МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

НАДВІРНЯНСЬКИЙ КОЛЕДЖ НТУ

КУРСОВИЙ ПРОЕКТ

з дисципліни “Алгоритмізація та програмування”

на тему: «Знаходження максимального потоку

за методом Форда−Фалкерсона»

Студент групи ІТ-21

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Пицюк В.М.

(підпис, дата)

Керівник викладач

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Грига В.М.

(підпис, дата)

Оцінка\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Члени комісії \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(підпис) (ініціали та прізвище)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(підпис) (ініціали та прізвище)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(підпис) (ініціали та прізвище)

НАДВІРНА

2017

**Зміст**

[Вступ 3](#_Toc484431975)

[1. Аналітичний розділ 4](#_Toc484431976)

[1.1 Загальні поняття 4](#_Toc484431977)

[1.2 Застосування 7](#_Toc484431978)

[1.3 Методи знаходження максимального потоку 8](#_Toc484431979)

[1.4 Опис математичної моделі метода Форда-Фалкерсона 10](#_Toc484431980)

[2. Опис програмної частини 11](#_Toc484431981)

[2.1 Опис алгоритму 11](#_Toc484431982)

[2.2 Опис меню користувача 13](#_Toc484431983)

[3. Тестування програми 19](#_Toc484431984)

[3.1 Системні вимоги 19](#_Toc484431985)

[3.2 Запуск програми 20](#_Toc484431986)

[Висновок 21](#_Toc484431987)

[Використані джерела 22](#_Toc484431988)

Вступ

В наш час iнформацiйнi технологiї займають одне з найважливiших мiсць

у всiх сферах нашого життя. Комп’ютери застосовуються скрiзь: в навчаннi, в

менеджментi, в торгiвлi, на виробництвi та в iнших видах дiяльностi людини.

Але функцiонування будь-якого комп’ютера неможливе без необхiдних про-

грам, а отже i алгоритмiв, на основi яких пишуться програми. Таким чином,

рiзноманiтнi алгоритми щодня допомагають людинi у рiзних сферах дiяльно-

стi. I деякi з них вiдiграють дуже важливу роль в розвитку людства. Отже,

питання алгоритмiзацiї є дуже актуальними й потребують багато уваги для

подальшої розробки алгоритмiв та вдосконалення вже iснуючих. Поряд iз

цим, не може залишатися осторонь, також й процес програмування, як один

з фундаментальних роздiлiв iнформатики.

Однiєю за важливих задач, вирiшення якої допомагає оптимiзувати

транспортування вантажiв, побудову нафто-, водо- та газопроводiв, проекту-

вання електромереж є задача пошуку максимального потоку мережi. Для

вирiшення якої часто використовується метод Форда-Фалкерсона. Алгоритм

реалiзацiї якого, за допомогою методу обходу в глибину, ми i розглянемо

бiльш детально.

**Об’єктом** дослiдження є потоки в транспортних мережах.

**Предметом** дослiдження є процес знаходження максимального потоку у

транспортнiй мережi за допомогою алгоритму Форда-Фалкерсона.

**Метою** курсової роботи є реалiзацiя алгоритму Форда-Фалкерсона мовою програмування C++.

1. Аналітичний розділ

1.1 Загальні поняття

**Теорія графів** — розділ математики, що вивчає властивості графів. Наочно граф можна уявити як геометричну конфігурацію, яка складається з точок (вершини) сполучених лініями (ребрами). У строгому визначенні графом називається така пара множин G = (V, E), де V є підмножина будь-якої зліченної множини, а E — підмножина V × V.

Визначення графу є настільки загальним, що цим терміном можна описувати безліч подій та об'єктів повсякденного життя. Високий рівень абстракції та узагальнення дозволяє використовувати типові алгоритми теорії графів для вирішення зовнішньо несхожих задач у транспортних і комп'ютерних мережах, будівельному проектуванні, молекулярному моделюванні тощо.

Теорія графів знаходить застосування, наприклад, в геоінформаційних системах (ГІС). Існуючі або запроектовані будинки, споруди, квартали тощо розглядаються як вершини, а з'єднують їхні дороги, інженерні мережі, лінії електропередачі тощо — як ребра. Застосування різних обчислень, вироблених на такому графі, дозволяє, наприклад, знайти найкоротший об'їзний шлях або найближчий продуктовий магазин, спланувати оптимальний маршрут.

Теорія графів містить велику кількість невирішених проблем і поки не доведених гіпотез.

