

Experiência 1

Amostragem de Sinais

EA-619 LABORATÓRIO DE ANÁLISE LINEAR

Transformadas: Escrever sinais como combinações de exponenciais complexas.

1. Transformada de Fourier (FT), para sinais contínuos no tempo:

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \Leftrightarrow \quad X_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\omega t} dt$$

2. Transformada de Fourier a tempo discreto (DTFT), para sinais discretos no tempo:

$$x_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_d(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad \Leftrightarrow \quad X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n}$$

3. Transformada discreta de Fourier a tempo discreto (DFT), para sinais discretos no tempo com N amostras:

$$x_d[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_d[k] e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad \Leftrightarrow \quad X_d[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_d[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Nota: $\omega \Rightarrow$ frequência contínua. Unidade: rad/s.

$\Omega \Rightarrow$ frequência discreta. Unidade: rad, ou rad/amostra, ainda que amostra não tenha unidade.

Interpretações para sinais reais:

- **Fato:** se $x_c(t) \in \Re$, então $X_c(-\omega) = X_c^*(\omega)$.
- Integral envolve $X_c(\omega)e^{j\omega t}$ e $X_c(-\omega)e^{-j\omega t}$. Combinando esses termos e usando identidade de Euler e $X_c(\omega) = X_c^*(-\omega)$,

$$X_c(\omega)e^{j\omega t} + X_c^*(\omega)e^{-j\omega t} = 2|X_c(\omega)| \cos(\omega t + \angle X_c(\omega))$$

$\Rightarrow |X_c(\omega)|$ dá a magnitude com que a frequência ω é usada para construir $x_c(t)$.

$\Rightarrow \angle X_c(\omega)$ dá a fase com que a frequência ω é usada para construir $x_c(t)$.

\Rightarrow A frequência negativa “desaparece” no caso real, ela só existe na notação com exponenciais complexas, e garante que para todo termo complexo vai aparecer também seu complexo conjugado, e no final tudo será real.

Relação entre os espectros de $x_d[n]$ e sua FFT:

- Se $x_d[n] = 0$ para $n < 0$ ou $n > N - 1$

$$\Rightarrow X_d[k] = X_d\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

Relação entre os espectros de $x_c(t)$ e $x_d[n]$

- Amostragem de um tom puro:

$$x_c(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow x_d[n] = x_c(nT_s) = e^{j\omega T_s n}.$$

- Após amostragem, frequência analógica ω vira frequência digital $\Omega = \omega T_s$.
- $X_c(\omega)$ dá a magnitude e fase com que a frequência $\Omega = \omega T_s$ é usada para construir $x_d[n]$

\Rightarrow Fora um fator de escala, e na ausência de *aliasing*,

$$X_d(\Omega) = X_c(\Omega/T_s).$$

Juntando os dois resultados,

$$X_d[k] \approx X_c\left(2\pi \frac{k f_s}{N}\right).$$

Ou seja, o elemento k da FFT corresponde à frequência $k f_s/N$.

Fato: Para qualquer a real, $e^{j(a+2\pi n)} = e^{ja} e^{j2\pi n} = e^{ja}$.

Usando este fato diretamente nas fórmulas, encontramos os seguintes **períodos**:

