Transformada de Laplace

Prof. Rodrigo A. Romano

Escola de Engenharia Mauá

Definição da transformada de Laplace

Sejam:

- $f(t)$ = função de tempo, em que $f(t) = 0$ p/ $t < 0$;
- $\mathscr{L}[\cdot]$ = símbolo operacional que indica a transformada de Laplace;
- $F(s)$ = transformada de Laplace de $f(t)$;
- s é uma variável complexa, ou seja, $s = \sigma + j\omega$.

a transformada de Laplace da função $f(t)$ é definida por:

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Pares de transformadas de Laplace

$f(t)$ para $t \geq 0$	$F(s)$
Impulso unitário: $\delta(t)$	1
Degrau unitário: $1(t)$	$\frac{1}{s}$
t^n para $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Teoremas da transformada de Laplace

Linearidade	$k \cdot \mathscr{L}\left[f_1(t) + f_2(t)\right] = k \cdot F_1(s) + k \cdot F_2(s)$
Deslocamento no tempo	$\mathscr{L}\left[f(t-T)\right] = e^{-sT}F(s)$
Deslocamento na frequência	$\mathscr{L}\left[e^{-at}f(t)\right] = F(s+a)$
Fator de escala	$\mathscr{L}\left[f(a \cdot t)\right] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Derivação real	$\mathscr{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}f(0)$
Integração real	$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
Valor final	$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$
Valor inicial	$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

Exemplos I

1. Obter as transformadas de Laplace de $f(t) = t \cdot e^{-5t}$ e $x(t) = e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$.
2. Para a eq. diferencial expressa a seguir, determinar a relação $Y(s)/U(s)$, supondo: $y(0) = 0$.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

3. Determinar o valor de $y(t)$ quando $t \to \infty$, se $y(t)$ for dado por:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = u(t) \text{ e } u(t) = 2(t)$$

.

Obs: $2(t)$ denota um degrau de amplitude 2 no instante $t = 0$.

Exemplos II

4. Determinar a transformada de Laplace da função indicada na figura abaixo: