



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# Квадратичная оптимизация в задаче прогнозирования SUT таблиц

Поздняков Виталий, Рог Алексей

Декабрь 2019

	Отрасль 1	Отрасль 2	...	Отрасль N
Продукция 1	...	...	...	...
Продукция 2	...	...	...	...
...	...	...	...	...
Продукция N	...	...	...	...

- SUT (Supply and Use tables) — таблицы "затраты-выпуск"
- Supply Table — таблица **ресурсов** показывает сколько продукции было **реализовано** каждой отраслью в стране за год
- Use table — таблица **использования** показывает сколько продукции было **потреблено** каждой отраслью в стране за год

	Сбор и переработка отходов	Строительство	Оптовая торговля
Таблица ресурсов			
Неметаллические минералы	84	19	95
Основные металлы	388	0	80
Металлоконструкции	0	950	122
Строительные работы	2	84100	73
Таблица использования			
Неметаллические минералы	6	4128	0
Основные металлы	56	944	0
Металлоконструкции	41	5033	16
Строительные работы	41	22250	216

Нидерланды, 2010 год, фрагмент

- Полное исследование требует финансовых и временных затрат, поэтому обычно проводится раз в 5 лет
- Требуется спрогнозировать SUT по историческим и сводным данным
- Исторические данные — это SUT прошлых лет
- Сводные данные:
  - Итоговой объем продукции для каждой отрасли
  - Итоговой объем продукции для каждого вида продукции

- $A_{m \times n}$  — матрица за прошлый год
- $X_{m \times n}^{true}$  — искомая поставок за текущий год
- Сводные данные за текущий год:
  - Вектор  $u = X^{true} \mathbf{1}$  содержит сумму для  $1, 2, \dots, m$  строки, где  $\mathbf{1}$  — вектор единиц
  - Вектор  $v = (X^{true})^T \mathbf{1}$  содержит сумму для  $1, 2, \dots, m$  колонки
- Требуется построить такую матрицу  $X$ , чтобы расстояние  $f(X)$  до матрицы  $A$  было минимальным при ограничениях:

$$\begin{cases} X \mathbf{1} = u \\ X^T \mathbf{1} = v \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} = 0 \forall i, j : a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Пусть матрица  $A$  имеет вид:

84	19	95	<b>198</b>
388	0	80	<b>468</b>
0	950	122	<b>1072</b>
2	84100	73	<b>84175</b>
<b>474</b>	<b>85069</b>	<b>370</b>	<b>Сумма</b>

Требуется построить матрицу  $X$  с ограничениями на сумму по строкам и столбцам:

?	?	?	<b>185</b>
?	?	?	<b>495</b>
?	?	?	<b>968</b>
?	?	?	<b>88008</b>
<b>473</b>	<b>88748</b>	<b>435</b>	<b>Сумма</b>

$$f(X) \rightarrow \min(\max)$$

$$g_i(X) \begin{bmatrix} = \\ \geq \\ \leq \end{bmatrix} 0, i = 1, 2, \dots, m$$

- Метод замены переменных
- Метод штрафных функций
- Метод множителей Лагранжа
- Релаксационный метод

В целевой функции выполняем замену

$$x_i = \phi(z)$$

таким образом, чтобы безусловный экстремум новой функции совпадал с условным экстремумом целевой функции.

Например

$$f(x) = x^2 \rightarrow \min$$

$$x \geq 1$$

Выполним замену

$$x = 1 + z^2$$

Получаем

$$(1 + z^2)^2 \rightarrow \min$$



В целевую функцию добавляем штрафную функцию, которая очень быстро растет (убывает) при нарушении ограничений. Например

$$f(x) = x^2 \rightarrow \min$$
$$x \geq 1$$

Добавим штрафную функцию

$$h(x) = (\min\{x - 1, 0\})^2$$

Тогда задача условной оптимизации сводится к безусловной

$$x^2 + M \cdot h(x) \rightarrow \min$$

где  $M > 0$  — выбранная константа.

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$f(X) \rightarrow \min$$

При ограничениях

$$g_1(X) = 0$$

...

