RESPOSTA TEMPORAL

V.C.Parro

27 de janeiro de 2021

Sumário

- Calcular a resposta temporal de sistemas dinâmicos LIT na forma SS.
- Resposta temporal $\Rightarrow$ permite analisar comportamento dinâmico do sistema no domínio do tempo.
- Duas soluções:
    - Solução homogênea $\Rightarrow$ resposta à uma condição inicial diferente de zero;
    - Solução forçada $\Rightarrow$ resposta à uma entrada diferente de zero.

Dado um sistema LIT de ordem n,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{1}$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ e $\mathbf{y}(t) \in R^p$.

- A solução homogênea é obtida com a entrada igual a zero:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{2}$$

Resolvendo por Transformada de Laplace,

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \tag{3}$$

$$\mathbf{X}(s)\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right] = \mathbf{x}(0) \tag{4}$$

$$\mathbf{X}(s) = \left[s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{5}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{6}$$

A saída do sistema será:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{7}$$

Exponencial de matriz

A exponencial da matriz **A** $\Rightarrow$ é uma matriz de mesma dimensão de **A**.Formas de calcular exponencial de matriz:

- Usando Transformada de Laplace:

$$e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right] \tag{8}$$

- Expansão em séries:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{A}t)^3 + \frac{1}{4!}(\mathbf{A}t)^4 + \cdots \tag{9}$$

Teorema de Caley-Hamilton

Lembrando da aula anterior (diagonalização de sistema)

$\Rightarrow \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{WAV}$ ou $\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{W}$.

O Teorema de Caley-Hamilton diz que uma função de uma matirz pode ser calculada por meio da mesma função, mas dos autovalores da matriz:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{V}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{W} \tag{10}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{V}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{W} \tag{11}$$

Solução forçada e completa

Caso escalar:

Dado o sistema escalar ou de 1^a ordem $(n = 1)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases} \tag{12}$$

Solução temporal completa (solução homogênea e forçada),

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{13}$$

onde o primeiro termo do lado direito é solução homogênea e o segundo termo do lado direito é a solução forçada. A integral do segundo termo é chamada integral de convolução.

A saída do sistema será dada por:

$$y(t) = ce^{at}x(0) + \int_0^t ce^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t). \tag{14}$$

Demonstração

Rearranjando a equação dos estados,

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t). \tag{15}$$

Multiplicando por e^{-at},

$$e^{-at}\left[\dot{x}(t) - ax(t)\right] = e^{-at}bu(t), \tag{16}$$

$$e^{-at}\dot{x}(t) - e^{-at}x(t) = e^{-at}bu(t). \tag{17}$$

Observando que o lado esquerdo é a derivada do produto de duas funções, então:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-at}x(t)\right] = e^{-at}bu(t). \tag{18}$$

Integrando,

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{-a\tau}x(\tau)\right]d\tau = e^{-at}x(t) - e^{0}x(0) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau. \tag{19}$$

Multiplicando por e^{at},

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau. \tag{20}$$

Caso matricial

Dado o sistema de ordem *n*:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{21}$$

Solução temporal completa (solução homogênea e forçada),

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{22}$$

onde o primeiro termo do lado direito é solução homogênea e o segundo termo do lado direito é a solução forçada. A integral do segundo termo é chamada integral de convolução.

A saída do sistema será dada por:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_{0}^{t} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \tag{23}$$

Observações

- A expressão (23) é raramente utilizada para calcular a resposta temporal de um sistema LIT.
- Usualmente utiliza-se o métrodo da Transformada de Laplace para solução de equação diferencial se for desejada a solução algébrica.
- A integral da equação (23) pode ser resolvida mais facilmente usando a propriedade da convolução da Transformada de Laplace.
- Se for desejada solução numérica $\Rightarrow$ utiliza-se algum método numérico para integração de equações diferenciais.