NÃO LINEARES

1. Introdução

número: propriedade comum a grupos heterogêneos

É uma medida que depende de observação e, portanto, está sempre associado a uma incerteza. Discussão entre igualdade e precisão.

realimentação: é uma seqüência fechada de causa efeito.

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$$

(A acarreta B que acarreta C que acarreta A)

É dita positiva quando o efeito (saída) agrava a causa (entrada).

Exemplos:

- Destruição térmica de um semicondutor.
- Processo de disparo de um tiristor.

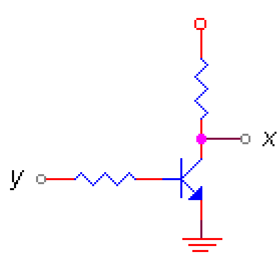
É dita negativa quando o efeito atenua a causa.

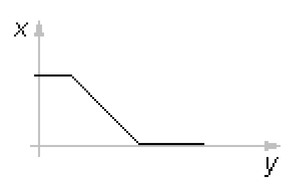
Em linguagem matemática, a realimentação é identificada por uma dependência funcional.

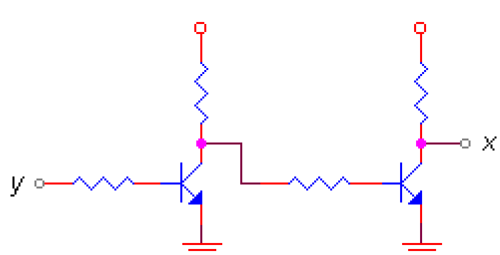
$$y = g(x)$$
$$x = h(y)$$

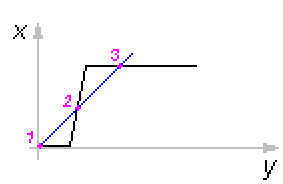
Exemplo:

Multivibrador bi-estável a transistores.



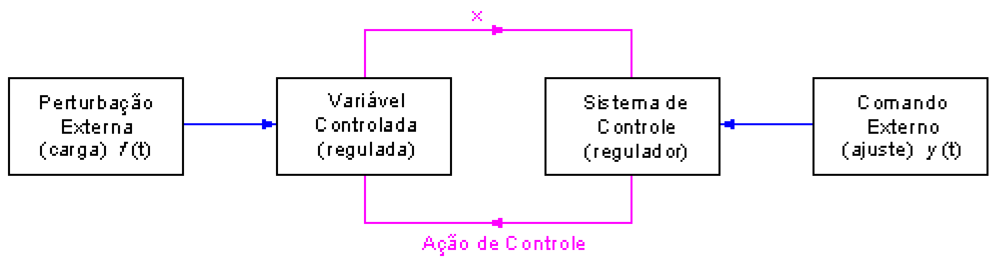




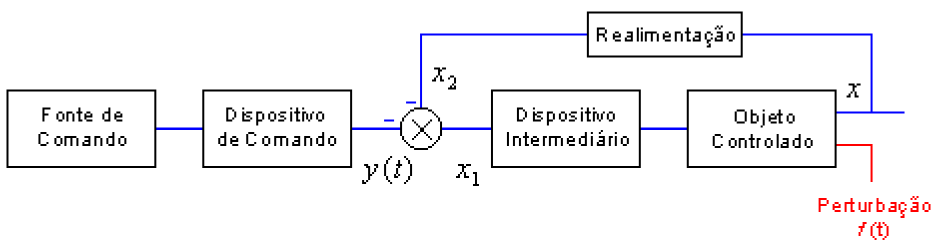


Os pontos *1* e *3* são linearmente estáveis. O ponto *2* é instável.

2. Sistemas Lineares e Não Lineares



x → variável controlada ou sem desvio
$y(x)$ → força de comando (variação ou ajuste)



Equação diferencial:

$$F_1\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = F_2\left(f, \frac{df}{dt}, \ldots, \frac{d^m f}{dt^m}; y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^\upsilon y}{dt^\upsilon}\right)$$

Solução: $x = x(t)$ para dados $f(t)$ e $y(t)$.

A equação diferencial pode possuir derivadas parciais (para alguns sistemas). Algumas vezes pode ser escrita na forma integro-diferencial e outras por equações a diferenças finitas.

Classificação dos sistemas:

1. Sistemas lineares ordinários

Descritos exclusivamente por equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Os parâmetros do sistema são: massa, momento de inércia, indutância, resistência, capacitância, fator de ganho, módulo de elasticidade, constante de tempo, etc. Dentro da observação que "constante não existe", os parâmetros lineares são obtidos normalmente por uma linearização (dentro de uma determinada precisão e dentro de determinados limites).

A equação diferencial para estes sistemas é do tipo:

$$a_0 \cdot \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \cdot \frac{dx}{dt} + a_n \cdot x = b_0 \cdot \frac{d^m f}{dt^m} + b_1 \cdot \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \cdot \frac{df}{dt} + b_m \cdot f +$$

$$+ c_0 \cdot \frac{d^\upsilon y}{dt^\upsilon} + c_1 \cdot \frac{d^{\upsilon-1} y}{dt^{\upsilon-1}} + \ldots + c_{\upsilon-1} \cdot \frac{dy}{dt} + c_\upsilon \cdot y$$

$$m \leq n \quad e \quad \upsilon \leq n$$

Notação: $\frac{dx}{dt} = px$; $\frac{d^n x}{dt^n} = p^n x$; $\int x \, dt = \frac{x}{p}$

