



# Proyecto Final de Control

Alannah Esther Castro Pino  
ae.castro10@uniandes.edu.co  
Ingeniería Química  
201613623

Danna Milena Marín Mena  
dm.marin11@uniandes.edu.co  
Ingeniería Química  
201615476

Valerie Parra Cortés  
v.parrac@uniandes.edu.co  
Ingeniería Química  
201619703

## I. INFORME

### A. Modelo matemático

$$\tau = rF \sum \tau = I\alpha$$

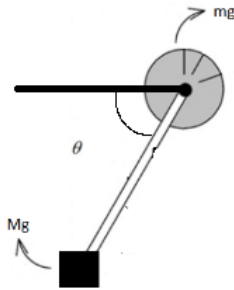


Fig. 1. Imagen del sistema

$m$  : barra

$M$  : motor

El centro de gravedad está desplazado

$$\tau = r * F$$

$$\sum \tau = I * \alpha$$

$$\tau_m = k \text{Sen}(\theta(t))$$

$$\tau_M = Mg \text{Sen}(\theta(t))$$

$$\tau_g = rF_M$$

Y dado que el momento de inercia es:

$$I = \sum m_i (r_i)^2$$

El sistema queda definido:

$$\sum \tau - B\theta'(t) = I\alpha$$

$$\tau_M + \tau_m + \tau_g - B\theta'(t) = I\theta''(t)$$

$$-Mg \text{Sen}(\theta(t)) + k \text{Sen}(\theta(t)) + rF_M - B\theta'(t) = I\theta''(t)$$

$$Mg \text{Sen}(\theta(t)) - k \text{Sen}(\theta(t)) + B\theta'(t) + I\theta''(t) = rF_M$$

donde B es el coeficiente de fricción. En el punto de equilibrio:

$$\theta_0 = 0^\circ$$

$$F_M = A$$

Seguidamente se linealiza por Taylor y se obtiene:

$$rF_M = k \text{Cos}(0^\circ) \Delta\theta(t) + B\Delta\theta'(t) + I\Delta\theta''(t)$$

Ahora con Laplace:

$$rF_M(s) = k \text{Cos}(0^\circ) \Delta\theta(s) + B\Delta\theta(s)s + I\Delta\theta(s)s^2$$

$$\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta F_M(s)} = \frac{r}{Is^2 + Bs + k}$$

### B. Identificación del sistema

Para iniciar la identificación del sistema inicialmente se caracterizó el potenciómetro. Para ello se realizó una regresión lineal para definir el comportamiento de la posición angular del aeropéndulo en función del potencial, obteniendo la siguiente relación lineal:

$$\theta = 0.2611V - 9.4249$$

Posteriormente se procedió a encontrar la función de transferencia experimental partiendo de los valores correspondientes a  $\theta$  y V. Se obtuvo una aproximación a una función de transferencia de segundo orden como se muestra en la Fig. 3. Por otro lado, para algunos métodos de sintonización era más cómodo aproximar dicha función a una función de primer orden con retardo, por lo que se realizó una segunda aproximación cuyos resultados se muestran en la Fig. 2. La función de transferencia que aproxima lo mostrado en la Fig 3 se muestra en la ecuación (2), mientras que la función de transferencia que aproxima a 2 es la ecuación (1).

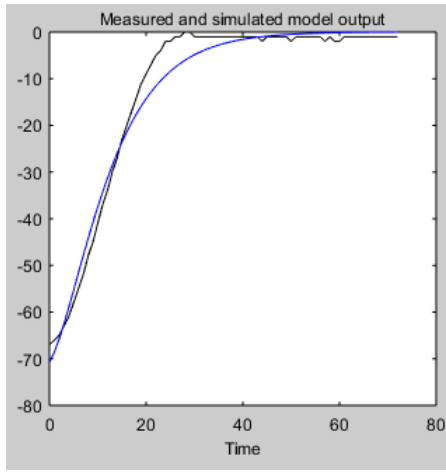


Fig. 2. Función de transferencia aproximada a un sistema de primer orden con retardo.

