Métodos Numéricos - LCC 2020
Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Lucas Venturato, Agustín Gurvich
Práctica 7: Interpolación polinómica y aproximación de funciones

Interpolación polinómica

1. Dados los siguientes datos para la función e^x

x	0	0.2	0.4	0.6
e^x	1.0	1.2214	1.4918	1.8221

a) Hallar los valores aproximados de $\sqrt[3]{e}$ por interpolación lineal y cúbica, usando los métodos de Lagrange y Newton.
b) Obtener cotas de los errores debidos a la interpolación. Comparar dichas cotas con el error exacto, sabiendo que $\sqrt[3]{e} = 1.395612425$

2. Pruebe que si $f(x)$ es un polinomio de orden menor o igual que n, una interpolación de Lagrange de orden n (con $n+1$ puntos) para dicha función es exacta.

3. Se desea tabular la función de Bessel de orden 0

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)dt$$

en el intervalo $[0, 1]$ en abscisas equidistantes. ¿Qué paso de tabulación ha de usarse para que todos los valores obtenidos por interpolación lineal tengan un error (debido a la interpolación) menor que $\frac{1}{2}10^{-6}$? ¿Y si se realiza una interpolación cuadrática?

4. Se dispone de la siguiente tabla

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$J_0(x)$	0.2239	0.1666	0.1104	0.0555	0.0025	-0.0484

para la función de Bessel de orden 0 definida en el ejercicio (3), usar el método de las diferencias divididas de Newton para hallar los valores de $J_0(2.15)$ y $J_0(2.35)$ con errores menores que $\frac{1}{2}10^{-6}$.

5. Supongamos que $x_j = j$ para $j = 0, 1, 2, 3$ y notamos $P_{i,\ldots,k}$ el polinomio de interpolación de Lagrange de menor grado posible que coincide con la función f en los puntos $x_i, \ldots, x_k$. Si se conoce que

$$P_{0,1}(x) = 2x + 1, \qquad P_{0,2}(x) = x + 1, \qquad P_{1,2,3}(2.5) = 3,$$

encontrar $P_{0,1,2,3}(2.5)$.

6. Para una cierta función $f(x)$ conocemos las diferencias divididas de Newton: $f[-1] = 2$, $f[-1, 1] = 1$, $f[-1, 1, 2] = -2$, $f[-1, 1, 2, 4] = 2$.

   (a) Encuentre el polinomio interpolante $P_3(x)$ de grado menor o igual a 3 que interpola $f(x)$ en los nodos $-1, 1, 2, 4$.

   (b) Utilice el polinomio de interpolación para estimar $f(0)$.

   (c) Sabiendo que $|f^4(x)|$ en el intervalo $[-1, 4]$ tiene su valor acotado por 33.6, encuentre una cota superior para el valor absoluto del error de estimación de $f(0)$.

Aproximación de funciones

7. Encuentre los polinomios de aproximación por mínimos cuadrados de grado 1,2 y 3 para los datos presentados en la siguiente tabla:

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.15	1.004
2	0.31	1..31
3	0.5	1.117
4	0.6	1.223
5	0.75	1.422

¿Cuál de las aproximaciones anteriores es mejor?

8. Dado el conjunto de datos:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	4	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y_i	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.5	326.72

a) Construya una aproximación por mínimos cuadrados de grado 1, 2 y 3. Calcule el error.
b) Utilizando Scilab grafique los datos de la tabla y las sucesivas funciones aproximantes obtenidas en el ítem anterior.

9. Utilizar un polinomio de interpolación $P_n(x)$ con nodos uniformemente espaciados para aproximar la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[-5, 5]$. Graficar el error $f(x) - P_n(x)$ en el intervalo $[-5, 5]$ para $n = 2, 4, 6, 10, 14$. Comentar la tendencia observada en el error al aumentar n.

10. Sea $f(x) = e^x$ en $[-1, 1]$

    (a) Hallar el polinomio de interpolación $P_3(x)$ usando como nodos de interpolación las raíces del polinomio de Chebyshev, $T_4(x)$.

    (b) Graficar el error $e^x - P_3(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

11. En la mayoría de los casos, se desea aproximar una función en un intervalo distinto de $[-1, 1]$. Suponga que se quiere aproximar $g(t)$ en el intervalo $a \leq t \leq b$. Luego definimos una nueva función $f(x)$ en $[-1, 1]$ como:

$$f(x) = g\left(\frac{(b+a) + x(b-a)}{2}\right), \qquad -1 \leq x \leq 1$$

donde

$$t = \frac{(b+a) + x(b-a)}{2}$$

representa un cambio lineal de variable que permite aproximar $f(x)$ en $[-1, 1]$.

Aproximar la función $g(t) = cos(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq \pi/2$ mediante un polinomio cúbico. Obtener los nodos de interpolación a partir del polinomio de Chebyshev correspondiente utilizando el cambio de variable indicado.