Linearização de modelos

Prof. Rodrigo A. Romano

Escola de Engenharia Mauá

Introdução

Sistemas não-lineares

Um sistema é **não-linear** se o princípio da superposição não se aplicar a ele. Assim, para um sistema não-linear, não se pode obter a resposta a duas entradas simultâneas considerando as entradas individualmente e somando os resultados.

Linearização de sistemas não-lineares

- Muitas vezes, a operação dos sistemas é restrita às vizinhanças de uma determinada condição de operação (ponto de equilíbrio). Nestes casos, é possível aproximar um sistema **não-linear** por um sistema **linear**;
- Este sistema **linear** é equivalente ao sistema **não-linear** apenas em torno do ponto de equilíbrio.

Expansão de funções usando a série de Taylor

Uma função $y = f(x)$ que seja diferenciável no intervalo em questão pode ser expandida usando a série de Taylor:

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &= \quad f(\bar{x}) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \cdot \frac{(x-\bar{x})}{1!} \\ &+ \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=\bar{x}} \cdot \frac{(x-\bar{x})^2}{2!} + \dots \\ &+ \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=\bar{x}} \cdot \frac{(x-\bar{x})^n}{n!} \end{aligned} \tag{1}$$

Uma forma de obter aproximações lineares de funções não-lineares é considerar apenas o termo linear da expansão em uma série de Taylor, ou seja:

$$y = f(x) \approx f(\bar{x}) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \cdot (x-\bar{x})$$

Exemplos

1. Linearizar a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em torno do ponto $\bar{x} = 64$.
   Cálculo da derivada de $f(x)$: $\dfrac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
   $\Rightarrow f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{1}{3\sqrt[3]{\bar{x}^2}} \cdot (x - \bar{x}) = \sqrt[3]{64} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4096}} \cdot (x - 64)$
   $\therefore$ Nas vizinhanças de $x = \bar{x}$, $\sqrt[3]{x} \approx 4 + \frac{1}{48} \cdot (x - 64)$
2. Calcular a raiz cúbica de 66 através de $f(x)$ e da função linearizada.
   $\sqrt[3]{66} = 4,04124$
   $\bar{f}(66) \triangleq 4 + \frac{1}{48} \cdot (66 - 64) = 4,0416667$
3. Efetue a mesma comparação mais distante de $x = \bar{x}$.
   $\sqrt[3]{90} = 4,4814047$
   $\bar{f}(90) \triangleq 4 + \frac{1}{48} \cdot (90 - 64) = 4,5416667$

Ressalta-se que tal aproximação só é válida em torno de $x = \bar{x}$.

Exemplos

1. Linearizar a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em torno do ponto $\bar{x} = 64$.
   Cálculo da derivada de $f(x)$: $\dfrac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
   $\Rightarrow f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{1}{3\sqrt[3]{\bar{x}^2}} \cdot (x - \bar{x}) = \sqrt[3]{64} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4096}} \cdot (x - 64)$
   $\therefore$ Nas vizinhanças de $x = \bar{x}$, $\sqrt[3]{x} \approx 4 + \frac{1}{48} \cdot (x - 64)$
2. Calcular a raiz cúbica de 66 através de $f(x)$ e da função linearizada.
   $\sqrt[3]{66} = 4,04124$
   $\bar{f}(66) \triangleq 4 + \frac{1}{48} \cdot (66 - 64) = 4,0416667$
3. Efetue a mesma comparação mais distante de $x = \bar{x}$.
   $\sqrt[3]{90} = 4,4814047$
   $\bar{f}(90) \triangleq 4 + \frac{1}{48} \cdot (90 - 64) = 4,5416667$

Ressalta-se que tal aproximação só é válida em torno de $x = \bar{x}$.

Exemplos

1. Linearizar a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em torno do ponto $\bar{x} = 64$.
   Cálculo da derivada de $f(x)$: $\dfrac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
   $\Rightarrow f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{1}{3\sqrt[3]{\bar{x}^2}} \cdot (x - \bar{x}) = \sqrt[3]{64} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4096}} \cdot (x - 64)$
   $\therefore$ Nas vizinhanças de $x = \bar{x}$, $\sqrt[3]{x} \approx 4 + \frac{1}{48} \cdot (x - 64)$
2. Calcular a raiz cúbica de 66 através de $f(x)$ e da função linearizada.
   $\sqrt[3]{66} = 4,04124$
   $\bar{f}(66) \triangleq 4 + \frac{1}{48} \cdot (66 - 64) = 4,0416667$
3. Efetue a mesma comparação mais distante de $x = \bar{x}$.
   $\sqrt[3]{90} = 4,4814047$
   $\bar{f}(90) \triangleq 4 + \frac{1}{48} \cdot (90 - 64) = 4,5416667$

Ressalta-se que tal aproximação só é válida em torno de $x = \bar{x}$.

Linearização de funções de duas variáveis

Se função $f(\cdot)$ depender de duas variáveis, $f(x,w)$, a aproximação é dada por:

$$
\begin{aligned}
y = f(x,w) \quad \approx \quad & f(\bar{x},\bar{w}) \\
& + \left.\frac{\partial f(x,w)}{\partial x}\right|_{\substack{x\,=\,\bar{x},\\ w\,=\,\bar{w}}} \cdot (x-\bar{x}) \\
& + \left.\frac{\partial f(x,w)}{\partial w}\right|_{\substack{x\,=\,\bar{x},\\ w\,=\,\bar{w}}} \cdot (w-\bar{w})
\end{aligned}
\tag{2}
$$