



VYSOKÁ ŠKOLA  
CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ  
V PRAZE

Fakulta chemicko-inženýrská

Ústav počítačové a řídicí techniky

# POUŽITÍ ADAPTIVNÍCH SYSTÉMŮ PŘI ANALÝZE DAT

DISERTAČNÍ PRÁCE

AUTOR

**JAN VRBA**

ŠKOLITEL

**JAN MAREŠ**

ŠKOLITEL SPECIALISTA

**RATACHAN**

STUDIJNÍ PROGRAM

Chemické a procesní inženýrství (čtyřleté)

STUDIJNÍ OBOR

Technická kybernetika

ROK

**2020**



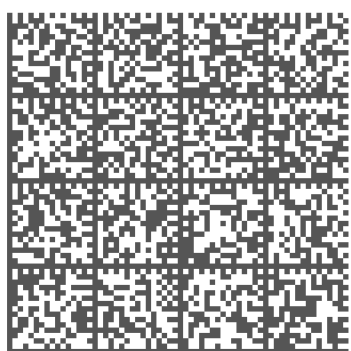
**UNIVERSITY OF  
CHEMISTRY AND TECHNOLOGY  
PRAGUE**

**Faculty of Chemical Engineering**

Department of Computing and Control Engineering

# ADAPTIVE SYSTEMS IN DATA ANALYSIS

**DISSERTATION**



AUTHOR	<b>JAN VRBA</b>
SUPERVISOR	<b>JAN MAREŠ</b>
SUPERVISOR SPECIALIST	<b>PANÍ SOBÍKOVÁ</b>
STUDY PROGRAMME	Chemical and Process Engineering
FIELD OF STUDY	Technical Cybernetics
YEAR	<b>2020</b>

Tato disertační práce byla vypracována na Ústavu počítačové a řídicí techniky v období OD-KDY – DOKDY.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že na moji práci se vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon). Zejména se jedná o skutečnost, že Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, popř. jiné vzdělávací zařízení, ve kterém jsem svou práci vypracoval, má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona. Pokud bych v budoucnu poskytl licenci o užití práce jinému subjektu, je Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, popř. jiné vzdělávací zařízení, ve kterém jsem svou práci vypracoval, oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložil a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách, ve znění pozdějších předpisů.

V Praze dne

.....

JMÉNO

## Poděkování

Rád bych poděkoval všem. #TODO





## **Souhrn**

Disertační práce se zabývá detekcí novosti, zejména pak algoritmem Extreme Seeking Entropy.  
#TODO

## **Klíčová slova**

*SLOVO* #TODO



## Summary

This dissertation deals with #TODO

## Keywords

*WORD* #TODO



# Obsah

<b>1</b>	<b>Přehled metod detekce novosti</b>	<b>21</b>
1.1	Vybrané statistické metody . . . . .	22
1.1.1	Metody založené na teorii extrémních hodnot . . . . .	22
1.1.2	Metody využívající Gaussovy smíšené modely . . . . .	22
1.1.3	Markovovy skryté modely . . . . .	23
1.2	Neuronové sítě . . . . .	23
1.2.1	Metoda podpůrných vektorů . . . . .	23
1.2.2	Samoorganizující se mapy . . . . .	23
1.2.3	Konvoluční neuronové sítě . . . . .	23
1.2.4	Autoenkodéry . . . . .	23
1.3	Další vybrané metody využívající adaptivní filtry . . . . .	25
1.3.1	Metoda set-membership . . . . .	25
1.3.2	Algoritmus Learning Entropy . . . . .	26
1.3.3	Algoritmus Error and Learning Based Novelty Detection . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Číslicové adaptivní filtry a algoritmy</b>	<b>29</b>
2.1	Adaptivní filtry . . . . .	31
2.1.1	Lineární FIR filtry . . . . .	31
2.1.2	Volterrovy filtry . . . . .	33
2.1.3	Polynomiální neuronové jednotky . . . . .	34
2.1.4	Fuzzy filtry . . . . .	35
2.2	Adaptivní algoritmy . . . . .	36
2.2.1	Algoritmy LMS a NLMS . . . . .	37
2.2.2	Algoritmus RLS . . . . .	39
2.2.3	Algoritmus Generalized Normalized Gradient Descent . . . . .	40
2.2.4	Gradient descent pro fuzzy filtry . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Zobecněné Paretoovo rozdělení</b>	<b>45</b>
3.1	Metoda Peak-over-Threshold . . . . .	46

3.2	Metody odhadu parametrů zobecněného Paretova rozdělení . . . . .	47
3.2.1	Metoda maximální věrohodnosti . . . . .	47
3.2.2	Metoda momentů . . . . .	48
3.2.3	Kvazi-ML metoda . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Algoritmus Extreme Seeking Entropy</b>	<b>51</b>
<b>5</b>	<b>Výsledky experimentů</b>	<b>55</b>
5.1	Případové studie detekce novosti algoritmu Extreme Seeking Entropy . . . . .	55
5.1.1	Případová studie: chaotická časová řada Mackey-Glass a detekce pertubace	55
5.1.2	Případová studie: detekce změny rozptylu šumu v náhodném datovém toku . . . . .	56
5.1.3	Případová studie: detekce skokové změny parametrů generátoru signálu	58
5.1.4	Případová studie: detekce náhlé absence šumu . . . . .	61
5.1.5	Případová studie: detekce změny trendu . . . . .	61
5.1.6	Případová studie: detekce epilepsie v myším EEG . . . . .	64
5.1.7	Vyhodnocení úspěšnosti detekce skokové změny parametrů generátoru signálu . . . . .	66
5.1.8	Vyhodnocení úspěšnosti detekce skokové změny trendu . . . . .	69
5.2	Vyhodnocení úspěšnosti detekce změny trendu a evaluace ROC křivky . . . . .	71
5.2.1	Popis experimentu . . . . .	71
5.2.2	Konstrukce ROC křivky . . . . .	72
5.2.3	Výsledky experimentu . . . . .	73
5.3	Vyhodnocení výpočetní náročnosti metod odhadu parametrů zobecněného Paretova rozdělení . . . . .	77
5.3.1	Motivace . . . . .	77
5.3.2	Specifikace experimentu . . . . .	78
5.3.3	Výsledky a diskuze . . . . .	78
5.4	Případová studie použití algoritmu Learning Entropy a adaptivního fuzzy filtru pro detekci změn stavů bioprocesu . . . . .	82
5.4.1	Popis bioprocesu a specifikace problému . . . . .	82
5.4.2	Experiment a zhodnocení . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>89</b>
	<b>Publikace autora</b>	<b>91</b>
	<b>Literatura</b>	<b>93</b>
	<b>Příloha</b>	<b>101</b>

# Seznam použitých zkratek

LE	learning entropy
ELBND	error and learning based novelty detection
GEV	generalized extreme value
GNGD	generalized normalized gradient descend
NLMS	normalized least mean squares
POT	peak over threshold
LNU	linear neural unit
QNU	quadratic neural unit
SNR	signal-to-noise ratio
RLS	recursive least squares
ESE	extreme seeking entropy
#TODO	TODO





# Seznam symbolů

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mu$	rychlost učení
$\hat{y}$	výstup adaptivního filtru
$k$	diskrétní časový index
$e$	chyba predikce
$M_{ND}$	délka okna pro vyhodnocení změn adaptabilních parametrů
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$e$	chyba predikce
$\#TODO$	$\#TODO$



# Úvod

Tato disertační práce je věnována problematice využití adaptivních systémů při analýze dat. Vzhledem k exponenciálnímu celosvětovému nárůstu dat a ke zvyšování jejich variability roste i potřeba tato data analyzovat, kategorizovat a vytěžovat (TODO: nějaká citace k nárůstu dat). Analýzou dat rozumíme proces, kdy z nezpracovaných naměřených dat získáme nějakou interpretovatelnou informaci, s kterou pak lze dál pracovat. Jedna z možných důležitých interpretací nově získaných dat je, zda-li se nově získaná data nějakým zásadním způsobem odlišují od předchozích dat. Této problematice se věnuje obor detekce novosti, neboli anomálií, který spadá do oblasti vytěžování dat a strojového učení. Úspěšná detekce novosti pak může být využita k vícero účelům. Například k diagnostice sledovaného procesu, ke změně struktury nebo parametrů adaptivního modelu za účelem zlepšení predikce, z konkrétních aplikací pak k odhalení neoprávněného vniknutí do sítě nebo zneužití dat, v lékařství se detekce novosti používá k diagnostickým účelům, z průmyslových aplikací pak k detekci poruchy a monitoringu stavu strojů, senzorů, ev zpracování textových dat k detekci nových témat atd. Spektrum využití je velice široké.

V oblasti detekce novosti byla v posledních desetiletích intenzivního vývoje navrhována celá řada algoritmů. Vzhledem k rostoucímu výpočetnímu výkonu a rozmanitosti analyzovaných dat rostla i potřeba nových algoritmů. Nové algoritmy typicky předčili ostatní algoritmy v rámci jedné aplikace, respektive v rámci jednoho typu dat. Doposud se však nepodařilo vytvořit algoritmus, který by ve všech, nebo alespoň ve významné části, oblastech použití předčil již publikované algoritmy. I proto vznikají v oblasti detekce novosti neustále nové přístupy, které navíc umožňují analyzovat nové typy dat.

Předkládaná disertační práce je členěna do pěti kapitol. První kapitola je věnována přehledu různých metod detekce novosti a obsahuje i oblasti jejich využití. Druhá kapitola obsahuje přehled adaptivních filtrů a metod, které byly v rámci práce použity. Třetí kapitola je věnována zobecněnému Paretovu rozdělení, které bylo použito v navrženém algoritmu detekce novosti. Čtvrtá kapitola obsahuje popis nově navrženého algoritmu nazvaném Extreme Seeking Entropy a představuje možnosti jeho použití v různých případech. Dále jsou zde výsledky tohoto algoritmu v porovnání s dalšími vybranými metodami adaptivní detekce novosti.



# 1 Přehled metod detekce novosti

Tato kapitola je věnována přehledu různých vybraných přístupů k detekci novosti, které se v posledních letech používají. Více pozornosti je věnováno algoritmům Learning Entropy (viz kap.1.3.2) a Error and Learning Based Novelty detection (viz kap. 1.3.3) které jsou v kapitole (XYZ) použity pro porovnání úspěšnosti detekce novosti.

Vzhledem k dlouhé historii oblasti detekce novosti vznikla celá řada přehledových publikací, které metody detekce novosti rozdělují do různých skupin. Miljkovič v [37] rozděluje metody detekce novosti na metody založené na klasifikaci (pravidlové systémy, neuronové sítě a SVM), nejbližší sousedy (vzdálenost, hustota), klastrovací metody, statistické (parametrické a neparametrické) a ostatní (teorie informace, spektrální dekompozice, vizualizace).

Zimek a Filzmozer [38] rozdělují metody ND opět na celou řadu kategorií. Na metody s učitelem a bez učitele, na metody založené na skóre nebo příslušnosti ke množině přičemž metody založené na skóre přiřazují datům nějaké číselné ohodnocení podle kterého se rozhoduje, zda jde o data nové či nikoliv. Metody založené na příslušnosti zařazují data rovnou do jedné ze dvou množin označené "normální" a "outlier". Další rozdělení je na metody parametrické a neparametrické. Mezi parametrické metody autoři řadí metody založené na konkrétních pravděpodobnostních rozložení (např. gaussovké). Neparametrické metody jsou metody, které nepracují s parametry pravděpodobnostních rozdělení.

Jednu z nejobsáhlejších přehledových publikací napsali Markou a Singh [39, 40]. První díl jejich přehledu je věnován statistickým metodám ND a druhý díl je věnován metodám založených na neuronových sítích. V první části zabývající se statistickými metodami autoři přicházejí s dělením na metody parametrické (pravděpodobností, gaussian mixture models, skryté markovské modely a testování hypotéz), a neparametrické (kNN, Parzenovo okno, porovnávání řetězců a klastrovací metody). Metody založené na neuronových sítích pak dělí na přístupy využívající vícevrstvý perceptron, metodu podpůrných vektorů, teorii adaptivní rezonance, sítě typu RBF (radial basis function), autoasociátory, Hopfieldovy sítě, oscilující sítě, samoorganizující se mapy, neuronové stromy, sítě s neasociativním učením a ostatní přístupy.

