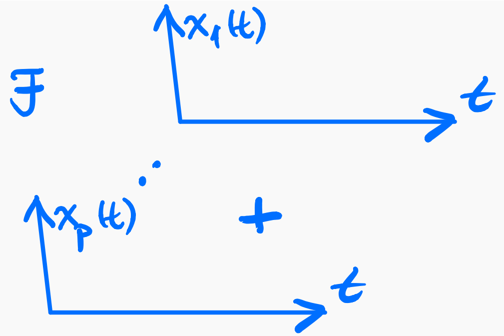
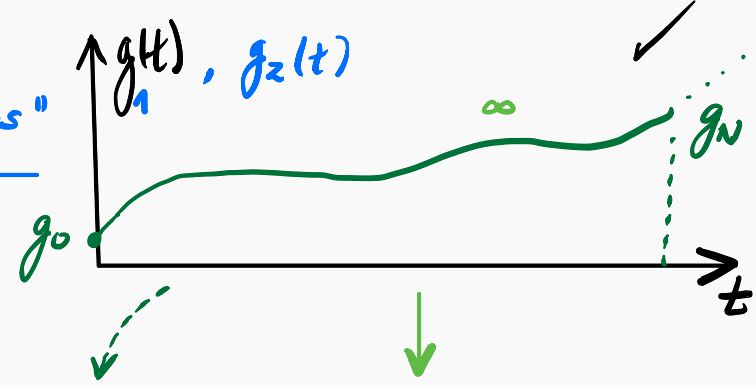


"decompos"



Análise de séries temporais

sinais

Série de Fourier

técnica

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$ N pontos

V.C.Parro - vparro@maua.br

18 de fevereiro de 2021

$g_1(t) \longrightarrow$ palavra$_1$

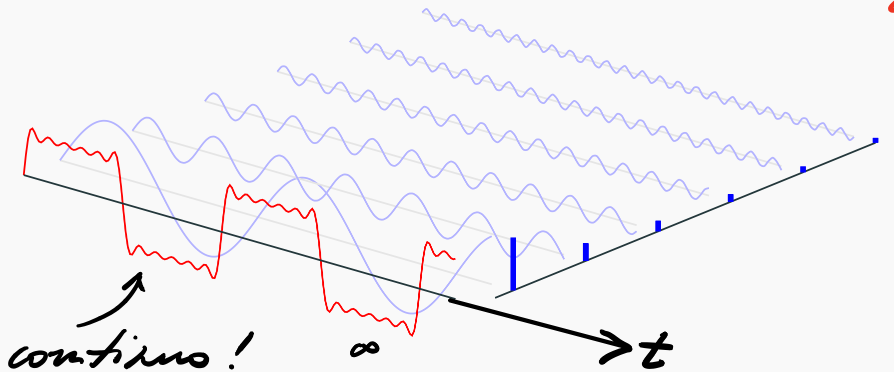
$g_2(t) \longrightarrow$ palavra$_2$

$$\Longrightarrow g_1(t) = \sum_{p=1}^{P} c_p \, x_p(t) \longleftarrow \text{formal}$$

análise / síntese

Sumário

Sinais contínuos [1]



voz

contínuo

discreto

7x

discreto

contínuo

Q_1

Q_2

Figura 1: Sinais contínuos vistos da perspectiva do sinal em vermelho e sinais discretos vistos da perspectiva do sinal em azul.

[1] https://tex.stackexchange.com/questions/127375/replicate-the-fourier-transform-time-frequency-domains-correspondence

Sinais discretos

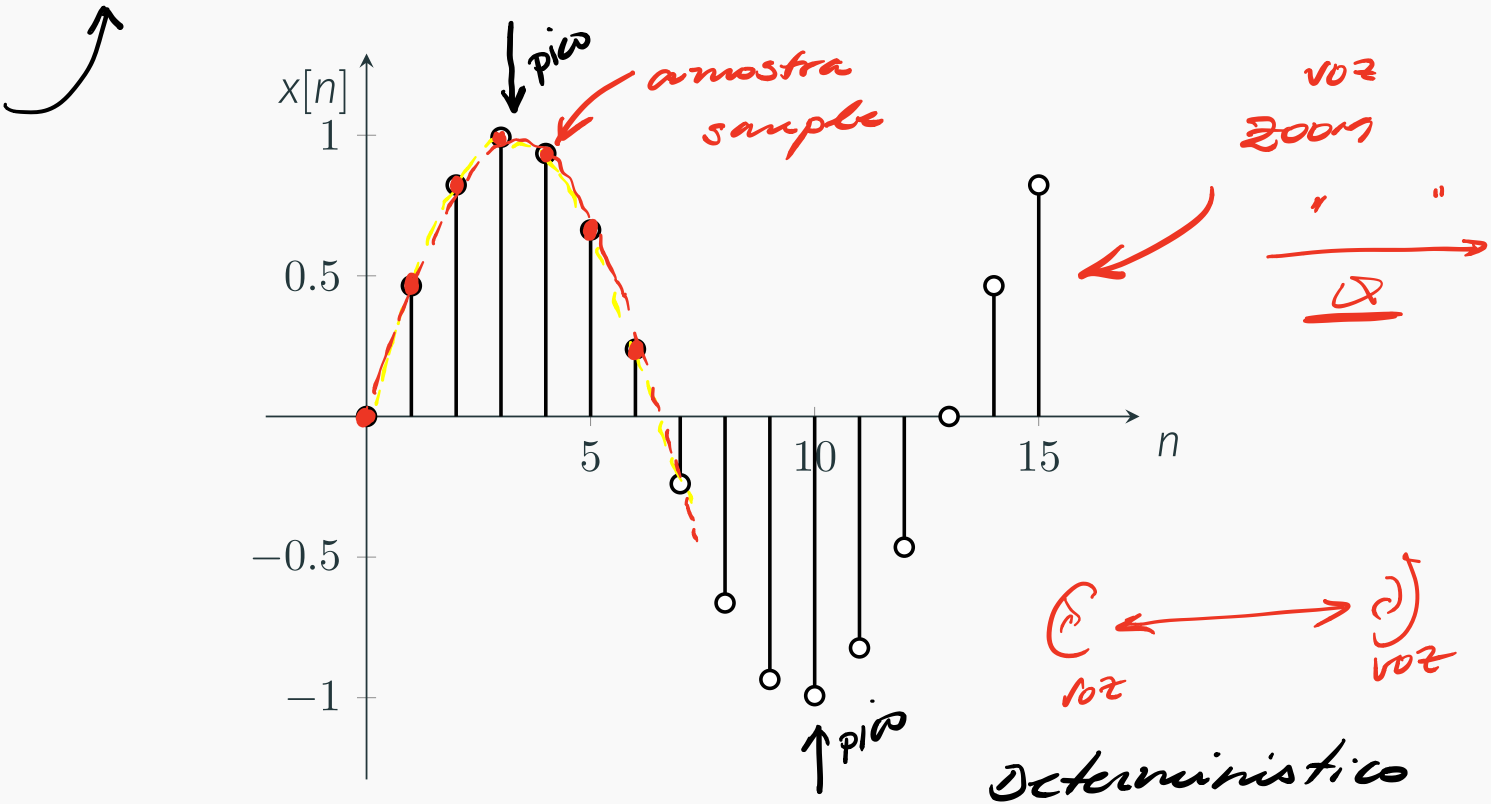
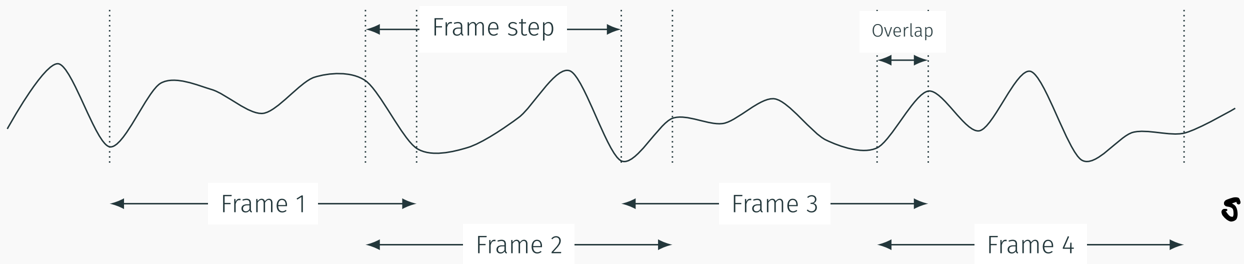


Figura 2: Sinal senoidal amostrado - discreto.

Sinais randômicos [2]

· tendência
· chance
· probabilidade



sistema SW

Figura 3: Sinal randômico.

média móvel

[2] https://tex.stackexchange.com/questions/366223/drawing-random-signal-shape-in-tikz/367243#367243

