοντας στο σύστημα την είσοδο $a^* + \Delta a_{max} \cdot u(k) = -5 + 10 \cdot u(k)$ και ανανεώνοντας διαδοχικά τις τιμές του σφάλματος $e(k)$, $e(k-1)$, $e(k-2)$ και της εισόδου $u(k-1)$, $u(k-2)$ το σώμα καταφέρνει να ισορροπήσει στην θέση $x = 0$ μετά από χρόνο $T = 2.6 \text{ sec}$.



Εικόνα 2. Το σώμα έχει ισορροπήσει στο $x = 0$ μετά από χρόνο 2.6 sec .

4 Ανάλυση αβεβαιότητας συστήματος

Σε καμία μελέτη ενός συστήματος δεν είναι γνωστή επ' ακριβώς η δυναμική του. Αυτό μεταφράζεται σε αβεβαιότητα του συστήματος η οποία πρέπει να ληφθεί υπόψη. Μέσα από τον κώδικα της προσομοίωσης του συστήματος γίνεται αντιληπτό πως η είσοδος u δεν εφαρμόζεται ακαριαία, αλλά περνάει μέσα από ένα βαθυπερατό φίλτρο. Αυτό σημαίνει πως η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ έχει έναν επιπλέον πόλο, ο οποίος όμως δεν έχει μοντελοποιηθεί. Για τη δημιουργία σθεναρού ελεγκτή, ο οποίος θα ικανοποιεί τις προδιαγραφές του συστήματος ακόμα και παρουσία της αβεβαιότητας, είναι απαραίτητη η μοντελοποίηση της αβεβαιότητας.

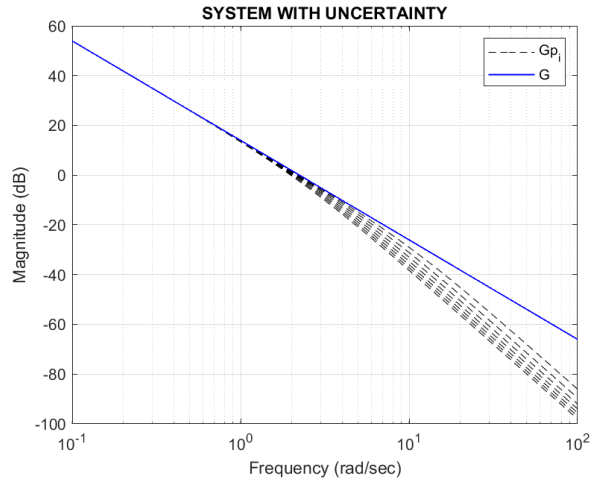
4.1 Μοντελοποίηση αβεβαιότητας

Το ονομαστικό (nominal) σύστημα ορίζεται από την σχέση (4), ενώ το σύνολο όλων των πιθανών συστημάτων είναι:

$$G_p(s) = -\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{\tau s + 1} \quad (7)$$

Η σταθερά χρόνου του επιπλέον πόλου οριοθετείται στο διάστημα $[0.1, 0.4] \text{ sec}$ και η μοντελοποίηση του συστήματος θα γίνει με βάση την πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα. Παρακάτω παρουσιάζονται οι G_{p_i} για χρονικές σταθερές από 0.1 έως 0.4 sec , με βήμα 0.05 sec :

Από το Διάγραμμα 4 φαίνεται πως στις υψηλές συχνότητες το κέρδος του συστήματος (G_{p_i}) είναι μικρότερο από αυτό του ονομαστικού (G). Αυτό είναι αναμενόμενο διότι στις υψηλές συχνότητες η δύναμη δεν προλαβαίνει να εφαρμοστεί, λόγω του βαθυπερατού φίλτρου που υπάρχει ενσωματωμένο στο σύστημα, με αποτέλεσμα το σήμα ελέγχου u να μην εφαρμόζεται ακαριαία.



Διάγραμμα 4. Διαγράμματα Bode του ονομαστικού συστήματος G και των πιθανών συστημάτων G_p , λόγω αβεβαιότητας.