Формальне означення графа**:**

Нехай X = { x1,…,xn} — деяка скінченна множина (множина вершин), M2- множина всіх невпорядкованих пар елементів з X,

M2 = {(xi,xj): xi ∈ X, xj ∈ X, i ≠ j}

1. Граф G(X, W) — пара множин X, W ⊂ M2. Множина X — це множина вершин, множина W — це множина ребер. Якщо (xi,xj) ∈ W, то ми говоримо, що ребро (xi,xj) сполучає вершину xi з вершиною xj; інша термінологія — ребро (xi,xj) і вершини xi та xj інцидентні.
2. Граф G(X, W) називається повним, якщо W = M2. Якщо множина X містить n вершин, то, очевидно, число ребер повного графа дорівнює Cn2. Повний граф з n вершинами позначається Kn.
3. Граф G(X, W) називається порожнім, якщо W = ∅.
4. Вершини xi та xj графа G(X, W) інцидентні, якщо (xi,xj) ∈ W.
5. Степенем d(xi) вершини xi графа G(X, W) називається число вершин xj, які інцидентні вершині xi (число відрізків, які виходять з вершини xi).
6. Якщо d(xi)=1, то вершина xi називається *кінцевою* вершиною графа G(X, W). Якщо d(xi)=0, то вершина xi називається *ізольованою*.

В теорії графів, **потокова мережа** (англ. flow network) це орієнтований граф де кожне ребро має ємність, пропускну спроможність і кожне ребро отримує потік. Загальний потік на ребрі не може перевищувати ємність ребра. В дослідженні операцій орієнтований граф часто називають мережею, вершини — вузлами і ребра — дугами. Потік має задовільняти обмеженю, що загальний вхідний потік вершини дорівнює загальному вихідному, за винятком джерела, що має більший вихідний потік, або стоку, що має більший вхідний потік. Таку мережу можна використати для моделювання руху в дорожній системі, струму в електронних мікросхемах або будь-чого, що рухається через мережу вузлів.

В теорії оптимізації та теорії графів, **задача про максимальний потік** полягає у знаходженні такого потоку за транспортною мережею, щоб сума потоків з витоку, або, що означає те ж саме, сума потоків до стоку була максимальна.

Задача про максимальний потік є окремим випадком більш складних задач, таких, як, наприклад, задача про циркуляцію.

Після вступу США у Другу світову війну у 1941 році математик **Джордж Бернард Данціг** почав працювати у відділі статистичного управління Військово-повітряних сил США у Вашингтоні. З 1941 по 1946 роки він очолював підрозділ аналізу військових дій (Combat Analysis Branch), де працював над різноманітними математичними проблемами. Згодом з використанням роботи Данцига задача про максимальний потік була вперше розв'язана у ході підготовки повітряного мосту під час Берлінського повітряного мосту, що відбувався у 1948–1949 роках.

У 1951 році **Джордж Данциг** вперше сформулював задачу у загальному вигляді.

У 1955 році **Лестер Форд** і **Делберт Фалкерсон** вперше побудували алгоритм, призначений для вирішення цього завдання. Їх алгоритм отримав назву **алгоритм Форда — Фалкерсона**.

Надалі рішення задачі багато разів поліпшувалося.

У 2010 році дослідники **Джонатан Келнер** (Jonathan Kelner) і **Олександр Мондри** (Aleksander Mądry) з МТІ разом зі своїми колегами **Даніелєм Спілманом** з Єльського університету і **Шень-Хуа Тенем** з університету Південної Каліфорнії продемонстрували чергове покращення алгоритму, вперше за 10 років.

**Метод Форда-Фалкерсона** знаходить максимальний потік у транспортній мережі. Метод Форда-Фалкерсона - метод, який базується на трьох концепціях: залишкові мережі, шляхи що збільшуються і розрізи. Ключову роль у методі Форда-Фалкерсона грають два поняття: залишкові мережі і доповнюють шляху. Дані концепції лежать в основі важливої теореми про максимальний потік і мінімальний розріз, яка визначає значення максимального нащадка за допомогою розрізів траспортної мережі.

**Метод Форда-Фалкерсона** є ітеративним. Спочатку величині потоку присвоюється значення 0: *f(u, v) = 0* при будь-яких u , *v* Є *V*. На кожній ітерації величина потоку збільшується за допомогою пошуку «шляху, що збільшується» (тобто деякого шляху від джерела s до стоку t, уздовж якого можна послати більший потік) і подальшого збільшення потоку. Цей процес повторюється до тих пір, поки вже неможливо буде відшукати збільшуючий шлях.