Nejnovější extenzivní publikací je velice rozsáhlá přehledová publikace čítající přes 300 referencí byla vytvořena Pimentelem, D. a L. Cliftonovými a Tarassenkem [41]. Autoři zde

dělí metody ND na pravděpodobnostní (parametrické a neparametrické), metody založené na vzdálenosti (nejbližší soused, klastrovací metody), metody založené na rekonstrukci (neuronové sítě, metody založené na podprostorech), metody vycházející z teorie informace a doménové metody (SVM).

## 1.1 Vybrané statistické metody

### 1.1.1 Metody založené na teorii extrémních hodnot

#TODO

### 1.1.2 Metody využívající Gaussovy smíšené modely

Gaussovské smíšené modely (GMM - Gaussian Mixture Models) jsou modely, které se používají pro aproximaci rozdělení pomocí lineární kombinace normálních rozdělení [58]. Podle [59] lze téměř jakoukoliv spojitou funkci hustoty pravděpodobnosti aproximovat s libovolnou přesností pomocí dostatečného počtu gaussovských komponent s vhodně zvolenými středními hodnotami, kovariencemi a váhovacími koeficienty (více např. v [60, 61]). Tyto modely jsou vhodné i pro vícerozměrná data, je-li k dispozici dostatečně velké množství dat pro odhad jejich parametrů. Rozložení pravděpodobnosti klasického GMM je definováno jako

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M K_i \mathcal{N}_i(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

přičemž určité úskalí skýtá potřeba apriorní informace o vektoru středních hodnot, kovarianční matici a příslušném váhovacím koeficientu  $K_i$  dané  $i$ -té gaussovské komponenty.

V oblasti ND se pak obvykle určí hodnota hustoty pravděpodobnosti GMM daného vzorku dat a podle definovaného prahu se určí zda se jedná o data nová či nikoliv. V [59] používají autoři GMM k monitoringu převodovky. Zpracovávaným signálem jsou naměřené vibrace převodovky. Tento signál je segmentován a na základě segmentů signálů bez poruchy jsou odhadnuty parametry GMM. Při monitoringu je potom pro každý segment je spočítána hodnota negativní logaritmické věrohodnostní funkce (NLL) [62]. Autoři ukazují, že vysoké hodnoty NLL korespondují s poškozením konkrétních zubů převodovky. V [63] používají autoři VB-GMM (Variational Bayesian Gaussian Mixture Model) k detekci poruch plynových turbín. Oproti klasickému GMM, kde je počet gaussovských komponent zvolen apriori, využívá VB-GMM variační Bayesovské metodody k určení optimálního množství komponent [64]. Autoři ukazují, že pomocí zvolené metody jsou s vysokou mírou spolehlivosti rozpoznat různé závady, které korespondují s novostí v měřených datech. Uplatnění GMM je i v oblasti finančnictví, konkrétně v detekci insider tradingu. V příspěvku [65] používají autoři standartní GMM pro modelování poptávky na Tokijské burze a na odhalených případech insider tradingu demon-

strujou výhody publikovaného přístupu. Úskalím používání složitých GMM je velký počet jejich parametrů. Čím více parametrů zvolený model má, tím více dat je potřeba k jejich odhadu a ověření daného modelu. Pro nalezení parametrů GMM je často používána EM metoda (Expectation-maximization) [66], případně její výpočetně méně náročná modifikace [67]. Další aplikace GMM a smíšených metod lze nalézt v aktuální přehledové publikaci [68].

### 1.1.3 Markovovy skryté modely

# TODO

## 1.2 Neuronové sítě

V této podkapitole je uveden menší souhrn přístupů využívajících různé typy neuronových sítí. Jmenovitě se jedná metodu podpůrných vektorů, samoorganizující se mapy, konvoluční neuronové sítě a autoenkodéry, které se v posledních letech začali v oblasti ND uplatňovat velice často.

### 1.2.1 Metoda podpůrných vektorů

Metody detekce novosti pomocí SVM vycházejí ze dvou různých přístupů. První přístup vychází předpokladu, že obvyklá data se vyskytují v oblastech s vysokou hustotou rozdělení. Data která se považují za nová potom leží v oblastech s nízkou hustotou. #TODO

Druhý přístup vyžaduje předem oklasifikovaná data .

### 1.2.2 Samoorganizující se mapy

#TODO

### 1.2.3 Konvoluční neuronové sítě

#TODO

### 1.2.4 Autoenkodéry

Autoenkodéry jsou speciálním typem neuronových sítí. Jejich specifikem je, že vstupní i výstupní vrstva obsahují stejný počet neuronů. Počty neuronů ve skrytých vrstvách jsou však menší. Při učení těchto sítí je cílem získat na výstupu enkodéru identický vektor dat jako je na vstupu. Každý autoenkodér můžeme reprezentovat pomocí dvou sítí. Kódovací síť realizuje zobrazení z prostoru vzorů do prostoru featur. Vzhledem k rozdílné dimenzi těchto prostorů je možné uvedenou operaci označit jako kódování. Uvažujme vstupní vektor  $x \in R^n$ .

Reprezentace tohoto vektoru ve skryté vrstvě  $z(x) \in R^m$  je obecně určená funkcí

$$z(x) = f_1(W_1x + b_1) \quad (1.2)$$

kde  $f_1$  je nelineární aktivační funkce,  $W_1 \in R^{n \times m}$  je matice vah a  $b_1 \in R^m$  je vektor příslušných biasů. Tato zakódovaná reprezentace vzoru  $x$  je zobrazena do prostoru rekonstruovaných vzorů  $\hat{x} \in R^n$ , přičemž toto zobrazení je realizováno výstupní vrstvou autoenkodéru, tedy

$$\hat{x} = f_2(W_2z(x) + b_2) \quad (1.3)$$

kde  $f_2$  je vhodná funkce,  $W_2 \in R^{m \times n}$  je matice vah a  $b_2$  je vektor příslušných biasů [48]. Při učení autoenkodérů se obvykle minimalizuje tzv. chyba rekonstrukce, definovaná jako

$$\mathcal{L}(x, \hat{x}) = \|x - \hat{x}\|^2 \quad (1.4)$$

pomocí metody zpětného šíření (backpropagation).

V [49] používají autoři autoenkodér pro detekci novosti tak, že nejprve autoenkodér naučí a poté mu předkládají různé vzory. Podle chyby rekonstrukce pak usuzují, zda lze předložený vzor klasifikovat jako nový nebo nikoliv. Rozhodovacím kritériem je tedy velikost chyby rekonstrukce  $\mathcal{L}$ . Pokud je chyba rekonstrukce větší než zvolená prahová hodnota, pak je vzor klasifikován jako nový. Stejné kritérium pro detekci novosti v audio datech používají i autoři v [50]. Požívají ale modifikovanou strukturu autoenkodéru, jehož skrytá vrstva obsahuje více neuronů než vstupní a výstupní vrstva (denoising autoecoder). Tento typ autoenkodérů bývá využit k odstranění šumu v časových řadách. V [48] navrhuji autoři pro detekci novosti využít odhad hustoty skryté vrstvy. Pokud vstup autoenkodéru má nízkou hustotu ve skryté vrstvě, je tento vstup klasifikován jako nový. Pro modelování hustoty skryté vrstvy autoři navrhuji používat jádrový odhad. Oblastí, ve které nacházejí autoenkodéry uplatnění je i oblast hlubokého učení. V [51] je použito série autoenkodérů, kde vstupem do každého enkodéru je výstup předcházejícího. Je tedy nutné pracovat se řadou chyb rekonstrukce. Práh pro určení zda-li se jedná o data nová, označme  $\beta$ , pak autoři navrhuji ve tvaru

$$\beta = \alpha \times \text{median}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) \quad (1.5)$$

kde  $n$  je počet použitých autoenkodérů a  $\alpha$  je volitelný koeficient. Tento práh je porovnáván s celkovou chybou rekonstrukce sítě autoenkodérů. Ve článku [52] je navržen nový typ autoenkodéru DGP-EV (Deep Gaussian Process autoencoder), jehož kódovací a dekódovací část využívá gaussovských procesů. Předností uvedené sítě je možnost využití v oblastech, kde se pracuje s daty kategorickými i numerickými. Autoenkodéry nalézají uplatnění i v oblastech zpracování obrazu. Pro kategorizaci objektů v obraze a detekci neznámých objektů používají



autoři v [53] autoenkodér s dvěma dekodovacími sítěmi, pro jehož učení využívají algoritmus GZSL (Generalized Zero Shot Learning). Pro detekci nového objektu pak navrhuji využívat k nově zavedenou funkci, která využívá chyby rekonstrukce obou dekodovacích vrstev. Řada přístupů k ND s využitím autoenkodérů využívá různé modifikované struktury, ať již to jsou např. rekurentní autoenkodéry [54, 55], variační autoenkodéry [56] nebo tzv. self-adversarial variační autoenkodéry [57].

## 1.3 Další vybrané metody využívající adaptivní filtry

### 1.3.1 Metoda set-membership

Metoda set-membership [42, 47] je metoda použitá nejen ke zrychlení adaptace filtru ale i pro ND. Tato metoda pracuje s chybou predikce a adaptivním filtrem. Základní myšlenka je, že pokud je chyba predikce filtru  $e$  větší než nějaká prahová hodnota  $\gamma$ , dojde k adaptaci tohoto filtru. Podmínka pro adaptaci filtru je tedy ve tvaru

$$|e(k)| > \gamma. \quad (1.6)$$

V okamžiku, kdy dochází k adaptaci filtru lze hovořit o novosti v datech. V originálním článku [42] autoři metodu využívají ke zrychlení konvergence NLMS algoritmu a přicházejí s novým způsobem adaptace vah filtru, algoritmem SM-NLMS.

Diniz a Yazdanpanah v [43] používají metodu set-membership a navrhuji nový algoritmus ST-SM-NLMS, který využívají k ořezávání datasetů. Autoři zde rozdělují data do dvou množin. V první množině jsou data přinášející nějakou informaci a ve druhé data které novou informaci nenesou. Základní myšlenka je, že pokud jsou pro adaptivní filtr data nová, bude chyba predikce v určitých mezích. Tyto meze jsou dány dvěma prahovými hodnotami a pokud se chyba predikce filtru  $e$  nachází v těchto mezích, přinášejí data z pohledu celého datasetu nějakou užitečnou informaci. Naopak data, pro která je chyba predikce adaptivního filtru malá tuto informaci nepřinášejí a stejně tak data, pro které je chyba predikce příliš velká jsou outlier a tedy nepřinášejí žádnou užitečnou informaci. Oproti klasickému SM-NLMS algoritmu, který pracuje s jedním prahem tedy autoři navrhuji prahy dva. Podmínka pro adaptaci filtru je potom ve tvaru

$$\bar{\gamma}_1 \leq |e(k)| \leq \bar{\gamma}_2 \quad (1.7)$$

Výsledná metoda slouží ke snížení výpočetního času pro adaptaci filtru a zároveň data klasifikuje do dvou výše zmíněných množin.

Algoritmy založené na metodě set-membership našly široké uplatnění v řadě oblastí. Jmenujme alespoň oblast mobilní robotiky, kde se používají např. při fúzi dat z vícero senzorů [44], při lokalizaci a řízení podvodních robotů [45] nebo při detekci poruch [46].

