VARIÁVEIS DE ESTADO

CAPÍTULO 2

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO NO DOMÍNIO DA FREQÜENCIA

2.1 Introdução

No capitulo anterior, foram apresentadas tanto a conceituação de variáveis de estado, quanto as técnicas habituais de representação de estado de um sistema linear. O modelo matemático obtido para esses sistemas, em sua forma vetorial compacta, é apresentado sob a forma:

$$\dot{x} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \qquad \text{equação vetorial de estado}$$
$$y = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \qquad \text{equação vetorial de saída}$$

A tarefa que se põe agora é a de resolver a equação de estado de forma que, uma vez descrito o sistema pela sua representação de estado, possamos determinar seu comportamento dinâmico pela determinação do vetor de estado $x(t)$, e através dele, do vetor de saída $y(t)$.

Neste capítulo apresentaremos a solução da equação de estado via transformada de Laplace, ou, como se costuma dizer, determinaremos a solução dessa equação no domínio da freqüência.

A seguir examinaremos a aplicação da transformada de Laplace às matrizes e às equações vetoriais.

2.2 A equação de estado no domínio da freqüência

A transformada de Laplace de uma função escalar do tempo $f(t)$, é a função $F(s)$ definida pela integral:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-gt} \cdot dt$$

onde s é uma variável complexa, denominada freqüência generalizada (ou complexa) que é habitualmente representada sob a forma:

$$s = \sigma + j \cdot \omega$$

onde j é a unidade imaginária.

A transformada de Laplace costuma ser também representada pela notação $\pounds\{\mathrm{f(t)}\}$:

$$\pounds\{\mathrm{f(t)}\} = F(s)$$

Trata-se de uma transformação 1inear e, portanto, aplicável somente ao caso dos sistemas lineares. Geralmente as variáveis função do tempo e transformadas são representadas por letras minúsculas e maiúsculas, respectivamente. Assim, por exemplo:

Variáveis de estado	$\pounds\{\mathrm{x_i(t)}\} = \pounds\{\mathrm{x_i}\} = X_i(s) = x_i$	com	$i = 1, 2, \ldots, n$
Variáveis de entrada	$\pounds\{\mathrm{u_j(t)}\} = \pounds\{\mathrm{u_j}\} = U_j(s) = U_j$	com	$j = 1, 2, \ldots, p$
Variáveis de saída	$\pounds\{\mathrm{y_k(t)}\} = \pounds\{\mathrm{y_k}\} = Y_k(s) = Y_k$	com	$k = 1, 2, \ldots, q$

A transformada de Laplace de um vetor ou de uma matriz obtém-se transformando cada elemento do vetor ou da matriz. Assim para os vetores de entrada, de saída e de estado definimos:

$$\pounds\{\mathrm{u(t)}\} = U(s) = U = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \\ \cdots \\ U_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \cdots \\ U_p \end{bmatrix}$$

$$\pounds\{\mathrm{y(t)}\} = Y(s) = Y = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \\ \cdots \\ Y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \cdots \\ Y_q \end{bmatrix}$$

$$£\{\mathrm{x(t)}\} = X(s) = X = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \\ \dots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Com relação ao vetor das derivadas das variáveis de estado (derivada do vetor de estado), vamos lembrar o seguinte: a transformada de Laplace da derivada de uma variável inclui o valor inicial dessa variável, da seguinte forma: se $£\{x_i(t)\} = X_i(s)$, então a transformada da derivada de $x_i(t)$ será:

$$£\left\{\dot{\mathrm{x}}_i(\mathrm{t})\right\} = s \cdot X_i(s) - x_{0i} \qquad \text{com} \qquad x_{oi} = x_i(0)$$

Portanto:

$$£\left\{\dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t})\right\} = s \cdot X(s) - x(0) = s \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \\ \dots \\ X_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ \dots \\ x_{0n} \end{bmatrix}$$

As equações dinâmicas do sistema, no domínio da freqüência, serão:

Equação vetorial de estado no domínio da freqüência:

$$s \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \\ \dots \\ X_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ \dots \\ x_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_p \end{bmatrix}$$

onde $X_i = X_i(s)$ e $U_j = U_j(s)$.

Equação vetorial de saída no domínio da freqüência:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \\ \dots \\ Y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{q1} & c_{q2} & c_{q3} & \dots & c_{qn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2p} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{q1} & d_{q2} & d_{q3} & \dots & d_{qp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_p \end{bmatrix}$$

onde $y_r = Y_r(s)$, $X_i = X_i(s)$ e $U_j = U_j(s)$

Sob forma vetorial compacta teremos:

Equação vetorial de estado - $s \cdot X(s) - x_0 = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$
Equação vetorial de saída - $Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s)$

Para ilustrar essas idéias iniciais, daremos um exemplo.

