Министерство науки и высшего образования
Федеральное государтсвенное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Югорский государственный университет

Отчет о лабораторной работе №9
по дисциплине «Методы оптимизации»

Выполнил

Студент группы 1162б
________________ Панчишин И. Р.
«____» __________ 2019 г.

Принял

Доцент ИЦЭ
________________ Самарин В. А.
«____» __________ 2019 г.

Ханты-Мансийск, 2019

Цель

Изучить аналитические методы нахожения условного экстремума функции двух переменных.

Задачи

1. Найти условные экстремумы при ограничениях типа равенств заданных функций.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения заданных функций в замкнутой области.

Ход работы

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \; x_1 + x_2 = 2.$$

Графическое описание приведено на рисунке 1. Его можно использовать для проверки ответа. Рисунок содержит графцик целевой функции и ее сечение (график функции по точкам на прямой уравнения связи), спроецированное на ось x_1, а также без проекции. Чтобы избежать проекции сечения на ось x_1, координаты x_1 разделил на косинус угла наклона прямой.

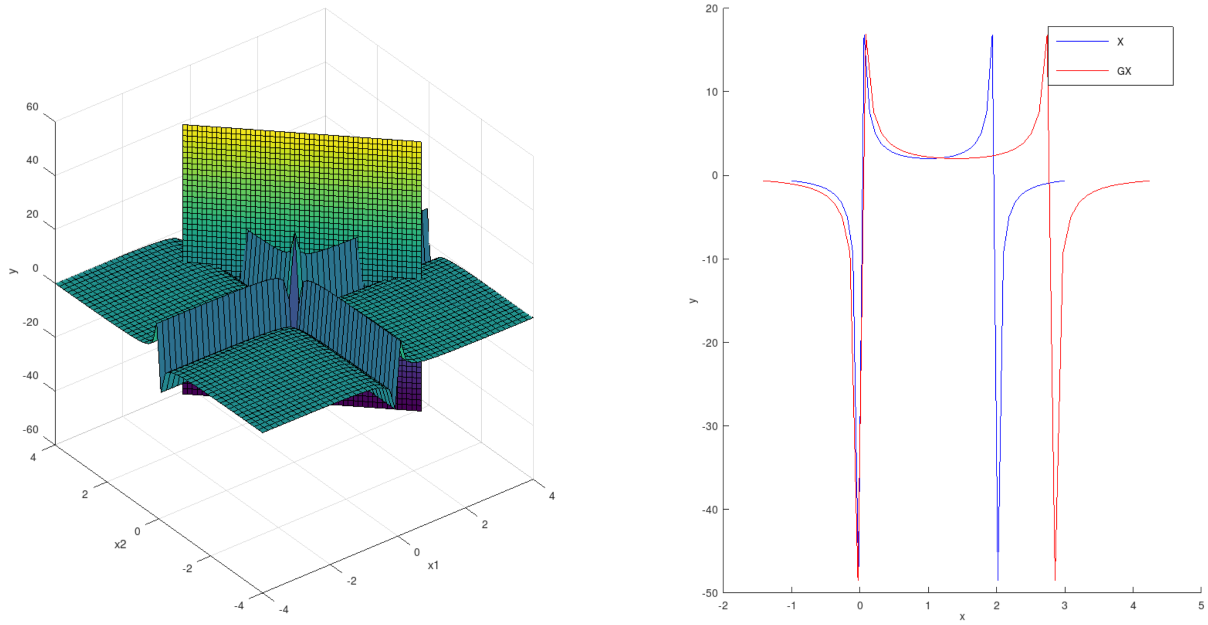


Рис. 1: Пример 1

Решим пример, выразив один из аргументов из уравнения связи:

$$x_2 = 2 - x_1 \implies f(x) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{2 - x_1} = \frac{2 - x_1 + x_1}{x_1(2 - x_1)} = \frac{2}{2x_1 - x_1^2}$$

Геометрически мы перешли к поиску экстремума на сечении функции плоскостью, которую образует уравнение связи. Сечение проецируется на ось x_1 как показано на рисунке 2.