Sinais randômicos

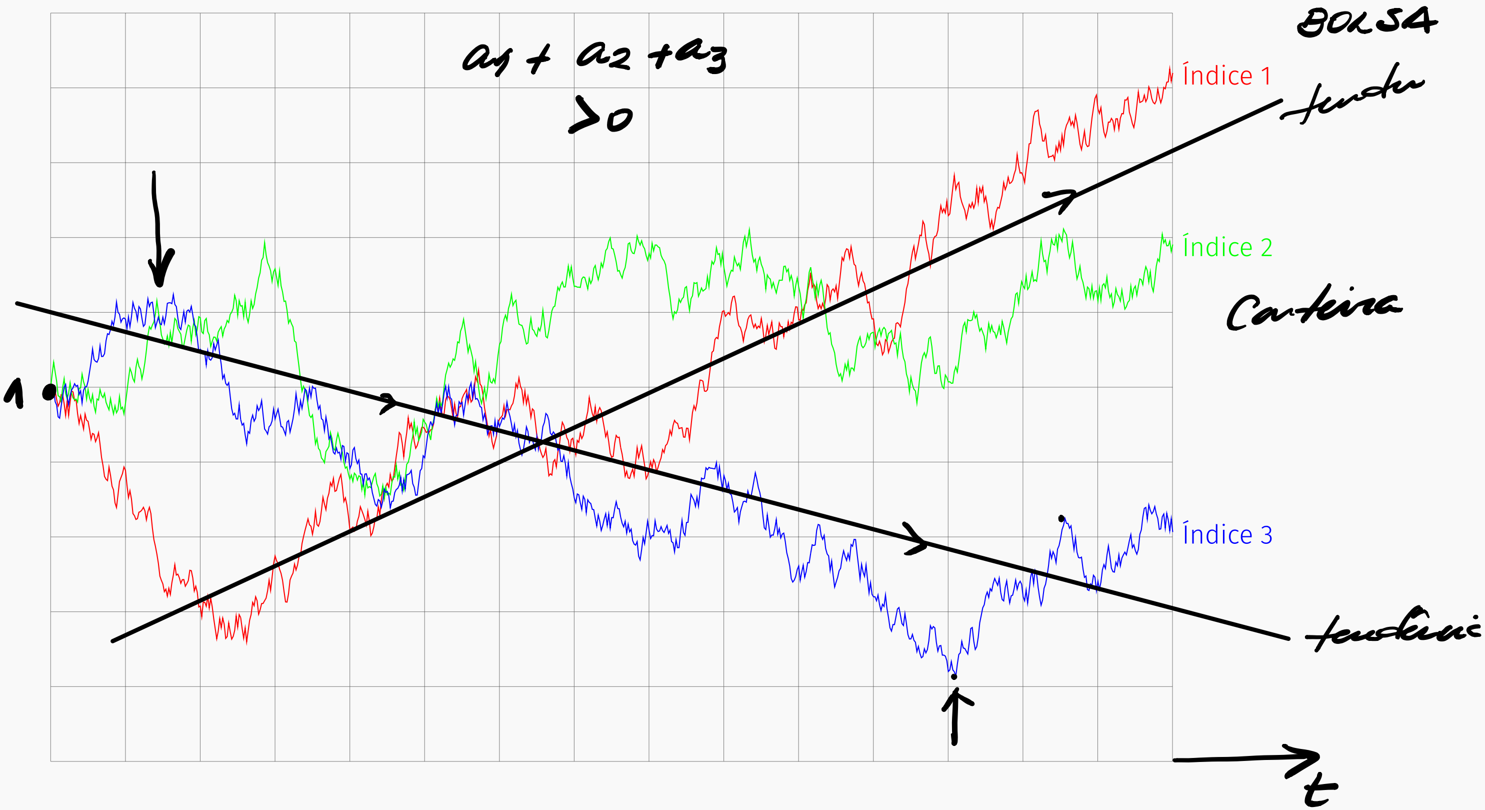
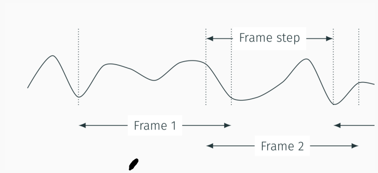


Figura 4: Comportamento associado ao movimento browniano.

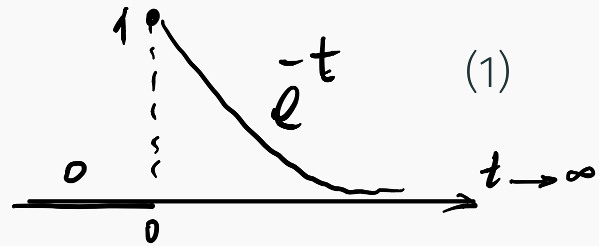
"Medida"de um sinal: energia e potência



$E_g = 1J$

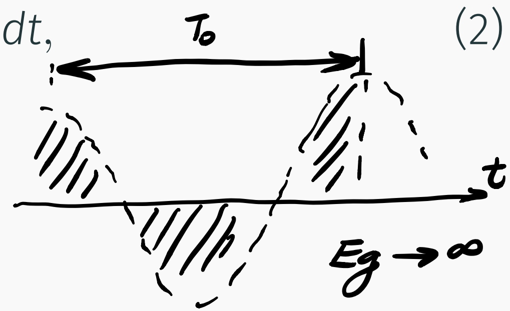
Energia

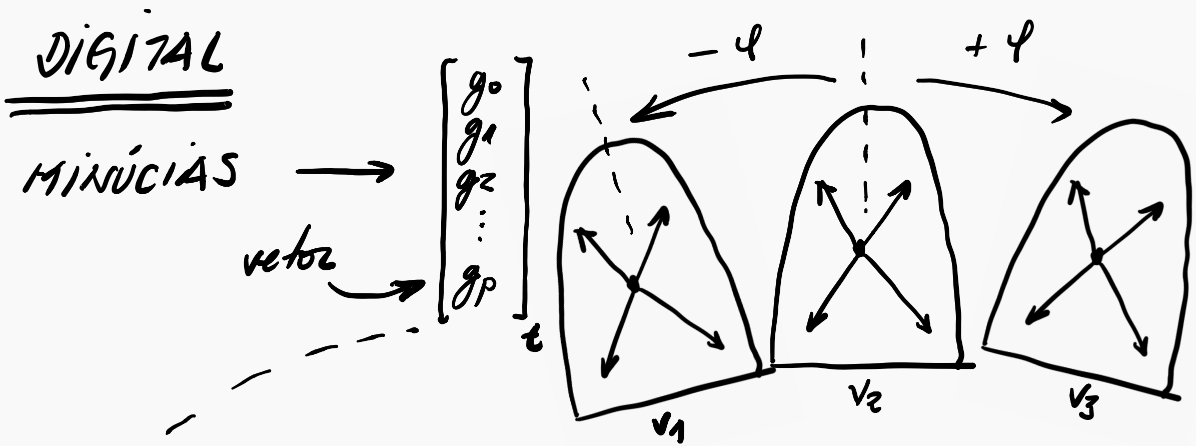
$$J \longleftarrow E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt, \qquad (1)$$



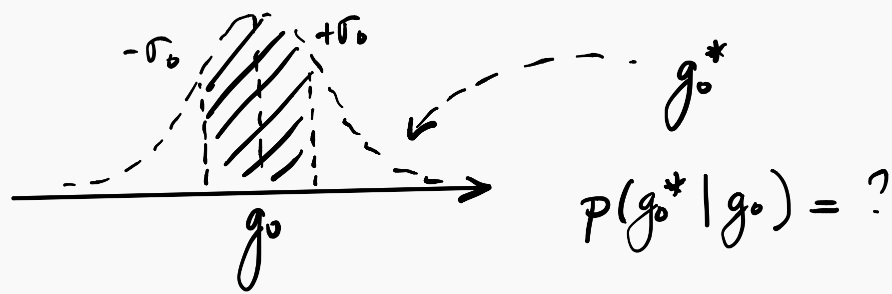
Potência - período T_o

$$J/s \longleftarrow P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^2(t)dt, \qquad (2)$$



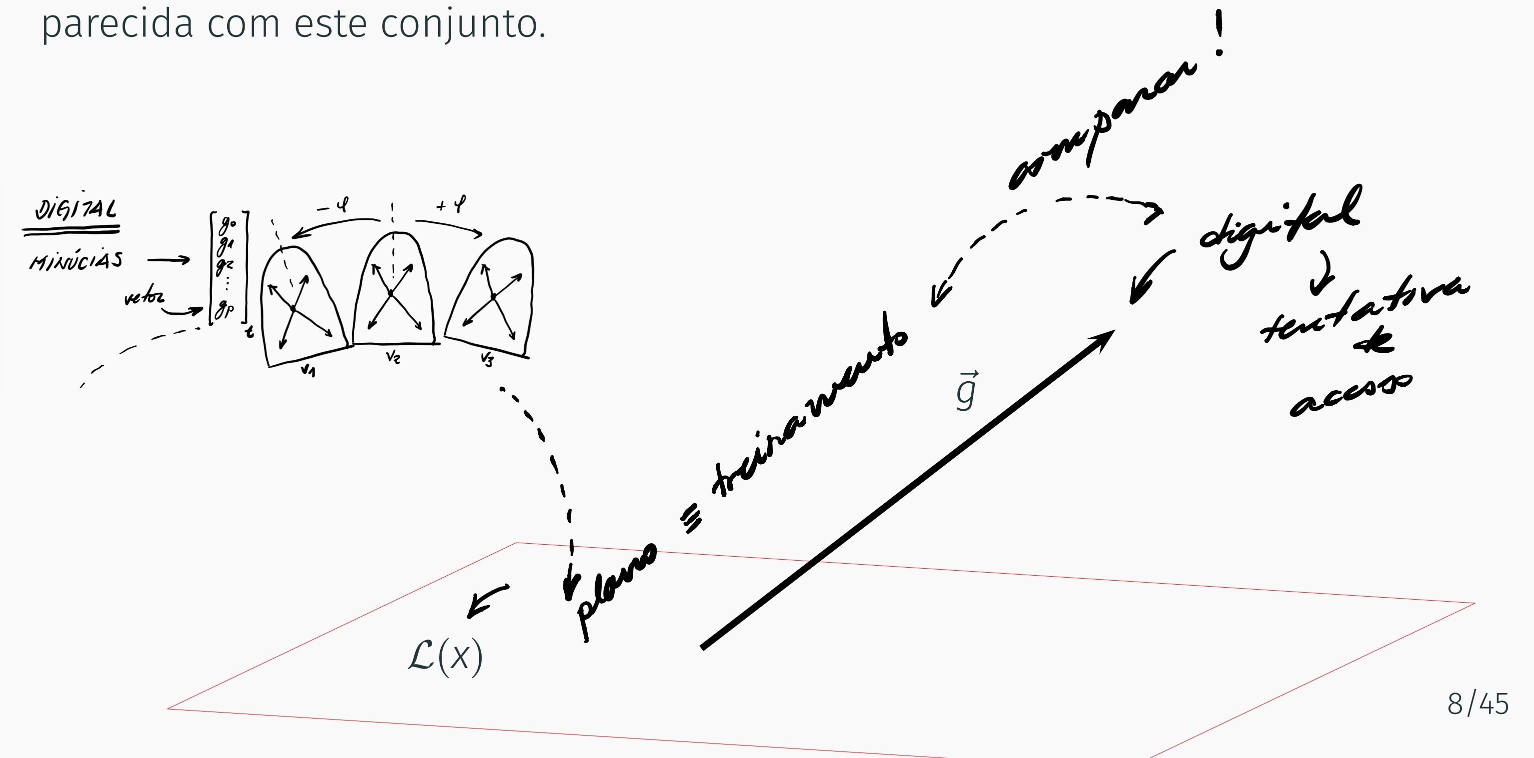


Analogia entre vetores e sinais



Uma analogia entre sinais e vetores...

Supondo que $\mathcal{L}(x)$ represente um universo de possibilidades para uma variável vetorial representado no plano e que desejamos comparar o vetor $\vec{g}$ com este universo. Por exemplo, o plano representa o universo de possibilidades de impressões digitais com uma determinada característica e $\vec{g}$ representa uma medida feita que desejamos medir o quanto ela á parecida com este conjunto.