Exemplo 1: Um sistema de entrada $u(t)$ e saídas, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

As condições iniciais são: $x_{01} = 2$ e $x_{02} = -1$.

Escreva as equações de estado e de saída, no domínio da freqüência, sob as formas vetorial e escalar.

Solução:

Transformando por Laplace as equações dadas, resulta:

Equações vetoriais

de estado:

$$s \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U(s)$$

e de saída:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U(s)$$

Equações escalares

de estado:

$$s \cdot X_1(s) - 2 = X_2(s)$$
$$s \cdot X_2(s) + 1 = -10 \cdot X_1(s) - 7 \cdot X_2(s) + U(s)$$

e de saída:

$$Y_1(s) = X_1(s) + X_2(s)$$
$$Y_2(s) = -X_2(s) + U(s)$$

....

2.3 *Variáveis de estado e diagramas de blocos*

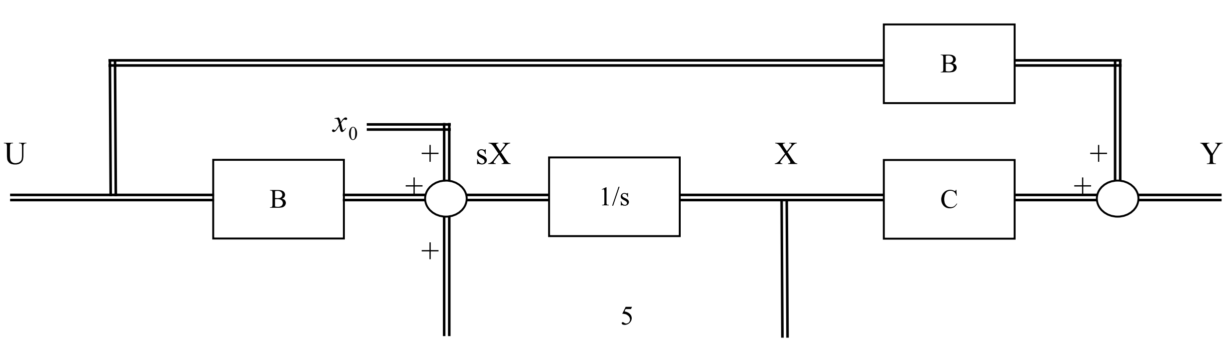
As equações vetoriais de estado e de saída no domínio da freqüência podem ser representadas, na sua forma geral, por um diagrama de blocos vetorial, muito útil em certas aplicações (por exemplo, no estudo do controle de um sistema por realimentação de estado).

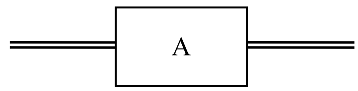
As equações são as seguintes:

$$s \cdot X(s) - x_0 = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$
$$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s)$$

Nos diagramas de blocos vetoriais, os ramos que indicam as variáveis vetoriais são representados por setas de traço duplo. Além disso, os blocos dinâmicos em geral representam matrizes e nesses casos não podem ser permutados, pois o produto de matrizes em geral não é comutativo.

Vejamos então como as equações acima podem ser representadas por um diagrama de blocos vetorial.





Os diagramas de blocos vetoriais prestam-se para representação das equações de estado vetoriais sob forma compacta, indicando propriedades gerais dessas equações. As equações particulares de cada problema, porém, podem ser representadas por diagramas de blocos escalares comuns. Um exemplo pode esclarecer esse ponto.

<u>Exemplo 2:</u> Um sistema cujas equações de estado e de saída são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

As condições iniciais são: $x_{01} = 2$ e $x_{02} = -1$.

Solução:

As equações escalares de estado e de saída, no domínio da freqüência, são:

Equações vetoriais

de estado:

