Vojtěch Křižan
5. E, GFPVM
A-I-1

$$a, b \in \mathbb{R}$$
$$x = a^2 + b = a + b^2$$
Jaké je nejmenší možné x?

Zkusme upravit zadanou rovnici. Buď využijeme kvadratický vzoreček přes diskriminant, anebo ji upravíme přímo:

$$\begin{aligned} a^2 + b &= a + b^2 \\ a^2 - b^2 + b - a &= 0 \\ (a+b)(a-b) + (b-a) &= 0 \\ (a+b)(a-b) + (-1)(a-b) &= 0 \\ (a+b-1)(a-b) &= 0 \end{aligned}$$

Tak či tak dostáváme rovnici v součinovém tvaru a s ní i 2 kořeny.

$$(a = b) \lor (a + b = 1)$$

Budeme se nyní snažit zjistit nejnižší možnou hodnotu x pro každou ze 2 větví.

1. Pokud $b = a$

$$x_1 = a^2 + b = a^2 + a$$

Naše parabola (funkce $f(a) = a^2 + a$) se otevírá směrem nahoru, protože kvadratický člen a^2 má kladný koeficient. Nejnižší bod takové paraboly je tím pádem v samotném vrcholu. Pro zjištění souřadnic vrcholu stačí převést funkci na vrcholový tvar doplněním na čtverec.

$$x_1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Vrchol je tedy umístěný v $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$. Tím pádem nejmenší možné x_1 je $-\frac{1}{4}$.

2. Pokud $b = 1 - a$

$$x_2 = a^2 + b = a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Analogicky doplníme na čtverec a zjišťujeme, že nejmenší možné x_2 je $\frac{3}{4}$. Tím pádem nejmenší možné $x = x_1 = -\frac{1}{4}$.