VARIÁVEIS DE ESTADO

CAPÍTULO 4

TRANSFORMAÇÕES LINEARES DAS VARIÁVEIS DE ESTADO

4.1 Introdução

Como vimos no capítulo 1, as variáveis de estado caracterizam-se por propriedades básicas que são traduzidas por um modelo matemático formado por duas equações vetoriais que se apresentam necessariamente sob as formas:

$$\dot{x} = f(x,u) \quad - \text{ equação de estado}$$
$$y = g(x,u) \quad - \text{ equação de saída}$$

No caso dos sistemas lineares, em particular, as funções *f* e *g*, passam a ser combinações lineares das variáveis *x* e *u* e podem ser apresentadas respectivamente sob a forma:

$$\dot{x} = \mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot u$$
$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

Sempre que o modelo matemático de um sistema puder ser apresentado sob essa forma, qualquer que seja o critério de escolha das variáveis *x*, estas serão consideradas variáveis de estado. Já sabemos, inclusive, que há vários critérios clássicos recomendáveis para escolha dessas variáveis. Por exemplo, as chamadas variáveis de estado de fase. Ou a escolha de variáveis que caracterizam as condições iniciais de um sistema. Qualquer que seja a escolha, porém, o número de variáveis será sempre igual à ordem do sistema.

No estudo que se segue consideraremos apenas o caso de sistemas lineares.

4.2 Transformação linear das variáveis de estado

As variáveis de estado que descrevem um sistema podem ser substituídas por outras, obtidas das primeiras por meio de uma transformação linear. Assim, o estado de um sistema pode ser descrito pelo vetor:

$$x = x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou, por um outro vetor

$$x' = x'(t) = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

desde que

$$\begin{array}{l} x'_1 = \mathrm{P}_{11} \cdot x_1 + \mathrm{P}_{12} \cdot x_2 + \mathrm{P}_{13} \cdot x_3 + \ldots + \mathrm{P}_{1n} \cdot x_n \\ x'_2 = \mathrm{P}_{21} \cdot x_1 + \mathrm{P}_{22} \cdot x_2 + \mathrm{P}_{23} \cdot x_3 + \ldots + \mathrm{P}_{2n} \cdot x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x'_n = \mathrm{P}_{n1} \cdot x_1 + \mathrm{P}_{n2} \cdot x_2 + \mathrm{P}_{n3} \cdot x_3 + \ldots + \mathrm{P}_{nn} \cdot x_n \end{array}$$

ou seja,

$$x' = \mathrm{P} \cdot x$$

onde P é o operador matricial da transformação linear

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12} & \mathrm{P}_{13} & \ldots & \mathrm{P}_{1n} \\ \mathrm{P}_{21} & \mathrm{P}_{22} & \mathrm{P}_{23} & \ldots & \mathrm{P}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{P}_{n1} & \mathrm{P}_{n2} & \mathrm{P}_{n3} & \ldots & \mathrm{P}_{nn} \end{bmatrix}$$

Se a matriz P for não singular, isto é, se existir a matriz inversa

$$Q = \mathrm{P}^{-1}$$

teremos também

$$\mathrm{P} = Q^{-1}$$

onde

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

e, consequentemente

$$\begin{array}{l} x_1 = q_{11}\cdot x'_1 + q_{12}\cdot x'_2 + q_{13}\cdot x'_3 + \ldots + q_{1n}\cdot x'_n \\ x_2 = q_{21}\cdot x'_1 + q_{22}\cdot x'_2 + q_{23}\cdot x'_3 + \ldots + q_{2n}\cdot x'_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = q_{n1}\cdot x'_1 + q_{n2}\cdot x'_2 + q_{n3}\cdot x'_3 + \ldots + q_{nn}\cdot x'_n \end{array}$$

4.3 Transformação das equações de estado e de saída

Retomemos as equações de estado e de saída:

$$\begin{array}{c} \dot{x} = A\cdot x + B\cdot u \\ y = C\cdot x + D\cdot u \end{array}$$

Considerando a transformação de variáveis $x' = P\cdot x$ e sua inversa $x = Q\cdot x'$ onde $Q = P^{-1}$ e também $P = Q^{-1}$ podemos escrever as equações acima em função das novas variáveis x'

$$\begin{array}{c} Q\cdot \dot{x}' = A\cdot Q\cdot x' + B\cdot u \\ y = C\cdot Q\cdot x' + D\cdot u \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c} \dot{x}' = Q^{-1}\cdot A\cdot Q\cdot x' + Q^{-1}\cdot B\cdot u \\ y = C\cdot Q\cdot x' + D\cdot u \end{array}$$

Esse resultado permite que se escrevam as novas equações sob a forma

$$\begin{array}{c} \dot{x}' = A'\cdot x' + B'\cdot u \\ y = C'\cdot x' + D\cdot u \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{ccc} A' = Q^{-1}\cdot A\cdot Q & \text{ou} & A\cdot Q = Q\cdot A' \\ B' = Q^{-1}\cdot B & \text{e} & C' = C\cdot Q \end{array}$$

A matriz de transmissão D não se altera nessa transformação.

