Коллоквиум по Дискретной математике, 2 курс

Залялов Александр, @bcategorytheory,
Солодовников Никита, @applied_memes
Шморгунов Александр, @Owlus

1 Определение вычислимой частичной функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Счётность семейства частичных вычислимых функций, и существование невычислимых функций. Разрешимые и перечислимые подмножества $\mathbb{N}$. Счётность семейства перечислимых множеств, существование неперечислимых множеств.

Здесь не даётся формального определения алгоритма. В нашем случае "алгоритм" — некоторый чёрный ящик, принимающий на вход конструктивный объект (натуральное число или же объект, который можно закодировать как натуральное число), производящий некоторый результат (также конструктивный объект), а также работающий по шагам (некоторые атомарные действия вроде сложения).

Rule of thumb для вопроса "Алгоритм ли это?" — можно написать как программу на каком-нибудь языке программирования.

Определение. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *частичной*, если $\operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{N}$.

Определение. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *тотальной*, если $\operatorname{Dom} f = \mathbb{N}$.

Определение. Алгоритм $\mathcal{A}$ *вычисляет* частичную функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, если

$$\begin{cases} \mathcal{A}(x) = f(x), & \text{если } x \in \operatorname{Dom} f, \\ \mathcal{A}(x) \text{ не определено} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение. Частичная функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *вычислимой*, если существует алгоритм, её вычисляющий.

Утверждение. *Множество частичных вычислимых функций не более, чем счётно.*

Доказательство. Действительно, всякой вычислимой функции можно поставить в соответствие некоторый алгоритм, причём различные функции вычисляются различными алгоритмами. Алгоритм — это программа, то есть конечная строка. Конечных строк (а следовательно, алгоритмов) всего лишь счётное число. Существует инъекция из множества вычислимых функций в множество алгоритмов, значит, количество вычислимых функций не более, чем счётно. □

Теорема. *Существуют невычислимые функции* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Доказательство. Мощность множества вычислимых функций меньше мощности множества всех функций из $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, а значит, его дополнение не пусто. □

Определение. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется *разрешимым*, если существует алгоритм, вычисляющий его характеристическую функцию $\chi_A(x)$, то есть функцию такую, что

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется *перечислимым*, если существует алгоритм (не принимающий никаких входных данных), который выводит последовательность a_n такую, что множество всех элементов этой последовательности равно A.

Утверждение. *Множество перечислимых подмножеств* $\mathbb{N}$ *не более, чем счётно.*

Доказательство. Всякому перечислимому множеству соответствует алгоритм, его перечисляющий, причём различные множества перечисляются различными алгоритмами. Отсюда следует, что мощность множества перечислимых множеств не превосходит мощности множества алгоритмов, которое, в свою очередь, является счётным. □

Теорема. *Существуют неперечислимые множества* $A \subseteq \mathbb{N}$.

Доказательство. Множество перечислимых множеств имеет мощность меньшую, чем $2^{\mathbb{N}}$. Значит, его дополнение не пусто. □

2 Эквивалентные определения перечислимости: полуразрешимость, область определения вычислимой функции, множество значений вычислимой функции.

Определение. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется *полуразрешимым*, если существует алгоритм, вычисляющий его полухарактеристическую функцию $\xi_A(x)$, то есть функцию такую, что

$$\xi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ \text{не определено} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Множество A перечислимо.*
2. *Множество A полуразрешимо.*
3. *Существует частичная вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $A = \operatorname{Dom} f$.*
4. *Существует частичная вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $A = \operatorname{Ran} f$.*

Доказательство. Чтобы показать эквивалентность всех этих утверждений, докажем несколько импликаций.

(1) $\implies$ (2)

Множество A перечислимо, докажем его полуразрешимость.

Модифицируем алгоритм $\mathcal{A}$ перечисления множества A следующим образом: если для входа x при перечислении мы встретили x, вернём ответ 1, иначе продолжим работу, ничего не возвращая. Так как в последовательности, получаемой алгоритмом, рано или поздно встретится каждый из элементов A, положительный ответ будет дан за конечное число шагов. В случае, если $x \notin A$, алгоритм зациклится без вывода, что вполне устраивает нас в рамках нашей задачи.

(2) $\implies$ (3)

Множество A полуразрешимо, докажем, что найдётся вычислимая функция, для которой A — область значений.

Этой частичной вычислимой функцией был ~~Альберт Эйнштейн~~ $\xi_A(x)$. Действительно, знаем, что $\xi_A(x)$ вычислима, а $\operatorname{Dom} \xi_A = A$. Значит, мы нашли искомую функцию.

