

Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
Югорский государственный университет

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5
по дисциплине «Методы оптимизации»

Выполнил

Студент группы 11626

_____ Панчишин И. Р.

«___» _____ 2019 г.

Принял

Доцент ИЦЭ

_____ Самарин В. А.

«___» _____ 2019 г.

Ханты-Мансийск, 2019

Цель

Научиться находить безусловные экстремумы функций нескольких переменных.

Задачи

1. Исследовать на максимум и минимум заданные функции.
2. Найти точки безусловного экстремума функции согласно варианту.

Ход работы

Исследуем на максимум и минимум следующие функции:

1. $f(x) = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + x_1 + x_2$

Поиск стационарных точек и проверка необходимого условия экстремума первого порядка (порядок условий определяется порядком используемых производных):

$$\begin{aligned}\nabla(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (-2x_1 - x_2 + 1, -x_1 - 2x_2 + 1) = 0 \\ \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} -2 + 4x_2 - x_2 + 1 = 0 \\ x_1 = 1 - 2x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} \\ x_1 = \frac{1}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Стационарная точка одна — $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Рассмотрим матрицу Гессе и проверим необходимое условие экстремума второго порядка:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -2 < 0$$

$$\Delta_2 = (-2 \cdot -2) - (-1 \cdot -1) = 3 > 0$$

Матрица является отрицательно определенной, т. е. $H(x^*) < 0$, поэтому максимумом является

$$f(x^*) = -\frac{1^2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1^2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ — максимум

$$2. f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$$

$$\nabla(f) = (3x_1^2 - 3x_2, 3x_2^2 - 3x_1) = 0$$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 = 0 \\ x_2^2 - x_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1(x_1^3 - 1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_{11} = 0 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 0 \\ x_{22} = 1 \end{cases}$$

$$H(f) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{bmatrix}$$

$$H(x_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Delta_1 = 0, \Delta_2 = -9$$

$$H(x_2^*) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Delta_1 = 6, \Delta_2 = 27$$

Ответ: $f(1, 1) = -1$ — минимум

$$3. f(x_1, x_2) = e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 + 2x_2)$$

$$\nabla(f) = (2e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 + 2x_2) + e^{2x_1}, e^{2x_1}(2x_2 + 2)) = 0$$

$$\begin{cases} e^{2x_1}(2(x_1 + x_2^2 + 2x_2) + 1) = 0 \\ e^{2x_1}(2x_2 + 2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} e^{2x_1} = 0 \\ x_1 + x_2^2 + 2x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_2 + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$H_{11} = 2e^{2x_1}(2(x_1 + x_2^2 + 2x_2) + 1) + 2e^{2x_1} = 4e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 + 2x_2 + 1)$$

$$H_{12} = 2e^{2x_1}(2x_2 + 2) = 4e^{2x_1}(x_2 + 1)$$

$$H_{22} = 2e^{2x_1}$$

$$H(f) = \begin{bmatrix} 4e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 + 2x_2 + 1) & 4e^{2x_1}(x_2 + 1) \\ H_{12} & 2e^{2x_1} \end{bmatrix}$$

$$H(x^*) = \begin{bmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{bmatrix} \Delta_1 = 2e, \Delta_2 = 4e^2$$

Ответ: $f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{e}{2}$ — минимум

$$4. f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$$

$$\nabla(f) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2) = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ -x_1 + 4x_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$H(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Delta_1 = 2, \Delta_2 = 3$$

Ответ: $f(0, 0) = 0$ — минимум

$$5. f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1$$

$$\nabla(f) = 0 \implies \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$H(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1$$

Ответ: $f(-2, -1) = -2$ — минимум

$$6. f(x_1, x_2) = 2 - \sqrt[3]{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\nabla(f) = \left(-\frac{2x_1}{3\sqrt[3]{(x_1^2 + x_2^2)^2}}, -\frac{2x_2}{3\sqrt[3]{(x_1^2 + x_2^2)^2}} \right) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$H_{11} = -\frac{2 \cdot 3(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{2}{3}} - 2x_1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{3}} 2x_1}{9(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \frac{8}{9}x_1^2(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{8x_1^2}{9(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{5}{3}}} - \frac{2}{3(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$H_{12} = -\frac{2x_1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right) (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{5}{3}} 2x_2 = \frac{8x_2x_1}{9(x_1^2 + x_2^2)^{5/3}}$$

$$H_{22} = \frac{8x_2^2}{9(x_1^2 + x_2^2)^{5/3}} - \frac{2}{3(x_1^2 + x_2^2)^{2/3}}$$

