Proposition de cours au Master Mathématiques et Applications
Combinatoire des polytopes

Arnau Padrol *   Vincent Pilaud ‡

7 février 2018

1 Thème du cours

2 Plan du cours

Semaine A

Cours A1. Cones polyèdriques

- Définition des cones et propriétés élémentaires
- Thm de Minkowski-Weyl pour les cones (preuve par lancer de rayon)
- Élimination de Fourier-Motzkin
- Polarité

Cours A2. Polytopes, polyèdres

- Convexité – Thm de Carathéodory – Thm de Radon
- Définition des polytopes et polyèdres (V et H descriptions)
- Exemples (simplexes, cubes, cross-polytopes, 0/1-polytopes issus de problèmes d'optimisation combinatoire)
- Thm de Minkowski-Weyl pour les polytopes
- Polarité

TD A.

- Convexité (généralisations du thm de Carathéodory, thm de Helly)
- Projections (tout polytope est la projection d'un simplexe, tout zonotope est la projection d'un cube, tout polytope centralement symétrique est la projection d'un cross-polytope)
- Introduction aux diagrammes de Schlegel

Semaine B

B1. Faces

- Définitions des faces et du f-vecteur, propriétés élémentaires
- Treillis des faces d'un polyèdre
- Polytopes simples et simpliciaux
- Cones et éventails normaux

B2. Opérations et exemples

- Produit Cartésien
- Somme directe
- Join
- Pyramide
- Somme de Minkowski
- Projections / sections

TD B. Deux familles de polytopes :

*Institut de Mathématiques de Jussieu.
‡Laboratoire d'Informatique de l'École Polytechnique.

— polytope des stables d'un graphe
— polytopes de transport

Semaine C

C1. Relations sur les f-vecteurs
— Relation d'Euler (unique relation affine sur le f-vecteur des polytopes généraux)
— h-vecteurs des polytopes simples et simpliciaux
— Relations de Dehn-Sommerville

C2. Polytopes extrémaux
— Polytopes cycliques et thm de la borne supérieure
— Polytopes empilés et thm de la borne inférieure (preuve de Kalai par rigidité)

TD C.
— Thm de Blind-Mani et Kalai (graphes de polytopes simples)
— Non unimodalité du f-vecteur
— Critère de parité de Gale et f-vecteur des polytopes cycliques

Semaine D

D1. Introduction des matroides orientés
— Introduction aux matroides
— Arrangements de vecteurs et d'hyperplans
— Circuits, cocircuits, chirotope (et leurs axiomes)
— Opérations de contraction et deletion
— Représentation topologique de Folkmann-Lawrence (sans preuve)

D2. Dualité de Gale
— Orthogonalité dépendances linéaires / évaluations linéaires
— Dualité de Gale pour les points
— Diagrammes affines
— Application : classification des d-polytopes à $d + 2$ sommets

TD D.
— Zonotopes
— Matroides orientés de graphes
— Polytopes neighborly non cycliques

Semaine E

E1. Espace de réalisation d'un matroide orienté
— Espaces semi-algébriques
— Espace de réalisation d'un polytope
— Familles de sommets affinement indépendants

E2. Polytopes de dimension 3 et Thm de Steinitz
— Thm de Tutte pour les graphes planaires par etirement
— Relèvement de Maxwell
— Réalisation entière et borne sur la taille des coordonnées

TD E. Premières manifestations d'universalité :
— Polytope non rationnel de Perles
— Facettes non prescriptibles

Semaine F

F1. Théorèmes d'universalité pour les matroides orientés
— Forme normale de Shor
— Equivalence stable
— Construction de Von Staudt
— Thm d'universalité de Mnëv

F2. Théorèmes d'universalité pour les polytopes

- Construction de Lawrence
- Matroides orientés rigides
- Thm d'universalité dimension arbitraire
- Thm d'universalité de Richter-Gebert en dimension 4 (sans preuve)

TD F. Gadgets pour la preuve de Richter-Gebert

3 Liens avec les autres cours

4 Organisation