

O Método do Lugar das Raízes (MLR)

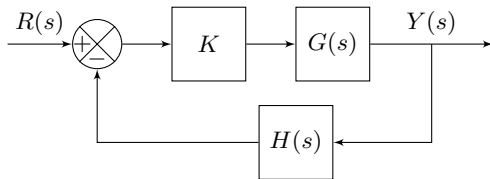
Prof. Rodrigo A. Romano

Escola de Engenharia Mauá (EEM)

Introdução

- Técnica gráfica que permite visualizar a forma como os polos de uma função de transferência em malha fechada variam quando se altera um parâmetro específico (em geral o ganho K).
- Originalmente, o método foi usado para determinar o valor **numérico** dos polos de malha fechada de um sistema. Atualmente, é possível determinar os polos de um sistema em malha fechada de maneira rápida e precisa com o auxílio de ferramentas computacionais (Matlab[®], por exemplo).
- No entanto, o método do lugar das raízes continua tendo grande importância, pois permite que o projetista defina a estrutura adequada de um controlador para um determinado problema.

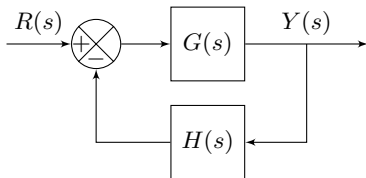
Motivação



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

⇒ Como os polos de $T(s)$ variam em função do ganho K ?

O Lugar Geométrico das Raízes (LGR)



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Os polos do sistema em malha fechada são os valores de s que satisfazem a equação:

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= -1 \\ &= \angle 180^\circ(2i + 1) , \text{ para } i \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Tal condição pode ser desmembrada em duas condições:

$$\angle G(s)H(s) = 180^\circ(2i + 1) , \text{ para } i \in \mathbb{Z} \quad (\text{Condição de fase})$$

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (\text{Condição de módulo})$$

Condições de módulo e fase

A função de transferência de malha aberta $G(s)H(s)$ pode ser escrita na forma¹ de polos e zeros:

$$G(s)H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

Portanto o valor de K , associado a um ponto s_x do plano s pertencente ao LGR, pode ser calculado através da **condição de módulo**, ou seja:

$$K = \frac{|(s_x - p_1)| \cdot |(s_x - p_2)| \cdots |(s_x - p_n)|}{|(s_x - z_1)| \cdot |(s_x - z_2)| \cdots |(s_x - z_m)|}$$

Note que um ponto s_x pertence ao LGR caso satisfaça a igualdade:

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{r=1}^m \angle (s_x - z_r) - \sum_{r=1}^n \angle (s_x - p_r) = 180^\circ(2i + 1)$$

para $i \in \mathbb{Z}$ (**condição de fase**).

¹Admite-se $K > 0$.

Regras básicas para traçado do LGR

Regras para simplificar e sistematizar o traçado do LGR:

- 1 O **nº de ramos**² iguala o nº de polos do sistema;
- 2 **Simetria**: O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real;
- 3 **Segmentos sobre o eixo real**: O eixo real faz parte do LGR apenas à esquerda de uma quantidade ímpar de polos ou zeros (finitos);
- 4 **Pontos de início e de término**: O lugar das raízes começa nos **polos de malha aberta** e tende aos **zeros de malha aberta**;
- 5 **Assíntotas**: Quando o nº de polos finitos n é maior do que o de zeros finitos m , a medida que $k \Rightarrow \infty$, o LGR tende à retas assíntotas traçadas a partir do eixo real em σ_A e com inclinação θ_A :

$$\sigma_A = \frac{\Sigma \text{polos finitos} - \Sigma \text{zeros finitos}}{n - m}$$

$$\theta_A = \frac{180^\circ(2i + 1)}{n - m}, \text{ para } i \in \mathbb{Z}$$

²Caminho percorrido pelos polos de malha fechada quando o ganho é variado.

Regras básicas para traçado do LGR

Regras para simplificar e sistematizar o traçado do LGR:

- 1 O **n° de ramos**² iguala o n° de polos do sistema;
- 2 **Simetria**: O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real;
- 3 **Segmentos sobre o eixo real**: O eixo real faz parte do LGR apenas à esquerda de uma quantidade ímpar de polos ou zeros (finitos);
- 4 **Pontos de início e de término**: O lugar das raízes começa nos **polos de malha aberta** e tende aos **zeros de malha aberta**;
- 5 **Assíntotas**: Quando o n° de polos finitos n é maior do que o de zeros finitos m , a medida que $k \Rightarrow \infty$, o LGR tende à retas assíntotas traçadas a partir do eixo real em σ_A e com inclinação θ_A :

$$\sigma_A = \frac{\Sigma \text{polos finitos} - \Sigma \text{zeros finitos}}{n - m}$$

$$\theta_A = \frac{180^\circ(2i + 1)}{n - m}, \text{ para } i \in \mathbb{Z}$$

²Caminho percorrido pelos polos de malha fechada quando o ganho é variado.