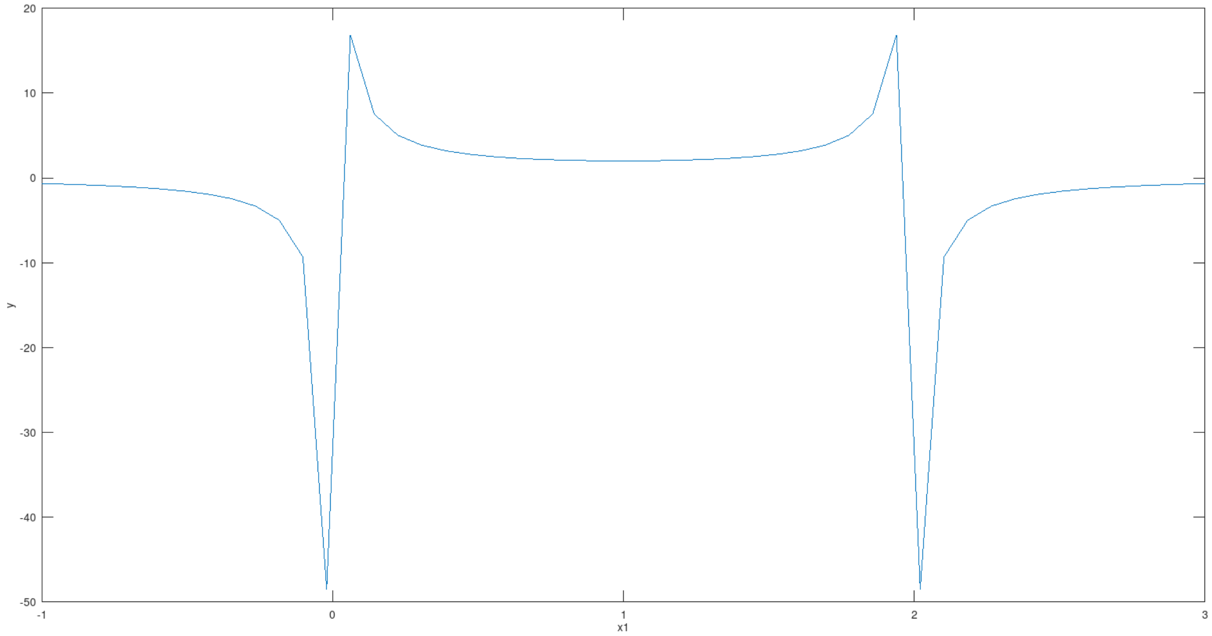


Рис. 2: Выраженная функция

Найдем стационарные точки:

$$f'(x) = \frac{-(2-2x_1)2}{(2x_1 - x_1^2)^2} = -\frac{4(1-x_1)}{(2x_1 - x_1^2)^2}$$

$$1 - x_1 = 0 \implies x_1^* = 1$$

Проверим достаточное условие наличия экстремума:

$$f''(x) = -4\left(\frac{-1(2x_1 - x_1^2)^2 - (1-x_1)(2-2x_1)2(2x_1-x_1^2)}{(2x_1-x_1^2)^4}\right)$$

$$= \frac{4}{(2x_1-x_1^2)^2} + \frac{4((1-x_1)(2-2x_1)2)}{(2x_1-x_1^2)^3} = \frac{4}{(2x_1-x_1^2)^2} + \frac{16(1-x_1)^2}{(2x_1-x_1^2)^3}$$

$$f''(1) > 0 \implies min$$

$$x_2^* = 2 - 1 = 1$$

Ответ: $f(1,1) = 2$ — экстремум минимума при заданном условии.