$$s \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U(s)$$

e de saída:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U(s)$$

Equações escalares

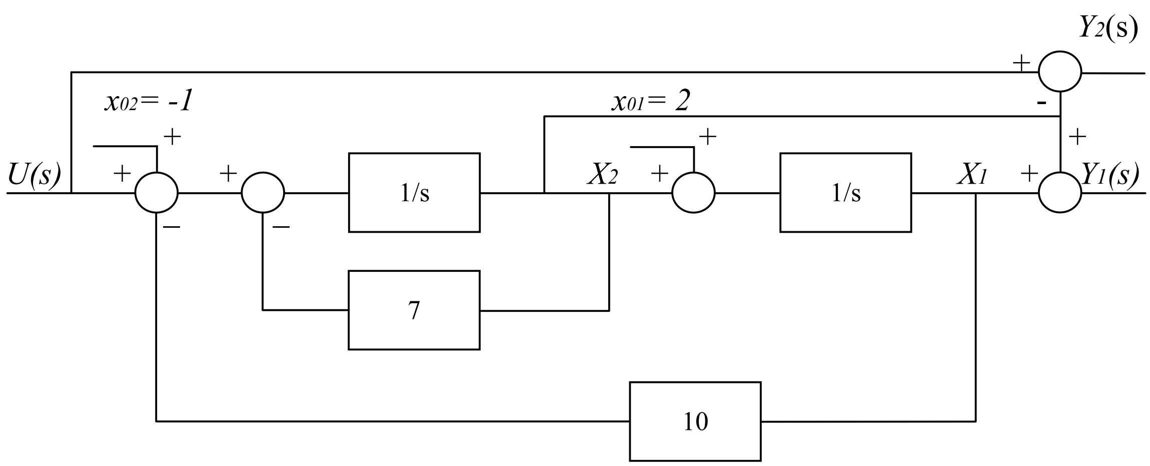
de estado:

$$s \cdot X_1(s) - 2 = X_2(s)$$
$$s \cdot X_2(s) + 1 = -10 \cdot X_1(s) - 7 \cdot X_2(s) + U(s)$$

e de saída:

$$Y_1(s) = X_1(s) + X_2(s)$$
$$Y_2(s) = -X_2(s) + U(s)$$

É a partir dessas equações que se constrói o diagrama de blocos:



2.4 Matriz de transição de estado

Voltemos a considerar as equações de estado e de saída, no domínio da freqüência:

$$s \cdot X(s) - x_0 = A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \qquad \text{equação vetorial de estado}$$
$$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s) \qquad \text{equação vetorial de saída}$$

No domínio do tempo, a equação de estado é uma equação diferencial vetorial linear que pode ser resolvida analiticamente por integração, ou numericamente com auxílio de um programa apropriado de computador. Já no domínio da freqüência, a equação de estado torna-se uma equação vetorial algébrica no campo complexo, cuja solução depende essencialmente da inversão de uma matriz alfa-numérica. De fato, essa equação pode ser escrita:

$$s \cdot I \cdot X(s) - A \cdot X(s) = x_0 + B \cdot U(s)$$

onde I é a matriz identidade (de n 1inhas por n colunas, sendo n a ordem do sistema):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Prosseguindo, para a obtenção do valor de X(s):

$$(s \cdot I - A) \cdot X(s) = x_0 + B \cdot U(s)$$

O determinante da matriz $(s \cdot I - A)$ é um polinômio de grau n em s, denominado polinômio característico da matriz A do sistema, ou simplesmente, polinômio característico do sistema:

$$\det\,(s \cdot I - A) = \Delta(s) = s^n + q_{n-1}s^{n-1} + q_{n-2}s^{n-2} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0$$

A equação que se obtém igualando a zero o determinante de $(s \cdot I - A)$, denomina-se equação característica do sistema, ou da matriz A:

$$s^n + q_{n-1}s^{n-1} + q_{n-2}s^{n-2} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0 = 0$$

As raízes $s_1, \quad s_2, \quad \dots \quad s_n$, da equação característica, são os auto-valores da matriz A. Os auto-valores da matriz A, são, também, os pólos do sistema.

<u>*Exemplo 3:*</u> Determinar o polinômio característico do sistema cuja equação de estado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Determinar também, os auto-valores da matriz do sistema.

Solução:

A matriz do sistema é: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$

Portanto:

$$s \cdot I - A = s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(s) = \det(s \cdot I - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+2 \end{bmatrix}$$

e a equação característica será:

$$\Delta(s) = s^2 + 2 \cdot s + 6 = 0$$

Os auto-valores da matriz A (ou pólos do sistema) são as raízes da equação característica:

$$s_1 = -1 + j \cdot 2{,}24 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -1 - j \cdot 2{,}24$$

....

Para isolar a variável X(s) da equação:

$$(s \cdot I - A) \cdot X(s) = x_0 + B \cdot U(s)$$

devemos pré-multiplicar ambos os membros da expressão pela matriz $(s \cdot I - A)$ invertida. Resulta:

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot x_0 + (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)$$

Essa é a solução completa da equação de estado, no domínio da freqüência. Note que ela apresenta duas componentes: uma primeira parcela que só depende do estado inicial x_0, e outra que é função apenas do vetor de entrada U(s). Então, se U(s) for nulo (U(s)=0), teremos:

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot x_0$$

Nesse caso vemos que a matriz $(s \cdot I - A)^{-1}$ aplicada ao estado inicial x_0 nos dá o estado atual, representado por $X(s)$. Essa é a razão pela qual a matriz $(s \cdot I - A)^{-1}$ é denominada matriz de transição de estado. Essa primeira parcela da solução completa da equação de estado denomina-se solução de entrada zero (pois é obtida com o sinal de entrada $u(t) = 0$).

