Министерство науки и высшего образования
Федеральное государтсвенное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Югорский государственный университет

Отчет о лабораторной работе №5
по дисциплине «Методы оптимизации»

Выполнил

Студент группы 1162б
________________ Панчишин И. Р.
«___» __________ 2019 г.

Принял

Доцент ИЦЭ
________________ Самарин В. А.
«___» __________ 2019 г.

Ханты-Мансийск, 2019

Цель

Научиться находить безусловные экстремумы функций нескольких переменных.

Задачи

1. Исследовать на максимум и минимум заданные функции.
2. Найти точки безусловного экстремума функции согласно варианту.

Ход работы

Исследуем на максимум и минимум следующие функции:

1. $f(x) = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + x_1 + x_2$

   Поиск стационарных точек и проверка необходимого условия экстремума первого порядка (порядок условий определяется порядком используемых производных):

   $$\nabla(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}) = (-2x_1 - x_2 + 1, -x_1 - 2x_2 + 1) = 0$$
   $$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -2 + 4x_2 - x_2 + 1 = 0 \\ x_1 = 1 - 2x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} \\ x_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

   Стационарная точка одна — $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

   Рассмотрим матрицу Гессе и проверим необходимое условие экстремума второго порядка:

   $$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2 x_2} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$
   $$\Delta_1 = -2 < 0$$
   $$\Delta_2 = (-2 \cdot -2) - (-1 \cdot -1) = 3 > 0$$

   Матрица является отрицательно определенной, т. е. $H(x^*) < 0$, поэтому максимумом является

   $$f(x*) = -\frac{1}{3}^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3}^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

   Ответ: $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ — максимум

2. $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$

   $\nabla(f) = (3x_1^2 - 3x_2, 3x_2^2 - 3x_1) = 0$

   $$\begin{cases} x_1^2 - x_2 = 0 \\ x_2^2 - x_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1(x_1^3 - 1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_{11} = 0 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 0 \\ x_{22} = 1 \end{cases}$$

   $H(f) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{bmatrix}$

   $H(x_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Delta_1 = 0, \Delta_2 = -9$

   $H(x_2^*) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Delta_1 = 6, \Delta_2 = 27$

   Ответ: $f(1, 1) = -1$ — минимум

3. $f(x_1, x_2) = e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 + 2x_2)$

   $\nabla(f) = (2e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 + 2x_2) + e^{2x_1}, e^{2x_1}(2x_2 + 2)) = 0$

   $$\begin{cases} e^{2x_1}(2(x_1 + x_2^2 + 2x_2) + 1) = 0 \\ e^{2x_1}(2x_2 + 2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} e^{2x_1} = 0 \\ x_1 + x_2^2 + 2x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_2 + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

   $H_{11} = 2e^{2x_1}(2(x_1 + x_2^2 + 2x_2) + 1) + 2e^{2x_1} = 4e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 + 2x_2 + 1)$
   $H_{12} = 2e^{2x_1}(2x_2 + 2) = 4e^{2x_1}(x_2 + 1)$
   $H_{22} = 2e^{2x_1}$

   $H(f) = \begin{bmatrix} 4e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 + 2x_2 + 1) & 4e^{2x_1}(x_2 + 1) \\ H_{12} & 2e^{2x_1} \end{bmatrix}$

   $H(x^*) = \begin{bmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{bmatrix} \Delta_1 = 2e, \Delta_2 = 4e^2$

   Ответ: $f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{e}{2}$ — минимум

4. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$

   $\nabla(f) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2) = 0$

   $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ -x_1 + 4x_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

   $H(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Delta_1 = 2, \Delta_2 = 3$

   Ответ: $f(0, 0) = 0$ — минимум

5. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1$

   $$\nabla(f) = 0 \implies \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

   $H(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1$

   Ответ: $f(-2, -1) = -2$ — минимум

6. $f(x_1, x_2) = 2 - \sqrt[3]{x_1^2 + x_2^2}$

   $$\nabla(f) = (-\frac{2x_1}{3\sqrt[3]{(x_1^2+x_2^2)^2}}, -\frac{2x_2}{3\sqrt[3]{(x_1^2+x_2^2)^2}}) = 0$$

   $$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

   $$H_{11} = -\frac{2 \cdot 3(x_1^2+x_2^2)^{\frac{2}{3}} - 2x_1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{3}} 2x_1}{9(x_1^2+x_2^2)^{\frac{4}{3}}} =$$

   $$= \frac{8}{9}x_1^2(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}(x_1^2+x_2^2)^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}} =$$

   $$= \frac{8x_1^2}{9(x_1^2+x_2^2)^{\frac{5}{3}}} - \frac{2}{3(x_1^2+x_2^2)^{\frac{2}{3}}}$$

   $$H_{12} = -\frac{2x_1}{3}(-\frac{2}{3})(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{5}{3}} 2x_2 = \frac{8x_2x_1}{9(x_1^2+x_2^2)^{5/3}}$$

   $$H_{22} = \frac{8x_2^2}{9(x_1^2+x_2^2)^{5/3}} - \frac{2}{3(x_1^2+x_2^2)^{2/3}}$$

