Sistemas e sinais de tempo discreto

Prof. Rodrigo A. Romano

Escola de Engenharia Mauá

Introdução

Classificação de sinais quanto ao domínio do tempo

- Sinais de tempo contínuo: definidos em qualquer instante pertencente ao intervalo de observação. Assim, podem ser representados por funções $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Sinais de tempo discreto: definidos apenas em determinados instantes. No caso específico de estes instantes serem periódicos (com período T), então o sinal de tempo discreto pode ser representado por $f(kT)$, $k \in \mathbb{N}$.

- Sistemas dinâmicos lineares de **tempo contínuo** são descritos por equações **diferenciais** lineares e a transformada de **Laplace** é utilizada como ferramenta de análise para tais sistemas.
- De forma análoga, a sistemas dinâmicos **amostrados** são descritos por equações de **diferenças** e podem ser analisados através da transformada Z.

Introdução

Classificação de sinais quanto ao domínio do tempo

- Sinais de tempo contínuo: definidos em qualquer instante pertencente ao intervalo de observação. Assim, podem ser representados por funções $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Sinais de tempo discreto: definidos apenas em determinados instantes. No caso específico de estes instantes serem periódicos (com período T), então o sinal de tempo discreto pode ser representado por $f(kT)$, $k \in \mathbb{N}$.

- Sistemas dinâmicos lineares de **tempo contínuo** são descritos por equações **diferenciais** lineares e a transformada de **Laplace** é utilizada como ferramenta de análise para tais sistemas.
- De forma análoga, a sistemas dinâmicos **amostrados** são descritos por equaçoes de **diferenças** e podem ser analisados através da transformada Z.

Definição da transformada $\mathcal{Z}$

Sejam:

- $f(kT)$ a função de tempo discreto, em que $f(kT) = 0$ p/ $k < 0$;
- $\mathcal{Z}[\cdot]$ o símbolo operacional que indica a transformada $\mathcal{Z}$;
- $F(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de $f(kT)$;
- z uma variável complexa, tal que $z = \exp(sT)$ e $s = \sigma + j\omega$;
- T o período de amostragem.

a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral da sequência $f(kT)$ é definida por:

$$\mathcal{Z}[f(kT)] = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot z^{-k}$$

Alguns pares de transformada $\mathcal{Z}$

$f(kT)$ para $k \geq 0$	$F(z)$	$f(kT)$ para $k \geq 0$	$F(z)$
$\delta(kT)$	1	$a^k \cos(k\pi)$	$\dfrac{z}{z+a}$
$1(kT)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\sin(\omega kT)$	$\dfrac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$
kT	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$	$\cos(\omega kT)$	$\dfrac{z\,(z-\cos(\omega T))}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$
e^{-akT}	$\dfrac{z}{z-\exp(-aT)}$	$e^{-akT}\sin(\omega kT)$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin(\omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos(\omega T) + e^{-2aT}}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$	$e^{-akT}\cos(\omega kT)$	$\dfrac{z^2 - ze^{-aT}\cos(\omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos(\omega T) + e^{-2aT}}$

Obs: $\delta(kT)$ e $1(kT)$ denotam um impulso e um degrau unitário no instante $k = 0$, respectivamente.

Algumas propriedades da transformada de $\mathcal{Z}$

Linearidade	$\lambda \cdot \mathcal{Z}\left[f_1(kT) + f_2(kT)\right] = \lambda \cdot F_1(z) + \lambda \cdot F_2(z)$
Atraso no tempo	$\mathcal{Z}\left\{f[(k-n)T]\right\} = z^{-n} \cdot F(z)$
Avanço no tempo	$\mathcal{Z}\left\{f[(k+n)T]\right\} = z^{n} \cdot F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) \cdot z^{n-k}$
Teorema do valor inicial	$\lim_{k\to 0} f(kT) = \lim_{z\to\infty} F(z)$
Teorema do valor final	$\lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$

Função de transferência

A descrição matemática fundamental de um sistema dinâmico de tempo discreto é através de equações de diferenças. No caso linear e invariante no tempo, tal descrição assume a forma geral

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_0y(k)=b_mu(k+m)+\ldots+b_0u(k)$$

Admitindo condições iniciais nulas, pode-se representar a relação entrada-saída através da função de transferência

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0}$$

Função de transferência

A descrição matemática fundamental de um sistema dinâmico de tempo discreto é através de equações de diferenças. No caso linear e invariante no tempo, tal descrição assume a forma geral

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_0y(k)=b_mu(k+m)+\ldots+b_0u(k)$$

Admitindo condições iniciais nulas, pode-se representar a relação entrada-saída através da função de transferência

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0}$$

Transformada $\mathcal{Z}$ inversa

Dada uma função $F(z)$, a sequência $f(k)$[1] correspondente é dita transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $F(z)$, ou seja

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right] \ ,$$

há basicamente três técnicas para obter calcular a transformada $\mathcal{Z}$ inversa:

1. Expansão em série por divisão contínua
2. Expansão em frações parciais
3. Programa de computador

Example

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-0,5)\,(z-1)^2}\right]$$

[1] O período de amostragem T pode ser considerado como 1 unidade de tempo. Com isso, a dependência de T pode ser omitida.