VARIÁVEIS DE ESTADO

CAPÍTULO 3

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO NO DOMÍNIO DO TEMPO

3.1 Introdução

Prosseguindo no estudo da solução da equação de estado para sistemas lineares, que iniciamos no capítulo anterior trabalhando no domínio da freqüência, vamos agora encaminhar a solução diretamente no domínio do tempo. Examinaremos primeiramente a obtenção da solução analítica e a partir dela discutiremos uma forma de solução numérica, que é a que realmente se usa na maioria das aplicações técnicas.

Como dissemos anteriormente, o tratamento do modelo vetorial de estado no domínio do tempo depende de uma notação apropriada, atribuída a Bellman, e que será nosso ponto de partida neste capítulo.

3.2 Polinômio e função de matriz quadrada

a. Polinômio de matriz quadrada

Seja A uma matriz quadrada de dimensões $N \times N$, constituída por elementos reais ou complexos. Define-se, para k inteiro positivo:

$$A^k = A \cdot A \cdot A \dots A$$

(produto de k matrizes iguais a A)

e, para $k=0$:

$$A^0 = I \quad \text{(matriz identidade)}$$

Consideremos agora um polinômio $p(\lambda)$, de grau n, na variável escalar λ:

$$p(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + a_{n-2} \cdot \lambda^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

Então, define-se polinômio da matriz quadrada *A*, associado a $p(\lambda)$, o polinômio que se obtém substituindo em $p(\lambda)$, λ por *A* e multiplicando-se o termo independente pela matriz identidade I:

$$p(A) = a_n \cdot A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + a_{n-2} \cdot A^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot i$$

Em particular dizemos que *A* é uma raiz ou um zero de $p(\lambda)$, se $p(A) = 0$.

<u>*Exemplo 1*</u>: Sejam os polinômios:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2 \cdot \lambda^2 + \lambda + 3 \quad \text{e} \quad q(\lambda) = \lambda^2 - 4 \cdot \lambda + 3,$$

$$\text{e} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Escreva os polinômios associados $p(A)$ e $q(A)$, e determine seus valores numéricos.

Solução:

$$p(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3 - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

$$p(A) = \begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(A) = \begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$q(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz A é raiz do polinômio $q(A)$. Essa é uma propriedade geral muito importante, garantida por um teorema denominado teorema de Cayley-Hamilton: Toda matriz é raiz de seu próprio polinômio característico.

b. Função de matriz quadrada

Seja a representação de uma função $f(\lambda)$, por meio de uma série de potências:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot \lambda^k$$

com raio de convergência ρ.

Exemplo:

$$f(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \ldots$$

Note que, neste exemplo, a série de potências só define a função, se $|\lambda| < 1$. Caso contrário, a série torna-se divergente e não representa mais $f(\lambda)$.

Analogamente à definição de polinômio de matriz quadrada, apresentada acima, define-se função de matriz quadrada associada a uma função escalar $f(\lambda)$. De fato, dada $f(\lambda)$ define-se a função *f* da matriz quadrada A, substituindo-se em $f(\lambda)$, o escalar λ pela matriz A:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot A^k$$

A definição é valida apenas se os valores dos absolutos dos auto-valores de A forem menores que ρ, ou se a matriz tiver a propriedade de ser $A^N = 0$, para N inteiro, finito e positivo. De fato, pode-se provar que, se os auto-valores de A forem, em módulo, menores que o raio de convergência ρ de $f(\lambda)$, a série converge (e a definição de $f(A)$ só é válida se a série acima for convergente).

No caso do exemplo acima:

$$f(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \ldots$$

vimos que a série só é convergente se $|\lambda| < 1$. O raio de convergência é, portanto, $\rho = 1$. A função da matriz quadrada A, associada à função $f(\lambda)$ acima será:

$$f(A) = (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + A^4 + \dots$$

desde que as condições de convergência sejam satisfeitas.

