

## Métodos Numéricos - LCC 2020

Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Lucas Venturato,  
Agustín Gurvich

### Práctica 4: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Métodos directos. Factorización de matrices

---

1. Escribir una función en Scilab para resolver un sistema triangular superior, y otra función para resolver un sistema triangular inferior.
2. Se provee el método de eliminación de Gauss programado en Scilab en la función `GaussElim`.
  - (a) Estudiar el código de la función `GaussElim`.
  - (b) Aplicarlo para resolver los siguientes sistemas  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$i) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$ii) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$iii) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- (c) Modificar la función `GaussElim` a fin de contar el número de operaciones realizadas.
  - (d) Aprovechando las características especiales de Scilab para operar con submatrices, reescribir la función de eliminación Gaussiana en forma más corta.
3. Suponga que queremos resolver los siguientes tres sistemas de ecuaciones:

$$\text{S1} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{S2} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 19 \end{cases}$$

$$\text{S3} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \end{cases}$$

Podemos escribir los tres sistemas de ecuaciones como una única ecuación matricial:  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & 9 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 5 & 19 & 12 \end{pmatrix}.$$

- (a) Modificar el método de eliminación Gaussiana a fin de resolver múltiples sistemas de ecuaciones lineales. La matriz aumentada para este caso es  $A_{aum} = [A \ B]$ , donde  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , y  $B$  es una matriz de  $n \times m$ . La solución es una matriz de  $n \times m$ .
  - (b) Utilizar el método programado en el ítem anterior para resolver los tres sistemas lineales dados.
  - (c) Utilizar el método programado en el ítem (a) para calcular la inversa de la matriz  $A$  por eliminación Gaussiana.
4. Se puede demostrar que el determinante de una matriz se obtiene multiplicando los elementos en la diagonal principal de la matriz triangular superior resultante de la etapa de eliminación progresiva del procedimiento de eliminación Gaussiana. Escribir una función que calcule el determinante de una matriz por eliminación Gaussiana supuesta sin pivoteo.
  5. Se provee el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial, programado en Scilab en la función `GaussElimPP`.
    - (a) Estudiar el código de la función `GaussElimPP`.
    - (b) Aplicarlo para resolver los sistemas lineales dados en el ejercicio 2, ítem b.
  6. Construir un algoritmo para resolver por el método de Gauss el problema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , siendo  $A$  una matriz tridiagonal:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Contar la cantidad de operaciones que se realizan en este caso.

7. Programar en Scilab el siguiente algoritmo para obtener la factorización  $PA = LU$  a partir de la eliminación de Gauss con pivoteo parcial:

**Algoritmo: Eliminación de Gauss con Pivoteo Parcial**

```

U = A,  L = I,  P = I
for k = 1 to m - 1
  Seleccionar i ≥ k que maximiza |uik|
  uk,k:m ↔ ui,k:m  (intercambio de filas)
  lk,1:k-1 ↔ li,1:k-1
  pk,:  ↔ pi,: 
  for j = k + 1 to m
    ljk = ujk/ukk
    uj,k:m = uj,k:m - ljkuk,k:m
  end for
end for

```

Aplicar el algoritmo a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

8. Factorizar las siguientes matrices usando el algoritmo diseñado en el Ejer. 7 y comparar los resultados con la implementación de Scilab de la factorización LU.

$$a) = \begin{pmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.096 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{pmatrix} \quad b) = \begin{pmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & 5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & 4.1561 \end{pmatrix}$$

9. Considerar el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 & 6 \\ 5 & 25 & -15 & -3 \\ 6 & -12 & -6 & 22 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Resuelva el sistema mediante el método de eliminación de Gauss. En caso de realizar intercambios de ecuaciones, calcule la matriz de permutación  $\mathbf{P}$  correspondiente.
- (b) A partir de la información obtenida en la eliminación de Gauss, obtenga la factorización  $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ , y utilice dicha factorización para resolver el sistema  $\mathbf{Ax} = \tilde{\mathbf{b}}$ , donde  $\tilde{\mathbf{b}} = [2 \ 2 \ 1 \ 0]^T$ .
10. Construir un algoritmo para resolver sistemas lineales mediante la factorización LU de Doolittle y utilizarlo para resolver el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}.$$

11. Se provee la factorización de Cholesky, programada en Scilab en la función `Cholesky`.
- (a) Estudiar el código de la función `Cholesky`.
- (b) Aplicar la función para factorizar las siguientes matrices. En todos los casos verificar que la factorización es correcta.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & -12 & 8 & -16 \\ -12 & 18 & -6 & 9 \\ 8 & -6 & 5 & -10 \\ -16 & 9 & -10 & 46 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

12. Escribir en Scilab una función que resuelva el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  por el método de Cholesky, para el caso de una matriz  $\mathbf{A}$  definida positiva. Utilizar la función para resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 16 & -12 & 8 \\ -12 & 18 & -6 \\ 8 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \\ -66 \\ 46 \end{pmatrix}$$