A segunda parcela da solução completa da equação de estado denomina-se solução de estado zero (pois é obtida da condição $x(0) = x_0 = 0$.

A matriz de transição de estado é comumente representada por $\phi(s)$:

$$\phi(s) = (s \cdot I - A)^{-1}$$

Com essa notação, a solução completa da equação de estado fica sendo:

$$X(s) = \phi(s) \cdot x_0 + \phi(s) \cdot B \cdot U(s)$$

<u>*Exemplo 4:*</u> A equação de estado de um sistema é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Determine:

(a.) o estado do sistema no instante t, supondo condições iniciais $x_1(0) = x_{01} = 2$ e $x_2(0) = x_{02} = -1$, sendo nulo o vetor de entrada;

(b.) o estado do sistema no instante t, supondo as mesmas condições iniciais do item anterior, mas tendo como sinais de entrada $u_1 = M \cdot h(t)$, degrau de altura M, e $u_2 = N \cdot h(t)$, degrau de altura N, com M e N constantes;

(c.) as constantes M e N, de forma que o estado do sistema seja nulo no instante t=1 segundo.

Solução:

A solução completa da equação de estado é dada pela equação:

$$X(s) = \phi(s) \cdot x_0 + \phi(s) \cdot B \cdot U(s)$$

No item (a.), o sinal de entrada é nulo, logo essa equação fica reduzida a:

$$X(s) = \phi(s) \cdot x_0$$

e temos:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (s \cdot I - A) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix} \qquad \phi(s) = (s \cdot I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix}$$

Resulta

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} \\ \frac{-1}{s+5} \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$x_1(t) = 2 \cdot e^{-2t} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = -e^{-5t}$$

No item (b.) devemos considerar a solução completa da equação de estado.

$$X(s) = \phi(s) \cdot x_0 + \phi(s) \cdot B \cdot U(s)$$

A primeira parcela, relativa às condições iniciais, já foi calculada. Resta determinar a segunda parcela ($\phi(s) \cdot B \cdot U(s)$), onde:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad U(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{M}{s} \\ \dfrac{N}{s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+2} \\ \dfrac{-1}{s+5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{M}{s} \\ \dfrac{N}{s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+2} \\ \dfrac{-1}{s+5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{M}{s \cdot (s+2)} \\ \dfrac{M+N}{s \cdot (s+5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{M}{2s} & \dfrac{4-M}{2 \cdot (s+2)} \\ \dfrac{M+N}{5s} & \dfrac{5+M+N}{5 \cdot (s+5)} \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = 0{,}5M + (2 - 0{,}5M) \cdot e^{-2t}$$

$$x_2(t) = 0{,}2 \cdot (M+N) - 0{,}2 \cdot (5 + M + N) \cdot e^{-5t}$$

No item (c.), deseja-se que o estado do sistema seja nulo no instante t=1 segundo. Portanto:

$$x_1(1) = 0{,}5M + (2 - 0{,}5M) \cdot e^{-2} = 0{,}5M + (2 - 0{,}5M) \cdot 0{,}135 = 0$$

$$x_2(1) = 0{,}2 \cdot (M+N) - 0{,}2 \cdot (5 + M + N) \cdot e^{-5} = 0{,}2 \cdot (M+N) - 0{,}2 \cdot (5 + M + N) \cdot 0{,}00674 = 0$$

$$0{,}5M - 0{,}0675M = -0{,}27 \qquad 0{,}4325M = -0{,}270 \qquad M = -0{,}624$$

$$M + N - 0{,}0674 \cdot (M+N) = 0{,}337 \qquad 0{,}9326 \cdot (M+N) = 0{,}337 \qquad M + N = 0{,}361$$

$$-0{,}624 + N = 0{,}361 \qquad N = 0{,}985$$

$$x_1(t) = -0{,}312 + 2{,}312 \cdot e^{-2t} \qquad \text{com} \qquad u_1(t) = -0{,}624 \cdot h(t)$$

$$x_2(t) = 0{,}0722 - 1{,}0722 \cdot e^{-5t} \qquad \text{com} \qquad u_2(t) = 0{,}985 \cdot h(t)$$

....