Para la aproximación a un sistema de primer orden con retardo se obtuvo la función de transferencia en la ecuación (1):

$$G(s) = \frac{0.0027}{1 + 5.801s} \cdot e^{-3.336s} \quad (1)$$

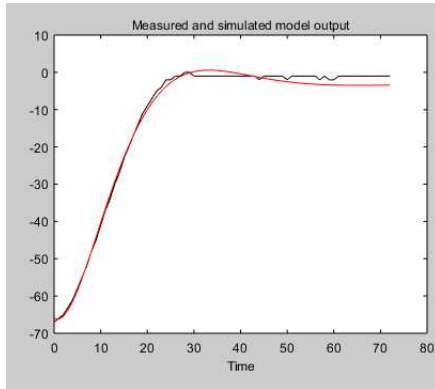


Fig. 3. Aproximación a una función de transferencia de segundo orden

$$G(s) = \frac{k_p}{1 + 2\zeta T_w s + T_w^2 s^2} \quad (2)$$

Donde  $k_p = -0.3912$ ,  $T_w = 4.3605$  y  $\zeta = 0.81431$

Al comparar ambas funciones de transferencia se pudo observar un mejor ajuste al sistema real para un sistema de segundo orden. Sin embargo una aproximación a un sistema de primer orden con retardo nos permite hacer sintonizaciones al sistema que con la de segundo orden no resulta tan sencillo.

### C. Diseño de controladores

Se llevaron a cabo simulaciones con dos métodos de sintonización diferentes para control P y dos métodos de sintonización para control PID.

Para los controladores PID se realizaron sintonizaciones con el método de Tyreus - Luyben en el cual se usan los parámetros de la tabla I y  $P_{cr}$  corresponde al periodo crítico del sistema y con el método de Ziegler - Nichols para malla cerrada, donde  $k_{cr}$  es la ganancia crítica (hay oscilaciones sostenidas en el sistema). Por otro lado, para los controladores proporcionales se realizaron sintonizaciones con el método de Ziegler-Nichols para malla cerrada y el método de la curva de reacción, para este último se utilizó el sistema aproximado de primer orden con retardo.

TABLE I  
CONSTANTES DE CONTROLADOR DEL MÉTODO DE SINTONIZACIÓN DE TYREUS - LUYBEN.

Controlador	$k_c$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5k_{cr}$	-	-
PI	$k_{cr}/3.2$	$2.2P_{cr}$	-
PID	$k_{cr}/2.2$	$2.2P_{cr}$	$P_{cr}/6.3$

TABLE II  
CONSTANTES DE CONTROLADOR DEL MÉTODO DE SINTONIZACIÓN DE ZIEGLER - NICHOLS.

Controlador	$k_c$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5k_{cr}$	-	-
PI	$0.45k_{cr}$	$P_{cr}/1.2$	-
PID	$0.6k_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Una vez obtenidos los parámetros, se procedió a encontrar las funciones de transferencia, asumiendo controladores ideales que se modelan mediante la siguiente expresión.

$$C(s) = k_c \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

1) *Control proporcional: Curva de reacción* Se halló el valor de  $K_c = K_p = 1.74$  por el método de curva de reacción obteniendo los resultados de las figuras 4 y 5.

TABLE III  
CONSTANTES DE CONTROLADOR DEL MÉTODO DE SINTONIZACIÓN DE CURVA DE REACCIÓN

Controlador	$k_c$	$T_i$	$T_d$
P	T/L	$\infty$	0
PI	$0.9T/L$	$L/0.3$	0
PID	$1.2T/L$	$2L$	$0.5L$

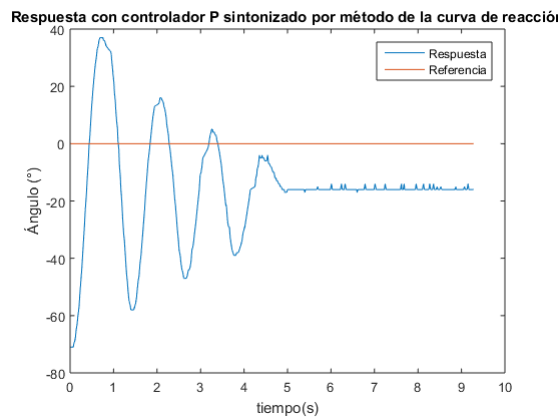


Fig. 4. Respuesta del sistema con control proporcional para el método curva de reacción