Exemplo de sistema de 2ª ordem:

$$a_0 \cdot \frac{dx^2}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + a_2 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(a_0 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_2\right) \cdot x = 0$$

Genericamente para equações do sistema:

$$L(p)\, x = S(p)\, f(t) + N(p)\, y(t)$$

$$\left.\begin{matrix} L(p) \\ S(p) \\ N(p) \end{matrix}\right\} \quad \text{Polinômios em } x, f \text{ e } y$$

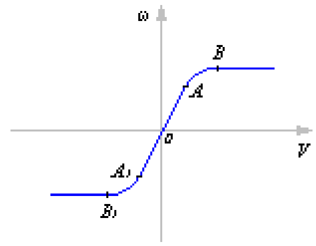
2. *Sistemas lineares singulares*

- Sistemas Lineares com Parâmetros Variáveis
- Sistemas Lineares com Parâmetros Distribuídos
- Sistemas Lineares com Atraso
- Sistemas Lineares Pulsados

3. *Sistemas não lineares*

São sistemas automáticos que incluem junto com os circuitos lineares pelo menos um circuito não linear. Este é um circuito com característica estática não linear ou com um tipo qualquer de não linearidade na equação que descreve sua dinâmica. Um circuito não linear é aquele que por alguma razão não pode ser submetido a linearização.

<u>Exemplo:</u> Motor com a característica abaixo:

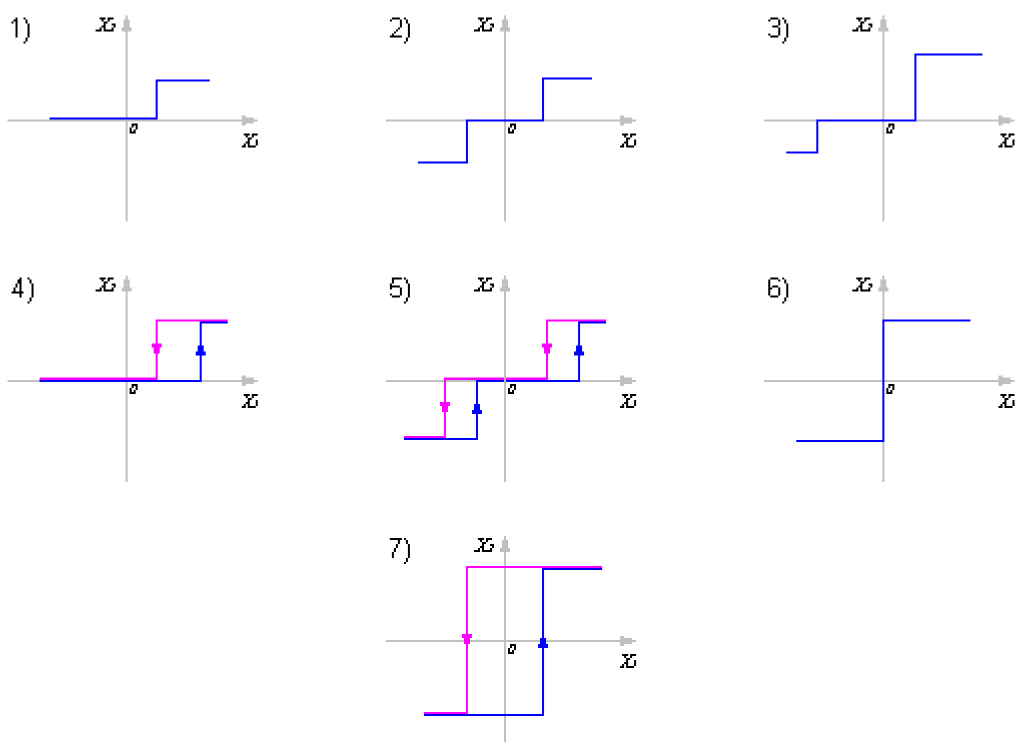


V ... tensão de armadura
ω ... velocidade angular

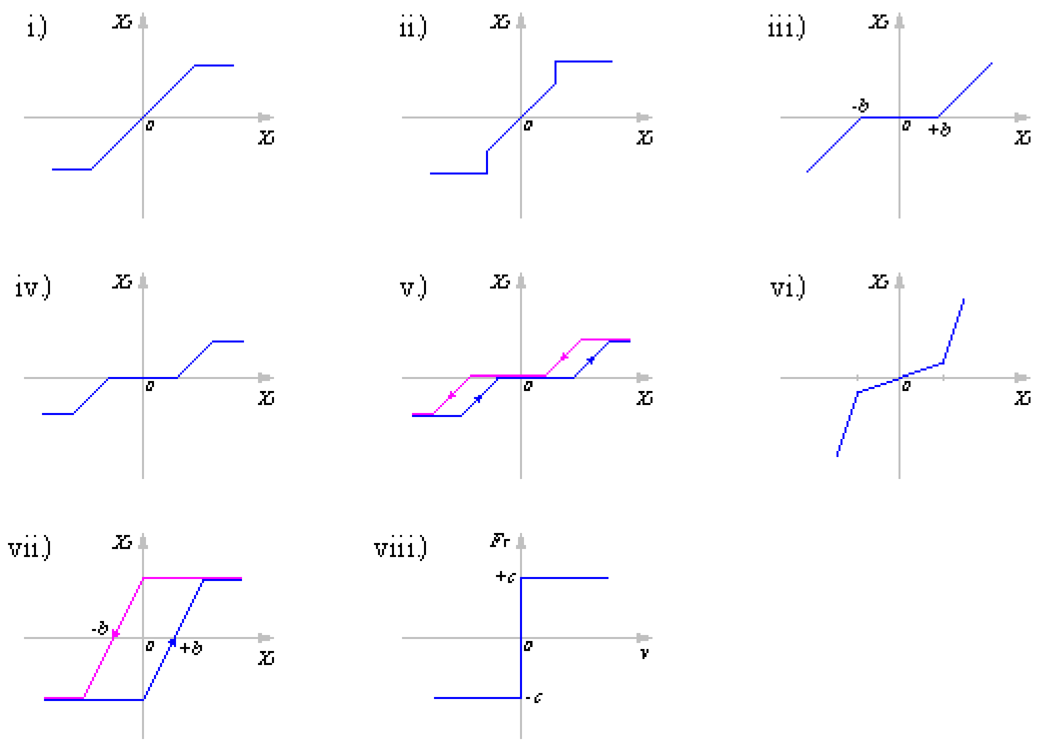
Se o motor for usado fora da característica A, 0A (B, 0B) ele representará um elemento não linear. O sistema a que ele pertencer será não linear como um todo mesmo que todos os outros elementos sejam lineares.