$$7. f(x_1, x_2) = x_1^3 - 2x_2^3 - 3x_1 + 6x_2$$

$$\nabla(f) = 0 \implies \begin{cases} 3x_1^2 - 3 = 0 \\ -6x_2^2 + 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1^2 - 1 = 0 \\ -x_2^2 + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = \pm 1 \end{cases}$$

$$H(f) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & -12x_2 \end{bmatrix}$$

$$H(1, 1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \Delta_1 = 6, \Delta_2 = -72$$

$$H(-1, 1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \Delta_1 = -6, \Delta_2 = 72$$

$$H(1, -1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \Delta_1 = 6, \Delta_2 = 72$$

$$H(-1, -1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \Delta_1 = -6, \Delta_2 = -72$$

Ответ: $f(1, -1) = -6$ — минимум, $f(-1, 1) = 6$ — максимум

$$8. f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)}(2x_1^2 + x_2^2)$$

$$\nabla_1(f) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)}(-2x_1)(2x_1^2 + x_2^2) + e^{-(x_1^2 + x_2^2)}4x_1 = 2x_1e^{-x_2^2}(-2x_1^2 - x_2^2 + 2)$$

Рассмотрим функцию $3x_1^2 - 3x_1x_2 + 1x_2^2 - 7x_1 - 7x_2$:

$$\nabla = (6x_1 - 3x_2 + 7, -3x_1 + 2x_2 - 7 = 0)$$

Стационарные точки:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 7 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 7 = 0 \end{cases} \cdot 2, 1 + 2 \implies \begin{cases} x_2 - 7 = 0 \\ x_1 = \frac{2x_2 - 7}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 7 \\ x_1 = \frac{7}{3} \approx 2.33 \end{cases}$$

Программный код для нахождения минимума функции представлен ниже. Чтобы ускорить поиск минимума, можно определить градиент рассматриваемой функции, иначе он будет вычисляться с помощью конечных разностей. Результат нахождения минимума представлен на Рис. 1. Контур рассматриваемой функции представлен на Рис. 2.

```

1  addpath('./code')
2
3  set(0, defaultaxesfontsize, 14)
4  set(0, defaulttextfontsize, 14)
5
6
7  % целевая функция
8  global C = [3 3 1 -7 -7]
9  global fu = @(x) C(1)*x(1)^2 - C(2)*x(1)*x(2) + C(3)*x(2)^2 - C(4)*x(1) + C(5)*x(2)
10 % область определения
11 X1 = X2 = linspace(-10, 10, 40);
12 [XX1, XX2] = meshgrid(X1, X2);
13
14 % значения
15 YY = [];
16 for i = 1:length(X1)
17     Y = [];
18     for j = 1:length(X2)
19         Y = [Y, fu([X1(i) X2(j)])];
20     end
21     YY = [YY; Y];
22 end
23
24 % вывод графика
25 mesh(XX1, XX2, YY);
26 hold on
27 xlabel("x1");
28 ylabel("x2");
29 zlabel("y");
30
31
32 % начальное приближение
33 x0 = [1, -2];
34 %[xmin, ymin] = fminunc(f, x0)
35
36 function [f, g] = fwithgrad(x)
37     global C;
38     global fu;
39     f = fu(x);
40
41     if nargin > 1
42         % градиент функции
43         g = [6*x(1) - 3*x(2) + 7;
44             -3*x(1) + 2*x(2) - 7];
45     end
46 end
47 options = optimset(GradObj, on);
48 [xmin, ymin] = fminunc(@fwithgrad, x0, options);
49
50 plot3(xmin(2), xmin(1), ymin, r., MarkerSize, 40);
51
52 figure
53
54 contour(XX1, XX2, YY, 20)

