

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA  
(FCEIA-UNR)

## MÉTODOS NUMÉRICOS

Prof. Alejandro G. Marchetti

### Unidad VIII

## Integración Numérica



Noviembre de 2020



## 1. Introducción

Dada una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , se quiere calcular la integral definida

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$I(f) = F(b) - F(a)$$

donde  $F(x)$  es cualquier antiderivada de  $f(x)$ .

Sin embargo, muchos integrandos  $f(x)$  no tienen una antiderivada explícita (expresable en términos de funciones elementales), o la antiderivada no es fácil de obtener. Por este motivo, se necesitan otros métodos para evaluar integrales.

La *cuadratura* o *integración numérica* aproxima  $\int_a^b f(x)dx$  empleando una suma del tipo

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

## 2. Integración Numérica Basada en Polinomios Interpolantes

Sean  $\{x_0, \dots, x_n\}$   $n + 1$  nodos distintos en  $[a, b]$ . Tenemos

$$f(x) = p_n(x) + \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

donde

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

es el polinomio interpolante de Lagrange. Integrando en el intervalo  $[a, b]$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx + \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} dx \\ &= \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx \end{aligned}$$

donde  $\xi(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$  y

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

## 3. Regla del Trapecio

Aproximamos  $f(x)$  mediante el polinomio lineal.

Sean

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad h = b - a$$

El polinomio de primer grado que interpola dichos nodos es

$$p_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}f(x_1)$$

Luego

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}f(x_1) \right] dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1) dx$$

$(x - x_0)(x - x_1)$  no cambia de signo en  $[x_0, x_1]$ . Luego podemos aplicar el Teorema del valor medio ponderado de las integrales,

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1) dx = f''(c) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx$$

para algún  $c \in [x_0, x_1]$ .

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1) dx &= f''(c) \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{(x_1 + x_0)}{2}x^2 + x_0x_1x \right]_{x_0}^{x_1} \\ &= f''(c) \left[ \left( \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{(x_1 + x_0)}{2}x_1^2 + x_0x_1^2 \right) - \left( \frac{1}{3}x_0^3 - \frac{(x_1 + x_0)}{2}x_0^2 + x_0^2x_1 \right) \right] \\ &= f''(c) \left[ \left( -\frac{x_1^3}{6} + \frac{x_0x_1^2}{2} \right) - \left( -\frac{x_0^3}{6} + \frac{x_0^2x_1}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{f''(c)}{6} [x_1^3 - 3x_0x_1^2 - x_0^3 + 3x_0^2x_1] \\ &= -\frac{f''(c)}{6} (x_1 - x_0)^3 = -\frac{h^3}{6} f''(c) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \left[ \frac{(x - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)}f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f''(c) \\ &= \frac{(x_1 - x_0)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(c) \end{aligned}$$

Obtenemos entonces la siguiente **Regla del Trapecio**:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(c) \quad (1)$$

Notar que integrando el polinomio de primer grado en el intervalo  $[a, b]$ , obtenemos la superficie de un trapecio, dada por  $\frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$ . La Figura 1 presenta la interpretación gráfica de la regla del trapecio.

## 4. Método Compuesto del Trapecio

En el método compuesto del trapecio se utilizan varios subintervalos de igual longitud, como se ilustra en la Figura 2.

Sea  $n$  el número de subintervalos.

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

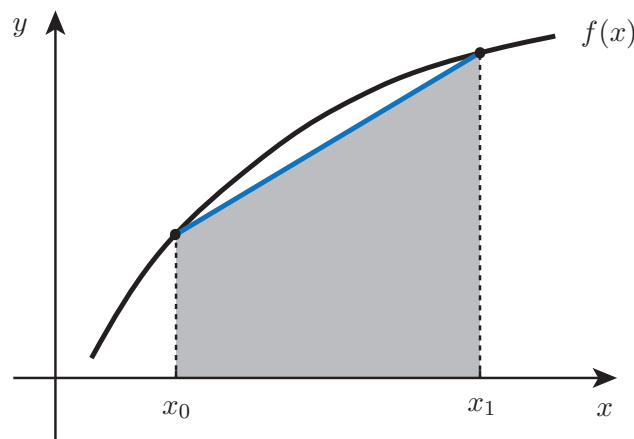


Figura 1: Regla del trapecio.

