Distribuição Multinomial

V. C. Parro e-mail: *vparro@maua.br*

20 de maio de 2021

Objetivos Multinomial

Este documento discute uma questão apontada na terceira aula do módulo de aprendizado de máquina - métodos probabilísticos. A questão elaborada investiga um formato de cálculo de uma distribuição multinomial a partir de suas distribuições marginais (Binomial).

Sistema binário simples - Sucesso e fracasso

Pensando no lançamento de uma moeda podemos facilmente validar a proposta ds distribuições Binomial. Para criar um cenário, vamos propor uma moeda honesta, onde $p = 0.5$ (Cara - V) e $q = (1-p) = 0.5$ (Coroa - F) e que teremos dois lançamentos apenas. Todas as combinações possíveis podem ser analisadas na Tabela 1

s_1	s_2
V	V
V	F
F	V
F	F

Tabela 1: Possibilidades para o lançamento de duas moedas.

Se considerarmos o evento:

$$E = \texttt{pelo menos um lançamento com resultado V.} \tag{1}$$

Pode-se estimar que $P(E) = \frac{3}{4}$ por inspeção da tabela. Temos duas linhas com uma das possibilidades em V e uma linha com ambas em V. Podemos também pensar que uma única linha não possui ”pelo menos um V”, trata-se da última. Neste sentido, $P(E) = 1 - \frac{1}{4}$, que gera o mesmo resultado.

Como o exemplo é circunscrito a valores reduzidos, sua compreensão é direta. Mas é necessário sistematizar para que possamos trabalhar com valores maiores.

1. Para trabalhar com o caso binário descrito, temos que o número total de combinações pode ser determinado por 2^N, onde N é o número de lançamentos. Neste caso temos $N = 2$ e o número de combinações: $2^2 = 4$.

2. As combinações de eventos podem ser determinadas da seguinte forma:

$$\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \frac{2!}{1!1!} + \frac{2!}{2!0!} = 2 + 1 = 3 \tag{2}$$

3. Chegamos de forma sistemática a mesma conclusão onde temos 3 possibilidades em 4.

Determinando a probabilidade utilizando a binomial, temos o mesmo resultado. Neste sentido, a distribuição binomial sistematiza o cálculo combinatório e de probabilidades.

$$\binom{2}{1} p^1\ (1-p)^1 + \binom{2}{2} p^2\ (1-p)^0 = 2 * 0.25 + 1 * 0.25 = 0.75 \tag{3}$$

Sistema m-ário - m níveis distintos

Podemos pensar em uma situação combinatória mais ampla, como o lançamento de dois dados.

$$S = (i, j) : i = 1 \ldots 6; j = 1 \ldots 6$$

O espaço amostral ($6^2 = 36$número de elementos) pode ser determinado como segue:

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1),(1,2),\ldots,(1,6), && (4)\\ &(2,1),(2,2),\ldots,(2,6), && (5)\\ & && (6)\\ &(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\} && (7)\\ & && (8) \end{aligned}$$

Se considerarmos o evento:

$$E = \texttt{dois lançamentos consecutivos com a face 6.} \tag{9}$$

Sabemos, por construção que a probabilidade neste caso é dada por $P(E) = \frac{1}{36}$ pois o evento pode ocorrer uma única vez no contexto do espaço amostral de 36 possibilidades. Construindo a análise combinatória e de probabilidades, temos:

$$P(E) = \frac{N!}{x_1!x_2!x_3!x_4!x_5!x_6!} p^{x_1} p^{x_2} p^{x_3} p^{x_4} p^{x_5} p^{x_6} \tag{10}$$

Estamos analisando, o seguinte cenário:

1. $p^{x_1} = p^{x_2} = p^{x_3} = p^{x_4} = p^{x_5} = p^{x_6} = \frac{1}{6}$.

2. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

3. $x_6 = 2$.

Substituindo na Equação 10 temos 14.

$$P(E) = \frac{2!}{2!0!0!0!0!0!} p^2 p^0 p^0 p^0 p^0 p^0 = 1 * p^2 = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \tag{11}$$

Pensando no sistema de vitória, derrota e empate

Você deve ter percebido que o sistema combinatório cresce rapidamente. Neste sentido, vamos analisar suas partidas consecutivas e entender o modelo matemático associado. A partir deste modelo, expandi-lo para um caso qualquer de N partidas. Para o caso especifico, as possibilidades estão descritas na Tabela 10.

J_1	J_2
V	V
V	E
V	D
E	V
E	E
E	D
D	V
D	E
D	D

Tabela 2: Possibilidades para duas partidas consecutivas (3^2).

Se considerarmos o evento:

$$E_R = \texttt{uma vitória e um empate em duas partidas.} \tag{12}$$

Caso 01: Supondo que os eventos singulares sejam equiprováveis - $P(V) = P(E) = P(D) = \frac{1}{3}$.

1. Pela inspeção Tabela 2 temos 2 resultados que atendem ao evento em 9 possíveis. $P(E_R) = \frac{2}{9}$.

2. Aplicando a distribuição multinomial:

$$P(E) = \frac{2!}{1!1!0!} p_V^1 \; p_E^1 \; p_D^0 = 2 * p_V \; p_E * 1 = 2 * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \tag{13}$$

Caso 02: Supondo que os eventos singulares sejam equiprováveis - $P(V) = 0.47$, $P(E) = 0.19$ $P(D) = 0.34$. Podemos determinar a probabilidade para cada sequência de resultados possíveis na Tabela 3.

1. Observe que a soma das probabilidades permanece sendo 1.

2. A probabilidade desejada $P(E_R) = 0.18$.

3. Aplicando a multinomial:

$$P(E_R) = \frac{2!}{1!1!0!} p_V^1 \; p_E^1 \; p_D^0 = 2 * p_V \; p_E * 1 = 2 * 0.47 * 0.19 = 0.18 \tag{14}$$

J_1	J_2	$P(R_1, R_2)$
V	V	0.22
V	E	0.09
V	D	0.16
E	V	0.09
E	E	0.04
E	D	0.06
D	V	0.16
D	E	0.06
D	D	0.12

Tabela 3: Possibilidades para duas partidas consecutivas (3^2).

Caso 03: O que acontece quando pensamos apenas em ganhou e perdeu, englobando o empate como "não ganhou"?

1. Neste caso resulta em uma Binomial - $p = 0.47$ e $q = 1 - p = 0.53$.
2. Podemos calcular 1 vitória em 2 jogos:
$$P(E_R) = \frac{2!}{1!1!} p_V^1 \, (1 - p_V)^1 = 2 * 0.47 * 0.53 = 0.50 \tag{15}$$
3. Esta probabilidade representa o resultado de uma vitória e não considera o outro resultado. O que não atende o que queremos.
4. Podemos calcular 1 empate em 2 jogos:
$$P(E_R) = \frac{2!}{1!1!} p_E^1 \, (1 - p_V)^1 = 2 * 0.19 * 0.81 = 0.31 \tag{16}$$
5. Esta probabilidade representa o resultado de um empate e não considera o outro resultado. O que não atende o que queremos.

Base matemática

O teorema Binomial:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= x + y \\
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2
\end{aligned} \tag{17}$$

Generalizando:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots \\
&+ \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n \\
&= (x+y)(x+y)\dots(x+y)
\end{aligned} \tag{18}$$

Estendendo para 3 variáveis e utilizando a Equação 18 chegamos à Equação 19.

$$(p_1 + p_2 + p_3)^n = \sum_{m_1+m_2+m_3=n} \frac{n!}{m_1!m_2!m_3!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \tag{19}$$