Podemos utilizar como medida da semelhança entre o plano e o vetor medido a projeção $\vec{x}$ do mesmo no plano ou a diferença entre os vetores $\vec{e}$ como uma estimativa da diferença entre eles.

$$c \cdot |\vec{x}| = |\vec{g}| \cdot \cos\theta$$

algoritmo

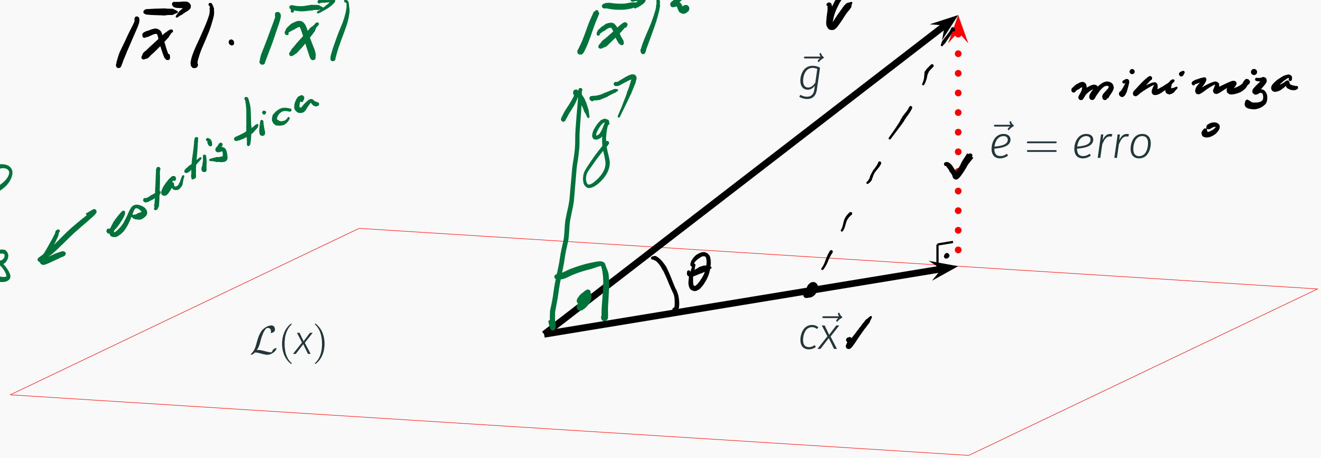
medido

$$c = \frac{|\vec{g}| \cdot \cos\theta \cdot |\vec{x}|}{|\vec{x}| \cdot |\vec{x}|} = \frac{\vec{g} \odot \vec{x}}{|\vec{x}|^2}$$

$c = 0$

$c = 0.3$ estatística

$c = 1$



Como determinar o escalar c....

Sabemos que $\vec{g} \odot \vec{x} = |\vec{g}||\vec{x}|cos\theta$ e que $c|x| = |g|cos\theta$ desta forma:

$$c = \frac{\vec{g}\odot\vec{x}}{\vec{x}\odot\vec{x}}$$

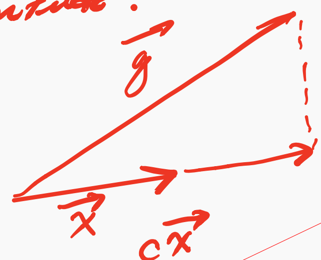
$$|c\vec{x}| = |\vec{g}| \cdot \cos\theta$$

$$c > 0$$

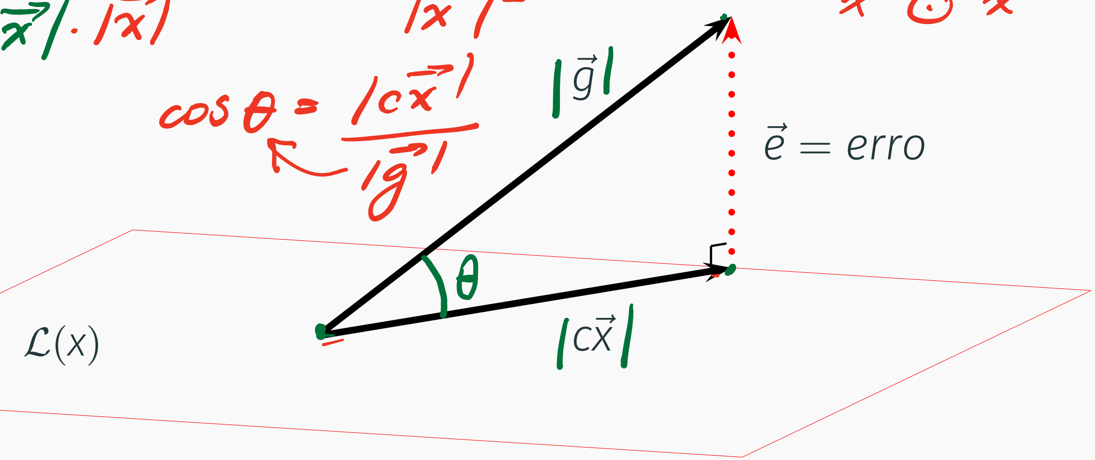
$$c \cdot |\vec{x}| = |\vec{g}| \cdot \cos\theta$$

$$c = \frac{|\vec{g}| \cdot \cos\theta \cdot |\vec{x}|}{|\vec{x}| \cdot |\vec{x}|} = \frac{\vec{g} \odot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} = \frac{\vec{g} \odot \vec{x}}{\vec{x} \odot \vec{x}}$$

magnitude!



$$\cos\theta = \frac{|c\vec{x}|}{|\vec{g}|}$$



Mudando um pouco o enfoque: *como podemos determinar a amplitude de um sinal harmônico de forma que ele seja o mais semelhante possível de um sinal pulsado?*

