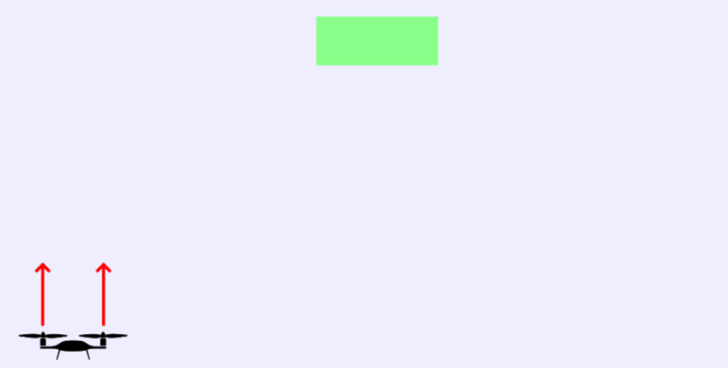
Hover a multirotor

Using online platform of Control Challenges



Βραχωρίτη Αλεξάνδρα, Κουβαράκης Μιχαήλ, Μπαθρέλλος Μιχαήλ, Τσικνάκης Εμμανουήλ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Πατρών

1 Ιουλίου 2025

Στόχος της ανάλυσης

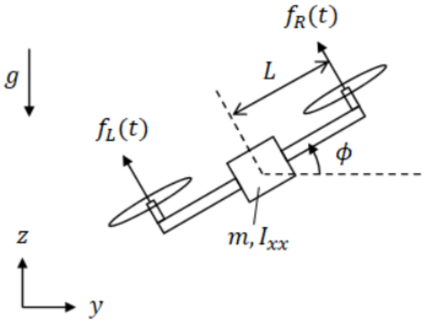
Σχεδιασμός κατάλληλου ελεγκτή K ώστε:

- το σώμα να ισορροπεί στη θέση $(x_0,\ y_0) = (0,\ 0)$, υπό μηδενική γωνία, μετά από χρόνο T και
- το σύστημα να απορρίπτει τις διαταραχές.

Διαταραχή;

- Η δύναμη του βάρους.

Περιγραφή του συστήματος



Quadrotor στον 2D χώρο, στο οποίο ασκούνται:

- η δύναμη του βάρους W,
- η αριστερή (f_L) και η δεξιά (f_R) ώθηση στις έλικες.

Ανάλυση συστήματος (1)

- Από τις δύο ωθήσεις f_L, f_R παράγεται:
  - δύναμη $f(t) = f = f_L(t) + f_R(t)$ και
  - ροπή $\tau(t) = \tau = (f_L(t) - f_R(t)) \cdot L$.

- Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow -f \cdot \sin(\varphi) = m \cdot \ddot{y} \tag{1}$$

$$\Sigma F_z = ma_z \Rightarrow f \cdot \cos(\varphi) - mg = m \cdot \ddot{z} \tag{2}$$

$$\tau = I_{xx} \cdot \ddot{\varphi} \tag{3}$$

Ανάλυση συστήματος (2)

Καταστάσεις:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Είσοδοι:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix}$$

Έξοδοι:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Ανάλυση συστήματος (3)

Οι εξισώσεις του multirotor προκύπτουν:

$$\dot{x}_1 = x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_5$$

$$\dot{x}_3 = x_6$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{m}u_1 \cdot sin(x_3)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{m}u_1 \cdot cos(x_3) - g$$

$$\dot{x}_6 = \frac{1}{I_{xx}}u_2$$

Ωστόσο, το σύστημα δεν είναι γραμμικό.