Note que essa última permite o cálculo da inversão da matriz *(I – A)*. Por ex.: seja determinar a matriz inversa de:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I - A = B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I - A = B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

notando que $A^2 = 0$

$$B^{-1} = (I - A)^{-1} = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outro exemplo pode ser feito com a matriz *B*:

$$B = \begin{bmatrix} 1{,}00 & -1{,}00 \\ 0{,}02 & 1{,}30 \end{bmatrix} \qquad A = I - B = \begin{bmatrix} 0{,}00 & 1{,}00 \\ -0{,}02 & -0{,}30 \end{bmatrix}$$

Os auto-valores do *A* são $s_1 = -0{,}1$ e $s_2 = -0{,}2$. Em valor absoluto, são ambos menores que $\rho = 1$. Logo a série é convergente. De fato, levando em conta as seis primeiras parcelas da série, resulta:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}9848 & 0{,}7575 \\ -0{,}0151 & 0{,}7576 \end{bmatrix}$$

exato até a 3ª casa decimal.

3.3 Matriz exponencial

A função exponencial $e^{\lambda \cdot t}$ é definida pela série de potências:

$$f(\lambda) = e^{\lambda \cdot t} = 1 + \lambda \cdot t + \frac{\lambda^2 \cdot t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 \cdot t^3}{3!} + \frac{\lambda^4 \cdot t^4}{4!} + \dots + \frac{\lambda^n \cdot t^n}{n!} + \dots$$

ou seja:

$$e^{\lambda \cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot t^k}{k!}$$

Esta série tem a grande vantagem de ser convergente para qualquer valor, real ou complexo, de λ ou de t. Isto é, seu raio de convergência é infinito. O mesmo ocorre com a função de matriz quadrada A, associada a $e^{\lambda \cdot t}$, que recebe o nome de matriz exponencial:

$$f(\mathrm{A}) = e^{\mathrm{A}.t} = \mathrm{I} + \mathrm{A} \cdot t + \frac{\mathrm{A}^2 \cdot t^2}{2!} + \frac{\mathrm{A}^3 \cdot t^3}{3!} + \frac{\mathrm{A}^4 \cdot t^4}{4!} + \ldots + \frac{\mathrm{A}^n t^n}{n!} + \ldots$$

$$e^{\mathrm{A}\cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k \cdot t^k}{k!}$$

A série é, portanto, convergente para quaisquer que sejam a matriz quadrada A e os valores de t. Da definição acima resultam, para matriz exponencial, propriedades análogas às da própria função exponencial:

se $\mathrm{A} = 0$ $\quad e^{[0]\cdot t} = \mathrm{I}$ (matriz identidade)

se $t = 0$ $\quad e^{\mathrm{A}\cdot 0} = \mathrm{I}$ (matriz identidade)

Se A e B forem matrizes quadradas de mesmas dimensões ($N \times N$), e se o produto delas for comutativo, isto é, se $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$, então vale a seguinte propriedade:

$$e^{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cdot t} = e^{\mathrm{A}\cdot t} + e^{\mathrm{B}\cdot t} \quad \text{(somente de } \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}\text{)}$$

Para quaisquer A (matriz quadrada), t e τ, vale a seguinte propriedade:

$$e^{\mathrm{A}(t+\tau)} = e^{\mathrm{A}\cdot t} + e^{\mathrm{A}\cdot \tau}$$

Fazendo-se nessa última igualdade $t = -\tau$ nessa resulta:

$$e^{\mathrm{A}\cdot 0} = e^{\mathrm{A}\cdot t} \cdot e^{-\mathrm{A}\cdot t} = \mathrm{I}$$

Logo, as matrizes $e^{\mathrm{A}\cdot t}$ e $e^{-\mathrm{A}\cdot t}$ são inversas, uma da outra:

$$\left[e^{\mathrm{A}\cdot t}\right]^{-1} = e^{-\mathrm{A}\cdot t}$$

Assim, para inverter a matriz exponencial $e^{\mathrm{A}\cdot t}$, basta traçar o sinal de t na matriz $e^{\mathrm{A}\cdot t}$.

Derivada da função exponencial: prova-se facilmente que:

$$\frac{d}{dt} e^{\mathrm{A}\cdot t} = \mathrm{A} \cdot e^{\mathrm{A}\cdot t} = e^{\mathrm{A}\cdot t} \cdot \mathrm{A}$$

Observação: Propriedade geral das funções de matriz quadrada: O produto de duas funções da mesma matriz quadrada é comutativo. No caso acima vê-se que a propriedade é válida por simples inspeção, pois $\mathrm{A}^k = \mathrm{A}^{k-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{k-1}$.