7. $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 2x_2^3 - 3x_1 + 6x_2$

   $$\nabla(f) = 0 \implies \begin{cases} 3x_1^2 - 3 = 0 \\ -6x_2^2 + 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1^2 - 1 = 0 \\ -x_2^2 + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = \pm 1 \end{cases}$$

   $$H(f) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & -12x_2 \end{bmatrix}$$

   $$H(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \Delta_1 = 6, \Delta_2 = -72$$

   $$H(-1,1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \Delta_1 = -6, \Delta_2 = 72$$

   $$H(1,-1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \Delta_1 = 6, \Delta_2 = 72$$

   $$H(-1,-1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \Delta_1 = -6, \Delta_2 = -72$$

   Ответ: $f(1,-1) = -6$ — минимум, $f(-1,1) = 6$ — максимум

8. $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}(2x_1^2 + x_2^2)$

   $$\nabla_1(f) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}(-2x_1)(2x_1^2+x_2^2) + e^{-(x_1^2+x_2^2)}4x_1 = 2x_1e^{-x_2^2}(-2x_1^2 - x_2^2 + 2)$$

Рассмотрим функцию $3x_1^2 - 3x_1x_2 + 1x_2^2 - 7x_1 - 7x_2$:

$$\nabla = (6x_1 - 3x_2 + 7, -3x_1 + 2x_2 - 7 = 0)$$

Стационарные точки:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 7 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 7 = 0 \Big| \cdot 2, 1 + 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 - 7 = 0 \\ x_1 = \frac{2x_2 - 7}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 7 \\ x_1 = \frac{7}{3} \approx 2.33 \end{cases}$$

Программный код для расчета минимума функции:

```
set(0, defaultaxesfontsize, 12)
set(0, defaulttextfontsize, 12)


global C = [3 3 1 -7 -7]
global fu = @(x) C(1)*x(1)^2 - C(2)*x(1)*x(2) + C(3)*x(2)^2 - C(4)*x(1) + C(5)*x(2)

X1 = X2 = linspace(-10, 10, 40);
[XX1, XX2] = meshgrid(X1, X2);

YY = [];
for i = 1:length(X1)
    Y = [];
    for j = 1:length(X2)
        Y = [Y, fu([X1(i) X2(j)])];
    end
    YY = [YY; Y];
end

% вывод графика
mesh(XX1, XX2, YY);
hold on
xlabel("x1");
ylabel("x2");
zlabel("y");

% начальное приближение
x0 = [1, -2];
%[xmin ymin] = fminunc(f, x0)

function [f, g] = fwithgrad(x)
    global C;
    global fu;
    f = fu(x);

    if nargout > 1
        % градиент функции
        g = [6*x(1) - 3*x(2) + 7;
            -3*x(1) + 2*x(2) - 7];
    end
end
options = optimset(GradObj, on);
[xmin, ymin] = fminunc(@fwithgrad, x0, options)

plot3(xmin(2), xmin(1), ymin, r., MarkerSize, 40);

figure

contour(XX1, XX2, YY, 20)

pause
```

Чтобы ускорить поиск минимума, можно определить градиет рассматриваемой функции, иначе градиент будет будет вычисляться с помощью конечных разностей. Результат работы представлен на Рис. 1. Контур рассматриваемой функции представлен на Рис. 2.