### 1.3.2 Algoritmus Learning Entropy

Algoritmus Learning Entropy (LE) je algoritmem, který využívá adaptivních filtrů (obvykle LNU a HONU) k detekci novosti v datech [9, 10]. Autoři ukazují, že ne vždy, je novost v datech korelována s chybou predikce, a k detekci novosti navrhuji využívat přírůstky vah adaptivních filtrů  $\Delta \mathbf{w}$ , které jsou získány použitím gradientní metody a adaptací s každými novými daty. V první publikaci [10] je popsán multifraktální přístup, který využívá uspořádané množiny různých hodnot prahů

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_\alpha}\}, \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{n_\alpha} \quad (1.8)$$

přičemž  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n_\alpha\} : \alpha_i \in R$ . Míra novosti "Approximate Individual Sample Learning Entropy" je potom definovaná jako

$$E_A(k) = \frac{1}{n \cdot n_\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_j^{n_\alpha} f(|\Delta w_i(k)|, \alpha_j) \quad (1.9)$$

kde funkce  $f$  je

$$f(\Delta w_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } |\Delta w_i(k)| > \alpha_j \cdot \overline{|\Delta w_i^M(k)|} \\ 0 & \text{if } |\Delta w_i(k)| \leq \alpha_j \cdot \overline{|\Delta w_i^M(k)|} \end{cases} \quad (1.10)$$

kde  $n$  je počet adaptivních parametrů filtru,  $n_\alpha$  je počet citlivostních prahů (respektive počet prvků množiny  $\boldsymbol{\alpha}$ ) a  $\overline{|\Delta w_i^M(k)|}$  průměrná hodnota přírůstku  $i$ -té adaptivní výhy v plovoucím okně délky  $M$ . Člen  $1/(n \cdot n_\alpha)$  normalizuje hodnotu AISLE takže  $E_A \in \langle 0, 1 \rangle$ . Toto hodnotu lze interpretovat tak že pokud se blíží 0, váhy se téměř nemění a z pohledu adaptace filtru se příliš neliší od minulých dat. Naopak vysoké hodnoty  $E_A$  znamenají, že dochází k velkým změnám velkého množství adaptivních vah a data se nějakým způsobem liší od předchozích.

V publikaci [9] pak autoři navrhuji tzv. přímý algoritmus pro výpočet LE. Ta je vypočítána jako

$$LE(k) = \sum_{i=1}^n \max\{0, z(|\Delta w_i(k)|) - \beta\}; \quad (1.11)$$

kde funkce  $z$  je označovaná jako speciální  $z$ -score a je definovaná jako

$$z(|\Delta w_i(k)|) = \frac{|\Delta w_i(k)| - \overline{|\Delta \mathbf{w}_i^M(k-1)|}}{\sigma(|\Delta \mathbf{w}_i^M(k-1)|)} \quad (1.12)$$

kde

$$\overline{|\Delta \mathbf{w}_i^M(k-1)|} = \frac{\sum_{j=1}^M w_i(k-j-m)}{M} \quad (1.13)$$

je průměr hodnot přírůstku adaptivních vah, přičemž parametr  $M$  je délka plovoucího okna, z kterého je spočítán průměr přírůstků  $i$ -té váhy a parametr  $m$  je volitelný parametr pro data

které vykazují periodicitu a  $\sigma(\sigma(|\Delta \mathbf{w}_i^M(k-1)|))$  je směrodatná odchylka těchto  $M$  přírůstků. Pro takto definovanou LE pak platí, že  $E(k) \in \langle 0, +\infty \rangle$ . Tento přístup umožňuje detekovat změny adaptivních parametrů, které jsou větší než jejich průměr zvětšený o  $\beta$  násobek jejich směrodatné odchylky a zároveň obchází nutnost výpočtu přes několik citlivostních prahů jako v případě 1.9. Pokud bychom chtěli detekovat i neobvykle malé změny adaptivních parametrů, navrhnou autoři vztah pro výpočet LE 1.11 modifikovat na tvar

$$E(k) = \sum_{i=1}^{n_w} z(|\Delta w_i(k)|); E \in R \quad (1.14)$$

který v případě negativních hodnot  $z(|\Delta w_i(k)|)$  nemusí poskytovat jasnou hranici mezi obvyklými a neobvyklými změnami adaptivních parametrů.

### 1.3.3 Algoritmus Error and Learning Based Novelty Detection

Algoritmus Error and Learning Based Novelty Detection (ELBND) [11, 12] je dalším z algoritmů detekce novosti, které využívají adaptivních filtrů, jejichž parametry jsou adaptovány vždy s novými daty. Každý naměřený vzorek dat je popsán vektorem hodnot, na základě přírůstku adaptivních vah a chyby filtru, definovaným jako

$$elbnd(k) = \Delta \mathbf{w} \cdot e(k) \quad (1.15)$$

který popisuje novost v daném vzorku dat. Skalární hodnotu popisující novost ve vzorku dat pak autoři navrhnou získat buď jako maximum z absolutních hodnot vektoru  $elbnd(k)$ , takže skalární míra novosti  $ELBND(k)$  je definovaná jako

$$ELBND(k) = \max_{1 \leq i \leq n_w} |\Delta w_i(k) \cdot e(k)|. \quad (1.16)$$

Další možností je určit míru novosti jako součet absolutních hodnot jednotlivých přírůstků násobených chybou filtru, tedy

$$ELBND(k) = \sum_{i=1}^{n_w} |\Delta w_i(k) \cdot e(k)| \quad (1.17)$$

Uvedený algoritmus, využívající vztah 1.16, byl úspěšně použit k adaptivní klasifikaci EEG pacientů s demencí [13].



## 2 Číslicové adaptivní filtry a algoritmy

Tato kapitola je věnována diskrétním adaptivním filtrům, které byly v průběhu práce na tématu dizertační práce použity (viz podkapitola 2.1 a algoritmům, které byli k jejich adaptaci použity (viz podkapitola 2.2). Z pohledu klasifikace filtrů dle impulsní charakteristiky se jedná o filtry s konečnou impulsní charakteristikou (viz podkapitola) i o filtry s nekonečnou impulsní charakteristikou (viz podkapitola). Z pohledu lineární závislosti adaptabilních parametrů potom na filtry lineární a nelineární v parametrech.

Obecně problém filtrace spočívá ve zpracování signálu filtrem tak, že ze signálu získáme nějakou užitečnou informaci[6].

Pro úplnost uveďme, že signálem rozumíme fyzikální veličinu, která se mění v čase, prostoru nebo v jakékoliv jiné nezávislé proměnné (obecně proměnných) [4]. V rámci dizertace jsou analyzovány pouze signály, které se mění v čase.

Jedno ze základních dělení signálů je rozdělení na signály spojitě a diskrétní, přičemž signál může být spojitý, resp. diskrétní v čase nebo amplitudě. Uvažujme signál spojitý v čase i amplitudě  $s(t)$ . Pro takový signál platí, že hodnota jeho amplitudy  $s(t) \in R$  a hodnota nezávislé proměnné  $t$  je z nějakého intervalu  $(t_1; t_2)$ , kde  $t_1 \in R$  a  $t_2 \in R$  (předkládaná dizertační práce se nezabývá komplexními signály). Signál spojitý v amplitudě a diskrétní v čase vznikne vzorkováním původního signálu  $s(t)$  pomocí vzorkovací funkce ve tvaru

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \quad (2.1)$$

kde  $\Delta t$  je vzorkovací perioda (uvažujeme konstantní vzorkovací periodu) a  $\delta$  je, z pohledu teorie distribucí, lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí  $\varphi$  (všech hladkých funkcí na  $R$  s kompaktním supportem, které mají požadovaný počet derivací) definovaný jako

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (2.2)$$

pro každou testovací funkci  $\varphi$  [7]. Pro navzorkovaný signál tedy platí

$$s(k) = s(t) \cdot v(t) \quad (2.3)$$

a výsledkem je posloupnost vzorků  $s(k)$ . Signál spojitý v čase a diskretní v amplitudě získáme aplikací kvantizační funkce  $Q(s)$ , která převede hodnotu signálu na číslo z nějaké množiny přípustných hodnot, (typicky to bývá celé číslo, případně číslo s plovoucí desetinnou čárkou). Existuje celá řada kvantizačních algoritmů (více viz [8]), takže pro úplnost uvedeme pouze základní uniformní kvantizátor s velikostí kvantizačního kroku definovanou jako

$$q = \frac{s_{max} - s_{min}}{L} \quad (2.4)$$

kde  $L$  určuje počet intervalů o délce  $q$ . Potom kvantizovanou hodnotu můžeme určit jako

$$Q(s) = \left\lfloor s - \frac{s_{min}}{q} \right\rfloor q + \frac{q}{2} + s_{min} \quad (2.5)$$

Signál, který je diskretní v čase i amplitudě bývá označován jako digitální signál a právě těmito signály se předložená dizertační práce zabývá.

Signály dále můžeme rozdělit na skalární a vektorové. Vektorových (někdy též označovaných jako vícekanálový) signálem je například EEG. Některé systémy pro měření EEG využívají až 256 kanálů [5]. Takový signál můžeme v časovém okamžiku  $k$  reprezentovat 256ti dimenzionálním vektorem

$$\mathbf{s}(k) = [s_1(k), \dots, s_{256}(k)]^T \quad (2.6)$$

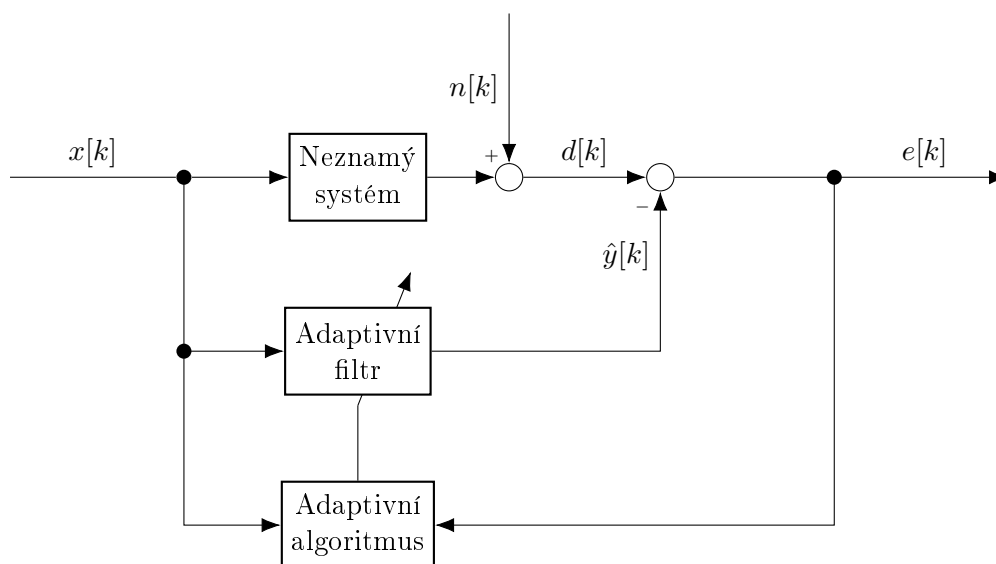
kde  $i$ -tá složka  $s_i(k)$  odpovídá signálu  $i$ -tého kanálu. Skalární signál (někdy též označovaný jako jednorozměrný) je pak např. právě  $i$ -tá složka signálu  $\mathbf{s}(k)$ .

Z pohledu počtu nezávislých proměnných, jejichž funkcí lze signál vyjádřit lze rozlišovat mezi signály jednorozměrnými a vícerozměrnými. Jednorozměrným signálem je například záznam jednoho kanálu EEG, kde hodnota signálu  $s_i(k)$  je závislá pouze na čase. Vícerozměrným signálem může např. digitální obraz, jehož intenzita je funkcí souřadnic  $I(x, y)$ .

Další dělení signálu je na signály deterministické a náhodné. Pokud můžeme popsat signál pomocí explicitního matematického zápisu, tabulky nebo pravidlem tak, že pro každý časový okamžik získáme jednoznačnou hodnotu, jedná se o signál deterministický. V opačném případě jsou signály, jejichž hodnota lze určit pouze s nějakou pravděpodobností označovány jako náhodné (stochastické). Typickým příkladem náhodného signálu je např. bílý šum. Ze stochastických signálů jsou z pohledu této práce je zajímavé ještě dělení na ergodické a stacionární signály. Pro stacionární signály je jejich pravděpodobnostní popis nezávislý na počátku časové osy. Ergodické signály jsou pak signály jejichž statistické vlastnosti lze určit z libovolné, dostatečně velké, množiny dat a tyto vlastnosti se v čase nemění.

