

Тема: Похибки вимірювань

Основні формули

Визначення

x – наближене значення (отримуємо як результат вимірювання або обчислення)

x_{exact} – точне значення (ніколи не буде відомим ☹)

Δ_x – абсолютна похибка (визначається точністю вимірювання або обчислення)

$\omega_x = \frac{\Delta_x}{x}$ – відносна похибка

$$\Delta_x = x_{exact} - x$$

Абсолютні похибки арифметичних операцій

$$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y$$

$$\Delta_{x-y} = \Delta_x + \Delta_y$$

$$\Delta_{x*y} = \Delta_x * y + x * \Delta_y$$

$$\Delta_{x/y} = \frac{\Delta_x + x}{\Delta_y + y} - \frac{x}{y}$$

Відносні похибки арифметичних операцій

$$\omega_{x+y} = \frac{x}{x+y} * \omega_x + \frac{y}{x+y} * \omega_y$$

$$\omega_{x-y} = \frac{x}{x-y} * \omega_x - \frac{y}{x-y} * \omega_y$$

$$\omega_{x*y} = \omega_x * \omega_y + \omega_x + \omega_y$$

$$\omega_{x/y} = \frac{\omega_x - \omega_y}{\omega_y + 1}$$

ПРИКЛАД

Реалізація обчислень

Код програми Python (введення даних)

```
x = float(input('Введіть наближене значення величини X: '))
delta_x = float(input('Введіть абсолютну похибку вимірювання величини X: '))
y = float(input('Введіть наближене значення величини Y: '))
delta_y = float(input('Введіть абсолютну похибку вимірювання величини Y: '))

omega_x = delta_x / x
omega_y = delta_y / y
print('Відносна похибка значення величини X: ', omega_x)
print('Відносна похибка значення величини Y: ', omega_y)
```

Код програми Python (абсолютна похибка)

```
def delta_sum(delta_x, delta_y):
    return delta_x + delta_y
print('Абсолютна похибка X+Y = ', delta_sum(delta_x, delta_y))
```

Код програми Python (відносна похибка)

```
def omega_sum(x, y, omega_x, omega_y):
    return x/(x+y)*omega_x + y/(x+y)*omega_y
print('Відносна похибка X+Y = ', omega_sum(x, y, omega_x, omega_y))
```

Тестування програми (вхідні дані, абсолютна похибка)

x	Δ_x	y	Δ_y
10,2	0,05	1,3	0,01

$$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y = 0,05 + 0,01 = 0,06$$

$$\Delta_{x-y} = \Delta_x - \Delta_y = 0,05 - 0,01 = 0,04$$

$$\begin{aligned}\Delta_{x*y} &= \Delta_x * \Delta_y + \Delta_x * y + x * \Delta_y = 0,05 * 0,01 + 0,05 * 1,3 + 10,2 * 0,01 = \\ &= 0,0005 + 0,065 + 0,102 = 0,1675\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{x/y} &= \frac{\Delta_x + x}{\Delta_y + y} - \frac{x}{y} = \frac{0,05 + 10,2}{0,01 + 1,3} - \frac{10,2}{1,3} = \frac{10,25}{1,31} - 7,846153846153846 = \\ &= 7,824427480916031 - 7,846153846153846 = -0,021726365237815\end{aligned}$$

Тестування програми (відносна похибка, додавання)

$$\omega_x = \frac{\Delta_x}{x} = \frac{0,05}{10,2} = 0,0049019607843137$$

$$\omega_y = \frac{\Delta_y}{y} = \frac{0,01}{1,3} = 0,0076923076923077$$

$$\begin{aligned}\omega_{x+y} &= \frac{x}{x+y} * \omega_x + \frac{y}{x+y} * \omega_y = \\ &= \frac{10,2}{10,2 + 1,3} * 0,0049019607843137 + \frac{1,3}{10,2 + 1,3} * 0,0076923076923077 = \\ &= \frac{10,2}{11,5} * 0,0049019607843137 + \frac{1,3}{11,5} * 0,0076923076923077 = \\ &= 0,8869565217391304 * 0,0049019607843137 + \\ &\quad + 0,1130434782608696 * 0,0076923076923077 = \\ &= 0,0043478260869565 + 0,0008695652173913055 = \\ &= 0,0052173913043478\end{aligned}$$

Тестування програми (відносна похибка, віднімання)

$$\begin{aligned}\omega_{x-y} &= \frac{x}{x-y} * \omega_x - \frac{y}{x-y} * \omega_y = \\ &= \frac{10,2}{10,2 - 1,3} * 0,0049019607843137 - \frac{1,3}{10,2 - 1,3} * 0,0076923076923077 = \\ &= \frac{10,2}{8,9} * 0,0049019607843137 - \frac{1,3}{8,9} * 0,0076923076923077 = \\ &= 1,146067415730337 * 0,0049019607843137 - \\ &\quad - 0,1460674157303371 * 0,0076923076923077 = \\ &= 0,0056179775280899 - 0,001123595505618 = 0,0044943820224719\end{aligned}$$

Тестування програми (відносна похибка, множення, ділення)

$$\begin{aligned}\omega_{x*y} &= \omega_x * \omega_y + \omega_x + \omega_y = \\ &= 0,0049019607843137 * 0,0076923076923077 + \\ &+ 0,0049019607843137 + 0,0076923076923077 = \\ &= 0,00003770739064856696 + 0,0125942684766214 = \\ &= 0,01263197586727\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{x/y} &= \frac{\omega_x - \omega_y}{\omega_y + 1} = \frac{0,0049019607843137 - 0,0076923076923077}{0,0076923076923077 + 1} = \\ &= \frac{-0,002790346907994}{1,0076923076923077} = -0,0027690465499177\end{aligned}$$

Результати роботи програми

```
Введіть наближене значення величини X: 10.2
Введіть абсолютну похибку вимірювання величини X: 0.05
Введіть наближене значення величини Y: 1.3
Введіть абсолютну похибку вимірювання величини Y: 0.01
Відносна похибка значення величини X: 0.004901960784313726
Відносна похибка значення величини Y: 0.007692307692307692
Абсолютна похибка X+Y = 0.060000000000000005
Абсолютна похибка X-Y = 0.04
Абсолютна похибка X*Y = 0.16749999999999998
Абсолютна похибка X/Y = -0.02172636523781435
Відносна похибка X+Y = 0.0052173913043478265
Відносна похибка X-Y = 0.004494382022471911
Відносна похибка X*Y = 0.012631975867269985
Відносна похибка X/Y = -0.002769046549917676
```