Коллоквиум по Дискретной математике, 2 курс

Залялов Александр, @bcategorytheory,
Солодовников Никита, @applied_memes,
Шморгунов Александр, @Owlus
Виноградова Дарья, @orange_to_the_wall

26 Игры Эренфойхта

Цель: сформулировать общий критерий элементарной эквивалентности двух интерпретаций некоторой сигнатуры (считаем, что сигнатура содержит только предикатные символы).

Критерий будет сформулирован в терминах некоторой игры, называемой игрой Эренфойхта. В ней участвуют два игрока, называемые Новатором (Н) и Консерватором (К). Игра определяется выбранной парой интерпретаций.

В начале игры Новатор объявляет натуральное число k. Далее они ходят по очереди, начиная с Н; каждый из игроков делает k ходов, после чего определяется победитель.

На i-м ходу Н выбирает элемент в одной из интерпретаций (в любой из двух) и помечает его числом i. В ответ К выбирает некоторый элемент из другой интерпретации и также помечает его числом i.

После k ходов игра заканчивается. При этом в каждой интерпретации k элементов оказываются помеченными числами от 1 до k (мы не учитываем, кто именно из игроков их пометил). Обозначим эти элементы a_1, a_2, $\cdots$, a_k (для первой интерпретации) и b_1, b_2, $\cdots$, b_k (для второй). Элементы a_i и b_i (с одним и тем же i) будем называть соответствующими друг другу.

Посмотрим, найдётся ли предикат сигнатуры, который различает помеченные элементы первой и второй интерпретации (то есть истинен на некотором наборе помеченных элементов в одной интерпретации, но ложен на соответствующих элементах другой). Если такой предикат найдётся, то выигрывает Новатор, в противном случае — Консерватор.

Теорема. *Интерпретации не элементарно эквивалентны $\iff$ Н имеет выигрышную стратегию в этой игре.*

Доказательство. Докажем, что если Новатор имеет выигрышную стратегию, то интерпретации не элементарно эквивалентны.

Пусть есть различающая формула. Приведем ее к предваренной форме. Будем последовательно смотреть на кванторы в ее начале. Пусть текущий квантор - это $\exists$. Значит, есть элемент в M_1, для которого верна оставшаяся часть формулы, в то время как в M_2 такого нет. Этот элемент и должен выбрать Новатор очередным ходом.

Пусть текущий квантор - это $\forall$. В таком случае мы можем перейти к отрицанию и поступить аналогично шагу с $\exists$, только выбирая элемент в M_2.

Таким образом, за количество шагов, равное количеству кванторов в различающей формуле, Новатор может построить различающие наборы.

$\square$

27 Семантически полные теории. Критерий семантической полноты теории в терминах элементарной эквивалентности моделей. Аксиоматизация элементарной теории упорядоченного множества целых чисел.

Аксиоматическая теория T - множество замкнутых формул.

T *семантически полна*, если для любой замкнутой формулы A выполнено одно из двух:

1. из T семантически следует A (A истинно во всех моделях теории)

2. из T семантически следует $\neg A$

Лемма. *Теория семантически полна $\iff$ любые 2 ее модели элементарно эквивалентны.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Элементарная эквивалентность значит, что в обоих моделях любая формула или истинна, или ложна. Тогда если ϕ следует из A, то она истинна для всех моделей, следовательно, для каждой пары. Аналогично для $\neg\phi$

$\Leftarrow$ От противного: какая-то формула сама не следует и ее отрицание не следует. Значит, есть модели, в одной из которых A истинно, в другой - ложно. Противоречие с элементарной эквивалентностью.

$\square$

Аксиоматизация множества рациональных чисел

$M = (Q, =, <)$

- аксиомы равенства

    1. $\forall x\, x = x$
    2. $\forall x \forall y\, x = y \to y = x$

3. $\forall x \forall y \forall z \;\; x = y \wedge y = z \to x = z$
4. $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 \;\; x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \to (x_1 = x_2 \to y_1 = y_2)$

- аксиомы линейного порядка
  1. $x < y \wedge y < z \to x < z$
  2. $\neg\,(x < x)$
  3. $\forall x \forall y \; x < y \vee x > y \vee x = y$
- отсутствие наибольшего и наименьшего элемента
- плотность множества $\forall x, y\,(x < y \to \exists z \;\; x < z \wedge z < y)$

Теорема. *T - совместная и семантически полная.*

Доказательство. Доказательство аналогично игре Эренфойхта с R и Q. Все выбранные в одной модели элементы идут в том же порядке, что и элементы второй модели. Консерватору достаточно возможности выбрать элемент между любыми двумя и отсутствие наибольшего и наименьшего элемента. □

28 Аксиоматизация множества целых чисел.

$M = (Z, =, <)$

- аксиомы равенства
- аксиомы линейного порядка
- отсутствие наибольшего и наименьшего элемента
- $\forall x \exists y (x < y \wedge \neg(\exists z \;\; x < z \wedge z < y))$
- $\forall x \exists y (x > y \wedge \neg(\exists z \;\; x > z \wedge z > y))$

Теорема. *T - совместная и семантически полная.*

Доказательство. Как устроены модели T? Это Z, Z+Z или любое множество вида AZ (A - линейно упорядоченное множество, в каждом элементе которого лежит множество целых чисел). Скажем, что элементы эквивалентны, если мы можем получить один из другого за конечное число шагов. Факторизуем по этому отношению эквивалентности. □

Лемма. *Для любого линейно упорядоченного A $AZ \cong Z$*

Доказательство. Доказывается аналогично случаю с Z+Z □