Proposition d'évolution du cours MPRI 2.38.1

Éric Colin de Verdière [*] Vincent Pilaud [‡]

2 avril 2014

Le cours 2.38.1 était, ces deux dernières années, enseigné par Éric Colin de Verdière, responsable du cours, et Claire Mathieu (Zhentao Li ayant participé marginalement cette année).

Claire Mathieu souhaitant arrêter son enseignement au MPRI, nous proposons une évolution de ce cours, intitulé maintenant *Algorithmique et combinatoire des graphes géométriques*. Le responsable du cours sera toujours Éric Colin de Verdière, mais Vincent Pilaud remplacera Claire Mathieu.

Le cours est orienté dans une direction plus géométrique que les années précédentes, pour coïncider avec les spécialités de Vincent Pilaud. (Cela apparaît aussi raisonnable étant donné que l'ENS Paris ne propose plus, depuis cette année, de cours de géométrie algorithmique en M1.) La partie du cours d'Éric Colin de Verdière restera globalement dans le même esprit que les années précédentes mais sera adaptée pour suivre cette nouvelle orientation géométrique et donner plus de cohérence.

Nous donnons ci-dessous une description détaillée de la nouvelle mouture du cours.

1 Thème du cours

Ce cours est à la croisée de l'algorithmique « classique » des graphes, de la géométrie combinatoire et de l'algorithmique géométrique. Il combine en effet deux directions de recherches actuelles autour des graphes en géométrie :

- l'algorithmique des graphes plongés sur les surfaces (thématique déjà enseignée au MPRI par Éric Colin de Verdière dans la version antérieure du cours 2-38-1). On s'intéresse surtout à des problèmes de nature topologique : Par exemple, comment calculer un plus court cycle possédant des propriétés topologiques données, ou un sous-graphe dont la suppression rend le graphe planaire ? Ces questions sont intéressantes en géométrie algorithmique et applications, et sont également utiles pour développer des algorithmes efficaces comme le calcul de la coupe minimale pour un graphe plongé sur une surface. Enseigner des résultats de recherche récents dans ce domaine est aussi une excellente opportunité de présenter un certain nombre de propriétés générales, utilisables dans d'autres contextes, sur les graphes planaires et la topologie des surfaces ;
- l'algorithmique et la combinatoire des graphes géométriques. Il s'agit de présenter des notions de base sur deux structures de flips fondamentales : d'une part les triangulations régulières et le polytope secondaire qui encode cette structure, et d'autre part les arrangements de pseudodroites sur des réseaux de tri qui fournissent un modèle combinatoire simple pour plusieurs familles de graphes géométriques (associaèdre, pseudotriangulations et multitriangulations). Ces deux familles de graphes sont un bon moyen d'introduire certaines notions importantes de géométrie discrète et combinatoire, largement utilisées par ailleurs : polytopes, arrangements de droites, triangulations de Delaunay, etc.

2 Plan du cours

Le descriptif ci-dessous est volontairement très large et ne pourrait être enseigné entièrement en 24h. Selon les années, on se permettra d'insister sur certains aspects au détriment des autres. Les initiales entre crochets indiquent l'intervenant pressenti pour la partie correspondante.

[*] Département d'Informatique de l'École normale supérieure.
[‡] Laboratoire d'Informatique de l'École Polytechnique.

1. **Fondations** :
   - [ECV] Graphes géométriques et graphes planaires, topologie, représentations combinatoires d'un plongement, dualité, formule d'Euler ;
   - [VP] triangulation de Delaunay, notions élémentaires sur les polytopes.
2. **Algorithmes de plongement de graphes planaires** :
   - [ECV] méthode barycentrique de Tutte ; application : théorème de Steinitz sur le graphe des 3-polytopes ;
   - [VP] épluchages et bois de Schnyder, surfaces orthogonales et triangulations TD-Delaunay ;
   - [VP] ouverture vers les graphes non planaires, crossing number, crossing number géométrique.
3. **Algorithmes topologiques sur les graphes sur les surfaces** [ECV] :
   - topologie, classification des surfaces, représentations combinatoires d'un plongement de graphe sur une surface, surfaces combinatoires et à métrique des croisements ;
   - calcul d'un plus court cycle non séparateur ou non contractile, d'un plus court système de lacets à sommets fixés (outil : homologie dans le cadre restreint des graphes sur les surfaces) ;
   - calcul d'un plus court chemin ou cycle homotope à un chemin ou cycle donné (outil : revêtement universel) ;
   - calcul d'une (s, t)-coupe minimale sur un graphe plongé.
4. **Graphes géométriques et structures de flips** [VP] :
   - flips dans les triangulations, rotations dans les arbres binaires, et associaèdre ;
   - triangulations régulières, flips, polytope secondaire ;
   - rigidité et expansion de graphes géométriques, cone d'expansion, et relation avec le polytope des pseudotriangulations ;
   - abstractions combinatoires de structures de flips (arrangements sur des réseaux de tri), et algorithmes d'énumération.

3 Liens avec les autres cours

Notre cours ne présente aucun pré-requis, mais le contenu décrit ci-dessus a des liens et de légers chevauchements avec les cours actuels suivants :

2.10 Aspects algorithmiques de la combinatoire (Gilles Schaeffer), qui évoque les aspects combinatoires des cartes planaires et donne une représentation combinatoire des cartes planaires, toutefois plus algébrique que la nôtre ;

2.29.1 Algorithmique des graphes (Michel Habib), qui introduit de nombreuses notions sur les graphes dont nous pourrons nous servir en les réintroduisant ;

2.14.1 Analyse géométrique des données (Mariette Yvinec), où les triangulations de Delaunay et l'homologie sont définies ; cependant, nous nous servons des triangulations de Delaunay uniquement pour illustrer de triangulations régulières et pour motiver la définition de triangulation TD-Delaunay, et nous définissons l'homologie dans un cadre beaucoup plus simple car plus restreint ;

2.24.1 Optimisation (Christoph Dürr), qui utilise des polytopes ; cependant, notre point de vue sur les polytopes est nettement plus combinatoire et géométrique, et nous définirons toutes les notions dont nous aurons besoin.

4 Organisation

Le cours sera constitué de 8 séances de 3 heures. Dans la mesure du possible, chaque séance de 3 heures sera partagée par les deux intervenants. Les parties 3 et 4 sont indépendantes et pourront être enseignées dès que la partie 2 l'aura été.

Afin d'inciter les étudiants à travailler le cours de façon continue, des exercices facultatifs seront proposés ; leur résolution correcte pourra donner des points de bonus à la note finale.

Les supports de cours seront en anglais. Le cours sera donné en français sauf si une fraction significative des étudiants suivant ce cours ne comprennent pas le français, auquel cas il sera donné en anglais si tous les étudiants sont d'accord. L'examen pourra être traité en anglais ou en français, et le sujet sera traduit dans les deux langues si besoin.