Για την μοντελοποίηση της πολλαπλασιαστικής αβεβαιότητας πρέπει να προσδιοριστεί το βάρος w_I , που θα εμπεριέχει όλη την αβεβαιότητα του συστήματος, ώστε κάθε πιθανό σύστημα G_{p_i} να μπορεί να περιγραφεί ως:

$$G_{p_i}(s) = G(s) (1 + w_I(s) \Delta_I(s)), \quad |\Delta_I(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (8)$$

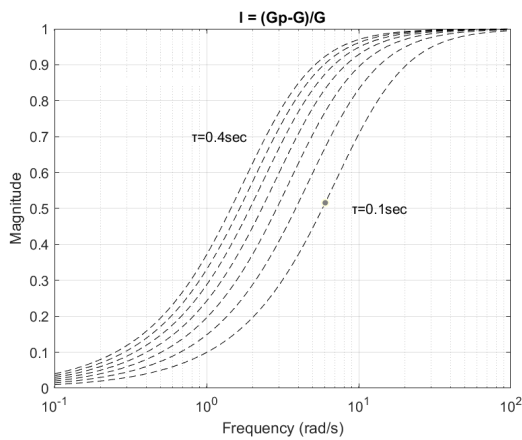
με

$$|w_I(j\omega)| \geq l_I(\omega) \quad \forall \omega \quad (9)$$

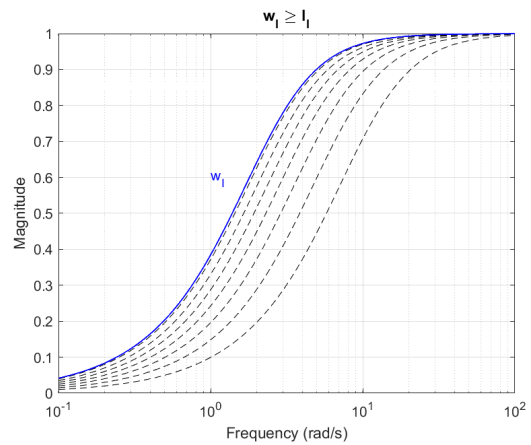
όπου l_I η μεγαλύτερη (κατά μέτρο) σχετική απόκλιση κάποιου G_{p_i} από την G :

$$l_I(\omega) = \max \left| \frac{G_p(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| \quad (10)$$

Τελικά, μία w_I είναι η: $w_I = \frac{s}{s+2.4}$, δεδομένου ότι $|l_{max}| = \left| -\frac{s}{s+\frac{1}{\tau_{max}}} \right| = \frac{s}{s+2.5}$ και πρέπει να ισχύει η ανίσωση (9). Παρακάτω παρουσιάζονται οι σχετικές αποκλίσεις όλων των G_{p_i} , καθώς και η w_I :



Διάγραμμα 5.1. Σχετικά σφάλματα των G_{p_i} ως προς την G .



Διάγραμμα 5.2. Συνάρτηση βάρους w_I για την μοντελοποίηση της αβεβαιότητας.

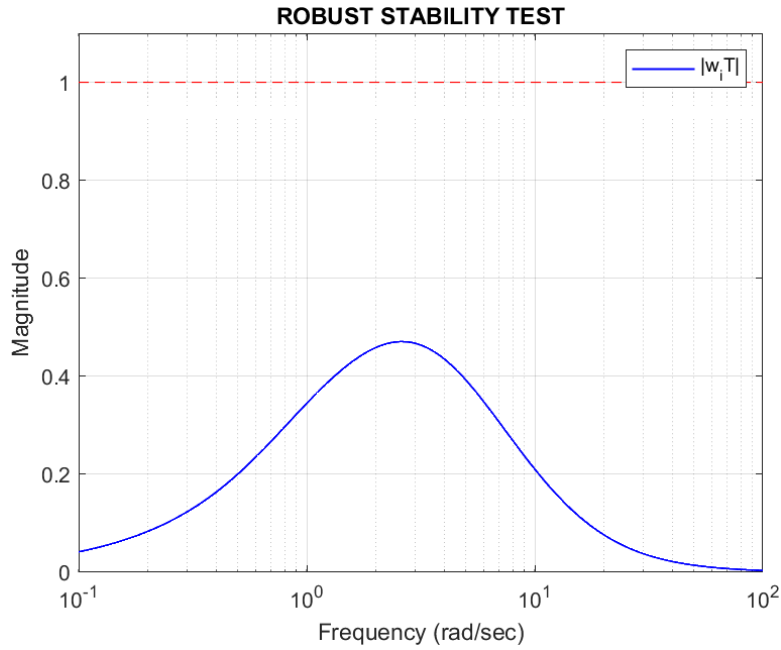
Άρα, κάθε G_{p_i} μοντελοποιείται ως:

$$G_{p_i}(s) = -\frac{5}{s^2} \left(1 + \frac{s}{s+2.4} \Delta_I(s) \right), \quad |\Delta_I(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (11)$$

4.2 Ανάλυση Σθεναρής Ευστάθειας (Robust Stability)

Σε αυτή την ενότητα εξετάζεται εάν ο PID ελεγκτής που σχεδιάστηκε για το ονομαστικό σύστημα διατηρεί την ευστάθεια του συστήματος, για οποιαδήποτε αβεβαιότητα που ενδέχεται να υπάρχει. Με βάση το κριτήριο ευστάθειας του Nyquist, προκύπτει πως το κριτήριο για σθεναρή ευστάθεια είναι:

$$RS \Leftrightarrow \|w_I T\|_\infty < 1 \quad (12)$$



Διάγραμμα 6. Διάγραμμα Bode $|w_I T|$ για την μελέτη σθεναρής ευστάθειας (robust stability).