simétrico - y

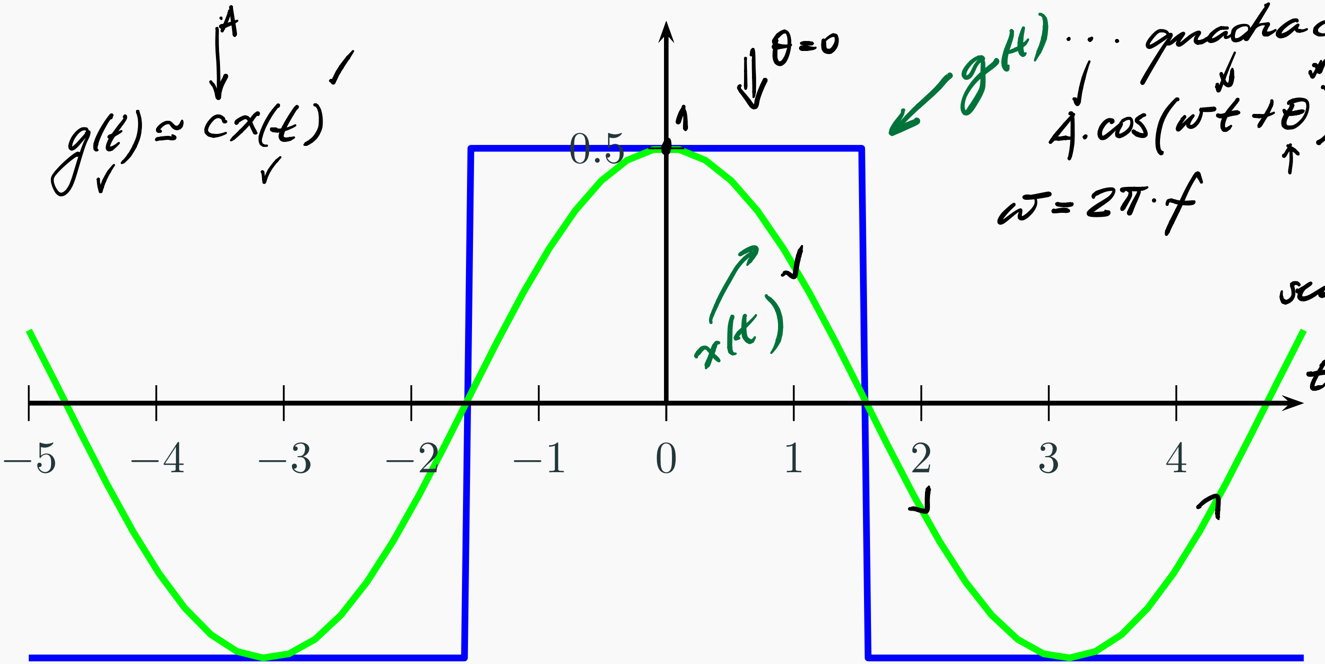
$g(t) \simeq c\,x(t)$

$g(t)$ . . . quadrada

$A \cdot \cos(\omega t + \theta)$

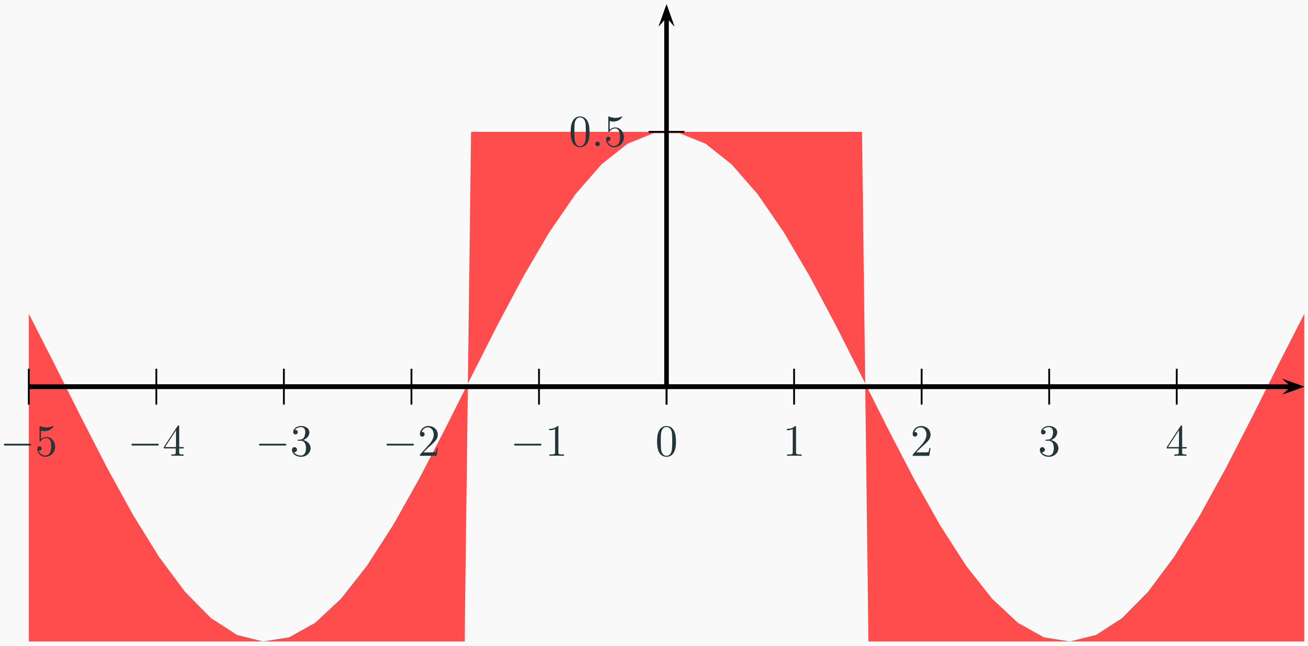
$\omega = 2\pi \cdot f$

senoidal



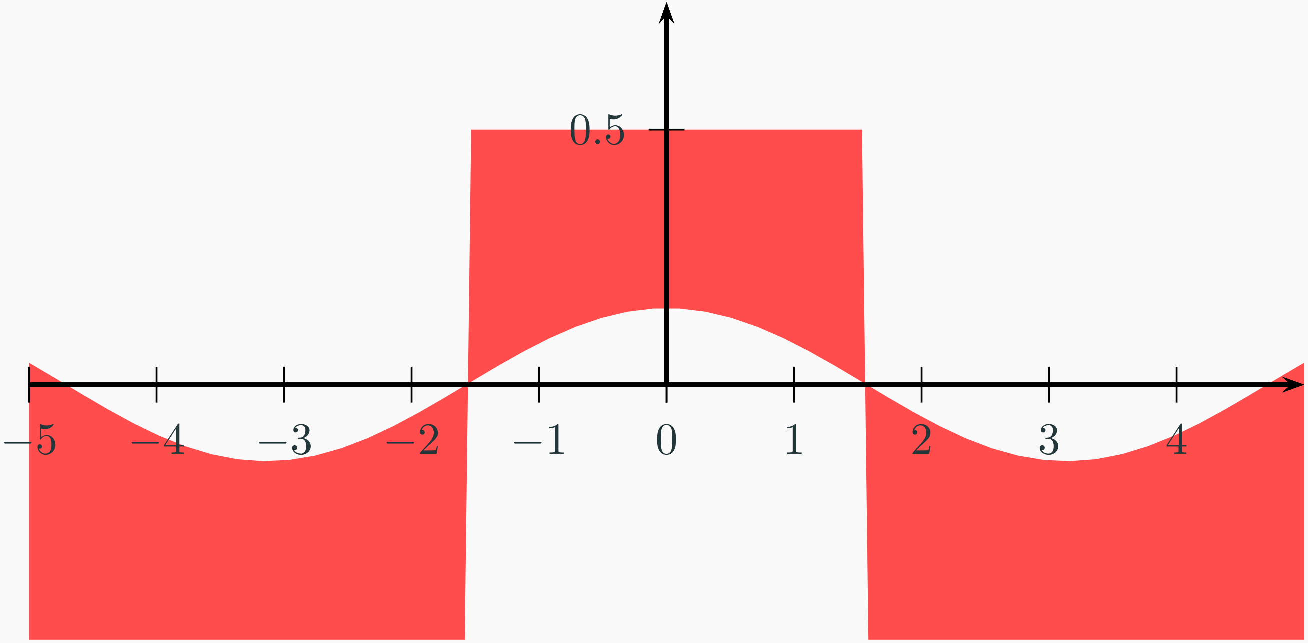
Avaliando a diferença entre os sinais

Observe em vermelho a diferença entre os dois sinais. Podemos estabelecer esta medida para o grau de diferença (semelhança).



Avaliando a diferença entre os sinais

Diminuindo a amplitude do sinal harmônico... Observamos que o **erro** aumentou. Isto indica que há um valor de amplitude que minimiza esta área e que consequentemente minimiza o **erro**.



"Medindo o grau de semelhança...

Estabelendo que o sinal pulsado $g(t)$ possa ser aproximado ao sinal harmônico $x(t)$ como sendo $g(t) \approx cx(t)$ demonstrar que o coeficiente c que minimiza o erro, no intervalo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ é dado por:

Correlação entre os sinais...

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt}, \tag{3}$$

Exemplo

Para um sinal pulsado, com $T = 2\pi$ e amplitude $A_p = 1$ onde $g(t) \backsimeq csin(t)$ no intervalo $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ demonstre que $c = \frac{4}{\pi}$.

Conclusão

Comparando a equação obtida para vetores com a obtida para sinais, o que podemos concluir?

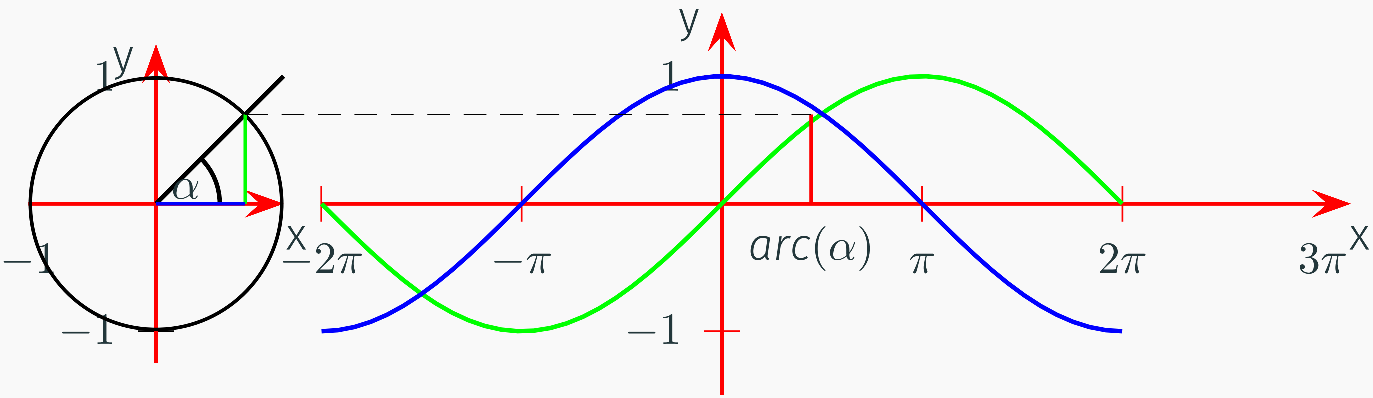
$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt} \qquad c = \frac{\vec{g} \odot \vec{x}}{\vec{x} \odot \vec{x}}$$

Importante

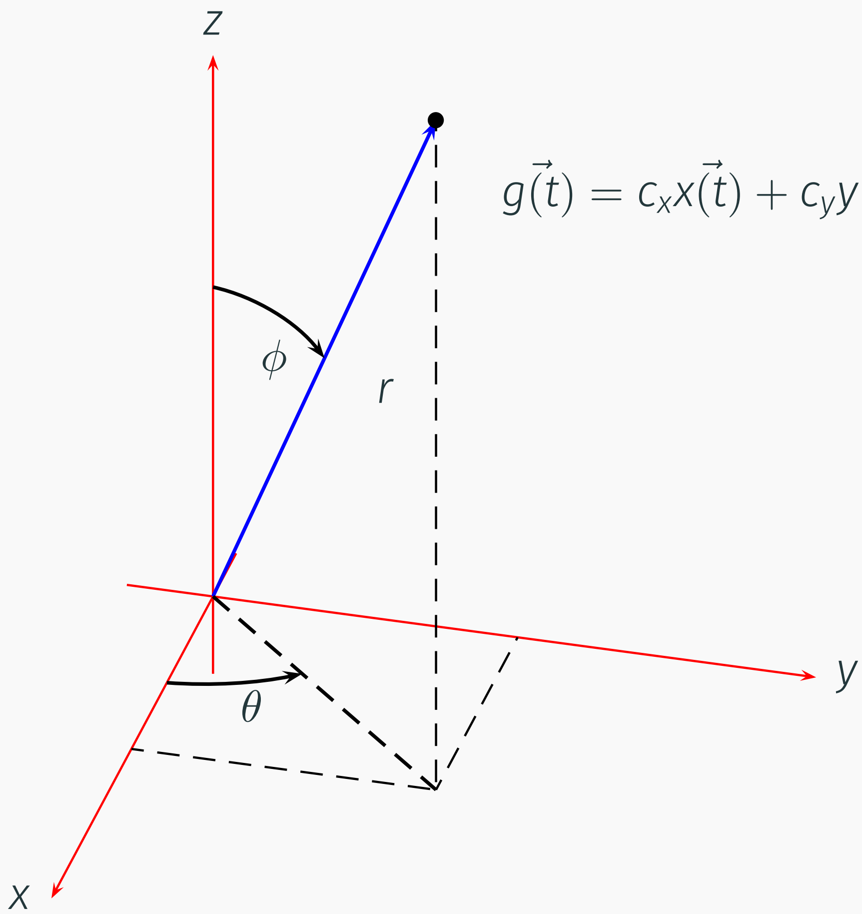
Tendo como referência a base vetorial, quando $c = 0$ temos dois vetores ortogonais, por analogia, quando $c = 0$, ou melhor, $\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt = 0$ dizemos que os sinais $g(t)$ e $x(t)$ são ortogonais no intervalo $[t_1, t_2]$.

Uma ”base”ortogonal

Utilizando o conceito fundamentado anteriormente podemos facilmente demonstrar que dois sinais harmônicos defasados de $\frac{\pi}{2}$ são ortogonais (seno e cosseno). Esta concluão pode ser obtida por inspeção do gráfico a seguir. Uma outra abstração importante é a que um sinal harmônico pode ser representado por um vetor girante.