Elementos não lineares mais usuais:

a. <u>Circuito não linear a rele</u>: para uma variação contínua da variável de entrada x_1, apresenta uma variação descontínua da variável de saída x_2, que aparece para valores definidos da entrada.



b. Circuito não linear com característica linear por partes: a característica entrada saída é contínua, mas assume a forma de uma linha quebrada constituída de segmentos lineares retilíneos (não possuindo derivadas contínuas). Este tipo de circuito não linear também inclui aqueles que são descritos por equações diferenciais de várias formas nas várias regiões de operação.



i. característica linear limitada por saturação
ii. característica linear limitada por saturação
iii. zona morta de largura 2b
iv. zona morta com saturação
v. zona morta com saturação e histerese
vi. ganho crescente com a variável de entrada quando ela ultrapassa b
vii. folga em engrenagem
viii. característica de atrito seco

c. Circuito não linear com característica curva: na análise deste tipo de circuito sua característica pode ser aproximada por uma segunda curva mais conveniente para sua análise, mas não linear. Pode ser linear por trechos. Eventualmente linearizado em uma região de operação. A dinâmica destes circuitos pode ser descrita por equações não lineares, contendo o produto de variáveis e suas derivadas ou outras combinações mais complicadas.

d. Circuito não linear com atraso: além da não linearidade, existe ainda um atraso τ na transmissão do sinal aplicado à entrada.

e. <u>Circuito não linear pulsado</u>: a característica do pulso (amplitude, duração) não varia em proporção direta à quantidade de entrada.

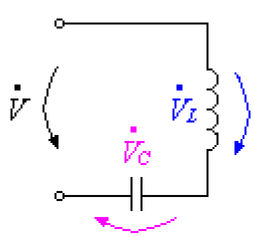
Ferro-ressonância

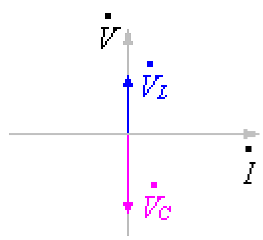
Fenômeno do salto: circuitos não lineares apresentam características que não podem ser explicadas pela teoria de circuitos lineares. Um exemplo é o fenômeno do salto.

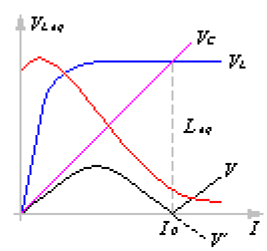
Uma mudança gradual em uma das variáveis características de um dispositivo pode acarretar mudanças bruscas na outra variável.
Em circuitos com indutores não lineares contendo uma capacitância uma mudança gradual na tensão aplicada pode ocasionar mudanças bruscas na amplitude e fase da harmônica fundamental de corrente. Da mesma forma, mudança gradual de corrente pode acarretar mudança brusca da amplitude e fase da tensão em algum ponto do circuito. Este fenômeno, quando causado por comportamento não linear de indutores com núcleo de ferro, é chamado <u>ferro ressonância</u>.
Para analisar este circuito fazemos algumas hipóteses simplificadoras:

Assumimos que a tensão, corrente e fluxo são senoidais;
Assumimos que a indutância seja quase linear e dependente da corrente;
Desprezamos as perdas no ferro (tensão e corrente em quadratura).

Ferro-ressonância de tensão:





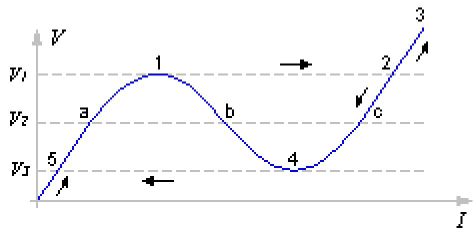


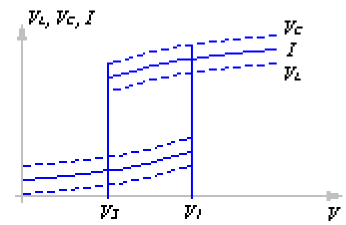
$$\dot{V} = \dot{V}_L + \dot{V}_C \qquad\qquad V = |V_L - V_C|$$

Na “ressonância” , $V_L = V_C$.

V é positiva (valor RMS)

$$V(I) = V'(I) \qquad \forall\, I < I_o$$
$$V(I) = -V'(I) \qquad \forall\, I > I_o$$





$1 \rightarrow 2$ $5 \leftarrow 4$	salto	1 ... corrente atrasada 2 ... corrente adiantada (inversão de fase)

A curva real pode ser obtida atacando-se o circuito por uma fonte de corrente ao invés de tensão V.

