Коллоквиум по Дискретной математике, 2 курс

Залялов Александр, @bcategorytheory,
Солодовников Никита, @applied_memes
Шморгунов Александр, @Owlus

20 Дизъюнкты, универсальные дизъюнкты. Исчисление резолюций (ИР) для доказательства несовместности множеств универсальных дизъюнктов. Теорема корректности ИР.

Определение. *Дизъюнктом* называется дизъюнкция атомарных формул и их отрицаний.
Пример: $P(x) \vee \bar{Q}(y, f(x)) \vee s$ (в данном случае $P(x), \bar{Q}(y, f(x)), s$ — атомарные формулы, а $\vee$ — операция дизъюнкции)

Определение. *Универсальным дизъюнктом* называется формула, полученная из дизъюнкта приписыванием кванторов всеобщности. Пример: $\forall x \forall y [P(x) \vee \bar{Q}(y, f(x)) \vee s]$

Для того, чтобы доказывать несовместность множеств универсальных дизъюнктов (несовместность конъюнкции всех универсальных дизъюнктов этого множества) мы пользуемся правилами в исчислении резолюций

Правил в исчислении резолюций два:

- $A \vee p,\ B \vee \bar{p} \to A \vee B$ (правило резолюций)
- $\forall x D(x) \to D(t)$ для некоторого t

Теорема. *(Теорема корректности исчисления резолюций) Если из набора универсальных дизъюнктов можно вывести пустой дизъюнкт, то этот набор несовместен.*

Доказательство. Идем методом от противного. Пускай существует модель M, в которой все данные дизъюнкы истинны. Заметим, что оба правила исчисления резолюций сохраняют истинность.

Действительно, если в правиле резолюций для $A \vee p,\ B \vee \bar{p} \to A \vee B$ мы получим, что $A \vee B$ ложно, то это значит, что и A, и B ложно, однако если это так, то ложно либо $A \vee p$, либо $B \vee \bar{p}$

В правиле резолюций для $\forall x D(x) \to D(t)$, если выражение $D(x)$ истинно для любого x, то оно будет истинно для и для некоторого t [1]

Если мы вывели пустой дизъюнкт, то по истинности правил исчисления резолюций получаем, что пустой дизъюнкт является истинным. Противоречие. $\square$

21 Непротиворечивые теории. Теорема полноты ИР (для множеств универсальных дизъюнктов).

Определение. *Непротиворечивой теорией* называется теория такая, что в ней утверждение не может быть одновременно доказано и опровергнуто

Теорема. *(Теорема полноты исчисления резолюций) Если набор универсальных дизъюнктов несовместен, то из него можно вывести пустой дизъюнкт*

Доказательство. Пускай есть счётное множество универсальных дизъюнктов S. Заметим, что если мы подставим вместо терм конкретные значения в этом множестве, то можем заменить все атомарные формулы пропозициональными переменными (константа 0 исчезает, так как дизъюнкция; константу 1 заменяем на дизъюнкцию переменных

[1] В случае $\forall xy, x < y$ не выполняется, если мы поставим $x = y$. Однако наши универсальные дизъюнкты не допускают квантора существования, поэтому такая формула невозможна

$p \vee \bar{p}$, p в данном случае — новая переменная, которую мы ввели). Назовём это новое множество из пропозициональных переменных S'.

Так как S несовместно, то S' тоже несовместно, так как существует набор терм, при котором из S мы получаем S'. Значит, мы свели теорему к случаю для дизъюнктов из пропозициональных переменных. Теорема полноты для такого случая доказывалась в билете 16. А раз для любого набора терм вывести пустой дизъюнкт нельзя, то и для S тоже. $\square$

22 Исчисление резолюций для теорий, состоящих из формул общего вида (приведение к предваренной нормальной форме и сколемизация). Доказательства общезначимости с помощью ИР. Выводимость формулы в теории с помощью ИР. Теорема компактности.

Для того, чтобы применить правила исчислений резолюций для теорий, состоящих из формул общего вида необходимо для начала привести их к форме, состоящей из конъюнкций, дизъюнкций, отрицаний атомарных формул и кванторов всеобщности. Поэтому каждую формулу приводят сначала к *предваренной нормальной форме*, а затем к *сколемовской нормальной форме*

Определение. *Нормальной формой* называется формула, состоящая только из конъюнкций, дизъюнкций, отрицаний атомарных формул и кванторов

Определение. *Предваренной нормальной формой* называется нормальная форма формулы, кванторы которой стоят в начале

Определение. *Сколемовской нормальной формой* называется предваренная нормальная форма формулы, кванторы которой являются кванторами всеобщности

Для приведения к нормальной форме нужно преобразовывать нестандартные операции в вид конъюнкций, дизъюнкций и отрицаний (Пример: $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$), а также пользоваться следующими правилами:

- $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$
- $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$

Для приведения к предваренной нормальной форме нужно вынести кванторы. Делается это при помощи следующих правил:

- $C \vee \forall x A(x) \equiv \forall x[C \vee A(x)]$, C не зависит от x, операции между A(x) и C могут быть любые ($\vee$ или $\wedge$), квантор для x тоже любой ($\forall$ или $\exists$)
- $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x \forall y[A(x) \vee B(y)]$, тоже для любых операций и кванторов
- $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \vdash \forall x[A(x) \vee B(x)]$, для любых операций
- $\exists x[A(x) \vee B(x)] \vdash \exists x A(x) \vee \exists B(x)$, для любых операций

Для приведения к сколемовской нормальной форме будем использовать следующую операцию:

- Убираем самый левый квантор существования. Заменяем его в атомарных формулах на функцию от всех предыдущих кванторов всеобщности.

  Пример: $\forall x \exists y \forall z \exists w[A(x,w) \vee B(y,z)] \vdash \forall x \forall z \exists w[A(x,w) \vee B(f_y(x),z)] \vdash \forall x \forall z[A(x, f_w(x,z)) \vee B(f_y(x),z)]$

  Функции f_y, f_w называются *сколемовскими функциями*

Доказательство общезначимости с помощью ИР и выводимость формулы в теории с помощью ИР (напомнить @Owlus для завершения)

Пусть T — множество формул (может быть как конечным, так и счётным)

Теорема. *(Теорема компактности) Если T несовместно, то у него существует несовместное конечное подмножество T'*

Доказательство. Для конечного множества очевидно (берём в качестве подмножества само множество)

Для счётного множества: так как T несовместно, то из него можно вывести пустой дизъюнкт (теорема полноты ИР, билет 21). Причём этот пустой дизъюнкт выводится из конечного числа исходных формул (так как сами формулы конечные и число операций конечно). Поэтому возьмём в качестве T' эти формулы. Из них выводится пустой дизъюнкт (теорема корректности ИР, билет 20), а значит T' несовместна $\square$

23 Гомоморфизмы, эпиморфизмы (сюръективные гомоморфизмы), изоморфизмы. Теорема о сохранении истинности при эпиморфизме. Изоморфные модели. Элементарно эквивалентные модели, элементарная эквивалентность изоморфных моделей.

Γ — сигнатура
M_1, M_2 — интерпретации Γ

Определение. *Гомоморфизмом* $h : M_1 \to M_2$ называется отображение, сохраняющее все предикаты и формулы в сигнатуре.

Для предиката $P^n \in \Gamma$, его интерпретаций $P_1 \in M_1, P_2 \in M_2$ действует
$\forall a_1, a_2,..., a_n[P_1(a_1, a_2,..., a_n) = P_2(h(a_1), h(a_2),..., h(a_n))]$

Для формулы $f^n \in \Gamma$, его интерпретаций $f_1 \in M_1, f_2 \in M_2$ действует
$\forall a_1, a_2,..., a_n[h(f_1(a_1, a_2,..., a_n)) = f_2(h(a_1), h(a_2),..., h(a_n))]$

Определение. *Эпиморфизмом (сюръективным гомоморфизмом)* $h : M_1 \to M_2$ называется, если h - гомоморфизм и является сюръекцией

Определение. *Изоморфизмом* $h : M_1 \to M_2$ называется, если h - гомоморфизм и является биекцией

Определение. M_1 *элементарно эквивалентно* M_2 *(*$M_1 \cong M_2$*)*, если для любой замкнутой формулы A сигнатуры Γ $M_1 \vDash A \Leftrightarrow M_2 \vDash A$ (формула истинна в M_1 т. и т.т, когда она истинна в M_2)

Пусть $h : M_1 \to M_2$ — эпиморфизм
$A(x_1,..., x_n)$ — произвольная формула

Теорема. *(Теорема о сохранении истинности при эпиморфизме) Для всех элементов* $a_1,..., a_n \in M_1, M_1 \vDash A(a_1,..., a_n) M_2 \vDash A(h(a_1),..., h(a_2))$

Доказательство.

Лемма. *для терма* t *верно, что* $h(|t(a_1,..., a_n)|_1) = |t(h(a_1),..., h(a_n))|_2$ *(*$|t(...)|_1$ *- терм в интерпретации* M_1*)*

Доказательство. Пусть $t = f(x, g(y))$. Тогда $|t(a,b)|_1 = f_1(a, g_1(b))$
$h(f_1(a, g_1(b)) = f_2(h(a), h(g_1(b))) = f_2(h(a), g_2(h(b)))$, мы пользуемся тем, что при гомоморфизме функции и предикаты сохраняются ☐

Пользуемся идукцией по построению A

1. База индукции: $A = P(t_1,..., t_m)$
   $M_1 \vDash A(a_1,...,a_m) \leftrightarrow P_1(|t_1(a_1,..., a_m)|_1,...) = 1 \Leftrightarrow P_2(h(t_1(a_1,..., a_m)),...) = 1$
   $\Leftrightarrow P_2(|t_1(h(a_1),..., h(a_m))|_2)$ (по лемме) $\leftrightarrow M_2 \vDash A(h(a_1),..., h(a_m))$

2. Индуктивный переход: разбиваем на случаи:
   - $A = B \vee C$
     $M_1 \vDash (B(a,...) \vee C(a,...)) \Leftrightarrow M_1 \vDash B$ или $M_1 \vDash C \Leftrightarrow M_2 \vDash B(h(a),...)$ или $M_2 \vDash C(h(a),...) \Leftrightarrow M_2 \vDash (B \vee C)(h(a),...)$ (аналогично доказывается для остальных операций)
   - $A = \exists x B(x, y)$
     $M_1 \vDash \exists x B(x, a) \leftrightarrow \exists b \in M_1, M_1 \vDash B(b, a) \leftrightarrow \exists b \in M_1, M_2 \vDash B(h(b), h(a)) \leftrightarrow \exists c \in M_2, M_2 \vDash B(c, h(a)) \leftrightarrow M_2 \vDash \exists x B(x, h(a))$ (предпоследняя эквивалентность верна именно потому, что у нас эпиморфизм), квантор всеобщности доказывается аналогично

☐

Теорема. *(Элементарная эквивалентность изоморфных моделей) Если модели* M_1 *и* M_2 *изоморфны, то они элементарно эквивалентны* [2]

Доказательство. Рассматриваем только замкнутые формулы A. Из предыдущей теоремы следует, что формула A схраняет свою истинность при изоморфизме, а это значит, что M_1 и M_2 будут элементарно эквивалентны по определению. ☐

[2] Для элементарной эквивалентности достаточно даже просто эпиморфизма, но мы используем более частую формулировку теоремы