CHƯƠNG I. ĐẠI CƯƠNG VỀ XÁC SUẤT

§1:Biến cố và quan hệ giữa các biến cố

1. Phép thử và biến cố.

2. Phân loại biến cố : gồm 3 loại

- Biến cố chắc chắn: Ω
- Biến cố không thể có hay không thể xảy ra: $\varnothing$
- Biến cố ngẫu nhiên: A, B, C…

3. So sánh các biến cố.

Định nghĩa 1.1: $A \subset B$ (A nằm trong B hay A kéo theo B) $\Leftrightarrow$ nếu A xảy ra thì B xảy ra. Vậy

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}}$$

Định nghĩa 1.2: A được gọi là biến cố sơ cấp $\Leftrightarrow \overline{\exists} B \subset A, B \neq A.$

4. Các phép toán trên biến cố (hình 1.1 và 1.2):

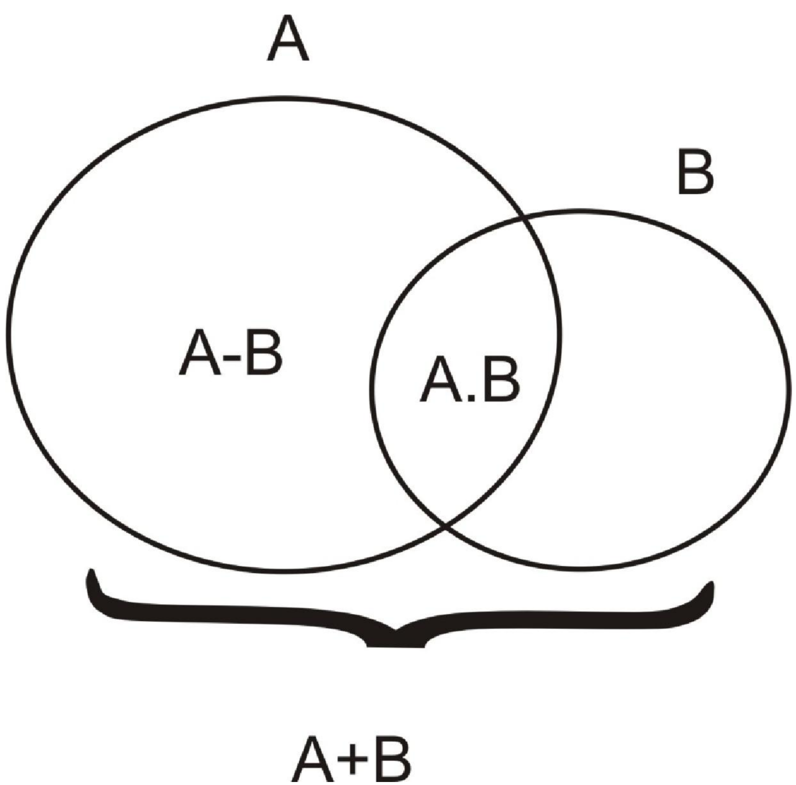
$A.B = A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra **và** B xảy ra.

$A + B = A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra **hoặc** B xảy ra.

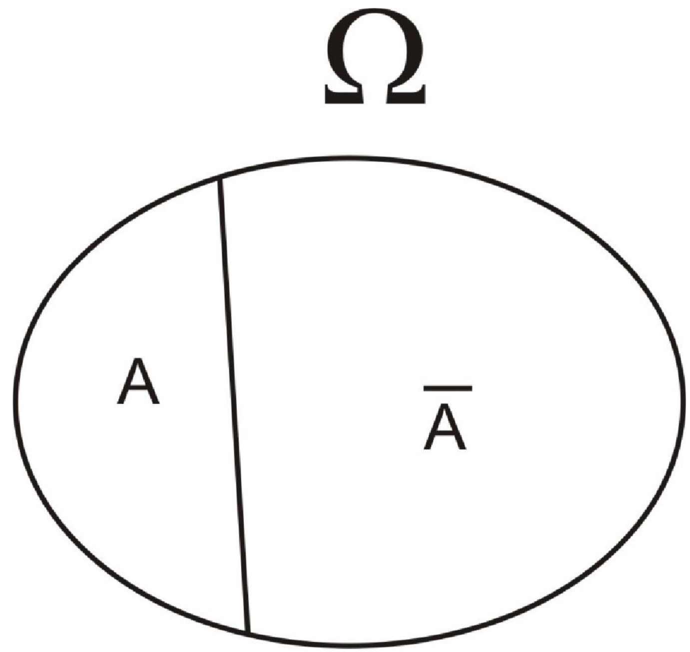
$A - B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra và B không xảy ra.

$\overline{A} = \Omega - A$ xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

- Hình 1.1



Hình 1.2



- Các phép toán của biến cố có tính chất giống các phép toán của tập hợp, trong đó có các tính chất đối ngẫu:

$$\boxed{\overline{\sum_i A_i} = \prod_i \overline{A_i}, \overline{\prod_i A_i} = \sum_i \overline{A_i}}$$

Ngôn ngữ biểu diễn: tổng = có ít nhất một ;tích = tất cả đều.

(A = có ít nhất 1 phần tử có tính chất x) suy ra (không A = tất cả đều không có tính chất x).

Ví dụ 1.1: (A = có ít nhất 1 người không bị lùn) suy ra(không A = tất cả đều lùn).

Định nghĩa 1.3: biến cố A và B được gọi là xung khắc với nhau nếu

$$\boxed{A.B = \varnothing}$$

§2: Các định nghĩa xác suất.

Lý thuyết xắc suất là ngành khoa học "nghiên cứu sự ổn định dựa trên sự bất định" , mà ví dụ điển hình nhất là "tung đồng xu". Không ai nói chắc được là khi tung đồng xu lên, thì khi nó rơi xuống, ta sẽ nhìn thấy mặt phải hay mặt trái của nó (bất định). Tuy nhiên, thực nghiệm việc tung xu nhiều lần, ta sẽ rút ra kết luận là số lần "được" mặt phải hay mặt trái của nó là tương đương nhau, ông trời không bênh mặt nào cả, tức là càng tung nhiều (1 triệu lần, 10 triệu lần chẳng hạn), càng nghiệm thấy suy luận trên là đúng. Mà chả mấy khi đạt được kết quả thực nghiệm đúng 1/2 đâu nhé, chỉ suýt soát thôi. Dù vậy, người ta vẫn nói: xác suất để nhìn thấy mặt phải của đồng xu bằng 1/2. Quy luật này dễ được mọi người công nhận.

- **1. Định nghĩa cổ điển về xác suất**
- Định nghĩa 2.1: giả sử trong mỗi phép thử các kết cục là đồng khả năng và có tất cả n kết cục như vậy. Kí hiệu m là số các kết cục thuận lợi cho biến cố A. Khi ấy xác suất của biến cố A là:

$$\boxed{\mathrm{P}(A) = \frac{m}{n}}$$

Chú ý: Kết cục là kết quả của phép thử mà ta chọn làm đơn vị. Cách chọn kết cục không có tính duy nhất.