Neste parágrafo vimos como obter a solução da equação de estado de um sistema linear, no domínio da freqüência, com auxílio da matriz $\phi(s)$, denominada matriz de transição de estado. Vamos agora completar esse estudo, determinando a resposta Y(s) do sistema no domínio da freqüência, e definindo a matriz de transferência, que é uma generalização do conceito de função de transferência para o caso de sistemas vetoriais (ou sistemas a multivariáveis).

2.5 Resposta no domínio da freqüência

Voltemos ainda uma vez a considerar as equações de estado e de saída, no domínio da freqüência:

$$s \cdot X(s) - x_0 = A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \qquad \text{equação vetorial de estado}$$
$$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s) \qquad \text{equação vetorial de saída}$$

A solução dessa equação é, conforme vimos:

$$X(s) = \phi(s) \cdot x_0 + \phi(s) \cdot B \cdot U(s)$$

Levando esse valor de X(s) na equação de saída resulta:

$$Y(s) = C \cdot (\phi(s) \cdot x_0 + \phi(s) \cdot B \cdot U(s)) + D \cdot U(s)$$

ou,

$$Y(s) = C \cdot \phi(s) \cdot x_0 + (C \cdot \phi(s) \cdot B + D) \cdot U(s)$$

Essa é a resposta completa do sistema à excitação U(s) e ao estado inicial x_0. Como acontece com a solução completa da equação de estado, a resposta completa também apresenta duas parcelas distintas: a resposta à entrada zero, que é aquela que não depende de U(s), também denominada resposta livre, e a resposta ao estado zero, aquela que não depende do estado inicial x_0.

Podemos escrever:

Resposta à entrada zero: $Y_L(s) = C \cdot \phi(s) \cdot x_0$

Resposta ao estado zero: $Y_U(s) = C \cdot \phi(s) \cdot B + D) \cdot U(s)$

Resposta completa do sistema: $Y(s) = Y_L(s) + Y_U(s)$

ou seja: $Y(s) = C \cdot \phi(s) \cdot x_0 + (C \cdot \phi(s) \cdot B + D) \cdot U(s)$

Na expressão da resposta do estado zero, podemos definir a matriz (de dimensões qxp):

$$G(s) = C \cdot \phi(s) \cdot B + D$$

que nos permite escrever:

$$Y_U(s) = G(s) \cdot U(s)$$

A matriz G(s), assim definida, denomina-se matriz de transferência do sistema. No caso de sistemas escalares, isto é, com uma só variável escalar de entrada e outra de saída, a matriz de transferência se reduz à bem conhecida função de transferência do sistema.

<u>*Exemplo 5:*</u> O comportamento dinâmico de um sistema é descrito pela equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

(a.) determine o vetor de estado $x(t)$, para o caso em que $x_{01} = 3$ e $x_{02} = -1$ e a variável de entrada é nula ($u(t) = 0$);

(b.) Determine o vetor de estado $x(t)$, para o caso em que $x_0 = 0$ e $u(t) = h(t) = \deg\,\textit{rau unitário}$;

(c.) Supondo a saída $y(t) = x_1(t)$, determine a função de transferência $G(s) = {Y(s)}/{U(s)}$.

Solução:

(a.) Neste caso a solução inicial é $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ e a variável de entrada é nula. A solução da equação de estado se reduz à componente livre, a saber:

$$X(s) = \phi(s) \cdot x_0 \qquad \text{onde} \qquad \phi(s) = (s \cdot I - A)^{-1}$$

Calculemos $\phi(s)$:

$$(s \cdot I - A) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \qquad \Delta(s) = \det \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2$$

Invertendo a matriz $(s \cdot I - A)$ obtém-se:

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{\Delta(s)} & \dfrac{-1}{\Delta(s)} \\ \dfrac{2}{\Delta(s)} & \dfrac{s+3}{\Delta(s)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta(s)} & \frac{-1}{\Delta(s)} \\ \frac{2}{\Delta(s)} & \frac{s+3}{\Delta(s)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3s+1}{s^2+3s+2} \\ \frac{3-s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3s+1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{3-s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{s+1} + \frac{5}{s+2} \\ \frac{4}{s+1} + \frac{-5}{s+2} \end{bmatrix}$$

