Vojtěch Křižan
4. E, GFPVM
B-I-2

Pro reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$$

Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3}$$

Začátek

Vezměme si první část podmínek ze zadání.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} &= \frac{b}{c+a} \\
a^2-b^2 &= bc-ac \\
(a+b)\cdot(a-b) &= c\cdot(b-a) \\
(a+b)\cdot(a-b)-c\cdot(b-a) &= 0 \\
(a-b)\cdot(a+b+c) &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{a = b \vee a+b+c = 0}$$

Takže pokud $a \neq b$, tak $a+b+c=0$.

Dosazení pokud $a \neq b$

Z $a+b+c=0$ vyplývá, že $c=-a-b$ a $b=-a-c$. Pomocí těchto vztahů můžeme zjednodušit jmenovatel.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3} \\
x &= \frac{a^3+b^3+c^3}{(-a)^3+(-b)^3+(-c)^3} \\
x &= -1
\end{aligned}$$

Takže pokud $a \neq b$, tak $x=-1$.

Vojtěch Křižan
4. E, GFPVM
B-I-2

Dosazení pokud $a = b$

Tady nemáme dostatečně informací pro určení x, tak zkusíme použít ještě druhou část první rovnice. Dosadíme za b a vychází nám kvadratická rovnice.

$$\frac{a}{b + c} = \frac{c}{a + b}$$
$$2a^2 - ca - c^2 = 0$$

Kvadratickou rovnici vyřešíme pomocí vzorce, kde kvadratický koeficient je 2, lineární koeficient je $-c$, a absolutní člen $-c^2$.

$$a = \frac{c \pm \sqrt{(-c)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-c^2)}}{2 \cdot 2} = \frac{c \pm 3c}{4}$$
$$a \in \left\{c, -\frac{c}{2}\right\}$$

To by nám mohlo stačit, pojďme postupně dosadit oboje hodnoty.

Dosazení pokud $a = b \land a = c$

Za b i c můžeme do výrazu dosadit a, a vychází nám další řešení.

$$x = \frac{a^3 + a^3 + a^3}{(a + a)^3 + (a + a)^3 + (a + a)^3} = \frac{1}{8}$$

Dosazení pokud $a = b \land a = -\frac{c}{2}$

Z $a = -\frac{c}{2}$ vyplývá $c = -2a$, a s tím se bude lépe počítat (není tam zlomek).

$$x = \frac{a^3 + a^3 + (-2a)^3}{(a - 2a)^3 + (a - 2a)^3 + (a + a)^3} = -1$$

Takže pokud $a = b$, tak $x \in \left\{-1, \frac{1}{8}\right\}$.

Finiš

Hodnoty, které může výraz nabývat jsou -1 a $\frac{1}{8}$.