

Коллоквиум по Дискретной математике, 2 курс

Залялов Александр, @bcategorytheory,
Солодовников Никита, @applied_memes
Шморгунов Александр, @Owlus

20 Дизъюнкты, универсальные дизъюнкты. Исчисление резолюций (ИР) для доказательства несовместности множеств универсальных дизъюнктов. Теорема корректности ИР.

Определение. *Дизъюнктом* называется дизъюнкция атомарных формул и их отрицаний.

Пример: $P(x) \vee \bar{Q}(y, f(x)) \vee s$ (в данном случае $P(x), \bar{Q}(y, f(x)), s$ — атомарные формулы, а \vee — операция дизъюнкции)

Определение. *Универсальным дизъюнктом* называется формула, полученная из дизъюнкта приписыванием кванторов всеобщности. Пример: $\forall x \forall y [P(x) \vee \bar{Q}(y, f(x)) \vee s]$

Для того, чтобы доказывать несовместность множеств универсальных дизъюнктов (несовместность конъюнкции всех универсальных дизъюнктов этого множества) мы пользуемся правилами в исчислении резолюций

Правил в исчислении резолюций два:

- $\frac{A \vee p, B \vee \bar{p}}{A \vee B}$ (правило резолюций)
- $\forall x D(x) \models D(t)$ для некоторого t

Теорема. (Теорема корректности исчисления резолюций) Если из набора универсальных дизъюнктов можно вывести пустой дизъюнкт, то этот набор несовместен.

Доказательство. Идем методом от противного. Пускай существует модель M , в которой все данные дизъюнкты истинны. Заметим, что оба правила исчисления резолюций сохраняют истинность.

Действительно, если в правиле резолюций для $\frac{A \vee p, B \vee \bar{p}}{A \vee B}$ мы получим, что $A \vee B$ ложно, то это значит, что и A , и B ложно, однако если это так, то ложно либо $A \vee p$, либо $B \vee \bar{p}$

В правиле резолюций для $\forall x D(x) \models D(t)$, если выражение $D(x)$ истинно для любого x , то оно будет истинно для и для некоторого t ¹

Если мы вывели пустой дизъюнкт, то по истинности правил исчисления резолюций получаем, что пустой дизъюнкт является истинным. Противоречие. \square

21 Непротиворечивые теории. Теорема полноты ИР (для множеств универсальных дизъюнктов).

Определение. *Непротиворечивой теорией* называется теория такая, что в ней утверждение не может быть одновременно доказано и опровергнуто

Теорема. (Теорема полноты исчисления резолюций) Если набор универсальных дизъюнктов несовместен, то из него можно вывести пустой дизъюнкт

Доказательство. Пускай есть счётное множество универсальных дизъюнктов S . Заметим, что если мы подставим вместо терм конкретные значения в этом множестве, то можем заменить все атомарные формулы пропозициональными переменными (константа 0 исчезает, так как дизъюнкция; константу 1 заменяем на дизъюнкцию переменных

¹В случае $\forall xy, x < y$ не выполняется, если мы поставим $x = y$. Однако наши универсальные дизъюнкты не допускают квантора существования, поэтому такая формула невозможна

$p \vee \bar{p}$, p в данном случае — новая переменная, которую мы ввели). Назовём это новое множество из пропозициональных переменных S' .

Так как S несовместно, то S' тоже несовместно, так как существует набор терм, при котором из S мы получаем S' . Значит, мы свели теорему к случаю для дизъюнктов из пропозициональных переменных. Теорема полноты для такого случая доказывалась в билете 16. А раз для любого набора терм вывести пустой дизъюнкт нельзя, то и для S тоже. \square

22 Исчисление резолюций для теорий, состоящих из формул общего вида (приведение к предваренной нормальной форме и сколемизация). Доказательства общезначимости с помощью ИР. Выводимость формулы в теории с помощью ИР. Теорема компактности.