Resulta:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot e^{-t} + 5 \cdot e^{-2t} \\ 4 \cdot e^{-t} - 5 \cdot e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(b.) Neste caso, o estado inicial x_0 é nulo e a variável de entrada é um degrau unitário (u(t)=h(t)). A solução da equação de estado se reduz à componente de estado zero:

$$X(s) = \phi(s) \cdot B \cdot U(s)$$

onde $\phi(s)$ é o mesmo do caso anterior e $\mathrm{U(s) = £(h(t))} = 1/s$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta(s)} & \frac{-1}{\Delta(s)} \\ \frac{2}{\Delta(s)} & \frac{s+3}{\Delta(s)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{2}{s \cdot (s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Finalmente, utilizando a anti-transformada de Laplace, obtemos para t>0:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ 1 - 2 \cdot e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(c.) Como o sistema em estudo é escalar (tem apenas um sinal de entrada e um de saída), a matriz de transferência se reduz à própria função de transferência:

$$G(s) = C \cdot \phi(s) \cdot B + D$$

No caso atual $D = 0$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Logo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{s}{\Delta(s)} & \dfrac{-1}{\Delta(s)} \\ \dfrac{2}{\Delta(s)} & \dfrac{s+3}{\Delta(s)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s}{\Delta(s)}$$

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$$

2.6 Inversão de matrizes

Terminaremos este capítulo revendo algumas informações úteis relativas à inversão de matrizes numéricas em geral, e examinando um método específico de inversão das matrizes de transição de estado.

A matriz quadrada M é não singular quando o determinante de M for diferente de zero $(\det M \neq 0)$. Nesse caso defini-se também a matriz inversa de M como sendo a matriz M^{-1}, tal que $M \cdot M^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade.

Há vários métodos clássicos, bem conhecidos, para obtenção da matriz inversa. Um método que decorre diretamente da definição de matriz inversa permite efetuar o cálculo pela fórmula:

$$M^{-1} = \frac{adj\ M}{\det M}$$

onde $(adj\ M)$ é a matriz adjunta de M, isto é, é a matriz dos co-fatores de M, transposta.

Recordemos preliminarmente algumas definições relativas à teoria das matrizes.
Uma matriz M_{ki}, reduzida de M_i, é a matriz que resulta quando suprimimos de *M* a k-ésima linha e a i-ésima coluna. Se *M* for matriz quadrada nxn, a matriz reduzida M_{ki} terá dimensões $(n-1) \times (n-1)$. O determinante de M_{ki}, $(\det M_{ki})$, é o menor $|M_{ki}|$ da matriz *M*.

Co-fator C_{ki} do elemento $m_{k,i}$ da matriz M é definido pela equação:

$$C_{ki} = (-1)^{k+i} \cdot (\det M_{ki})$$

Isto é, o co-fator C_{ki} do elemento m_{ki} é o determinante da matriz resultante da eliminação da k-ésima linha e da i-ésima coluna da matriz *M*, multiplicada por $(-1)^{k+i}$.

A matriz dos co-fatores de M, $(cof\ M)$, é obtida da matriz *M*, substituindo-se cada elemento m_{ki} dessa matriz, pelo respectivo co-fator C_{ki}.

Finalmente, a matriz adjunta de *M*, $(adj\ M)$, é simplesmente a matriz dos co-fatores transposta, isto é, aquela que resulta da troca das linhas pelas colunas de $(cof\ M)$.

Exemplo: Seja determinar a matriz inversa de:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante de *M* será:

$$\Delta(s) = (\det M) = 4 \cdot (5-0) + 5 \cdot (-2+3) + 1 \cdot (0-15) = 20 + 5 - 15 = 10$$

A matriz dos co-fatores obtém-se facilmente:

$$(cof\ M) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -15 \\ 5 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Resulta, para matriz adjunta:

$$(adj\ M) = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -15 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

Finalmente a matriz inversa de *M*:

$$M^{-1} = \frac{(adj\ M)}{(\det M)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ -1{,}5 & 1{,}5 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

No caso de uma matriz 2x2, a matriz adjunta pode ser obtida rapidamente pela simples observação de uma lei de formação muito simples. De fato, calculemos a *adj A*, no exemplo que segue.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad (cof\ A) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad (adj\ A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Verifica-se que a matriz adjunta de uma matriz 2x2 obtém-se simplesmente permutando os elementos da diagonal principal e trocando o sinal dos demais elementos.

