Практика 13

Приведение решения матричной игры к решению задачи линейного программирования

Пусть игра $m \times n$ задана платёжной матрицей $P = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Игрок A применяет стратегии A_1, $A_2, \dots,$ A_m, а игрок B – стратегии B_1, $B_2, \dots,$ B_n.

Смешанными стратегиями игроков A и B называют векторы $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ и $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, координаты которых равны вероятностям применения игроками своих чистых стратегий A_1, $A_2, \dots,$ A_m и B_1, $B_2, \dots,$ B_n соответственно.

События, состоящие в том, что игроки применяют какую-либо из своих чистых стратегий, образуют для каждого игрока *полную группу событий*. Следовательно, сумма координат векторов P и Q равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1;$$
$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1.$$

Кроме того, по свойству вероятности, для координат смешанных стратегий выполняются неравенства:

$$0 \le p_i \le 1, \quad i = \overline{1, m};$$
$$0 \le q_j \le 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

Оптимальная стратегия P^* обеспечивает игроку A средний выигрыш, не меньший цены игры v, при любой стратегии игрока B и выигрыш, равный цене игры v, при оптимальной стратегии Q^* игрока B.

Полагаем далее, что $v > 0$. ***Это условие соблюдается, если все элементы платежной матрицы положительны.*** Если имеются отрицательные элементы, то матрица преобразуется путем увеличения всех ее элементов на число $\gamma = \left|\min\limits_{i,j} a_{ij}\right| + 1$ (модуль минимального элемента матрицы, увеличенный на единицу). Если все элементы платежной матрицы положительны, то можно считать $\gamma = 0$ и решать задачу линейного программирования для исходной платежной матрицы.

Применяя оптимальную стратегию P^* против любой чистой стратегии B_j игрока *B*, игрок *A* получает средний выигрыш или математическое ожидание выигрыша

$$a_j = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + ... + a_{mj} p_m \geq v.$$

Таким образом, вычисляя средние выигрыши игрока *A* для каждой из чистых стратегий игрока B, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{m1} p_m \geq v, \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + ... + a_{m2} p_m \geq v, \\ .... \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + ... + a_{mn} p_m \geq v. \end{cases}$$

Разделив каждое из неравенств на цену игры v и вводя новые переменные

$$x_1 = \frac{p_1}{v},\ x_2 = \frac{p_2}{v}, \ldots,\ x_m = \frac{p_m}{v},$$

получим систему

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + ... + a_{m1} x_m \geq 1, \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{m2} x_m \geq 1, \\ .... \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + ... + a_{mn} x_m \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Целевую функцию для игрока *A* найдём, учитывая, что он стремится получить максимальный выигрыш в игре. Разделив равенство

$$p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$$

на цену игры v, получим равенство

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v},$$

которое будет иметь наименьшее значение при достижении игроком *A* максимального выигрыша. Поэтому в качестве целевой функции можно взять функцию

$$F(X) = x_1 + x_2 + ... + x_m, \quad (2)$$

и задачу линейного программирования сформулировать следующим образом: определить значения переменных $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (1) и при этом целевая функция (2) имела минимальное значение.

Решая задачу (1)–(2), получаем оптимальную стратегию задачи линейного программирования $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, для которой значение целевой функции равно

$$F(X^*) = \min F(X).$$

Находим цену игры $v = \dfrac{1}{F(X^*)}$.

Вычисляем координаты смешанной оптимальной стратегии P^* игрока A:

$$p_i = vx_i,\ i = \overline{1,m}.$$

Чтобы найти оптимальную стратегию игрока B, составляем двойственную к (1)–(2) задачу и решаем ее. Получаем оптимальную стратегию $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ и вычисляем координаты оптимальной смешанной стратегии Q^* игрока B:

$$q_j = vy_j,\ j = \overline{1,n}.$$

В ходе решения двойственной задачи определяется максимальное значение целевой функции $G(Y^*) = \max G(Y)$, и цена игры может быть определена из равенства $v = \dfrac{1}{G(Y^*)}$.

Таким образом, найдено оптимальное решение для игры.

При решении произвольной конечной игры размера $m \times n$ рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока ***A*** (игрока ***B***) являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).
2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.
3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера $m \times n$ рекомендуется симплексный метод (или в программе Excel), для игр размера 2×2, $2 \times n$, $n \times 2$ возможно геометрическое решение.

Пример. Две отрасли могут осуществлять капитальные вложения в 3 объекта. Стратегии отраслей: i-я стратегия состоит в финансировании i-го объекта (i = 1, 2, 3). Учитывая особенности вкладов и местные условия, прибыли первой отрасли выражаются следующей матрицей:

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 6\\ 5 & 2 & -3\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Величина прибыли первой отрасли считается такой же величиной убытка для второй отрасли – представленная игра может рассматриваться как игра двух игроков с нулевой суммой.

