Proposition de cours au Master Mathématiques et Applications
Spécialité Mathématiques Fondamentales
Combinatoire des polytopes

Arnau Padrol[*] Vincent Pilaud[‡]

1 Thème du cours

L'objectif de ce cours est de proposer un parcours initiatique à la combinatoire géométrique. Le cours sera centré sur la théorie combinatoire des polytopes et ses connexions avec la convexité, l'optimisation et la programmation linéaire, la topologie combinatoire, la théorie des matroides orientés, et la complexité algorithmique des problèmes de réalisation.

Il comportera deux parties aux objectifs différents : la première partie donnera un panorama des résultats fondamentaux de la théorie combinatoire des polytopes (Minkowski-Weyl, treillis des faces, relation d'Euler, théorèmes de la borne supérieure et inférieure), tandis que la deuxième partie approfondira une direction particulière en se focalisant sur les espaces de réalisation de polytopes et le célèbre théorème d'universalité de Mnëv.

L'un des enjeux est d'apprendre à appréhender la géométrie en grande dimension. Le cours donnera différentes approches pour générer, manipuler et comprendre des polytopes au delà de la dimension 3 (diagrammes de Schlegel, dualité de Gale). Par ailleurs, le cours soulignera que le passage en dimension plus grande que 4 fait apparaître des phénomènes qui contredisent l'intuition et des résultats classiques de la dimension 3. Par exemple, on montrera l'existence de polytopes dont le graphe est complet, de polytopes sans réalisation rationnelle, et la difficulté algorithmique de réaliser géométriquement les 3-sphères (aussi difficile que la théorie existentielle des réels).

2 Plan du cours

Semaine A

Cours A1. Cones polyèdriques
- Définition des cones et propriétés élémentaires
- Thm de Minkowski-Weyl pour les cones (preuve par lancer de rayon)
- Élimination de Fourier-Motzkin
- Polarité

Cours A2. Polytopes, polyèdres
- Convexité – Thm de Carathéodory – Thm de Radon
- Définition des polytopes et polyèdres (V et H descriptions)
- Exemples (simplexes, cubes, cross-polytopes, 0/1-polytopes issus de problèmes d'optimisation combinatoire)
- Thm de Minkowski-Weyl pour les polytopes
- Polarité

TD A.
- Convexité (généralisations du thm de Carathéodory, thm de Helly)
- Projections (tout polytope est la projection d'un simplexe, tout zonotope est la projection d'un cube, tout polytope centralement symétrique est la projection d'un cross-polytope)
- Introduction aux diagrammes de Schlegel

[*]Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, Sorbonne Université.
[‡]Laboratoire d'Informatique de l'École Polytechnique.

Semaine B

B1. Faces

- Définitions des faces et du f-vecteur, propriétés élémentaires
- Treillis des faces d'un polyèdre
- Polytopes simples et simpliciaux
- Cones et éventails normaux

B2. Opérations et exemples

- Produit Cartésien
- Somme directe
- Join
- Pyramide
- Somme de Minkowski
- Projections / sections

TD B. Deux familles de polytopes :

- polytope des stables d'un graphe
- polytopes de transport

Semaine C

C1. Relations sur les f-vecteurs

- Relation d'Euler (unique relation affine sur le f-vecteur des polytopes généraux)
- h-vecteurs des polytopes simples et simpliciaux
- Relations de Dehn-Sommerville

C2. Polytopes extrémaux

- Polytopes cycliques et thm de la borne supérieure
- Polytopes empilés et thm de la borne inférieure (preuve de Kalai par rigidité)

TD C.

- Thm de Blind-Mani et Kalai (graphes de polytopes simples)
- Non unimodalité du f-vecteur
- Critère de parité de Gale et f-vecteur des polytopes cycliques

Semaine D

D1. Introduction aux matroides orientés

- Introduction aux matroides
- Arrangements de vecteurs et d'hyperplans
- Circuits, cocircuits, chirotope (et leurs axiomes)
- Opérations de contraction et deletion
- Représentation topologique de Folkmann-Lawrence (sans preuve)

D2. Dualité de Gale

- Orthogonalité dépendances linéaires / évaluations linéaires
- Dualité de Gale pour les points
- Diagrammes affines
- Application : classification des d-polytopes à $d + 2$ sommets

TD D.

- Zonotopes
- Matroides orientés de graphes
- Polytopes neighborly non cycliques

Semaine E

E1. Espace de réalisation d'un matroide orienté

- Espaces semi-algébriques
- Espace de réalisation d'un polytope
- Familles de sommets affinement indépendants

E2. Polytopes de dimension 3 et Thm de Steinitz
- Thm de Tutte pour les graphes planaires par etirement
- Relèvement de Maxwell
- Réalisation entière et borne sur la taille des coordonnées

TD E. Premières manifestations d'universalité :
- Polytope non rationnel de Perles
- Facettes non prescriptibles

Semaine F

F1. Théorèmes d'universalité pour les matroides orientés
- Forme normale de Shor
- Equivalence stable
- Construction de Von Staudt
- Thm d'universalité de Mnëv

F2. Théorèmes d'universalité pour les polytopes
- Construction de Lawrence
- Matroides orientés rigides
- Thm d'universalité dimension arbitraire
- Thm d'universalité de Richter-Gebert en dimension 4 (sans preuve)

TD F. Gadgets pour la preuve de Richter-Gebert

3 Organisation

Il s'agira d'un cours fondamental de 9 ECTS, avec 24 heures de cours et 12h de TD. Le cours est prévu sur 6 semaines, chaque semaine comportant 2 cours de 2 heures et un TD de 2 heures. Il est prévu qu'Arnau Padrol assure le cours et Vincent Pilaud assure les TDs.

4 Bibliographie

[DRS10] Jesus A. De Loera, Jörg Rambau, and Francisco Santos. *Triangulations : Structures for Algorithms and Applications*, volume 25 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer Verlag, 2010.

[Mat02] Jiří Matoušek. *Lectures on discrete geometry*, volume 212 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[RG96] Jürgen Richter-Gebert. *Realization spaces of polytopes*, volume 1643 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Zie98] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 of *Graduate texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.