Analogia com vetores



$$g(\vec{t}) = c_x x(\vec{t}) + c_y y(\vec{t}) + c_z z(\vec{t})$$

De forma geral

1. Para um intervalo $[t_1, t_2]$ escolhemos uma base de sinais que respeitem a seguinte construção:

$$\int_{t_1}^{t_2} x_n x_m(t)dt = \begin{cases} E_n & \text{Se } m = n \\ 0 & \text{Se } \ m \neq n \end{cases} \tag{4}$$

2. Os coeficientes (projeÁıes) para cada sinal (dimensão) podem ser determinados:

$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x_n(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t)dt} = \frac{1}{E_n}\int_{t_1}^{t_2} g(t)x_n(t)dt, \tag{5}$$

3. O sinal $g(t)$ pode ser decomposto, no intervalo $[t_1, t_2]$, em:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + c_N x_N(t) \tag{6}$$

Série trigonométrica de Fourier

Série trigonométrica de Fourier

Série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)) \tag{7}$$

Termos pares

$$a_n = \frac{2}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} f(t) \cos(n\omega_o t) dt \tag{8}$$

Termos ímpares

$$b_n = \frac{2}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} f(t) \sin(n\omega_o t) dt. \tag{9}$$

Série exponencial de Fourier

Euler

Desenvolvendo a função cosseno em série de Taylor

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Euler

Desenvolvendo a função cosseno em série de Taylor

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Desenvolvendo a função cosseno em série de Taylor

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Euler

Desenvolvendo a função cosseno em série de Taylor

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Desenvolvendo a função cosseno em série de Taylor

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Desenvolvendo a função cosseno em série de Taylor

$$e^{jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!} = 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^5}{5!} + \frac{(jx)^6}{6!} + \frac{(jx)^7}{7!} + \cdots =$$
$$1 + jx - \frac{(x)^2}{2!} - j\frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^4}{4!} + j\frac{(x)^5}{5!} - \frac{(x)^6}{6!} - j\frac{(x)^7}{7!} + \cdots$$

Euler

Importante

$e^{jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!} = \cos x + j \sin x$

Propriedades:

- $e^{jx} = \cos x + j \sin x$
- $e^{-jx} = \cos(-x) + j \sin(-x) = \cos x - j \sin x$
- $e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x$
- $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$

Exemplo de aplicação

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{(e^{jA} + e^{-jA})}{2} \cdot \frac{(e^{jB} + e^{-jB})}{2} \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{j(A+B)} + e^{j(A-B)} + e^{j(-A+B)} + e^{j(-A-B)}}{2} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{e^{j(A+B)} + e^{-j(A+B)}}{2}}_{\cos(A+B)} + \underbrace{\frac{e^{j(A-B)} + e^{-j(A-B)}}{2}}_{\cos(A-B)} \right]. \tag{12}$$

Exemplo de aplicação

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{(e^{jA} + e^{-jA})}{2} \cdot \frac{(e^{jB} + e^{-jB})}{2} \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{j(A+B)} + e^{j(A-B)} + e^{j(-A+B)} + e^{j(-A-B)}}{2} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{e^{j(A+B)} + e^{-j(A+B)}}{2}}_{\cos(A+B)} + \underbrace{\frac{e^{j(A-B)} + e^{-j(A-B)}}{2}}_{\cos(A-B)}\right]. \tag{12}$$

Um caso curioso...

Utilizando o que foi desenvolvido determine:

$D = j^j$

Série exponencial de Fourier

Série exponencial de Fourier

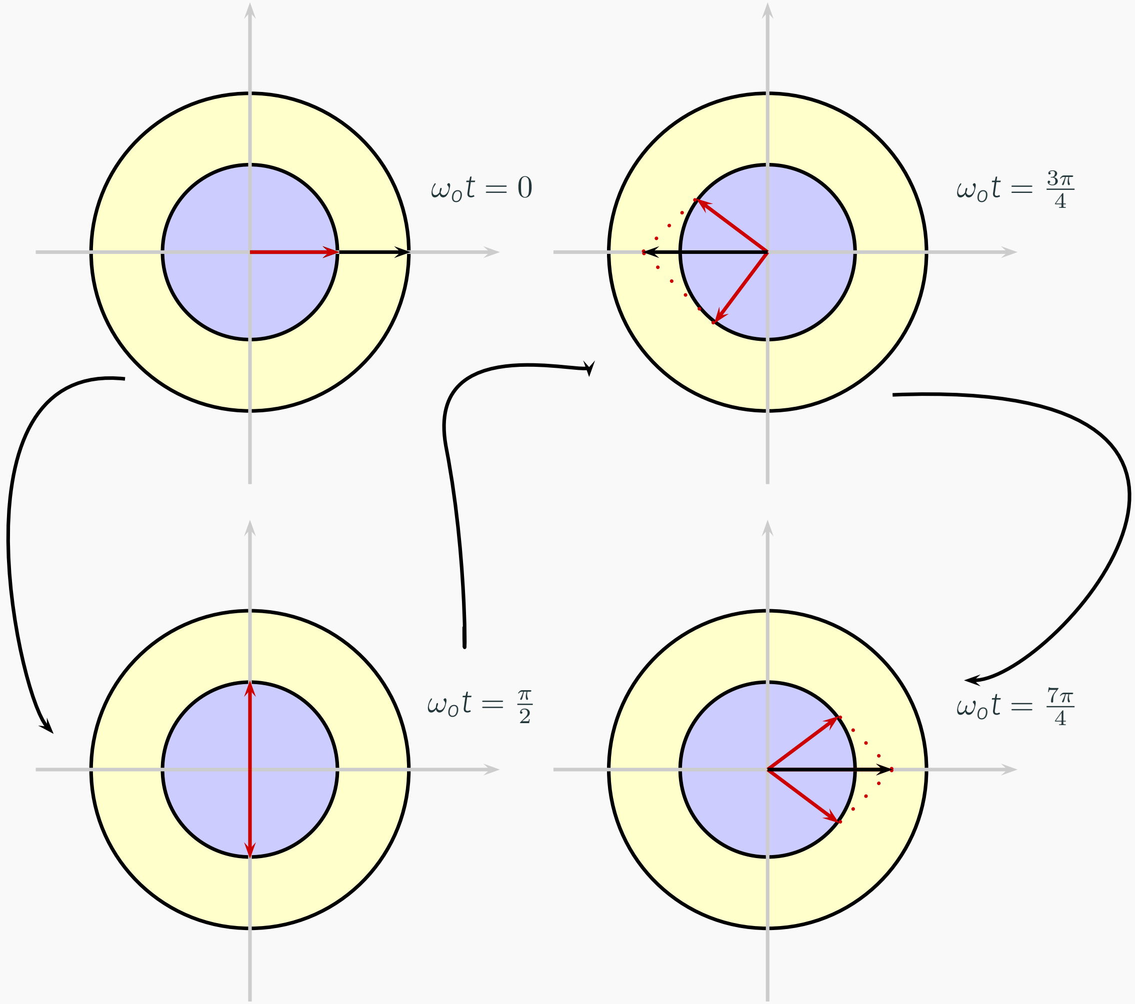
Utilizando a análise feita para a série compacta de fourier, e a representação de sinais utilizando euler, podemos definir a série exponencial de Fourier:

Série exponencial

Síntese: $g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_o t}$

Análise: $D_n = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} g(t) e^{-jn\omega_o t}$

Frequência negativa? uma interpretação...



Exemplo da série Trigonométrica de uma onda quadrada

Série trigonométrica de Fourier

Série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)) \qquad (13)$$

Série trigonométrica de Fourier

Série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)) \tag{13}$$

Valor Médio

$$a_0 = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} f(t)dt, \tag{14}$$

Síntese

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \quad + \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A\tau}{T} \quad \frac{sen(n\omega\tau/2)}{(n\omega\tau/2)} \cos(n\omega_o t), \tag{15}$$

