Ejercicio 6

- Verificar que la aproximación por polinomio de Taylor de grado 10 de la función e^x permite obtener el valor correcto de e^{-2} redondeado a tres dígitos (utilizando la precisión de Scilab)

Recordamos que la expresión del polinomio de Taylor de orden n alrededor de un punto a es

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \cdot f^{(i)}(a) \cdot (x-a)^i$$

En particular, para este ejercicio vamos a usar el polinomio de Taylor de orden 10 alrededor del punto 0 de la función e^x.
Recordando que la enésima derivada de e^x es e^x, y que $e^0 = 1$, nuestro polinomio p_{10} tiene la forma:

$$p_{10} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!}$$

Evaluando $p_{10}(-2)$ tenemos que

$$p_{10}(-2) = 1+\frac{(-2)^1}{1!}+\frac{(-2)^2}{2!}+\frac{(-2)^3}{3!}+\frac{(-2)^4}{4!}+\frac{(-2)^5}{5!}+\frac{(-2)^6}{6!}+\frac{(-2)^7}{7!}+\frac{(-2)^8}{8!}+\frac{(-2)^9}{9!}+\frac{(-2)^{10}}{10!} = 0.1353792$$

Realizando ahora el cálculo en Scilab vemos que

```
--> exp(-2)
 ans  =

   0.1353353
```

Y al redondear ambos resultados a 3 dígitos resulta que son iguales

- Utilizar el polinomio de Taylor de grado 10 de la función e^x para aproximar:
  - e^{-2}
  - $\frac{1}{e^2}$

En el punto anterior calculamos que $p_{10}(-2) = 0.1353792$. Para hallar la aproximación de $\frac{1}{e^2}$ calcularemos $\frac{1}{p_{10}(2)}$
Por un lado tenemos que

$$p_{10}(2) = 1 + \frac{(2)^1}{1!} + \frac{(2)^2}{2!} + \frac{(2)^3}{3!} + \frac{(2)^4}{4!} + \frac{(2)^5}{5!} + \frac{(2)^6}{6!} + \frac{(2)^7}{7!} + \frac{(2)^8}{8!} + \frac{(2)^9}{9!} + \frac{(2)^{10}}{10!} = 7.3889947$$

Por el otro, sucede que

$$\frac{1}{p_{10}(2)} = \frac{1}{7.3889947} = 0.1353364$$

Juntando todo vemos que:

- $e^{-2} = 0.1353353$ (según Scilab)

- $e^{-2} = 0.1353792$ (según nuestro polinomio p_{10})
- $\frac{1}{e^2} = 0.1353364$ (según nuestro polinomio p_{10})

Calculando los errores relativos de cada cálculo (recordamos que $E_r = \frac{|x_v - x_a|}{x_v}$):

$$E_r(e^{-2}) = \frac{|0.1353353 - 0.1353792|}{0.1353353} = 0.0003244 \qquad E_r(\frac{1}{e^2}) = \frac{|0.1353353 - 0.1353364|}{0.1353353} = 0.0000081$$

Observamos entonces que $\frac{1}{e^2}$ es una mejor aproximación por polinomio de Taylor de e^{-2}.
Para pensar... ¿Por qué sucede esto?

Pasos en Scilab

```
--> orden = [0:10]
 orden  =

   0.   1.   2.   3.   4.   5.   6.   7.   8.   9.   10.

--> coeficientes = factorial(orden)
 coeficientes  =

   1.   1.   2.   6.   24.   120.   720.   5040.   40320.   362880.   3628800.

--> coeficientes = 1./coeficientes
 coeficientes  =

         column 1 to 10

   1.   1.   0.5   0.1666667   0.0416667   0.0083333   0.0013889   0.0001984   0.0000248   0.0000028

         column 11

   0.0000003

--> taylor = poly(coeficientes,"x","coeff")
 taylor  =

  1 +x +0.5x² +0.1666667x³ +0.0416667x +0.0083333x +0.0013889x +0.0001984x +0.0000248x +0.0000028x
   +0.0000003x¹

--> horner(taylor,-2)
 ans  =

   0.1353792

--> horner(taylor,2)
 ans  =
```

```
   7.3889947

--> 1/ans
 ans  =

   0.1353364

--> abs(0.1353353 - 0.1353792) / 0.1353353
 ans  =

   0.0003244

--> abs(0.1353353 - 0.1353364) / 0.1353353
 ans  =

   0.0000081
```