Исходный код на языке *Octave* для построения графиков представлен в листинге ниже:

```
% Copyright © 2019 Panchishin Ivan

addpath(../code)

set(0, defaultaxesfontsize, 14);
set(0, defaulttextfontsize, 14);

% количество полигонов поверхности
density = 50;



% исходные данные
```

```
F = @(X) 1/X(1) + 1/X(2);%X(1)^2 + X(2)^2 - X(1)*X(2) - X(1) - X(2);
X1 = linspace(-4, 4, density);
X2 = linspace(-4, 4, density);
[XX1, XX2] = meshgrid(X1, X2);

YY = [];
for i = 1:length(X1)
    Y = [];
    for j = 1:length(X2)
        Y = [Y, F([X1(i) X2(j)])];
    end
    YY = [YY; Y];
end

subplot(1, 2, 1);
surf(XX1, XX2, YY);
hold on

subplot(1, 2, 2);
hold on



% секущие плоскости
% функции (g)
GX2 = {
    linspace(-1, 3, density), @(x1) 2 - x1
};

% прямые
GG = {
%    ones(1, density)*0 linspace(0, 3, density);
%    linspace(0, 3, density) ones(1, density)*0
};
for Gx2 = GX2
    X = Gx2{1};
    GG = [GG; {X, Gx2{2}(X)}];
end

for G = GG
    XX1_cond = [];
    XX2_cond = [];
    YY_cond = [];

    for i = 1:length(G{1})
        Row = ones(1, length(G{2}));
        XX1_cond = [XX1_cond; Row * G{1}(i)];
        XX2_cond = [XX2_cond; Row * G{2}(i)];
        YY_cond = [YY_cond; linspace(-50, 50, length(G{2}))]; % нижняя и верхняя граница секущей
    end

    subplot(1, 2, 1);
    surf(XX1_cond, XX2_cond, YY_cond);%, facecolor, red, edgecolor, none, facealpha, 0.5);


    subplot(1, 2, 2);

    % косинус угла наклона прямой
    cosin = (G{1}(2) - G{1}(1)) / sqrt((G{1}(2) - G{1}(1))^2 + (G{2}(2) - G{2}(1))^2);

```

```
    Flatg = G{1} / cosin; % ось, образованная прямой
    Flaty = [];
    for i = 1:density
        Flaty = [Flaty, F([G{1}(i) G{2}(i)])];
    end

    plot(G{1}, Flaty, color, blue);
    plot(Flatg, Flaty, color, red);
end



subplot(1, 2, 1);
xlabel(x1);
ylabel(x2);
zlabel(y);

subplot(1, 2, 2);
legend(X, GX);
xlabel(x);
ylabel(y);

pause
```

Визуализация, по которой писался код, приведена на рисунке 3.