Para tensões acima de V_1 a inclinação de V_L é muito menos que V_C. Este é o princípio do regulador ferro-ressonante.

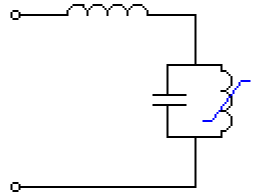
Regulador ferro-ressonante

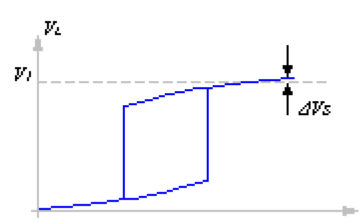
Fator de estabilização:

$$k_S = \frac{\dfrac{\Delta V_e}{V_e}}{\dfrac{\Delta V_s}{V_s}} = \frac{\Delta V_e}{\Delta V_s} \cdot \frac{V_s}{V_e}$$

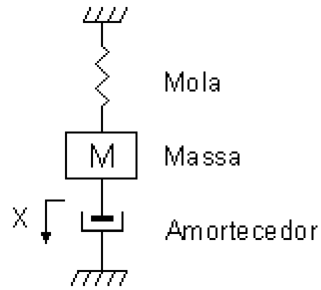
Para circuitos lineares $k_S = 1$.

Se $V_S > V_1$:





Dependência freqüência / amplitude:

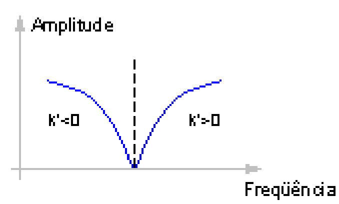


$$m \cdot \ddot{x} + f \cdot \dot{x} + k \cdot x + k' \cdot x^3 = 0$$

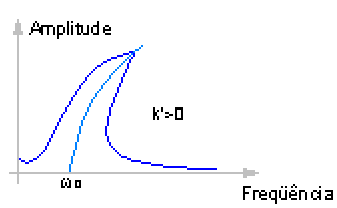
x ... deslocamento
m ... massa
f ... coeficiente de atrito viscoso
$k \cdot x + k' \cdot x^3$ ... força de mola não linear

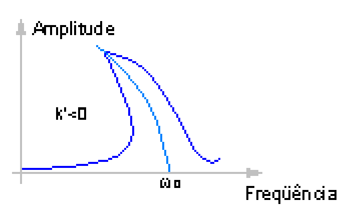
$k' > 0$ ... mola dura (hard spring)
$k' < 0$ ... mola macia

Experimentalmente verifica-se que se $k' > 0$ a freqüência de oscilação natural decresce quando a amplitude decresce e se $k' < 0$ a freqüência cresce quando a amplitude decresce.



Oscilação forçada (resposta em freqüência):





Representação das respostas usando trajetórias de fase (espaço de estados).

A equação diferencial:

$$F_1\left(x, \dot{x}, \ldots, \overset{n}{x}\right) = F_2\left(f, \dot{f}, \ldots, \overset{m}{f}; y, \dot{y}, \ldots, \overset{\upsilon}{y}\right)$$

Pode ser transformada para um sistema de equações diferenciais da forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = \phi_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, f, y\right)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \phi_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, f, y\right)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \phi_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, f, y\right)$$

Com condições iniciais:

$$x_1 = x_{10}; \qquad x_2 = x_{20}; \qquad \ldots \qquad x_n = x_{n0} \qquad \text{em } t=0$$

x_i → variável regulada
f → perturbação
y → entrada

No caso da equação linear:

$$a_0 \cdot \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \cdot \frac{dx}{dt} + a_n \cdot x = b_0 \cdot \frac{d^m f}{dt^m} + b_1 \cdot \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \cdot \frac{df}{dt} + b_m \cdot f +$$
$$+ c_0 \cdot \frac{d^\upsilon y}{dt^\upsilon} + c_1 \cdot \frac{d^{\upsilon-1} y}{dt^{\upsilon-1}} + \ldots + c_{\upsilon-1} \cdot \frac{dy}{dt} + c_\upsilon \cdot y$$

temos (1)

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n + \rho_1\left(f, y\right)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n + \rho_2\left(f, y\right)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n + \rho_n\left(f, y\right)$$

É possível o retorno à equação original eliminando as variáveis x_1, x_2, etc.

Para obter a equação do transiente num sistema linear

$$x_{it}(t) = x_i(t) - x_i^o(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^o \\ f^o \\ y^o \end{array}\right\} \quad \text{caracteriza regime permanente}$$

para dados $f = f^o(t)$ e $y = y^o(t)$ escrevemos as equações de regime (2):

$$\frac{dx_1^o}{dt} = a_{11} \cdot x_1^o + a_{12} \cdot x_2^o + \ldots + a_{1n} \cdot x_n^o + \rho_1 (f, y)$$

$$\frac{dx_2^o}{dt} = a_{21} \cdot x_1^o + a_{22} \cdot x_2^o + \ldots + a_{2n} \cdot x_n^o + \rho_2 (f, y)$$

$$\frac{dx_n^o}{dt} = a_{n1} \cdot x_1^o + a_{n2} \cdot x_2^o + \ldots + a_{nn} \cdot x_n^o + \rho_n (f, y)$$

e subtraímos de (1), obtendo:

$$\frac{dx_{1t}}{dt} = a_{11} \cdot x_{1t} + a_{12} \cdot x_{2t} + \ldots + a_{1n} \cdot x_{nt}$$

$$\frac{dx_{2t}}{dt} = a_{21} \cdot x_{1t} + a_{22} \cdot x_{2t} + \ldots + a_{2n} \cdot x_{nt}$$

$$\frac{dx_{nt}}{dt} = a_{n1} \cdot x_{1t} + a_{n2} \cdot x_{2t} + \ldots + a_{nn} \cdot x_{nt}$$