O fato de que as novas variaveis x', satisfazem uma equação com a forma normal das equações de estado, prova que essas variáveis qualificam-se como variáveis de estado.

Uma importante propriedade relativa às transformações lineares das variáveis de estado é a que se refere à invariança dos auto-valores da matriz A do sistema, essas transformações vêm expressas pelo teorema:

*Os auto-valores da matriz **A**, são invariantes numa transformação linear **Q**, de **x** em **x'**.*

De fato, se $A = Q \cdot A' \cdot Q^{-1}$, podemos escrever para qualquer auto-valor s de A:

$$[s \cdot I - A] = [s \cdot Q \cdot Q^{-1} - Q \cdot A' \cdot Q^{-1}] = Q \cdot [s \cdot I - A'] \cdot Q^{-1}$$

Recordando que o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes fatores, vem:

$$\det\left([s \cdot I - A]\right) = \det(Q) \cdot \det\left([s \cdot I - A']\right) \cdot \det\left(Q^{-1}\right)$$

Sendo a matriz Q não singular (isto é, sendo $\det(Q) >< 0$ e consequentemente também $\det(Q') >< 0$), resulta que $\det([s \cdot I - A]) = 0$, = 0, implica em se ter, também, $\det([s \cdot I - A']) = 0$. Logo, se λ é auto-valor de A, será necessariamente também auto-valor de A'. Portanto, os auto-valores de um sistema são independentes das variáveis de estado utilizadas na descrição do sistema.

<u>*Exemplo 1*</u>: Dado o sistema cuja representação de estado é descrita pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = 0$$

Determine as novas equações do sistema resultantes da transformação de variáveis de estado definida pelas relações:

$$x'_1 = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$$
$$x'_2 = x_1 + x_2$$

Verifique também a invariança dos auto-valores da matriz A.

Solução:

$$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(P) = \Delta = 1 \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 15 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Verificação: $A \cdot Q = Q \cdot A'$

$$\left.\begin{aligned} A \cdot Q &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \\ Q \cdot A' &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -13 & 15 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \text{O.K.}$$

....

Verificação da invariança dos auto-valores:

$$\det(s \cdot I - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 12 & s+7 \end{bmatrix} = s^2 + 7 \cdot s + 12 = (s+3) \cdot (s+4)$$

$$\det(s \cdot I - A') = \det \begin{bmatrix} s+13 & -15 \\ 6 & s-6 \end{bmatrix} = (s+13) \cdot (s-6) + 90 = s^2 + 7 \cdot s + 12$$

Observe que os polinômios característicos das duas matrizes são iguais. Logo os auto-valores serão os mesmos, a saber $s_1 = -3$ e $s_2 = -4$. Finalmente:

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

....

No estudo dos sistemas, recorre-se as transformações de variáveis de estado por vários motivos, como por exemplo, a simplificação dos cálculos ou da manipulação das matrizes, a facilidade de pôr em evidência propriedades do sistema, efetuar a realimentação de estado, etc.

Há dois tipos importantes de transformações de variáveis de estado, a saber:

a. a transformação por similitude, isto é, a transformação que diagonaliza a matriz A do sistema (ou seja, que transforma A numa matriz A', onde apenas os elementos da diagonal principal são diferentes de zero);
b. a transformação que resulta numa matriz do sistema de forma canônica.

4.4 Matriz A diagonalizada

Vamos estudar neste parágrafo como é constituída a matriz A' que resulta da transformação que diagonaliza a matriz A de um sistema. Adotaremos nesse caso a notação $A' = A_d$.

Seja A um sistema de ordem n, cuja matriz A possui os auto-valores $s_1, s_2, \dots s_n$, todos distintos, isto é, se $i >< j$, então $s_i >< s_j$ (diz-se que todos os auto-valores são simples, ou que não há auto-valores múltiplos).