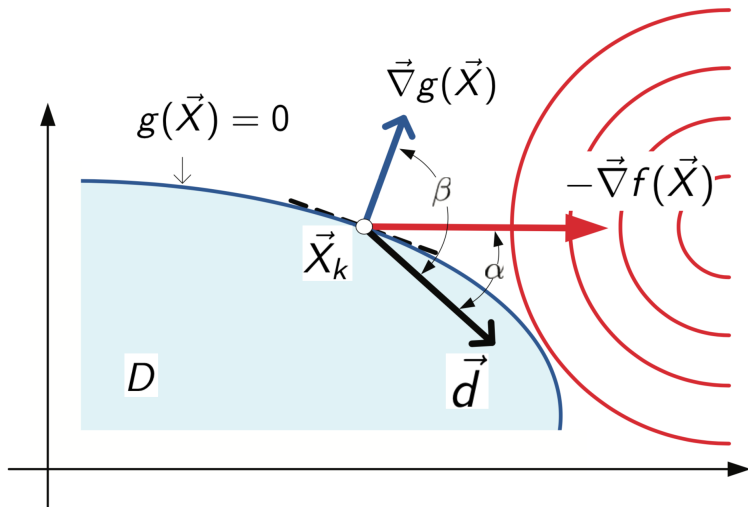
$$g_k(X) = 0$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(X, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(X) + \lambda_1 g_1(X) + \dots + \lambda_k g_k(X)$$

Решаем систему уравнений

$$\nabla \mathcal{L}(X, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = 0$$



Возможные и прогрессивные направления



- Метод проектирования градиента (релаксационный)
- Статья "Projection of Supply and Use tables: methods and their empirical assessment" (Temurshoev, Yamano, Webb, 2010):
  - Improved squared differences (ISD)
  - **Improved normalized squared differences (INSD)**
  - Improved weighted squared differences (IWSD)
  - RAS

Сделаем замену

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{a_{ij}}$$

Решаем оптимизационную задачу

$$f(Z) = \sum_i \sum_j |a_{ij}| (z_{ij} - 1)^2 \rightarrow \min$$

При ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij} z_{ij} &= u_i \\ \sum_i a_{ij} z_{ij} &= v_j \\ a_{ij} z_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

Запишем функцию Лагранжа ( $M$  — штрафной коэффициент)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Z, \lambda, \tau) = & \frac{1}{2} \sum_i \sum_j |a_{ij}| ((z_{ij} - 1)^2 + M(\min\{0, z_{ij}\})^2) \\ & + \sum_i \lambda_i \left( u_i - \sum_j a_{ij} z_{ij} \right) + \sum_j \tau_j \left( v_j - \sum_i a_{ij} z_{ij} \right)\end{aligned}$$

Требуется решить систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_{ij}} = 0 \\ \sum_j a_{ij} z_{ij} = u_i \\ \sum_i a_{ij} z_{ij} = v_j \end{cases}$$

Решение

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } a_{ij} = 0 \\ 1 + \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|(\lambda_i + \tau_i)} & \text{если } 1 + \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|(\lambda_i + \tau_i)} \geq 0 \\ \frac{1}{1+M} \left( 1 + \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|(\lambda_i + \tau_i)} \right) & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\sum_j |a_{ij}|} \left( u_i - \sum_j a_{ij} + \sum_j (M a_{ij} \min\{0, z_{ij}\} - \tau_j |a_{ij}|) \right)$$

$$\tau_j = \frac{1}{\sum_i |a_{ij}|} \left( v_i - \sum_i a_{ij} + \sum_i (M a_{ij} \min\{0, z_{ij}\} - \lambda_i |a_{ij}|) \right)$$

Применим итерационный алгоритм:

1. Инициализируем  $Z^{[0]} = (1)$ ,  $\lambda^{[0]} = (0)$ ,  $\tau^{[0]} = (0)$
2. Вычисляем новые  $\lambda^{[i]}, \tau^{[i]}$
3. Вычисляем новую матрицу  $Z^{[i]}$
4. Повторяем 2-3 до тех пор пока не выполнится условие

$$\begin{cases} \lambda^{[i]} - \lambda^{[i-1]} < \epsilon_\lambda \\ \tau^{[j]} - \tau^{[j-1]} < \epsilon_\tau \end{cases}$$