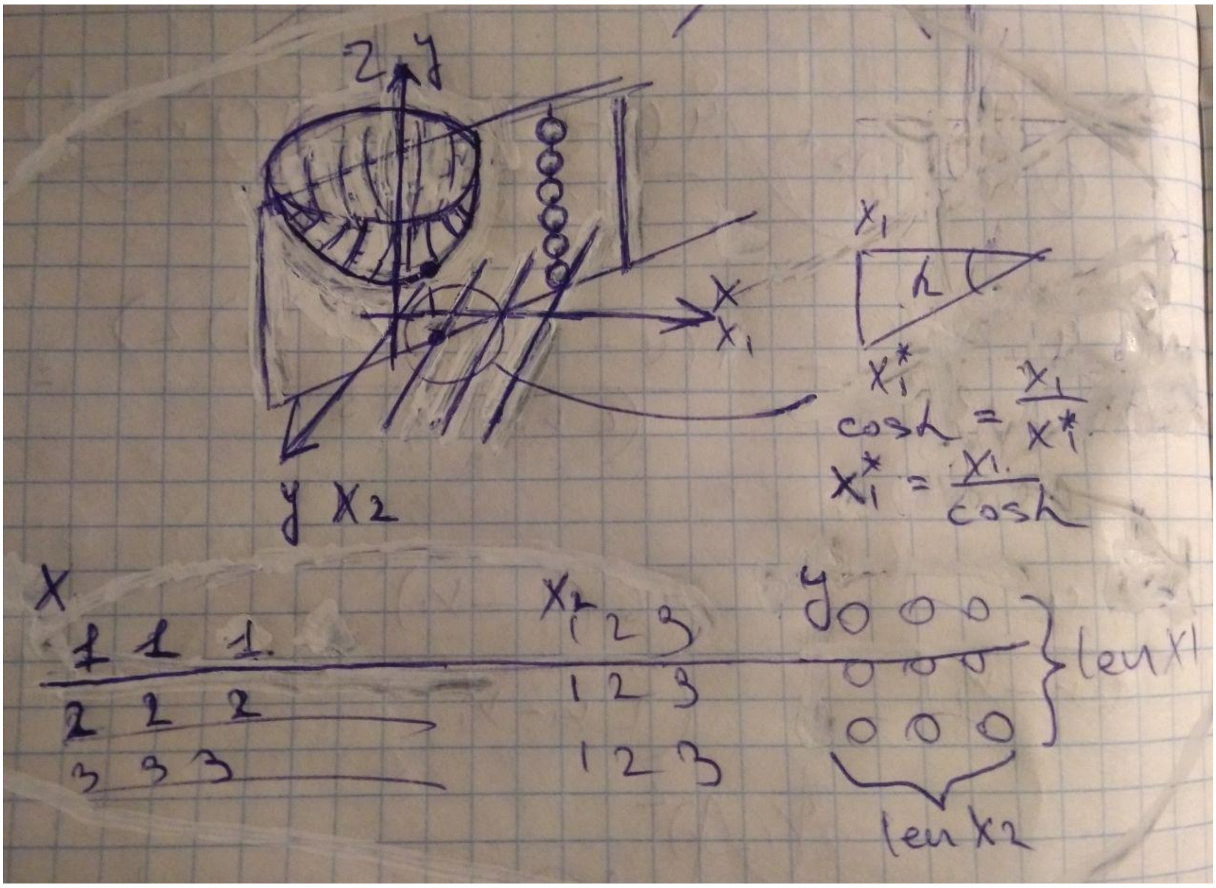


Рис. 3: Черновик

$$f(x_1, x_2) = 25x_1x_2^2, \; x_1 - 10x_2 = 1.$$

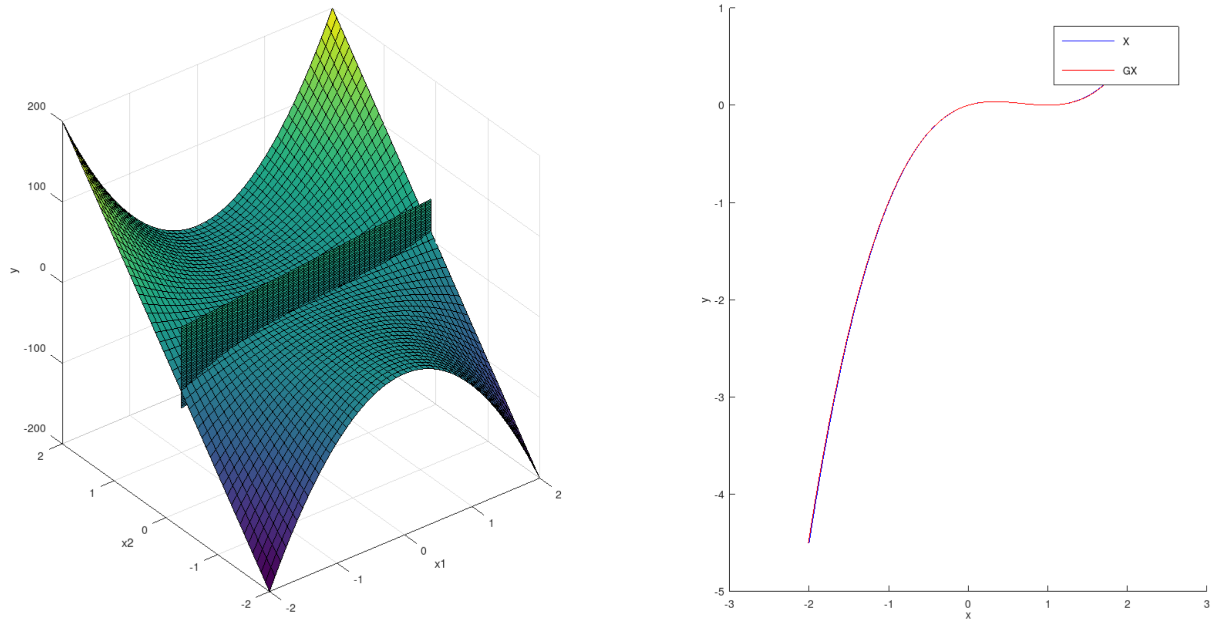


Рис. 4: Пример 2

Графическое описание примера приведено на рисунке 4.

Решим задачу с помощью функции Лагранжа:

$$L = f(x_1, x_2) + \lambda\phi(x_1, x_2) = 25x_1x_2^2 + \lambda(x_1 - 10x_2 - 1),$$

где $\phi(x_1, x_2)$ — уравнение связи, равное нулю, λ — множитель Лагранжа.