Решение.

Найдем α и β.

$$\alpha=\max(-1,-3,-2)=-1,$$

$$\beta=\min(5,4,6)=4.$$

Т.к. $\alpha\neq\beta$, то решение игры находим в области смешанных стратегий.

Рассмотрим **игрока *A*.**

Будем искать оптимальную смешанную стратегию игрока А: $P=(p_1,p_2,...,p_m)$, где p_i – частота (вероятность) использования игроком *A* своей *i*-стратегии (i = 1,2,3). Обозначим цену игры (средний выигрыш) – v.

Чтобы свести матричную игру для игрока *A* к задаче линейного программирования преобразуем платежную матрицу так, чтобы все ее элементы были больше нуля – прибавим ко всем элементам матрицы число $\gamma=\left|\min\limits_{i,j}a_{ij}\right|+1=3+1=4.$ Получаем преобразованную платежную матрицу:

$$P'=\begin{pmatrix}3 & 5 & 10\\ 9 & 6 & 1\\ 2 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы и используя (1)–(2) сформулируем ***задачу линейного программирования***:

$$\begin{cases}3x_1+9x_2+2x_3\geq 1,\\ 5x_1+6x_2+8x_3\geq 1,\\ 10x_1+x_2+9x_3\geq 1.\end{cases}\qquad(3)$$

$$x_1,x_2,x_3\geq 0.$$

$$F(X)=x_1+x_2+x_3\to\min.$$

Решим задачу средствами MS Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ограничения:						
2		3	9	2	1	>=	1
3		5	6	8	1	>=	1
4		10	1	9	1	>=	1
5		x1	x2	x3			
6	F(X)=	1	1	1	0,1749		
7							
8	Решение	0,0787	0,0816	0,0146			

Получили решение

$X^* = (0.0787, \quad 0.0816, \quad 0.0146)$, $F(X^*) = 0.1749$.

Следовательно, $v = \dfrac{1}{F(X^*)} = \dfrac{1}{0.1749} = 5.7167$.

Т.к. $p_i = vx_i$, $i = \overline{1,3}$, получим

$p_1 = 5.7167 \cdot 0.0787 = 0.45,$

$p_2 = 5.7167 \cdot 0.0816 = 0.47,$

$p_3 = 5.7167 \cdot 0.0146 = 0.08.$

$P^* = (0.45, \quad 0.47, \quad 0.08).$

Это решение для игры, заданной матрицей B (преобразованной матрицы). Для матрицы A: компоненты смешанной стратегии не меняются, а цена игры меньше на число, которое прибавляли ко всем элементам матрицы А, т.е. на 4. Окончательный результат:

$X^* = (0.0787, \quad 0.0816, \quad 0.0146)$, $v = 1.7167 \cong 1.72$.

Рассмотрим игрока *B*.

Запишем двойственную задачу к (3):

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 + 10y_3 \le 1, \\ 9y_1 + 6y_2 + y_3 \le 1, \\ 2y_1 + 8y_2 + 9y_3 \le 1. \end{cases} \tag{4}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

$$G(Y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max.$$

Решим задачу средствами MS Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ограничения:						
2		3	5	10	1	<=	1
3		9	6	1	1	<=	1
4		2	8	9	1	<=	1
5		y1	y2	y3			
6	G(Y)=	1	1	1	0,1749		
7							
8	Решение	0,0758	0,0437	0,0554			

Получили решение

$Y^* = (0.0758, \quad 0.0437, \quad 0.0554)$, $F(Y^*) = 0.1749$.

Следовательно, $v = 5.7167 - 4 \cong 1.72$. Т.к. $q_j = v y_j$, $j = \overline{1,3}$, получим

$q_1 = 5.7167 \cdot 0.0758 = 0.43,$

$q_2 = 5.7167 \cdot 0.0437 = 0.25,$

$q_3 = 5.7167 \cdot 0.0554 = 0.32.$

$Q^* = (0.43, \quad 0.25, \quad 0.32).$

Ответ: $P^* = (0.45, \quad 0.47, \quad 0.08)$, $Q^* = (0.43, \quad 0.25, \quad 0.32)$, $v = 1.72$.

Данный ответ *означает следующее*:

– если первая отрасль с вероятностью 0.45 будет применять первую стратегию (финансирование 10го объекта), с вероятностью 0.47 – вторую и с вероятностью 0.08 – третью, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей ее выигрыш (прибыль) в среднем составит не менее 1.72;

– если вторая отрасль с вероятностью 0.43 будет применять первую стратегию, с вероятностью 0.25 – вторую и с вероятностью 0.32 – третью, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей ее проигрыш (убыток) в среднем составит не более 1.72.

Для самостоятельного решения и домашнего задания

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -5 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & 6 \\ -9 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 7 \\ 6 & 12 & 9 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 \\ 9 & 3 & 9 \\ 7 & 4 & 7 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$