Задача 1

Идеальный математический маятник с грузом массой $m = 2$ кг, прикреплённый к шарниру невесомым нерастяжимым стержнем длиной $L = 8$ м. На маятник действуют сила сопротивления стержня T и сила тяжести $F(t) = mg(t)$, где $g(t) = 9,81 + 0.01\cos\{2\pi t\}$ Пренебрегая трением в шарнире и сопротивлением воздуха, получаем систему уравнений, описывающую движение груза в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{L}T \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{L}T - F(t) \\ x^2 + y^2 = L \end{cases}$$

При условии, что в начальный момент времени груз покоится в точке координатами $\left[3, -\sqrt{55}\right]$, решите задачу на интервале $t \in [0; 4]$ без перехода в полярные координаты или исключения переменной T из системы уравнений. Выполнить расчеты как минимум 2-мя различными разностными схемами (явной и неявной).

Задача 2

Задача трех тел (Солнце, Юпитер, астеройд)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt} + x - \frac{\gamma(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\gamma)}{r_2^3} - f\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\frac{dx}{dt} + y - \frac{\gamma y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} - f\frac{dy}{dt}$$

$$\mu = 0.00095388;$$
$$\gamma = 1 - \mu;$$
$$r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2;$$
$$r_2^2 = (x-\gamma)^2 + y^2$$

Масса астеройда пренебрежимо мала по сравнению с массами планет (координаты астеройда $(x,\ y)$); первые производные появляются вследствие вращения системы координат и трения, пропорционального скорости с коэффициентом пропорциональности f.

Для решения воспользоваться следующим **методом Рунге-Кутты-Фельберга**:

1. Вычисляются значения

$$k_1 = f(t_n, y_n);$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{4}\tau, y_n + \frac{1}{4}\tau k_1\right);$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{3}{8}\tau, y_n + \frac{3}{32}\tau k_1 + \frac{9}{32}\tau k_2\right);$$

$$k_4 = f\left(t_n + \frac{12}{13}\tau, y_n + \frac{1932}{2197}\tau k_1 - \frac{7200}{2197}\tau k_2 + \frac{7296}{2196}\tau k_3\right);$$

$$k_5 = f\left(t_n + \tau, y_n + \frac{439}{216}\tau k_1 - 8\tau k_2 + \frac{3680}{513}\tau k_3 - \frac{845}{4104}\tau k_4\right);$$

$$k_6 = f\left(t_n + \frac{1}{2}\tau, y_n - \frac{8}{27}\tau k_1 + 2\tau k_2 + \frac{3544}{2565}\tau k_3 + \frac{1859}{4104}\tau k_4 - \frac{11}{40}\tau k_5\right).$$

2. С помощью метода 4 порядка находится

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \tau\left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5\right)$$

3. С помощью метода 6 порядка определяется

$$y_{n+1} = y_n + \tau\left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{19}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right)$$

4. Определяется оптимальная величина шага

$$\tau_{\text{opt}} = \tau\left(\frac{\varepsilon\tau}{2|\ y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}\ |}\right)^{\frac{1}{4}}$$

5. Находится значение $y_{n+1}\left(\tau_{\text{opt}}\right)$.

Решить задачу трех тел используя методом Рунге-Кутты-Фельберга с координатами координатами $R_1 = \left(0.5 - 0.5\mu; -0.5\sqrt{3}\right)$ и $R_2 = \left(0.5\sqrt{3}; 0.5 - 0.5\mu\right)$, начальную скорость считать нулевой. Рассмотреть $f = 0; 0.001; 0.1$ Изучить влияние выбора τ на решение системы ОДУ.

Решение ОДУ, траектория движения астеройда (x(t),y(t)), должно быть быть анимировано

Задача 3

Решить краевую задачу **двумя** методами (для решения задачи Коши метод можно не менять):

$$y'' + (x^2 - 3)y' + (x^2 - 3)\cos x \times y = 2 - 6x + 2x^3 + (x^2 - 3)e^x \sin x \times (1 + \cos x) +$$
$$+ \cos x \times (e^x + (x^2 - 1) + x^4 - 3x^2)$$

С краевыми условиями $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi^2$.