Доказательство формулы Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона-Лейбница утверждает, что если f является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$ и F является её первообразной, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство

Пусть f — непрерывная функция на $[a, b]$, и пусть F — первообразная f, то есть $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

По определению определённого интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

где $\{[x_{i-1}, x_i]\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей, $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, и x_i^* — произвольная точка в интервале $[x_{i-1}, x_i]$.

Теперь рассмотрим разность $F(x_i) - F(x_{i-1})$. По теореме о среднем значении для интегралов существует такая точка $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, что:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Так как $F'(x) = f(x)$, получаем:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i.$$

Суммируя по всем интервалам разбиения, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Левая часть этой суммы — это телескопическая сумма, которая сворачивается в:

$$F(b) - F(a).$$

Таким образом, имеем:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы видим, что правая часть выражения стремится к определённому интегралу:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Таким образом, формула Ньютона-Лейбница доказана:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$