1.2 Застосування

Даний алгоритм застосовується:

* В комунікаційних і транспортних системах. Зокрема, для маршрутизації даних в Інтернеті;
* В економіці;
* В дискретній математиці;

1.3 Методи знаходження максимального потоку

**Алгоритм просовування предпотоку**

Замість потоку оперує з передпотоком. Різниця в тому, що для будь-якої вершини u, крім джерела і стоку, сума потоків, що входять до неї для потоку повинна бути строго нульовою (умова збереження потоку), а для передпотока — невід'ємною. Ця сума називається надмірним потоком у вершину, а вершина з позитивним надмірним потоком називається переповненою . Крім того, для кожної вершини алгоритм зберігає додаткову характеристику, висоту, яка є цілим невід'ємним числом. Алгоритм використовує дві операції: просування , коли потік по ребру, що йде з більш високої в нижчу вершину, збільшується на максимально можливу величину, і підйом , коли переповнена вершина, просування з якої неможливо через недостатню висоту, підіймається. Просування можливо, коли ребро належить залишковій мережі, коли воно веде з більш високої вершини в більш низьку, і вихідна вершина переповнена. Підйом можливий, коли вершина, що піднімається, переповнена, але жодна з вершин, в котру з неї ведуть ребра залишкової мережі, не нижче за неї. Він вчиняється до висоти на 1 більшою, ніж мінімальна з висот цих вершин. Спочатку висота джерела V, по всім ребрам, що виходять з джерела, тече максимально можливий потік, а решта висоти і потоки нульові. Операція просування і підйому виконуються до тих пір, поки це можливо.

**Алгоритм Едмондса-Карпа**

Виконуємо алгоритм Форда — Фалкерсона, щоразу обираючи найкоротший шлях, що збільшується (знаходиться пошуком у ширину).

**Алгоритм Дініца**

Удосконалення алгоритму Едмондса-Карпа (але хронологічно був знайдений раніше). На кожній ітерації, використовуючи пошук у ширину, визначаємо відстані від джерела до всіх вершин у залишковій мережі. Будуємо граф, який містить лише такі ребра залишкової мережі, на яких ця відстань зростає на 1. Виключаємо з графа усі тупикові вершини з інцидентними їм ребрами, поки всі вершини стануть не тупиковими. (Тупиковою називається вершина, в яку не входить і з якої не виходить жодне ребро, крім джерела і стоку.) На отриманому графі відшукуємо найкоротший шлях, що збільшується (їм буде будь-який шлях з s в t). Виключаємо із залишкової мережі ребро з мінімальною пропускною здатністю, знову виключаємо тупикові вершини, і так поки ще існують шляхи, що збільшуються.

1.4 Опис математичної моделі метода Форда-Фалкерсона

Нехай *G(V, E)* граф, і для кожного ребра з u в v, нехай *c(u, v)* буде ємність і *f(u , v)* буде потік. Ми хочемо знайти максимальний потік від джерела s до раковини t. Після кожного кроку в алгоритмі виходить наступне:

* **Обмеженість потенціалу:** Потік уздовж краю не може перевищувати свій потенціал
* **Косі симетрії:** Чистий потік від u до v повинен бути протилежністю чистого припливу від *v* до *u*
* **Збереження потоку:** Тобто, якщо u не s або t. Чистий потік до вузла дорівнює нулю, для джерела, який "виробляє" потік, і раковину, яка "поглинає" потік
* **Значення (F):** Тобто, потік виходячи з s повинен бути рівним потоку, що надходить у *t*

Це означає, що потік через мережу є легальним потоком після кожного раунду в алгоритмі. Визначимо залишкову мережу *Gf(V, Ef)*, щоб бути в мережі з потужністю *cf(u, v)=c(u, v)−f(u, v)*, і без потоку. Зверніть увагу, що може статися, що потік від v до u дозволений в залишковій мережі, хоча заборонений в вихідній мережі: якщо *f(u, v)>0* та *c(v, u)=0*, тоді *cf(v, u) = c(v, u)−f(v, u)=f(u, v)>0*.

1. Опис програмної частини

2.1 Опис алгоритму

Iдея алгоритму полягає в наступному. Ми вибираємо такий шлях вiд

джерела до стоку, щоб для кожного ребра залишкова пропускна здатнiсть

була строго бiльше нуля. При цьому ребра на даному шляху можуть прохо-

дитися як у прямому, так i в зворотному напрямку. Вибираємо мiнiмальне

значення серед залишкових пропускних спроможностей ребер даного шляху.

Збiльшуємо потiк на кожному з ребер даного шляху на обране мiнiмаль-

не значення. Далi шукаємо наступний аналогiчний шлях. Робота алгоритму

продовжується до тих пiр, поки вдається знаходити данi шляхи. Вiдразу вiд-

значимо, що даний алгоритм вiдноситься до класу недетермiнованих, тобто

кожен наступний крок алгоритму визначено неоднозначно. I час роботи (кiль-

кiсть крокiв) алгоритму залежить вiд того, як будуть вибиратися кроки.

