問1.13

$$X(n) = \frac{(\varphi^n - \psi^n)}{\sqrt{5}}$$ とする。 $$\varphi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \quad \psi = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$$

$$Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2)$$

$n=0$ のとき

$$X(0) = \frac{1-1}{2} = 0 \quad Fib(0) = 0$$ より $X(0) = Fib(0)$

$n=1$ のとき

$$X(1) = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \quad Fib(1) = 1$$ より $X(1) = Fib(1)$

よって $n = 0, 1$ のとき $X(n) = Fib(n)$。

$X(n) = Fib(n)$, $X(n-1) = Fib(n-1)$ が成立すると仮定。

$$X(n+1) = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\varphi^n - \psi^n)(\varphi + \psi) + \varphi\psi^n - \varphi^n\psi}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} - \varphi\psi \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \cdot \frac{(1-\sqrt{5})}{2} \cdot \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

より、$X(n+1) = X(n) + X(n-1)$ が成立。

よって $n+1$ の時、$X(n+1) = Fib(n) + Fib(n-1) = Fib(n+1)$

よって、$X(n) = Fib(n)$

よって、$\mathrm{Fib}(n) = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$

$$\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} = \mathrm{Fib}(n) + \frac{\psi^n}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$\sqrt{5} = 2.436\cdots$ より $|(1-\sqrt{5})| < 2$

$$\left|\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right| < 1$$

$$\left|\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{\psi^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{2}$$

ここで $\dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} = \mathrm{Fib}(n) + \dfrac{\psi^n}{\sqrt{5}}$

$$\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \mathrm{Fib}(n) = \frac{\psi^n}{\sqrt{5}}$$

より差の絶対値が $\dfrac{1}{2}$ より小さくなるので
最も近い整数であるといえる。