5. Выполняем обратную замену  $x_{ij} = z_{ij}a_{ij}$



Запишем матрицу  $X_{m \times n}$  в виде вектора

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})^T$$

Выполним замену переменных

$$z_i = \frac{x_i}{a_i} - 1$$

Решаем задачу квадратичной оптимизации

$$f(Z) = z^T \cdot A^* \cdot z \rightarrow \min$$

$$A^{**}z = b$$

$$f(Z) = z^T \cdot A^* \cdot z \rightarrow \min$$

$$A^{**}z = b$$

На примере матрицы  $A_{2 \times 2}$ :

$$A^* = \begin{bmatrix} |a_{11}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a_{12}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |a_{21}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |a_{22}| \end{bmatrix}; A^{**} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$b = [u_1 \quad u_2 \quad v_1 \quad v_2]^T - A^{**} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

Переобозначим для краткости  $A^{**} := A$ .

Решение находится итерационно с начальной точкой

$$Az_0 = b \Rightarrow z_0 = A^+b$$

$$z_{i+1} = z_i + t_i D_i$$

где  $D_i$  — направление шага,  $t_i$  - длина шага

$$D = -P \nabla f(Z) = -P \begin{pmatrix} 2 \cdot |a_{11}| \cdot z_{11} \\ \dots \\ 2 \cdot |a_{mn}| \cdot z_{mn} \end{pmatrix}$$

$$P = I - A^T(AA^T)^{-1}A = I - A^+A$$

Имеем исходную матрицу  $A$ :

84	19	95	198
388	0	80	468
0	950	122	1 072
2	84 100	73	84 175
<b>474</b>	<b>85 069</b>	<b>370</b>	

Если установить  $M = 100$ ,  $\epsilon_\lambda = \epsilon_\tau = 10^{-8}$ , то за 95 итерации матрица  $X$  примет вид:

72	14	99	185
398	0	97	495
0	826	142	968
2	87 908	98	88 008
<b>473</b>	<b>88 748</b>	<b>435</b>	

## 1. Improved squared differences

$$f(Z) = \sum_i \sum_j a_{ij}^2 (z_{ij} - 1)^2$$

## 2. Improved weighted squared differences

$$f(Z) = \sum_i \sum_j |a_{ij}^3| (z_{ij} - 1)^2$$

## 3. RAS

$$f(Z) = \sum_i \sum_j |a_{ij}| \left( z_{ij} \ln \left( \frac{z_{ij}}{e} \right) + 1 \right)$$

- SUT за 2010, 2011, 2012 годы (Нидерланды)  
6 матриц 64x64  
Источник: World Input-Output Database  
(<http://www.wiod.org/>)
  - Первый сценарий:  $2010 \Rightarrow 2011$
  - Второй сценарий:  $(2010 \Rightarrow 2011) \Rightarrow 2012$
- SUT за 2012, 2013 годы (Россия)  
4 матрицы 62x59  
Источник: Росстат
  - Третий сценарий:  $2012 \Rightarrow 2013$

NACE		A01	A02	A03	B	C10-C12	C13-C15	C16	C17
	Description	Crop and animal production, hunting and	Forestry and logging	Fishing and aquaculture	Mining and quarrying	Manufacture of food products, beverages and	Manufacture of textiles, wearing apparel and	Manufacture of wood and of products of wood	Manufacture of paper and paper products
CPA									
CPA_A01	Products of agriculture, hunting and related	25 470	0	0	0	19	0	0	0
CPA_A02	Products of forestry, logging and related ser	0	144	0	0	0	0	0	0
CPA_A03	Fish and other fishing products; aquaculture	0	0	231	0	0	0	0	0
CPA_B	Mining and quarrying	0	0	0	21 715	0	0	0	0
CPA_C10-C12	Food products, beverages and tobacco prod	78	0	277	1	55 351	6	0	0
CPA_C13-C15	Textiles, wearing apparel and leather produc	0	0	0	0	0	3 132	7	17
CPA_C16	Wood and of products of wood and cork, ex	0	0	0	0	0	2	2 308	0
CPA_C17	Paper and paper products	0	0	0	0	0	9	3	5 713
CPA_C18	Printing and recording services	0	0	0	0	0	5	0	25
CPA_C19	Coke and refined petroleum products	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C20	Chemicals and chemical products	1	0	0	68	214	2	2	0
CPA_C21	Basic pharmaceutical products and pharm	0	0	0	0	4	0	0	0
CPA_C22	Rubber and plastics products	0	0	0	0	0	21	55	48
CPA_C23	Other non-metallic mineral products	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C24	Basic metals	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C25	Fabricated metal products, except machin	0	0	0	0	32	26	42	1
CPA_C26	Computer, electronic and optical products	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C27	Electrical equipment	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C28	Machinery and equipment n.e.c.	0	0	0	0	18	0	3	3
CPA_C29	Motor vehicles, trailers and semi-trailers	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C30	Other transport equipment	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C31_C32	Furniture; other manufactured goods	0	0	0	0	0	43	54	0
CPA_C33	Repair and installation services of machin	157	0	0	1	8	10	86	1
CPA_C35	Electricity, gas, steam and air-conditioning	544	0	0	419	0	0	0	0
CPA_E36	Natural water; water treatment and supply s	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_E37-E39	Sewerage; waste collection, treatment and c	0	0	0	1	2	24	5	52
CPA_F	Constructions and construction works	120	0	0	0	3	0	0	0
CPA_G45	Wholesale and retail trade and repair serv	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_G46	Wholesale trade services, except of motor v	144	0	0	89	1 434	176	81	69
CPA_G47	Retail trade services, except of motor vehi	0	0	0	0	0	0	0	0