Найдем частные производные ($\lambda = const$):

$$L'_{x_1} = 25x_2^2 + \lambda$$
$$L'_{x_2} = 50x_1x_2 - 10\lambda$$

Решим систему относительно x_1, x_2 и λ:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = 0 \\ \phi(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 25x_2^2 + \lambda = 0 \\ 5x_1x_2 - \lambda = 0 \\ x_1 - 10x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -25x_2^2 \\ 5x_1x_2 + 25x_2^2 = 0 \\ x_1 = 1 + 10x_2 \end{cases}$$

$$5(1 + 10x_2)x_2 + 25x_2^2 = 5x_2((1 + 10x_2) + 5x_2) = 0$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 1 + 10x_2 + 5x_2 = 1 + 15x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{21} = 0 \\ x_{22} = -\frac{1}{15} \end{cases}$$

$$x_{11} = 1$$
$$x_{12} = 1 - \frac{10}{15} = \frac{1}{3}$$
$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = \frac{-25}{225} = -\frac{1}{9}$$

Для проверки достаточного условия, воспользуемся вторым дифференциалом функции Лагранжа:

$$d^2L = L''_{x_1x_1}(dx_1)^2 + 2L''_{x_1x_2}(dx_1dx_2) + L''_{x_2x_2}(dx_2)^2$$
$$L''_{x_1x_1} = 0, L''_{x_1x_2} = 50x_2, L''_{x_2x_2} = 50x_1$$
$$d^2L = 100x_2dx_1dx_2 + 50x_1(dx_2)^2$$

Рассмотрим точку $(1, 0)$:

$d_1^2L = 50(dx_2)^2 > 0$

Рассмотрим точку $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{15})$:

$$d_2^2L = -\frac{20}{3}dx_1dx_2 + \frac{50}{3}(dx_2)^2$$

Так как дифференциалы знакопеременные, сравнение с нулем не очевидно — выразим один из дифференциалов из уравнения связи:

$$d(x_1 - 10x_2) = d(1)$$
$$dx_1 - 10dx_2 = 0$$
$$dx_1 = 10dx_2$$
$$\frac{-20}{3}10(dx_2)^2 + \frac{50}{3}(dx_2)^2 = -\frac{150}{3}(dx_2)^2 < 0$$

Ответ: $f(1, 0) = 0$ — минимум, $f(\frac{1}{3}, -\frac{1}{15}) \approx 0,04$ — максимум.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2,\ x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Графическое описание примера приведено на рисунке 5.