- Ví dụ 2.0: Tung 1 con xúc sắc cân đối đồng chất . Tính xác suất để xuất hiện mặt chẵn .

Giải : Gọi A là biến cố xuất hiện mặt chẵn .

Cách 1: Coi các biến cố xuất hiện mặt 1-6 là các kết cục . Khi ấy P(A)=3/6 .

Cách 2: Coi các biến cố xuất hiện mặt chẵn , lẻ là các kết cục . Khi ấy P(A)=1/2 .

- Ví dụ 2.1: Trong 1 hộp có 6 bi trắng, 4 bi đen.Lấy ngẫu nhiên ra 5 bi. Tính xác suất để lấy được đúng 3 bi trắng.

- Giải $P = \dfrac{C_6^3 . C_4^2}{C_{10}^5}$ (phân phối siêu bội)

Chú ý: lấy 1 lúc 5 bi giống lấy lần lượt 5 bi không hoàn lại

Ví dụ 2.2: A và B cùng 8 người khác ngồi ngẫu nhiên vào một bàn ngang (tròn) . Tính xác suất để A và B ngồi cạnh nhau .

Giải: a) Bàn ngang :
Cách 1 : Tất cả có 10 ! cách ngồi.
Bó A B làm một, suy ra có 9!.2 cách để AB ngồi cạnh nhau . Vậy xs là 2/10 .
Cách 2 : Số cách A và B ngồi là 10.9
Số cách A và B ngồi cạnh nhau là 8.2+2.1 vì có 2 trường hợp: A ngồi ghế trong : 8.2, A ngồi ghế ngoài cùng : 2.1. Vậy xs là 2/10.

b) Bàn tròn :
Cách 1 : Tất cả có 10 ! cách ngồi.
AB có 10 cách ngồi , 8 người còn lại có 8! cách , suy ra có 10.8!.2 cách để A và B ngồi cạnh nhau . Vậy xs là 2/9 .
Cách 2 : Giả sử A đã ngồi. Khi ấy B có 9 cách ngồi trong đó có 2 cách ngồi cạnh A. Vậy xs là 2/9

- Ví dụ 2.3: Có 10 người lên ngẫu nhiên 5 toa tàu. Tính xác suất để toa thứ nhất không có người lên:

$$P = \frac{4^{10}}{5^{10}}$$

2. Định nghĩa hình học về xác suất:

Định nghĩa 2.2: Giả sử trong mỗi phép thử các kết cục là đồng khả năng và được biểu diễn bằng các điểm hình học trên miền Ω. Kí hiệu D là miền biểu diễn các kết cục thuận lợi cho biến cố A.

Khi ấy xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{\text{độ đo D}}{\text{độ đo } \Omega}$$

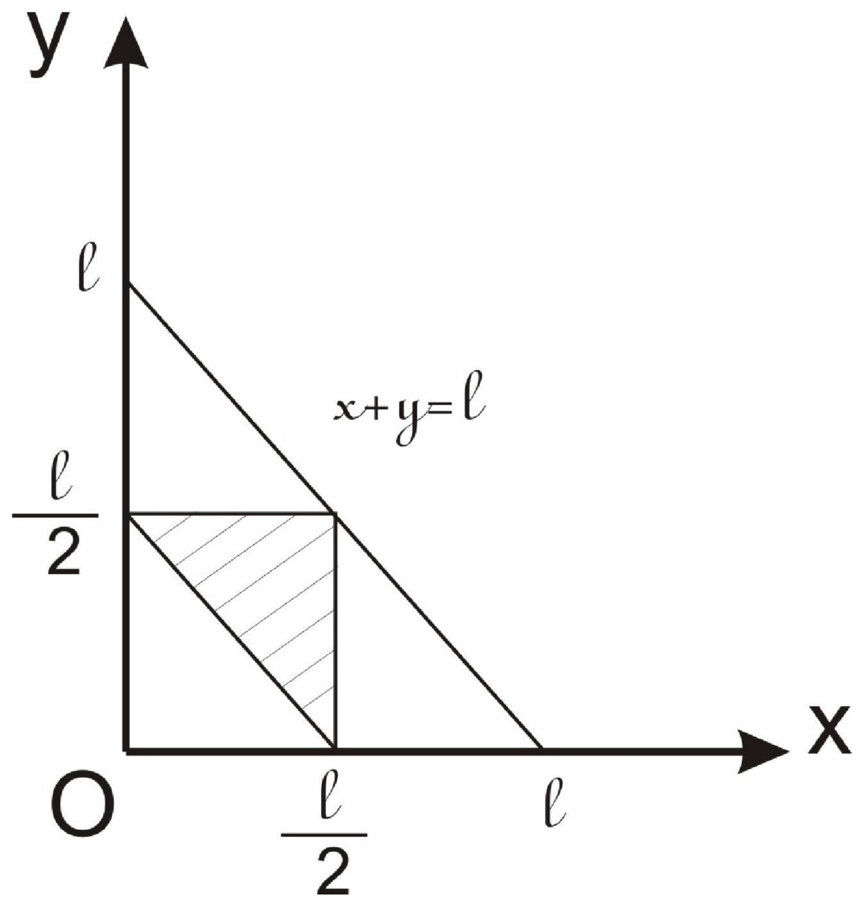
(độ đo là độ dài,diện tích hoặc thể tích)

- **Ví dụ 2.3**: Chia đoạn AB cố định ngẫu nhiên thành 3 đoạn. Tính xác suất để 3 đoạn đó lập thành 3 cạnh của 1 tam giác.
- Giải: Gọi độ dài đoạn thứ 1,2 là x,y.Khi ấy đoạn thứ 3 là l-x-y

$$\Omega \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x + y < l \end{cases}$$

$$\Omega \supset D \begin{cases} x + y > l - x - y \\ x + l - x - y > y \\ y + l - x - y > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y > \dfrac{l}{2} \\ y < \dfrac{l}{2} \\ x < \dfrac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}$$

HÌNH 2.1



- **Ví dụ 2.4**: Ném lên mặt phẳng có kẻ những đường thẳng song song cách nhau 1 khoảng là 2a một cây kim có độ dài 2t<2a.Tính xác suất để cây kim cắt 1 trong các đường thẳng song song