Teremos qualquer que seja a matriz A

$$\det(s \cdot I - A) = (s - s_i) \cdot (s - s_2) \dots (s - s_n)$$

Por outro lado, sendo $A' = A_d$ a matriz diagonalizada, obtida pela transformação

$$A_d = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$$

podemos escrever

$$A_d = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix}$$

Evidentemente resulta:

$$\det(s \cdot I - A_d) = (s - a) \cdot (s - b) \dots (s - d)$$

Conclue-se que *a, b, ..., d*, são os auto-valores de A_d. Mas, como os auto valores não se alteram com a transformação de A em A_d, resulta

$$a = s_1 \qquad b = s_2 \qquad \dots . \qquad d = s_n$$

o que significa que a matriz diagonalizada de um sistema tem como elementos da diagonal principal, os auto-valores da matriz A do sistema:

$$A_d = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}$$

Observação: A diagonalização é sempre possível nos casos em que os auto-valores da matriz A forem todos distintos. Se houverem auto-valores múltiplos, a diagonalização nem sempre é possível. Nesse caso o que mais se aproxima da diagonalização é a forma de Jordan.

Exemplo 2: Determinar as matrizes diagonalizadas que se obtêm a partir das matrizes A_1 e A_2.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -134 & 39 \\ 0 & -38 & 8 \\ 0 & -153 & 32 \end{bmatrix}$$

Solução:

Note que as duas matrizes têm os mesmos auto-valores, que são -1, -2, -4. Logo a matriz diagonalizada que se obtém nos dois casos será a mesma:

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: As equações de estado e de saída de um sistema linear são as seguintes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Deseja-se representar esse sistema por meio das variáveis:

$$x' = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad x'_2 = x_1 - 2 \cdot x_2$$

Determine as novas equações de estado e de saída.

Solução:

Sendo $x' = P \cdot x$ onde $P = Q^{-1}$, temos neste caso:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Note que obtivemos a matriz do sistema, diagonalizada. Portanto os elementos da diagonal principal são os auto-valores de A, o que pode ser facilmente comprovado.

$$B' = Q^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1{,}5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = C \cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As equações de estado e de saída do sistema, descrito pelas variáveis de estado x'_1 e x'_2 são respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1{,}5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

4.5 Transformação por similitude. Auto-vetores.

A matriz Q da transformação que diagonaliza a matriz A do sistema, permite escrever:

$$A \cdot Q = Q \cdot A_d$$

Admitindo por simplicidade, que a matriz A tenha dimensão 3x3, a equação acima se escreve:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$$

onde s_1, s_2 e s_3, são os auto-valores de A.

Efetuando as multiplicações indicadas

$$\begin{bmatrix} a_{11}q_{11}+a_{12}q_{21}+a_{13}q_{31} & a_{11}q_{12}+a_{12}q_{22}+a_{13}q_{32} & a_{11}q_{13}+a_{12}q_{23}+a_{13}q_{33} \\ a_{21}q_{11}+a_{22}q_{21}+a_{23}q_{31} & a_{21}q_{12}+a_{22}q_{22}+a_{23}q_{32} & a_{21}q_{13}+a_{22}q_{23}+a_{23}q_{33} \\ a_{31}q_{11}+a_{32}q_{21}+a_{33}q_{31} & a_{31}q_{12}+a_{32}q_{22}+a_{33}q_{32} & a_{31}q_{13}+a_{32}q_{23}+a_{33}q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1\cdot q_{11} & s_2\cdot q_{12} & s_3\cdot q_{13} \\ s_1\cdot q_{21} & s_2\cdot q_{22} & s_3\cdot q_{23} \\ s_1\cdot q_{31} & s_2\cdot q_{32} & s_3\cdot q_{33} \end{bmatrix}$$

Observe que os vetores

$$q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix} \qquad q_2 = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{bmatrix} \qquad q_3 = \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix}$$

são as colunas da matriz Q e permitem escrever, por um lado

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

e por outro, o produto

$$A \cdot Q = Q \cdot A_d$$

sob a forma

$$\begin{bmatrix} A\cdot q_1 & A\cdot q_2 & A\cdot q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1\cdot q_1 & s_2\cdot q_2 & s_3\cdot q_3 \end{bmatrix}$$

de onde resulta

$$\begin{array}{lcl} A\cdot q_1 = s_1\cdot q_1 & \text{ou} & \left[A - s_1\cdot I\right]\cdot q_1 = 0 \\ A\cdot q_2 = s_2\cdot q_2 & \text{ou} & \left[A - s_2\cdot I\right]\cdot q_2 = 0 \\ A\cdot q_3 = s_3\cdot q_3 & \text{ou} & \left[A - s_3\cdot I\right]\cdot q_3 = 0 \end{array}$$

Todo vetor q_i (não nulo), que satisfaz à relação

$$\left[A - s_i\cdot I\right]\cdot q_i = 0$$

denomina-se auto-vetor da matriz A, associado ao auto-vetor s_i dessa matriz. No caso temos apenas $i = 1, 2, 3$, pois supuzemos um sistema de 3ª ordem. Entretanto a demonstração pode ser facilmente estendida a um sistema de ordem n, qualquer.

