Vojtěch Křižan
4. E, GFPVM
B-I-4

Rozhodněte, zda existuje pětice přirozených čísel

1. a, a, a, a, b $(a \neq b)$,
2. a, a, b, b, c $(a \neq b \neq c \neq a)$,

v níž je každé z těchto čísel dělitelem součtu každých tří ze zbylých čtyř čísel.

První úkol

Nejprve převedeme češtinářskou omáčku do matematické podoby. Každé z čísel (takže a a b) má být dělitelem součtu každých tří ze zbylých čtyř čísel. Tohle jsou všechny možnosti:

$$\frac{a+a+a}{a} \in \mathbb{N} \wedge \frac{a+a+b}{a} \in \mathbb{N} \wedge \frac{a+a+a}{b} \in \mathbb{N}$$

$\frac{a+a+a}{a} \in \mathbb{N}$ nám ale nic neříká, protože tento výrok platí pro libovolné a:

$$\frac{a+a+a}{a} \in \mathbb{N}$$
$$\frac{3 \cdot \cancel{a}}{\cancel{a}} \in \mathbb{N}$$
$$3 \in \mathbb{N}$$

Takže nám zbývá: $\frac{a+a+b}{a} \in \mathbb{N} \wedge \frac{a+a+a}{b} \in \mathbb{N}$.

Zkusme za a dosadit 1. Všechna čísla jsou dělitelem jedničky, tím pádem bude $\frac{a+a+b}{a} \in \mathbb{N}$ určitě platit. Zbývá tedy splnit poslední podmínku:

$$\frac{a+a+a}{b} \in \mathbb{N}$$
$$\frac{1+1+1}{b} \in \mathbb{N}$$
$$\frac{3}{b} \in \mathbb{N}$$

Takže pro $a = 1$ musí být b rovno násobku tří, třeba zrovna 3. Tím pádem ano, existuje pětice přirozených čísel které splňují první úkol.

Vojtěch Křižan
4. E, GFPVM
B-I-4

Drsný Důkaz Dělitenosti (DDD)

Nechť $a, n, x \in \mathbb{N} \land x/n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{a+x}{n} \in \mathbb{N}$$
$$\frac{a}{n} + \frac{x}{n} \in \mathbb{N}$$

Když přičteme k libovolnému číslu (tady $\frac{a}{n}$) přirozené číslo (tady $\frac{x}{n}$), tak se nezmění přirozenost původního čísla ($\frac{a}{n}$), tím pádem můžeme $\frac{x}{n}$ vyškrtnout. Zůstává nám:

$$\frac{a}{n} \in \mathbb{N}$$

Takže **číslo** $(a + x)$ **je dělitené** n **právě tehdy když je** a **dělitené** n.

Druhý úkol

Zkusme začít podobnou strategií i u úkolu druhého. Nejprve si rozepišme zadání. Všechna čísla v množině M_n jsou dělitená n.

$$M_a = \{a + b + b, b + b + c, a + b + c\} = \{a + 2b, 2b + c, a + b + c\}$$
$$M_b = \{a + a + b, a + a + c, a + b + c\} = \{2a + b, 2a + c, a + b + c\}$$
$$M_c = \{a + a + b, a + b + b\} = \{2a + b, a + 2b\}$$

Podle DDD můžeme naše množiny zredukovat. Pokud je v množině M_x prvek ve formě $(a + x)$, tak ho můžeme nahradit a.

$$M_a = \{a + 2b, 2b + c, a + b + c\} = \{2b, 2b + c, b + c\}$$
$$M_b = \{2a + b, 2a + c, a + b + c\} = \{2a, 2a + c, a + c\}$$

DDD zopakujeme ještě jednou. Zde například u M_a vidíme, že uvnitř je $2b$, tím pádem $2b$ je dělitené a, takže můžeme $(2b + c)$ vyměnit za c.

$$M_a = \{2b, 2b + c, b + c\} = \{2b, c, b + c\}$$
$$M_b = \{2a, 2a + c, a + c\} = \{2a, c, a + c\}$$

Do třetice použijeme DDD.

$$M_a = \{2b, c, b + c\} = \{2a, c, b\}$$
$$M_b = \{2a, c, a + c\} = \{2a, c, a\}$$

Tady už můžeme vidět, že a má být dělitené b, a zároveň b má být dělitené a. Tahle situace může nastat pouze když $a = b$. V zadání je ale napsané $a \neq b$, tím pádem pětice čísel, která by splňovala podmínky druhého úkolu, neexistuje.