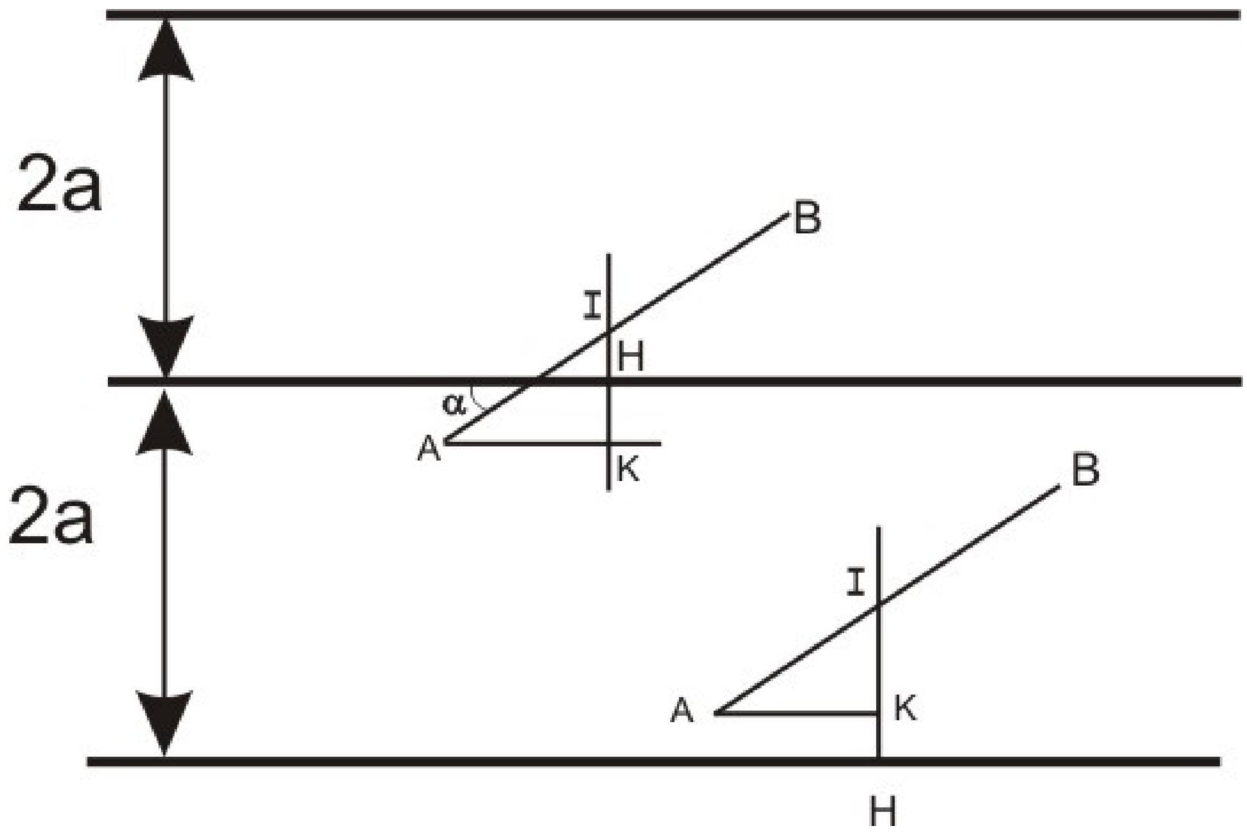
Giải: Gọi I là điểm giữa cây kim ,IH là khoảng cách từ I tới đường thẳng gần nhất; α là góc nghiêng.Khi ấy ta có:

$$\Omega \begin{cases} 0 < \alpha \leq \Pi \\ 0 < h = IH \leq a \end{cases} \Rightarrow dt\Omega = \Pi.a$$

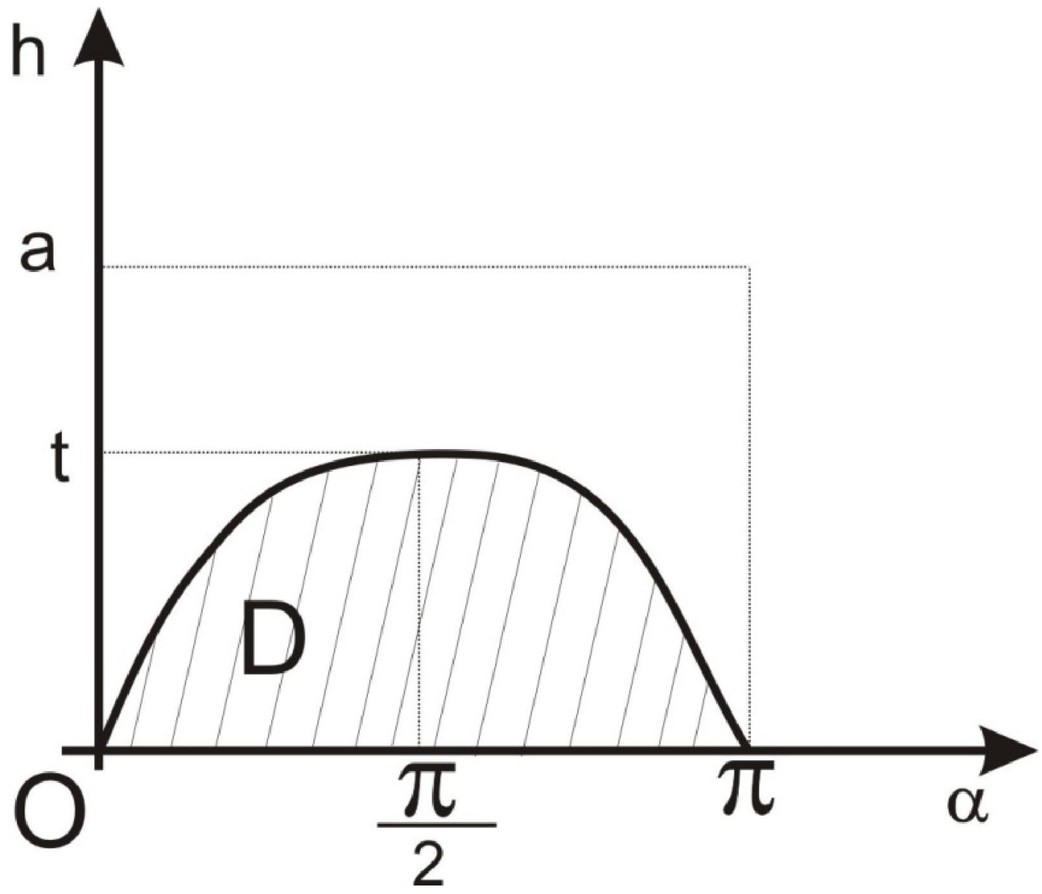
$$\Omega \supset D \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \Pi \\ 0 \leq h \leq IK = t\sin\alpha \end{cases}$$

diện tích D $= \int_0^{\pi} t\sin\alpha\, d\alpha = 2t \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{2t}{\Pi a}$

HÌNH 2.2



HÌNH 2.3



- Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) là một nhà toán học người Pháp, chuyên nghiên cứu về Lý thuyết xác suất, Lý thuyết số, Hình học vi phân, Kinh tế và Nhiệt động học. Năm 1888, trong tác phẩm “Calcul des probabilités” (Tính toán xác suất), ông đưa ra một thí dụ để dẫn chứng về tính bất định của xác suất khi phương pháp xác định các biến ngẫu nhiên không được chỉ ra rõ ràng. Thí dụ đó về sau được các nhà toán học gọi là “Nghịch lý Bertrand”.
- Bài toán đặt ra khá đơn giản: Trên đường tròn, vẽ ngẫu nhiên một dây cung MN . Tính xác suất để dây cung đó dài hơn cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn.