Filtr můžeme použít v následujících základních úlohách zpracování signálů:

- filtrace
- vyhlazování
- predikce



Obrázek 2.1: Schéma adaptivní filtrace

V rámci této práce byli všechny filtry využity k predikci, jejíž chyba  $e$  byla využita k adaptaci parametrů daného filtru (více viz podkapitola 2.2).

## 2.1 Adaptivní filtry

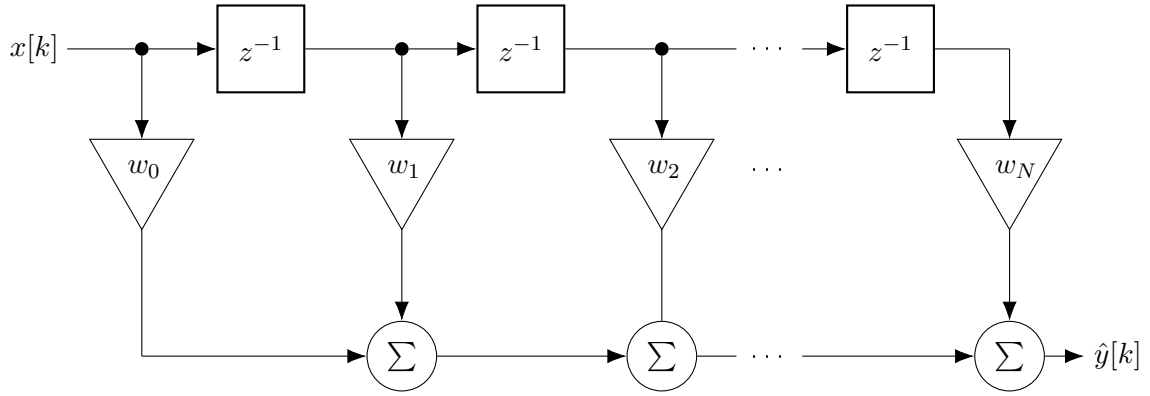
V této podkapitole jsou stručně popsány adaptivní filtry, které byly v rámci práce použity. FIR (finite impulse response) adaptivní filtry jsou popsány v podkapitole 2.1.1, Volterrové filtry v podkapitole 2.1.2 a adaptivní fuzzy filtry v podkapitole 2.1.4.

### 2.1.1 Lineární FIR filtry

Výstup FIR (finite-impulse-response) filtru  $\hat{y} \in \mathbb{R}$  v diskrétním čase  $k \in \mathbb{Z}$  je popsán rovnicí

$$\hat{y}[k] = \sum_{i=0}^N w_i \cdot x[k-i] \quad (2.7)$$

kde  $w_i \in \mathbb{R}$  hodnota  $i$ -tého koeficientu,  $x[k-i]$  je hodnota vstupu  $x \in \mathbb{R}$  posunutá o  $i$  hodnot v čase, hodnota  $N$  je řád filtru. Pokud jsou koeficienty FIR filtru v čase adaptovány, přejde



Obrázek 2.2: Blokový diagram FIR filtru

rovnice (2.7) do tvaru

$$\hat{y}[k] = \sum_{i=0}^N w_i[k] \cdot x[k-i] \quad (2.8)$$

kde člen  $w_i[k]$  reprezentuje hodnoty koeficientů filtru v diskrétním čase  $k$ . V následujícím textu, již uvažujeme, že veškeré adaptivní filtry mají v čase proměnné koeficienty  $w$ . Někdy se pro popis výstupu FIR filtru využívá operátoru konvoluce, potom pro výstup FIR filtru platí

$$\hat{y}[k] = h[k] * x[k] = x[k] * h[k] \quad (2.9)$$

Hodnoty  $h[k]$  v reprezentují impulzní odezvu filtru. Impulzní odezva filtru je definovaná jako

$$h[k] = \sum_{i=0}^N w_i \cdot \delta[k-i] = \begin{cases} w_i & 0 \leq k \leq N \\ 0 & k < 0 \vee k > N \end{cases} \quad (2.10)$$

Konečnost impulzní odezvy je dána konečným počtem  $N+1$  koeficientů filtru. Pokud koeficienty filtru splňují podmínku  $\forall i : w_i < \infty$ , potom je FIR filtr stabilní.

Uvedný filtr (viz rovnice (2.7)) lze zapsat ve tvaru

$$\hat{y}(k) = \mathbf{w}(k) \cdot \mathbf{x}(k) \quad (2.11)$$

kde  $\mathbf{w}(k)$  je vektor vah

$$\mathbf{w}(k) = [w_1, \dots, w_N] \quad (2.12)$$

a  $\mathbf{x}(k)$  je vstupní vektor

$$\mathbf{x}^T(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N)] \quad (2.13)$$



### 2.1.2 Volterrovy filtry

Jeden z filtrů, který se používá k modelování nelineárních systémů je nelineární Voltérrův filtr (někdy uváděný pod označením Higher Order Neural Unit - HONU). Výstup  $\hat{y}[k]$  těchto filtrů, využívajících zkrácených Voltérových řad, je popsán rovnicí

$$\begin{aligned} \hat{y}[k] = w_0 + \sum_{i=0}^{N-1} w_1(i)x(k-i) + \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=i_1}^{N-1} w_2(i_1, i_2)x(k-i_1)x(k-i_2) + \dots \\ \dots \sum_{i_1=0}^{N-1} \dots \sum_{i_p=i_{p-1}}^{N-1} w_p(i_1, \dots, i_p)x(k-i_1) \dots x(k-i_p) \end{aligned} \quad (2.14)$$

kde  $w_0$  je konstanta,  $\{w_j(i_1, \dots, i_j), 1 \leq j \leq p\}$  je množina koeficientů Volterrovo jader  $j$ -tého řádu a  $x(k)$  je vstupní signál. Filtr pracuje s pamětí  $N$  vzorků, parametr  $p$  určuje řád filtru. Analogický zápis využívající vektorové násobení

$$\hat{y}[k] = \mathbf{w} \cdot \mathbf{colx} \quad (2.15)$$

kde  $\mathbf{w}$  je uspořádaný vektor koeficientů Volterrovo jader a  $\mathbf{colx}$  uspořádaný vektor ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{colx} = [1, x[0], \dots, x[N-1], x[1] \cdot x[2], \dots, x[1] \cdot x[N-1], x[2]^2, x[2] \cdot x[3], \dots, \\ x[2] \cdot x[N-1], \dots, x[N-2] \cdot x[N-1], x[N-1]^2, \dots, \dots, x[N-1]^p]^T \end{aligned} \quad (2.16)$$

Určitým faktorem limitujícím použití Volterrovo filtrů je vysoký počet jejich parametrů, přičemž každé zvýšení počtu vzorků v paměti, nebo řádu filtru, výrazně zvýší počet jeho parametrů. Pro počet parametrů  $m$  Volterrova filtru s délkou paměti  $N$  a řádu  $p$  je dán jako

$$m(p, N) = \frac{(N+p)!}{N!p!} \quad (2.17)$$

kde  $N!$  je faktoriál  $N$  a  $p!$  je faktoriál  $p$ . Např. pro  $N = 3$  a  $p = 3$  má filtr 20 parametrů, pro  $N = 4$  a  $p = 3$  má 35 parametrů, pro  $N = 4$  a  $p = 4$  již 70 parametrů. Pro zpracování signálů v reálném čase je tedy využití Volterrových filtrů s velkou pamětí a vysokým řádem, vzhledem k vysokému počtu parametrů, komplikované. Voltérrův filtr druhého řádu bývá někdy označován Quadratic neural unit (QNU) a třetího řádu Cubic neural unit (CNU) [viz Ivo nebo IGI]. Voltérrův filtr prvního řádu je variantou standartního FIR filtru (viz kap.) v případě, že  $w_0 = 0$ . V případě, že  $w_0 \neq 0$ , je tento filtr typu IIR, tedy má nekonečnou impulsní charakteristiku.

### 2.1.3 Polynomiální neuronové jednotky

Jedním z typů nelineární filtrů, které jsou ale lineární v adaptivních parametrech jsou polynomiální neuronové jednotky, někdy též nazývané HONU (Higher Order Neural Units). Výstup HONU  $p$ -tého řádu je definován jako

$$\hat{y}(k) = \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=i_1}^n \cdots \sum_{i_p=i_{p-1}}^n w_{i_1, i_2, \dots, i_p} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_p} \quad (2.18)$$

přičemž člen  $x_{0, \dots, 0} = 1$  je označován jako bias,  $w_{i_1, i_2, \dots, i_p}$  jsou váhy a  $x_{i_j}$  je  $j$ -tý vstup. Uvedený filtr lze reprezentovat pomocí násobení vektorů, obdobně jako Volterrový filtry, jako

$$\hat{y}(k) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{colx} \quad (2.19)$$

kde  $w$  je uspořádaný vektor adaptivních parametrů

$$\mathbf{w} = [w_{0, \dots, 0}, \dots, w_{n, \dots, n}] \quad (2.20)$$

a  $\mathbf{colx}$  je odpovídajícím způsobem uspořádaný vektor vstupů ve tvaru

$$\mathbf{colx} = [1, x_{0, \dots, 1}, \dots, x_{n, \dots, n}]^T \quad (2.21)$$

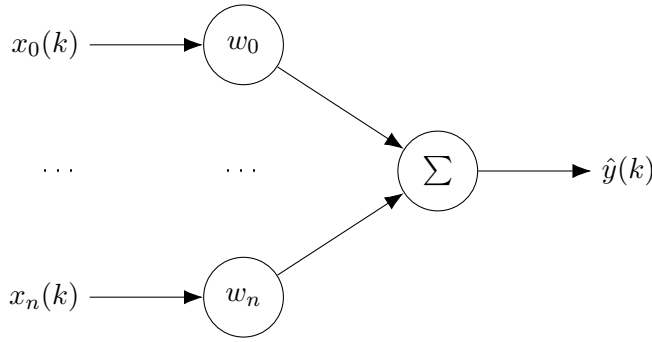
přičemž pokud vektor vstupů obsahuje časově spožděné vzorky vstupního signálu, jsou HONU identické s Volterrovými filtry. Pokud je vstupem  $n+1$ -dimenzionální vektor různých vstupů, tak je HONU kombinačním filtrem. HONU prvního řádu bývá označována jako lineární neuronová jednotka (LNU). Pokud jsou vstupem do LNU časově posunuté hodnoty vstupního signálu, je identická s klasickým FIR filtrem (viz kapitola 2.1.1), protože její výstup je definován jako

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot x(k-i) \quad (2.22)$$

Pokud je vstupem  $n+1$ -dimenzionální vektor  $n+1$  různých vstupů, potom je LNU klasickým lineárním kombinačním filtrem (viz obr. 2.3). Použijeme-li terminologii neuronových sítí, potom je lineárním neuronem, kde  $\mathbf{w}$  je vektor synaptických vah,  $\mathbf{x}$  je vstupní vektor a přenosová funkce tohoto neuronu realizuje lineární kombinaci.

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot x_i(k) \quad (2.23)$$

Často používanými HONU jsou jednotky druhého (quadratic neural unit - QNU) a třetího řádu (cubic neural unit - CNU). Podobně jako pro Volterrový filtry, i úskalím použití HONU vyššího řádu s velkou pamětí je velký počet parametrů.



