**Métodos Numéricos - LCC 2017**
**Soluciones de la Práctica 1: Sucesiones y Series**
Nicolás Rodriguez Castro, Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas.

---

1. En cada caso determinar si la sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge y en caso de ser convergente hallar su límite.

a) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0.$

Cuando tenemos exponentes y la sucesión tiene términos positivos, un truco útil es expresar $a_n$ como $e^{\ln(a_n)}$, de manera que la exponenciación pase a ser un producto. Tenemos entonces $a_n = e^{-\alpha \ln(n)}$. Utilizando la **Proposición 1** y el **Teorema 6** para las funciones $g(x) = -\alpha \ln(x)$ y $f(x) = e^{g(x)}$ definidas para $x \geq N = 1$, vemos que si $\lim\limits_{x\to\infty} -\alpha\ln(x) = L$, será entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^L$. El problema con ese argumento aquí es que $\lim\limits_{x\to\infty} -\alpha\ln(x) = -\infty$, por lo cuál $\lim\limits_{x\to\infty} -\alpha\ln(x)$ *no existe.*

**Proposición 1'.** *Si* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, *entonces*

$$\lim_{x\to a} e^{g(x)} = \infty,$$

*si* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, *entonces*

$$\lim_{x\to a} e^{g(x)} = 0.$$

*Al igual que en la Proposición 1, se puede reemplazar a por* $\infty$ *o* $-\infty$.

Ahora sí, con esta última proposición tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ para todo $\alpha > 0$.

b) $a_n = \dfrac{n-1}{n} - \dfrac{n}{n-1}.$

Primero notemos que tal definición del término $n$-ésimo sólo tiene sentido para $n \geq 2$, pero esto no es relevante para el calcular el límite ni para determinar si la sucesión es divergente.

Escribamos $a_n = b_n - c_n$ donde $b_n = \frac{n-1}{n}$ y $c_n = \frac{n}{n-1}$ para cada $n \geq 2$. Además $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$, utilizando la *regla de la resta* del **Teorema 3**. Similarmente, con la *regla de la suma* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n-1} = 1 + 0 = 1$. Finalmente, utilizando otra vez la regla de la resta, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1 - 1 = 0$.

c) $a_n = \dfrac{3n^2 - n + 4}{2n^2 + 1}.$

Cuando el término general de la sucesión es una función racional en $n$ conviene simplificar por el monomio principal del denominador, haciendo esto obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 4}{2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2-n+4}{2n^2}}{\frac{2n^2+1}{2n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{2n^2}}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n^2} = 1 + 0 = 1 \neq 0$ podemos utilizar el **Teorema 3** para terminar el cálculo del límite,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{2n^2}} = \frac{\frac{3}{2} - 0 + 0}{1} = \frac{3}{2}.$$

**Observación:** Acá estamos utilizando a) con $\alpha = 2$ y $\alpha = 1$.

*Otra solución:*

Los límites de funciones racionales en $n$ también se pueden resolver con la **regla de L'Hôpital** ya que los polinomios no tienen asíntotas horizontales (vale decir, cualquiera sea el polinomio no constante $P$, $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \text{ínf}$ ó $-\text{ínf}$). Por ejemplo en este caso

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 4}{2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n - 1}{4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{4n} = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}.$$

d) $\quad a_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}.$

Tengamos en cuenta que $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos(\frac{2\pi}{2}) = \cos(\pi) = -1$, $\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$, $\cos(\frac{4\pi}{2}) = \cos(2\pi) = 1$ y al ser $\cos(x)$ una función periódica de período $2\pi$ resultará $a_{n+4} = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ para algún $L \in \mathbb{R}$, entonces las *subsucesiones* $\{b_n\} = \{a_{4n}\}$ y $\{c_n\} = \{a_{4n+2}\}$ deben ser ambas convergentes al mismo límite $L$, sin embargo $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ de donde $L = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -1$, de donde $L = 1$, por lo que $1 = -1$ lo cual es absurdo. El absurdo viene de suponer que la sucesión es convergente, por lo cuál la sucesión es divergente.

