Métodos Numéricos
Práctica 2: Errores Numéricos

3) El algoritmo de Horner se usa para evaluar de forma eficiente funciones polinómicas. Dado un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ a coeficientes reales, se genera una secuencia de constantes dadas por:
$$b_n = a_n, \tag{1}$$
$$b_i = a_i + b_{i+1} x_0, i = (n-1), \ldots, 1, 0, \tag{2}$$
donde $b_0 = p(x_0)$.

   a) Mostrar que dado un x_0, $b_0 = p(x_0)$.
   c) Dado $q(x) = b_1 + b_2 x + \cdots + b_n x^{n-1}$, mostrar que $p'(x_0) = q(x_0)$. Verificar que $p(x) = b_0 + (x - x_0) q(x)$.

<u>Solución:</u>

a) Observemos que, por definición de $p(x)$, resulta
$$p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n.$$
Luego, de (1) y (2), tenemos que
$$a_n = b_n, \tag{3}$$
$$a_i = b_i - b_{i+1} x_0, i = (n-1), \ldots, 1, 0, \tag{4}$$
por lo que,
$$p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = (b_0 - b_1 x_0) + (b_1 - b_2 x_0) x_0 + \cdots + (b_{n-1} - b_n x_0) x_0^{n-1} + b_n x_0^n.$$
o equivalentemente
$$p(x_0) = b_n x_0^n + \sum_{i=0}^{n-1} (b_i - b_{i+1} x_0) x_0^i = b_n x_0^n + \sum_{i=0}^{n-1} (b_i x_0^i - b_{i+1} x_0^{i+1}).$$
Entonces, definiendo $c_i = b_i x_0^i$, vemos que
$$p(x_0) = b_n x_0^n + \sum_{i=0}^{n-1} (b_i x_0^i - b_{i+1} x_0^{i+1}) = b_n x_0^n + \sum_{i=0}^{n-1} (c_i - c_{i+1}),$$
por lo que, aplicando la propiedad telescópica a la suma de la derecha, obtenemos lo siguiente:
$$p(x_0) = b_n x_0^n + \sum_{i=0}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) = b_n x_0^n + c_0 - c_n = b_n x_0^n + b_0 x_0^0 - b_n x_0^n = b_0,$$
con lo cual, queda probado que $p(x_0) = b_0$.

c) Por definición, tenemos que

$$q(x) = b_1 + b_2 x + \cdots + b_n x^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} b_i x^{i-1},$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}.$$

Luego,

$$q(x_0) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_0^{i-1},$$

$$p'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x_0^{i-1}.$$

Veamos si podemos transformar una expresión en la otra. Considerando (3) y (4), vemos que

$$\begin{aligned} p'(x_0) &= \sum_{i=1}^{n} i a_i x_0^{i-1} \\ &= n a_n x_0^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} i a_i x_0^{i-1} \\ &= n b_n x_0^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} i (b_i - b_{i+1} x_0) x_0^{i-1} \\ &= n b_n x_0^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (i b_i x_0^{i-1} - i b_{i+1} x_0^{i}). \end{aligned} \tag{5}$$

Podemos transformar la suma en la última igualdad en una suma telescópica. Para ello, observemos que, si definimos $c_i = i b_i x_0^{i-1}$, entonces

$$c_{i+1} = (i+1) b_{i+1} x_0^{i}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} p'(x_0) &= n b_n x_0^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (i b_i x_0^{i-1} - i b_{i+1} x_0^{i}) \\ &= n b_n x_0^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (i b_i x_0^{i-1} - (i+1-1) b_{i+1} x_0^{i}) \\ &= n b_n x_0^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (i b_i x_0^{i-1} - (i+1) b_{i+1} x_0^{i} + b_{i+1} x_0^{i}) \\ &= n b_n x_0^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1} + b_{i+1} x_0^{i}) \\ &= n b_n x_0^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1} x_0^{i} \end{aligned} \tag{6}$$

Entonces, aplicando la propiedad telescópica a la primer suma, y reindexando los términos en la segunda suma, resulta

$$\begin{aligned} p'(x_0) &= nb_nx_0^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1}(c_i - c_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1}x_0^i \\ &= nb_nx_0^{n-1} + c_1 - c_n + \sum_{i=2}^{n} b_i x_0^{i-1} \\ &= nb_nx_0^{n-1} + b_1x_0^0 - nb_nx_0^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} b_i x_0^{i-1} \\ &= b_1x_0^{1-1} + \sum_{i=2}^{n} b_i x_0^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i x_0^{i-1} \\ &= q(x_0), \end{aligned} \tag{7}$$

con lo cual, queda demostrado que $p'(x_0) = q(x_0)$

Veamos ahora que $p(x) = b_0 + (x - x_0)q(x)$.

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \\ &= a_nx^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \\ &= b_nx^n + \sum_{i=0}^{n-1} (b_i - b_{i+1}x_0)x^i \\ &= b_nx^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i - \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1}x_0x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} b_i x^i - x_0 \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1}x^i \\ &= b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x^i - x_0 \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1}x^i \end{aligned} \tag{8}$$

Luego, sacando factor común en la primer suma, reindexando la segunda suma, y teniendo en cuenta la definición de $q(x)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
p(x) &= b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x^i - x_0 \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i \\
&= b_0 + x \sum_{i=1}^{n} b_i x^{i-1} - x_0 \sum_{i=1}^{n} b_i x^{i-1} \\
&= b_0 + x q(x) - x_0 q(x) \\
&= b_0 + (x - x_0) q(x),
\end{aligned} \tag{9}$$

con lo cual, queda demostrado el resultado.