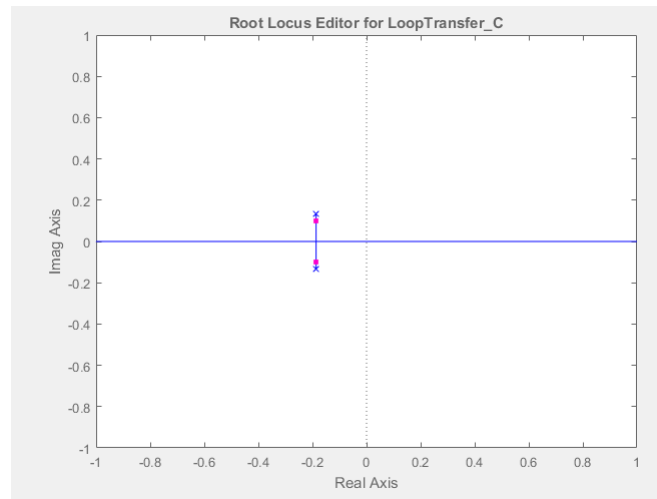


Fig. 7. Lugar de las raíces para el controlador proporcional implementado

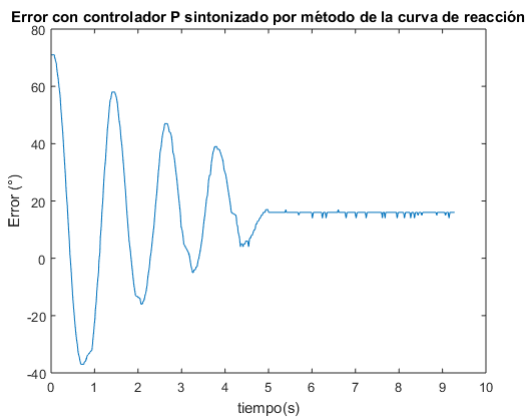


Fig. 5. Error del sistema con control proporcional para el método curva de reacción

Los valores del error en estado estacionario, overshoot y tiempo de establecimiento son  $16^\circ$ , 53% y 5,002s respectivamente.

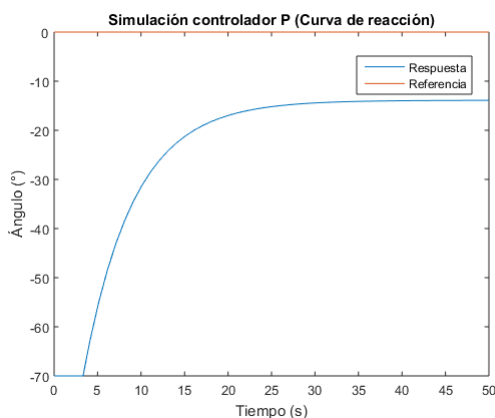


Fig. 6. Simulación del controlador P (curva de reacción)

El lugar de las raíces sería

Como vemos, los polos del sistema tienen componente imaginario a partir del lugar de las raíces, con lo que se puede notar que el sistema oscilará a valores grandes de  $K_p$ , con un factor de amortiguamiento cercano a 1, indicando que el sistema eventualmente se estabilizará.

#### Ziegler-Nichols

Para encontrar las condiciones críticas primero variamos la ganancia del sistema para hallar la  $k_{cr}$  y se estimó que era aproximadamente 5.6. El comportamiento oscilante obtenido con esta constante se aprecia en la Fig. 8. Adicionalmente se estimó que  $P_c = 0.87$ .