```

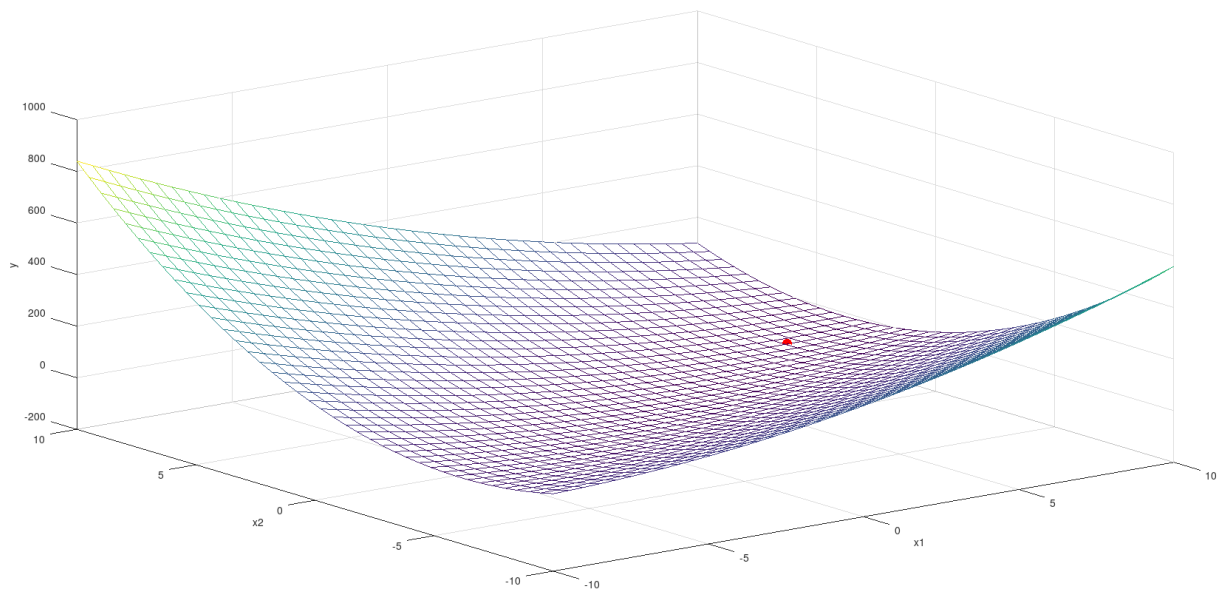


Рис. 1: Минимум функции

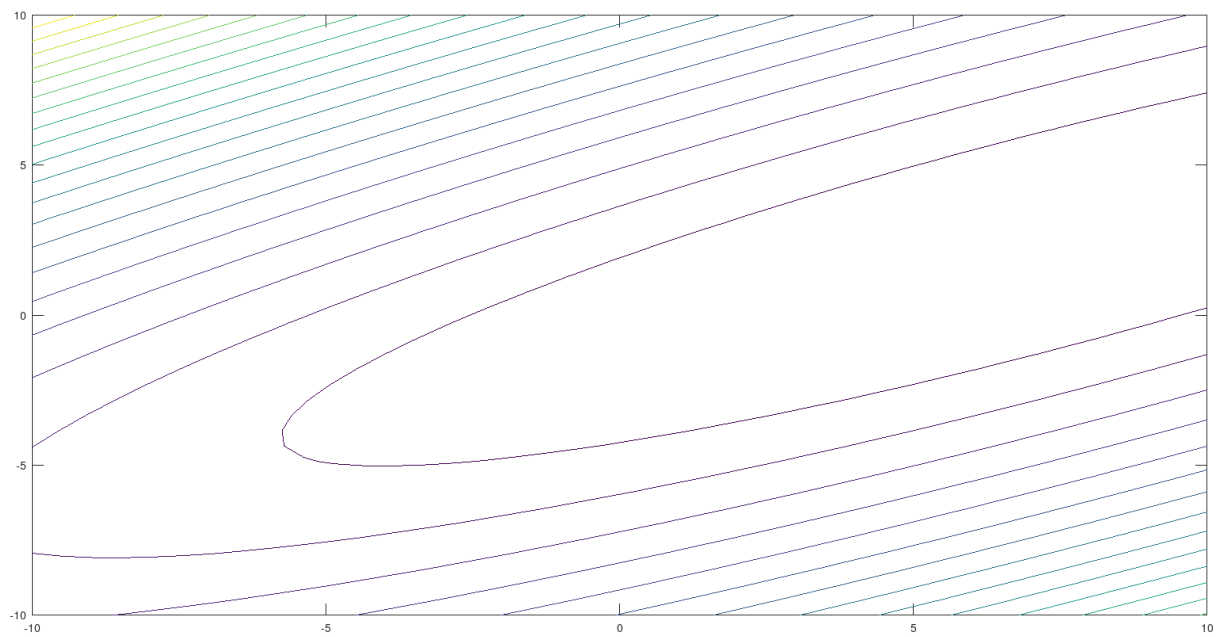


Рис. 2: Контур функции

Вывод

Научился находить безусловные экстремумы функций нескольких переменных, выполнил поставленные задачи аналитически и программно.