Kouma s Ňoumou dostali tabulku o rozměrech $n \times n$, která byla vyplněna čísly následovně:

1	2	3	$\cdots$
2	2	3	$\cdots$
3	3	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Jaký je součet čísel v tabulce v závislosti na n? Výsledek zapište ve tvaru podílu dvou celých čísel.

Z obrázku se dá vyvodit, že součet všech čísel tabulky $n \times n$ (S_n), se dá definovat jako:

$$S_1 = 1$$
$$S_n = S_{n-1} + n \cdot (2n - 1)$$

Kde S_{n-1} je tabulka co do velikosti o jedna menší, n je nové číslo, které musíme do tabulky přidat a $(2n - 1)$ je jeho počet (= kolik nových políček se nám v tabulce objeví).

Vzhledem k tomu, že naše rekurentní formule je polynom druhého stupně, tak obecný vzorec bude polynom stupně třetího (prostě o jedna vyšší).

$$S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$$

Teď zbývá jednotlivé koeficienty (a, b, c, d) najít. To můžeme udělat pomocí soustavy rovnic. Budeme potřebovat 4 rovnice (protože máme 4 neznámé). Za n si postupně dosadíme třeba $1, 2, 3, 4$ a manuálně dopočítáme součet v tabulce. Pak už jen postupně řešíme soustavu.

$$S_1 = a + b + c + d = 1 \tag{1.1}$$
$$S_2 = 8a + 4b + 2c + d = 7 \tag{1.2}$$
$$S_3 = 27a + 9b + 3c + d = 22 \tag{1.3}$$
$$S_4 = 64a + 16b + 4c + d = 50 \tag{1.4}$$

$$(1.2 - 1.1) \qquad 7a + 3b + c = 6 \tag{2.1}$$
$$(1.3 - 1.2) \qquad 19a + 5b + c = 15 \tag{2.2}$$
$$(1.4 - 1.3) \qquad 37a + 7b + c = 28 \tag{2.3}$$

$$(2.2 - 2.1) \qquad 12a + 2b = 9 \tag{3.1}$$
$$(2.3 - 2.2) \qquad 18a + 2b = 13 \tag{3.2}$$

$$(3.2 - 3.1) \qquad a = \frac{2}{3} \tag{4.1}$$

$$a = \frac{2}{3} \tag{4.1}$$
$$b = \frac{9 - 12a}{2} = \frac{1}{2} \tag{3.1}$$
$$c = 6 - 7a - 3b = -\frac{1}{6} \tag{2.1}$$
$$d = 1 - a - b - c = 0 \tag{1.1}$$

Super! Máme koeficienty, teď je dosadíme do vzorce, a pokusíme se povytýkat $n$ka: $4n^3 + 3n^2 - n = n\left(4n^2 + 3n - 1\right) = n\left(4(n + 1)\left(n - \frac{1}{4}\right)\right) = n(n + 1)(4n - 1)$

$$S_n = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6} = \frac{n(n + 1)(4n - 1)}{6}$$