<u>*Exemplo 2*</u>: Dada a matriz

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

determine a matriz exponencial $e^{\mathrm{A}\cdot t}$ correspondente e sua inversa.

Solução:

Já vimos que para essa matriz A, tem-se $A^2 = 0$. Logo:

$$e^{\mathrm{A}\cdot t} = \mathrm{I} + \mathrm{A}.t + \frac{\mathrm{A}^2 \cdot t^2}{2!} + \frac{\mathrm{A}^3 \cdot t^3}{3!} + \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa será:

$$\left[e^{\mathrm{A}t}\right]^{-1} = e^{-\mathrm{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>*Exemplo 3*</u>: Determine a matriz $e^{\mathrm{A}\cdot t}$ para o caso em que:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução:

Sendo *A* uma matriz diagonal, tem-se:

$$\mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \qquad \mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{A}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \qquad \text{etc.}$$

$$e^{\mathrm{A}t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & 2t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-t^3}{6} & 0 \\ 0 & \frac{-4t^3}{3} \end{bmatrix} + \ldots$$

$$e^{\mathrm{A}t} = \begin{bmatrix} 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{-t^3}{6} \ldots & 0 \\ 0 & 1 - 2t + 2t - \frac{4t^3}{3} + \ldots \end{bmatrix}$$

As séries que aparecem na matriz são facilmente identificáveis:

$$e^{\mathrm{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

A matriz inversa será simplesmente:

$$e^{-\mathrm{A}t} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

3.4 Matriz de transição de estado no domínio do tempo

No capítulo anterior estudamos a matriz de transição de estado no domínio da freqüência:

$$\phi(s) = [s \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}]^{-1}$$

A matriz de transição de estado no domínio do tempo será, então:

$$\varphi(t) = £^{-1}\{\,\phi(s)\,\}$$

Começamos por procurar a derivada da matriz exponencial por dois caminhos diferentes.

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathrm{A}t}) = \mathrm{A} \cdot e^{\mathrm{A}t}$$

Transformada de 1º membro:

$$£\left\{\frac{d}{dt}(e^{\mathrm{A}t})\right\} = s \cdot £\{e^{\mathrm{A}t}\} - \mathrm{I}$$

Transformada de 2º membro:

$$£\{\mathrm{A} \cdot e^{\mathrm{A}t}\} = \mathrm{A}\ £\{e^{\mathrm{A}t}\}$$

Igualando as duas:

$$s \cdot £\{e^{\mathrm{A}t}\} - \mathrm{I} = \mathrm{A}\ £\{e^{\mathrm{A}t}\}$$

ou:

$$s \cdot £\{e^{\mathrm{A}t}\} - \mathrm{A}\ £\{e^{\mathrm{A}t}\} = \mathrm{I}$$

$$[s \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}] \cdot £\{e^{\mathrm{A}t}\} = \mathrm{I}$$

$$\pounds\left\{e^{+\mathrm{A}t}\right\} = [s \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}]^{-1} = \phi(s)$$

$$e^{+\mathrm{A}t} = \pounds^{-1}\left\{[s \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}]^{-1}\right\}$$

Portanto:

$$\phi(t) = e^{\mathrm{A}t} = \pounds^{-1}\left\{\phi(s)\right\}$$

A matriz de transição de estado no domínio do tempo de um sistema, é, portanto, a matriz exponencial da matriz *A* do referido sistema.

Essa última expressão permite também obter a matriz exponencial e^{At} em forma fechada.

<u>*Exemplo 4*</u>: Determine a matriz $e^{\mathrm{A}\cdot t}$, em forma fechada, para:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução:

Usaremos a expressão

$$e^{\mathrm{A}t} = \pounds^{-1}\left\{[s \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}]^{-1}\right\}$$

$$[s \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}] = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \qquad [s \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$e^{+\mathrm{A}t} = \pounds^{-1}\left\{[s \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}]^{-1}\right\} = \pounds\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Propriedades de $\varphi(t)$: Sendo

$$\varphi(t) = e^{\mathrm{A}\cdot t} = e^{\mathrm{A}\cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k \cdot t^k}{k!}$$

resultam as seguintes propriedades para $\varphi(t)$:

(1) $\varphi(0) = \mathrm{I}$

(2) $\dot{\varphi}(t) = \mathrm{A} \cdot \varphi(t)$

(3) $\varphi(-t) = [\varphi(t)]^{-1}$

(4) $\dot{\varphi}(t) \cdot \varphi(-t) = \mathrm{A}$

(5) $\varphi(t + \tau) = \varphi(t) \cdot \varphi(\tau)$

(6) $\varphi(t) \cdot \varphi(\tau) = \varphi(\tau) \cdot \varphi(t)$ ou $e^{A \cdot t} \cdot e^{A \cdot \tau} = e^{A \cdot \tau} \cdot e^{A \cdot t}$

Exemplo 5: Verifique se a matriz:

$$\mathrm{M}(t) = \begin{bmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ 0 & t + 1 \end{bmatrix}$$

pode ser matriz de transição de estado de um sistema linear.

Solução:

Verifica-se facilmente que a propriedade (1) da tabela acima é satisfeita pela matriz dada:

$$\mathrm{M}(0) = \mathrm{I}$$

mas a propriedade (3) já não é satisfeita:

$$\mathrm{M}(t) \cdot \mathrm{M}(-t) = \begin{bmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ 0 & t + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ 0 & -t + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t^2 + 1)^2 & 0 \\ 0 & 1 - t^2 \end{bmatrix} >< \mathrm{I}$$

Logo *M(t)* não pode ser matriz de transição de estado.

Exemplo 6: Determine a matriz *A* do sistema cuja matriz de transição de estado é:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & sent \\ -sent & \cos t \end{bmatrix}$$

Solução:

Pela propriedade (4) da tabela acima, tem-se:

$$\dot{\varphi}(t) \cdot \varphi(-t) = \mathrm{A}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -sent & \cos t \\ -\cos t & -sent \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t & -sent \\ sent & \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos^2 t + sen^2 t \\ -\cos^2 t - sen^2 t & 0 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para confirmar esse resultado, vamos recalcular $\varphi(t) = e^{-\mathrm{A}t}$:

$$\phi(s) = [s\mathrm{I} - \mathrm{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

Anti-transformando essa última matriz por Laplace, resulta:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & sent \\ -sent & \cos t \end{bmatrix}$$

o que confere com os dados iniciais do problema.

3.5 Solução analítica da equação de estado

Retomemos as equações de estado e de saída:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathrm{A} \cdot x(t) + \mathrm{B} \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned}$$

A solução da equação de estado pode ser obtida com auxílio da função auxiliar:

$$\Psi(t) = e^{-\mathrm{A}\cdot t} \cdot x(t)$$

onde, evidentemente:

$$\psi(0) = \mathrm{I} \cdot x(0) = x(0) = x_0$$

Derivando $\psi(t)$:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-\mathrm{A}\cdot t}\right)x(t) + e^{-\mathrm{A}\cdot t} \cdot \frac{dx}{dt} = -\mathrm{A} \cdot e^{-\mathrm{A}\cdot t} x(t) + e^{-\mathrm{A}\cdot t} \cdot \dot{x}(t)$$

Substituindo $\dot{x}(t)$ pelo 2º membro da equação de estado

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -e^{-\mathrm{A}\cdot t}\cdot \mathrm{A}\cdot x(t) + e^{-\mathrm{A}\cdot t}\cdot\left(\mathrm{A}\cdot x(t) + \mathrm{B}\cdot u(t)\right)$$

ou

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = e^{-\mathrm{A}\cdot t}\cdot \mathrm{B}\cdot u(t)$$

Integrando ambos os membros entre *0* e *t*:

$$\int_0^t \frac{d\psi(t)}{dt} = \int_0^t e^{-A\cdot\tau}\cdot x(\tau)\cdot d\tau = \int_0^t e^{-A\cdot\tau}\cdot B\cdot u(\tau)\cdot d\tau$$

ou

$$e^{-\mathrm{A}\cdot t}\cdot x(t) - x_0 = \int_0^t e^{-\mathrm{A}\cdot\tau}\cdot B\cdot u(\tau)\cdot d\tau$$