Cách tính thứ nhất dựa vào phương pháp xác định hai đầu mút của dây cung. Trước tiên, ta vẽ tam giác đều ABC nội tiếp hình tròn. Nếu có một dây cung MN bất kỳ, ta sẽ dịch chuyển nó, sao cho đầu mút M trùng với đỉnh A của tam giác đều, còn đầu mút N để tự do di chuyển trên đường tròn . Khi đó, đường tròn bị chia thành 3 phần (3 cung tròn) bằng nhau, và nếu đầu mút N nằm trên 2 cung tròn AB và AC, sẽ dẫn tới dây cung MN (hay AN) có độ dài bé hơn cạnh tam giác đều ABC, còn nếu N nằm trên cung BC, thì dây cung MN (hay AN) có độ dài lớn hơn AB hay AC. Vì 3 cung tròn BC, AB và AC có độ lớn ngang nhau, nên ta có đáp số là "xác suất bằng 1/3".

Cách tính thứ hai dựa vào phương pháp xác định trung điểm của dây cung MN. Trước tiên, ta cũng vẽ tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn, và dịch chuyển dây cung MN trên đường tròn về vị trí, sao cho MN song song với cạnh BC. Từ đỉnh A, vẽ đường kính AR, dễ thấy bán kính OR chia đôi cạnh BC, và ngược lại, BC cũng chia đôi bán kính OR. Ta thấy, dây cung MN (song song với BC) sẽ dài hơn BC, nếu trung điểm của nó gần tâm của hình tròn hơn; và, độ dài dây cung MN sẽ nhỏ hơn cạnh BC, nếu trung điểm của nó xa tâm của vòng tròn hơn. Từ lập luận này, ta có kết quả: xác suất bằng 1/2.

Cách tính thứ ba cũng dựa vào phương pháp xác định trung điểm của dây cung MN, tuy nhiên hơi khác. Trước tiên, ta cũng vẽ tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn O. Ta vẽ thêm đường tròn nội tiếp của tam giác này. Không khó khăn lắm để thấy, đây là hai đường tròn đồng tâm, bán kính đường tròn bé bằng một nửa bán kính đường tròn O. Có một nhận xét như sau: lấy một điểm bất kỳ trong hình tròn bé và sử dụng nó làm trung điểm để dựng dây cung MN, thì độ dài dây cung sẽ lớn hơn cạnh tam giác ABC. Còn nếu lấy một điểm nằm ngoài hình tròn bé (nhưng vẫn bên trong hình tròn lớn), để làm trung điểm của dây cung MN, thì độ dài dây cung sẽ nhỏ hơn cạnh tam giác ABC. Hình tròn bé có diện tích bằng 1/4 diện tích hình tròn lớn. Suy ra, xác suất phải tính bằng 1/4.

Đây chỉ là 3 đáp số “tiêu biểu nhất”, chứ bài toán này còn “đặc sắc” ở chỗ: lấy bất kỳ giá trị thực nào nằm giữa hai con số là 1/4 và 1/2, sẽ tạo dựng được một “mô hình tính toán”, trong đó xác suất cần tính, đúng bằng giá trị cho trước.

Giải thích nghịch lý Bertrand như thế nào?

Khái niệm xác suất sơ đẳng nhất liên quan đến bài toán thống kê số học: phải tính toán số lượng khả năng "đáp ứng yêu cầu" là bao nhiêu, trong rất nhiều (nhưng hữu hạn) khả năng khả dĩ có thể xảy ra (mà các khả năng này được xem là tương đương, như nhau, không có sự ưu tiên, thiên vị), sau đó lấy tỷ số của hai đại lượng trên, sẽ là một số thực nằm giữa 0 và 1.

Khi số lượng trở nên vô hạn, tỷ lệ để tính xác suất bị biến thành dạng ∞/∞, không xác định. Các nhà toán học phải sử dụng một phương pháp tiếp cận khác.

Khái niệm xác suất chặt chẽ về mặt toán học được định nghĩa trong không gian xác suất, thực chất là một không gian độ đo - là một "không gian", tức một tập hợp các đối tượng, có "trang bị" các phép toán thỏa mãn hàng loạt tiên đề toán học, và quan trọng nhất là có "trang bị" một độ đo (một hàm số) để đong đếm - cả khi số lượng đối tượng là hữu hạn hay vô hạn - kết quả cho ra một số thực không âm, từ đó tính ra xác suất (vẫn sẽ là tỷ số của 2 giá trị đo mà thôi).

Trong ví dụ của Bertrand, do không xác định rõ từ ban đầu là cần tính toán xác suất trong không gian xác suất nào, sử dụng độ đo nào - độ dài cung tròn, độ dài đoạn thẳng (bán kính), hay diện tích hình học - nên hậu quả là: lúc thì ra kết quả 1/2, lúc thì 1/3, lúc thì 1/4, mà kết quả nào cũng có lý.

Ví dụ 2.5: (Bài toán gặp gỡ). Hai người bạn hẹn gặp nhau tại một địa điểm theo quy ước như sau:

- Mỗi người độc lập đến điểm hẹn trong khoảng từ 7 giờ đến 8 giờ

- Mỗi người đến nếu không gặp người kia thì đợi 30 phút hoặc đến 8 giờ thì không đợi nữa

Tính xác suất hai người gặp nhau.

Giải. Gọi 7 + x, 7 + y là thời điểm mà hai người này đến điểm hẹn,

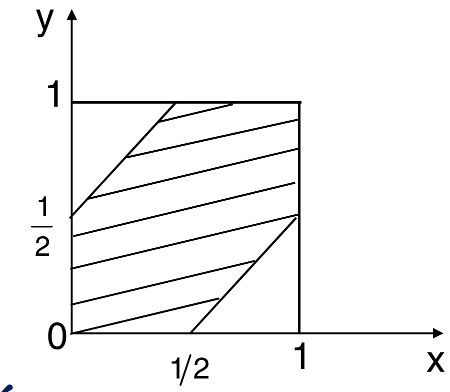
Các trường hợp đồng khả năng tương ứng với các điểm (x,y) tạo thành hình vuông có cạnh bằng 1, có diện tích (độ đo) bằng 1.

Các trường hợp thuận lợi cho biến cố A (hai người gặp nhau) tương ứng với các điểm (x,y) thỏa mãn:

$$0 \le x, y \le 1 \qquad |x - y| \le \frac{1}{2}$$

Các điểm này tạo thành hình có gạch chéo trong hình vẽ. Diện tích hình này là:

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$



từ đó:

$$P(A)=\frac{3/4}{1}=\frac{3}{4}$$

3- Định nghĩa xác suất theo nghĩa thống kê

- Định nghĩa 2.3: Giả sử trong n phép thử với điều kiện như nhau biến cố A xuất hiện k lần. Khi đó ta gọi:

$$f_n(A)=\frac{k}{n}$$

là tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử.

