Práctica 3 - Lambda Cálculo

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones representan λ-expresiones según las convenciones sintácticas? ¿Cuáles no? En caso de responder negativamente, explicar por qué; en caso de responder afirmativamente, indicar a qué λ-expresión corresponde.

a) $(\lambda x\ x)$

b) $x\ y\ z\ (y\ x)$

c) $\lambda x.\, u\ x\ y$

d) $\lambda u.\, u\ (\lambda x.\, y)$

e) $x\ \lambda y$

f) $(\lambda u.\, v\ u\ u)\ z\ y$

g) $\lambda x.\, y\ \lambda z.\, z$

h) $u\ x\ (y\ z)\ (\lambda v.\, v\ y)$

i) $(\lambda x\ y\ z.\, x\ z\ (y\ z))\ u\ v\ w$

2. Indicar cuáles son las ocurrencias de

a) $x\ y$ en el término $\lambda x\ y.\, x\ y$,

b) $u\ v$ en el término $x\ (u\ v)\ (\lambda u.\, v\ (u\ v))\ u\ v$,

c) y de $\lambda u.\, u$ en $\lambda u.\, u\ v$.

3. Indicar, para cada variable, cuáles de sus ocurrencias son libres y cuáles ligadas, en las siguientes expresiones. Indicar a que λ-abstracción está ligada cada ocurrencia no libre.

a) $(\lambda y.\, y\ (\lambda x.\, x)\ z)$

b) $(\lambda y.\, x\ (\lambda x.\, x)\ z)$

c) $(\lambda y.\, y\ (\lambda y.\, y)\ y\ x)$

d) $(\lambda y.\, y\ (\lambda x.\, y))\ y\ x$

e) $(\lambda x\, y\, z.\, x\ (\lambda y.\, y\ z)\ w)\ (\lambda x.\, x\ y)\ w\ z$

f) $(\lambda x\ x.\, x\ y\ (\lambda y\ y.\, x\ y))\ x$

4. Evaluar las siguientes sustituciones:

a) $(\lambda y.\, y\ (\lambda x.\, x)\ z)\,[(\lambda w.\, w\ t)/z]$

b) $((\lambda y.\, y\ (\lambda x.\, x))\ z)\,[(\lambda w.\, w\ t)/z]$

c) $(\lambda y.\, x\ (\lambda x.\, x)\ z)\,[(\lambda w.\, w\ t)/z]$

d) $(\lambda y.\, x\ (\lambda x.\, x)\ z)\,[(\lambda w.\, w\ y)/z]$

e) $(\lambda y.\, y\ z)\,[z/y]$

f) $(\lambda y.\, y\ z)\,[y/z]$

5. Indicar cuáles de los siguientes pares de λ-expresiones son α-equivalentes y cuáles no lo son. Justificar cada respuesta.

a) $(\lambda x\ y\ z.\, x\ (\lambda y.\, y\ z)\ w)$, $(\lambda t\ u\ v.\, t\ (\lambda z.\, z\ v))\ w$

b) $(\lambda x\ y\ z.\, x\ (\lambda y.\, y\ z)\ w)$, $(\lambda x\ y\ w.\, x\ (\lambda y.\, y\ w)\ z)$

c) $(\lambda x\ y\ z.\, x\ (\lambda y.\, y\ z)\ w)$, $(\lambda x\ t\ z.\, x\ (\lambda u.\, t\ z))\ w$

d) $(\lambda x\ y\ z.\, x\ (\lambda y.\, y\ z)\ w)(\lambda x.\, x\ y)$,
$(\lambda x\ y\ w.\, x(\lambda y.\, y\ z)\ w)\ (\lambda z.\, z\ y)$

e) $(\lambda x\ y\ z.\, x\ (\lambda y.\, y\ z)\ w)$, $(\lambda v\ u\ t.\, v\ (\lambda v.\, v\ t)\ w)$

6. Determinar las β-redex de cada uno de los siguientes λ-términos. De ser posible, β-reducirlos hasta obtener su forma normal.

a) $(\lambda x.\, \lambda y.\, x\ y)\ (\lambda y.\, y\ z)$

b) $(\lambda x.\, \lambda y.\, x\ y)\ (\lambda z.\, y\ z)\ z$

c) $(\lambda x.\, (\lambda y.\, x)\ y\ \lambda z.\, z)\ (\lambda y.\, y\ z)$

d) $(\lambda f.\, (\lambda x.\, f\ (x\ x))(\lambda x.\, f\ (x\ x)))$

e) $(\lambda n.\, \lambda m.\, n\ (\lambda n.\, \lambda x\ y.\, n\ x\ (x\ y))\ m)\ (\lambda x\ y.\, x\ x\ y)\ (\lambda x\ y.\, x\ y)$

f) $(\lambda f.\, (\lambda x.\, f\ (x\ x))\ (\lambda x.\, f\ (x\ x)))(\lambda f.\, \lambda x.\, x\ (f\ ((\lambda x.\, x\ (\lambda x\ y.\, y)\ (\lambda x\ y.\, x))\ x))\ (\lambda x\ y.\, y))\ (\lambda x\ y.\, x)$