Sinal pulsado

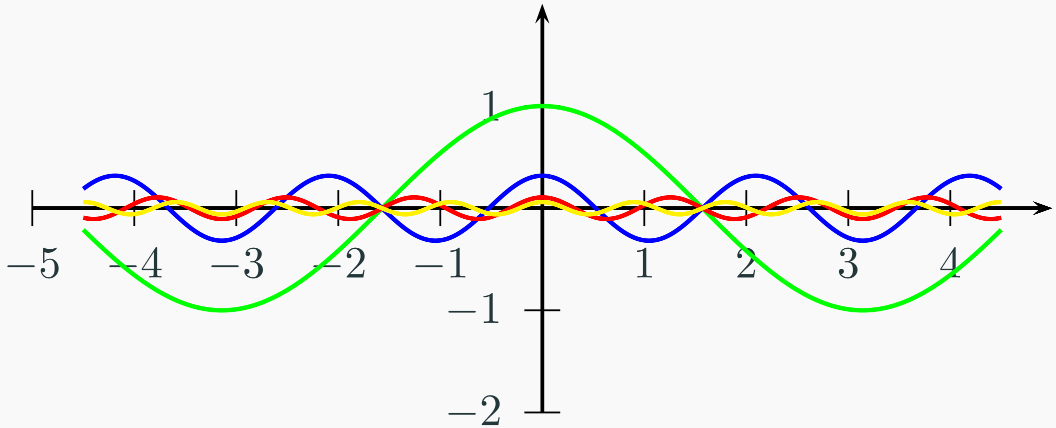


Figura 5: Harmonicas do sinal pulsado

Sinal pulsado

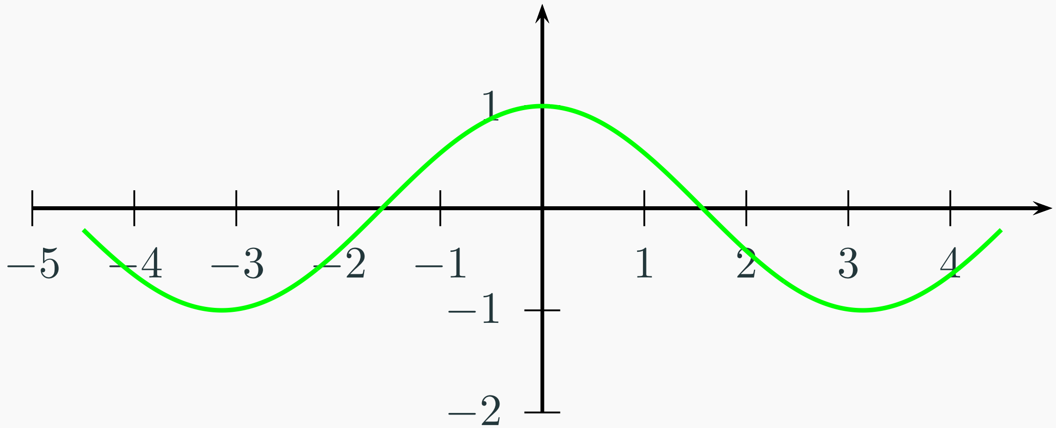


Figura 6: Sinal pulsado Harmonica fundamental

Sinal pulsado

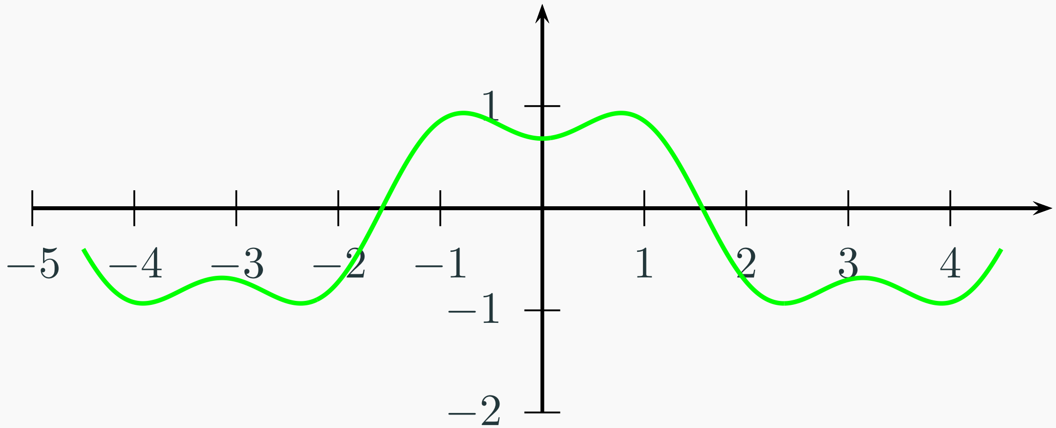


Figura 7: Sinal pulsado primeira e terceira

Sinal pulsado

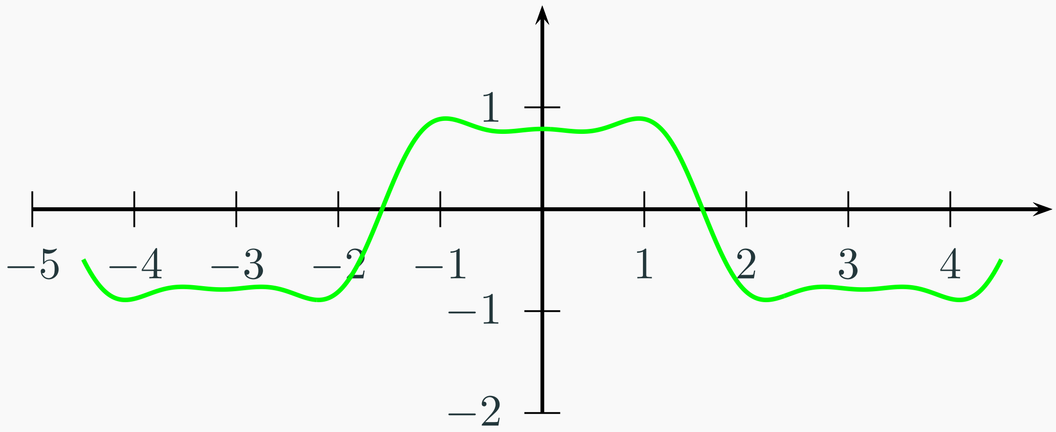


Figura 8: Sinal pulsado ate a quinta harmonica

Sinal pulsado

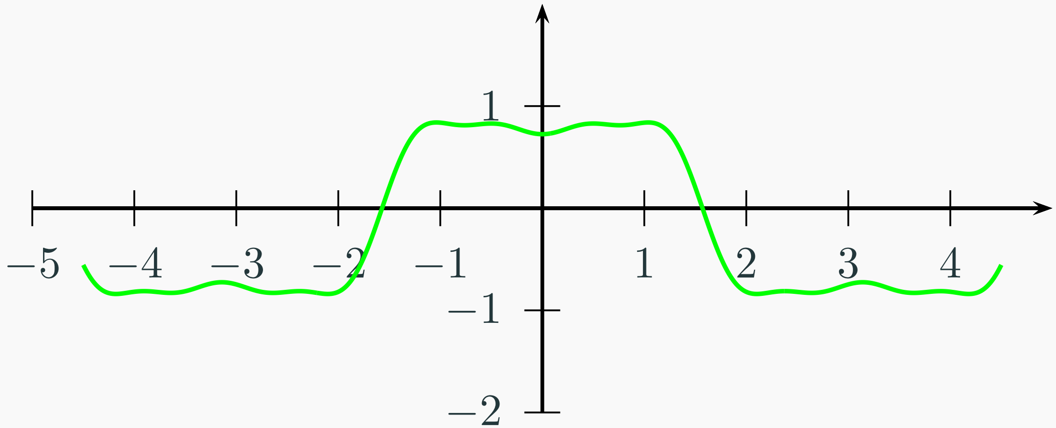
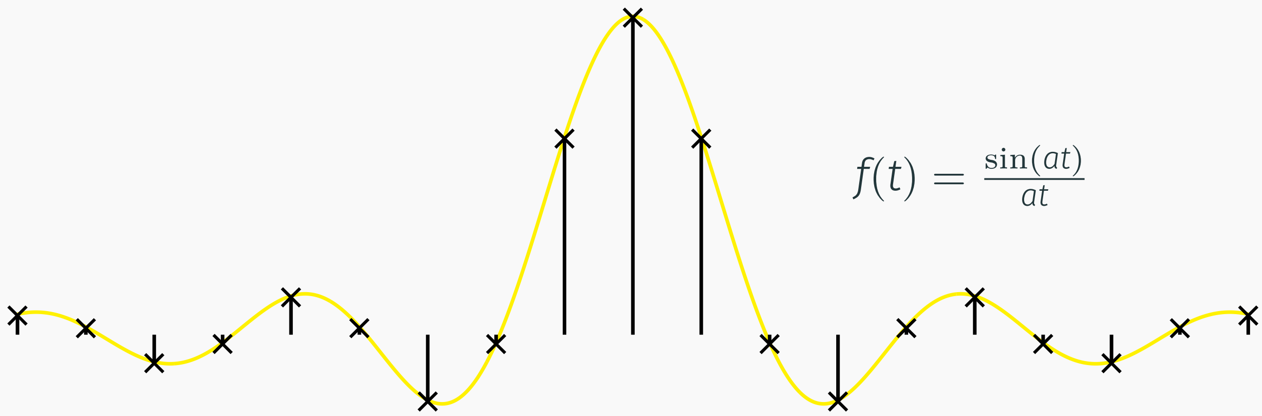
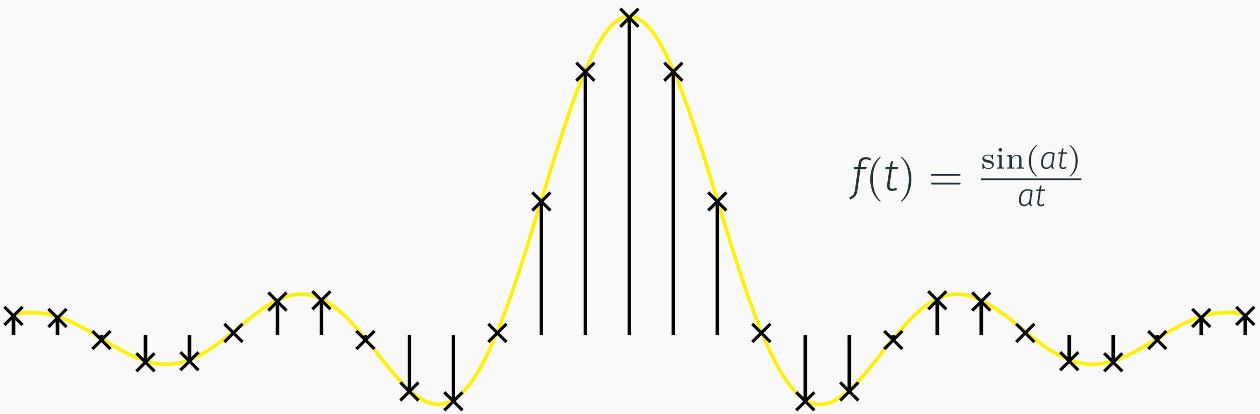


Figura 9: Sinal pulsado ate a quinta harmonica

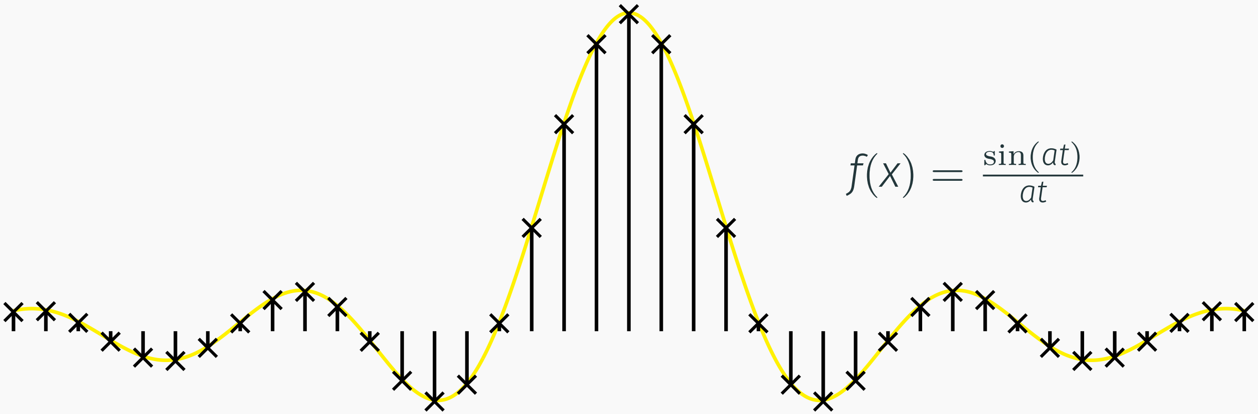
No domínio da frequência para $\tau = \frac{T}{2}$