Obrázek 2.3: LNU jako lineární kombinační filtr

#### 2.1.4 Fuzzy filtry

Jedním z rozšířených typů nelineárních adaptivních filtrů jsou filtry založené na fuzzy logice. (Fuzzy adaptive filters, with application to nonlinear channel equalization) V rámci práce byl použit fuzzy adaptivní filtr, tvořený Mamdaniho fuzzy systémem se součinným inferenčním mechanismem a defuzzifikací využívající metody těžiště typických hodnot. Báze pravidel tohoto fuzzy filtru je tvořena  $M$  pravidly, kdy  $l$ -té pravidlo je ve tvaru

$$Ru^l : IF x_1 is A_1^l and x_2 is A_2^l and \dots x_n is A_n^l THEN \hat{y} is B^l \quad (2.24)$$

kde  $A_i^l$  je  $i$ -tá množina ve vstupním prostoru  $U \subset R^n$ ,  $B^l$  je fuzzy množina ve výstupním prostoru  $V \subset R$  a  $x_i \in U$  a  $\hat{y} \in V$  jsou lingvistické proměnné. Fuzzy množiny ve výstupním prostoru jsou singletony, obsahují tedy jediný prvek  $x^*$  z univerza  $X$  a pro jejich funkce příslušnosti (charakteristické funkce) platí, že

$$\mu_B(x^*) = 1 \quad (2.25)$$

takže jádro této množiny je identické s jejím nosičem a obsahují pouze jeden stejný prvek.

$$ker(B) = supp(B) = \{1/x^*\} \quad (2.26)$$

Studovaný fuzzy systém využívá součinné konjukce a Larsenovy implikace. Tím se převede vyhodnocení implikace na několik součinů tak, že pro  $j$ -té pravidlo platí

$$\begin{aligned} [\mu_{A_1^j}(x_1) AND \mu_{A_2^j}(x_2) AND \dots AND \mu_{A_n^j}(x_n)] &\implies \mu_{B^j}(\hat{y}) = \\ &= \mu_{A_1^j}(x_1) \cdot \mu_{A_2^j}(x_2) \cdot \dots \mu_{A_n^j}(x_n) \cdot \mu_{B^j}(\hat{y}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

kde  $\mu_{A_i^j}(x_i)$  je funkce příslušnosti k  $i$ -té množině  $j$ -tého pravidla ve vstupním prostoru a  $\mu_{B^j}$  je funkce příslušnosti ke množině ve výstupním prostoru.

Defuzzifikace převádí fuzzy do její reprezentace pomocí jediného čísla z množiny ostrých hodnot. Metodou těžiště typických hodnot se výstup fuzzy systému určí podle rovnice

$$y^* = \frac{\sum_{j=1}^M \bar{b}^j z_j}{\sum_{j=1}^M z_j} \quad (2.28)$$

kde  $\bar{b}^j$  je střed  $j$ -té fuzzy množiny reprezentující příslušné pravidlo a  $z_j$  je její váha ve smyslu hodnoty funkce příslušnosti tohoto pravidla.

Výstup uvedeného fuzzy systému je potom ve tvaru

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{j=1}^M \bar{b}^j [\prod_{i=1}^n \mu_i^j(x_i)]}{\sum_{j=1}^M [\prod_{i=1}^n \mu_i^j(x_i)]} \quad (2.29)$$

přičemž  $\mathbf{x}$  je vektor vstupů o délce  $n$

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \quad (2.30)$$

a  $\bar{b}^j$  je střed výstupní množiny  $B^j$ , což je fuzzy množina  $j$ -tého pravidla.

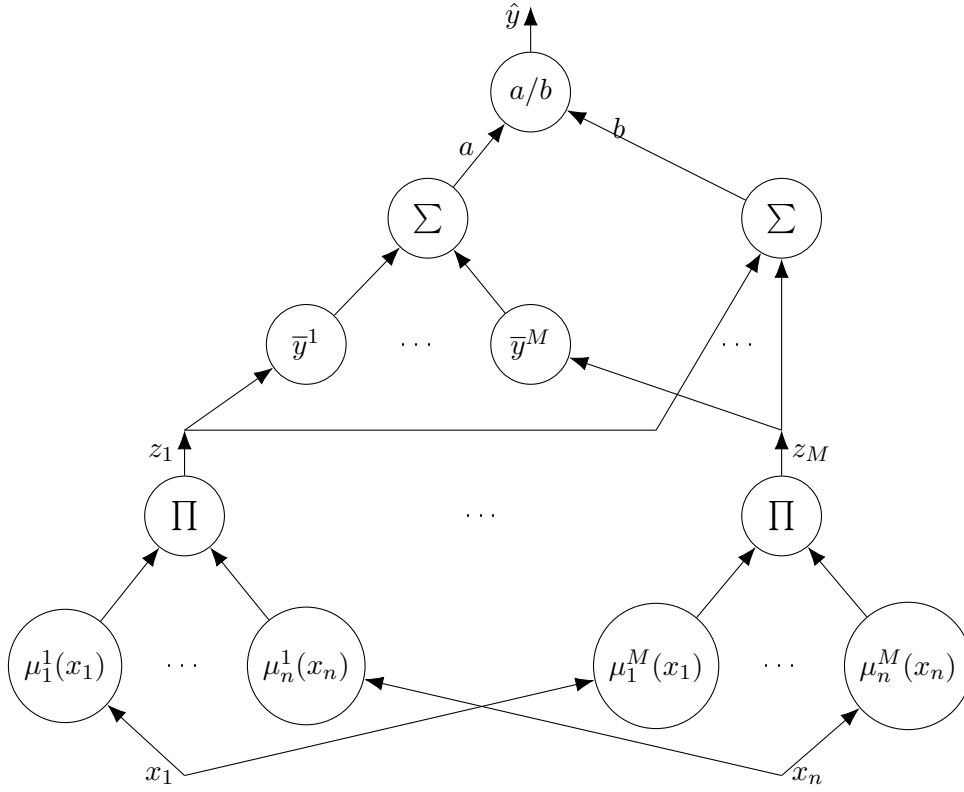
Funkce filtru lze znázornit třívrstvou dopřednou sítí (viz Figure 2.4).

V první vrstvě jsou určeny váhy jednotlivých pravidel, tedy jsou vypočteny hodnoty  $z_j$ , kde  $j = 1, \dots, M$ . V druhé vrstvě jsou váhy jednak pronásobeny hodnotami středů a sečteny (výpočet  $a$ ), druhak jsou váhy jednotlivých pravidel sečteny ( $b$ ). Ve třetí vrstvě se pak vypočte výstup fuzzy systému jako  $\hat{y} = \frac{a}{b}$  (více viz podkapitola 2.2.4).

Nespornou výhodou uvedeného fuzzy adaptivního filtru je, že tvoří tzv. univerzální aproximátor. Při vhodně zvolené bázi pravidel a typu funkcí příslušnosti množin ve vstupním prostoru tak dokážet aproximovat libovolnou funkci s libovolně velkou přesností (více viz. [? ])

## 2.2 Adaptivní algoritmy

V této podkapitole jsou popsány adaptivní algoritmy, které byly v rámci dizertační práce vyzkoušeny. Jedná se o LMS a NLMS (viz podkap. 2.2.1), Generalized Normalized Gradient Descent (GNGD, viz podkap. 2.2.3) a algoritmus Gradient descent ve verzi pro adaptivní fuzzy filtry s Gausovskými funkcemi příslušnosti ve vstupním prostoru (viz podkap. 2.2.4).



Obrázek 2.4: Fuzzy filtr jako dopředná síť

### 2.2.1 Algoritmy LMS a NLMS

Při použití LMS algoritmu optimální hodnoty adaptivních parametrů filtru  $\mathbf{w}(k+1)$  minimalizují střední kvadratickou chybu predikce  $J(k)$  definovanou jako

$$J(k) = E[|e(k)|^2] \quad (2.31)$$

kde  $E[\cdot]$  značí střední (očekávanou) hodnotu, a  $e(k)$  je chyba predikce, definovaná jako rozdíl výstupu adaptivního filtru a skutečné hodnoty

$$e(k) = d(k) - \hat{y}(k). \quad (2.32)$$

Hodnoty adaptivních parametrů filtru jsou nalezeny gradientním algoritmem. S každými nově získanými daty jsou potom váhy filtru upraveny podle rovnice

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \Delta \mathbf{w}(k) \quad (2.33)$$

přičemž pro LMS algoritmus je přírůstek vah definován jako

$$\Delta \mathbf{w}(k) = -\frac{\mu}{2} \nabla_{\mathbf{w}} E[|e(k)|^2] = \mu E[\mathbf{x}(k)e(k)] \quad (2.34)$$

kde  $\mu$  je rychlost učení (velikost kroku) ovlivňující rychlost konvergence algoritmu a  $\nabla$  je operátor nabra

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_n} \right). \quad (2.35)$$

Protože jsou parametry filtru přepočítány s každými nově získanými daty (online), je možné nahradit očekávanou hodnotu  $E[\mathbf{x}(k)e(k)]$  hodnotou okamžitou. Výpočet nových hodnot parametrů adaptivního filtru tak přejde do tvaru

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu \mathbf{x}(k)e(k) \quad (2.36)$$

přičemž pro konvergenci a stabilitu algoritmu musí být splněna podmínka pro velikost rychlosti učení

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (2.37)$$

kde  $\lambda_{max}$  je největší vlastní číslo autokorelační matice

$$R_{xx} = E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)]. \quad (2.38)$$

Pokud není podmínka splněna, pak je algoritmus nestabilní a hodnoty  $\mathbf{w}(k)$  divergují. Pokud je naopak velikost rychlosti učení  $\mu$  příliš malá, váhy konvergují pomalu.

Algoritmus NLMS řeší problém klasického LMS algoritmu, který v případě nevhodně škálovaného vstupu  $\mathbf{x}(k)$  ztrácí stabilitu. Tento problém je vyřešen normalizací vstupu. Velikost přírůstku vah je tedy

$$\Delta \mathbf{w}(k) = \mu \frac{e(k)\mathbf{x}(k)}{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)}. \quad (2.39)$$

Podmínka pro velikost rychlosti učení zajišťující stabilitu algoritmu je v případě, že vstupní signál  $x(k)$  není korelovaný s aditivním šumem

$$0 < \mu < 2. \quad (2.40)$$

Velikost optimální rychlosti učení je ovlivněná vlastnostmi aditivního šumu  $n(k)$  a v případě, že tento šum není korelovaný se vstupním signálem  $\mathbf{x}$  je dána jako

$$\mu_{optimal} = \frac{E[|d(k) - \hat{y}(k)|^2]}{E[|e(k)|^2]} \quad (2.41)$$

Problém nastane v případě, že vektor  $\mathbf{x}(k)$  je nulový. Z tohoto důvodu, se přidává do jmenova-

tele v rovnici 2.39 malá pozitivní konstanta  $\epsilon > 0$ , která řeší problém s potenciálním dělením nulou. Změna adaptivních vah filtru je v tomto případě dána jako

$$\Delta \mathbf{w}(k) = \mu \frac{e(k) \mathbf{x}(k)}{\mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) + \epsilon} \quad (2.42)$$

a podmínka pro velikost rychlosti učení přejde do tvaru

$$0 < \mu < 2 + \frac{\epsilon}{\mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k)}. \quad (2.43)$$

### 2.2.2 Algoritmus RLS

Při použití rekurzivní metody nejmenších čtverců (RLS - recursive least squares) je odhad parametrů filtru získán na základě minimalizace kriteriální funkce ve tvaru

$$J(k) = \sum_{j=j_1}^k \lambda^{k-j} e(j)^2 \quad (2.44)$$

která je exponenciálně váženým součtem chyb výstupu posledních  $k - j_1$  vzorků, přičemž parametr  $\lambda \in (0; 1)$  je tzv. faktor exponenciálního zapomínání. Chyba výstupu je pak definována jako

$$e(j) = d(j) - \hat{y}(j) \quad (2.45)$$

kde

$$\hat{y}(j) = \mathbf{w}^T(k) \mathbf{x}(j) \quad (2.46)$$

přičemž  $\mathbf{w}^T(k)$  je vektor adaptivních parametrů filtru

$$\mathbf{w}^T(k) = [w_0(k), w_1(k), \dots, w_n(k)] \quad (2.47)$$

a  $\mathbf{x}(k)$  je vstupní vektor v diskretním časovém okamžiku  $k$  obsahující posledních  $n + 1$  vzorků a definovaný jako

$$\mathbf{x}(j) = [x(j), x(j-1), \dots, x(j-n)]^T \quad (2.48)$$

kde parametr  $n$  se označuje jako řád filtru. Z uvedené kriteriální funkce 2.44 je tedy zřejmé, že historicky starší chyby výstupu mají exponenciálně klesající význam a vzorky, které jsou starší než  $k - j_1$  vzorků, nejsou pro odhad parametrů filtru použity. Pro hodnoty adaptivních parametrů, které minimalizují výše uvedenou kriteriální funkci (2.44) v diskretním časovém okamžiku  $k$  pak platí

