

Задача 1

Идеальный математический маятник с грузом массой $m = 2$ кг, прикрепленный к шарниру невесомым нерастяжимым стержнем длиной $L = 8$ м. На маятник действуют сила сопротивления стержня T и сила тяжести $F(t) = mg(t)$, где $g(t) = 9,81 + 0.01 \cos\{2\pi t\}$. Пренебрегая трением в шарнире и сопротивлением воздуха, получаем систему уравнений, описывающую движение груза в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{x}{L} T \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{y}{L} T - F(t) \\ x^2 + y^2 = L \end{cases}$$

При условии, что в начальный момент времени груз покоится, решите задачу на интервале $t \in [0; 4]$ без перехода в полярные координаты или исключения переменной T из системы уравнений. Выполнить расчеты как минимум 2-мя различными разностными схемами (явной и неявной).

Задача 2

Задача трех тел (Солнце, Юпитер, астероид)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \frac{dy}{dt} + x - \frac{\gamma(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - \gamma)}{r_2^3} - f \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -2 \frac{dx}{dt} + y - \frac{\gamma y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} - f \frac{dy}{dt}$$

$$\mu = 0.00095388;$$

$$\gamma = 1 - \mu;$$

$$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2;$$

$$r_2^2 = (x - \gamma)^2 + y^2$$

Масса астероида пренебрежимо мала по сравнению с массами планет (координаты астероида (x, y)); первые производные появляются вследствие вращения системы координат и трения, пропорционального скорости с коэффициентом пропорциональности f .

Для решения воспользоваться следующим методом Рунге-Кутты-Фельберга:

1. Вычисляются значения

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n); \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{4}\tau, y_n + \frac{1}{4}\tau k_1\right); \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{3}{8}\tau, y_n + \frac{3}{32}\tau k_1 + \frac{9}{32}\tau k_2\right); \\k_4 &= f\left(t_n + \frac{12}{13}\tau, y_n + \frac{1932}{2197}\tau k_1 - \frac{7200}{2197}\tau k_2 + \frac{7296}{2196}\tau k_3\right); \\k_5 &= f\left(t_n + \tau, y_n + \frac{439}{216}\tau k_1 - 8\tau k_2 + \frac{3680}{513}\tau k_3 - \frac{845}{4104}\tau k_4\right); \\k_6 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}\tau, y_n - \frac{8}{27}\tau k_1 + 2\tau k_2 + \frac{3544}{2565}\tau k_3 + \frac{1859}{4104}\tau k_4 - \frac{11}{40}\tau k_5\right).\end{aligned}$$

2. С помощью метода 4 порядка находится

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \tau \left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \right)$$

3. С помощью метода 6 порядка определяется

$$y_{n+1} = y_n + \tau \left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{19}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right)$$

4. Определяется оптимальная величина шага

$$\tau_{\text{opt}} = \tau \left(\frac{\varepsilon \tau}{2|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}|} \right)^{\frac{1}{4}}$$

5. Находится значение $y_{n+1}(\tau_{\text{opt}})$.

Решить задачу трех тел используя методом Рунге-Кутты-Фельберга с координатами $R_1 = (0.5 - 0.5\mu; -0.5\sqrt{3})$ и $R_2 = (0.5\sqrt{3}; 0.5 - 0.5\mu)$, начальную скорость считать нулевой. Рассмотреть $f = 0; 0.001; 0.1$ Изучить влияние выбора τ на решение системы ОДУ.

Решение ОДУ, траектория движения астероида $(x(t), y(t))$, должно быть анимировано

Задача 3

Решить краевую задачу **двумя** методами (для решения задачи Коши метод можно не менять):

$$y'' + (x^2 - 3)y' + (x^2 - 3) \cos x \times y = 2 - 6x + 2x^3 + (x^2 - 3)e^x \sin x \times (1 + \cos x) + \\ + \cos x \times (e^x + (x^2 - 1) + x^4 - 3x^2)$$

С краевыми условиями $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi^2$.