No domínio da frequência para $\tau = \frac{T}{3}$



No domínio da frequência para $\tau = \frac{T}{4}$

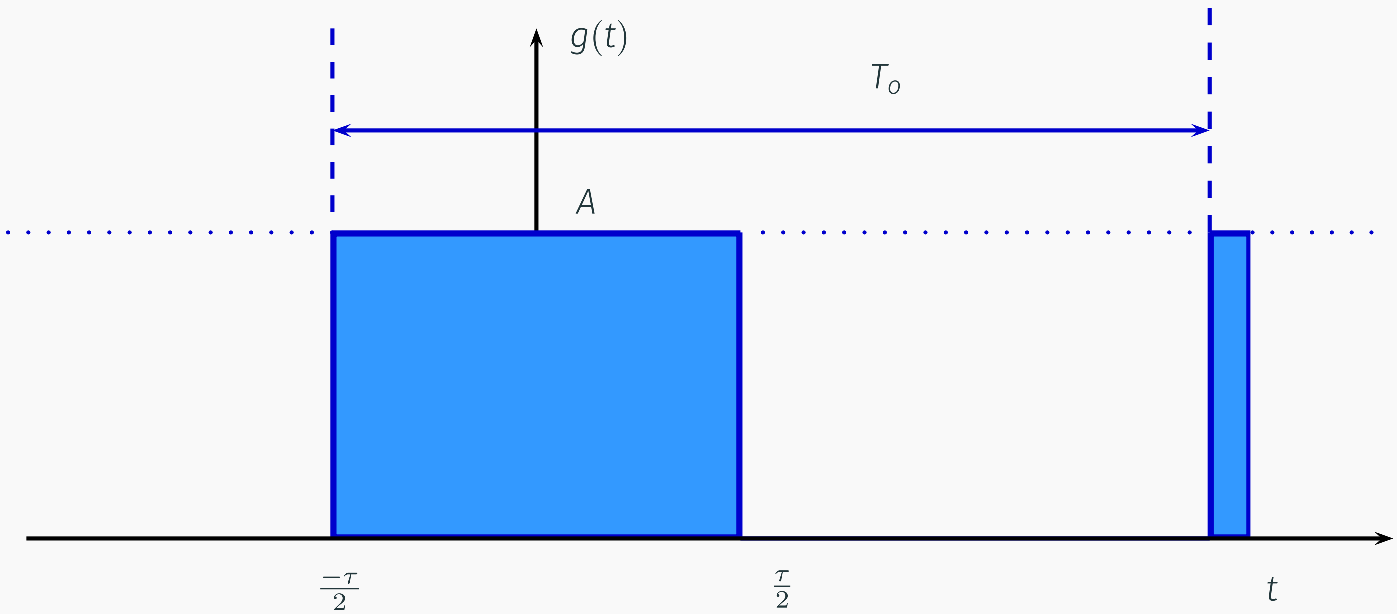


$$f(x) = \frac{\sin(at)}{at}$$

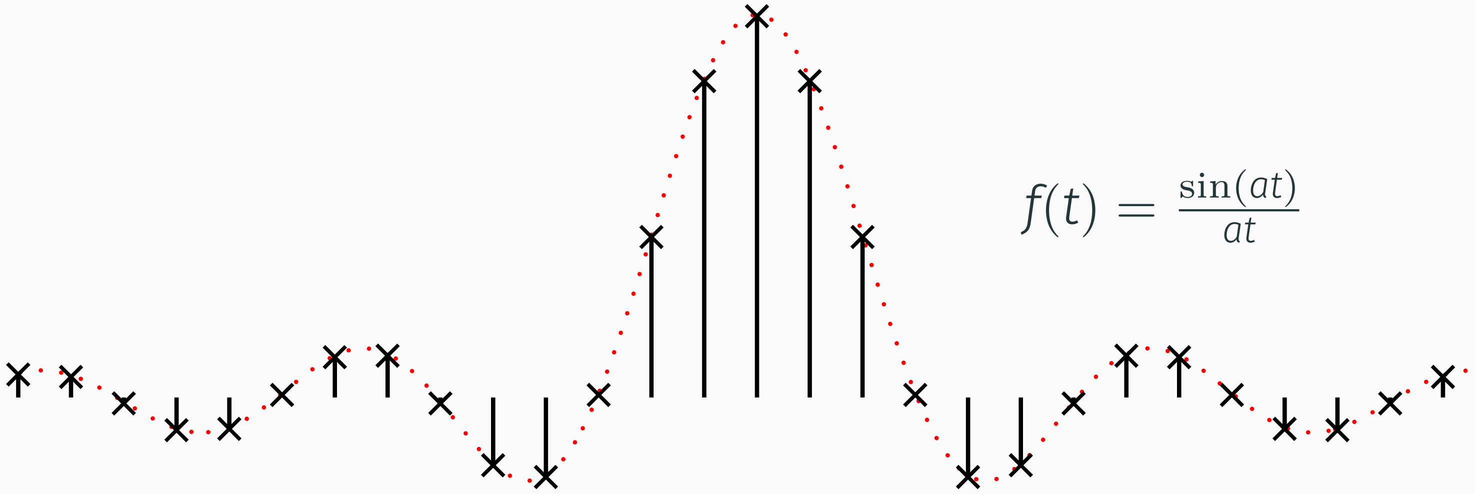
Exemplo da aplicação da série exponencial para um sinal pulsado

Analisando um pulso de largura τ

- O que acontece se mantenho o período T_o e reduzo a largura τ?
- O que acontece se mantenho a largura τ e aumento o período T_o?

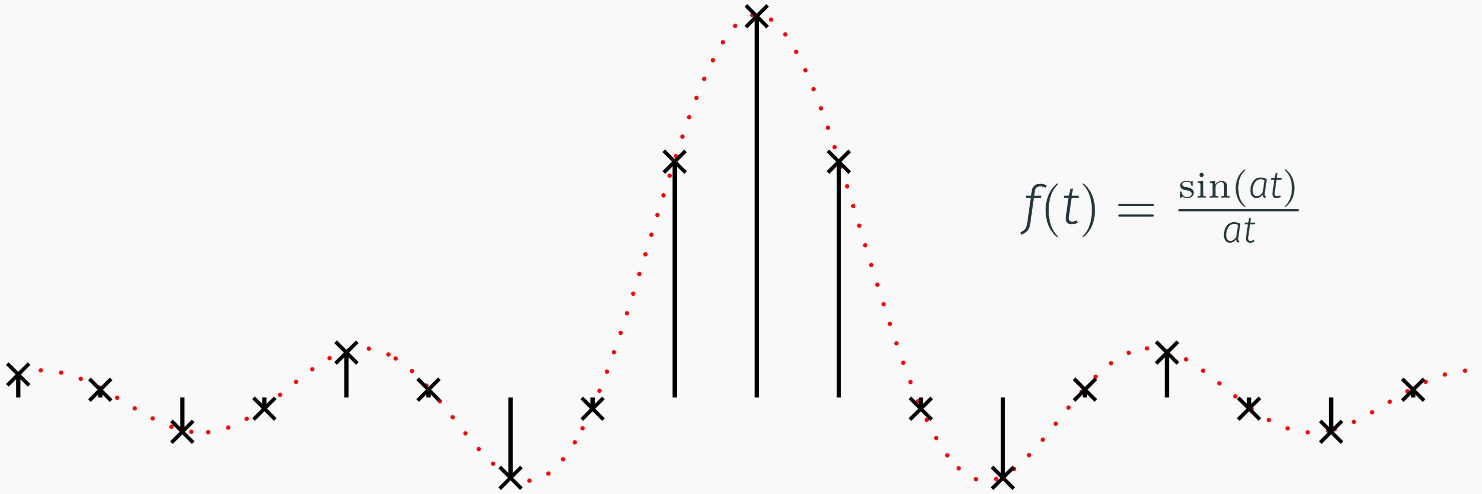


Sinal de referência com uma relação $\frac{\tau}{T_o} = \frac{1}{3}$
o nulo ocorre na sexta harmônica $\omega_{nulo} = 3\omega_o$



Mantendo a largura τ e aumento o período T_o

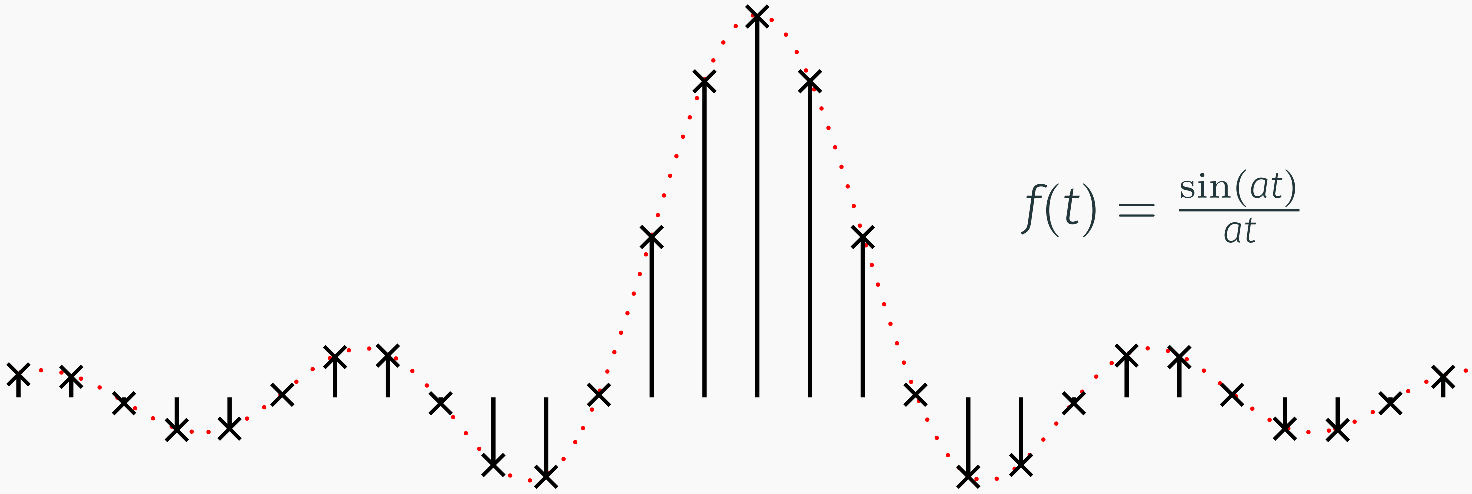
Sinal modificado com uma relaÁ„o $\frac{\tau}{T_o} = \frac{1}{2}$
o nulo ocorre na sexta harmÙnica $\omega_{nulo} = 2\omega_o$



Sinal de Referência...

Sinal de referência com uma relação $\frac{\tau}{T_o} = \frac{1}{3}$

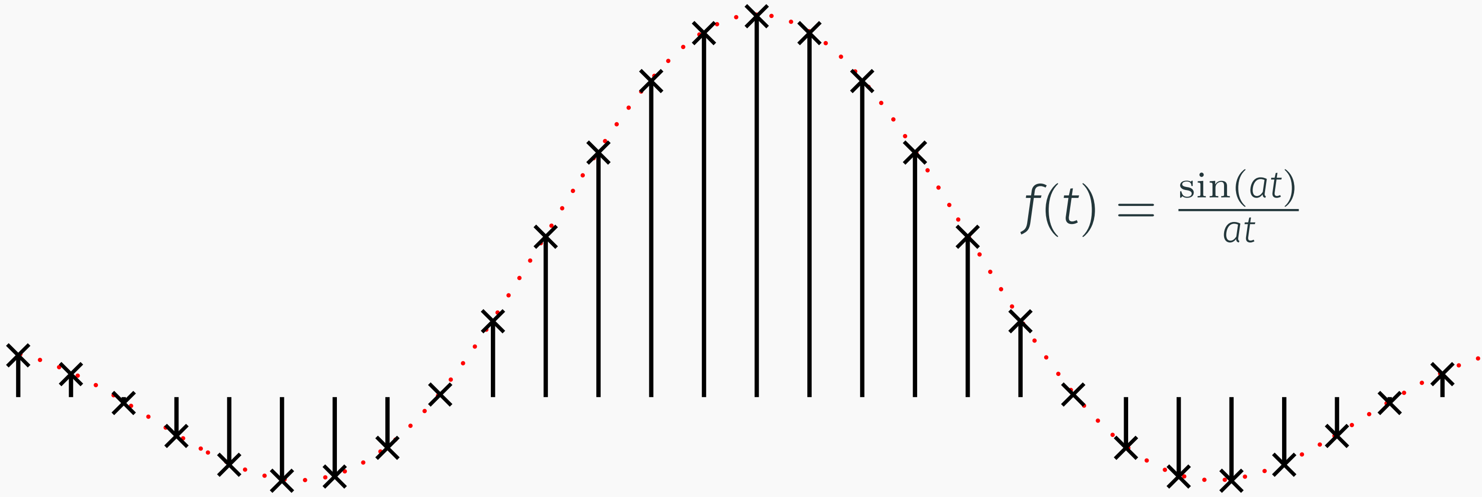
o nulo ocorre na sexta harmônica $\omega_{nulo} = 3\omega_o$