Regras básicas para traçado do LGR

Regras para simplificar e sistematizar o traçado do LGR:

- 1 O **n° de ramos**² iguala o n° de polos do sistema;
- 2 **Simetria**: O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real;
- 3 **Segmentos sobre o eixo real**: O eixo real faz parte do LGR apenas à esquerda de uma quantidade ímpar de polos ou zeros (finitos);
- 4 **Pontos de início e de término**: O lugar das raízes começa nos **polos de malha aberta** e tende aos **zeros de malha aberta**;
- 5 **Assíntotas**: Quando o n° de polos finitos n é maior do que o de zeros finitos m , a medida que $k \Rightarrow \infty$, o LGR tende à retas assíntotas traçadas a partir do eixo real em σ_A e com inclinação θ_A :

$$\sigma_A = \frac{\Sigma \text{polos finitos} - \Sigma \text{zeros finitos}}{n - m}$$

$$\theta_A = \frac{180^\circ(2i + 1)}{n - m}, \text{ para } i \in \mathbb{Z}$$

²Caminho percorrido pelos polos de malha fechada quando o ganho é variado.

Regras básicas para traçado do LGR

Regras para simplificar e sistematizar o traçado do LGR:

- 1 O **nº de ramos**² iguala o nº de polos do sistema;
- 2 **Simetria**: O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real;
- 3 **Segmentos sobre o eixo real**: O eixo real faz parte do LGR apenas à esquerda de uma quantidade ímpar de polos ou zeros (finitos);
- 4 **Pontos de início e de término**: O lugar das raízes começa nos **polos de malha aberta** e tende aos **zeros de malha aberta**;
- 5 **Assíntotas**: Quando o nº de polos finitos n é maior do que o de zeros finitos m , a medida que $k \Rightarrow \infty$, o LGR tende à retas assíntotas traçadas a partir do eixo real em σ_A e com inclinação θ_A :

$$\sigma_A = \frac{\Sigma \text{polos finitos} - \Sigma \text{zeros finitos}}{n - m}$$

$$\theta_A = \frac{180^\circ(2i + 1)}{n - m}, \text{ para } i \in \mathbb{Z}$$

²Caminho percorrido pelos polos de malha fechada quando o ganho é variado.

Regras básicas para traçado do LGR

Regras para simplificar e sistematizar o traçado do LGR:

- 1 O **n° de ramos**² iguala o n° de polos do sistema;
- 2 **Simetria**: O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real;
- 3 **Segmentos sobre o eixo real**: O eixo real faz parte do LGR apenas à esquerda de uma quantidade ímpar de polos ou zeros (finitos);
- 4 **Pontos de início e de término**: O lugar das raízes começa nos **polos de malha aberta** e tende aos **zeros de malha aberta**;
- 5 **Assíntotas**: Quando o n° de polos finitos n é maior do que o de zeros finitos m , a medida que $k \Rightarrow \infty$, o LGR tende à retas assíntotas traçadas a partir do eixo real em σ_A e com inclinação θ_A :

$$\sigma_A = \frac{\Sigma \text{polos finitos} - \Sigma \text{zeros finitos}}{n - m}$$

$$\theta_A = \frac{180^\circ(2i + 1)}{n - m}, \text{ para } i \in \mathbb{Z}$$

²Caminho percorrido pelos polos de malha fechada quando o ganho é variado.

Regras complementares

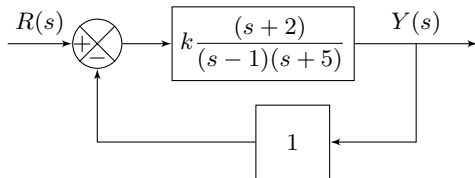
Além das regras apresentadas anteriormente, há outras que permitem refinar e até detalhar alguns pontos do LGR, dentre as quais pode-se citar:

- Pontos de partida e de chegada sobre o eixo real;
- Ângulos de chegada e de saída do eixo real;
- Pontos de cruzamento com o eixo imaginário.

Exemplos

Esboçar o lugar das raízes dos seguintes sistemas:

1



2