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}(k-1) + \mathbf{P}(k) \mathbf{x}(k) [d(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}(k-1)] \quad (2.49)$$

kde matice  $\mathbf{P}(k)$  je

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{P}(k-1) - \frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}(k-1)}{\lambda + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)} \right]. \quad (2.50)$$

Člen  $\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k-1)$  v rovnici (2.49) reprezentuje apriorní chybu filtru, která je vypočtena ještě před korekcí adaptivních vah. Kritérium, která je minimalizováno (viz rovnice (2.44)) ale obsahuje aposteriorní chyby filtru, která je vypočtena po korekci adaptivních vah (zde se nabízí určitá podobnost s Kalmanovým filtrem, více viz [3]). Dále poznamenejme, že  $\mathbf{P}(k)$  je inverzní maticí k vážené výběrové kovarianční matici  $\mathbf{R}_x(k)$  definované jako

$$\mathbf{R}_x(k) = \lambda^k \mathbf{R}_x(0) + \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} \mathbf{x}(j)\mathbf{x}^T(j) = \lambda \mathbf{R}_x(k-1) + \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k) \quad (2.51)$$

přičemž  $\mathbf{R}_x(0)$  je počáteční hodnota. V praxi se počáteční hodnota matice  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{R}_x^{-1}(0)$  volí jako

$$\mathbf{P}(0) = \delta \cdot \mathbf{I} \quad (2.52)$$

kde  $\delta$  je dostatečně velká pozitivní konstanta a  $\mathbf{I}$  je jednotková matice (v některé literatuře nazývaná jako matice identity). Pro signály s vysokým poměrem výkon-šum se volí malé hodnoty  $\delta$ , pro signály s malým poměrem výkon-šum pak velké hodnoty  $\delta$ . Pokud je k dispozici apriorní informace o  $\sigma_x^2$  tedy varianci vstupního signálu  $x(k)$ , volí se hodnota konstanty podle [2] jako

$$\delta > 100\sigma_x^2. \quad (2.53)$$

Počáteční hodnota adaptivních parametrů se obvykle volí jako

$$\mathbf{w}(0) = 0. \quad (2.54)$$

### 2.2.3 Algoritmus Generalized Normalized Gradient Descent

Algoritmus Generalized Normalized Gradient Descent (GNGD) řeší problém případné pomalé konvergence algoritmu NLMS zavedením dalšího kompenzačního členu, který ovlivňuje velikost kroku při gradientní adaptaci. Nejprve uvažujme kvadratickou kritériální funkce ve tvaru

$$J(k) = \frac{1}{2} e^2(k) \quad (2.55)$$

a adaptaci parametrů ve tvaru (2.42). Malou pozitivní konstantu  $\epsilon$  nahradíme dalším adaptivním členem

$$\epsilon(k+1) = \epsilon(k) - \rho \nabla_{\epsilon(k-1)} J(k) \quad (2.56)$$



přičemž

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(k)}{\partial \epsilon(k-1)} &= \frac{\partial J(k)}{\partial e(k)} \frac{\partial e(k)}{\partial y(k)} \frac{\partial y(k)}{\partial \mathbf{x}(k)} \frac{\partial \mathbf{w}(k)}{\partial \eta(k-1)} \frac{\partial \eta(k-1)}{\partial \epsilon(k-1)} = \\ &= \frac{e(k)e(k-1)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k-1)}{(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \epsilon(k-1))^2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Adaptace parametrů je tedy dána jako

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \eta(k)e(k)\mathbf{x}(k) \quad (2.58)$$

kde

$$\eta(k) = \frac{\mu}{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \epsilon(k)} \quad (2.59)$$

$$\epsilon(k) = \epsilon(k-1) - \rho\mu \frac{e(k)e(k-1)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k-1)}{(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \epsilon(k-1))^2} \quad (2.60)$$

přičemž parametr  $\rho$  je parametr adaptace velikosti kroku při spuštění algoritmu. Algoritmus GNGD je vhodný pro zpracování nelineárních a nestacionárních signálů.

## 2.2.4 Gradient descent pro fuzzy filtry

Při použití metody gradient descent pro adaptivní fuzzy filtry je potřeba nejdříve specifikovat strukturu filtru, tedy počet pravidel, množiny ve vstupním a výstupním prostoru, typ inferenční metody, fuzzifikace a defuzzifikace. Uvažujme fuzzy systém specifikovaný v podkapitole 2.1.4, v jehož vstupním prostoru  $U \subset R^n$  jsou Gaussovske funkce příslušnosti ve tvaru

$$\mu_{A_i^j}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right] \quad (2.61)$$

kde  $\bar{x}_i^j$  je středem  $i$ -té vstupní množiny  $j$ -tého pravidla a  $\sigma_i^j$  je parametr, určující tvar, respektive šířku, této fuzzy množiny. Zobrazení, realizované výše specifikovaným fuzzy systémem je dáno rovnicí

$$\hat{y}(x) = \frac{\sum_{j=1}^M \bar{b}^j \left[ \prod_{i=1}^n \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right) \right]}{\sum_{j=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right) \right]} \quad (2.62)$$

přičemž parametr  $M$  určující počet množin je vzhledem k adaptaci parametrem fixním a parametry  $\bar{b}^j$ ,  $\sigma_i^j$  a  $\bar{x}_i^j$  jsou parametry, které se adaptují. Dále uvažujme množinu  $N$  dvojic vstup-výstup, kde  $N$  odpovídá počtu vzorků experimentu.

$$\{\mathbf{x}^d(k), d(k)\}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.63)$$

Při použití algoritmu gradient descent pro fuzzy filtr v kontextu detekce novosti se vždy s nově naměřenými daty tento filtr adaptuje. Adaptace probíhá s každými daty na základě minimalizace kritériální funkce

$$J(k) = \frac{1}{2}[\hat{y}(\mathbf{x}(k)) - d(k)]^2 \quad (2.64)$$

kteřá je zvolená tak, aby měla právě jeden globální extrém, přičemž parametry jsou adaptovány dokud není dosaženo dostatečně malé chyby, nebo dokud není překročen předem stanovený maximální počet iterací  $q_{max}$ . Volba Gaussovských funkcí příslušnosti ve vstupním prostoru je výhodná z hlediska výpočtu derivace podle adaptabilních parametrů, neboť tato derivace existuje v každém bodě.

$$\bar{b}^j(q+1) = \bar{b}^j(q) - \mu \frac{\partial e}{\partial \bar{b}^j} \Big|_q = \bar{b}^j(q) - \mu \frac{\hat{y} - d(k)}{b(q)} z^j(q) \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^j(q+1) &= \bar{x}_i^j(q) - \mu \frac{\partial e}{\partial \bar{x}_i^j} \Big|_q = \\ &= \bar{x}_i^j(q) - \mu \frac{\hat{y} - d(k)}{b(q)} [\bar{b}^j(q) - \hat{y}] z^j(q) \frac{2[x_i(k) - \bar{x}_i^j(q)]}{\sigma_i^{j2}(q)} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^j(q+1) &= \sigma_i^j(q) - \mu \frac{\partial e}{\partial \sigma_i^j} \Big|_q = \\ &= \sigma_i^j(q) - \mu \frac{\hat{y} - d(k)}{b(q)} [\bar{b}^j(q) - \hat{y}] z^j(q) \frac{2[x_i(k) - \bar{x}_i^j(q)]^2}{\sigma_i^{j3}(q)} \end{aligned} \quad (2.67)$$

S každými nově získanými daty (v diskrétním časovém okamžiku  $k$ ) jsou tedy v  $q$ -té iteraci hodnoty parametru  $\bar{b}^j$  vypočítány podle rovnice (2.65), parametru  $\bar{x}_i^j$  podle rovnice (2.66) a parametru  $\sigma_i^j$  podle rovnice (2.67). Parametr  $\mu$  je fixní a určuje velikost kroku. Algoritmus lze shrnout následujícími 5-ti kroky:

1. **Krok** Určení počtu pravidel a počáteční nastavení parametrů  $\bar{b}^j(0)$ ,  $\bar{x}_i^j(0)$ ,  $\sigma_i^j(0)$  a velikosti kroku  $\mu$ .
2. **Krok** Pro  $ktou$  dvojici  $(\mathbf{x}(k), d(k))$  v  $q$ -té iteraci jsou vypočteny hodnoty výstupních vrstev fuzzy systému (viz obr 2.4) podle rovnic (2.68), (2.69), (2.70) a (2.71).
3. **Krok** Výpočet nových hodnot parametrů  $\bar{b}^j(q+1)$ ,  $\bar{x}_i^j(q+1)$ ,  $\sigma_i^j(q+1)$  dle rovnic (2.65), (2.66), (2.67).
4. **Krok**  $q = q+1$  a opakování kroků 2. a 3. pro , dokud není dosaženo maximálního množství iterací  $q_{max}$  nebo požadované přesnosti  $\epsilon$ .

**5. Krok** Návrat do kroku 2. pro hodnotu  $k = k + 1$ , tedy s novou dvojicí dat  $(\mathbf{x}, d)$ .

Rovnice popisující výstup jednotlivých vrstev fuzzy systému (viz obr. 2.4) následují.

$$z^j = \prod_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i(k) - \bar{x}_i^j(q)}{\sigma_i^j(q)} \right) \right] \quad (2.68)$$

$$b = \sum_{j=1}^M z^j \quad (2.69)$$

$$a = \sum_{j=1}^M \bar{b}^j(q) z^j \quad (2.70)$$

$$\hat{y} = \frac{a}{b} \quad (2.71)$$

Pro správnou funkci algoritmu je důležitá prvotní volba hodnot parametrů  $\bar{b}^j(0)$ ,  $\bar{x}_i^j(0)$ ,  $\sigma_i^j(0)$ . Náhodné hodnoty parametrů nejsou v případě použití tohoto algoritmu vhodné. Jedna z možných metod, jak vybrat hodnoty parametrů je využití prvních  $M$  dvojic vstup-výstup. Uvažujme množinu  $M$  dvojic vstup-výstup

$$\{\mathbf{x}(j), d(j)\}, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (2.72)$$

kterou využijeme k počátečnímu nastavení parametrů následujícím způsobem.

$$\bar{b}^j(0) = d(j) \quad (2.73)$$

$$\bar{x}_i^j(0) = x_i(j) \quad (2.74)$$

$$\sigma_i^j(0) = \frac{[max(x_i^l : l = 1, 2, \dots, M)] - min(x_i^l : l = 1, 2, \dots, M)}{M} \quad (2.75)$$

Pro správnou funkci algoritmu je důležitá i volba velikosti kroku  $\mu$ , která se obvykle provádí experimentálně.



### 3 Zobecněné Paretovo rozdělení

Přestože je normální rozdělení historicky často používané rozdělení v oblasti detekce novosti (zde bychom měli zmínit Grubbsův test [76] který se stal základním kamenem celé řady metod detekce novosti, resp. odlehlých vzorků), nemusí být vždy vhodné. Někdy může být střední hodnota a symetrický rozptyl zavádějící, ve smyslu výpovědní hodnoty o rozdělení sledovaných dat [75]. Zvláště, když je předmětem zájmu právě ocas rozdělení, z něhož data pocházejí.

