Respostas Temporais

Prof. Rodrigo A. Romano

Escola de Engenharia Mauá

Introdução

- Para **projetar** e **analisar** sistemas de controle, é necessário definir um conjunto de **especificações** para direcionar a síntese de controladores, assim como para avaliar o desempenho deste sistema;
- Em geral, os sistemas de controle são avaliados escolhendo-se sinais de **entrada particulares** e comparando-se a resposta do sistema em cada caso. Além disso, muitos métodos de projeto baseiam-se em **sinais particulares** ou na resposta do sistema a **condições iniciais**;
- Há basicamente duas classes de especificações de desempenho: dinâmica da resposta **transitória** e precisão da resposta **estacionária**;

Sinais de teste

Os sinais de teste mais utilizados para avaliar o desempenho de controladores são:

1. **Degrau** - usado para **avaliar** (ou **especificar**) o comportamento do sistema quando ocorrem variações bruscas de uma condição para outra;
2. **Rampa** - destinado a situações em que deseja-se reproduzir, ou caracterizar, mudanças gradativas;
3. **Impulso** - adequado para casos em que haja variações abruptas, porém momentâneas;
4. **Senóide** - apropriado para estudar oscilações em uma determinada frequência.

<u>OBS</u>: Além de sinais determinísticos em algumas situações, sinais aleatórios como ruído branco filtrado, também são utilizados.

Respostas de sistemas de 1ªordem

Sistema de 1ªordem: $\dfrac{K}{\tau s + 1}$

- Resposta a degrau unitário $\left(\frac{1}{s}\right)$:

$$y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad , \text{para } t \geq 0$$

- Resposta a rampa unitária $\left(\frac{1}{s^2}\right)$:

$$y(t) = K\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad , \text{para } t \geq 0$$

- Resposta impulsiva:

$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \text{para } t \geq 0$$

Respostas de sistemas de 2ªordem

Forma genérica de um sistema de 2ªordem:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Pólos de $F(s)$:

$$s_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

OBS: Note que $\zeta < 0$, implica em $\Re\left(s_{1,2} > 0\right)$. Neste caso, $F(s)$ caracteriza um sistema **instável**. Como a principal propriedade de um sistema de controle é a estabilidade, a seguir estudaremos apenas o comportamento de um sistema descrito por $F(s)$, para $\zeta \geq 0$.

Classificação de sistemas de 2ªordem

1. Sistema subamortecido: $0 < \zeta < 1$
   - Os pólos de $F(s)$ são complexos e conjugados: $s_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \pm \jmath\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$;
   - Resposta ao degrau:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \beta\right), \text{ para } t \geq 0.$$

2. Sistema criticamente amortecido: $\zeta = 1$
   - Os pólos de $F(s)$ são reais negativos e iguais: $s_{1,2} = -\omega_n$;
   - Resposta ao degrau:

$$y(t) = 1 - (1+\omega_n t) \cdot e^{-\omega_n t}, \text{ para } t \geq 0.$$

3. Sistema sobreamortecido (superamortecido): $\zeta > 1$
   - Os pólos de $F(s)$ são distintos, reais e negativos: $s_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)$
   - Resposta ao degrau:

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \cdot \left(\frac{1}{s_2}e^{s_2 t} - \frac{1}{s_1}e^{s_1 t}\right), \text{ para } t \geq 0.$$

Classificação de sistemas de 2ªordem

1. Sistema subamortecido: $0 < \zeta < 1$
   - Os pólos de $F(s)$ são complexos e conjugados: $s_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \pm \jmath\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$;
   - Resposta ao degrau:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \beta\right), \text{ para } t \geq 0.$$

2. Sistema criticamente amortecido: $\zeta = 1$
   - Os pólos de $F(s)$ são reais negativos e iguais: $s_{1,2} = -\omega_n$;
   - Resposta ao degrau:

$$y(t) = 1 - (1 + \omega_n t) \cdot e^{-\omega_n t}, \text{ para } t \geq 0.$$

3. Sistema sobreamortecido (superamortecido): $\zeta > 1$
   - Os pólos de $F(s)$ são distintos, reais e negativos: $s_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$
   - Resposta ao degrau:

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \cdot \left(\frac{1}{s_2}e^{s_2 t} - \frac{1}{s_1}e^{s_1 t}\right), \text{ para } t \geq 0.$$

Classificação de sistemas de 2ªordem

1. Sistema subamortecido: $0 < \zeta < 1$
   - Os pólos de $F(s)$ são complexos e conjugados: $s_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \pm \jmath\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$;
   - Resposta ao degrau:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \beta\right), \text{ para } t \geq 0.$$

2. Sistema criticamente amortecido: $\zeta = 1$
   - Os pólos de $F(s)$ são reais negativos e iguais: $s_{1,2} = -\omega_n$;
   - Resposta ao degrau:

$$y(t) = 1 - (1 + \omega_n t) \cdot e^{-\omega_n t}, \text{ para } t \geq 0.$$

3. Sistema sobreamortecido (superamortecido): $\zeta > 1$
   - Os pólos de $F(s)$ são distintos, reais e negativos: $s_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$
   - Resposta ao degrau:

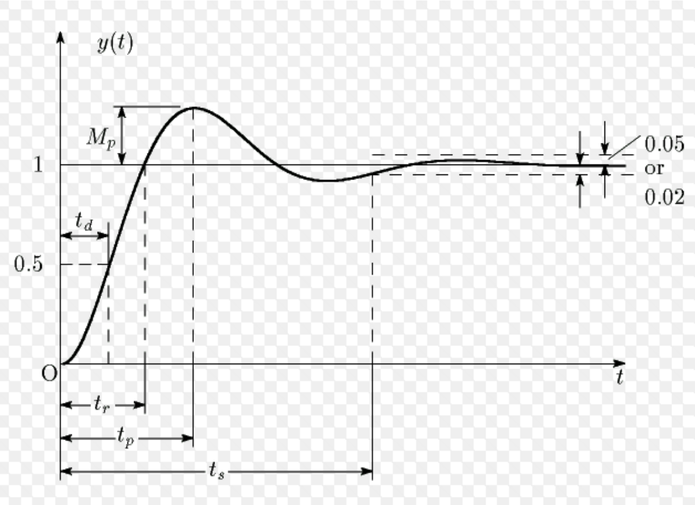
$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \cdot \left(\frac{1}{s_2}e^{s_2 t} - \frac{1}{s_1}e^{s_1 t}\right), \text{ para } t \geq 0.$$

Especificações de desempenho

1. **Tempo de subida** (t_r): Intervalo de tempo necessário para a resposta ir de 10% a 90% do valor final $y(\infty)$;
2. **Instante de pico** (t_p): Instante em que a resposta atinge o seu valor máximo, ou seja, $\max(y(t))$;
3. **Tempo de acomodação** ($t_s(2\%)$): Tempo necessário para a resposta ficar restrita na faixa: $0{,}98 \cdot y(\infty) \leq y(t) \leq 1{,}02 \cdot y(\infty)$. Depende diretamente da constante de tempo mais lenta;
4. **Sobressinal máximo** (M_p): Medida relativa ede quanto a resposta $y(t)$ ultrapassa o seu valor estacionário:

$$M_p[\%] = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100$$

Especificações de desempenho - Interpretação gráfica



Especificações de desempenho em função de ω_n e ζ

1. **Tempo de subida** (t_r): $t_r = \dfrac{\pi - \beta}{\omega_d}$
2. **Instante de pico** (t_p): $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$
3. **Tempo de acomodação** (t_s): $t_s(2\%) = \dfrac{4}{\sigma} = \dfrac{4}{\zeta \cdot \omega_n}$

   OBS: Para $0{,}95 \cdot y(\infty) \leq y(t) \leq 1{,}05 \cdot y(\infty)$, $t \geq \dfrac{3}{\zeta \cdot \omega_n}$
4. **Sobressinal máximo** (M_p): $M_p[\%] = 100 \cdot e^{-\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

Sistemas de 3ªordem I

Há duas possibilidades:

- 3 pólos reais: $-a$, $-b$ e $-c$, para ganho estático unitário:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{abc}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

Resposta a degrau unitário:

$$y(t) = 1 + \frac{bc(b-c)e^{-at} + ca(c-a)e^{-bt} + ab(a-b)e^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)} \text{para } t \geqslant 0$$

Sistemas de 3ªordem II

- 1 real e 1 par de pólos complexo conjugados: $-\zeta \cdot \omega_n \pm \jmath\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ e $-a$, para ganho estático unitário:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a\omega_n^2}{(s+a)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

Resposta a degrau unitário:

$$y(t) = 1 + e^{-\zeta\omega_n t}\left(\alpha\cos(\omega_d t) + \left(\frac{\gamma-\alpha\zeta\omega_n}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)\right) + \eta e^{-at}$$

em que:

$$\alpha = \frac{2\zeta\omega_n a - a^2}{a^2+\omega_n^2-2\zeta\omega_n a}$$

$$\gamma = \frac{4\zeta^2\omega_n^2 a - 2\zeta\omega_n a^2 - \omega_n^2 a}{a^2+\omega_n^2-2\zeta\omega_n a}$$

$$\eta = -\frac{\omega_n^2}{a^2+\omega_n^2-2\zeta\omega_n a}$$

Pólos dominantes

Exemplo: compare as resposta a degrau dos sistemas abaixo

$$
\begin{aligned}
G_1(s) &= \frac{5}{s^2+2s+5} \\
G_2(s) &= \frac{4}{s+4} \cdot \frac{5}{s^2+2s+5} \\
G_3(s) &= \frac{20}{s+20} \cdot \frac{5}{s^2+2s+5}
\end{aligned}
$$

O que podemos concluir?

$\Rightarrow$ Do exemplo anterior podemos dizer que: $G_1(s) \approx G_3(s)$. Isto ocorre porque, se $a \gg \zeta\omega_n$, a parcela referente ao pólo em $-a$ pode ser desprezada.

Sistemas com zeros

Exemplo: compare as resposta a degrau dos sistemas abaixo

$$
\begin{aligned}
G_1(s) &= \frac{25}{s^2+2{,}8s+25} \Longleftarrow -\zeta\omega_n = -1{,}4 \\
G_2(s) &= \frac{25\cdot(0{,}05s+1)}{s^2+2{,}8s+25} \Longleftarrow \text{ zero em } s=-20 \\
G_3(s) &= \frac{25\cdot(0{,}5s+1)}{s^2+2{,}8s+25} \Longleftarrow \text{ zero em } s=-2 \\
G_4(s) &= \frac{25\cdot(-0{,}5s+1)}{s^2+2{,}8s+25} \Longleftarrow \text{ zero em } s=2
\end{aligned}
$$

O que podemos concluir?

$\Rightarrow$ Do exemplo anterior podemos dizer que: $G_1(s) \approx G_2(s)$. Isto ocorre porque, o zero de $G_2(s)$ está distante dos pólos complexo conjugados dominantes.