Conclusão: A matriz Q da transformação que diagonaliza a matriz A tem suas colunas formadas pelos auto-vetores (linearmente independentes) da própria matriz A.

<u>*Exemplo 4*</u>: Determine os auto-valores e auto-vetores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Escreva também, a matriz A_d e a matriz Q da transformação $A \rightarrow \mathrm{A}_d$.

Solução:

Auto-valores de A:

$$\det\left[s \cdot I - A\right] = \det\begin{bmatrix} s+1 & +2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} = s + 5 \cdot s + 6 = (s+2)\cdot(s+3) = 0$$

Auto-valores de $s_1 = -2$ e $s_2 = -3$

A matriz diagonalizada será então

$$A_d = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Auto-vetores:

$$\left[s_1 \cdot I - A\right] \cdot q_1 = \begin{bmatrix} -1 & +2 \\ -1 & +2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad -q_{11} + 2 \cdot q_{21} = 0 \qquad \text{ou} \qquad q_{11} = 2 \cdot q_{21}$$

Dessa equação matricial, resulta apenas uma equação (linearmente independente), a saber:

$$q_{11} = 2 \cdot q_{21}$$

Há, portanto, uma infinidade de soluções (linearmente dependentes). Com exceção da solução trivial (isto é $q_{11} = 0$ e $q_{21} = 0$), qualquer outra é permitida. Por exemplo: $q_{21} = 1$ e $q_{11} = 2$. Escolhemos pois, como primeiro auto-vetor:

$$q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, com $s_2 = -3$

$$\left[s_2 \cdot I - A\right] \cdot q_2] = \begin{bmatrix} -2 & +2 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2 \cdot q_{12} + 2 \cdot q_{22} = 0 \qquad \rightarrow \qquad -q_{12} + q_{22} = 0$$

Mais uma vez, temos apenas uma equação independente: $q_{12} = q_{22}$. Podemos escolher $q_{12} = 1$ e $q_{22} = 1$.

$$q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz da tranformação que diagonliza a matriz A, é então:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se fazer uma verificação do cálculo, pela condição:

$$A \cdot Q = Q \cdot A_d$$

$$A \cdot Q = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot A_d = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Resultado OK.

Vejamos um exemplo de diagonalização no caso em que os auto-valores são complexos conjugados.

<u>Exemplo 5</u>: O modelo do estado de um sistema, tem como matriz do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -2{,}25 & 0{,}25 \\ -4{,}25 & -1{,}75 \end{bmatrix}$$

Determine os auto-valores, os auto-vetores, bem como a matriz diagonalizada A_d e a matriz de transformação Q que diagonaliza a matriz do sistema.

Solução:

Auto-valores:

$$\det\left[s \cdot I - A\right] = \det\begin{bmatrix} s + 2{,}25 & -0{,}25 \\ 4{,}25 & s + 1{,}75 \end{bmatrix} = (s + 2{,}25) \cdot (s + 1{,}75) + 0{,}75 \cdot 4{,}25 = s^2 + 4 \cdot s + 5$$

Resulta:

$$s_1 = -2 + j \qquad \text{e} \qquad s_2 = -2 - j$$

Matriz diagonalizada:

$$A_d = \begin{bmatrix} -2 + j & 0 \\ 0 & -2 - j \end{bmatrix}$$

Escolha dos auto-vetores:

$$[s_1 - A] \cdot q_1 = \begin{bmatrix} 0{,}25 + j & -0{,}25 \\ 4{,}25 & -0{,}25 + j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_1 = -2 + j$$

$$0{,}25 \cdot q_{11} + j \cdot q_{11} - 0{,}25 \cdot q_{21} = 0$$
$$4{,}25 \cdot q_{11} - 0{,}25 \cdot q_{21} + j \cdot q_{21} = 0$$

Nesse caso os auto-vetores, geralmente também são complexos:

$$q_{11} = a_1 + j \cdot b_1 \qquad q_{21} = a_2 + j \cdot b_2$$

Cálculo de $q_{11} = a_1 + j \cdot b_1$:

$$0{,}25 \cdot a_1 + j \cdot a_1 + j \cdot 0{,}25 \cdot b_1 - b_1 - 0{,}25 \cdot a_2 - j \cdot 0{,}25 \cdot b_2 = 0$$

