Métodos Numéricos
Práctica 6: Aproximación de autovalores

2. (a) Aplicar el teorema de Gerschgorin para mostrar que las raíces r de $p(\lambda)$ verifican que

$$|r| \leq 1 \qquad\qquad o \qquad\qquad |r + a_{n-1}| \leq |a_0| + \cdots + |a_{n-2}|$$

   (b) Teniendo en cuenta que A y A^T tienen los mismos autovalores, usar el teorema de Gerschgorin sobre las columnas de A para obtener otras cotas para las raíces de $p(\lambda)$.

   (c) Acotar las raíces de los siguientes polinomios:

$i)$ $\lambda^{10} + 8\lambda^9 + 1 = 0$ $\qquad\qquad$ $ii)$ $\lambda^6 - 4\lambda^5 + \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$

Solución:

(a) Recordemos que, dada una matriz A,

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Sea A una matriz $n \times n$ y

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

Veamos que, si

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

entonces $det(B - \lambda I) = p(\lambda)$. En efecto, si en $B - \lambda I$ reemplazamos sucesivamente la fila E_n por $E_n - \left(\lambda^i + \sum_{k=1}^{i} a_{n-i}\lambda^{i-k}\right) E_{n-i}$, resulta

$$B-\lambda I=\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -\lambda-a_{n-1} \end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2}-\lambda^2-a_{n-1}\lambda & 0 \end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -\lambda^n-\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n-i}\lambda^{i-k} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Intercambiando las filas 1 y n, obtenemos la siguiente matriz, que denotaremos por C:

$$C=\begin{bmatrix} -\lambda^n-\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n-i}\lambda^{i-k} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

C es una matriz triangular, por lo que $det(C)$ es el producto de los elementos de su diagonal, es decir

$$det(C)=-\lambda^n-\sum_{k=1}^{n} a_{n-i}\lambda^{i-k}=-\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-a_{n-2}\lambda^{n-2}-\dots-a_1\lambda-a_0=-p(\lambda).$$

Además, por las operaciones elementales realizadas para obtener C a partir de $B - \lambda I$, resulta que $det(C) = -det(B - \lambda I)$. Luego,

$$det(B - \lambda I) = p(\lambda).$$

Aplicando el teorema de Gerschgorin a B, tenemos que:

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-1} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 0| \leq 1\},$$

$$C_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-a_{n-1})| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |-a_i|\},$$

por lo que, para toda raiz r de $p(\lambda)$ resulta:

$$|r| \leq 1 \quad \text{ o } |r + a_{n-1}| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |a_i| = |a_0| + \cdots + |a_{n-2}|.$$

(b) Sabemos que A y A^T tienen los mismos autovalores, por lo que tienen el mismo polinomio característico. Luego, por lo realizado en el apartado anterior,

$$det(B^T - \lambda I) = det(B - \lambda I) = p(\lambda) = det(A^T - \lambda I).$$

Luego, podemos aplicar el teorema de Gerschgorin a B^T, siendo

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |a_0|\},$$

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 + |a_{i-1}|\}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1,$$
$$C_n = \{z \in \mathbb{C} : |z + a_{n-1}| \leq 1\}.$$

Por lo tanto, para toda raiz r de $p(\lambda)$ resulta:

$$|r| \leq a_0 \quad \text{ o } \quad |r| \leq 1 + |a_{i-1}| \text{ para } i = 2, 3, \ldots, n-1, \quad \text{ o } \quad |r + a_{n-1}| \leq 1.$$

(c) A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores:

(i) $|r| \leq 1$ o $|r + 8| \leq 1$, y $|r| \leq 1$ o $|r| \leq 1 + 0$ o $|r + 8| \leq 1$.
Por lo tanto, $|r| \leq 1$ o $|r + 8| \leq 1$.

(ii) $|r| \leq 1$ o $|r - 4| \leq 5$, y $|r| \leq 1$ o $|r| \leq 1 + 1$ o $|r - 4| \leq 1$.
Por lo tanto, $|r| \leq 1$ o $|r - 4| \leq 1$.