**Definición.** Una sucesión $\{b_n\}$ es una *subsucesión* de una sucesión $\{a_n\}$ si existe una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $b_n = a_{\sigma(n)}$ para cada natural n.

**Proposición 2.** *Una sucesión $\{a_n\}$ converge si y sólo si todas sus subsucesiones convergen a un mismo límite.*

e) $\quad a_n = \dfrac{n!}{n^n}.$

Observemos que para $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ \dots \ \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ \dots \cdot 1 \cdot \frac{1}{n},$$

puesto que para cada $i$ entre 2 y $n$, $\dfrac{i}{n} \leq 1$. Tenemos entonces que para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{n}$, si consideramos las sucesiones $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ con $b_n = 0$ y $c_n = \dfrac{1}{n}$, tenemos $b_n \leq a_n \leq c_n$, como además $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ podemos utilizar el **teorema del sandwich para sucesiones** para concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Otra solución:*

Siguiendo con la idea que usamos en a) podemos escribir $a_n = e^{\ln(a_n)} = e^{\ln(n!)-n\ln(n)}$. Como $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ tenemos $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k)$, luego $\ln(a_n) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k)-\ln(n))$. Sea $\{b_n\}$ la sucesión dada por $b_n = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k)-\ln(n)) = \ln(a_n)$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ y al igual que en a) resultará de la **Proposición 1'** y el **Teorema 6** que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Usando el **teorema del valor medio de Lagrange** para la función $\ln(x)$ podemos escribir

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k)-\ln(n)) = -\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\frac{1}{x_k}, \quad \text{donde } x_k \in (k,n),$$

así

$$b_n < -\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\frac{1}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k}{n} - (n-1) = \frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n} - (n-1) = \frac{-(n-1)}{2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{-(n-1)}{2} = -\infty$, necesariamente debemos tener $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

**Definición.** Diremos que una sucesión $\{a_n\}$ diverge a $\infty$ (o $-\infty$) si para todo número real $M$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow a_n \geq M$ ( $a_n \leq M$), lo notamos $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ( $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

**Observación:** Para poder utilizar la Proposición 1' y el Teorema 6 necesitamos una función $g(x)$ tal que $g(n) = b_n$ para todo número natural $n$. Tal función siempre la podemos definir para cualquier sucesión $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. En efecto, definimos $g(x) = f(1)$ si $x < 1$, $g(n) = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para $1 \leq \lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$, $g(x) = g(\lfloor x \rfloor)+(x-\lfloor x \rfloor)(g(\lfloor x \rfloor+1)-g(\lfloor x \rfloor))$. Esta función $g$ para cada sucesión $f$ es tal que si la sucesión es convergente, divergente a $-\infty$ o divergente a $\infty$, entonces $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} f(n)$.

**Teorema del Valor Medio de Lagrange.** *Dada una función contínua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a,b)$ existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

f) $a_n = \dfrac{n^p}{e^n}, \quad p > 0.$

Como vimos hasta ahora, escribiendo $a_n = e^{p\ln(n)-n}$, basta con ver que para todo $p > 0$ $\lim_{x\to\infty} p\ln(x) - x = -\infty$ para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. El límite $\lim_{x\to\infty} p\ln(x) - x$ es del tipo $\text{ínf} - \text{ínf}$. Un truco útil en estos casos es multiplicar y dividir por alguna de las expresiones, haciendo por ejemplo $\lim_{x\to\infty} p\ln(x) - x = \lim_{x\to\infty} (p\ln(x) - x).\frac{x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(p\ln(x)-x)}{x}x = \lim_{x\to\infty} (p\frac{\ln(x)}{x} - 1)x$, podemos resolver aplicando la regla de L'Hôpital $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ y finalmente $\lim_{x\to\infty} p\ln(x) - x = \lim_{x\to\infty} (p\frac{\ln(x)}{x} - 1).x = (-1).\text{ínf} = -\text{ínf}$.