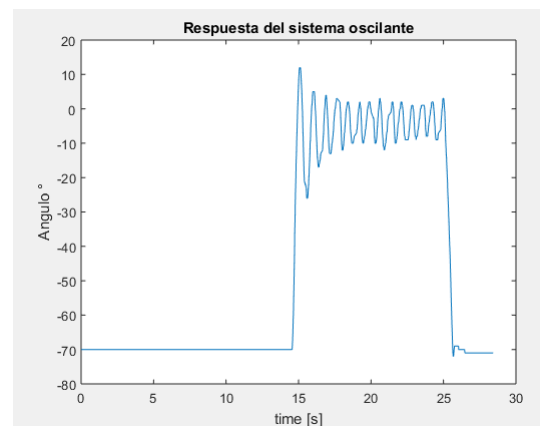


Fig. 8. Sistema Oscilante

Con las constantes críticas obtenidas, usamos la Tabla 1 para controlador P llegamos a que  $K_c = 2.86$  y, por lo tanto,  $K_p = 2.86$ . La respuesta del sistema y el error con el método de Ziegler-Nichols se encuentra en las figuras 9 y 10.

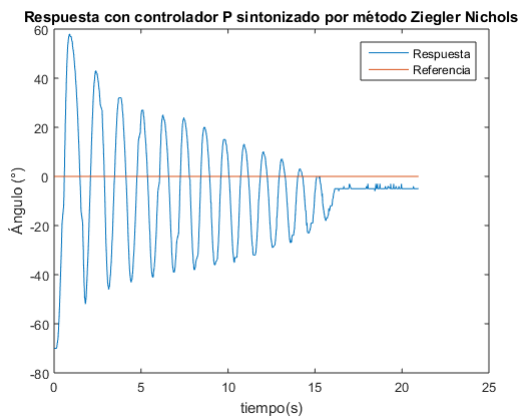


Fig. 9. Respuesta del sistema con control proporcional para el método Ziegler Nichols

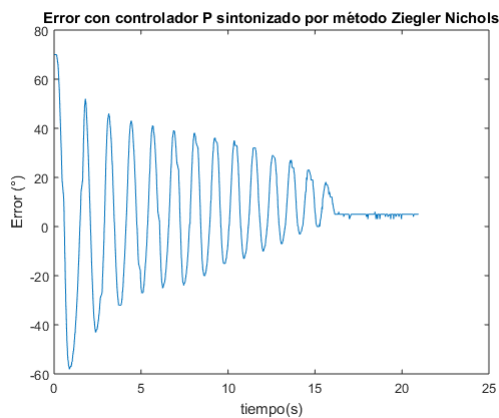


Fig. 10. Error del sistema con control proporcional para el método Ziegler Nichols

Los valores del error en estado estacionario, overshoot y tiempo de establecimiento son  $15^\circ$ ,  $63\%$  y  $16,13$  s respectivamente.

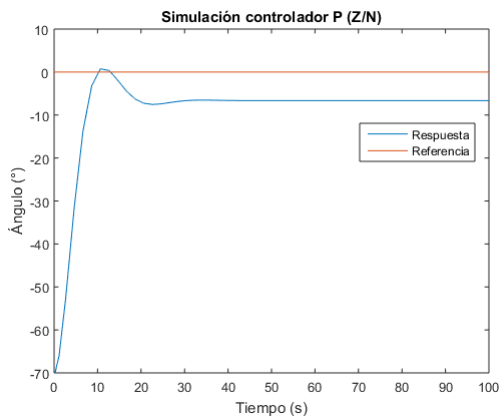


Fig. 11. Simulación del controlador P (Ziegler-Nichols)

Como vemos, se obtuvieron mejores resultados controlando el sistema con el método de la curva de reacción ya que el

sistema presenta menos oscilaciones, un tiempo de establecimiento 3 veces menor, y un error mayor sólo por  $1^\circ$ .

En cuanto el lugar de las raíces del sistema implementado, es como se muestra a continuación. Como vemos se parece mucho al lugar de las raíces del sistema anterior, pero el  $\zeta$  es más pequeño por lo que oscila más, coherente con el resultado experimental.