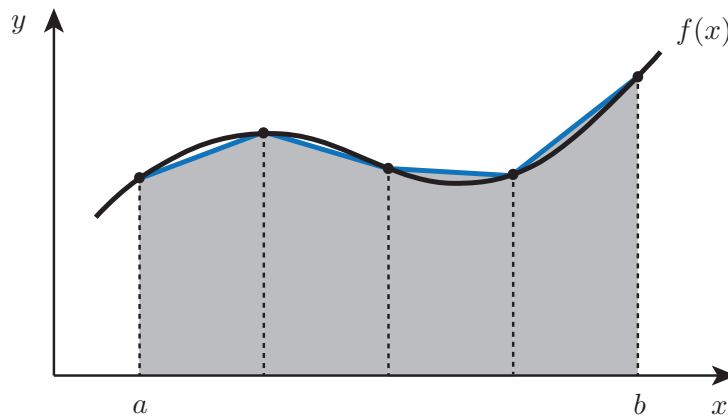


Figura 2: Método compuesto del trapecio.

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

Aproximando cada integral por un trapecio,

$$T_n(f) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2} (f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + \frac{h}{2} (f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

de donde obtenemos la siguiente fórmula de integración numérica trapezoidal:

$$T_n(f) = h \left[ \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right] \quad (2)$$

### Error de la Integración Numérica Trapezoidal

**Teorema 1** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$  en  $[a, b]$ . Luego

$$E_n^T(f) := \int_a^b f(x) dx - T_n(f) = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(c_n) \quad (3)$$

para algún  $c_n \in [a, b]$ .

**Demostración.** Caso  $n = 1$ :

$$a = x_0, \quad b = x_1, \quad h = b - a$$

$$E_1^T(f) = -\frac{h^3}{12}f''(c)$$

Vemos que para  $n = 1$  obtenemos la regla del trapecio.

Caso  $n > 1$ :

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\gamma_1) - \frac{h^3}{12}f''(\gamma_2) - \dots - \frac{h^3}{12}f''(\gamma_n)$$

donde  $x_{j-1} \leq \gamma_j \leq x_j$ . Luego

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3n}{12} \left[ \frac{f''(\gamma_1) + \dots + f''(\gamma_n)}{n} \right] = -\frac{h^3n}{12}\xi_n$$

donde

$$\xi_n = \frac{f''(\gamma_1) + \dots + f''(\gamma_n)}{n}$$

es un promedio de valores de  $f''(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . Luego se cumple

$$\min_{x \in [a, b]} f''(x) \leq \xi_n \leq \max_{x \in [a, b]} f''(x)$$

Por hipótesis  $f''(x)$  es continua. Luego, existe  $c_n \in [a, b]$  tal que  $f''(c_n) = \xi_n$ . Además,  $hn = b - a$ . Luego

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3n}{12}\xi_n = -\frac{h^2(b-a)}{12}f''(c_n)$$

Lo cual completa la demostración. □

## 5. Regla de Simpson

Aproximamos  $f(x)$  mediante el polinomio de interpolación de grado 2, con los nodos

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = b, \quad \text{con } h = \frac{b-a}{2}$$

El polinomio interpolante de Lagrange está dado por

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

Luego,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x)) dx$$

La integración de un polinomio de segundo grado no presenta dificultades. Se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

Por otra parte, se puede demostrar que el error de integración está dado por (la demostración no es directa):

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x)) dx = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

para algún  $\xi \in [x_0, x_2]$ .

Con lo cual obtenemos la siguiente **Regla de Simpson**:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad (4)$$

para algún  $\xi \in [x_0, x_2]$ .

La Figura 3 presenta la interpretación gráfica de la regla de Simpson.

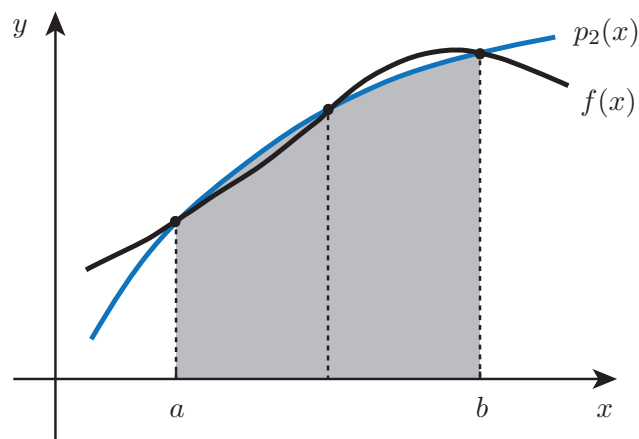


Figura 3: Regla de Simpson.