Equacionando separadamente as partes real e imaginária:

$$0{,}25 \cdot a_1 - b_1 - 0{,}25 \cdot a_2 = 0 \qquad \text{com} \quad a_1 = 0 \qquad \text{vem} \quad a_2 = -4 \cdot b_1$$
$$a_1 + 0{,}25 \cdot b_1 - 0{,}25 \cdot b_2 = 0 \qquad \text{com} \quad b_1 = 1 \qquad \text{vem} \quad a_1 + 0{,}25 = 0{,}25 \cdot b_2$$

Fazendo (arbitrariamente) $a_1 = 0$ e $b_1 = 1$, resulta

$$a_2 = -4 \qquad \text{e} \qquad b_2 = 1$$

Logo

$$q_{11} = 0 + j \qquad q_{21} = -4 + j \qquad \text{e} \qquad q_1 = \begin{bmatrix} +j \\ -4 + j \end{bmatrix}$$

Observação: Usando-se a 2ª equação, obtém-se o mesmo resultado anterior, o que mostra que as equações não são independentes:

$$4{,}25 \cdot q_{11} - 0{,}25 \cdot q_{21} + j \cdot q_{21} = 0$$
$$4{,}25 \cdot a_1 + j \cdot 4{,}25 \cdot b_1 - 0{,}25 \cdot a_2 - j \cdot 0{,}25 \cdot b_2 + j \cdot a_2 - b_2 = 0$$

$4{,}25 \cdot a_1 - 0{,}25 \cdot a_2 - b_2 = 0$ $\quad a_1 = 0$ $\quad a_2 = -4 \cdot b_2$

$4{,}25 \cdot b_1 - 0{,}25 \cdot b_2 + a_2 = 0$ $\quad b_1 = 1$ $\quad 0{,}25 \cdot b_2 - a_2 = 4{,}25$ $\quad b_2 - 4 \cdot a_2 = 17$

$b_2 + 16 \cdot b_2 = 17$ $\quad b_2 = 1$ $\quad a_2 = -4$

O mesmo resultado anterior.

$$[s_2 - A] \cdot q_2 = \begin{bmatrix} 0{,}25 - j & -0{,}25 \\ 4{,}25 & -0{,}25 - j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0{,}25 \cdot q_{12} - j \cdot q_{12} - 0{,}25 \cdot q_{22} = 0$$
$$4{,}25 \cdot q_{12} - 0{,}25 \cdot q_{22} - j \cdot q_{22} = 0$$

$$q_{12} = c_1 + j \cdot d_1 \qquad q_{22} = c_2 + j \cdot d_2$$

Cálculo de $q_{12} = c_1 + j \cdot d_1$:

$$0{,}25 \cdot c_1 + j \cdot 0{,}25 \cdot d_1 - j \cdot c_1 + d_1 - 0{,}25 \cdot c_2 - j \cdot 0{,}25 \cdot d_2 = 0$$

Equacionando separadamente as partes real e imaginária:

$0{,}25 \cdot c_1 + d_1 - 0{,}25 \cdot c_2 = 0$ $\quad c_1 = 0$ $\quad d_1 = 0{,}25 \cdot c_2$

$+0{,}25 \cdot d_1 - c_1 - 0{,}25 \cdot d_2 = 0$ $\quad 0{,}25 \cdot d_1 = 0{,}25 \cdot d_2$ $\quad d_1 = d_2 = 1$ $\quad c_2 = 4$

Logo

$$q_{12} = 0 + j \qquad q_{22} = 4 + j \qquad \text{e} \qquad q_1 = \begin{bmatrix} +j \\ 4 + j \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz Q e sua inversa, serão:

$$Q = \begin{bmatrix} +j & +j \\ -4 + j & 4 + j \end{bmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}125 + 0{,}5/j & -0{,}125 \\ -0{,}125 + 0{,}5/j & 0{,}125 \end{bmatrix}$$

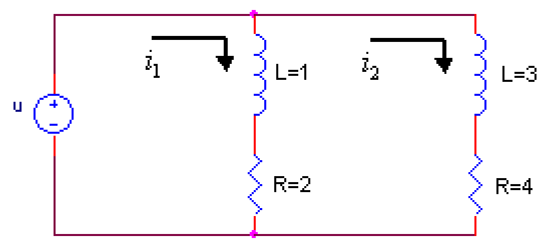
Verificação: $A \cdot Q = Q \cdot A_d$

$$A \cdot Q = \begin{bmatrix} -2{,}25 & 0{,}25 \\ -4{,}25 & -1{,}75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +j & +j \\ -4 + j & 4 + j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - j \cdot 2 & 1 - j \cdot 2 \\ 7 - j \cdot 6 & -7 - j \cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot A_d = \begin{bmatrix} +j & +j \\ -4 + j & 4 + j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 + j & 0 \\ 0 & -2 - j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - j \cdot 2 & 1 - j \cdot 2 \\ 7 - j \cdot 6 & -7 - j \cdot 6 \end{bmatrix}$$

Resultado O.K.