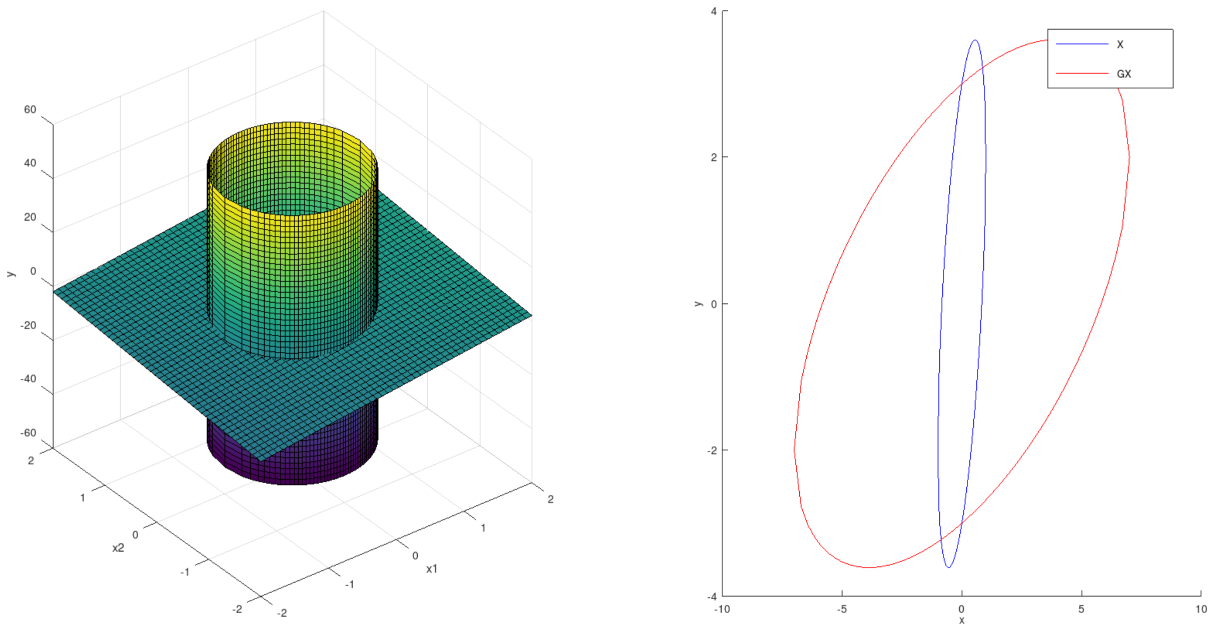


Рис. 5: Пример 3

$L = 2x_1 + 3x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$
$L'_{x_1} = 2 + 2\lambda x_1$
$L'_{x_2} = 3 + 2\lambda x_2$

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x_1 = 0 \\ 3 + 2\lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{2\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \\ x_2 = -\frac{3}{2\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{4 + 9 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{13}{4} \implies \lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$x_{11} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$x_{12} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$x_{21} = -\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$x_{22} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Рассмотрим достаточное условие существования экстремума в матичной форме в найденных точках:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \phi'_{x_1} & \phi'_{x_2} \\ \phi'_{x_1} & L''_{x_1x_1} & L''_{x_1x_2} \\ \phi'_{x_2} & L''_{x_2x_1} & L''_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 2\lambda & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{13}} & -\frac{6}{\sqrt{13}} \\ -\frac{4}{\sqrt{13}} & \sqrt{13} & 0 \\ -\frac{6}{\sqrt{13}} & 0 & \sqrt{13} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} M_{1j} a_{1j} = \frac{4}{\sqrt{13}}(-4) - \frac{6}{\sqrt{13}}(6) < 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{13}} & \frac{6}{\sqrt{13}} \\ \frac{4}{\sqrt{13}} & -\sqrt{13} & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{13}} & 0 & -\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = -\frac{4}{\sqrt{13}}(-4) + \frac{6}{\sqrt{13}}(6) > 0$$

Ответ: $f(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}) \approx -3,6$ — минимум, $f(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}) \approx 3,6$ — максимум.

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2,\ X : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 3.$$

Графическое описание примера приведено на рисунке 6.

