浅谈相图在力学问题中的应用

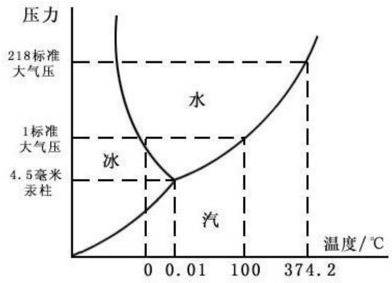
李远航

PB20000137

在学习力学学习的过程中，我们难免遇到一些复杂，需要分类讨论的题目，如果强行分类讨论的话，结果往往会不直观，而相图的引入，无疑会让这些问题更加的直观。

不过，为了更好的讨论相图在力学问题中的引用，我们应该先谈谈什么是相图。

最原始的相图，是在热学中的，被定义为：相图是指采用的热力学变量不同构成不同的相图。



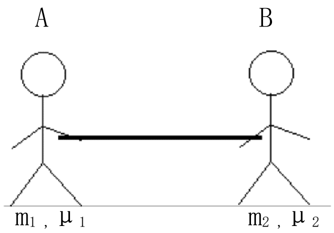
水的三相图

上图所示，即为水的三相图，从图中，我们可以直观的看出在不同的情况下，水所处的状态，这无疑比给我们一些数据要直观的多。

既然相图可以让水的物态变化更加直观，那我们能否将其应用于力学中，答案是可以的。

我们可以先看下面的这道题：

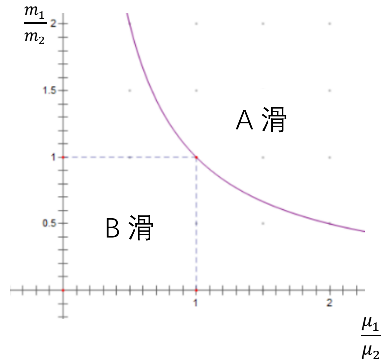
水平地面上有两个人 A 和 B，他们相向而立，A 的质量为 m_1，与地面的动摩擦因数为 μ_1，B 的质量为 m_2，与地面的动摩擦因数为 μ_2，两人使出全力拔河，假设在拔河的过程中，他们的手无法与绳脱离，最大静摩擦力等于滑动摩擦力，试问在什么情况下 A 滑动，在什么情况下，B 滑动？



解答这道题并没有什么难度，但是我们可以将其用相图表示出来：

$$\mu_1 \cdot m_1 \cdot g = \mu_2 \cdot m_2 \cdot g$$

$$\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$$

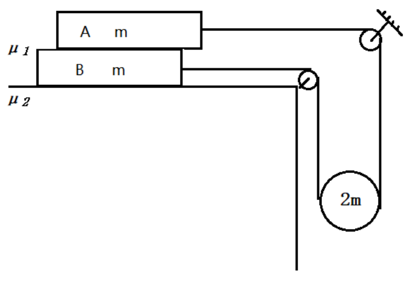


图中的函数图像将坐标轴分成了两个区域，从图中我们可以轻松看出在不同的情况下 A,B 所处的状态，而在函数图像上即为临界状态。

上图中函数图像就可以看成水的物态变化曲线，不同的情况就对应水的不同状态，以此一一对应，就将力学问题与相图联系了起来，从而使问题的变得简单易理解。

现在我们已经了解了什么是相图，也学会了如何将相图与力学问题联系起来，下面我们可以解决以下的问题，来体会相图对我们的帮助：

如图所示，两个物体通过两个定滑轮，一个动滑轮相连，A 在上，B 在下，A, B 的质量均为 m，动滑轮的质量为 2m，A 与 B 之间的动摩擦因数为 μ_1，B 与桌面之间的动摩擦因数为 μ_2，假设最大静摩擦力等于滑动摩擦力，忽略滑轮与轮轴之间的摩擦，试讨论物体的运动情况？