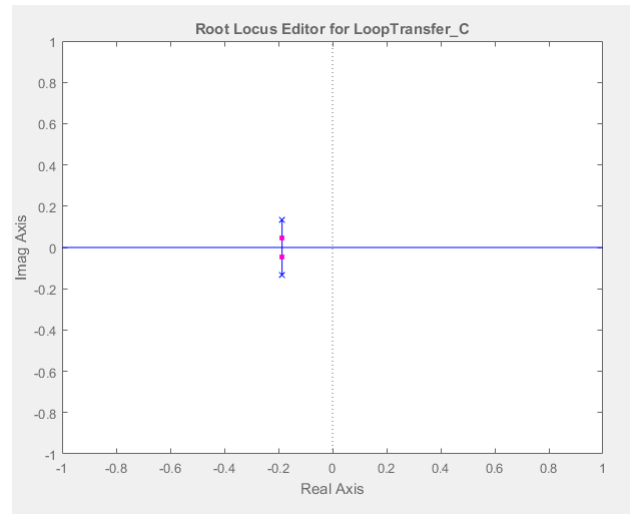


Fig. 12. Lugar de las raíces para el segundo controlador implementado

2) *Control PID:* Para el PID con Tyreus-Luyben se tiene un  $K_c = 3.41$ ,  $T_i = 1.914$  &  $T_d = 0.138$ , es decir que  $k_p = 3.41$ ,  $k_i = 1.78$  &  $k_d = 0.47$ , .

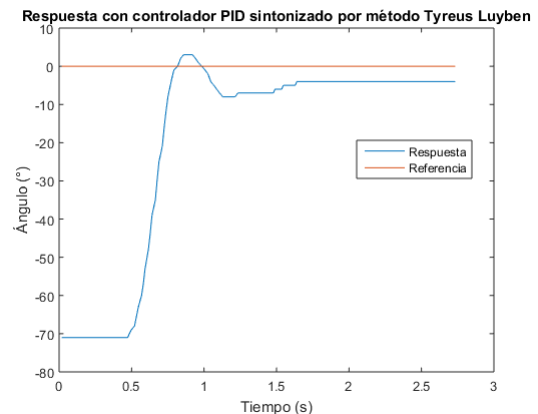


Fig. 13. Respuesta del sistema con control PID y el método de sintonización Tyreus - Luyben

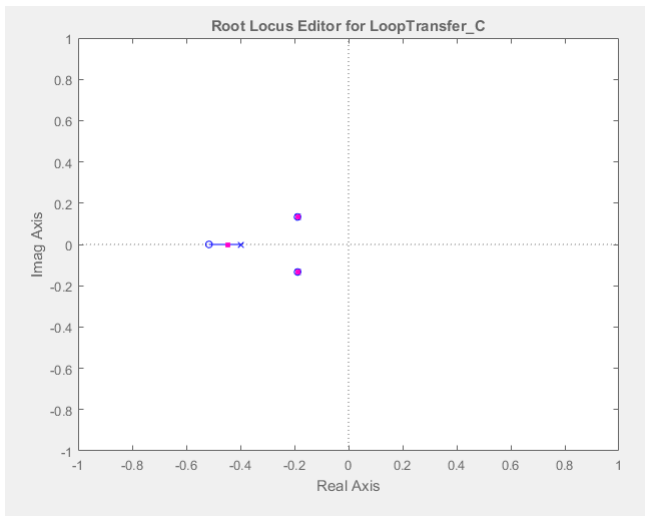


Fig. 15. Lugar de las raíces para el sistema con PID implementado

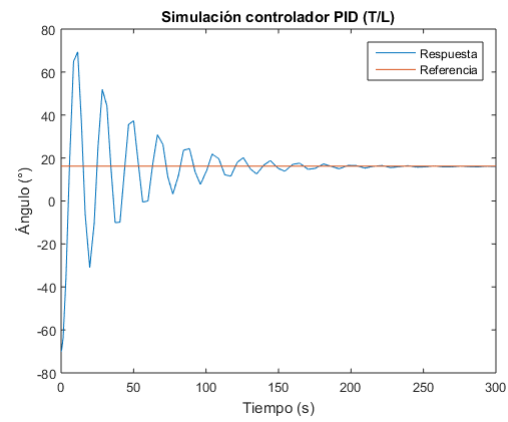


Fig. 16. Simulación del controlador PID (Tyreus-Luyben)

Al utilizar el segundo método (Ziegler-Nichols), consignado en la tabla , se obtiene la constante para el controlador P de  $K_c = 3.75$  y para el controlador PID,  $K_c = 4.5$ ,  $T_i = 0.435$  &  $T_d = 47.058$ . es decir que  $k_p = 4.5$ ,  $k_i = 0.5$  &  $k_d = 10.35$ .