Exemplo 6: Escreva, para o circuito da figura abaixo, as equações de estado, usando as correntes de malha como variáveis de estado. Calcule os auto-valores e auto-vetores da matriz A, a matriz Q da transformação $A \to A_d$, e escreva as novas equações de estado com auxílio da matriz do sistema diagonalizada. Interprete o significado físico das novas variáveis de estado.



Unidades do SI

Variáveis de estado:

$$x_1 = i_1(t)$$
$$x_2 = i_2(t)$$

Solução:

Equações de análise de malhas:

$$1 \cdot \dot{x}_1 + 2 \cdot x_1 - 1 \cdot \dot{x}_2 - 2 \cdot x_2 = u(t)$$
$$3 \cdot \dot{x}_2 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot \dot{x}_2 - 1 \cdot \dot{x}_1 - 2 \cdot x_1 = 0$$

Reescrevendo:

$$\dot{x}_1 + 2 \cdot x_1 - \dot{x}_2 - 2 \cdot x_2 = u(t)$$
$$-\dot{x}_1 - 2 \cdot x_1 + 4 \cdot \dot{x}_2 + 6 \cdot x_2 = 0$$

Somando as equações membro a membro:

$$3 \cdot \dot{x}_2 + 4 \cdot x_2 = u(t)$$

Somando 4 vezes a primeira com a segunda:

$$3 \cdot \dot{x}_1 + 6 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 4 \cdot u(t)$$

Resultam as equações de estado:

$$\dot{x}_1 = -2 \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{4}{3} \cdot u(t)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{4}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2/3 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$\det\left[s \cdot I - A\right] = \det \begin{bmatrix} s+2 & -2/3 \\ 0 & s+4/3 \end{bmatrix} = (s+2) \cdot (s+4/3) = 0$$

Auto-valores $s_1 = -2$ e $s_2 = -4/3$

Portanto: $A_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix}$

Auto-vetores

Para $s_1 = -2$ $\rightarrow$ $\left[s_1 \cdot I - A\right] \cdot q_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ 0 & -2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resulta q_{11} qualquer e $q_{21} = 0$. Faremos $q_{11} = 1$. Logo:

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $s_2 = -4/3$ $\rightarrow$ $\left[s_2 \cdot I - A\right] \cdot q_2 = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resulta $q_{12} = q_{22}$. Faremos $q_{12} = q_{22} = 1$. Logo:

$$q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \left[q_1 \quad q_2\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Det\,(Q) = 1 \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na nova representação temos:

$$A_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix} \qquad B' = Q^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

As novas variáveis se relacionam com as antigas pela transformação:

$$x' = Q^{-1} \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad x'_1 = x_1 - x_2 \qquad x'_2 = x_2$$

x'_1 e x'_2 podem ser interpretadas como correntes de ramo, no circuito dado. Da fato, as novas equações podem ser postas sob a forma:

$$\dot{x}'_1 = -2 \cdot x'_1 + u(t) \qquad \text{ou} \qquad \dot{x}'_1 + 2 \cdot x'_1 = u(t)$$

$$\dot{x}'_2 = -4/3 \cdot x'_2 + 1/3 \cdot u(t) \qquad \text{ou} \qquad 3 \cdot \dot{x}'_2 + 4 \cdot x'_2 = u(t)$$

As duas últimas equações à direita são as equações do circuito por análise de correntes de ramos.

Observação: Note que quando se diagonaliza a matriz do sistema as variáveis de estado ficam desacopladas, isto é, em cada equação escalar de estado só comparece uma das variáveis de estado, além das variáveis de entrada.

Finalmente, um exemplo focalizando um sistema de terceira ordem.

<u>Exemplo 7</u>: O modelo de estados de um sistema é descrito pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -18 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = [0]$$

Escreva as equações desse sistema com as variáveis desacopladas.