Uveďme zde Pickland - Balkema - de Haanovu větu [77, 78] (někdy označována jako druhá věta teorie extrémních hodnot) podle které, pro řadu  $X_1, X_2, \dots$  nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením  $F$  pro které je  $F_u$  rozdělení jejich excesů přes mez  $u$  (tedy hodnot které překračují  $u$ ) platí

$$F_u(x) \rightarrow GPD(\xi, \mu, \sigma)(x), \text{ as } u \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

kde  $GPD$  je zobecněné Paretovo rozdělení a  $F_u$  je distribuční funkce hodnot překračujících práh  $u$  definovaná jako

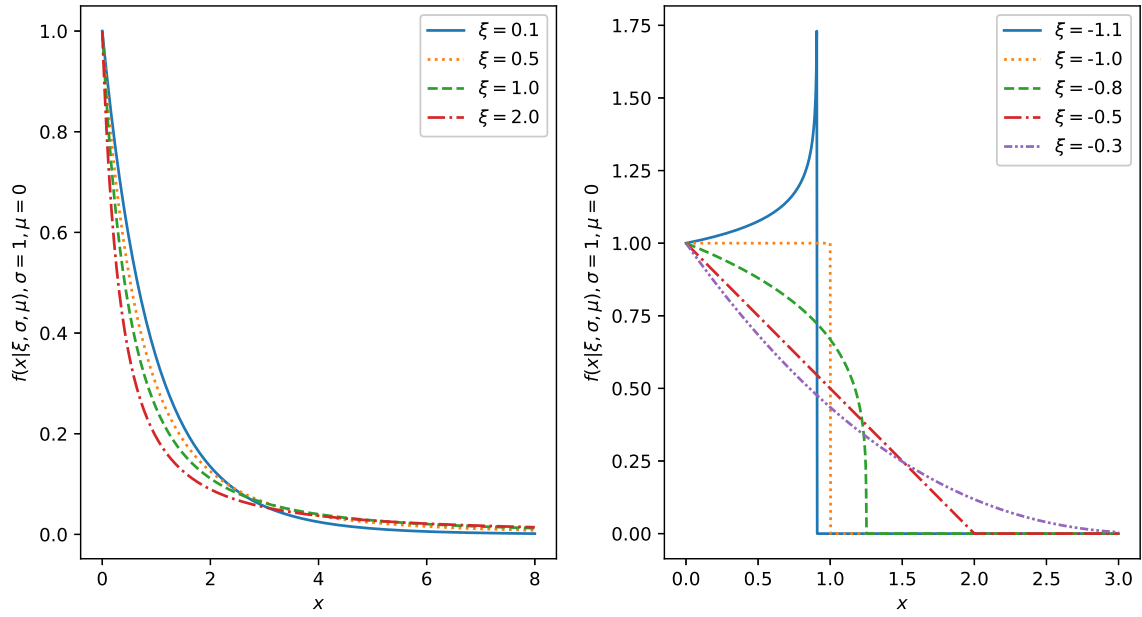
$$F_u(x) = P(X - u \leq x, X > u) = \frac{F(u+x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (3.2)$$

pro  $0 \leq x \leq x_F - u$ , kde  $x_F$  je pravý koncový bod distribuční funkce  $F$ . Funkce hustoty pravděpodobnosti GPD je potom definovaná jako

$$f_{(\xi, \mu, \sigma)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} \right)^{\left(-\frac{1}{\xi}-1\right)} & \text{for } \xi \neq 0, \\ \exp \left( -\frac{x-\mu}{\sigma} \right) & \text{for } \xi = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

kde obecně  $\mu \in (-\infty, +\infty)$  je parametrem lokace,  $\sigma \in (0, \infty)$  je parametrem měřítka a  $\xi \in (-\infty, \infty)$  je parametr tvaru. Odpovídající distribuční funkce je potom ve tvaru

$$F_{(\xi, \mu, \sigma)}(x) = \begin{cases} 1 - \left( 1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{for } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp \left( -\frac{x-\mu}{\sigma} \right) & \text{for } \xi = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$



Obrázek 3.1: Hustoty pravděpodobnosti zobecněného Paretova rozdělení pro různé hodnoty parametru  $\xi$  a zvolené hodnoty parametrů  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0$

Důležitým faktem je, že nosič zobecněného Paretova rozdělení je omezený a to tak, že  $x \geq \mu$  pro  $\xi \geq 0$ , a  $\mu \leq x \leq \mu - \sigma/\xi$  pro  $\xi < 0$  přičemž  $\mu \in R$ ,  $\sigma > 0$ , a  $\xi \in R$ .

Obrázek 3.1 zobrazuje hustoty pravděpodobnosti GPD s různými parametry  $\xi$ , které mají demonstrovat možnosti použití GPD pro modelování různých typů ocasů. Pro  $\xi = 1$  je GPD ekvivalentní s rovnoměrným rozdělením, pro hodnotu  $\xi = 0$  je exponenciálním rozdělením, pro  $\xi = -0.5$  je trojúhelníkovým rozdělením, pro  $-0.5 < \xi < 0$  je rozdělením s lehkým ocasem (např. normální rozdělení, Gumbelovo rozdělení), pro  $\xi > 0$  je rozdělením s těžkým ocasem (např. Paretovo rozdělení, logaritmicko-normální rozdělení, Studentovo rozdělení) a pro  $\xi < -1$  je rozdělením s kompaktním nosičem (např. beta rozdělení). Vzhledem k tomu, že v aplikacích s reálnými daty se vyskytuje celá řada rozdělení, je GPD, díky své výše demonstrované univerzalitě, vhodným rozdělením pro modelování ocasů jiných rozdělení [72–74].

### 3.1 Metoda Peak-over-Threshold

Zásadním problémem při hledání parametrů GPD je volba vhodné hodnoty prahu  $z$ . Metody, které řeší uvedený problém jsou nazývány Peak-Over-Threshold (POT). V případě, že je hodnota prahu  $z$  příliš vysoká, mají parametry GPD velkou varianci, protože je existuje pouze příliš málo dat, které zvolenou prahovou hodnotu překročí. Pokud je hodnota prahu  $z$  naopak příliš nízká, není aproximace ocasu generujícího rozdělení spolehlivá. Z tohoto pohledu, je tedy

vhodná volba hodnoty prahu  $z$  pro kvalitu fitu GPD zásadní. Existuje celá řada metod pro výběr hodnoty prahu (více viz [71]). Některé z metod POT jsou však sami o sobě výpočetně náročné, případně poskytují výsledky, jež musí být vyhodnoceny expertem. Z těchto důvodů nejsou příliš vhodné pro algoritmus detekce novosti, který by vyhodnocoval data v reálném čase. Proto se zdá vhodné využít některé z metod "Rule of Thumb". Z těchto metod se osvědčily tři různé metody. Nechť  $l$  je počet vzorků, které jsou použity k odhadu parametrů GPD a  $n_s$  je celkový počet vzorků, které jsou k dispozici. Potom podle [27, 69, 70] můžeme určit počet vzorků potřebných k odhadu parametrů GPD jako:

$$l_1 = \lceil 0.1 \cdot n_s \rceil \quad (3.5)$$

$$l_2 = \lceil \sqrt{n_s} \rceil \quad (3.6)$$

$$l_3 = \left\lceil \frac{\sqrt[3]{n_s^2}}{\log(\log(n_s))} \right\rceil \quad (3.7)$$

Ještě poznamenejme, že pro odhad parametrů GPD se využívají vzorky s nejvyšší hodnotou a symbolem  $\lceil \cdot \rceil$  rozumíme horní celou část daného čísla.

Metoda POT je zásadním prvkem v algoritmu Extreme Seeking Entropy (viz kapitola 4), kde je použita pro rozdělení přírůstku adaptivních vah filtru  $|\Delta w_k(k)|$  do příslušných množin  $H_i$  respektive  $L_i$ .

## 3.2 Metody odhadu parametrů zobecněného Paretova rozdělení

Odhad parametrů zobecněného Paretova rozdělení není triviální problém, proto existuje celá řada metod, které tento problém řeší. V následující textu je věnována pozornost metodě momentů (MOM) [26], metodě maximální věrohodnosti (ML) [27] a metodě kvazi-maximální věrohodnosti (QML) [32]. Z nověji publikovaných metod uveďme alespon metodu věrohodných momentů [33], metodu vážených nelineárních čtveřic momentů [35? ]. Přehled dalších metod nabízí např. publikace [36].

### 3.2.1 Metoda maximální věrohodnosti

Metoda maximální věrohodnosti (maximum likelihood) je jednou ze zásadních statistických metod (pro zajímavost: byla použita i Johannem Carlem Friedrichem Gaussem nebo Pierre-Simon Laplacedem, více viz [28]). Slouží k odhadu parametrů různých rozdělení pravděpodobnosti [29]. Pro odhad parametrů je použita tzv. věrohodnostní funkce definovaná jako

$$\mathcal{L}(\theta|X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f(X_i|\theta) \quad (3.8)$$

kde  $\theta \in \Omega$  je vektor odhadu parametrů,  $\Omega$  je množina parametrů rozdělení a  $X_1, \dots, X_n$  je soubor nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením a neznámou hustotou pravděpodobnosti. Pro maximálně věrohodný odhad  $\hat{\theta}$  pak platí

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Omega} \mathcal{L}(\theta | X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (3.9)$$

Tento vektor parametrů rozdělení tedy maximalizuje věrohodnostní funkci. V praxi se často pracuje s logaritmem věrohodnostní funkce, takže problém je formulován jako

$$\log \mathcal{L}(\theta | X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i | \theta) \quad (3.10)$$

Věrohodnostní funkce pro zobecněné Paretovo rozdělení byla zformulovaná DuMouchelem [27] ve tvaru

$$\log \mathcal{L}(\sigma, \gamma | x_1, \dots, x_n) = -n \log \sigma + \frac{1-\gamma}{\gamma} \sum_{i=1}^n \log \left( 1 - \frac{\gamma}{\sigma} (x_i - \mu) \right) \quad (3.11)$$

přičemž podle [31] je pro  $-0.5 < \xi < 0$ , při zachování určitých podmínek, maximálně věrohodný odhad asymptoticky normální a asymptoticky vydatný. Problém může pro hodnoty  $\xi < -0.5$  kdy maximálně věrohodný odhad nemusí existovat [30]. Optimalizační problém 3.8 pro GPD s věrohodností funkcí ve tvaru 3.11 obvykle řeší nějakou numerickou metodou.

### 3.2.2 Metoda momentů

Při použití MOM [26] je k odhadu parametrů GPD využito prvního a druhého momentu. Abychom poukázali na problém, který je s použitím MOM spojen, uvažujme nyní dvouparametrové GPD, pro které je  $\mu = 0$ ,  $\xi > 0$  a  $x \geq 0$ . Pro první moment potom dostaneme přímo podle definice

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \frac{\xi x}{\sigma} \right)^{\left(-1-\frac{1}{\xi}\right)} dx = \sigma^{\frac{1}{\xi}} \int_0^\infty x (\xi x + \sigma)^{-\frac{1}{\xi}-1} dx = \sigma^{\frac{1}{\xi}} \left[ -\frac{x}{(\xi x + \sigma)^{\frac{1}{\xi}}} \right]_0^\infty - \\ &= -\sigma^{\frac{1}{\xi}} \int_0^\infty -\frac{x}{(\xi x + \sigma)^{\frac{1}{\xi}}} dx = \sigma^{\frac{1}{\xi}} \left[ -\frac{x}{(\xi x + \sigma)^{\frac{1}{\xi}}} \right]_0^\infty + \sigma^{\frac{1}{\xi}} \left[ \frac{(\xi x + \sigma)^{1-\frac{1}{\xi}}}{\xi(1-\frac{1}{\xi})} \right]_0^\infty = \\ &= \left[ \frac{\sigma^{\frac{1}{\xi}}(x + \sigma)}{(\xi - 1)(\xi x + \sigma)^{\frac{1}{\xi}}} \right]_0^\infty = \frac{\sigma}{1 - \xi} \end{aligned} \quad (3.12)$$



přičemž z předposledního výrazu je patrné, že konečnou hodnotu získáme pouze pro hodnoty  $0 < \xi < 1$ . Obdobně pro rozptyl GPD

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{(-1-\frac{1}{\xi})} dx - \frac{\sigma^2}{(1-\xi)^2} = \\ &= \left[ \frac{\sigma^{\frac{1}{\xi}} ((\xi-1)x^2 - 2\sigma x - 2\sigma^2)}{(\xi-1)(2\xi-1)(\xi x + \sigma)^{\frac{1}{\xi}}} \right]_0^\infty - \frac{\sigma^2}{(1-\xi)^2} = \frac{\sigma^2}{(1-\xi)^2(1-2\xi)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

přičemž z předposledního výrazu je patrné, že konečnou hodnotu získáme pouze pro hodnoty  $0 < \xi < 0.5$ .

