Vojtěch Křižan
4. E, GFPVM
B-I-1

Kolik neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, ..., 9\}$ má součet prvků dělitelný třemi?

Úvod

Máme množinu $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, hledáme počet neprázdných podmnožin, kde součet prvků je dělitený třemi, tohle hledané číslo si označíme jako x.

Ohraničení problému

Nejprve zkusíme určit horní hranici n. Počet jedinečných podmnožin v množině o n prvcích je 2^n (každý prvek buď v podmnožině je, nebo není). Množina A má 10 prvků, tím pádem počet všech podmnožin je roven $2^{10} = 1024$; n nemůže být větší.

Vzhledem k tomu, že se bavíme o *počtu* něčeho, tak n musí být nezáporné celé číslo. Tím pádem dostáváme:

$$n \in \mathbb{Z} \land 0 \leq n \leq 1024$$

Dělitelnost (nejen) třemi

Všechna čísla z množiny A mají po dělení číslem 3 zbytek, a to buď 0, 1, nebo 2. Takže můžeme množinu rozsekat na 3 díly následovně.

$$A_0 = \{0, 3, 6, 9\}$$
$$A_1 = \{1, 4, 7\}$$
$$A_2 = \{2, 5, 8\}$$

Když máme nějaké číslo a přičteme k němu číslo z A_0, tak se zbytek nezmění. Takže čísla z A_0 můžeme přidávat a oddělávat jak se nám zachce, a dělitelnost 3 výsledného souču prvků se nezmění. Počet podmnožin A_0, kde součet prvků je dělitelný 3 je roven počtu všech podmnožin:

$$x_{A_0} = 2^4 = 16$$

Zbylé čísla dáme do A':

$$A' = A - A_0 = A_1 + A_2 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

Sudoprvkové podmnožiny A'

Pokud chceme aby součet dvou čísel z množiny A' byl dělitelný 3. Musíme vzít jedno číslo, patřící do množiny A_1 a druhé, co patří do množiny A_2. Pro dvouprvkovou množinu je těhle možností 9 (pro každé ze 3 čísel z množiny A_1 existují 3 možnosti z množiny A_2).

Pro čtyřprvkovou množinu je možností taky 9 (pro každou dvouprvkovou množinu z předchozí věty existuje právě jedna čtyřprvková množina, která nemá s tou dvouprvkovou nic společného).

Pro šestiprvkovou a bezprvkovou množinu je možnost pouze 1.

Celkový počet podmnožin A' se sudým počtem prvků a se součtem dělitelným 3 je:

$$x_{A'_1} = 9 + 9 + 1 + 1 = 20.$$

Lichoprvkové podmnožiny A'

Nesmíme však zapomenout ještě na podmnožiny s lichým počtem prvků, jejichž součet je dělitelný 3. Ty existují právě 2, a to: $\{1, 4, 7\}$ a $\{2, 5, 8\}$.

$$x_{A'_2} = 2$$

Finále

Celkový počet podmnožin A', s prvkovým součetem dělitelným 3, je roven $x_{A'} = x_{A'_1} + x_{A'_2} = 20 + 2 = 22$

Vzhledem k tomu že množiny z A_0 a A' můžeme kombinovat jak chceme, tak výsledné x bude popsáno součinem x_{A_0} a $x_{A'}$. Jen však nesíme zapomenout odečíst jedničku (prázdná množina).

$$x = x_{A_0} \cdot x_{A'} - 1 = 16 \cdot 22 - 1 = 351$$

Ověření

Naše vypočítané x lze samozřejmě ověřit algoritmicky v TypeScriptu:

```
const subsets: number[][] = [[]];
let x = 0;

for (const num of [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]) {
  subsets.forEach((subset) => {
    subsets.push([...subset, num]);
  });
}

subsets.forEach((subset) => {
  const sum = subset.reduce((a, b) => a + b, 0);
  if (sum % 3 === 0) x++;
});

console.log(x - 1); // 351
```