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} f_n(A)$$

Theo định lý Bernoulli (định lý 4.15 chương 4), giới hạn này luôn tồn tại. Trong thực tế người ta thường lấy:

$$P(A)\approx f_n(A)$$

với n khá lớn.

4. Định nghĩa xác suất theo tiên đề

- Định nghĩa 2.4: Ký hiệu Σ là tập hợp các biến cố trong 1 phép thử. Ta gọi xác suất là 1 quy tắc đặt mỗi biến cố A với 1 số P(A) thỏa mãn các tiên đề:

(I) $0 \leq P(A) \leq 1$

(II) $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$

(III) Với mọi dãy biến cố đôi một xung khắc,ta có:

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)}$$

Hệ quả :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Các tính chất của xác suất : Các tiên đề chính là các tính chất cơ bản nhất của xác suất , từ đó suy ra các tính chất khác (xem sách giáo khoa) .

§3: Các định lý xác suất

1: Định lý cộng xác suất

Định lý 3.1(hình 3.1): P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)

- Ví dụ 3.1: Có 10 người lên ngẫu nhiên 5 toa tàu. Tính xác suất để toa thứ nhất hoặc toa thứ hai không có người lên.

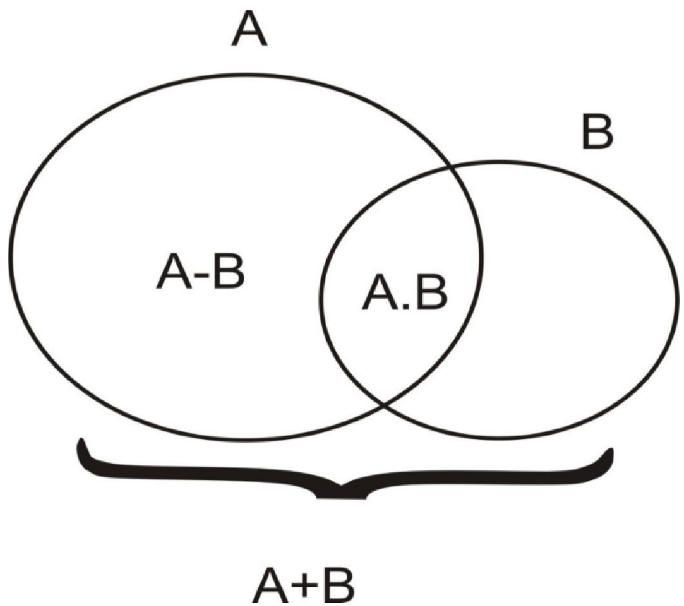
A là biến cố toa thứ 1 không có người lên,

B là biến cố toa thứ 2 không có người lên. Ta có :

$$\mathrm{P}(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=\frac{4^{10}}{5^{10}}+\frac{4^{10}}{5^{10}}-\frac{3^{10}}{5^{10}}$$

HÌNH 3.1



Định lý 3.2

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Chú ý: Ở vế phải trong tổng thứ 1 có C_n^1 số hạng, trong tổng thứ 2 có C_n^2 số hạng,…, trong tổng thứ k có C_n^k số hạng,…, trong tổng thứ n có C_n^n số hạng.

Chú ý: Trong tổng

$$\boxed{\sum_{1\le i,j\le n} P(A_iA_j)}$$ có $\boxed{n^2}$ số hạng,

trong tổng $\boxed{\sum_{i\ne j} P(A_iA_j)}$ có $\boxed{A_n^2}$ số hạng ,

trong tổng $\boxed{\sum_{i<j} P(A_iA_j)}$ có $\boxed{C_n^2}$ số hạng .

Ví dụ 3.2: Có k người lên ngẫu nhiên n toa tàu (k>n). Tính xác suất để tất cả các toa đều có người lên

Bài giải

- A - tất cả các toa đều có người lên
- $\overline{A}$ - có ít nhất 1 toa không có người lên.
- A_i - toa thứ i không có người lên, i =1, 2,…n

$$\Rightarrow \overline{A} = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Vì các toa tàu có vai trò như nhau nên áp dụng công thức cộng xác suất ta có :

$$\boxed{P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P\left(A_i A_j\right) + \sum_{i<j<k} P\left(A_i A_j A_k\right) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = C_n^1.\mathrm{P}\left(A_1\right) - C_n^2.\mathrm{P}\left(A_1A_2\right) + C_n^3.\mathrm{P}\left(A_1A_2A_3\right) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

$$= C_n^1\frac{\left(n-1\right)^k}{n^k} - C_n^2\frac{\left(n-2\right)^k}{n^k} + C_n^3\frac{\left(n-3\right)^k}{n^k} + \ldots + \left(-1\right)^n C_n^{n-1}.\frac{1^k}{n^k} + 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$$

Ví dụ 3.3: Có n bức thư bỏ ngẫu nhiên vào n phong bì có đề sẵn địa chỉ.

a)Tính xác suất để có ít nhất 1 bức thư đúng địa chỉ.

b) Tính xác suất để chỉ có đúng 1 bức thư đúng địa chỉ

c) Tính xác suất để chỉ có đúng m bức thư đúng địa chỉ

Bài giải A - Có ít nhất 1 bức đúng. $\Rightarrow A=\sum_{i=1}^{n} A_i$

A_i - Bức thứ i đúng

Vì các bức thư có vai trò như nhau nên áp dụng công thức cộng xác suất ta có :

$$\boxed{P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)}$$

$$P(A_1A_2\ldots A_m)=\frac{(n-m)!}{n!}$$

$$\Rightarrow P(A)=C_n^1.P(A_1)-C_n^2.P(A_1A_2)+C_n^3.P(A_1A_2A_3)+\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)=C_n^1\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}+$$

$$\ldots+(-1)^n C_n^{n-1}.\frac{1!}{n!}+(-1)^{n+1}.\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}.\frac{1}{n!}$$

B_n -Không có bức nào đúng địa chỉ trong n bức thư

C_n -Chỉ có đúng 1 bức đúng địa chỉ trong n bức thư

$$B_n = \overline{A} \Rightarrow \; P(B_n) = 1 - P(A) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \left(-1\right)^n . \frac{1}{n!}$$

$$P(C_n) = n.P(A_1).P(B_{n-1}) = P(B_{n-1})$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \left(-1\right)^{n-1} . \frac{1}{(n-1)!}$$

$C_{n,m}$ -Chỉ có đúng m bức đúng địa chỉ trong n bức thư

$$\Rightarrow P(C_{n,m}) = C_n^m .P(A_1 A_2 \ldots A_m).P(B_{n-m}) =$$

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \left(-1\right)^{n-m} . \frac{1}{(n-m)!}\right) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$$