Finalmente

$$x(t) = e^{\mathrm{A}\cdot t}\cdot x_0 + e^{\mathrm{A}\cdot t}\cdot\int_0^t e^{-\mathrm{A}\cdot\tau}\cdot B\cdot u(\tau)\cdot d\tau$$

A equação de saída pode, então, ser escrita sob a forma:

$$y(t) = C\cdot\left(e^{\mathrm{A}\cdot t}\cdot x_0 + e^{\mathrm{A}\cdot t}\cdot\int_0^t e^{-\mathrm{A}\cdot\tau}\cdot B\cdot u(\tau)\cdot d\tau\right) + D\cdot u(t)$$

<u>*Exemplo 7*</u>: Dada a equação de estado de um sistema:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\cdot u(t)$$

com *u(t)=10* para *t≥0* e

$$x_0 = \begin{bmatrix}x_{01}\\ x_{02}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}$$

determine *x(t)*.

Solução:

Adotaremos a solução no domínio do tempo:

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 + e^{A \cdot t} \cdot \int_0^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

A matriz de transição de estado $e^{A \cdot t}$ já calculada no exemplo 2, páginas 5 e 6, é:

$$e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A primeira parcela é a solução de entrada zero:

$$x_L(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 3t \\ -3 \end{bmatrix}$$

Já a solução de estado zero:

$$x_U(t) = e^{A \cdot t} \cdot \int_0^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 10 \cdot d\tau$$

$$x_U(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \int_0^t \begin{bmatrix} -10 \cdot \tau \\ 10 \end{bmatrix} \cdot d\tau = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \cdot t^2 \\ 10 \cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot t^2 \\ 10 \cdot t \end{bmatrix}$$

A solução completa resulta:

$$x(t) = x_L(t) + x_u(t) + \begin{bmatrix} 2 - 3 \cdot t + 5 \cdot t^2 \\ -3 + 10 \cdot t \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$x_1(t) = 5 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 2$$
$$x_2(t) = -3 + 10 \cdot t$$

<u>*Exemplo 8*</u>: Dadas as equações de estado e de saída de um sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a. A equação característica e os pólos do sistema;
b. As matrizes de transição de estado $\phi(S)$ e $\varphi(t)$;
c. A resposta $y(t)$ do sistema, para $u(t)=0$ e $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$;
d. Idem para $x_0 = 0$ e $u(t) = h(t)$ = degrau unitário;
e. Idem para $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $u(t) = h(t)$.

Solução:

a. Polinômio característico:

$$\Delta = \det\left[s \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}\right] = \det\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = s^2 + 4 \cdot s + 3 = (s+1)\cdot(s+3)$$

Pólos do sistema: $s_1 = -1$ e $s_2 = -3$

b.

$$\phi(s) = \left[s \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{\Delta} & \dfrac{1}{\Delta} \\ \dfrac{1}{\Delta} & \dfrac{s+2}{\Delta} \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \Delta = (s+1)\cdot(s+3)$$

$$\frac{1}{(s+1)\cdot(s+3)} = \frac{0,5}{s+1} - \frac{0,5}{s+3} \qquad \rightarrow \qquad 0,5 \cdot (e^{-t} - e^{-3t})$$

$$\frac{s+2}{(s+1)\cdot(s+3)} = \frac{0,5}{s+1} + \frac{0,5}{s+3} \qquad \rightarrow \qquad 0,5 \cdot (e^{-t} + e^{-3t})$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 0,5\cdot(e^{-t} + e^{-3t}) & 0,5\cdot(e^{-t} - e^{-3t}) \\ 0,5\cdot(e^{-t} - e^{-3t}) & 0,5\cdot(e^{-t} + e^{-3t}) \end{bmatrix}$$

c.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5\cdot(e^{-t} + e^{-3t}) & 0,5\cdot(e^{-t} - e^{-3t}) \\ 0,5\cdot(e^{-t} - e^{-3t}) & 0,5\cdot(e^{-t} + e^{-3t}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}$$

d.

