Pro $x, y > 1$ dokažte:

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{y}{\sqrt{x^2-1}} \geq 2$$

Využijeme AG nerovnosti, která říká, že pro libovolnou dvojici kladných čísel a, b platí:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$
$$a + b \geq 2 \cdot \sqrt{ab}$$

Tohle už začíná připomínat naše zadání, zkusme dosadit následovně: $a = \frac{x}{\sqrt{y^2-1}}, b = \frac{y}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{y}{\sqrt{x^2-1}} \geq 2 \cdot \sqrt{ab}$$

Z toho vyplývá, že pokud je $\sqrt{ab} \leq 1$, tak jsme dokázali, že zadání platí.

—

Je teda $\sqrt{ab} \leq 1$?

$$\sqrt{ab} \leq 1$$
$$ab \leq 1$$
$$\frac{x \cdot y}{\sqrt{(x^2-1) \cdot (y^2-1)}} \leq 1$$
$$x \cdot y \leq \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$$
$$x^2 \cdot y^2 \leq (x^2-1)(y^2-1)$$
$$x^2 + y^2 \leq 1$$

ne není .... bruh moment

—

To vypadá dobře, ale ještě se musíme přesvědčit že splňujeme podmínku AG nerovnosti, t.j. a, b jsou kladná čísla:

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} > 0 \wedge \frac{y}{\sqrt{x^2-1}} > 0$$