2. Định lý nhân xác suất

- Định nghĩa 3.1: Xác suất của biến cố B khi biết rằng biến cố A đã xảy ra được gọi là xác suất của B với điều kiện A và kí hiệu là P(B/A).
- **Chú ý**: biến cố A có thể xảy ra trước, đồng thời hoặc sau B
- Ngôn ngữ biểu diễn: P(B/A) = xác suất B biết (nếu)A hoặc Cho A… tính xác suất B.
- Định lý 3.3: P(AB)=P(A).P(B/A)=P(B).P(A/B)

$$\boxed{P(A_1.A_2...A_n)=P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})}$$

- Hệ quả:

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B).P(A/B)}{P(A)}}$$

Ví dụ 3.4

- Trong 1 hộp có 8 bi đen và 2 bi trắng . Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại 2 bi . Tính xác suất để :

1) Bi thứ nhất là trắng

2) Bi thứ hai là trắng , nếu bi thứ nhất là trắng

3) Bi thứ nhất là trắng , nếu bi thứ hai là trắng

4) Bi thứ hai là trắng

Gọi A,B lần lượt là biến cố bi thứ 1, thứ 2 là trắng

$$1)P(A)=\frac{2}{10} \qquad 2)\mathrm{P}\left(\mathrm{B}/\mathrm{A}\right)=\frac{1}{9}$$

$$3)P(A/B)=\frac{1}{9} \qquad 4)P(B)=\frac{2}{10}$$

Ví dụ 3.5: Có 10 người lên ngẫu nhiên 5 toa tàu. Giả sử đã biết rằng toa thứ nhất không có người lên .Tính xác suất để toa thứ hai không có người lên.

A là biến cố toa thứ 1 không có người lên,

B là biến cố toa thứ 2 không có người lên. Ta có :

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3^{10}}{4^{10}}$$

Ví dụ 3.6: Vợ chồng An cùng 3 cặp vợ chồng khác ngồi ngẫu nhiên vào một bàn ngang (tròn).

a)Tính xác suất để vợ chồng An ngồi cạnh nhau.

b)Tính xác suất để không có người chồng nào được ngồi cạnh vợ mình .

Giải: Bàn ngang :

Xác suất để 2 người A,B ngồi cạnh nhau theo 1 cái bàn ngang có n người là

$$p = \frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n}$$

- Xác sất để 2 vợ chồng An ngồi cạnh nhau là $\frac{2}{8}$

A_i là biến cố cặp vợ chồng thứ i ngồi cạnh nhau. Xác suất cần tìm:

$$= 1 - P\left(A_1 + A_2 + A_3 + A_4\right)$$

$$= 1 - \left[\sum_{i=1}^{4} P(\mathrm{A_i}) - \sum_{i<j} P(\mathrm{A_i A_j}) + \sum_{i<j<k} P(\mathrm{A_i A_j A_k}) - \mathrm{A_1 A_2 A_3 A_4}\right]$$

$$= 1 - \left[4.\frac{2}{8} - 6.\frac{2}{8}.\frac{2}{7} + 4.\frac{2}{8}.\frac{2}{7}.\frac{2}{6} - \frac{2}{8}.\frac{2}{7}.\frac{2}{6}.\frac{2}{5}\right] = \frac{12}{35}$$

Giải: Bàn tròn :

Xác suất để 2 người A,B ngồi cạnh nhau theo 1 cái bàn tròn có n người là

$$p = \frac{2}{n-1}$$

•Xác sất để 2 vợ chồng An ngồi cạnh nhau là $\frac{2}{7}$

A_i là biến cố cặp vợ chồng thứ i ngồi cạnh nhau. Xác suất cần tìm:

$$= 1 - P\left(A_1 + A_2 + A_3 + A_4\right)$$

$$= 1 - \left[\sum_{i=1}^{4} P(\mathrm{A_i}) - \sum_{i<j} P(\mathrm{A_i A_j}) + \sum_{i<j<k} P(\mathrm{A_i A_j A_k}) - \mathrm{A_1 A_2 A_3 A_4}\right]$$

$$= 1 - \left[4.\frac{2}{7} - 6.\frac{2}{7}.\frac{2}{6} + 4.\frac{2}{7}.\frac{2}{6}.\frac{2}{5} - \frac{2}{7}.\frac{2}{6}.\frac{2}{5}.\frac{2}{4}\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{8}{7} - \frac{4}{7} + \frac{16}{105} - \frac{2}{105}\right] = \frac{31}{105}$$

- Định nghĩa 3.2: Hai biến cố A,B được gọi là độc lập với nhau nếu xác suất của biến cố này không phụ thuộc vào việc biến cố kia đã xảy ra hay chưa trong 1 phép thử.
- Định nghĩa 3.3: Một hệ các biến cố được gọi là độc lập toàn phần nếu mỗi biến cố của hệ độc lập với 1 tổ hợp bất kỳ của các biến cố còn lại.
- Định lý 3.4: A, B độc lập khi và chỉ khi P(AB)=P(A).P(B)
- Định lý 3.5: Giả sử $A_i, i=\overline{1,n}$ là độc lập toàn phần. Khi ấy ta có:

$$1.P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$2.P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right)$$

Chú ý: Trong trường hợp độc lập không nên dùng công thức cộng xác suất mà nên dùng công thức nhân xác suất.

- **Ví dụ 3.7:** 1 mạng gồm n chi tiết mắc nối tiếp.Xác suất hỏng của chi tiết thứ i là P_i . Tính xác suất để mạng hỏng.
- Giải: A_i - biến cố chi tiết thứ i hỏng

  A - biến cố mạng hỏng $\Rightarrow A = \sum_{i=1}^{n} A_i$
- Vậy xác suất để mạng hỏng là:

$$\boxed{P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - \left[(1-P_1)(1-P_2)\ldots(1-P_n)\right]}$$

- Chú ý : Có thể tính trước

$$P(\overline{A}) = (1 - P_1)(1 - P_2)\ldots(1 - P_n)$$

Có câu chuyện vui, minh họa cho quy luật "xác suất của hai sự kiện độc lập bằng tích số hai xác suất". Câu chuyện như sau : Giả sử có một con khỉ đang sống trong vườn bách thú. Xác suất để xảy ra sự kiện "người trông thú đãng trí quên khóa cửa chuồng" là p1. Xác suất để xảy ra sự kiện "nhân lúc người trông thú đi khỏi, con khỉ biết tự mở cửa chuồng, trốn ra bên ngoài" là p2. Xác suất để xảy ra sự kiện "trong nhiều ngôi nhà xung quanh vườn thú, con khỉ chọn đúng nhà ông bá tước để vào" là p3. Xác suất để xảy ra sự kiện "con khỉ trèo qua cửa sổ, chui vào được phòng khách ông bá tước" là p4. Xác suất để xảy ra sự kiện "trong nhiều đồ vật ở phòng khách, con khỉ lấy được chai rượu vốt-ca và tu mấy ngụm" là p5. Xác suất để xảy ra sự kiện "sau đó, con khỉ nhảy lên chiếc ghế kê cạnh chiếc đàn pi-a-nô ở góc nhà" là p6. Xác suất để xảy ra sự kiện "con khỉ với tay chọn đúng tập sách nhạc để trên kệ sách" là p7. Xác suất để xảy ra sự kiện "con khỉ lần giở tập sách nhạc, chẳng may trúng bài Bản xô-nát ánh trăng của nhạc sĩ thiên tài Bét-tô-ven" là p8. Xác suất để xảy ra sự kiện "con khỉ vừa gật gù vừa chơi Bản xô-nát ánh trăng một cách xuất thần" là p9.