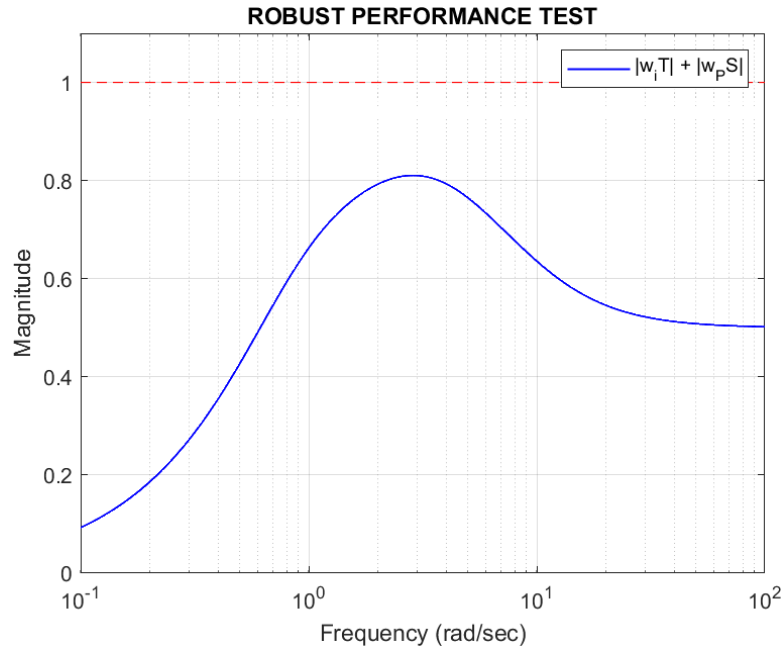
Από το Διάγραμμα 6 φαίνεται ότι το κριτήριο ικανοποιείται, άρα ο ελεγκτής εξασφαλίζει σθεναρή ευστάθεια στο σύστημα.

4.3 Ανάλυση Σθεναρής Απόδοσης (Robust Performance)

Αφού εξασφαλίστηκε η σθεναρή ευστάθεια του συστήματος, το επόμενο βήμα είναι η ανάλυση της σθεναρής απόδοσης. Δηλαδή, εξετάζεται κατά πόσο ο ελεγκτής εξακολουθεί να ικανοποιεί τις απαιτούμενες προδιαγραφές απόδοσης, ανεξαρτήτως της παρουσίας αβεβαιοτήτων στο μοντέλο του συστήματος. Το κριτήριο σθεναρής απόδοσης προκύπτει να είναι:

$$RP \Leftrightarrow |w_I T| + |w_P S| < 1, \quad \forall \omega \quad (13)$$

Από το Διάγραμμα 7 φαίνεται πως και αυτό το κριτήριο ικανοποιείται, άρα ο PID ελεγκτής που υλοποιήθηκε εξασφαλίζει σθεναρή ευστάθεια και απόδοση (robust stability and performance) για το σύστημα. Επίσης η συνάρτηση βάρους w_P που χρησιμοποιήθηκε είναι: $w_P = \frac{(s/M^{1/2} + \omega_B)^2}{(s + \omega_B A^{1/2})^2}$, όπου $A = 10^{-4}$, $M = 2$, $\omega_B = \sqrt{2.5}$.



Διάγραμμα 7. Διάγραμμα Bode $|w_I T| + |w_P S|$ για μελέτη σθεναρής απόδοσης (robust performance)

5 Συμπέρασμα

Ο σχεδιασμός του PID ελεγκτή με την τεχνική Loop Shaping αποδείχθηκε ικανοποιητικός για τον σκοπό αυτής της εφαρμογής, δηλαδή για την ισορροπία του σώματος στο $x = 0$, ανεξαρτήτως της διαταραχής που επιβάλλει η δύναμη της βαρύτητας, καθώς και της δυναμικής του συστήματος που αγνοήσαμε. Τα παραπάνω αποτελέσματα αποδείχτηκαν μέσω ανάλυσης σθεναρής ευστάθειας και απόδοσης.

6 Βιβλιογραφία

[1] Sigurd Skogestad & Ian Postlethwaite, MULTIVARIABLE FEEDBACK CONTROL Analysis and design, 2nd ed., 2001.