

問 1.19

$T_{p,q}$ を 1 回 適用 すると,

$$a : bq + aq + ap$$

$$b : bp + aq$$

すなわち $T_{p,q}$ を 適用 すると,

$$a : (bp + aq)q + (bq + aq + ap)q + (bq + aq + ap)p$$

$$b : (bp + aq)p + (bq + aq + ap)q$$

それぞれ展開 してまとめ直す。

$$\begin{aligned} a : & bpq + aq^2 + bq^2 + aq^2 + apq + bpq + apq + ap^2 \\ & = b(2pq + q^2) + a(2pq + q^2) + a(p^2 + q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b : & bp^2 + apq + bq^2 + aq^2 + apq \\ & = b(p^2 + q^2) + a(2pq + q^2) \end{aligned}$$

$$\text{よって } p' \leftarrow (p^2 + q^2), \quad q' \leftarrow 2pq + q^2$$

とすると $T_{p,q}$ を 2 回 適用 したものが $T_{p',q'}$ と同じになる。