7. ¿Cuáles de los siguientes pares de λ-términos son β-equivalentes? Justificar cada respuesta.

a) $(\lambda f.\,(\lambda x.\,x\ x)(\lambda x.\,f(x\ x)))$, $(\lambda x.\,x)(\lambda f.\,(\lambda x\ y.\,x\ y)\ (\lambda x.\,x\ x)\ ((\lambda z.\,z)\ (\lambda x.\,f\ ((\lambda x\ y.\,x\ y)\ x\ x))))$

b) $(\lambda f.\,(\lambda x.\,x\ x)\ (\lambda x.\,f(x\ x)))$, $(\lambda f.\,(\lambda x\ y.\,x\ x)\ (\lambda x.\,f(x\ x))\ (\lambda x.\,x\ f\ (x\ x)))$

c) $(\lambda f.\,(\lambda x.\,x\ x)\ (\lambda x.\,f\ (x\ x)))$, $(\lambda f.\,(\lambda y\ x.\,x\ x)\ (\lambda x.\,f\ (x\ x))\ (\lambda x.\,x\ f\ (x\ x)))$

d) $(\lambda f.\,(\lambda x.\,x\ x)\ (\lambda x.\,f\ (x\ x)))$, $(\lambda f.\,(\lambda y\ x.\,x\ x)\ (\lambda x.\,f\ (x\ x))\ (\lambda y.\,f\ (y\ y)))$

8. Para diferenciar entre *tener* una forma normal y *ser* una forma normal, probar que

a) $M[N/x]$ es una β-nf $\quad\Rightarrow\quad$ M es una β-nf

b) $M[N/x]$ tiene una β-nf $\quad\not\Rightarrow\quad$ M tiene una β-nf

9. Dado el combinador $\mathbf{Y} \equiv \lambda x.\,(\lambda y.\,x\ (y\ y))\ (\lambda y.\,x\ (y\ y))$.

a) Probar que el Y es un combinador de punto fijo. O sea, probar que

$$Y\ X =_\beta X\ (Y\ X)$$

b) Probar que Y no tiene forma normal β.

c) Probar que para todo Z y $n \geqslant 0$ se puede resolver en x la siguiente ecuación

$$x\ y_1 \ldots y_n = Z$$

Es decir que se puede encontrar un lambda término X tal que $X\ y_1 \ldots y_n =_\beta Z[X/x]$.

10. Definir para cada una de las siguientes representaciones de los números naturales en λ-cálculo, las funciones **suma** y **pred** y los predicados **isNotZero** e **isZero**.

a) $\underline{\mathbf{0}} \equiv \lambda x.\,\mathbf{false} \qquad \underline{\mathbf{n+1}} \equiv \mathbf{pair\ true}\ \underline{\mathbf{n}}$

b) $\underline{\mathbf{0}} \equiv \lambda x.\,\mathbf{true} \qquad \underline{\mathbf{n+1}} \equiv \mathbf{pair}\ \underline{\mathbf{n}}\ \mathbf{false}$

11. Dar λ-expresiones para el producto y la potencia de numerales de Church.

12. Dar λ-expresiones para la función predecesor y la resta de numerales de Church, donde la resta se define como

$$\mathbf{resta}\ m\ n\ = \begin{cases} m - n & \text{si } m > n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

13. Determinar a qué operación corresponde la siguiente λ-expresión al ser aplicada a un número de Church:

$$\lambda n.\,\lambda f\ x.\,\mathbf{snd}\ (n\ H\ (\mathbf{pair}\ \mathbf{1}\ x))$$

donde $H \equiv \lambda p.\,\mathbf{if}\ (\mathbf{isZero}\ (\mathbf{fst}\ p))\ \mathbf{then}\ (\mathbf{pair}\ \mathbf{1}(f\ (\mathbf{snd}\ p)))\ \mathbf{else}\ (\mathbf{pair}\ \mathbf{0}\ (\mathbf{snd}\ p))$

14. Dado el tipo de datos recursivo y su fold:

```
data BinTree a = Leaf | Bin a (BinTree a) (BinTree a)
foldBin                 :: BinTree a → b → (a → b → b → b) → b
foldBin Leaf        l b = l
foldBin (Bin a t u) l b = b a (foldBin t l b) (foldBin u l b)
```

a) Definir en Haskell las siguientes funciones en términos de foldBin:

i. isLeaf :: BinTree $a \to$ Bool, que determina si un árbol es una hoja;

ii. mapBin :: $(a \to b) \to$ BinTree $a \to$ BinTree b que aplica la función argumento a todos los elementos de tipo a en el árbol;

iii. heightBin que devuelve la altura del árbol;

iv. mirrorBin que devuelve el árbol espejo.

b) Dar λ-términos que representen a Leaf, Bin, y foldBin.

c) Dar λ-términos que representen cada una de las funciones del ítem **a)**) y verificar que cumplen con el comportamiento esperado (verificar que la función aplicada a un árbol no trivial es β-equivalente a la solución esperada).