Sol ução:

$$\det[s \cdot I - A] = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix} = s \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 4) - s = s \cdot (s+1) \cdot (s+3)$$

auto-valores: $s_1 = 0$ $\qquad s_2 = -1$ $\qquad s_3 = -3$

Matriz diagonalizada:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Cálculo dos auto-vetores:

$$[s_1 \cdot I - A] \cdot q_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_1 = 0$$

Resulta: q_{11} qualquer, $-q_{21} = 0$ e $2 \cdot q_{21} - q_{31} = 0$. Em conseqüência, fazendo $q_{11} = 1$, vem:

$$q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [s_2 \cdot I - A] \cdot q_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_2 = -1$$

Resulta: $q_{12} + q_{22} = 0$ e $q_{22} - q_{32} = 0$. Fazendo $q_{12} = -1$, vem:

$$q_2 = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [s_3 \cdot I - A] \cdot q_3 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_3 = -3$$

Resulta: $-3 \cdot q_{13} - q_{23} = 0$ e $q_{23} + q_{33} = 0$. Fazendo $q_{13} = 1$, vem:

$$q_3 = \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A matriz Q da transformação por similitude é:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Determinação da matriz B':

$$B' = Q^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Determinação da matriz C':

$$C' = C \cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, as equações de estado e de saída, com as variáveis desacopladas, são respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

4.6 Outros casos de transformações

Consideremos um sistema cuja equação característica é:

$$Q(s) = s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot s + a_n$$

A matriz A desse sistema pode ser apresentada sob a forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Note que a última linha da matriz é formada pelos coeficientes do polinômio característico, na ordem inversa e com o sinal contrário com que aparecem no polinômio. Além disso todos os elementos situado logo acima da diagonal principal, são unitários. Os demais elementos da matriz, são nulos. Essa é a denominada forma canônica da matriz do sistema.

Sejam $s_1, s_2, \ldots, s_n$, os auto-valores da matriz A. A matriz diagonalizada será:

$$A_d = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}$$

Prova-se facilmente que a matriz $Q = Q_v$, da transformação que leva a matriz A sob a forma canônica à matriz A_d, é a seguinte:

$$Q_V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_1^{\ 2} & s_2^{\ 2} & s_3^{\ 2} & \dots & s_n^{\ 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^{\ n-1} & s_2^{\ n-1} & s_3^{\ n-1} & \dots & s_n^{\ n-1} \end{bmatrix}$$

É a denominada matriz de Vandermond, relativa aos auto-valores de A. Pode-se provar esse fato diretamente pelo cálculo dos auto-vetores, ou, indiretamente, verificando a relação:

$$A_c \cdot Q_v = Q_v \cdot A_d$$

<u>*Exemplo 8*</u>: Mostre que a matriz de transformação que diagonaliza a matriz A_c abaixo, apresentada sob forma canônica, é a matriz de Vandermond relativa aos auto-valores de A_c.

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \qquad A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Solução:

A equação característica de A, é:

$$Q(s) = s^3 + 7 \cdot s^2 + 14 \cdot s + 8 = (s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+3)$$

Auto-valores: $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -4$

Determinação dos auto-vetores:

$$[s \cdot I - A] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 8 & 14 & s+7 \end{bmatrix}$$

$$[s_1 I - A] \cdot q_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 8 & 14 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_1 = -1$$

$$-q_{11} - q_{21} = 0 \qquad q_{21} = -q_{11}$$
$$-q_{21} - q_{31} = 0 \qquad q_{31} = -q_{21}$$

Fazendo $q_{11} = 1$, vem $q_{21} = -1$ e $q_{31} = 1$ $\rightarrow$ $q_1 = [1 \quad -1 \quad 1]'$

$$[s_2 I - A] \cdot q_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 8 & 14 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_2 = -2$$

$$-2 \cdot q_{12} - q_{22} = 0 \qquad q_{22} = -2 \cdot q_{12}$$
$$-2 \cdot q_{22} - q_{32} = 0 \qquad q_{32} = -2 \cdot q_{22}$$

Fazendo $q_{12} = 1$, vem $q_{22} = -2$ e $q_{32} = 4$ $\rightarrow$ $q_2 = [1 \quad -2 \quad 4]'$

$$[s_3 I - A] \cdot q_3 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 8 & 14 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_3 = -4$$

$$-4 \cdot q_{13} - q_{23} = 0 \qquad q_{23} = -4 \cdot q_{13}$$
$$-4 \cdot q_{23} - q_{33} = 0 \qquad q_{33} = -4 \cdot q_{23}$$

Fazendo $q_{13} = 1$, vem $q_{23} = -4$ e $q_{33} = 16$ $\rightarrow$ $q_3 = [1 \quad -4 \quad 16]'$

$$Q_V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1{}^2 & s_2{}^2 & s_3{}^2 \end{bmatrix}$$