*Otra solución:*

Basándonos en la **Proposición 1** y el **Teorema 6** podemos intentar calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x}$ aplicando la **regla de L'Hôpital**, ya que es el tipo $\frac{\infty}{\infty}$, así $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{px^{p-1}}{e^x}$ pero si $p > 1$ este límite sigue siendo del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando nuevamente L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{px^{p-1}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p(p-1)x^{p-2}}{e^x}$, pero si $p > 2$ la indeterminación persiste, sin embargo si aplicamos L'Hôpital $\lceil p \rceil$ veces tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{p(p-1)(p-2)...(p-\lceil p \rceil+1)}{x^{\lceil p \rceil - p}e^x} = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-\lceil p \rceil+1)}{\infty} = 0,$$

ya que $p(p-1)(p-2)...(p-\lceil p \rceil+1)$ es un producto de términos positivos y por lo tanto no es nulo.

g) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Nuevamente escribimos $a_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$, podemos calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ utilizando **L'Hôpital**, ya que es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. En efecto $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, luego $\lim a_n = e^0 = 1$.

2. En cada caso determinar si la serie converge o diverge y en caso de ser convergente hallar su suma.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Observemos que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, luego siendo $b_n = \dfrac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1}$ es una serie telescópica, y por el **Teorema 9** esta serie converge ya que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = 1$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Como en a) podemos escribir esta vez

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}),$$

por lo que si $b_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$ tenemos $a_n = b_n - b_{n+1}$, y nuevamente por el **Teorema 9** esta serie es convergente ya que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2}(0+0) = 0.$$

Finalmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}) - 0 = \frac{3}{4}.$$

*Otra solución:*

Podemos calcular esta suma por definición formando el término general de la sucesión cuyos términos son las sumas parciales $\{s_n\}$. Podemos probar que $s_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$ para $n \geq 4$, con lo cuál $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - 0 - 0) = \frac{3}{4}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

Luego, por el **Teorema 7** la serie diverge.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Sacando factor común $-\frac{1}{2}$ queda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ siendo el último término la suma de una serie geométrica de razón $r = -\frac{1}{2}$ ($|r| < 1$), tenemos entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Observemos que en este caso $\lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$ ya que $\lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{3}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(3)+\ln(\frac{3}{2})n}$ y $\lim_{x\to\infty} \ln(3) + \ln(\frac{3}{2})x = \infty$ (**Proposición 1'**). Nuevamente por el **Teorema 7** la serie diverge.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$.

De nuevo $\displaystyle\frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$ por lo que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \neq 0$ por lo que la serie diverge.

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

Escribimos

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2(n+1)+1}. \tag{1}$$

Tomando entonces $b_n = \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}$ resulta $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = b_n - b_{n+1}$. Luego, por el **Teorema 9**, esta serie converge ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1} = 0$, y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = b_1 = \frac{1}{6}.$$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$.

Si escribimos $\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3}\frac{1}{3^{n-1}}$ podemos usar el **Teorema 8** con las series geométricas de razón $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, de manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

Observemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln(n!) - n\ln(2)}$. Sea $b_n = \ln(n!) - n\ln(2)$. Como $b_n = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k) - \ln(2)) > -\ln(2) + (n-2)(\ln(3) - \ln(2))$ para $n > 3$ y además se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} -\ln(2) + (x-2)(\ln(3) - \ln(2)) = \infty$, resulta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{2^n} = \infty$. Sigue entonces que la serie es divergente.

*Otra solución:*

Para $n > 2$, $a_n = \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{n}{2}.\dfrac{n-1}{2}\dots\dfrac{2}{2}.\dfrac{1}{2} \geq 1.1\dots1.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Luego $a_n \geq \dfrac{1}{2}$ para $n > 2$ por lo que es imposible que se cumpla $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y por lo tanto la serie diverge.