- Mean absolute percentage error

$$MAPE = \frac{1}{nm} \sum_i \sum_j \frac{|x_{ij} - x_{ij}^{true}|}{|x_{ij}^{true}|} \cdot 100$$

- Weighted absolute percentage error

$$WAPE = \sum_i \sum_j \left( \frac{|x_{ij}^{true}|}{\sum_k \sum_l x_{kl}^{true}} \right) \frac{|x_{ij} - x_{ij}^{true}|}{|x_{ij}^{true}|} \cdot 100$$

- Standardized weighted absolute difference

$$SWAD = \frac{\sum_i \sum_j |x_{ij}^{true}| \cdot |x_{ij} - x_{ij}^{true}|}{\sum_k \sum_l (x_{kl}^{true})^2}$$



M = 0      Supply 2010  $\Rightarrow$  2011

	IWSD	INSD	ISD	RAS
MAPE	852.87	7.58	191.20	81.94
WAPE	16.03	1.70	10.94	5.83
SWAD	0.05	0.00	0.05	0.05

M =  $10^5$       Supply 2010  $\Rightarrow$  2011

	IWSD	INSD	ISD	RAS
MAPE	319.21	7.58	157.43	81.94
WAPE	13.68	1.70	10.66	5.83
SWAD	0.05	0.00	0.05	0.05

Supply 2010  $\Rightarrow$  2011

	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad
MAPE	319.21	7.58	157.43	81.94	7.14
WAPE	13.68	1.70	10.66	5.83	1.67
SWAD	0.052	0.004	0.046	0.049	0.003

Use 2010  $\Rightarrow$  2011

	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad
MAPE	331.94	11.99	156.98	33.43	10.96
WAPE	21.39	5.01	17.10	9.52	6.07
SWAD	0.134	0.022	0.125	0.076	0.033

Supply (2010  $\Rightarrow$  2011)  $\Rightarrow$  2012

	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad
MAPE	337.66	9.76	253.14	83.09	9.19
WAPE	18.65	2.38	14.24	5.12	2.38
SWAD	0.070	0.005	0.059	0.038	0.004

Use (2010  $\Rightarrow$  2011)  $\Rightarrow$  2012

	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad
MAPE	369.60	14.59	245.09	32.90	13.16
WAPE	29.97	7.32	24.03	9.17	8.29
SWAD	0.186	0.033	0.175	0.075	0.052

## Supply 2012 $\Rightarrow$ 2013

	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad
MAPE	26898.99	183.51	7512.82	245.85	160.42
WAPE	18.21	1.86	15.35	9.91	1.92
SWAD	0.07	0.00	0.06	0.09	0.00
Time (sec)	303.64	64.31	4.06	5.41	0.58

## Use 2012 $\Rightarrow$ 2013

	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad
MAPE	31852.40	11.27	1715.71	25.86	12.80
WAPE	26.08	5.52	16.54	10.50	8.23
SWAD	0.10	0.03	0.09	0.10	0.06
Time (sec)	264.08	0.29	3.97	0.01	0.58