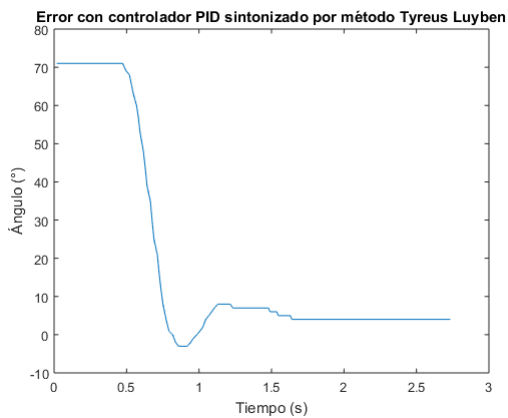


Fig. 14. Error del sistema con control PID y el método de sintonización Tyreus - Luyben

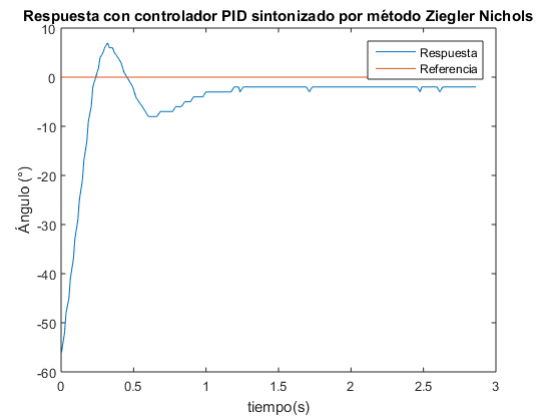


Fig. 17. Respuesta del sistema con control PID y el método de sintonización Ziegler - Nichols

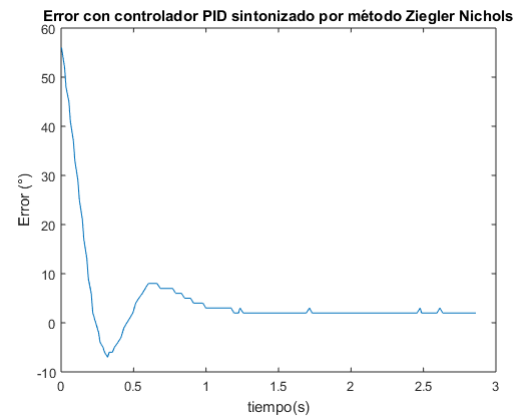


Fig. 18. Error del sistema con control PID y el método de sintonización Ziegler - Nichols

El lugar de las raíces para este sistema PID es el que sigue, como vemos se eliminan los polos inestables del sistema, lo que quiere decir el sistema queda limitado y aunque el sistema ya no es inestable, queda limitada la velocidad del sistema-Adicionalmente, vemos como  $\zeta$  es siempre 1, sin embargo esto no se ve en el sistema real donde a pesar de que las oscilaciones son limitadas están presentes,

El lugar de las raíces del sistema obtenido fue el que se presenta a continuación, como vemos el lugar de las raíces queda muy limitado con casi tres eliminaciones directas polo cero un factor de amortiguamiento casi constante y una velocidad de respuesta casi constante.

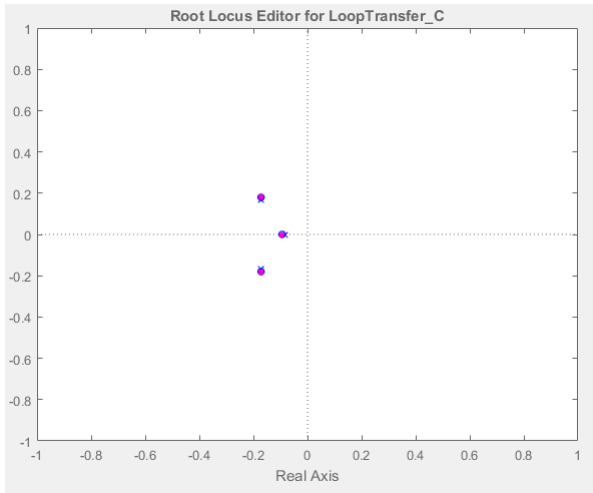


Fig. 19. Lugar del segundo PID implementado

Fig. 20. Simulación del controlador PID (Ziegler-Nichols)