Para sistemas não lineares, procedemos de maneira análoga (3):

$$\frac{dx_{1t}}{dt} = x_1 (x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt})$$

$$\frac{dx_{2t}}{dt} = x_2 (x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt})$$

$$\frac{dx_{nt}}{dt} = x_n (x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt})$$

onde

$$x_i (x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt}) = \phi_i (x_{1t} + x_1^o, x_{2t} + x_2^o, \ldots, x_{nt} + x_n^o, f^o, y^o) - \phi_i (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o, f^o, y^o)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

resposta transitória=(resposta completa – resposta de regime)

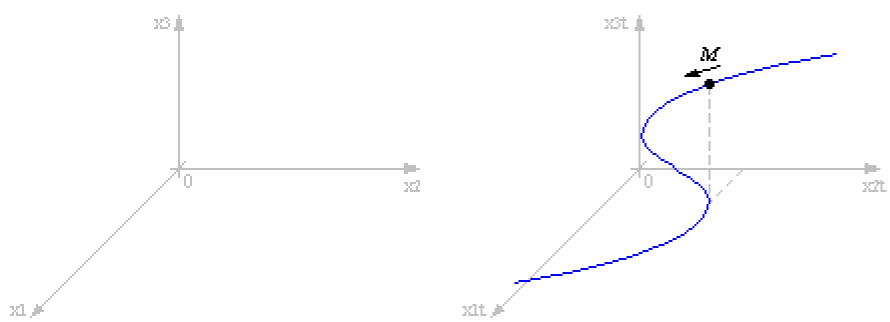
Em todos os casos as condições iniciais são também transformadas:

$$x_{10t} = x_{10} - x_{10}^{o}, \qquad x_{20t} = x_{20} - x_{20}^{o}, \qquad \ldots \qquad , x_{n0t} = x_{n0} - x_{n0}^{o} \qquad (4)$$

(condição inicial transiente = condição inicial total – condição inicial de regime)

Espaço de fase – seja $n = 3$ em (2) ou (3) 3ª ordem

As variáveis x_{1t}, x_{2t}, x_{3t} podem ter significado físico arbitrário, mas é possível imaginar estas variáveis como um sistema convencional de coordenadas de um ponto *M*.



Em um dado instante as quantidades x_{1t}, x_{2t} e x_{3t} terão valores definidos. Estes valores definirão a posição do ponto *M* no espaço. No curso do tempo x_{1t}, x_{2t} e x_{3t} variarão de uma maneira definida.
Isto corresponde a um movimento do ponto *M* sobre uma trajetória definida.
A trajetória do ponto *M* serve como uma representação geométrica do comportamento do sistema no processo transitório.
O ponto *M* é chamado ponto gerador, sua trajetória é chamada trajetória de fase e o espaço (x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}) é chamado espaço de fase.

Note que as derivadas no tempo das coordenadas representam as projeções da velocidade. Os conjuntos de equações (3) e (4) representam esta velocidade do ponto *M*.

As condições iniciais $\left(x_{10t}, x_{20t}, x_{30t}\right)$ definem as coordenadas do ponto inicial da trajetória de fase M_0. Se tivermos somente duas variáveis, o ponto *M* se moverá em um plano chamado plano de fase. Se tivermos *n* variáveis estendemos o conceito para o de movimento de um ponto *M* no E^n (espaço a *n* dimensões).

Note que a representação geométrica elimina o tempo e é, portanto, qualitativa. Para se obter a representação quantitativa é necessário resolver o sistema de equações no tempo.

O regime permanente do sistema é caracterizado por valores $x_{it} = x_{2t} = \ldots = 0$. Conseqüentemente a representação de regime é a origem do espaço de fase. Resulta que a trajetória de fase de um sistema linear estável irá assintoticamente tender à origem para o tempo crescente. Se o sistema for instável, a trajetória divergirá da origem.

Trajetórias de fase para Sistemas Lineares Ordinários

Dada a equação:

$$\ddot{x} + a_1 \cdot \dot{x} + a_2 \cdot x = 0$$

Seja:

$$y = \dot{x} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = y$$

$$\dot{y} + a_1 \cdot y + a_2 \cdot x = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = -a_1 \cdot y - a_2 \cdot x$$

Transformação da equação diferencial em equação de 1ª ordem.

Eliminando *t*, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2 \cdot \frac{x}{y}$$

as soluções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são equações paramétricas das curvas integrais nos planos *x*, *y* (*t* é o parâmetro).

As condições iniciais $\left(y = y_0 = \dot{x}_0 \ e \ x = x_0 \right)$ definem a posição inicial do ponto gerador $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

A curva integral passa pelo ponto M_0 e representa o curso do processo transitório do sistema para dadas condições iniciais.
O conjunto das curvas representa o conjunto dos possíveis transientes para dadas condições iniciais.