Алгоритм Форда-фалкерсона:

1. Прирiвнюємо до нуля всi потоки. *∀e(vi, vj)∈E f(e) = 0* . Залишкова мережа спочатку збiгається з вихiдною мережею;
2. У залишкової мережi знаходимо будь-який шлях з джерела s у стiк t . Дуги якого задовольняють умовi *f(vi, vj) <= (vi, vj)* . Якщо такого шляху немає, то потiк у мережi максимальний;
3. Пускаємо через знайдений шлях (вiн називається збiльшувальним шля- хом) максимально можливий потiк;
4. На знайденому шляху в залишковiй мережi шукаємо ребро з мiнiмаль- ною пропускною здатнiстю *Cmin*;
5. Для кожного ребра на знайденому шляху збiльшуємо потiк на *Cmin* , а в протилежному йому — зменшуємо на *Cmin*;
6. Модифiкуємо залишкову мережу. Для всiх ребер на знайденому шляху, а також для протилежних їм ребер, обчислюємо нову пропускну здатнiсть. Якщо нова пропускна здатнiсть не дорiвнює нулю, додаємо ребро до залишкової мережi, а якщо дорiвнює нулю, стираємо його;
7. Повертаємося на крок 2.

Важливо те, що алгоритм не конкретизує, який саме шлях ми шукаємо на кроцi 2 або як ми це робимо. З цiєї причини алгоритм гарантовано сходиться тiльки для цiлих пропускних спроможностей, але навiть для них при великих значеннях пропускних спроможностей вiн може працювати дуже довго або зовсiм не привести до оптимального рiшення.

2.2 Опис меню користувача

Розроблена програма шукає максимальний потік за методом Форда-Фалкерсона. Також в програмі можна переглянути інформацію про курсовий проект.

На самому початку я включив в програму залежні бібліотеки через директиву препроцесора #include:

#include <iostream>

#include <limits.h>

#include <string.h>

#include <queue>

А також включаємо <windows.h>, для виклику функцій, які відповідають за кодування в ОС Windows, яке підтримує українські букви:

#include <windows.h>

І об’явимо константу V, яка відповідає за кількість вершин в графі, який буде пізніше задано:

#define V 6

Розглянемо точку входу (функцію **main()**):

Для використання українських букв я використав функції

SetConsoleOutputCP(), яка встановлює кодування виводу на консоль і SetConsoleCP(), яка встановлює кодування для вводу, з вище включеної бібліотеки windows.h:

SetConsoleCP(1251);

SetConsoleOutputCP(1251);

Далі я зробив вивід слова courseword (курсова робота англ.), написаного програмою **figlet**, яка створює текст з великих літер з звичайного тексту. В наступному рядку вивів слово “@vovawed” вирівнюючи його так щоб кінець обох слів був в одному місці. Для цього я зробив 47 пробілів через перезавантаження конструктора класу string, який дозволяє записувати символ вказану кількість разів(перший параметр – кількість повторень, другий - символ для повтору):

cout << string(47, ' ') + "@vovawed" << endl << endl;

Результат можна побачити на фото



Пізніше виводиться інформація про меню програми:

cout << "1) Інформація про курсовий проект" << endl

<< "2) Запустити виконання програми" << endl

<< "3) Вихід" << endl;

Потім об’являється змінна num, типу short, яка буде зберігати відповіді на меню до програми:

short num;

За допомогою оператора switch обробляється змінна num, яка перед цим вводиться значенням з клавіатури. Оператор switch заключений в цикл do-while, з умовою num != 2 (2 – запуск програми). Switch обробляє 4 варіанти:

1. Виводить інформацію про дану курсову роботу
2. Запускає виконання
3. Вихід з програми

І якщо змінна num не в діапазоні 1-3, то виводиться повідомлення про невірний ввід і програма просить ввести число ще раз. Сам код:

do {

cout << "Введіть число: ";

cin >> num;

switch (num) {

case 1:

cout << "Повідомлення про курсову" << endl << endl;

case 2:

break;

case 3:

cout << "Вихід" << endl;

return 0;

default:

cout << "Не вірний ввід, спробуйте ще раз" << endl;

}

} while (num != 2);

Далі вводиться матриця, кількість вершин для якої вказана вище в костанті V (6):

int graph[V][V] = {

{ 0, 16, 13, 0, 0, 0 },

{ 0, 0, 10, 12, 0, 0 },

{ 0, 4, 0, 0, 14, 0 },

{ 0, 0, 9, 0, 0, 20 },

{ 0, 0, 0, 7, 0, 4 },

{ 0, 0, 0, 0, 0, 0 }

};

