LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

V.C.Parro

27 de janeiro de 2021

Sumário

1. Grande parte das teorias de projeto de sistemas de controle foram desenvolvidas para sistemas lineares $\Rightarrow$ porém praticamente todos os sistemas reais são não-lineares.
2. O que fazer?

1. Grande parte das teorias de projeto de sistemas de controle foram desenvolvidas para sistemas lineares $\Rightarrow$ porém praticamente todos os sistemas reais são não-lineares.
2. O que fazer?

Sugestão

Pode-se obter um modelo linear para o sistema não-linear.

1. Grande parte das teorias de projeto de sistemas de controle foram desenvolvidas para sistemas lineares $\Rightarrow$ porém praticamente todos os sistemas reais são não-lineares.
2. O que fazer?

Sugestão

Pode-se obter um modelo linear para o sistema não-linear.

Questão importante

A questão se torna: qual a validade do modelo linear do sistema não-linear?

- Complicadas e complexas;
- Somente garantem estabilidade $\Rightarrow$ não garantem desempenho;
- Na maioria dos casos não justifica a complexidade $\Rightarrow$ controle linear em geral funciona bem mesmo para sistemas não-lineares;
- Quando controle linear não funciona adequadamente tem-se as alternativas de $\Rightarrow$ usar programação de ganhos ou controle adaptativo.

Sistema dinâmico não-linear

Dado um sistema não-linear de ordem n descrito por:

$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)$ – vetor de funções da dinâmica dos estados; (1)

$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)$ – vetor de equações das saídas. (2)

onde:
$\mathbf{x}(t)$ $-$ vetor de estados, $\in$ R^n (dimensão nx1);
$\mathbf{u}(t)$ $-$ vetor de entrada, $\in$ R^m(dimensão mx1);
$\mathbf{y}$(t) - vetor de saídas, $\in$ R^p (dimensão px1);

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - vetor de funções não-lineares que descreve a dinâmica do sistema, $\in$ R^n(dimensão nx1);
$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - vetor de funções não-lineares que descreve a saída do sistema, $\in$ R^p(dimensão px1).

O vetor de funções da dinâmica dos estados representado pela eq. (1) é dado de forma mais detalhado como:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = f_1\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right); \\ \dot{x}_2(t) = f_2\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right); \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right). \end{array}\right. \qquad (1)$$

O vetor de funções da saída representado pela eq. (2) é dado de forma mais detalhado como:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right); \\ y_2(t) = g_2\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right); \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right). \end{cases} \tag{2}$$

Exemplo: Sistema massa-mola não linear:
Equação diferencial:

$$m\ddot{x}(t) = -k_1 x(t) - k_2 x^3(t) + F(t)$$

Aplicação

Modelo de mola usualmente utilizado para suspensão de automóveis.

Escrevendo o sistema na forma de espaço de estados não-linear fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -k_1 x(t)/m - k_2 x^3(t)/m + F(t)/m \end{bmatrix}$$

Condição nominal de operação do sistema

1. **A linearização de um sistema dinâmico não-linear é feita em torno de uma condição nominal de operação.**
2. O sistema linear é válido para operação em “torno” dessa condição nominal de operação.

Quanto em torno?

Questão em aberto $\Rightarrow$ depende do sistema!

Modelo de desvios

- Definido pequenos desvios em torno da condição nominal de operação $\Rightarrow$ δx(t), δu(t) e δy0(t):

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x_0}(t) + \delta\mathbf{x}(t); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u_0}(t) + \delta\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y_0}(t) + \delta\mathbf{y}(t). \end{cases} \tag{3}$$

Cálculo da condição nominal de operação

Uma possibilidade é a condição nominal de operação ser um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)\right) = \mathbf{0} \tag{4}$$

$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)\right) \tag{5}$$

- Dessas expressões tem-se $n + p$ equações algébricas não-lineares cuja solução fornece $\mathbf{x}_0(t)$ e $\mathbf{u}_0(t)$.
- Nota-se que em geral o número de saídas de um sistema MIMO é igual ao número de entradas $(m = p)$.
- Conhecendo-se as saídas do sistema na condição nominal de operação $\Rightarrow$ pode-se a partir das eq. (4) e (5) obter o vetor de estados e o vetor de entradas na condição nominal de operação.
- Se a condição nominal de operação não for um ponto de equilíbrio do sistema, tem-se no lugar da eq. (4) o seguinte:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)\right) \tag{6}$$

- A equação da saída (eq. 7) não se altera.
- Nesse caso a condição nominal de operação tem que satisfazer a equação da dinâmica do sistema $\Rightarrow$ pode ser difícil de calcular para alguns casos.
- Das eq. (5) e (6), conhecendo-se as saídas e alguns estados do sistema na condição nominal de operação $\Rightarrow$ tem-se $n + p$ equações não-lineares cuja solução deve fornecer os vetores $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}(t)$.
- A condição nominal de operação é definida genericamente por: $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$, $\mathbf{y}_0(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)\right)$. (9)

Dada a condição nominal de operação (eq. 9), expandindo o vetor de funções $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ em torno de $\mathbf{x}_0(t)$ e $\mathbf{u}_0(t)$ $\Rightarrow$ cada equação da dinâmica do sistema: $\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, para i =1 ... n, fica:

$$\frac{d}{dt}\left(x_{0,i}(t) + \delta x_i(t)\right) = f_i\left(\mathbf{x_0}(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u_0}(t) + \delta\mathbf{u}(t)\right) = f_i\left(\mathbf{x_0}(t), \mathbf{u_0}(t)\right) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{0}} \delta\mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}}\right)_{\mathbf{0}} \delta\mathbf{u}(t) + T.O.S. \qquad (7)$$

onde $T.S.O.$ significa termos de ordem superior e as derivadas parciais das funções f_i em relação aos vetores de estado e de entradas são dadas por:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \delta\mathbf{x}(t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \delta x_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)_0 \delta x_n(t); \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}}\right)_0 \delta\mathbf{u}(t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\right)_0 \delta u_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_m}\right)_0 \delta u_m(t). \tag{9}$$

$\Rightarrow$ o subscrito "0" significa que a derivada parcial é calculada na condição nominal de operação.