Vậy là, để tính xác suất xảy ra sự kiện ngẫu nhiên "con khỉ ở vườn bách thú chơi xuất thần Bản xô-nát ánh trăng ở nhà ông bá tước", ta chỉ việc lấy tích số từ p1 đến p9, là xong. Những xác suất này rất bé, nên tích số của chúng lại càng bé, có thể nói là vô cùng bé. Bé, nhưng không hề bằng 0. Đây là một "sáng tác ngẫu hứng" của Viện sĩ Kôn-mô-gô-rốp, cụ tổ sư của chuyên ngành Lý thuyết Xác suất bên Liên Xô. Thời kỳ sơ khai của chuyên ngành này, nhà toán học Gau-xơ được mời tư vấn cho... sòng bạc. Ông được chủ sòng bạc trả tiền thù lao khá hậu hĩnh - với nhiệm vụ tính toán xác suất thắng-thua khi chơi một trò chơi cờ bạc nào đấy. Chủ sòng bạc sẽ đưa ra những luật chơi mà xác suất thắng của khách chỉ độ một phần ba, còn hai phần ba thuộc về ông ta. Sau này, những trò cá cược, xổ số, lốt-tô... dẫu tinh vi hơn, nhưng tựu trung, đều có xu hướng "ăn gian" như vậy.

Ví dụ 3.8: Tung 3 con xúc xắc cân đối,đồng chất. Tính xác suất để:

1. Tổng số chấm bằng 9 biết có ít nhất 1 mặt 1 chấm
2. Có ít nhất một mặt 1 chấm biết số chấm khác nhau từng đôi một.

- Giải:

1. Gọi A là có ít nhất 1 mặt 1 chấm.

B là tổng số chấm bằng 9

C là các số chấm khác nhau từng đôi một

$$P(A) = \frac{6^3 - 5^3}{6^3}$$

$$\Rightarrow P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{15}{6^3} \cdot \frac{6^3}{6^3 - 5^3} = \frac{15}{91}$$

$$P(AB) = \frac{15}{6^3}$$

- Số cách để có ít nhất một mặt 1 chấm và tổng bằng 9:
- 1+2+6 suy ra có 3! cách
- 1+3+5 suy ra có 3! cách
- 1+4+4 suy ra có 3 cách

Suy ra có 15 cách để có ít nhất một mặt 1 chấm và tổng bằng 9

2.

$$P(C)=\frac{6.5.4}{6^3}$$

$$P(AC)=\frac{3.5.4}{6^3}$$

$$\Rightarrow P(A/C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{1}{2}$$

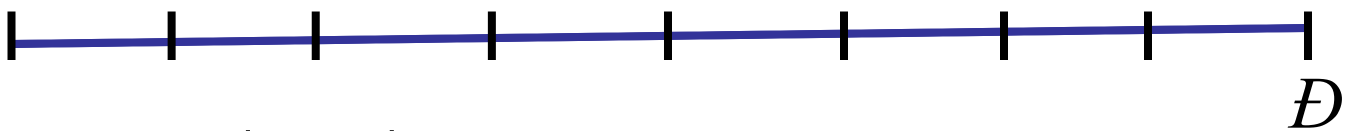
Chú ý:

$$P(A)=\frac{m_A}{|\Omega|},P(AB)=\frac{m_{AB}}{|\Omega|}\Rightarrow P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{m_{AB}}{m_A}$$

Ví dụ 3.9: Từ 1 hộp có 10 bi trắng , 6 bi đen ,người ta lấy lần lượt không hoàn lại từng bi cho đến khi được 5 bi đen thì dừng lại.Tính xác suất để lần thứ 3 lấy được bi trắng nếu biết rằng đã dừng lại ở lần thứ 9.

Giải:

Gọi A là dừng lại ở lần thứ 9, B là lần thứ 3 lấy được bi trắng



$$\underbrace{m_A : 4T + 4\text{Đ}}$$

$$\underbrace{m_{AB} : 3T + 4\text{Đ}}$$

$$P(B/A) = \frac{m_{AB}}{m_A} = \frac{C_7^4}{C_8^4}$$

Ví dụ 3.9’: Tương tự ví dụ trên thay bằng lấy có hoàn lại .

3. Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes:

Định nghĩa 3.4: Hệ $H_i, i = \overline{1, n}$ được gọi là hệ đầy đủ, nếu trong mỗi phép thử nhất định 1 và chỉ 1 trong các biến cố H*i* xảy ra.

H_1

H_2

H_3

- Định lý 3.6: Giả sử $H_i, i = \overline{1, n}$ là hệ đầy đủ. Ta có:

$$\boxed{\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A / H_i)}$$ (công thức đầy đủ).

$$\boxed{\mathrm{P}(H_i / \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}H_i)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{P}(H_i).\mathrm{P}(\mathrm{A}/ H_i)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}, i = \overline{1, n}}$$ (công thức Bayess)

Chú ý:

1. $$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(B/H_i)$$

$$\Rightarrow P(B/A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i/A)P(B/H_iA)$$

2. $$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

Với:

$$P(AB)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(AB/H_i)$$

Ví dụ 3.10: Có 2 hộp bi cùng cỡ, hộp 1 chứa 4 bi trắng và 6 bi xanh, hộp 2 chứa 5 bi trắng và 7 bi xanh.Lấy ngẫu nhiên 1 hộp, từ hộp đó lấy ngẫu nhiên1 bi thì được bi trắng. Tìm xác suất để viên bi tiếp theo, cũng lấy từ hộp trên ra là bi trắng.

Giải:. Lấy ngẫu nhiên 1 hộp: H_1 lấy được hộp 1

H_2 lấy được hộp 2

$$P(H_1) = P(H_2) = 1/2$$

Hộp 1: 4t + 6x , Hộp 2: 5t + 7x

A- biến cố lấy được bi trắng ở lần 1

B- biến cố lấy được bi trắng ở lần 2

$$\Rightarrow P(B/A)$$

Cách 1:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_2)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{4}{10} + \frac{1}{2}.\frac{5}{12}$$

$$\mathrm{P}(H_1/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{4}{10}}{P(A)}$$

$$\mathrm{P}(H_2/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{5}{12}}{P(A)}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \mathrm{P}(H_1/\mathrm{A}).\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}/H_1\mathrm{A})}_{3/9} + \mathrm{P}(H_2/\mathrm{A}).\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}/H_2\mathrm{A})}_{4/11}$$

Cách 2: $$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{4}{10}+\frac{1}{2}.\frac{5}{12}$$

$$P(AB)=P(H_1).P(AB/H_1)+P(H_2).P(AB/H_2)$$

$$=P(H_1).P(A/H_1).P(B/AH_1)+P(H_2).P(A/H_2).P(B/AH_2)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{4}{10}.\frac{3}{9}+\frac{1}{2}.\frac{5}{12}.\frac{4}{11}$$

Chú ý

- Nếu sau lần 1 đã lấy được bi trắng ta trả bi vào hộp rồi mới lấy tiếp lần 2 thì lời giải thay đổi như sau:

$$\frac{3}{9} \to \frac{4}{10};$$

$$\frac{4}{11} \to \frac{5}{12}$$

- P(B)=P(A), trong cả 2 bài toán.