Mantendo o período T_o e reduzo a largura τ

Sinal modificado com uma relação $\frac{\tau}{T_o} = \frac{1}{6}$

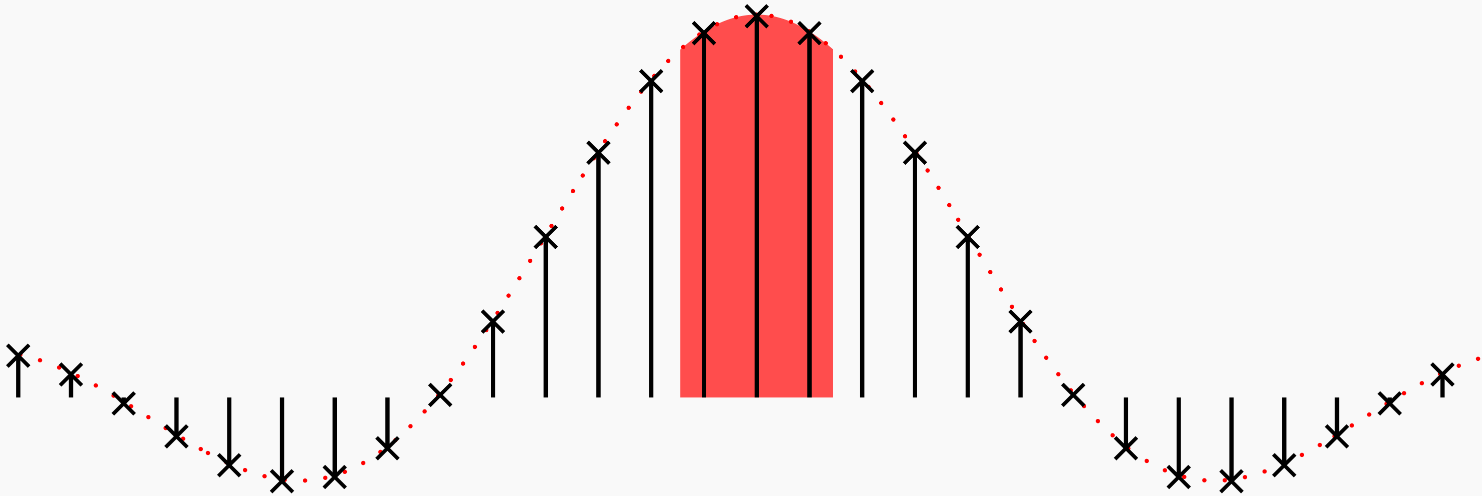
o nulo ocorre na sexta harmônica $\omega_{nulo} = 6\omega_o$



Efeito da filtragem

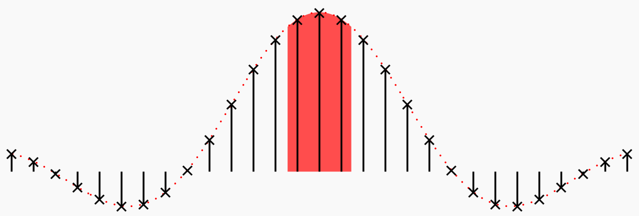
Sinal modificado com uma relação $\frac{\tau}{T_o} = \frac{1}{6}$

m filtro que selecione somente o nÌvel DC e a primeira harmônica

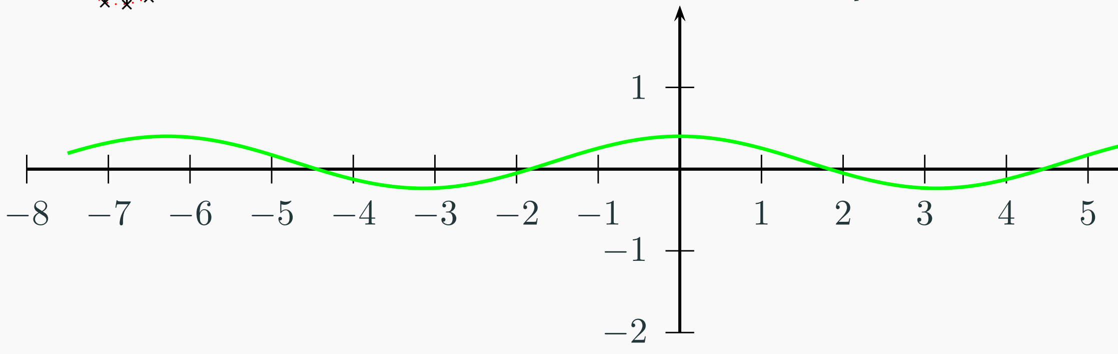


Efeito da filtragem

No domínio da frequência

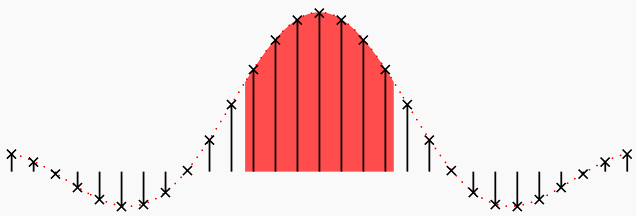


No domínio do tempo

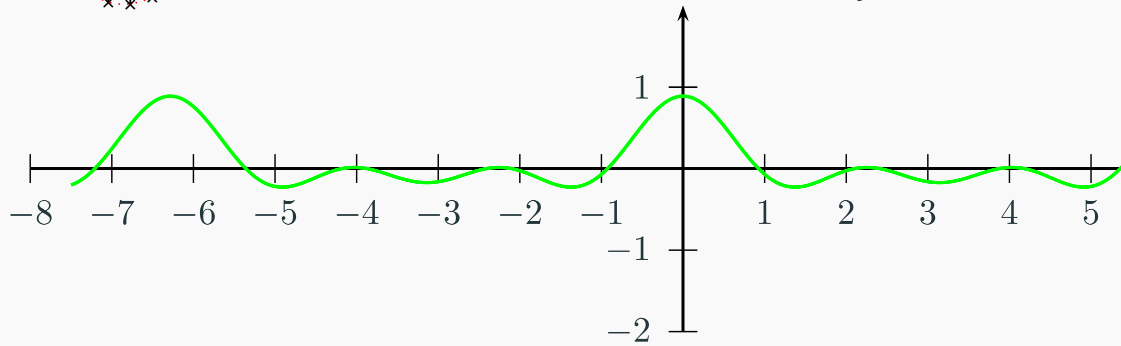


Efeito da filtragem

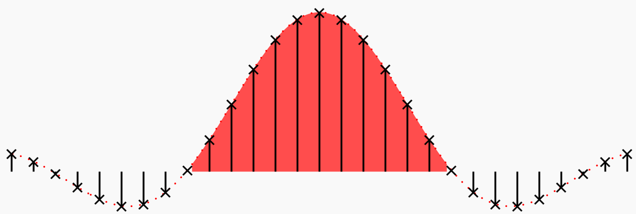
No domínio da frequência



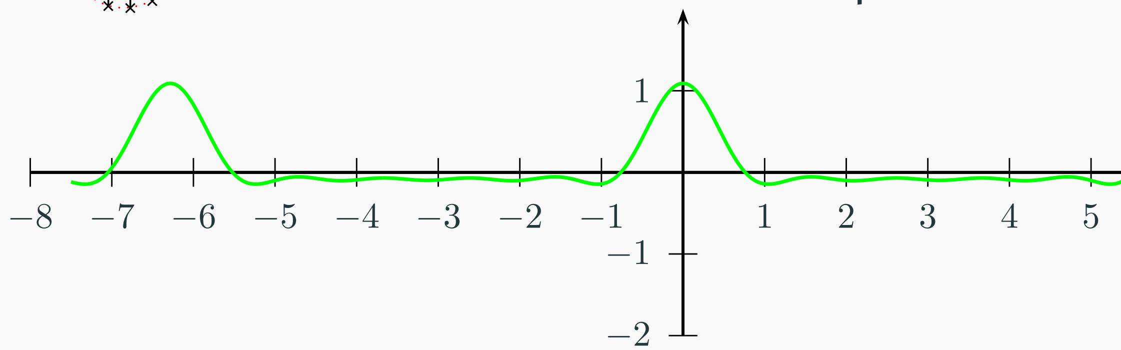
No domínio do tempo



No domínio da frequência

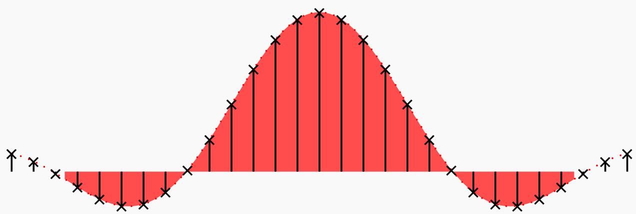


No domínio do tempo

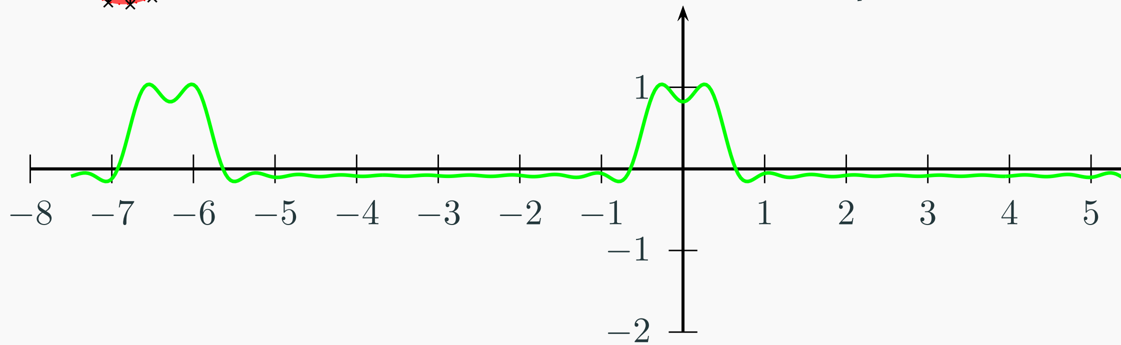


Efeito da filtragem

No domínio da frequência



No domínio do tempo



Uma análise do ponto de vista de potência

Considerando a série compacta temos:

$P_g = C_o^2 + \frac{1}{2}\sum_1^{+\infty} C_n^2$

Considerando a série exponencial temos:

$P_g = \sum_{-\infty}^{\infty} |D_n|^2$