TRANSFORMAÇÕES LINEARES

V.C.Parro

27 de janeiro de 2021

Sumário

1. **Motivação**
    - Como visto o vetor de estados não é único $\Rightarrow$ a seleção do vetor de estados é arbitrário.
    - Dado um sistema LIT com um dado vetor de estados $\Rightarrow$ pode-se transformá-lo em outro sistema LIT equivalente com outro vetor de estados:
        - Sistema LIT com estados $\mathbf{x}_1 \quad \leftrightarrow$ sistema LTI com estados $\mathbf{x}_2$;
        - A dinâmica do sistema não se altera com uma transformação linear.

- Por meio de uma transformação linear um sistema LIT pode ser escrito na forma forma canônica diagonal.

Dado um sistema LIT de ordem n,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ e $\mathbf{y}(t) \in R^p$.
Definindo um novo vetor de estados $\mathbf{z}(t)$.
A relação entre os vetores de estados $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{z}(t)$ é dada por:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t) \quad \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{z}(t) \; (2)$$

onde $\mathbf{T}$ é uma matriz constante de dimensão nxn, cuja inversa existe.

Diferenciando a eq. (2) em relação ao tempo tem-se:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) \tag{2}$$

- Substituindo as eqs. (2) e (2) na dinâmica do sistema, tem-se:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\right], \tag{3}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\right], \tag{4}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{5}$$

- Substituindo a eq. (2) na equação da saída do ssistema, tem-se:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) = \mathbf{CTz}(t) + \mathbf{Du}(t). \tag{6}$$

- As eqs. (5) e (6) formam a dinâmica do sistema transformado, ou seja:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}^*\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}^*\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^*\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}^*\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{7}$$

onde as matrizes do novo sistema são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} \\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}^* &= \mathbf{CT} \\ \mathbf{D}^* &= \mathbf{D} \end{aligned} \tag{8}$$

Atenção

Note que as saídas e entradas do sistema não se alteram na transformação linear $\Rightarrow$ somente os estados mudam

Função de Transferência

Verificação

As FTs do sistema original e do sistema transformado são iguais?

Devem ser porque na Transformação Linear as entradas e saídas não se alteram e a FT fornece somente a relação entre entrada e saída.

- Dadas as FT dos sistemas originais e transformado:

$$\begin{cases} \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ \mathbf{G}^*(s) = \mathbf{C}^*\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*\right)^{-1}\mathbf{B}^* + \mathbf{D}^* \end{cases} \tag{9}$$

- Vamos verificar se $\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}^*(s)$:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\left(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\right)(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\left(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\right)\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}\mathbf{T})\left[\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{T}\right]\left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\right) + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}^*\left[\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{T}\right]\mathbf{B}^* + \mathbf{D}^*$$

usando a propriedade das matrizes $\Rightarrow \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}^* \left[\mathbf{T}^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\, \mathbf{T}\right]^{-1} \mathbf{B}^* + \mathbf{D}^*$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}^* \left[s\mathbf{T}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\right]^{-1} \mathbf{B}^* + \mathbf{D}^*$$

finalmente,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}^* (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{B}^* + \mathbf{D}^* = \mathbf{G}^*(s)$$

- Note que, por exemplo, na FT de um sistema de 3^a ordem,

$$G(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

- Existem 7 parâmetros;
- No modelo SS de um sistema de 3^a ordem existem $\mathbf{A}(3x3)$, $\mathbf{B}(3x1)$, $\mathbf{C}(1x3)$ e $\mathbf{D}(1x1) \Rightarrow$ 16 parâmetros.
- Isso é uma contradição? Será que existem mais graus de liberdade na forma SS?

$\Rightarrow$ Não, pois ao escolher os estados é como se definesse uma matriz de transformação $\mathbf{T}$, que para um sistema de 3^a ordem tem 9 elementos, que representam os 9 G.L. a mais da forma SS.

Diagonalização de um sistema

- Uma forma de diagonalizar um sistema na forma SS é por meio de uma transformação linear.
- A transformação linear que diagonaliza um sistema é dada por:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t) \tag{10}$$

onde $\mathbf{z}(t)$ são os estados do sistema na forma diagonal e $\mathbf{W}$ é a matriz dos autovetores da esquerda da matriz $\mathbf{A}$ do sistema.

Matriz dos autovetores da direita

- Matriz dos autovetores da direita da matriz **A** do sistema:

$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \cdots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}_{(nxn)}$ $\Rightarrow$ os autovetores são dispostos em colunas. (12)

Matriz dos autovetores da esquerda

- Matriz dos autovetores da esquerda da matriz A do sistema:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \leftarrow & \mathbf{w_1} & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{w_2} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \mathbf{w_n} & \rightarrow \end{bmatrix}_{(nxn)} \Rightarrow \text{os autovetores são dispostos}$$

em linhas (13)

- A transformação de diagonalização é dada pela matriz de transformação

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{V} \\ \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{W} \end{cases} \tag{11}$$

As matrizes do sistema diagonalizado são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{WAV} \\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{WB} \\ \mathbf{C}^* &= \mathbf{CV} \\ \mathbf{D}^* &= \mathbf{D} \end{aligned} \tag{12}$$

A matriz Λ do sistema diagonalizado é dada pelos autovalores do sistema:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{(nxn)} \tag{13}$$

O sistema diagonalizado fica:

$$\begin{cases} \mathbf{z}(t) = \mathbf{\Lambda z}(t) + (\mathbf{WB})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (\mathbf{CV})\mathbf{z}(t) + \mathbf{Du}(t) \end{cases} \tag{14}$$

Atenção

Note que se os autovalores forem complexos as matrizes do sistema nessa transformação serão todas complexas $\Rightarrow$ diferente da forma bloco diagonal vista anteriormente.