$$x_U(t) = e^{A\cdot t} \cdot \int_0^t e^{-A\cdot\tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Calculemos inicialmente o núcleo da integral

$$\begin{bmatrix} 0{,}5\cdot(e^{+\tau}+e^{+3\tau}) & 0{,}5\cdot(e^{+\tau}-e^{+3\tau}) \\ 0{,}5\cdot(e^{+\tau}-e^{+3\tau}) & 0{,}5\cdot(e^{+\tau}+e^{+3\tau}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5\cdot(e^{+\tau}-e^{+3\tau}) \\ 0{,}5\cdot(e^{+\tau}+e^{+3\tau}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5\cdot(e^{-t}+e^{-3t}) & 0{,}5\cdot(e^{-t}-e^{-3t}) \\ 0{,}5\cdot(e^{-t}-e^{-3t}) & 0{,}5\cdot(e^{-t}+e^{-3t}) \end{bmatrix} \cdot \int_0^t \begin{bmatrix} 0{,}5\cdot(e^{\tau}-e^{3\tau}) \\ 0{,}5\cdot(e^{\tau}+e^{3\tau}) \end{bmatrix} \cdot d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t}) & \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) \\ \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) & \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

e. Como o sistema é linear, este caso é a superposição dos casos c. e d.:

$$y_1 = 0 + 1 - e^{-t} = 1 - e^{-t}$$

$$y_2 = -e^{-3t} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{7}{6}e^{-3t}$$

Observação: A solução desse problema foi encaminhada no domínio do tempo com a finalidade de ilustrar o procedimento. A solução no domínio da freqüência, entretanto, é mais rápida. Sugerimos ao leitor que tente esse caminho e compare os resultados.

3.6 Exercícios propostos

1. A e M são duas matrizes quadradas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Determine o polinômio característico *Q(S)* da matriz *A*;
b. Escreva e calcule o polinômio da matriz *M*, associado a *Q(S)*;
c. Verifique que a matriz A satisfaz seu próprio polinômio característico, isto é, $Q(\mathrm{A}) = 0$.

Resposta:

$$Q(s) = s^3 + 5 \cdot s^2 - 19 \qquad \begin{bmatrix} -34 & -3 \\ 9 & -34 \end{bmatrix}$$

2. Determine a matriz exponencial referente às seguintes matrizes:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{N} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resposta:

$$e^{\mathrm{M} \cdot t} = \begin{bmatrix} 2 \cdot e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2 \cdot (e^{-t} - e^{-2t}) & -e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} \end{bmatrix}$$

3. Verifique se as matrizes abaixo indicadas podem ser matrizes de transição de estado. No caso afirmativo determine a matriz A correspondente.

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t} - 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \varphi_2 = \begin{bmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ 0 & t + 1 \end{bmatrix} \qquad \varphi_3 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta:

φ_1 : não $\qquad$ φ_2 : não $\qquad$ φ_3 : sim; $\qquad$ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Dadas as equações de estado e de saída de um sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

determine a resposta do sistema no caso em que $x_0 = 0$ e $u(t) = h(t) =$ degrau unitário.

Resposta:

$$y_1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{6} e^{-2\cdot t} + \frac{1}{15} e^{-5\cdot t} \qquad y_2 = \frac{4}{30} + \frac{5}{9} e^{-2\cdot t} - \frac{19}{45} e^{-5\cdot t}$$

5. Considere um satélite artificial que gira em torno de seu próprio eixo de simetria. A posição angular do satélite é determinada pela abscissa $e(t)$ e seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria é *J*. Por meio de jatos de gás apropriados, um conjugado de torção *M(t)*, ajustável, pode ser aplicado ao satélite. O sistema é isento de atrito.

a. Escolha como variáveis de estado a posição angular $e(t)$ e a velocidade angular $\dot{e}(t)$, como variável de saída $y(t) = e(t)$. Mostre então que as equações de estado e de saída são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \cdot u(t) \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b. Determine a matriz de transição de estado, a resposta impulsiva e a resposta a um degrau unitário do sistema. Faça um esboço dos gráficos dessas respostas.

c. Considere o problema de levar o satélite do estado inicial $x_0 = [\theta_0 \quad 0]$ ao estado final $x_f = [\theta_f \quad 0]$. Suponha que os jatos de gás produzam dois torques sucessivos, de mesmo valor (M), mas de sentidos contrários, conforme o gráfico. Supondo que o satélite deva girar de 30º em um intervalo de tempo T, determine o valor do torque necessário para efetuar a manobra, bem como o instante T' em que o torque deve mudar.