3) *Análisis de la respuesta de los controladores:* Para el controlador P sintonizado por el método de Ziegler-Nichols se observó un overshoot de 63%, un error en estado estacionario de 5 y un tiempo de establecimiento de 16.13 s como se muestra en las figuras 9 y 10 y para el controlador P sintonizado por el método de la curva de reacción se tiene un overshoot del 53%, un error en estado estacionario de 16 y un tiempo de establecimiento de 5.002 s. Seguidamente para el caso del controlador PID sintonizado por el método de Tyreus-Luyben se obtuvo un error en estado estacionario de 4 (Ver figura 14), un tiempo de establecimiento de 1.64 s y un overshoot del 7% (Ver figura 13); y finalmente para el caso del controlador PID sintonizado por el método de Ziegler-Nichols se obtuvo un overshoot del 12.5%, un error en estado estacionario de 2 y un tiempo de establecimiento de 1.193 s (Ver figuras 17 y 18). Con esto se observa que los controladores PID reducen notablemente el overshoot gracias al parámetro derivativo que, a su vez, disminuye el tiempo de establecimiento.

4) *Funciones a minimizar:*

$$\begin{aligned} P_{cr} &= 31.2006 \\ PID_{LT} &= 4.792 \\ P_{ZN} &= 37.339 \\ PID_{ZN} &= 7.0079 \end{aligned}$$

Como vemos el método que mejor resultados nos arroja de los métodos utilizados es un  $PID_{LT}$ , ya que:

1. minimiza la función de error propuesta en la guía.

2. Es la que presenta menor overshoot y aunque no presenta el menor tiempo de establecimiento ni el menor  $e_{ss}$ , sólo el overshoot presenta un peso considerable respecto a las otras variables de desempeño.

Aquí cabe aclarar, que aunque el modelo debería tener error 0 gracias a la acción del integrador, debido a que este es sólo una aproximación a la realidad y no se termina de ajustar a la misma, el error es diferente de 0.

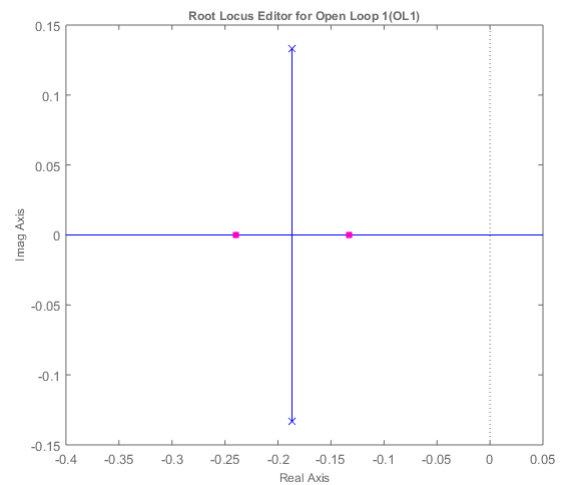


Fig. 21. Lugar de las raíces de la función de transferencia hallada

5) *Análisis con el lugar de las raíces de la simulación:* Como vemos en el lugar de las raíces, nuestro sistema puede oscilar ya que sus polos tienen parte imaginaria, en estos lugares el  $\zeta < 1$ . Adicionalmente el sistema a una ganancia no muy grande se puede volver inestable ya que las raíces se irían al lado derecho del plano complejo. Por otro lado, tenemos la ventaja de que el sistema es de fase no mínima, entonces se le podrá hacer análisis de Bode como se muestra en la Fig. 22. Vemos en el diagrama de Bode como el Margen de ganancia es de 8.15 dB, si aumentamos la ganancia más de esto, nuestro sistema será inestable. Sin embargo el margen de fase es infinito por lo que el sistema puede retrasarse o adelantarse libremente sin que se ponga en riesgo su estabilidad.

