Прикладная линейная алгебра

Домашняя контрольная работа 1

Поздняков Виталий, Вариант 18

---

1. Найдите сингулярное разложение для

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 0 \\ -3 & -7 & -6 \\ 3 & 7 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

Решение

$$A_{4\times 3} = Q_{4\times 4}\Sigma_{4\times 3}R^*_{3\times 3}$$

In [1]:

```
import numpy as np
```

In [2]:

```
A = np.array([[ 9,  5,  0],
              [-3, -7, -6],
              [ 3,  7,  6],
              [-3, -7, -6]])
A.T @ A
```

Out[2]:

```
array([[108, 108,  54],
       [108, 172, 126],
       [ 54, 126, 108]])
```

$$A^*A = \begin{pmatrix} 108 & 108 & 54 \\ 108 & 172 & 126 \\ 54 & 126 & 108 \end{pmatrix}$$

$$|A^*A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 108-\lambda & 108 & 54 \\ 108 & 172-\lambda & 126 \\ 54 & 126 & 108-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 388\lambda^2 - 18360\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \sigma_3 = \sqrt{0} = 0$$

$$\lambda_2 = 194 - 2\sqrt{4819} = 55.16 \qquad \sigma_2 = \sqrt{194 - 2\sqrt{4819}} = 7.43$$

$$\lambda_3 = 194 + 2\sqrt{4819} = 332.84 \qquad \sigma_1 = \sqrt{194 + 2\sqrt{4819}} = 18.24$$

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.24 & 0 & 0 \\ 0 & 7.43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In [3]:

```
lambda2 = 194 - 2 * (4819) ** (1/2)
sigma2 = lambda2 ** (1/2)
lambda3 = 194 + 2 * (4819) ** (1/2)
sigma1 = lambda3 ** (1/2)
Sigma = np.zeros([4, 3])
Sigma[0, 0] = sigma1
Sigma[1, 1] = sigma2
```

Найдем собственный вектор x_1 для σ_1 $(\lambda_3 = 332.84)$

In [4]:

```
# приведение матрицы к ступенчатому виду методом прямого хода Гаусса
def echelon(matrix):
    matrix = matrix.astype(float)
    shape = matrix.shape[0]
    for i in range(shape - 1):
        for j in range(i + 1, shape):
            matrix[j] = (
                matrix[j] - matrix[i] * matrix[j, i] / matrix[i, i])
    for i in range(shape - 1):
        if matrix[i, i] != 0:
            matrix[i] = matrix[i] * (1 / matrix[i, i])
    return matrix

# нормирование вектора
def normed(vector):
    norm = 0
    for x in vector:
        norm += x * x
    return vector / norm ** (1/2)
```

In [5]:

```
(A.T @ A - np.eye(3) * lambda3).round(2)
```

Out[5]:

```
array([[-224.84,  108.  ,   54.  ],
       [ 108.  , -160.84,  126.  ],
       [  54.  ,  126.  , -224.84]])
```

In [6]:

```
eq1 = echelon(A.T @ A - np.eye(3) * lambda3)
eq1.round(2)
```

Out[6]:

```
array([[ 1.  , -0.48, -0.24],
       [-0.  ,  1.  , -1.39],
       [ 0.  ,  0.  ,  0.  ]])
```

$$\begin{cases} v_1 - 0.48v_2 - 0.24v_3 = 0 \\ v_2 - 1.39v_3 = 0 \\ v_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0.48v_2 + 0.24v_3 \\ v_2 = 1.39v_3 \\ v_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0.48 \cdot 1.39v_3 + 0.24v_3 \\ v_2 = 1.39v_3 \\ v_3 = v_3 \end{cases}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.91 \\ 1.39 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем вектор x_1

In [7]:

```
x1 = np.array([-eq1[0, 1] * -eq1[1, 2] + -eq1[0, 2], -eq1[1, 2], 1])
x1 = normed(x1)
x1.round(2)
```

Out[7]:

```
array([0.47, 0.72, 0.51])
```

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.47 \\ 0.72 \\ 0.52 \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор x_2 для σ_2 ($\lambda_2 = 55.16$)