Abrindo a derivada do lado esquerdo da eq. (7), tem-se deseprezando os *T.O.S.*:

$$\frac{d}{dt}x_{0,i}(t)+\frac{d}{dt}\delta x_i(t) = f_i\left(\mathbf{x_0}(t), \mathbf{u_0}(t)\right)+\left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \delta\mathbf{x}(t)+\left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}}\right)_0 \delta\mathbf{u}(t) \quad (10)$$

$\Rightarrow$ os *T.S.O.* são de fato desprezíveis desde que $\delta\mathbf{x}(t)$ e $\delta\mathbf{u}(t)$ sejam "pequenos".

Como a condição nominal de operação deve obedecer a equação dinâmica do sistema (eq. 3) $\Rightarrow$ o 1^o termo do lado esquerdo da eq. (10) cancela o 1^o termo do lado direito da equação (ver eq. 8). Assim, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\delta x_i(t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \delta \mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}}\right)_0 \delta \mathbf{u}(t), \tag{11}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\delta x_i(t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \delta x_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)_0 \delta x_n(t) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\right)_0 \delta u_1(t) + \\ + \ldots \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_m}\right)_0 \delta u_m(t) \tag{12}$$

Para todas as n equações do sistema, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{u}}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{u}}\right)_0 \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{u}}\right)_0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{u}(t), \qquad (13)$$

ou mais compactamente,

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u}(t). \qquad (14)$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_0 \end{bmatrix}_{(nxn)} \tag{15}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_m}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m}\right)_0 \end{bmatrix}_{(nxm)} \tag{16}$$

O mesmo processo é repetido para as p equações das saídas do sistema (eq. 4) $\Rightarrow$ expandindo cada equação de saída de $\mathbf{x}_0(t)$ e $\mathbf{u}_0(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} y_{0,i}(t) + \delta y_i(t) = g_i\left(\mathbf{x_0}(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u_0}(t) + \delta\mathbf{u}(t)\right) = \\ g_i\left(\mathbf{x_0}(t), \mathbf{u_0}(t)\right) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{0}} \delta\mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{u}}\right)_{\mathbf{0}} \delta\mathbf{u}(t) + T.O.S. \end{aligned} \tag{17}$$

Como a condição nominal de operação deve obedecer a equação das saídas do sistema (eq. 4) $\Rightarrow$ o 1^o termo do lado esquerdo da eq. (17) cancela o 1^o termo do lado direito da equação, assim, tem-se desprezando os *T.O.S.*:

$$\delta y_i(t) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \delta \mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{u}}\right)_0 \delta \mathbf{u}(t), \tag{18}$$

ou

$$\delta y_i(t) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}\right)_0 \delta x_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_n}\right)_0 \delta x_n(t) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_1}\right)_0 \delta u_1(t) + \\ + \ldots + \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_m}\right)_0 \delta u_m(t)$$

(19)

Para todas as p equações de saídas do sistema, tem-se:

$$\delta \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{u}}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}}\right)_0 \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial \mathbf{u}}\right)_0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}(t), \qquad (20)$$

ou mais compactamente,

$$\delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\delta \mathbf{u}(t). \qquad (21)$$

onde $\mathbf{C}(t)$ e $\mathbf{D}(t)$ são matrizes dadas por:

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_n}\right)_0 \end{bmatrix}_{(pxn)} \tag{22}$$

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_m}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_m}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_m}\right)_0 \end{bmatrix}_{(pxm)} \tag{23}$$

Em resumo as equações dinâmicas linearizadas de um sistema são as seguintes:

$$\frac{d}{dt}\partial \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\partial \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\partial \mathbf{u}(t)$$

(27)

$$\partial \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\partial \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\partial \mathbf{u}(t)$$

Nesse caso, como as matrizes do sistema, **A**, **B**, **C** e **D**, variam no tempo, o sitema é do tipo Linear Variante no Tempo (LVT).

- Se a condição nominal de operação for uma condição de operação em regime, ou seja, $\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}(t) = \mathbf{0}$, então as matrizes do sistema, **A**, **B**, **C** e **D**, são constantes e o sitema é do tipo Linear Invariante no Tempo (LIT). Assim a eq. (27) fica:

$$\frac{d}{dt}\partial \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\partial \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\partial \mathbf{u}(t)$$

(28)

$$\delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\delta \mathbf{u}(t)$$

- **Usualmente nas eq. (27) e (28) eliminam-se os termos de variação, “δ” $\Rightarrow$ mas não se pode esquecer que para uma sistema com dinâmica linearizada os estados, as entradas e as saídas representam as variações dessas grandezas em torno da condição niminal de operação.**