Для того, чтобы применить правила исчислений резолюций для теорий, состоящих из формул общего вида необходимо для начала привести их к форме, состоящей из конъюнкций, дизъюнкций, отрицаний атомарных формул и кванторов всеобщности. Поэтому каждую формулу приводят сначала к *предваренной нормальной форме*, а затем к *сколемовской нормальной форме*

Определение. *Нормальной формой* называется формула, состоящая только из конъюнкций, дизъюнкций, отрицаний атомарных формул и кванторов

Определение. *Предваренной нормальной формой* называется нормальная форма формулы, кванторы которой стоят в начале

Определение. *Сколемовской нормальной формой* называется предваренная нормальная форма формулы, кванторы которой являются кванторами всеобщности

Для приведения к нормальной форме нужно преобразовывать нестандартные операции в вид конъюнкций, дизъюнкций и отрицаний (Пример: $A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$), а также пользоваться следующими правилами:

- $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \bar{A}(x)$
- $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$

Для приведения к предваренной нормальной форме нужно вынести кванторы. Делается это при помощи следующих правил:

- $C \vee \forall x A(x) \equiv \forall x [C \vee A(x)]$, C не зависит от x , операции между $A(x)$ и C могут быть любые (\vee или \wedge), квантор для x тоже любой (\forall или \exists)
- $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x \forall y [A(x) \vee B(y)]$, тоже для любых операций и кванторов
- $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \vdash \forall x [A(x) \vee B(x)]$, для любых операций
- $\exists x [A(x) \vee B(x)] \vdash \exists x A(x) \vee \exists B(x)$, для любых операций

Для приведения к сколемовской нормальной форме будем использовать следующую операцию:

- Убираем самый левый квантор существования. Заменяем его в атомарных формулах на функцию от всех предыдущих кванторов всеобщности.

Пример: $\forall x \exists y \forall z \exists w [A(x, w) \vee B(y, z)] \vdash \forall x \forall z \exists w [A(x, w) \vee B(f_y(x), z)] \vdash \forall x \forall z [A(x, f_w(x, z)) \vee B(f_y(x), z)]$

Функции f_y, f_w называются *сколемовскими функциями*

Общезначимость формулы можно доказывать с помощью исчисления резолюций. Для этого возьмём отрицание этой формулы. *Общезначимость формулы* \Leftrightarrow несовместности отрицания. А несовместность доказываем с помощью исчисления резолюций, выводя пустой дизъюнкт.

Выводимость формулы в теории можно доказывать с помощью исчисления резолюций. Для этого (пусть формулы — A и B) заметим, что выводимость равносильна несовместности формулы $A \wedge \bar{B}$ (если есть хоть один набор терм, что эта формула истинна, то для него, следовательно, из A не выводима формула, истинная при всех значениях, при которых истинна B)

Пусть T — множество формул (может быть как конечным, так и счётным)

Теорема. (Теорема компактности) Если T несовместно, то у него существует несовместное конечное подмножество T'

Доказательство. Для конечного множества очевидно (берём в качестве подмножества само множество)

Для счётного множества: так как T несовместно, то из него можно вывести пустой дизъюнкт (теорема полноты ИР, билет 21). Причём этот пустой дизъюнкт выводится из конечного числа исходных формул (так как сами формулы конечные и число операций конечно). Поэтому возьмём в качестве T' эти формулы. Из них выводится пустой дизъюнкт (теорема корректности ИР, билет 20), а значит T' несовместна \square

23 Гомоморфизмы, эпиморфизмы (сюръективные гомоморфизмы), изоморфизмы. Теорема о сохранении истинности при эпиморфизме. Изоморфные модели. Элементарно эквивалентные модели, элементарная эквивалентность изоморфных моделей.

Γ — сигнатура

M_1, M_2 — интерпретации Γ

Определение. Гомоморфизмом $h : M_1 \rightarrow M_2$ называется отображение, сохраняющее все предикаты и формулы в сигнатуре.