In [8]:

```
(A.T @ A - np.eye(3) * lambda2).round(2)
```

Out[8]:

```
array([[ 52.84, 108.  ,  54.  ],
       [108.  , 116.84, 126.  ],
       [ 54.  , 126.  ,  52.84]])
```

In [9]:

```
eq2 = echelon(A.T @ A - np.eye(3) * lambda2)
eq2.round(2)
```

Out[9]:

```
array([[ 1.  ,  2.04,  1.02],
       [-0.  ,  1.  , -0.15],
       [ 0.  ,  0.  ,  0.  ]])
```

$$\begin{cases} v_1 + 2.04v_2 + 1.02v_3 = 0 \\ v_2 - 0.15v_3 = 0 \\ v_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -2.04v_2 - 1.02v_3 \\ v_2 = 0.15v_3 \\ v_3 = v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = -2.04 \cdot 0.15v_3 - 1.02v_3 \\ v_2 = 0.15v_3 \\ v_3 = v_3 \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} -1.326 \\ 0.15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем вектор x_2

In [10]:

```
x2 = np.array([-eq2[0, 1] * -eq2[1, 2] + -eq2[0, 2], -eq2[1, 2], 1])
x2 = normed(np.array([-1.326, 0.15, 1]))
x2.round(2)
```

Out[10]:

```
array([-0.8 ,  0.09,  0.6 ])
```

$$x_2 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.09 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор x_3 для σ_3 $(\lambda_1 = 0)$

In [11]:

```
A.T @ A
```

Out[11]:

```
array([[108, 108,  54],
       [108, 172, 126],
       [ 54, 126, 108]])
```

In [12]:

```
eq3 = echelon(A.T @ A)
eq3
```

Out[12]:

```
array([[1.    , 1.    , 0.5   ],
       [0.    , 1.    , 1.125],
       [0.    , 0.    , 0.    ]])
```

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + 0.5v_3 = 0 \\ v_2 + 1.125v_3 = 0 \\ v_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -v_2 - 0.5v_3 \\ v_2 = -1.125v_3 \\ v_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1.125v_3 - 0.5v_3 \\ v_2 = -1.125v_3 \\ v_3 = v_3 \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0.625 \\ -1.125 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем вектор x_3

In [13]:

```
x3 = np.array([-eq3[0, 1] * -eq3[1, 2] + -eq3[0, 2], -eq3[1, 2], 1])
x3 = normed(x3)
x3.round(2)
```

Out[13]:

```
array([ 0.38, -0.69,  0.61])
```

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0.38 \\ -0.69 \\ 0.61 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0.47 & -0.8 & 0.38 \\ 0.72 & 0.09 & -0.69 \\ 0.52 & 0.6 & 0.61 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу Q

In [14]:

```
q1 = A @ x1 / sigma1
q1.round(2)
```

Out[14]:

```
array([ 0.43, -0.52,  0.52, -0.52])
```

$$q_1 = \frac{Ax_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0.43 \\ -0.52 \\ 0.52 \\ -0.52 \end{pmatrix}$$

In [15]:

```
q2 = A @ x2 / sigma2
q2.round(2)
```

Out[15]:

```
array([-0.9 , -0.25,  0.25, -0.25])
```

$$q_2 = \frac{Ax_2}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} -0.9 \\ -0.25 \\ 0.25 \\ -0.25 \end{pmatrix}$$

Для нахождения q_3 и q_4 применим алгоритм Грама-Шмидта. Добавим линейно независимые векторы, чтобы получить произвольный базис. Пусть $q_3' = (0, 0, 0, 1)$ и $q_4' = (0, 0, 1, 0)$

In [16]:

```
q_3 = np.array([0, 0, 0, 1])
q_4 = np.array([0, 0, 1, 0])
q3 = normed(q_3 - q1 @ q_3 * q1 - q2 @ q_3 * q2)
q4 = normed(q_4 - q1 @ q_4 * q1 - q2 @ q_4 * q2 - q3 @ q_4 * q3)
Q = np.array([q1, q2, q3, q4]).T
Q.round(2)
```