As raízes da equação característica da equação diferencial são:

$$I_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

Temos seis casos possíveis:

1. Raízes puramente imaginárias com $a_1 = 0$ e $a_2 > 0$ - Sistema linear no limiar de estabilidade.
2. Raízes complexas com parte real negativa $a_1^2 < 4a_2$, $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$ - Sistema linear estável.
3. Raízes complexas com parte real positiva $a_1^2 < 4a_2$, $a_1 < 0$ e $a_2 > 0$ - Sistema linear instável.
4. Raízes reais negativas $a_1^2 > 4a_2$, $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$ - Sistema linear estável.
5. Raízes reais positivas $a_1^2 > 4a_2$, $a_1 < 0$ e $a_2 > 0$ - Sistema linear instável.
6. Raízes reais de sinais opostos $a_2 < 0$ - Sistema instável, com o caso particular de uma só raiz para $a_2 = 0$ (limiar de estabilidade).

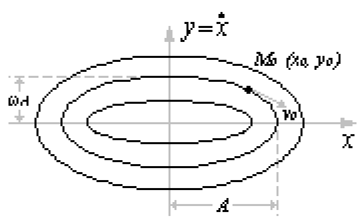
Caso 1: Oscilações não amortecidas

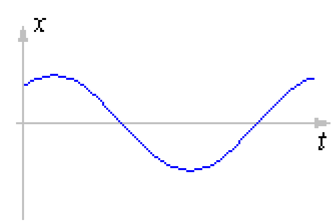
$$\left.\begin{aligned} x &= A \cdot sen(\omega t + \beta) \\ y = \dot{x} &= \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \beta) \end{aligned}\right\} \qquad \omega = \sqrt{a_2}$$

Equações Paramétricas de uma Elipse. Semi-eixos A e ωA.

Amplitude constante e fase β dependendo das condições iniciais.

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega^2}} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{\omega \cdot x_0}{y_0} \qquad \left(y_0 = \dot{x}_0\right)$$





Caso 2: Raízes complexas com parte real negativa / oscilações amortecidas (2.1)

$$x = A \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot sen(\omega t + \beta)$$

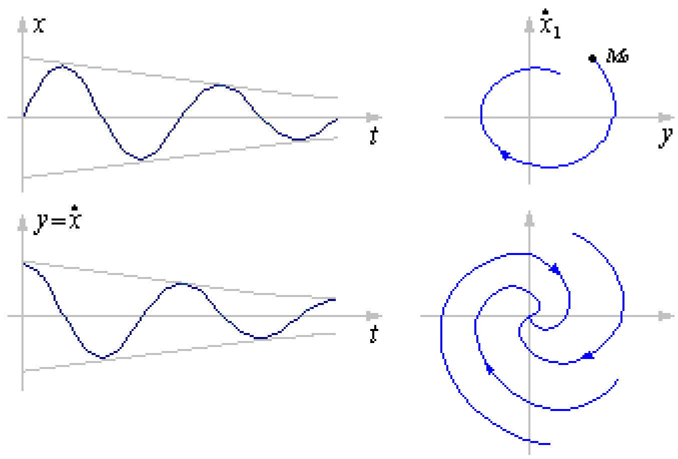
$$y = \dot{x} = \dot{\gamma} \cdot A \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \beta + \delta)$$

$$\alpha = \frac{a_1}{2} \qquad \omega = \sqrt{a_2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} \qquad \gamma = \sqrt{a_2} \qquad \delta = \tan^{-1}\frac{\alpha}{\omega}$$

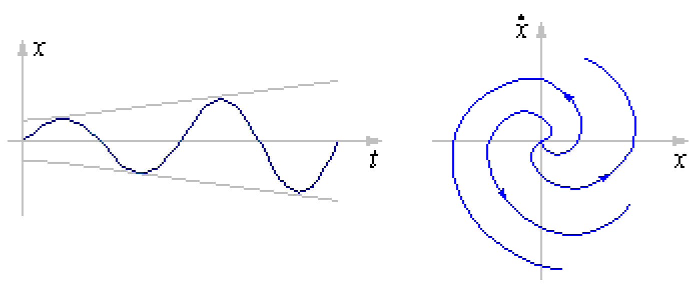
as constantes A e β são determinadas a partir das condições iniciais $x = x_0$, $y = y_0 = \dot{x}_0$ para $t=0$.

Os valores de x e $y = \dot{x}$ não se repetem após um período de oscilação, mas se tornam menores. Isto resulta em uma curva que não retorna ao ponto M_0, e se aproxima da origem do sistema de coordenadas.

As equações (2.1) são as equações paramétricas de uma família de espirais que assintoticamente se aproximam da origem. Para cada valor de A corresponde uma única espiral. A constante β corresponde à posição inicial do ponto gerador $M_0\left(x_0, y_0\right)$ na espiral correspondente.



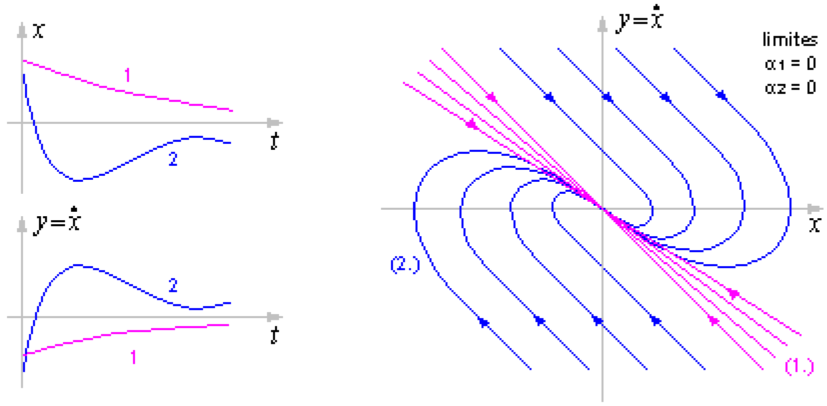
Caso 3: Raízes complexas com parte real positiva / oscilações divergentes