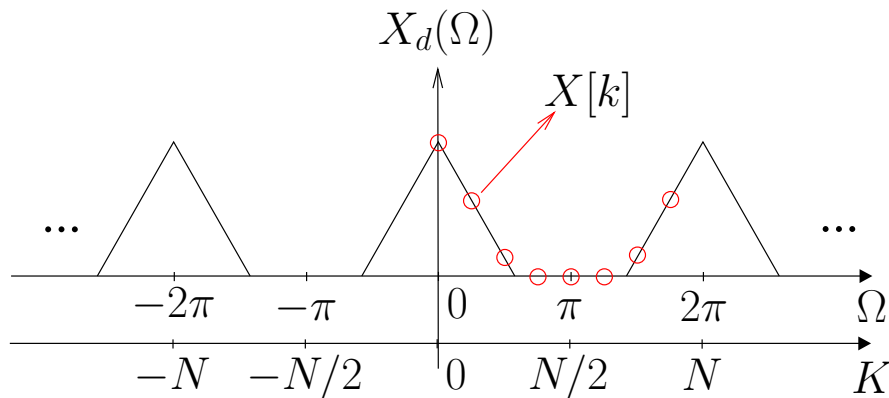
1. $X_d(\Omega + 2k\pi) = X_d(\Omega)$

2. $X_d[k + N] = X_d[k]$.

3. $e^{j(\Omega_1+2\pi)n} = e^{j\Omega_1 n}$

\Rightarrow frequências discretas separadas de 2π são indistinguíveis

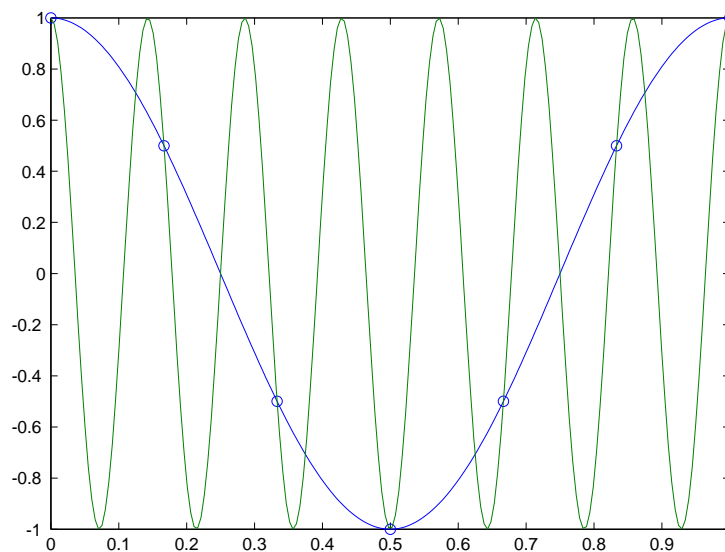
\Rightarrow só falamos do intervalo $-\pi < \Omega \leq \pi$, ou $0 \leq \Omega < 2\pi$.



Nota: Esperamos ver frequências negativas, pois $e^{j\Omega n}$ tem que se combinar com $e^{-j\Omega n}$ para dar um número real. Pela periodicidade, estas aparecem entre π e 2π também. Para a FFT, o componente em $-k$ aparece também no termo $N - k$.

Aliasing: relação entre espectros de $x_c(t)$ e $x_d[n]$:

- $x_c(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow x_d[n] = x_c(nT_s) = e^{j\omega T_s n}$.
 - Frequência analógica ω vira frequência digital $\Omega = \omega T_s$.
- $x_c(t) = e^{j(\omega+2\pi f_s)t} \Rightarrow x_d[n] = e^{j(\omega+2\pi f_s)T_s n} = e^{j\omega T_s n}$.
 - Usa $f_s T_s = 1$.
 - Usa $e^{2\pi n} = 1$
 - Consequência: frequências analógicas separadas de f_s são indistinguíveis após amostragem.
 - **Alias** (codinome, pseudônimo): Após amostragem, uma frequência analógica aparece com um codinome, em uma outra frequência digital.