Γραμμικοποίηση συστήματος

Για τη γραμμικοποίηση θεωρούμε: $sin\varphi \approx \varphi$ και $cos\varphi \approx 1$, για φ κοντά στο 0. Έτσι, οι εξισώσεις γίνονται:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{x}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ -gx_3(t) \\ \frac{1}{m}u_1(t) - g \\ \frac{1}{I_{xx}}u_2(t) \end{bmatrix}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

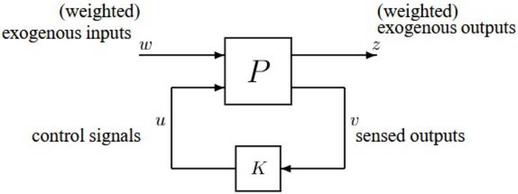
Έτσι μπορεί να υπολογισθεί ο πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς G του συστήματος:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \\ \frac{-117.7}{s^4} & 0 & \frac{12}{s^2} \end{bmatrix}$$

όπου το πλήθος των στηλών δηλώνει το πλήθος των εξόδων και το πλήθος των γραμμών το πλήθος των εισόδων.

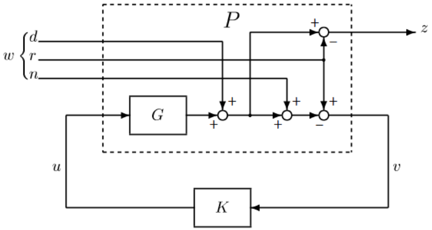
Γενικευμένη δομή P (1)

Θέλουμε να φέρουμε τα σύστημά μας στην γενικευμένη δομή P:



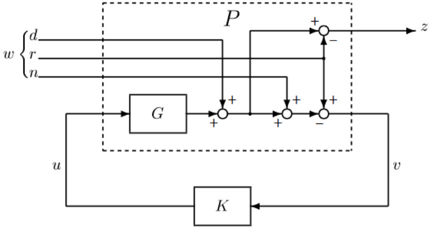
Γενικευμένη δομή P (2)

Θεωρήσαμε τη μορφή:



Γενικευμένη δομή P (2)

Θεωρήσαμε τη μορφή:



και τελικά προέκυψε: $P = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & G \\ -I & I & -I & -G \end{bmatrix}$

Σχεδιασμός ελεγκτή με H_∞

Δοκιμάσαμε να αξιοποιήσουμε τη μέθοδο hinfsyn() της MATLAB, αλλά λόγω της πολυπλοκότητας του συστήματος, δεν βρέθηκε ελεγκτής. Σύμφωνα με το documentation της MATLAB, αυτό συμβαίνει όταν το σύστημα δεν είναι stabilizable ή detectable.

Υλοποίηση *PD* ελεγκτή (1)

$$\ddot{y}_{command}(t) = K_{py}(y_{desired} - y) + K_{dy}(\dot{y}_{desired} - \dot{y}) \quad (4)$$

$$\ddot{z}_{command}(t) = K_{pz}(y_{desired} - z) + K_{dz}(\dot{z}_{desired} - \dot{z}) \quad (5)$$

$$\ddot{\varphi}_{command}(t) = K_{p\varphi}(\varphi_{desired} - \varphi) + K_{d\varphi}(\dot{\varphi}_{desired} - \dot{\varphi}) \quad (6)$$

Υλοποίηση *PD* ελεγκτή (1)

$$\ddot{y}_{command}(t) = K_{py}(y_{desired} - y) + K_{dy}(\dot{y}_{desired} - \dot{y}) \tag{4}$$

$$\ddot{z}_{command}(t) = K_{pz}(y_{desired} - z) + K_{dz}(\dot{z}_{desired} - \dot{z}) \tag{5}$$

$$\ddot{\varphi}_{command}(t) = K_{p\varphi}(\varphi_{desired} - \varphi) + K_{d\varphi}(\dot{\varphi}_{desired} - \dot{\varphi}) \tag{6}$$

Από τις εξισώσεις (1), (2), (3) και (4), (5), (6):

$$f(t) = m \cdot g + m \cdot \ddot{z}_{command}$$

$$\tau(t) = I_{xx}\ddot{\varphi}_{command}$$

$$\varphi_{command}(t) = -\frac{1}{g} \cdot \ddot{y}_{command}$$

Υλοποίηση *PD* ελεγκτή (2)

Λύνοντας ως προς τα f_L, f_R προκύπτουν: $\boxed{f_L = \frac{f}{2} - \frac{\tau}{2L}}$, $\boxed{f_R = \frac{\tau}{L} + f_L}$

Υλοποίηση *PD* ελεγκτή (2)