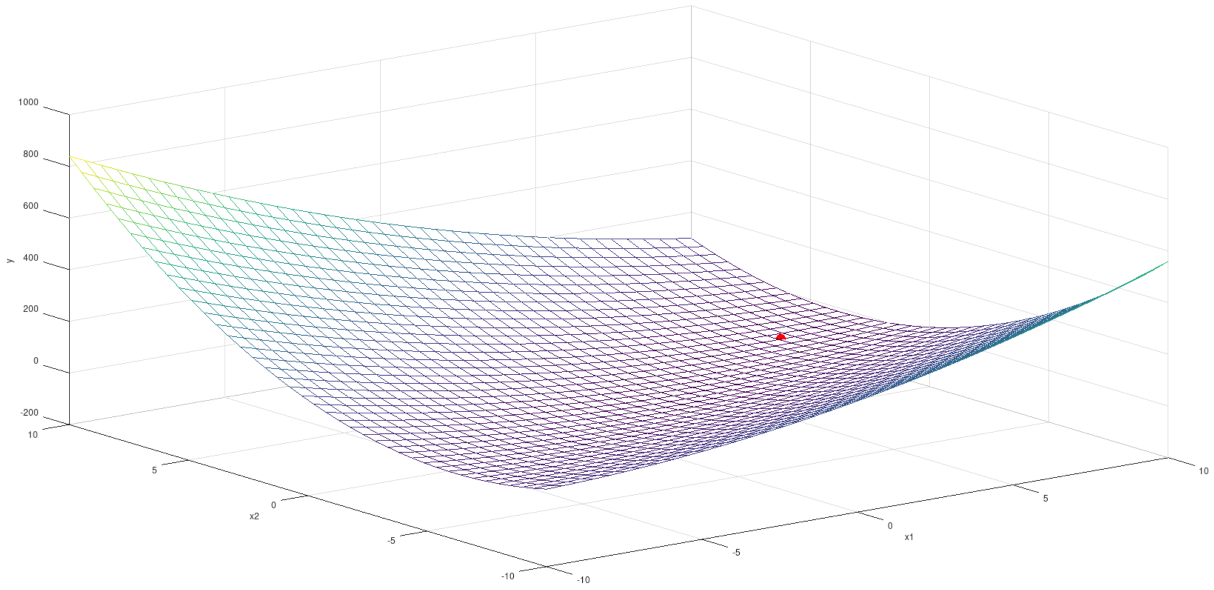

Рис. 1: Минимум функции

Вывод

Научился находить безусловные экстремумы функций нескольких переменных, выполнил поставленные задачи аналитически и программно.

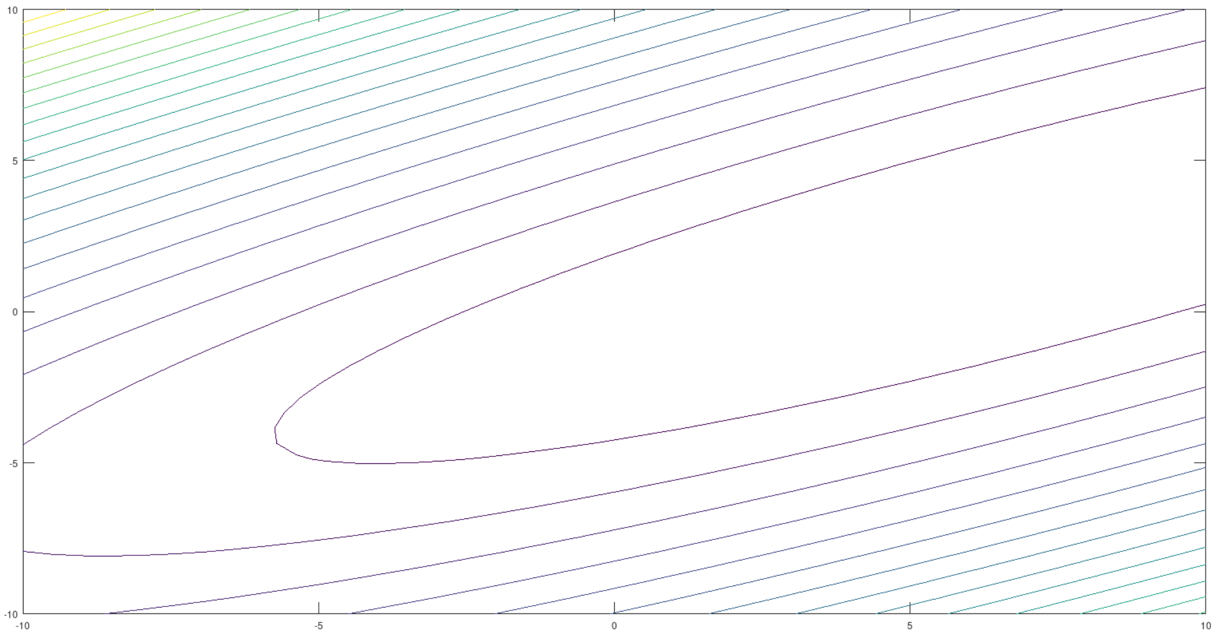

Рис. 2: Контур функции