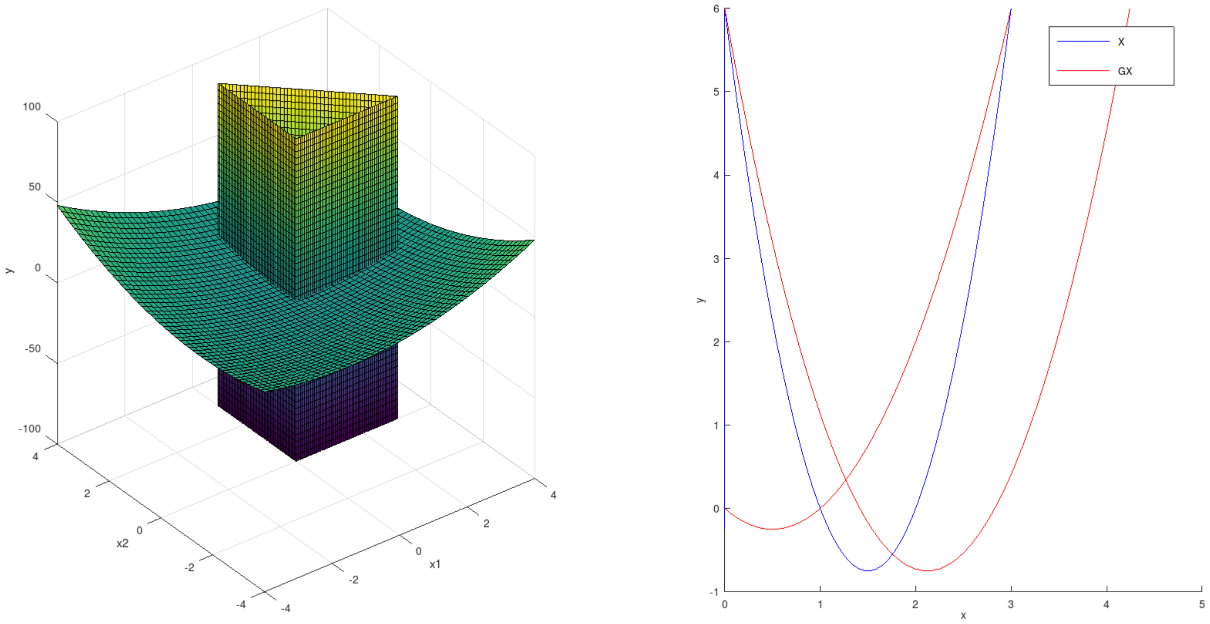
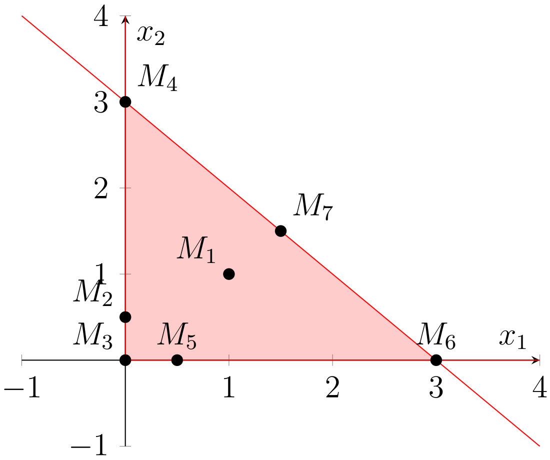


Рис. 6: Пример 4



Найдем стационарные точки M внутри X:

$$y'_{x_1} = 2x_1 - x_2 - 1$$

$$y'_{x_2} = 2x_2 - x_1 - 1$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ 2x_2 - x_1 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 2x_1 - 1 \\ 4x_1 - 2 - x_1 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

$M_1(1,1),\ \mathbf{f(M_1) = -1}$

Исследуем границу области:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2 \end{cases} \implies y = x_2^2 - x_2$$

$y' = 2x_2 - 1 = 0 \implies x_2 = \dfrac{1}{2}$

$M_2(0, \dfrac{1}{2}),\ \mathbf{f(M_2)} = \mathbf{\dfrac{1}{4}} - \mathbf{\dfrac{1}{2}} = -\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

$M_3(0, 0),\ \mathbf{f(M_3)} = \mathbf{0}$

$M_4(0, 3),\ \mathbf{f(M_4)} = \mathbf{6}$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2 \end{cases} \implies y = x_1^2 - x_2$$

$f' = 2x_1 - 1 = 0 \implies x_1 = \dfrac{1}{2}$

$M_5(\dfrac{1}{2}, 0),\ \mathbf{f(M_5)} = -\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

$M_6(3, 0),\ \mathbf{f(M_6)} = -\mathbf{6}$

$$\begin{cases} x_2 = 3 - x_1 \\ y = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2 \end{cases} \implies y = x_1^2 + (3 - x_1)^2 - x_1(3 - x_1) - x_1 - (3 - x_1) =$$

$= x_1^2 + 9 - 6x_1 + x_1^2 - 3x_1 + x_1^2 - x_1 - 3 + x_1 = 3x_1^2 - 9x_1 + 6$

$f' = 6x_1 - 9 = 0 \implies x_1 = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2},\ x_2 = 1,5$

$M_7(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}),\ \mathbf{f(M_7)} = \mathbf{\dfrac{9}{4}} + \mathbf{\dfrac{9}{4}} - \mathbf{\dfrac{9}{4}} - \mathbf{\dfrac{3}{2}} - \mathbf{\dfrac{3}{2}} = \mathbf{\dfrac{9}{4}} - \mathbf{\dfrac{6}{2}} = -\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

Ответ: $\underset{X}{max} y = f(3;0) \cup f(0;3) = 6$, $\underset{X}{min} y = f(1;1) = -1$.

Вывод

Изучил аналитические методы нахожения условного экстремума функции двух переменных, написал программную реализацию вывода графиков и их сечений.