Exemplos de *aliasing*: Efeito estroboscópico, roda de carros em filmes que parecem não rodar.

https://www.youtube.com/watch?v=uENITui5_jU

<https://www.youtube.com/watch?v=2SgG99QKLFE&t=513s>

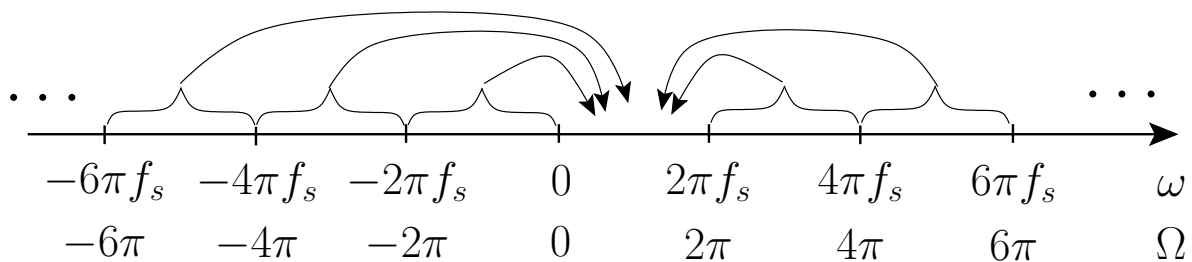
<https://www.youtube.com/watch?v=mPHsRcI5LLQ>

- $x_c(t) = e^{j\omega t} + e^{j(\omega+2\pi f_s)t} \Rightarrow$
 $x_d[n] = e^{j\omega T_s n} + e^{j(\omega+2\pi f_s)T_s n} = 2e^{j\omega T_s n}.$

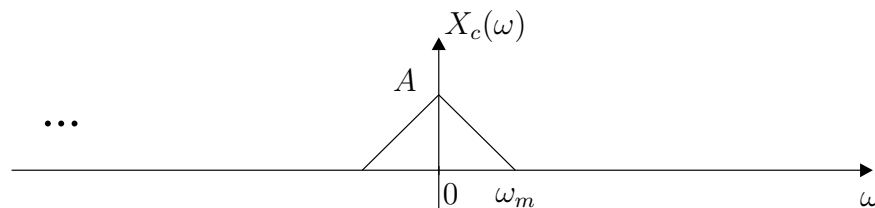
– Consequência: Componente de $x_d[n]$ na frequência $\Omega = \omega T_s$ é combinação de $x_d(t)$ nas frequências $\omega + 2k\pi f_s$.

- $X_d(\Omega) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega f_s + 2k\pi f_s).$

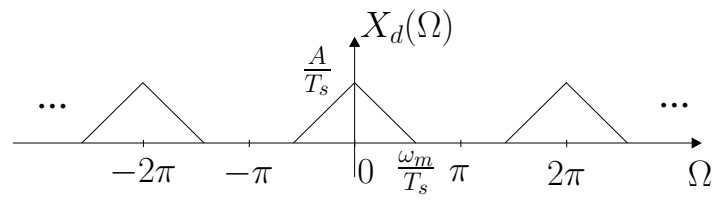
$X_c(\Omega f_s)$ é $X_c(\omega)$ “esticado” ou “encurtado”, de forma que $\omega = 2\pi f_s$ seja levado em $\Omega = 2\pi$



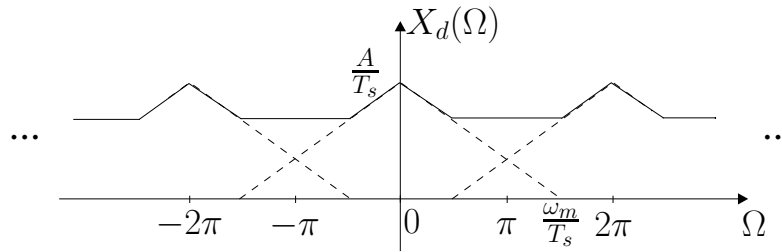
Exemplo:



Se $\omega_m < 2\pi f_s$, ou $f_s > f_m/2$, $x_c(t)$ não tem duas frequências separadas de $f_s \Rightarrow$ sem *aliasing*



Com *aliasing*



Condição para evitar *aliasing*: $\Omega_m T_s < \pi$, ou $\boxed{\Omega_m < \omega_s/2}$
 Nesse caso, $X_d(\Omega) = X_c(\Omega f_s)$ para $|\Omega| < \pi$.