*Otra solución:*

Podemos aplicar el **criterio del cociente**, siendo $a_n = \frac{n!}{2^n}$ calculemos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!2^n}{n!2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)}{2} = \infty$. Técnicamente no deberíamos podemos usar el criterio del cociente como lo tenemos enunciado, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ no existe (pues diverge a $\infty$), sin embargo sí es posible hacerlo en este caso, pues $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ implica en particular que para un $N \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ y por lo tanto la sucesión sería estríctamente creciente a partir de $N$ con términos positivos, por lo que no se podría tener $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y por lo tanto la serie diverge.

3. Estudiar el carácter de las siguientes series en función de los valores posibles de los parámetros $a$ y $b$. En cada caso utilizar alguno de los criterios de convergencia para justificar la respuesta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}.$

Podemos utilizar el **criterio de comparación** (**Teorema 11**) con la serie geométrica de razón $\frac{1}{3}$ pues $\dfrac{1}{3^n+1} \leq 1.\dfrac{1}{3^n}$. Luego, como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge, también converge esta serie.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n-1}.$

Podemos utilizar nuevamente el **criterio de comparación**, en este caso tenemos que $\frac{4^n}{3^n} < \frac{4^n}{3^n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pero como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n} = \frac{4}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\frac{4}{3})^{n+1}}{1-\frac{4}{3}} = \infty$ tenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n}$ diverge y por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n-1}$ diverge.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b|^n}{n(1+a^n)}, \quad a > 1, \quad |b| \neq a.$

Si $|b| < a$ entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b|^n}{a^n}$ converge por el **criterio de la raíz** (**Teorema 13**). Luego como $\frac{|b|^n}{a^n} > \frac{|b|^n}{n(1+a^n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ usando el **criterio de comparación** tenemos que la serie es convergente.

Si $|b| > a$ podemos utilizar **el criterio del cociente** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|b|^{n+1}}{(n+1)(1+a^{n+1})}}{\frac{|b|^n}{n(1+a^n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n|b|(1+a^n)}{(n+1)(1+a^{n+1})}$. Notemos que $\frac{1+a^n}{1+a^{n+1}} > \frac{1}{a}$ ya que $a > 1$ (en efecto $a + a^{n+1} = a(1+a^n) > 1 + a^{n+1}$), luego $\dfrac{n|b|(1+a^n)}{(n+1)(1+a^{n+1})} > \dfrac{n|b|}{(n+1)a} = (1 - \dfrac{1}{n+1})\dfrac{|b|}{a}$. Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n|b|}{(n+1)a} = \frac{|b|}{a} > 1$ tenemos que a partir de algún $N \in \mathbb{N}$, tendremos que $n \geq N$ implicará $\frac{|b|^{n+1}}{(n+1)(1+a^{n+1})} > \frac{|b|^n}{n(1+a^n)}$ por lo que la serie es divergente ya que sus términos no tienden a 0.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+2)(n+a)5^n}, \quad a > 0.$

Si $a \leq 5$ entonces $\dfrac{a^n}{(n+2)(n+a)5^n} = \dfrac{1}{(n+2)(n+a)(\frac{5}{a})^n} < \dfrac{1}{n^2}$ y por el **criterio de comparación** contra la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ resulta que la serie es convergente.

Si $a > 5$ podemos utilizar nuevamente el **el criterio del cociente**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+3)(n+1+a)5^{n+1}}}{\frac{a^n}{(n+2)(n+a)5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(n+2)(n+a)}{(n+3)(n+1+a)5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{an^2+(a^2+2a)n+2a^2}{5n^2+(20+5a)n+15+15a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{an^2+(a^2+2a)n+2a^2}{n^2}}{\frac{5n^2+(20+5a)n+15+15a}{n^2}} = \frac{a}{5} > 1,$$

por lo tanto la serie es divergente.

**Observación:** en todos los incisos fue fundamental que las series eran a términos positivos para que sea válido aplicar los criterios.