A inversão de matrizes de ordem superior à terceira, pelo método indicado, vai se tornando extremamente trabalhosa à medida que as dimensões da matriz aumentam. Vários outros métodos são então recomendáveis. Mesmo assim, a inversão de matrizes de dimensões elevadas requer grande volume de cálculo que, no caso de matrizes numéricas, podem ser realizados rapidamente por programação em computador. Há a registrar a existência de programas de processamento numérico de alto desempenho, oferecidos comercialmente e já disponíveis em Universidades. Entre estes, um dos utilizados na simulação de sistemas dinâmicos é o MATLAB, produzido pela "THE MATH WORKS INC.", de Massachusetts EEUU. Trata-se de um programa que trabalha diretamente com matrizes. Um escalar é entendido pelo MATLAB como sendo uma matriz de dimensões 1 x 1. Para inversão da matriz M acima , opera-se da seguinte maneira:

Entrada de dados:

$M = [4 \quad -5 \quad 1; \quad -2 \quad 5 \quad -1; \quad 3 \quad 0 \quad 1]$ <enter>

$$M =$$

$$\begin{matrix} 4 & -5 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$N = inv\,(M)$ <enter>

$$N =$$

$$\begin{matrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ -1{,}5 & 1{,}5 & 1{,}0 \end{matrix}$$

Quando a matriz não é puramente numérica, a operação com matrizes só pode ser processada diretamente por programas ditos de cálculo simbólico, ainda não muito divulgados. Assim, a matriz de transição de estado, que é uma matriz alfanumérica, não pode ser invertida diretamente. Por outro lado, essa matriz possui propriedades que permitem obter sua inversão por meio de um simples programa adicional (que pode ser programado no MATLAB ou mesmo em BASIC, PASCAL, etc ...). Programa com essa finalidade desenvolvido pelo Prof. Fabrizio Leonardi (V. Publicação FEI - Controle III - 1994 - p.50, Apêndice A). Esse programa baseia-se no fato de que a matriz de transição de estado pode ser apresentada sob a forma:

$$(s \cdot I - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \cdot \left[R_0 \cdot s^{n-1} + R_1 \cdot s^{n-2} + R_2 \cdot s^{n-3} + \ldots R_{n-2} \cdot s + R_{n-1} \right]$$

onde os κ_i são matrizes quadradas com as mesmas dimensões de A e que podem ser calculadas por recorrência, com auxílio de coeficientes α_i, da seguinte forma:

$$R_0 = I \qquad \alpha_1 = -tr\,(A) \qquad \text{e} \qquad R_1 = A \cdot R_0 + \alpha_1 \cdot I$$

Onde *tr (A)* é o traço da matriz *A*, definido como sendo a soma dos elementos da diagonal principal de *A*. Prosseguindo:

$$\alpha_2 = -(1/2)\cdot tr\,(R_1\cdot A) \qquad \text{e} \qquad R_2 = A\cdot R_1 + \alpha_2\cdot I$$

$$\alpha_3 = -(1/3)\cdot tr\,(R_2\cdot A) \qquad\qquad R_3 = A\cdot R_2 + \alpha_3\cdot I$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n-1} = -(1/(n-1))\cdot tr\,(R_{n-2}\cdot A) \qquad\qquad R_{n-1} = A\cdot R_{n-2} + \alpha_{n-1}\cdot I$$

$$\alpha_n = -(1/n)\cdot tr\,(R_{n-1}\cdot A)$$

Além disso, o determinante da matriz $(s\cdot I - A)$ também pode ser calculado em função dos coeficientes α_i (com i = 1, 2, ..., n):

$$\Delta(s) = \det\,(s\cdot I - A) = s^n + \alpha_1\cdot s^{n-1} + \alpha_2\cdot s^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\cdot s + \alpha_n$$

A prova dessas propriedades pode ser encontrada em Zadeh, L. A. e Desoer, C. A., Linear System Theory, Mcgraw-Hill, 1963.

2.7 Exercícios propostos

1. Para o sistema descrito pela equação vetorial de estado

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1 & (t)\\ u_2 & (t)\end{bmatrix}$$

(a.) Escreva as equações escalares de estado no domínio da freqüência;

(b.) Supondo condições iniciais nulas, determine $x_1(t)$ e $x_2(t)$, no caso em que $u_2(t) = h(t)$=degrau unitário e $u_2(t) = 0$.

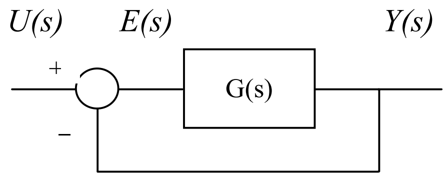
Resposta:

$$s\cdot X_1(s) - x_{01} = -X_1(s) + X_2(s) + U_2(s) \qquad x_1(t) = 0\cdot 5(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})$$

$$s\cdot X_2(s) - x_{02} = -2\cdot X_2(s) + U_1(s) \qquad x_2(t) = 0\cdot 5(1 - e^{-2t})$$

2. O diagrama de blocos da figura abaixo representa um sistema com realimentação unitária. O sistema do ramo de avanço, designado por *G(s)*, é descrito pelas equações:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 5\\ -10 & -7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 9\end{bmatrix}\cdot e(t)$$



$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Faça a representação de estado do sistema de malha fechada.

