Задача 1

(Петров «Вычислительная математика для физиков» стр. 366, №18)

Получить численное решение одномерной задачи о распаде разрыва в идеальном газе, используя систему нестационарных уравнений газодинамики:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + A\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0,$$

$$\boldsymbol{U} = (\rho, u, \varepsilon)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} & u & \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\ 0 & \frac{p}{\rho} & u \end{pmatrix},$$

где p – давление, u – скорость, ρ – плотность, ε – удельная внутренняя энергия газа.

Начальные и кравевые условия:

$$\rho(0,x) = \rho_0, u(0,x) = 0, \varepsilon(0,x) = \varepsilon_0,$$

$$\rho(0,x) = \begin{cases} \rho_1 \text{ если } x \leq 0 \\ \rho_2 \text{ если } x > 0 \end{cases}$$

Рассмотреть случаи $\rho_1/\rho_2 > 1000$, $\rho_1/\rho_2 \in [10, 100]$, $\rho_1/\rho_2 = 1.5$.

Давление определяется из уравнения состояния:

$$p - \rho\varepsilon(\gamma - 1) = 0, \gamma = 1.4$$

Для решения использовать:

1. Инварианты Римана. Метод левого уголка.
2. Сеточно-характеристичекий метод.

Сеточно-характеристичекий метод

$$\boldsymbol{U}_m^{n+1} = \boldsymbol{U}_m^n - \sigma\Big[\left(\Omega^{-1}\Lambda^+\Omega\right)_m^n\left(\boldsymbol{U}_{m-1}^n - \boldsymbol{U}_m^n\right) - \left(\Omega^{-1}\Lambda^-\Omega\right)_m^n\left(\boldsymbol{U}_{m+1}^n - \boldsymbol{U}_m^n\right)\Big], \sigma = \frac{\tau}{h}$$

Λ – диагональная матрица собственных чисел матрицы A. Собственные числа: $\lambda_1 = u + c$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u - c$. Матрица Ω определяется как:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \rho} & \rho c & \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\ p & 0 & -\rho^2 \\ p & -\rho c & \frac{\partial p}{\partial \rho} \end{pmatrix}$$

Значения Λ^+ и Λ^- определяются как:

$$\Lambda^+ = \frac{\Lambda + |\Lambda|}{2},$$

$$\Lambda^- = \frac{\Lambda - |\Lambda|}{2},$$

где $|\Lambda| = \mathrm{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$.