Out[16]:

```
array([[ 0.43, -0.9 , -0.  ,  0.  ],
       [-0.52, -0.25, -0.41,  0.71],
       [ 0.52,  0.25,  0.41,  0.71],
       [-0.52, -0.25,  0.82,  0.  ]])
```

Ответ:

$$Q\Sigma R^* = \begin{pmatrix} 0.43 & -0.9 & 0 & 0 \\ -0.52 & -0.25 & -0.41 & 0.71 \\ 0.52 & 0.25 & 0.41 & 0.71 \\ -0.52 & -0.25 & 0.82 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18.24 & 0 & 0 \\ 0 & 7.43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.47 & 0.72 & 0.52 \\ -0.8 & 0.09 & 0.6 \\ 0.38 & -0.69 & 0.61 \end{pmatrix}$$

Проверим

In [17]:

```
np.set_printoptions(suppress=True)
Q @ Sigma @ np.array([x1, x2, x3])
```

Out[17]:

```
array([[ 8.99032942,  5.00105181, -0.00282735],
       [-2.9954151 , -7.00053018, -6.00622383],
       [ 2.9954151 ,  7.00053018,  6.00622383],
       [-2.9954151 , -7.00053018, -6.00622383]])
```

Ответ верный с точностью до 1 знака после запятой

2. Найдите какое-нибудь разложение полного ранга и псевдообратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ -1 & -4 & -1 \\ 5 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение

Найдем B и C такие, чтобы $A = BC$

Приведем матрицу A к каноническому виду методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ -1 & -4 & -1 \\ 5 & 14 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{pmatrix} = C$$

$rkA = 2$, значит первые 2 столбца из матрицы A — это матрица B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ -1 & -4 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Проверим

In [18]:

```
B = np.array([[1, 2],
              [3, 8],
              [-1, -4],
              [5, 14]])
C = np.array([[1, 0, 3],
              [0, 1, -0.5]])
B @ C
```

Out[18]:

```
array([[ 1.,  2.,  2.],
       [ 3.,  8.,  5.],
       [-1., -4., -1.],
       [ 5., 14.,  8.]])
```

Ответ верный

Найдем псевдообратную матрицу $A^+ = C^+B^+$

Найдем B^+. $rkB = 2$ полный столбцовый ранг, значит

In [19]:

```
B_plus = np.linalg.inv(B.T @ B) @ B.T
B_plus
```

Out[19]:

```
array([[ 1.  ,  0.5 ,  1.5 , -0.  ],
       [-0.35, -0.15, -0.55,  0.05]])
```

$$B^+ = (B^* B)^{-1} B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 0 \\ -0.35 & -0.15 & -0.55 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Найдем C^+. $rkC = 2$ полный строчный ранг, значит

In [20]:

```
C_plus = C.T @ np.linalg.inv(C @ C.T)
C_plus.round(2)
```

Out[20]:

```
array([[ 0.12,  0.15],
       [ 0.15,  0.98],
       [ 0.29, -0.05]])
```

$$C^+ = C^*(CC^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.15 \\ 0.15 & 0.98 \\ 0.29 & -0.05 \end{pmatrix}$$

In [21]:

```
A_plus = C_plus @ B_plus
A_plus.round(2)
```

Out[21]:

```
array([[ 0.07,  0.04,  0.1 ,  0.01],
       [-0.2 , -0.07, -0.32,  0.05],
       [ 0.31,  0.15,  0.47, -0.  ]])
```

Ответ:

$$A^+ = C^+ B^+ = \begin{pmatrix} 0.07 & 0.04 & 0.1 & 0.01 \\ -0.2 & -0.07 & -0.32 & 0.05 \\ 0.31 & 0.15 & 0.47 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим

In [22]:

```
A = np.array([[1, 2, 2],
              [3, 8, 5],
              [-1, -4, -1],
              [5, 14, 8]])
A @ A_plus @ A
```

Out[22]:

```
array([[ 1.,  2.,  2.],
       [ 3.,  8.,  5.],
       [-1., -4., -1.],
       [ 5., 14.,  8.]])
```

Ответ верный

3. Среди всех приближений решения следующей системы по методу наименьших квадратов найдите вектор наименьшей длины.

