Математическая формулировка для моделирования хореографий N тел

Данный документ описывает дифференциальное уравнение, приведённое к каноническому виду, а также численные методы интегрирования, используемые в проекте (методы RK4 и DOPRI8). Кроме того, приводится описание вычисления энергии системы.

1 Дифференциальное уравнение и каноническая система ОДУ

Движение каждого тела описывается законом всемирного тяготения Ньютона. Для тела i с массой M исходное уравнение второго порядка имеет вид:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{GM}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}\,(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \tag{1}$$

где:

- $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ — координаты тела i,
- G — гравитационная постоянная.

Для приведения системы к виду ОДУ первого порядка вводим скорость:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}. \tag{2}$$

Таким образом, каноническая система ОДУ, которую мы будем интегрировать, выглядит следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \tag{3}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{GM}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}\,(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

2 Численные методы интегрирования

2.1 Метод Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4)

Пусть $y(t)$ — вектор состояния системы (включающий координаты и скорости всех тел), а $f(t, y)$ — функция, вычисляющая его производную. Тогда метод RK4 задаётся следующими формулами:

$$k_1 = f(t, y), \tag{5}$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2},\, y + \frac{h}{2}\,k_1\right), \tag{6}$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2},\, y + \frac{h}{2}\,k_2\right), \tag{7}$$

$$k_4 = f(t + h,\ y + h\,k_3), \tag{8}$$

$$y(t + h) = y(t) + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \tag{9}$$

где h — шаг интегрирования.

2.2 Метод Дорманда–Принса 8-го порядка (DOPRI8)

Метод DOPRI8 — явный метод Рунге–Кутты с 13 этапами, обеспечивающий 8-ый порядок точности. Он вычисляет промежуточные коэффициенты k_i по следующей схеме:

$$k_i = f\left(t + c_i\,h,\ y + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,k_j\right), \quad i = 1, 2, \ldots, 13, \tag{10}$$

где c_i и a_{ij} — заранее заданные коэффициенты (табличные значения приведены в исходном коде).

После вычисления всех k_i состояние обновляется по формуле:

$$y(t+h) = y(t) + h\sum_{i=1}^{13} b_i\,k_i, \tag{11}$$

где b_i — фиксированные коэффициенты метода.

3 Вычисление энергии системы

Для контроля точности численного интегрирования рассчитывается полная энергия системы, которая состоит из кинетической и потенциальной энергии.

3.1 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия для N тел вычисляется по формуле:

$$E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}M\|\mathbf{v}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}M\left(v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2\right). \tag{12}$$

3.2 Потенциальная энергия

Гравитационная потенциальная энергия системы:

$$E_{\text{pot}} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{GM^2}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|}. \tag{13}$$

3.3 Полная энергия

Полная энергия системы определяется как:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}. \tag{14}$$

4 Гравитационное ускорение

Ускорение тела i под действием тела j вычисляется по формуле:

$$\mathbf{a}_{ij} = \frac{GM}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}\,(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i). \tag{15}$$

Общее ускорение для тела i получается суммированием вкладов от всех остальных тел.