Resposta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -37 & -16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} \cdot u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

3. Dadas as equações de estado e de saída de um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determine:

(a.) Os auto-valores da matriz A (pólos do sistema);
(b.) A matriz de transição de estado $\phi(s)$;
(c.) A matriz de transferência do sistema;
(d.) A resposta do sistema para o caso de condições iniciais nulas e $u_1(t) = 0$ e $u_2(t) = \sigma(t)$ = impulso unitário.

Resposta:

$$s_1 = -3 + j\,; \quad s_2 = -3 - j \qquad \phi(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+6}{(s+3)^2+1} & \dfrac{1}{(s+3)^2+1} \\ \dfrac{-10}{(s+3)^2+1} & \dfrac{s}{(s+3)^2+1} \end{bmatrix}$$

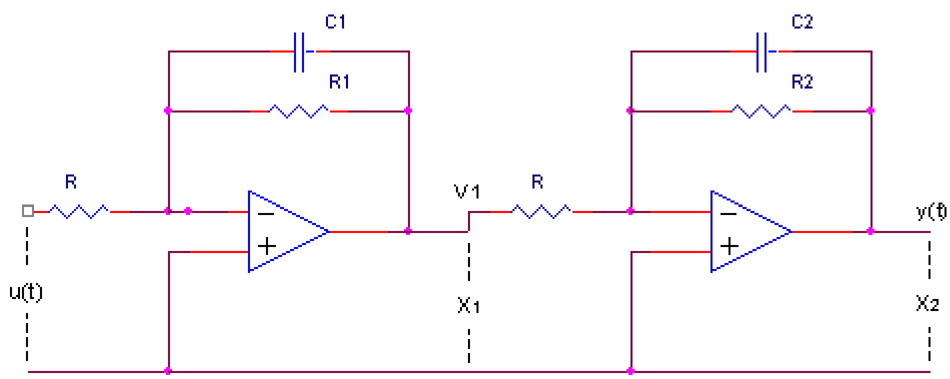
$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{(s+3)^2+1} & \dfrac{s+1}{(s+3)^2+1} \\ \dfrac{1-s}{(s+3)^2+1} & \dfrac{1-s}{(s+3)^2+1} \end{bmatrix}$$

$$y_1(t) = e^{-3t}\left[-2 \cdot sen\,(t) + \cos\,(t)\right]$$
$$y_2(t) = e^{-3t}\left[4 \cdot sen\,(t) + \cos\,(t)\right]$$

4. Dado o circuito da figura abaixo, que contém dois amplificadores operacionais, escreva as equações de estado e de saída:

(a.) considerando como variáveis de estado as tensões nos condensadores (x_1 e x_2);
(b.) escolhendo variáveis de estado de fase.

A entrada do sistema é a tensão u(t) e a saída, a tensão y(t). Determine para cada caso os auto-valores da matriz do sistema, bem como a resposta y(t) a um degrau de tensão de 50 mV (u(t)=0,05 h(t) V) e condições iniciais $x_{01} = -0{,}5$ e $x_{02} = -7{,}0$ (V). Compare os resultados (a.) e (b.).



Dados:

$R = 100\,\Omega$	$R_1 = 2\,k\Omega$	$R_2 = 1\,k\Omega$
	$C_1 = 1\,\mu F$	$C_2 = 4\,\mu F$

TRANSFORMADAS	
DOMÍNIO DO TEMPO	**DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA**

$f(t)$	$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$
$\delta(t)$	1
$u(t)$, ou 1, pata t>0	$1/s$
$\omega(t)$, ou t, pata t>0	$1/s^2$
$e^{-\alpha t}$	$1/(s+\omega)$
$sen\ \omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
$senh\ \omega t$	$\omega/(s^2-\omega^2)$
$\cosh\omega t$	$s/(s^2-\omega^2)$
TEOREMAS	
$\frac{d}{dt}f(t)$	$s\cdot F(s)-f(0_+)$
$\frac{d^2}{dt^2}f(t)$	$s^2\cdot F(s)-s\cdot f(0_+)-f'(0_+)$
$\int_0^t f(t)\,dt$	$F(s)/s$
$f(t-a)$	$F(s)\cdot e^{-as}$
$f(t)\cdot e^{-at}$	$F(s+a)$
$t\cdot f(t)$	$\frac{-d}{ds}\cdot F(s)$
$f(\omega t)$	$\frac{1}{\omega}\cdot F(s/\omega)$