$$\begin{cases} 4 \cdot x + 14 \cdot y + 2 \cdot z - 6 \cdot t = 4 \\ 3 \cdot x + 8 \cdot y + 5 \cdot z + 1 \cdot t = 1 \\ 2 \cdot x + 1 \cdot y + 5 \cdot z + 5 \cdot t = 3 \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y + 8 \cdot z + 8 \cdot t = 9 \end{cases}$$

Решение

В матричном виде: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 2 & -6 \\ 3 & 8 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Решение будем искать в виде $\tilde{X} = A^+ B$, где $A^+ = (A^* A)^{-1} A^*$

In [23]:

```
A = np.array([[4, 14, 2, -6],
              [3, 8, 5, 1],
              [2, 1, 5, 5],
              [2, 2, 8, 8]])
A_plus = np.linalg.inv(A.T @ A) @ A.T
A_plus.round(2)
```

Out[23]:

```
array([[ 0.25, -0.06,  1.4 , -0.38],
       [-0.01,  0.03, -0.34,  0.09],
       [-0.06,  0.06, -0.28,  0.19],
       [-0.02,  0.  ,  0.03,  0.03]])
```

In [24]:

```
B = np.array([4, 1, 3, 9])
(A_plus @ B).round(2)
```

Out[24]:

```
array([ 1.78, -0.2 ,  0.66,  0.28])
```

Ответ:

$$\begin{cases} x = 1.78 \\ y = -0.2 \\ z = 0.66 \\ t = 0.28 \end{cases}$$

4. Для многочлена $-2x^3 + 3x^2 - 5x - 5$ найдите наилучшее равномерное приближение многочленом второй степени на отрезке $[-2, 4]$.

Решение

По теореме Чебышева

$$\| f(x) - P_{n-1}(x) \|_\infty \to \min_{x \in [a,b]}$$

при

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \bar{T}_n(x) \Rightarrow P_{n-1}(x) = f(x) - \bar{T}_n(x)$$

где

$$\bar{T}_n(x) = \frac{\alpha(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

и α — старший коэффициент в многочлене $f(x)$

Для нашей задачи имеем

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 5x - 5$$
$$n = 3$$
$$a = -2, b = 4$$
$$\alpha = -2$$

Тогда

$$\bar{T}_3(x) = -2\frac{(4+2)^3}{2^{2\cdot 3-1}} T_3\left(\frac{2x-(4-2)}{4+2}\right) = -2\frac{6^3}{2^5} T_3\left(\frac{2x-2}{6}\right)$$

Многочлен Чебышева 3 степени:

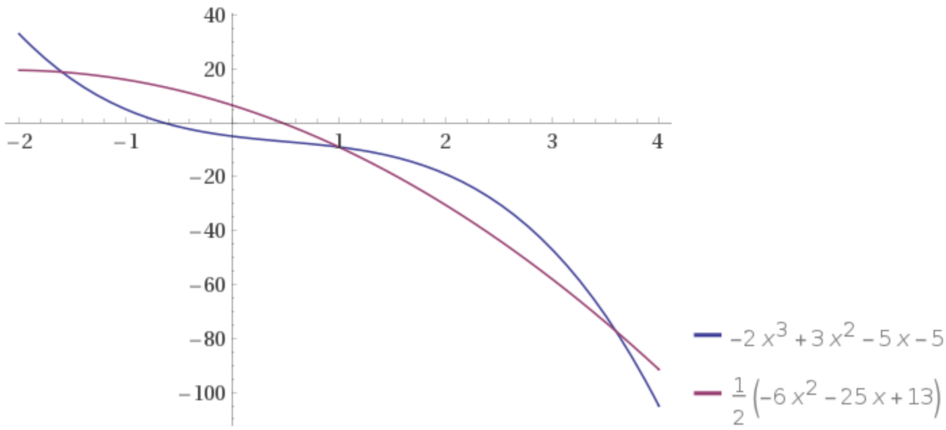
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \Rightarrow T_3\left(\frac{2x-2}{6}\right) = 4\left(\frac{2x-2}{6}\right)^3 - 3\left(\frac{2x-2}{6}\right)$$