Caso 4: Raízes reais negativas / processo aperiódico

$$x = c_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \qquad y = \dot{x} = -\alpha_1 \cdot c_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot c_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}$$

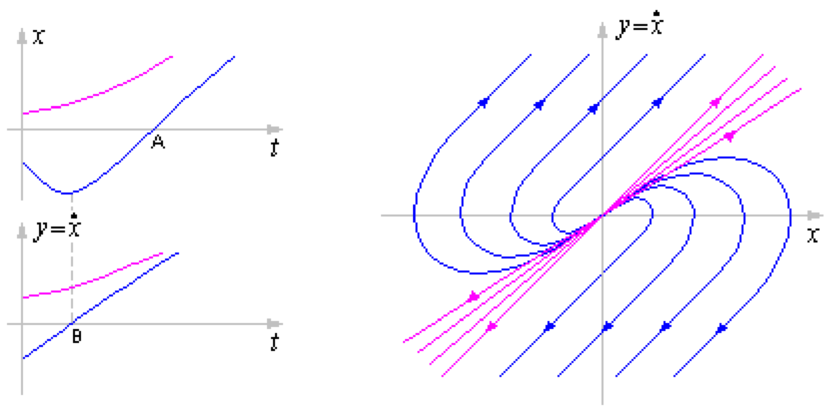
$$\alpha_{1,2} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$



(1.) $x > 0$ e $y < 0$
(2.) os sinais de x e y trocam

A trajetórias tendem diretamente para a origem, mas em um tempo infinito.

Caso 5: Raízes reais positivas $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 < 0$



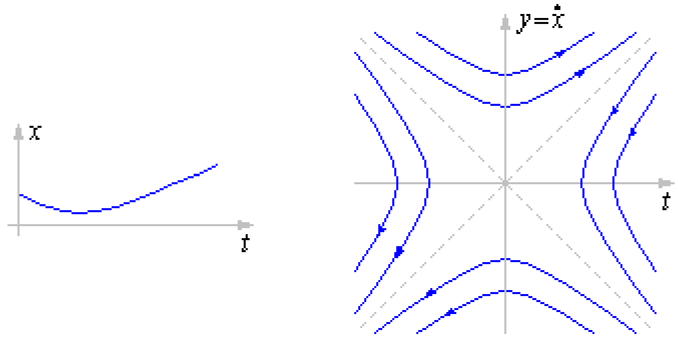
Caso 6: Raízes reais com sinais opostos / resposta aperiódica

$a_2 < 0$ tornam $\alpha^2 = -a_2$ para simplicidade de construção $a_1 = 0$

$$\dot{x} - \alpha^2 \cdot x = 0 \qquad \therefore \qquad \frac{dy}{dx} = \alpha^2 \cdot \frac{x}{y}$$

Que integrada fornece:

$$\frac{x^2}{c} - \frac{y^2}{(\alpha \cdot c)^2} = 1 \qquad \text{Família de hipérboles}$$



Pontos e linhas singulares

Em pontos que correspondem a estados estáveis, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2 \cdot \frac{0}{0}$$

ou seja, direção da tangente das curvas integrais (trajetória de fase) indeterminada.

Estes pontos são chamados pontos singulares, classificados como:

a. centro

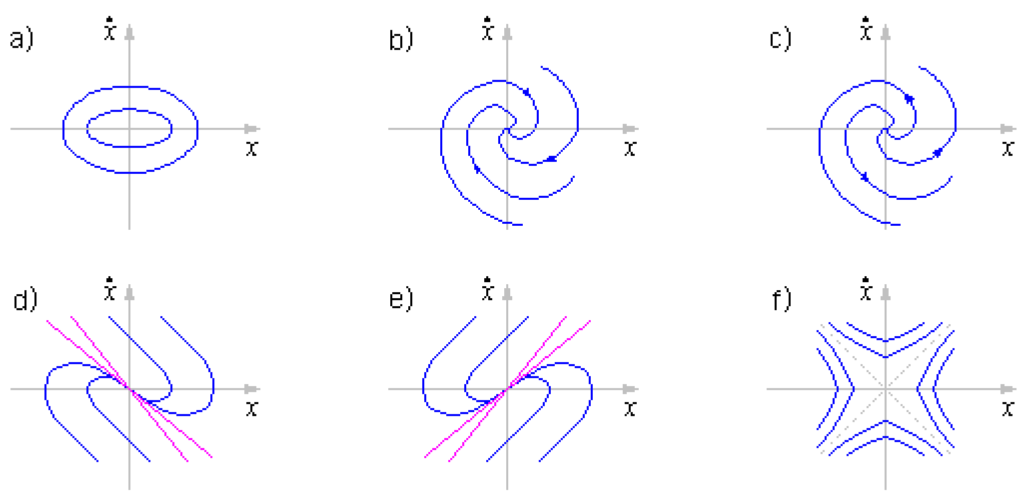
b. foco estável

c. foco central

d. nó estável

e. nó instável

f. ponto de sela (sempre instável)



Estabilidade de Sistemas Não Lineares

O conceito de estabilidade para sistemas não lineares difere do estabelecido para sistemas lineares. Em um sistema linear um transitório ou é atenuado para zero ou diverge para infinito para condições iniciais arbitrárias.
A estabilidade pode ser determinada considerando apenas os sinais da parte real das raízes da equação característica (pólos) e é independente das condições iniciais e forças externas.
Em sistemas não lineares a existência de atenuação ou divergência do processo depende primeiramente das condições iniciais bem como dos parâmetros do sistema. Em segundo lugar, o processo pode não atenuar nem divergir. Em terceiro, a não unicidade do regime pode ocorrer tanto na ausência como na presença de forças externas.