(3) $\implies$ (4)

Множество A является областью определения некоторой вычислимой функции f, докажем, что оно также является областью значений некоторой другой вычислимой функции.

Определим функцию $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \operatorname{Dom} f, \\ \text{не определено} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта функция вычислима. Алгоритм, её вычисляющий, должен попытаться вычислить $f(x)$ и затем просто вывести x. Кроме того, $\operatorname{Ran} g = \operatorname{Dom} f$, а значит, мы нашли искомую функцию.

(4) $\implies$ (1)

Множество A является областью значений некоторой вычислимой функции, докажем его перечислимость.

Известно, что существует алгоритм $\mathcal{F}$, вычисляющий функцию f, область значений которой совпадает с A. Чтобы перечислить элементы множества A, будем бесконечно производить итерации следующего вида: на n-той итерации запустим по очереди на n шагов $\mathcal{F}(i)$ для каждого $0 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, для всех i алгоритм $\mathcal{F}(i)$ будет рано или поздно запущен на число шагов, необходимое для завершения. Значит, на всех x из $\operatorname{Dom} f$ мы вычислим (и выведем) $f(x)$. Таким образом будут выведены все элементы $\operatorname{Ran} f$, равного A.

Из каждого утверждения следуют все остальные. Значит, утверждения эквивалентны. □

3 Теорема Поста. Теорема о графике.

Теорема Поста. Если множества A и $\mathbb{N} \setminus A$ перечислимы, то A разрешимо.

Доказательство. Перечислимость множества эквивалентна его полуразрешимости. Будем использовать алгоритмы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, вычисляющие $\xi_A(x)$ и $\xi_{\mathbb{N}\setminus A}(x)$ соответственно.

Алгоритм $\mathcal{C}$, находящий $\chi_A(x)$, будет по очереди запускать $\mathcal{A}(x)$ и $\mathcal{B}(x)$ на некоторое число шагов. Как только один из этих алгоритмов завершится, можно будет дать ответ: если $x \in A$, вернуть 1, в противном случае вернуть 0.

Докажем корректность построенного алгоритма. Во-первых, он действительно даёт правильный ответ на всех $x \in \mathbb{N}$, а во-вторых, всегда завершается, так как всякое натуральное число лежит либо в множестве A, либо в его дополнении. Оба вспомогательных алгоритма могут при необходимости отработать бесконечное число шагов, значит, если какой-то из них завершается на данном входе, он завершится. □

Определение. Пусть задана функция f. Множество $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}$ называется *графиком* функции f.

Теорема о графике. Функция f вычислима тогда и только тогда, когда Γ_f перечислимо.

Доказательство.

$\Longrightarrow$

Умея вычислять функцию f, хотим перечислить Γ_f.

Будем бесконечно производить итерации следующего вида: на n-той итерации попытаемся вычислить $f(x)$ для всех $0 \leqslant x \leqslant n$ не более, чем за n шагов. Если удастся, выведем пару $(x, f(x))$ в противном случае остановим вычисление $f(x)$ и перейдём к следующему i. Для каждого $x \in \operatorname{Dom} f$ рано или поздно мы произведём достаточное число шагов, чтобы вычислить $f(x)$, так как алгоритм, вычисляющий $f(x)$, должен завершаться за конечное число шагов. Значит, Γ_f таким образом действительно будет перечислено.

$\Longleftarrow$

Умея перечислять Γ_f, хотим вычислить $f(x)$.

Будем перечислять Γ_f, пока не найдём пару, в которой первый элемент равен x. Действительно, если функция определена на x, то такая пара найдётся в Γ_f, а значит, будет выведена алгоритмом его перечисления за конечное число шагов. Далее просто выведем второй элемент этой пары и завершим работу.

□

4 Универсальные вычислимые функции (нумерации) для семейства частичных вычислимых функций натурального аргумента. Несуществование универсальной вычислимой функции для семейства тотальных вычислимых функций натурального аргумента (диагональное рассуждение). Главные универсальные функции.

5 Вычислимая функция, не имеющая тотального вычислимого продолжения. Перечислимое неразрешимое множество. Неразрешимость проблемы применимости.

6 Теорема Поста. Существование перечислимого множества, дополнение которого неперечислимо. Перечислимые неотделимые множества.

7 Сводимости: m-сводимость и Тьюрингова сводимость. Свойства. Полные перечислимые множества.

8 Теорема Клини о неподвижной точке.

9 Теорема Райса-Успенского.