CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

V.C.Parro

27 de janeiro de 2021

Sumário

Definição:
Um sistema LIT é controlável se existe um vetor de entrada $\mathbf{u}(t)$ para $0 \leq \quad t \quad \leq \quad T$, com $T \quad > 0$ e finito, tal que o sistema vai da condição inicial $\mathbf{x}(0) =$ para qualquer estado $\mathbf{x}$ no intervalo de tempo T.

Observações

1. Iniciar em $t = 0$ não é um caso especial. Se puder ir para qualquer estado em tempo finito, iniciando em$t = 0$, então se pode de qualquer condição inicial alcançar qualquer estado em tempo finito.
2. Para controlabilidade basta considerar a solução forçada do sistema, ou seja:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{1}$$

1. A controlabilidade está associada à capacidade de influenciar todos os estados através das entradas do sistema.

Teste de Controlabilidade

Seja um sistema de ordem n, dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{2}$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$ e $\mathbf{u}(t) \in R^m$. Observe que para um sistema ser controlável basta analisar a equação dos estados, ou seja, o par de matrizes **A** e **B**.

Definindo a matriz de controlabilidade $\mathbf{M}_C$:

$$\mathbf{M_C} = \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{array}\right]. \tag{3}$$

Análise

O sistema definido pelas matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ é controlável se $\text{rank}(\mathbf{M}_C) = n$. *Rank* é igual ao posto de uma matriz, que representa o número de colunas ou linhas linearmente independentes da matriz.

Posto de uma matriz

Seja uma matriz $\mathbf{M}$ de dimensão (lxc), o seu posto é dado por:

1. Posto$(\mathbf{M})$ = número de colunas linearmente independente de $\mathbf{M}$;
2. Posto$(\mathbf{M})$ = número de linhas linearmente independente de $\mathbf{M}$;
3. Posto$(\mathbf{M}) \leq$ Min(l, c).

Definição

Um sistema LIT é observável se qualquer condição inicial $\mathbf{x}(0)$ pode ser obtida conhecendo-se as entradas $\mathbf{u}(t)$ e as saídas $\mathbf{y}(t)$ do sistema para todo instante de tempo t entre 0 e $T > 0$.

Observações

1. Se a condição inicial dos estados $\mathbf{x}(0)$ pode ser calculada, então se pode reconstruir o vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ em qualquer instante de tempo. Note que se conhecendo a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ e o vetor de entradas $\mathbf{u}(t)$ a todo instante, então se pode calcular $\mathbf{x}(\mathrm{t})$ em qualquer instante de tempo t.
2. Para estudar observabilidade basta considerar o caso de u(t) = 0, ou seja, a solução homogênea, assim:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0). \tag{4}$$

A observabilidade está associada à capacidade de "ver" todos os estados por meio das saídas do sistema.

Teste de Observabilidade

Seja um sistema de ordem n, com o vetor de entradas $\mathbf{u}(t) = 0$, então tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t); \end{cases}, \qquad (5)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$ e $\mathbf{y}(t) \in R^p$. Observe que para um sistema ser observável basta analisar o par de matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$.

Definindo a matriz de observabilidade $\mathbf{M}_O$:

$$\mathbf{M_O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

O sistema definido pelas matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ é observável se $\text{rank}(\mathbf{M}_O) = n$.

Estabilizabilidade e Dectectabilidade

Para o controle de um sistema dinâmico podem-se usar condições mais fracas do que a controlabilidade e a observabilidade.
Sistema estabilizável. Um sistema é estabilizável se todos os seus modos dinâmicos instáveis forem controláveis.
Sistema detectável Um sistema é detectável se todos os seus modos dinâmicos instáveis forem observáveis.
Nessas condições existem dinâmicas no sistema que não se conhece e se podem influenciar via controle, mas se sabe que são pelo menos estáveis, ou seja, decaem para zero quando t $\rightarrow \infty$.