Задача 1

Система ОДУ, описывающая изменение численности популяций двух видов:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\left(1 - 0.5x - \frac{2}{7\alpha^2}y\right) \\ \frac{dy}{dt} = x(2\alpha - 3.5\alpha^2 x - 0.5y) \end{cases}$$

Данная система ОДУ зависит от параметра α (генетический признак), который может зависить от t. В таком случае систему ОДУ необходимо дополнить еще одним уравнением

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2 - 7\alpha x}{100}$$

Решить полученную систему ОДУ А-устойчивой разностной схемой для начальных условий $x(0) = 1.5$, $y(0) = 10$, $\alpha(0) = 0$.

Задача 2

Решить задачу $y'' = x^3$, $y(0) = y(1) = 0$ методом Фурье.

Теоретическая справка

Рассмотрим задачу

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = g,$$

$u_0 = 0$, $u_N = 0$, $hN = X$.

Решение будем искать в виде разложение по базису из собственных функций разностного оператора

$$L_h(u) = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

Собственные значения определяются как решение

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = -\lambda u_n$$

при начальных условиях, которые совпадают с исходной задачей: $u_0 = 0$, $u_N = 0$, $hN = X$.

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = -\lambda u_n h^2$$

Ищем решение в виде

$$u_k = \alpha q_1^k + \beta q_2^k = |\text{по Виетту } q_1 = \frac{1}{q_2}| = \alpha q_1^k + \beta q_1^{-k}$$

Определим α и β:

$$u_0 = 0 = \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$u_N = 0 = \alpha q_1^N + \beta q_1^{-N} = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha q_1^{2N}$$

$$\alpha = -\left(-\alpha q_1^{2N}\right) = \alpha q_1^{2N} \Rightarrow 1 = q_1^{2N} \Rightarrow q_1^{2N} = e^{2i\pi l} \Rightarrow q_1 = \exp\left(\frac{i\pi l}{N}\right) = e^{iA_l}$$

$$u_k = \alpha q_1^k - \alpha q_1^{-k} = \alpha q_1^k\left(1 + q_1^{-2k}\right)$$

$$\lambda = \frac{\alpha q_1^{n+1}\left(1 + q_1^{-2(n+1)}\right) - 2\alpha q_1^n\left(1 + q_1^{-2(n)}\right) + \alpha q_1^{n-1}\left(1 + q_1^{-2(n-1)}\right)}{-h^2 \alpha q_1^n\left(1 + q_1^{-2n}\right)}$$

$$\lambda = \frac{q_1^{n+1}\left(1 + q_1^{-2(n+1)}\right) - 2q_1^n\left(1 + q_1^{-2(n)}\right) + q_1^{n-1}\left(1 + q_1^{-2(n-1)}\right)}{-h^2 q_1^n\left(1 + q_1^{-2n}\right)} =$$

$$= \frac{q_1\left(1 + q_1^{-2(n+1)}\right) - 2\left(1 + q_1^{-2(n)}\right) + q_1^{-1}\left(1 + q_1^{-2(n-1)}\right)}{-h^2\left(1 + q_1^{-2n}\right)} =$$

$$= \frac{q_1 + q_1^{-2n-1} - 2\left(1 + q_1^{-2(n)}\right) + q_1^{-1} + q_1^{-2n+1}}{-h^2\left(1 + q_1^{-2n}\right)} =$$

$$= \frac{\left(1 + q_1^{-2n}\right)\left(q_1^{-1} + q_1 - 2\right)}{-h^2\left(1 + q_1^{-2n}\right)} = \frac{q_1^{-1} + q_1 - 2}{-h^2} = \frac{e^{iA_l} + e^{-iA_l} - 2}{-h^2} = 2\frac{0.5\left(e^{iA_l} + e^{-iA_l}\right) - 1}{-h^2} =$$

$$= 2\frac{\cos(A_l) - 1}{-h^2} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{A_l}{2}\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi l}{2N}\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi l h}{2X}\right), \text{где } l = 1 \ldots N-1$$

Собственные функции

$$\omega_k(x_n) = \sqrt{\frac{2}{X}}\sin\left(\frac{\pi l x_n}{X}\right), \text{где } l = 1 \ldots N-1$$

Решение исходной задачи представимо

$u(x_n) = \sum_{k=1}^{N-1} C_k \omega_k(x_n)$, а также для функции $g(x)$ верно $g(x_n) = \sum_{k=1}^{N-1} \widetilde{C}_k \omega_k(x_n)$

Так как известна $g(x)$ и $\omega_k(x_n)$ для всех k, то можно найти $\widetilde{C}_k$ (см. предыдущий семестр).

Подставляем разложения по базисным функциям в исходную разностную схему:

$$L_h \left(\sum_{k=1}^{N-1} C_k \omega_k(x_n) \right) = \sum_{k=1}^{N-1} \widetilde{C}_k \omega_k(x_n)$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} C_k \lambda_k \omega_k(x_n) = \sum_{k=1}^{N-1} \widetilde{C}_k \omega_k(x_n)$$

Отсюда следует, что $C_k = \widetilde{C}_k / \lambda_k$. Тогда решение уравнение находится как

$$u(x_n) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\widetilde{C}_k}{\lambda_k} \omega_k(x_n)$$