$$T_3\left(\frac{2x-2}{6}\right) = 4\left(\frac{8x^3-24x^2+24x-8}{6^3}\right) - 3\left(\frac{2x-2}{6}\right)$$
$$T_3\left(\frac{2x-2}{6}\right) = \frac{8x^3-24x^2+24x-8}{54} - \frac{2x-2}{2}$$
$$T_3\left(\frac{2x-2}{6}\right) = \frac{8x^3-24x^2+24x-8-54x+54}{54}$$
$$T_3\left(\frac{2x-2}{6}\right) = \frac{8x^3-24x^2-30x+46}{54}$$

$$\bar{T}_3(x) = -2\frac{6^3}{2^5}\cdot\frac{8x^3-24x^2-30x+46}{54} = -2\frac{8x^3-24x^2-30x+46}{8}$$
$$\bar{T}_3(x) = -2\left(x^3-3x^2-\frac{15}{4}x+\frac{23}{4}\right) = -2x^3+6x^2+\frac{15}{2}x-\frac{23}{2}$$
$$P_2(x) = -2x^3+3x^2-5x-5+2x^3-6x^2-\frac{15}{2}x+\frac{23}{2}$$

Ответ:

$$P_2(x) = -3x^2-\frac{25}{2}x+\frac{13}{2}$$



5. При каком q уравнение $-2qxz+x^2+xy(1-2q)+y^2(4q+1)-yz+z^2(4q+1)=1$ задает единичную окружность относительно какой-то нормы? Найдите норму вектора $(1,1,1)$ в зависимости от q.

Решение

Построим матрицу квадратичной формы

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-2q}{2} & -q \\ \frac{1-2q}{2} & 4q+1 & -\frac{1}{2} \\ -q & -\frac{1}{2} & 4q+1 \end{pmatrix}$$

Найдем значения q, при которых квадратичная форма положительно определена

$\Delta_1 = 1 > 0$ при любых q

$\Delta_2 = -x^2 + 5x + \frac{3}{4} > 0$ при $q \in [-0.15, 5.14]$ (приближенно)

$\Delta_3 = -8x^3 + 17x^2 + \frac{17}{2}x + \frac{1}{2} > 0$ при $q \in [-\infty, -0.36] \cup [-0.07, 2.55]$ (приближенно)

Таким образом, квадратичная форма положительно определена и уравнение задает единичную окружность относительно нормы при $q \in [-0.07, 2.55]$

Рассмотрим отрезок OA с точками $O = (0,0,0)$ и $A = (1,1,1)$ на плоскости $z = ax + by + c$

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \\ 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая $(a = 1 \wedge b = 0)$ и $(a = 0 \wedge b = 1)$. Подставим полученные коэффициенты в уравнение плоскости, тогда прямая будет определяться плоскостями $z = y$ и $z = x$. Найдем точку пересечения этих плоскостей и эллипсоида:

$$\begin{cases} z = x \\ z = y \\ -2qxz + x^2 + xy(1-2q) + y^2(4q+1) - yz + z^2(4q+1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{gathered} -2qz^2 + z^2 + z^2(1-2q) + z^2(4q+1) - z^2 + z^2(4q+1) = 1 \\ z^2(-2q + 1 + 1 - 2q + 4q + 1 - 1 + 4q + 1) = 1 \\ z^2(3+4q) = 1 \\ z^2 = \frac{1}{3+4q} \\ z = x = y = \pm\sqrt{\frac{1}{3+4q}} \end{gathered}$$

Точка пересечения с OA должна иметь координаты > 0, значит

$$B = \left(\sqrt{\frac{1}{3+4q}}, \sqrt{\frac{1}{3+4q}}, \sqrt{\frac{1}{3+4q}}\right)$$

Пусть $v = (1,1,1)$, тогда норма вектора v:

$$\nu(v) = \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{3}{3+4q}}} = \sqrt{3+4q}$$

Ответ:

Уравнение задает единичную окружность относительно нормы при $q \in [-0.07, 2.55]$ (приближенно). Норма вектора $(1,1,1)$ равняется $\sqrt{3+4q}$.