Для предиката $P^n \in \Gamma$, его интерпретаций $P_1 \in M_1, P_2 \in M_2$ действует

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n [P_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = P_2(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))]$$

Для формулы $f^n \in \Gamma$, его интерпретаций $f_1 \in M_1, f_2 \in M_2$ действует

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n [h(f_1(a_1, a_2, \dots, a_n)) = f_2(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))]$$

Определение. Эпиморфизмом (сюръективным гомоморфизмом) $h : M_1 \rightarrow M_2$ называется, если h — гомоморфизм и является сюръекцией

Определение. Изоморфизмом $h : M_1 \rightarrow M_2$ называется, если h — гомоморфизм и является биекцией

Определение. M_1 элементарно эквивалентно M_2 ($M_1 \cong M_2$), если для любой замкнутой формулы A сигнатуры Γ $M_1 \models A \Leftrightarrow M_2 \models A$ (формула истинна в M_1 т. и т.т. когда она истинна в M_2)

Пусть $h : M_1 \rightarrow M_2$ — эпиморфизм

$A(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула

Теорема. (Теорема о сохранении истинности при эпиморфизме) Для всех элементов $a_1, \dots, a_n \in M_1, M_1 \models A(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow M_2 \models A(h(a_1), \dots, h(a_n))$

Доказательство.

Лемма. для терма t верно, что $h(|t(a_1, \dots, a_n)|_1) = |t(h(a_1), \dots, h(a_n))|_2$ ($|t(\dots)|_1$ — терм в интерпретации M_1)

Доказательство. Пусть $t = f(x, g(y))$. Тогда $|t(a, b)|_1 = f_1(a, g_1(b))$

$h(f_1(a, g_1(b))) = f_2(h(a), h(g_1(b))) = f_2(h(a), g_2(h(b)))$, мы пользуемся тем, что при гомоморфизме функции и предикаты сохраняются \square

Пользуемся идукцией по построению A

1. База индукции: $A = P(t_1, \dots, t_m)$

$$M_1 \models A(a_1, \dots, a_m) \Leftrightarrow P_1(|t_1(a_1, \dots, a_m)|_1, \dots) = 1 \Leftrightarrow P_2(h(t_1(a_1, \dots, a_m)), \dots) = 1 \\ \Leftrightarrow P_2(|t_1(h(a_1), \dots, h(a_m))|_2) \text{ (по лемме)} \Leftrightarrow M_2 \models A(h(a_1), \dots, h(a_m))$$

2. Индуктивный переход: разбиваем на случаи:

• $A = B \vee C$

$$M_1 \models (B(a, \dots) \vee C(a, \dots)) \Leftrightarrow M_1 \models B \text{ или } M_1 \models C \Leftrightarrow M_2 \models B(h(a), \dots) \text{ или } M_2 \models C(h(a), \dots) \Leftrightarrow M_2 \models (B \vee C)(h(a), \dots) \text{ (аналогично доказывается для остальных операций)}$$

- $A = \exists x B(x, y)$

$M_1 \models \exists x B(x, a) \leftrightarrow \exists b \in M_1, M_1 \models B(b, a) \leftrightarrow \exists b \in M_1, M_2 \models B(h(b), h(a)) \leftrightarrow \exists c \in M_2, M_2 \models B(c, h(a)) \leftrightarrow M_2 \models \exists x B(x, h(a))$ (предпоследняя эквивалентность верна именно потому, что у нас эпиморфизм), квантор всеобщности доказывается аналогично

□

Теорема. (Элементарная эквивалентность изоморфных моделей) Если модели M_1 и M_2 изоморфны, то они элементарно эквивалентны ²

Доказательство. Рассматриваем только замкнутые формулы A . Из предыдущей теоремы следует, что формула A сохраняет свою истинность при изоморфизме, а это значит, что M_1 и M_2 будут элементарно эквивалентны по определению. □

²Для элементарной эквивалентности достаточно даже просто эпиморфизма, но мы используем более частую формулировку теоремы