Λύνοντας ως προς τα f_L, f_R προκύπτουν: $\boxed{f_L = \frac{f}{2} - \frac{\tau}{2L}}$, $\boxed{f_R = \frac{\tau}{L} + f_L}$

Από τον Μ/Σ Laplace των ελεγκτών:

$$K_1 = K_{pz} \cdot m \cdot \frac{1 + s\frac{K_{dz}}{K_{pz}}}{1 + \frac{K_{dz}}{10 \cdot K_{pz}} s} \qquad K_2 = K_{p\varphi} \cdot m \cdot \frac{1 + s\frac{K_{d\varphi}}{K_{p\varphi}}}{1 + \frac{K_{d\varphi}}{10 \cdot K_{p\varphi}} s}$$

Υλοποίηση *PD* ελεγκτή (3)

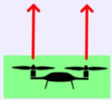
Με ρύθμιση των κερδών στις τιμές $K_{pz} = 0.4$, $K_{dz} = 1.5$, $K_{p\varphi} = 0.805$, $K_{d\varphi} = 0.02$ προκύπτει ο ελεγκτής $K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$ με:

$$K_1 = 0.4 \cdot \frac{1 + 3.75s}{1 + 0.375s} \qquad K_2 = 0.805 \cdot \frac{1 + 0.025s}{1 + 0.0025s}$$

Αποτελέσματα Προσομοίωσης

Το σώμα ισορροπεί σε 60.14 *sec*!

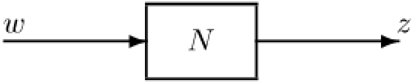
```
/* Horizontal position */ vehicle.x      = 0.01
/* Horizontal velocity */ vehicle.dx     = -0.01
/* Vertical position   */ vehicle.y      = 0
/* Vertical velocity   */ vehicle.dy     = 0
/* Angle from vertical */ vehicle.theta  = 0.01
/* Angular velocity    */ vehicle.dtheta = 0
/* Simulation time     */ vehicle.T      = 60.14
```



Σύστημα Κλειστού Βρόχου N

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το N με τη βοήθεια της MATLAB:

$$N = lft(P, K)$$



Ανάλυση ονομαστικής ευστάθειας

Κριτήριο ονομαστικής ευστάθειας:

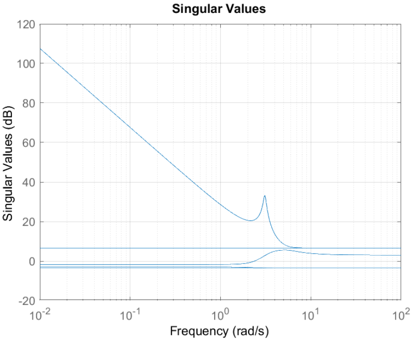
$$NS \Leftrightarrow N \textit{ is iternally stable}$$

Μέσω της MATLAB, με την εντολή pole(N), παρατηρήσαμε ότι όλοι οι πόλοι της N βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Συνεπώς η N είναι ευσταθής.

Ανάλυση ονομαστικής απόδοσης

Κριτήριο ονομαστικής απόδοσης:

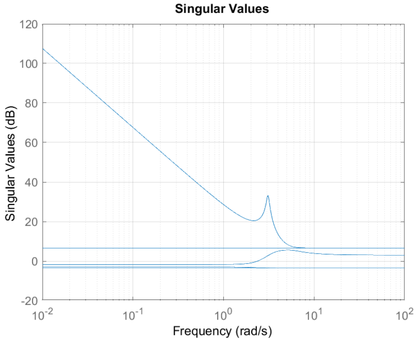
$$NP \Leftrightarrow ||N_{22}||_{\infty} < 1$$



Ανάλυση ονομαστικής απόδοσης

Κριτήριο ονομαστικής απόδοσης:

$$NP \Leftrightarrow ||N_{22}||_{\infty} < 1$$



Παρατηρούμε πως η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του συστήματος είναι πολύ μεγαλύτερη του 1, επομένως το σύστημα δεν έχει ονομαστική απόδοση.

Σας ευχαριστούμε για την προσοχή σας!

Ερωτήσεις;