Tranformação de uma matriz sob forma qualquer A para a forma canônica A_c, pode ser obtida por uma sequência de duas transformações: $A \rightarrow A_d \rightarrow A_c$. De fato

$$A \to A_d : A_d = Q^{-1} \cdot A \cdot Q \qquad \text{e} \qquad A_d \to A_c : A_c = Q_V \cdot A_d \cdot Q_V^{-1}$$

ou, compondo essas duas relações:

$$A_c = Q_V \cdot Q^{-1} A \cdot Q \cdot Q_V^{-1} = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

onde $T = Q \cdot Q_V^{-1}$ e $T^{-1} = Q_V \cdot Q^{-1}$

<u>*Exemplo 9*</u>: Dado o sistema descrito pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

determine a matriz T da transformação que leva a matriz do sistema à forma canônica e escreva as equações de estado e de saída do sistema transformado. Quais os valores iniciais das novas variáveis de estado?

Solução:

$$\det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix} = s^2 + 6 \cdot s + 8 = (s+2) \cdot (s+4)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \qquad s_1 = -2 \qquad s_2 = -4 \qquad A_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad Q_V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ -{,}05 & -0{,}5 \end{bmatrix} \qquad Q_V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$T = Q \cdot Q_V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = Q_V \cdot Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificação:

$$A_c = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ -1{,}5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad x_0' = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

4.7 *Exercícios Propostos*

1. As equações de estado e de saída de um sistema, são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \qquad \text{e} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Supondo condições iniciais nulas e $u(t) = h(t) = degrau\ unitário$.

a. Determine a matriz Q de transformação capaz de diagonalizar a matriz do sistema.
b. Escreva as equações de estado e de saída do sistema, com a matriz A diagonalizada.
c. Determine a matriz de transição de estado $\phi(s)$, para o caso da matriz A diagonalizada.
d. Calcule a resposta $Y(s)$ do sistema.
e. Determine a resposta $y(t)$ do sistema.

Respostas:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad Y(s) = \frac{3}{s(5+2)} \qquad y(t) = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t})$$

2. Dadas as equações de estado e de saída de um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a. Os auto-valores e auto-vetores da matriz do sistema.
b. A matriz Q, de transformação por similitude e sua inversa Q^{-1}, e escreva as equações de estado e de saída do sistema para as variáveis de estado desacopladas.
c. A resposta do sistema representado pelas equações do item anterior, para o caso de condições iniciais nulas e $u(t) = h(t) = degrau\ unitário$.

Respostas:

$$s_1 = -2 \qquad s_2 = -4 \qquad q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -{,}05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 0{,}25 + 0{,}5 \cdot e^{-2t} - 0{,}75 \cdot e^{-4t} \quad \text{e} \quad y_2 = 0{,}25 - 1{,}5 \cdot e^{-2t} + 1{,}25 \cdot e^{-4t}$$

3. Dado o sistema cuja representação de estado é descrita pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -13 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = 0 \qquad x_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a. A transformação que diagonaliza a matriz A.
b. As novas matrizes B' e C'.
c. O estado inicial descrito pelas novas variáveis de estado.

Respostas:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 + j \cdot 6{,}0000 & 2 - j \cdot 6{,}0000 \\ 0 + j \cdot 0{,}43331 & 0 - j \cdot 0{,}43331 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 0{,}0769 - j \cdot 0{,}1154 \\ 0{,}0769 + j \cdot 0{,}1154 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 2 + j \cdot 3 & 2 - j \cdot 3 \end{bmatrix} \qquad D = 0 \qquad x'_0 = \begin{bmatrix} -0{,}5961 - j \cdot 0{,}2308 \\ -0{,}5961 + j \cdot 0{,}2308 \end{bmatrix}$$

4. Quando os auto-valores (pólos) de um sistema são complexos conjugados, a matriz diagonalizada apresenta pouco interesse, pois transformações complexas não têm interpretação física imediata. Assim, um sistema de 2ª ordem cuja equação característica é:

$$s^2 + 2 \cdot \alpha \cdot s + \omega_0^2 = (s + \alpha)^2 + \omega_d^2 = 0$$

com $\quad 0 < (\alpha / \omega_0) < 1 \quad$ e $\quad \omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$

possui auto-valores:

$$s_1 = -\alpha + j \cdot \omega_d \quad \text{e} \quad s_2 = -\alpha - j \cdot \omega_d$$

e na matriz diagonalizada, prefere-se obter a matriz transformada sob a forma:

$$A' = \begin{bmatrix} -\alpha & \omega_d \\ -\omega_d & -\alpha \end{bmatrix}$$

Determine a matriz de transformação T, que transforma a matriz canônica desse sistema na matriz A', acima indicada.