Потім на екран виводиться повідомлення: “Максимально можливий потік: 23”, де 23 – максимальний потік який вираховує і повертає функція fordFulkerson(), описана нижче:

cout << "Максимально можливий потік: " << fordFulkerson(graph, 0, 5) << endl;

В самому кінці викликається функція system() з аргументом “pause”, яка виводить на екран повідомлення “Press any key to continue . . .” та чекає нажаття будь-якої клавіші:

system("pause");

Функція  **fordFulkerson()**:

ФункціяfordFulkerson() повертає максимальний потік від s до t в даному графіку:

int fordFulkerson(int graph[V][V], int s, int t)

{

int u, v;

// Створення залишкового графа і заповнити залишковий граф з

// з урахуванням потенціалу в якості вихідного графа залишкових потужностей

// в залишковому графі

int rGraph[V][V]; // Залишковий граф де rGraph[i][j] вказує

// залишкову ємність ребра від i до j (якщо існує

// ребро. Якщо rGraph[i][j] дорівнює 0, то немає)

for (u = 0; u < V; u++)

for (v = 0; v < V; v++)

rGraph[u][v] = graph[u][v];

int parent[V]; // Цей масив заповнюється пошуком в ширину і зберігає шлях

int max\_flow = 0;

// Збільшити потік поки йде шлях від джерела до приймача

while (bfs(rGraph, s, t, parent))

{

// Знайти максимальний потік через знайдений шлях

int path\_flow = INT\_MAX;

for (v = t; v != s; v = parent[v])

{

u = parent[v];

path\_flow = min(path\_flow, rGraph[u][v]);

}

// Оновити залишкові можливості ребер і

// зворотний край уздовж шляху

for (v = t; v != s; v = parent[v])

{

u = parent[v];

rGraph[u][v] -= path\_flow;

rGraph[v][u] += path\_flow;

}

// Додати потік шляху до максимального потоку

max\_flow += path\_flow;

}

// Повертає максимальний потік

return max\_flow;

}

В цій функції використовується інша функція **bfs()** типу bool, яка повертає true якщо є шлях від 's' до 't' в залишковий граф. Її тіло:

bool bfs(int rGraph[V][V], int s, int t, int parent[])

{

// Створити масив відвіданих і позначити всі вершини які не відвідані

bool visited[V];

memset(visited, 0, sizeof(visited));

// Створити чергу, поставлене в чергу джерело вершини і мітки джерела вершини як відвідані

queue <int> q;

q.push(s);

visited[s] = true;

parent[s] = -1;

// Пошук в ширину

while (!q.empty())

{

int u = q.front();

q.pop();

for (int v = 0; v<V; v++)

{

if (!visited[v] && rGraph[u][v] > 0)

{

q.push(v);

parent[v] = u;

visited[v] = true;

}

}

}

return visited[t];

}

1. Тестування програми

3.1 Системні вимоги

Будь-яка машина, на яку є компілятор C++, для коректної роботи на компіляторі Visual Studio і ОС Windows треба розкоментувати деякі строки (вказано в коментарях).

3.2 Запуск програми



Рисунок головне меню

Щоб запустити дану програму потрібно скомпілювати її під вашу ОС, якщо це Windows і компілятор Visual Studio C++, то ще необхідно розкоментувати деякі строки, для коректного відображення український букв. А також розкоментувати system(“pause”), щоб консоль з програмою не закрилась зразу після завершення роботи програми. Вже зібрану програму (exe файл) для 64х бітної версії Windows можна завантажити на http://bit.ly/2rzb8av.

Висновок

В даній курсової роботі я реалізував алгоритм Форда-Фалкерсона, який знаходить максимальний потік у транспортній мережі, мовою програмування C++.

Даних алгоритм використовується:

* В комунікаційних і транспортних системах. Зокрема, для маршрутизації даних в Інтернеті;
* В економіці;
* В дискретній математиці;

Використані джерела

1. Вступ в алгоритми / Т.Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Рівест, К. Штайн. – Кембрідж: MIT press, 1990. – 1312 с. – (3).
2. Ковалюк Т. В. Основи програмування / Т. В. Ковалюк. – Київ: Видавнича група BHV, 2005. – 384 с.
3. <http://bit.ly/2sesmsY>
4. <http://bit.ly/2rgtPBQ>
5. <http://bit.ly/2rdS7uc>
6. <http://bit.ly/2rdmRLC>
7. http://bit.ly/2seAQjR