(1)A 滑

$\mu_1 > 1$ 滑

$\mu_1 < 1$ 不滑

(2)B 滑

$\mu_1 > 1$

$f = m \cdot g$

$\mu_2 > 1$ 滑

$\mu_2 < 1$ 不滑

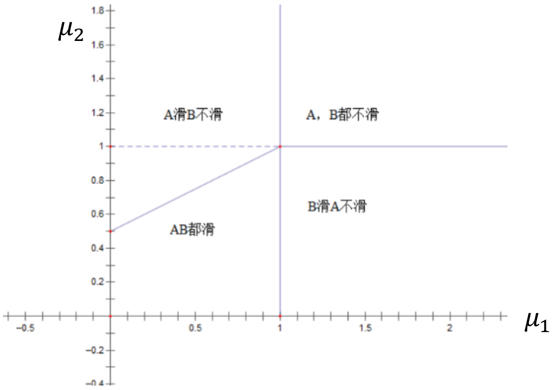
$\mu_1 < 1$

$f = \mu_1 \cdot m \cdot g$

$2\mu_2 > 1 + \mu_1$ 不滑

$2\mu_2 < 1 + \mu_1$ 滑

用相图来表示就是：



相图将坐标分成了四个区域，不同区域对应着不同的运动情况，从图形上表现出来，远比用几条不等关系表示更加的清晰。

上面讨论的都是相图在静力学中的引用，但相图的作用并不局限于此，下面我们来讨论相图和能量的联系：

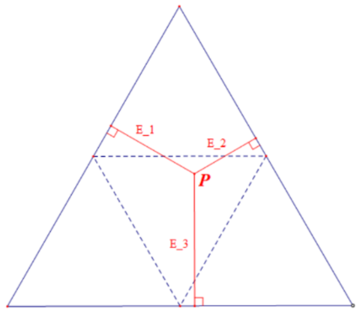
一个质量为m的物体在地面上炸开成三片，都以光速 c 飞出，它们的能量依次为 E_1, E_2, E_3，求 E_1, E_2, E_3 应该满足的关系？

$$\begin{cases} \text{能量守恒：} E_1 + E_2 + E_3 = E \\ \text{动量守恒：} \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3} = \vec{0} \end{cases}$$

又因为 $E = P \cdot c$

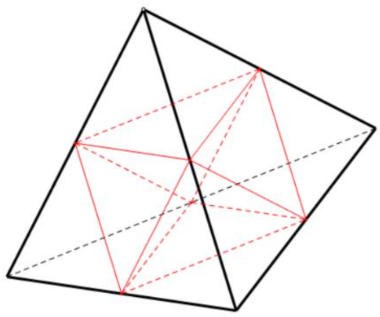
$$\text{则} \quad \begin{cases} E_1 + E_2 \geq E_3 > 0 \\ E_2 + E_3 \geq E_1 > 0 \\ E_1 + E_3 \geq E_2 > 0 \end{cases}$$

由能量守恒的等式，我们可以联想到等边三角形，这样上述的表达式就可以在坐标系中表示为：



通过相图，我们可以轻松得到能量所满足的条件，而当 P 点在虚线所示的三角形内移动时，同时满足能量守恒和动量守恒，即为题目所求的条件。

同时如果我们将题目推广到炸裂成四个碎片，那么相图就变成了一个三维的正四面体，满足题设条件的 P 点应该位于正四面体中的八面体内，如图所示：



当然，相图一样可以运用在动力学中，我们可以对一个简谐运动进行讨论。

设一个物体的运动满足下面的形式：

$$x = A \cdot \cos(w \cdot t + \varphi)$$

则该物体的速度：

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = -A \cdot w \cdot \sin(w \cdot t + \varphi)$$

这时候我们不难发现：

$$\begin{cases} x = A \cdot \cos(w \cdot t + \varphi) \\ -\dfrac{v}{w} = A \cdot \sin(w \cdot t + \varphi) \end{cases}$$