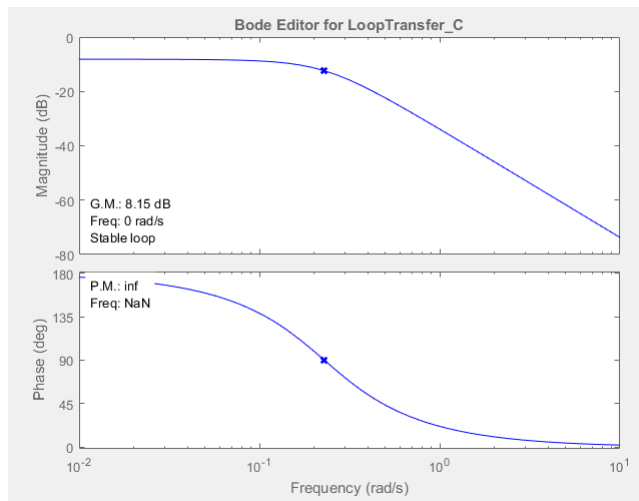


Fig. 22. Diagrama de Bode del sistema

#### D. Conclusiones

- 1) EL método de sintonización que mejor resultados nos arrojó fue el método de Ziegler-Nichols. Esto se corrobora con la función que nos dieron para minimizar.
- 2) Como se esperaba, el controlador PID disminuye notablemente el  $e_{ss}$ ,  $t_s$ , &  $\%OV$  comparado con el controlador P gracias a la acción derivativa e integral.
- 3) No se puede modelar el sistema de manera exacta debido a que éste **no es lineal**, por lo que debemos tener siempre en cuenta que nuestra función modela mejor el sistema cerca al punto de operación escogido, en este caso cuando el péndulo está totalmente horizontal.

#### E. ¿Qué aprendí?

- 1) Danna Milena Marín Mena: Aprendí a desarrollar un modelo aproximado para un sistema real, reforzando los temas de linealización que se ven desde principios del semestre. Además de familiarizarme con los métodos de sintonización, cuales son pertinentes a implementar y como hacerlo; y finalmente, la importancia de implementar un controlador para mejorar las variables de desempeño del sistema.
- 2) Alannah Esther Castro Pino: Aprendí a sintonizar controladores partiendo de variables experimentales. Además, logré identificar la importancia de la acción integral y derivativa en un controlador frente a alteraciones en el sistema aeropéndulo y pude reforzar mis conocimientos en temáticas como linealización y transformadas de Laplace y aplicarlos en el desarrollo del proyecto.
- 3) Valerie Parra Cortés: Aprendí a analizar diagramas de Bode y lugar de las raíces, reforcé los conocimientos matemáticos para linealizar funciones y comprendí porque dichas aproximaciones como funcionan cerca de

un punto de operación. Por otro lado, aprendimos 2 métodos nuevos de sintonización.

#### F. ¿Qué fue lo más difícil del desarrollo del proyecto?

- 1) Danna Milena Marín Mena: Lo más difícil del proyecto resultó ser el montaje del circuito y su ejecución dado que se tuvieron algunos inconvenientes para fijar correctamente la pieza de rotación al eje dado que esta se movía durante las ejecuciones y perturbaba los datos obtenidos.
- 2) Alannah Esther Castro Pino: Lo más difícil en el desarrollo del proyecto fue la construcción del circuito y su aplicación en la ejecución del proyecto pues se dañó una de las partes y lograr identificar el problema nos tomó mucho tiempo.
- 3) Valerie: Lo más difícil del proyecto fue el ensamblaje del circuito, ya que al principio uno de los transistores se encontraba dañado y tardamos bastante en notarlo. Además, en la parte mecánica, el potenciómetro no rotaba siempre con el brazo y se perdía la medida del ángulo con el potenciómetro.

#### REFERENCES

uno Martín Ballesteros, Angel. Del Río Carbajo, Marío. Control de posición de un Balancín con arduino.