- Nếu câu hỏi là :Giả sử lần 1 đã lấy được bi trắng tính xác suất để bi đó lấy được ở hộp 1, thì đáp số là:

$$P(H_1 / A)$$

Ví dụ 3.11: Có 1 tin tức điện báo tạo thành từ các tín hiệu(.)và (-). Qua thống kê cho biết là do tạp âm, bình quân 2/5 tín hiệu(.) và 1/3 tín hiệu(-) bị méo. Biết rằng tỉ số các tín hiệu chấm và vạch trong tin truyền đi là 5:3. Tính xác suất sao cho nhận đúng tín hiệu truyền đi nếu đã nhận được chấm.

- **Giải** :

  H1 là biến cố truyền đi chấm,

  H2 là biến cố truyền đi vạch.

  $$\Rightarrow P(H_1) = \frac{5}{8}, P(H_2) = \frac{3}{8}$$

- Gọi A là biến cố nhận được chấm .

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(H_1).\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_2)$$

$$= \frac{5}{8}.\frac{3}{5} + \frac{3}{8}.\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(H_1/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{\frac{5}{8}.\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

4. Công thức Bernoulli:

- Định lý 3.7: Giả sử trong mỗi phép thử 1 biến cố A có thể xuất hiện với xác suất p (khi A xuất hiện ta quy ước là thành công). Thực hiện n phép thử giống nhau như vậy. Khi ấy xác suất để có đúng k lần thành công là :

$$\mathrm{P}(n,k,p) = C_n^k.p^k.q^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n$$ (Phân phối nhị thức)

Chú ý 1 : từ nay trở đi ta ký hiệu q=1-p

Chú ý 2: Thực ra công thức có dạng

$$\mathrm{P}(n,k,p) = C_n^k.p^k.C_{n-k}^{n-k}.q^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n$$

Định nghĩa 3.6: Kí hiệu k_0 là số sao cho:

$$\mathrm{P}(n,k_0,p) = Max\ \mathrm{P}(n,k,p),\quad 0 \le k \le n$$

Khi ấy k_0 được gọi là số lần thành công có nhiều khả năng xuất hiện nhất(tức là ứng với xác suất lớn nhất)

Định lý 3.8: $k_0 = [(n+1)p]$ hoặc $k_0 = [(n+1)p] - 1$

Chú ý: $P(n,k,1/2) = C_n^k.(0,5)^n$

Ví dụ 3.12: Tung cùng lúc 20 con xúc xắc.

1. Tính xác suất để có đúng 4 mặt lục xuất hiện.
2. Tính số mặt lục có nhiều khả năng xuất hiện nhất.
3. Tính xác suất để có ít nhất 1 mặt lục.
4. Tính số con súc sắc ít nhất cần tung để xác suất được ít nhất 1 mặt lục không nhỏ hơn 0,99.

Giải: 1) $P(20,4,1/6) = C_{20}^4 (1/6)^4.(5/6)^{16}$

2) $k_0 = [(20+1)/6] = 3 \vee k_0 = 2$

3) $P = 1-(5/6)^{20} = 0,9739$

4) $1-(5/6)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow (5/6)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq 26$

Ví dụ 3.13:Trong 1 hộp có N bi trong đó có M bi trắng còn lại là đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi có hoàn lại ra n bi. Khi ấy xác suất để lấy được đúng k bi trắng được tính bằng công thức Bernoulli nói trên với p = M/N (phân phối **nhị thức) :**

$$\mathrm{P}\left(n,k,\frac{M}{N}\right)=C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k.C_{n-k}^{n-k}.\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k},k=0,1,...,n$$

Ví dụ 3.14:Trong 1 hộp có N bi trong đó có M bi trắng còn lại là đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi không hoàn lại ra n bi. Khi ấy xác suất để lấy được đúng k bi trắng là

$$\mathrm{P}=\frac{C_M^k.C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=\overline{0,n}$$ (Phân phối **siêu bội**)

Chú ý: Ở đây N-M là số bi không trắng.

- **Chú ý: Lấy :+ Không hoàn lại có dạng tương tự siêu bội**

  + Có hoàn lại có dạng tương tự nhị thức.

Ví dụ 3.15 : Trong 1 hộp bi có 6 trắng, 5 đen, 4 vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi không hoàn lại cho đến khi gặp bi vàng thì dừng.Tính xác suất để lấy được đúng 3 bi trắng, 2 bi đen.

Giải:Lấy 1 bi cuối cùng là vàng nên:

$$P = \frac{C_6^3 . C_5^2}{C_{15}^5} . \frac{4}{10}$$

Ví dụ 3.16 : Trong 1 hộp bi có 6 trắng, 5 đen, 4 vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi không hoàn lại cho đến khi gặp đủ 3 bi vàng thì dừng.Tính xác suất để lấy được đúng 3 bi trắng, 2 bi đen.

$$P = \frac{C_6^3 . C_5^2 . C_4^2}{C_{15}^7} . \frac{2}{8}$$

Ví dụ 3.17: Trong 1 hộp bi có 6 trắng, 5 đen, 4 vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi có hoàn lại cho đến khi gặp bi vàng thì dừng.Tính xác suất để lấy được đúng 3 bi trắng, 2 bi đen.

Giải:Lấy 1 bi cuối cùng là vàng nên:

$$P = C_5^3\left(\frac{6}{15}\right)^3 .C_2^2.\left(\frac{5}{15}\right)^2 .\frac{4}{15}$$

Ví dụ 3.18 : Trong 1 hộp bi có 6 trắng, 5 đen, 4 vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi có hoàn lại cho đến khi gặp đủ 3 bi vàng thì dừng.Tính xác suất để lấy được đúng 3 bi trắng, 2 bi đen.

$$P = C_7^3\left(\frac{6}{15}\right)^3 .C_4^2\left(\frac{5}{15}\right)^2 .\left(\frac{4}{15}\right)^2 .\frac{4}{15}$$

Ví dụ 3.19 : Trong 1 hộp bi có 6 trắng, 5 đen, 4 vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi có (không) hoàn lại cho đến khi gặp đủ 3 bi vàng thì dừng . Biết rằng đã lấy được đúng 3 bi trắng, 2 bi đen , tính xác suất để bi thứ hai là trắng .