由三角恒等式：

$$\sin x^2 + \cos x^2 = 1$$

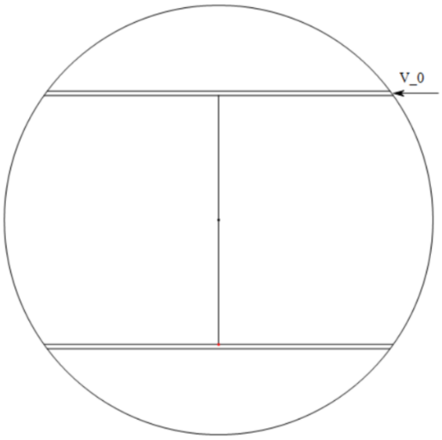
我们可以得到：

$$x^2 + \left(-\frac{v}{w}\right)^2 = 1$$

在坐标轴上表示就是一个圆，至此，我们就将简谐振动运动过程中的速度与位移联系了起来。

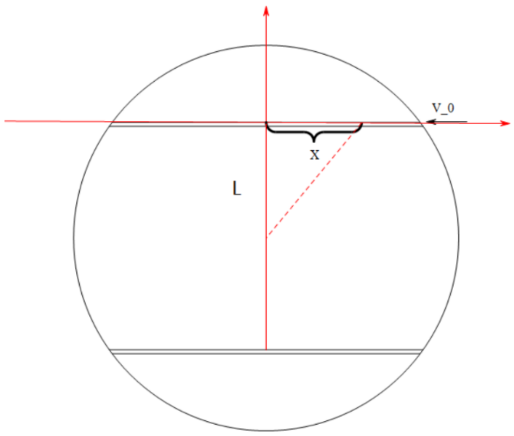
为了更加便于理解简谐振动与动力学相图的关系，我们可以看下面这道题目：

在一个质量 M，半径 R 的球体上，在一个直径面内对称地挖两条距球心 L 的光滑的平行隧道，将一个质量 m 的小球从 A 点以初速度 V_0 沿隧道释放，若要使得小球能够周期性回到 A 点，求 V_0-L 关系曲线并作图，并求曲线上各个点对应的周期 $T(V_0, L)$



这里我们主要是讨论相图在简谐振动中的应用，所以这里我们只求物体以 V_0 在球中运动的场景。

建立如图所示的坐标系：



则物体受到的力：

$$F=-\frac{GMm}{x^2+L^2}\left(\frac{\sqrt{x^2+L^2}}{R}\right)^3\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}$$

化简得：

$$F=-\frac{GMm}{R^3}\cdot x$$

则物体的运动方程：

$$m\ddot{x}=-\frac{GMm}{R^3}x$$

为了简便计算，记

$$w^2=\frac{GM}{R^3}$$

则物体的运动方程：

$$\ddot{x}+w^2x=0$$

则有

$$\begin{cases} x=A\cdot\cos(w\cdot t+\varphi) \\ v=-A\cdot w\cdot\sin(w\cdot t+\varphi) \end{cases}$$

代入初始条件 $t=0$ 时：

$$\begin{cases} x=\sqrt{R^2-l^2} \\ v=-v_0 \end{cases}$$

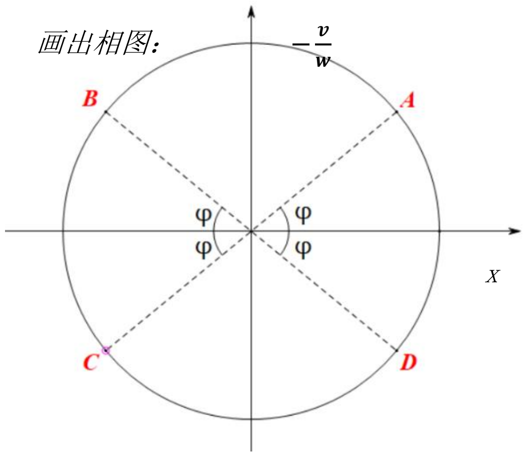
可以得到：

$$\tan\varphi=\frac{v_0}{w\sqrt{R^2-l^2}}$$

利用

$$x^2+\left(-\frac{v}{w}\right)^2=1$$

画出相图：



在相图上物体在球内的运动即为从 A 点到 B 点，再从 C 点到 D 点的过程

我们知道经过一个周期，运动的时间为：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

则在该运动中物体的时间：

$$t=T\cdot\frac{2\pi-4\varphi}{2\pi}$$

代入相关的数据可以得到物体在球中运动的总时间为：

$$t=\left[2\pi-4\arctan\left(v_0\sqrt{\frac{R^3}{GM\cdot(R^2-l^2)}}\right)\right]\cdot\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

除此之外，利用这种方法还可以解决 35 届中学生物理竞赛复赛的第二题，在这里就不再叙述了。

相图在力学之中的应用远远不局限于此，但我认为掌握了上述的几点之后，力学中剩下的有关相图的题目也就可以同样的解决了。

[参考文献]

1. 百度百科：相图 https://baike.baidu.com/item/%E7%9B%B8%E5%9B%BE/6308464?fr=aladdin
2. 引用图片：
   a) https://tieba.baidu.com/p/4817436753?red_tag=2578252871
   b) 几何画板