## 6. Método Compuesto de Simpson

En el método compuesto de Simpson se divide el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud, siendo  $n$  un número par.

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

La integral definida se aproxima aplicando la regla de Simpson a cada par de subintervalos adyacentes.

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

Aproximando cada integral mediante la regla de Simpson

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \\ &\quad + \frac{h}{3} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{h}{3} (f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})) \\ &\quad + \frac{h}{3} (f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) \end{aligned}$$

de donde obtenemos la siguiente fórmula de iteración numérica de Simpson:

$$S_n(f) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (5)$$

### Error de la Integración Numérica de Simpson

**Teorema 2** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^4$  en  $[a, b]$ , y sea  $n \in \mathbb{Z}^+$  un número par. Luego

$$E_n^S(f) := \int_a^b f(x) - S_n(f) = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c_n) \quad (6)$$

para algún  $c_n \in [a, b]$ .

**Demostración.** Caso  $n = 2$ :

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = b, \quad \text{con } h = \frac{b-a}{2}$$

$$E_2^S(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_n)$$

Vemos que para  $n = 2$  obtenemos la regla de Simpson.

Caso  $n > 2$ :

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\gamma_1) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\gamma_2) - \dots - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\gamma_{n/2})$$

donde  $x_{2j-2} \leq \gamma_j \leq x_{2j}$ . Luego

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} \left(\frac{n}{2}\right) \left[ \frac{f^{(4)}(\gamma_1) + \dots + f^{(4)}(\gamma_{n/2})}{\left(\frac{n}{2}\right)} \right] = -\frac{h^5}{90} \left(\frac{n}{2}\right) \xi_{n/2}$$

donde

$$\xi_{n/2} = \frac{f^{(4)}(\gamma_1) + \dots + f^{(4)}(\gamma_{n/2})}{\left(\frac{n}{2}\right)}$$

es un promedio de valores de  $f^{(4)}(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . Luego se cumple

$$\min_{x \in [a, b]} f^{(4)}(x) \leq \xi_{n/2} \leq \max_{x \in [a, b]} f^{(4)}(x)$$

Por hipótesis  $f^{(4)}(x)$  es continua. Luego, existe  $c_n \in [a, b]$  tal que  $f^{(4)}(c_n) = \xi_{n/2}$ . Además,  $hn = b - a$ . Luego

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} \left(\frac{n}{2}\right) \xi_{n/2} = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c_n)$$

Lo cual completa la demostración. □



## 7. Integración Numérica en Dominio Bidimensional

Se desea calcular la integral de una función  $f(x, y)$  en un dominio bidimensional  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ .

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$$

Definimos

$$G(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$$

Luego

$$I = \int_a^b G(x) dx$$

que puede aproximarse como

$$I \approx \sum_{i=1}^n w_i G(x_i)$$

siendo

$w_i$ : factores de ponderación del método específico utilizado.

$x_i$ : nodos.

Por otra parte,

$$G(x_i) = \int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f(x_i, y_i) dy \approx \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} f(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n$$

En la Figura 4 se representa el caso particular de un dominio rectangular, para el cual  $c(x) = c$  y  $d(x) = d$ .

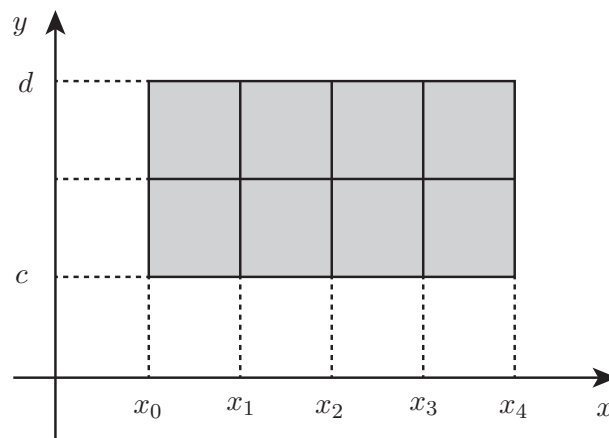


Figura 4: Dominio de integración rectangular.

## Bibliografía

1. Kendall E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Second edition, John Wiley & Sons, 1989.