Definição:

1. Estabilidade assintótica: ocorre para condições iniciais contidas em uma certa região $\left(x_{0t} < \eta_0, \dot{x}_{0t} < \eta_1, \ddot{x}_{0t} < \eta_2, \ldots, \overset{(n-1)}{x}_{0t} < \eta_{n-1}\right)$. O transiente é atenuado para zero.

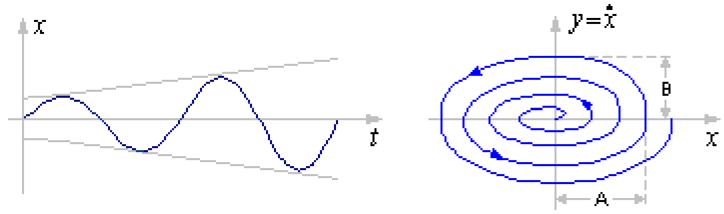
$$x(t) \to 0 \quad \forall \quad t \to \infty$$

2. Estabilidade não assintótica: para condições iniciais contidas em uma certa região, o transiente não é atenuado para zero, mas seus desvios permanecem suficientemente pequenos.

$$x_t(t) < \varepsilon \quad \forall \quad t_0 < t \leq \infty$$

dissemos que ocorre estabilidade assintótica em um período infinito de tempo.

2.1 $x_t(t) < \varepsilon \quad \forall \quad t_0 < t < t_1$ implicam em estabilidade não assintótica em um intervalo finito.
Exemplos:



$x^o = 0$ é um ponto instável ou não assintoticamente estável para a pequeno.

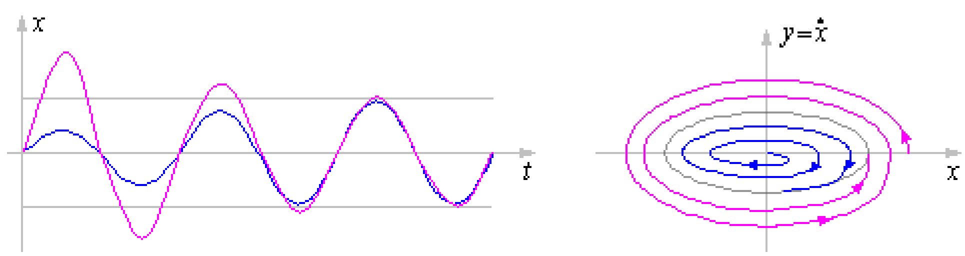
Linhas Singulares

A linearização pressupõe que os desvios das variáveis são pequenos. Isto faz com que as trajetórias de fase dos sistemas só tenham sentido numa região limitada que envolve a origem (ponto singular). Esta região corresponde a estados estáveis de operação.

As dimensões da região são determinadas pelo maior desvio *x* da quantidade regulada, em relação ao regime, para qual as características de todos os circuitos de um dado sistema ficam próximas de lineares.

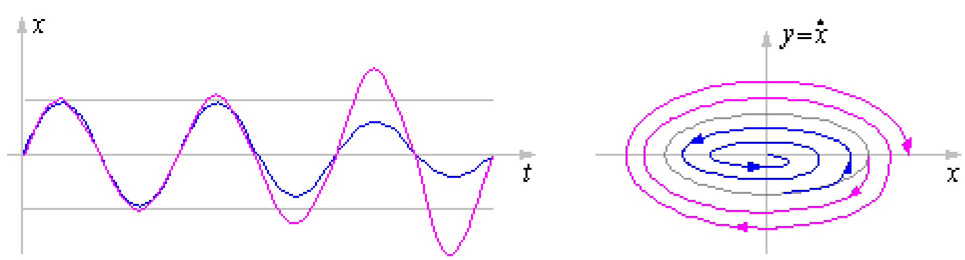
Em particular, se através da teoria dos sistemas lineares se conclui que o sistema é instável, constatamos que devido a não linearidade, o sistema não vai se afastar indefinidamente do ponto de equilíbrio. A amplitude de oscilações crescentes pode crescer somente até um valor definido e então permanecer constante, isto é, sistemas lineares instáveis se transformam em sistemas oscilatórios estáveis.

A. *Ciclo limite estável*



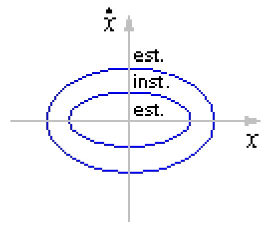
instável localmente
estável no grande

B. *Ciclo limite instável*

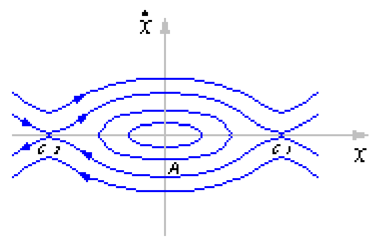


estável no pequeno
instável no grande

C. *Duplo ciclo limite*



D. *Pêndulo – 1 centro e 2 pontos de reta*



A linha C_1AC_2 é chamada separatriz e é também uma linha singular.