Obecný  $r$ -tý moment GPD existuje pokud je splněna podmínka  $\xi < 1/r$ . První čtyři momenty GPD (průměr, rozptyl, koeficienty šikmosti a špičatosti), jsou definovány jako

$$E(X) = \mu + \frac{\sigma}{1-\xi} \quad (3.14)$$

$$Var(X) = \frac{\sigma^2}{(1-2\xi)(1-\xi)^2} \quad (3.15)$$

$$Skew(X) = \frac{2(1+\xi)\sqrt{1-2\xi}}{1-3\xi} \quad (3.16)$$

$$Kurt(X) = \frac{2(1-2\xi)(2\xi^2 + \xi + 3)}{(1-3\xi)(1-4\xi)} - 3 \quad (3.17)$$

s přihlédnutím k omezení, že  $\xi < 1/r$ . Řešením soustavy rovnic 3.14 a 3.15 dostaneme odhady parametrů GPD jako

$$\sigma = \frac{1}{2}E(X) \left( \frac{E(X)^2}{Var(X)} + 1 \right) \quad (3.18)$$

$$\xi = -\frac{1}{2} \left( \frac{E(X)^2}{Var(X)} - 1 \right) \quad (3.19)$$

kde  $E(X)$  je střední hodnota vzorku dat a  $Var(X)$  je rozptyl tohoto vzorku dat. Metoda MOM je použitelná pouze pro hodnoty parametru  $\xi < 0.5$ . Pro  $\xi \geq 0.5$  není splněná podmínka pro existenci druhého momentu.

### 3.2.3 Kvazi-ML metoda

Kvazi-ML metoda ?? odhadu parametrů GPD kombinuje metodu maximální věrohodnosti pro  $\xi > -0.75$  a modifikovanou metodu maximální věrohodnosti pro  $\xi \leq -0.75$ . Protože neznáme přesnou hodnotu parametru  $\xi$  je rozhodnutí, kterou z metod použít provedeno na empirickém základě. Nejprve uvažujme posloupnost hodnot  $(x_1, \dots, x_n)$ . Metodu kvazi-ML lze popsat v následujících třech krocích.

1. Výpočet

$$\xi = \frac{-1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{x_1}{\max x_1, \dots, x_n} \right) \quad (3.20)$$

a

$$Z = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{2n\bar{x}^2} \quad (3.21)$$

kde  $\bar{x}$  je střední hodnota posloupnosti hodnot  $(x_1, \dots, x_n)$ .

2. Pokud je  $\xi < 0.75$  a  $Z < 0.2$  použij metodu maximální věrohodnosti.

3. Jinak určíme odhad parametru  $\sigma$  jako

$$\sigma = \xi \cdot \max(x_1, \dots, x_n) \quad (3.22)$$

Z hlediska výpočetní náročnosti a možností hodnot, kterých může parametr  $\xi$  nabývat, je uvedená hodnota dobrým kompromisem mezi metodou maximální věrohodnosti a metodou momentů.

## 4 Algoritmus Extreme Seeking Entropy

V této kapitole je představen algoritmus pro detekci novosti nazvaný Extreme Seeking Entropy (ESE), který tvoří hlavní teoretický výsledek předkládané dizertační práce. Navržený algoritmus, vychází z předpokladu, že novost v datech se projeví neobvykle velkými přírůstky vah adaptivního filtru, který danou řadu dat modeluje.

Nejprve uvažujme myšlenkový experiment, ve kterém máme dokonale nastavený adaptivní filtr, jehož chyba predikce  $e$  je nulová pro všechny vstupní hodnoty. Potom přírůstky adaptivních vah tohoto filtru budou nulové. V případě, že dojde k nějaké změně v generátoru dat pro tento filtr, začne se filtr opět adaptovat což vyústí v nenulové změny adaptivních vah, které budou reflektovat novost způsobenou změnou vlastností daného generátoru.

V publikacích [9, 10], kde autoři představují algoritmus Learning Entropy, je zmíněna obecná míra snahy adaptivního filtru o adaptaci,  $L$ , která slouží k vyhodnocení neobvykle velkých přírůstků adaptivních vah a je definovaná jako

$$L(k) = A(f(\Delta \mathbf{w})) \quad (4.1)$$

kde  $A$  je obecně nějaká agregační funkce a funkce  $f$  je funkce která nějakým způsobem kvantifikuje odchylku v adaptaci adaptivních parametrů filtru.

Nejprve uvažujme, že hodnota funkce  $f$ , která slouží k vyhodnocení neobvykle velkých přírůstků by měla mít neobvykle velkou (nebo neobvykle malou) hodnotu v okamžiku, kdy přírůstky adaptivních vah filtru  $\Delta \mathbf{w}$  jsou neobvykle velké. Dalším požadavkem je, aby tato funkce zohledňovala i nějakou historii těchto přírůstků. Přirozeně se tedy nabízí nějaká vhodná distribuční funkce  $f_{cdf}$ . S ohledem na požadavek, že neobvykle velké přírůstky vah by měli být reflektovány neobvykle velkou hodnotou míry snahy o adaptaci, nabízí se jako vhodná funkce  $A$ , kterou uvažujeme ve tvaru

$$A(f(\Delta \mathbf{w}|(k))) = -\log \prod_{i=1}^n (1 - f_{cdf_i}(|\Delta w_i(k)|)). \quad (4.2)$$

Uvedená agregační funkce  $A$  má pro neobvykle velké přírůstky vah neobvykle velkou kladnou hodnotu, pokud jsou hodnoty  $f_{cdf}$  blízké 1. Člen  $1 - f_{cdf}$  je vlastně komplementární distribuční funkcí (funkce přežití, spolehlivostní funkce). Výhodou uvedeného přístupu je absence potřeby nastavovat několik prahů pro detekci.

Jak již bylo uvedeno, cílem je tedy vyhodnotit neobvykle velké přírůstky vah adaptivního systému. Nejprve je nutné určit nějaký práh  $z$ , podle kterého můžeme přírůstky adaptivních vah filtru rozdělit do dvou množin. Množinu, která bude obsahovat obsahovat přírůstky menší než je zvolený práh  $z$  označíme  $L$ . Přírůstek který je větší nebo roven hodnotě prahu  $z$  označíme  $H$ . Pozn. Volba hodnoty prahu přímo souvisí s volbou metody POT (viz kapitola 3). Uvažujme, že obě množiny existují pro každou adaptivní váhu, potom pro  $i$ -tou adaptivní váhu zvolíme práh  $z_i$  tak, že velikosti přírůstku této váhy náleží do jedné ze dvou množin, tak, že:

$$\forall |\Delta w_i| < z_i \in L_i \quad (4.3)$$

$$\forall |\Delta w_i| \geq z_i \in H_i \quad (4.4)$$

Vzhledem k výše zmíněnému předpokladu o velikosti změn vah adaptivního filtru a novosti v datech, uvažujme, že přírůstky náležející množině  $L_i$  pravděpodobně neobsahují informaci o novosti během adaptace a proto nebudou vyhodnocovány. Množina  $H_i$  by měla obsahovat přírůstky adaptivních vah filtru, u kterých lze očekávat, že mohou nést nějakou informaci o novosti v datech.

Nyní můžeme zavést novou míru, kterou nazvěme Extreme Seeking Entropy (ESE), definovanou jako

$$ESE(|\Delta \mathbf{w}(k)|) = -\log \prod_{i=1}^{n_w} (1 - f_{cdf_i}(|\Delta w_i(k)|)) \quad (4.5)$$

kde

$$f_{cdf_i}(|\Delta w_i(k)|) = \begin{cases} 0, & |\Delta w_i(k)| \in L_i \\ F_{(\xi_i, \mu_i, \sigma_i)}(|\Delta w_i(k)|), & |\Delta w_i(k)| \in H_i. \end{cases} \quad (4.6)$$

a funkce  $F_{(\xi_i, \mu_i, \sigma_i)}$  je distribuční funkce zobecněného Paretova rozdělení (GPD), představeného v předchozí kapitole 3. Přírůstky adaptivních vah, které jsou menší než hodnota prahu získaného metodou POT nezmění hodnotu  $ESE$ . Přírůstky vah, které mají velice malou pravděpodobnost a spíše nesou nějakou informaci o novosti v datech způsobí velký nárůst hodnoty  $ESE$ . Zásadním aspektem navrhovaného algoritmu je, že mohou být vyhodnocovány buď všechny získané přírůstky vah, a nebo lze vyhodnocovat pouze nejnovějších  $n_s$  vzorků a na ně aplikovat metodu POT. Novost potom můžeme vnímat v kontextu těchto  $n_s$  vzorků.

Navrhovaný algoritmus pro detekci novosti v datech je popsán následujícím pseudokódem.

---

**Algoritmus 1** Extreme Seeking Entropy

---

```

1: nastavení  $n_s$  a výběr metody POT
2: počáteční nastavení parametrů  $\xi_i, \mu_i, \sigma_i$  GPD pro každý adaptivní parametr
3: for vzorek  $d(k)$  do
4:   výpočet změny adaptivních parametrů filtru  $\Delta \mathbf{w}(k)$ 
5:   aplikace metody POT
6:   if  $|\Delta w_i|(k) \in H_i$  then
7:     výpočet parametrů  $\xi_i, \mu_i, \sigma_i$  pro příslušné GPD
8:   end if
9:   výpočet hodnoty  $ESE$  podle rovnice (??)
10: end for

```

---

Výhodou navrhovaného algoritmu je, že jediným volitelným parametrem je parametr  $n_s$ , který ale v případě potřeby můžeme vynechat a zpracovávat všechny historicky dostupné přírůstky adaptivních parametrů. Dále je nutné zvolit vhodnou metodu POT.

Určitou limitací uvedeného algoritmu je, že pro získání první hodnoty  $ESE$  potřebujeme nějakou apriorní informaci o parametrech GPD rozdělení. Konkrétněji, pro každou  $i$ -tou adaptivní váhu musíme mít k dispozici odhad parametrů  $\xi_i, \mu_i, \sigma_i$ . Vzhledem k tomu, že adaptivní filtr má  $n_w$  různých adaptivních vah, potřebujeme získat odhad  $3 \cdot n_w$  parametrů aby začal algoritmus ESE poskytovat první hodnoty. Pokud není k dispozici žádná apriorní informace o hodnotách těchto parametrů, potřebujeme provést získat alespoň  $n_s$  vzorků, na jejichž základě můžeme získat první hodnotu  $ESE$ . Dalším úskalím je proměnlivost parametrů nebo typu rozdělení pravděpodobnosti přírůstků adaptivních vah v čase.



## 5 Výsledky experimentů

V této kapitole jsou shrnuty výsledky, kterých bylo v rámci práce na tématu dizertace dosaženo. Jmenovitě jsou to výsledky navrženého algoritmu Extreme Seeking Entropy (viz kapitola 5.1) a potom použití algoritmu Learning Entropy pro adaptivní fuzzy filtr při detekci změny stavu bioprocesu (viz kapitola 5.4). Výsledky byly publikovány v [1].

### 5.1 Případové studie detekce novosti algoritmu Extreme Seeking Entropy

Obsah této podkapitoly je shrnutím publikovaných výsledků v [1], přičemž pro případovou studii detekce změny trendu jsou uvedeny ještě výsledky při použití algoritmů RLS a LS, které publikovány nebyly.

#### 5.1.1 Případová studie: chaotická časová řada Mackey-Glass a detekce pertubace

Tento experiment byl proveden pro porovnání s výsledky uvedenými v publikaci [10], která je první publikací o algoritmu LE (viz kapitola 1.3.2). Experiment spočívá v detekci perturbovaného vzorku v chaotické časové řadě, která je výsledkem řešení Mackey-Glassovy rovnice [20].

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta \cdot \frac{y(t - \tau)}{1 + y^\alpha(t - \tau)} - \gamma y(t) \quad (5.1)$$

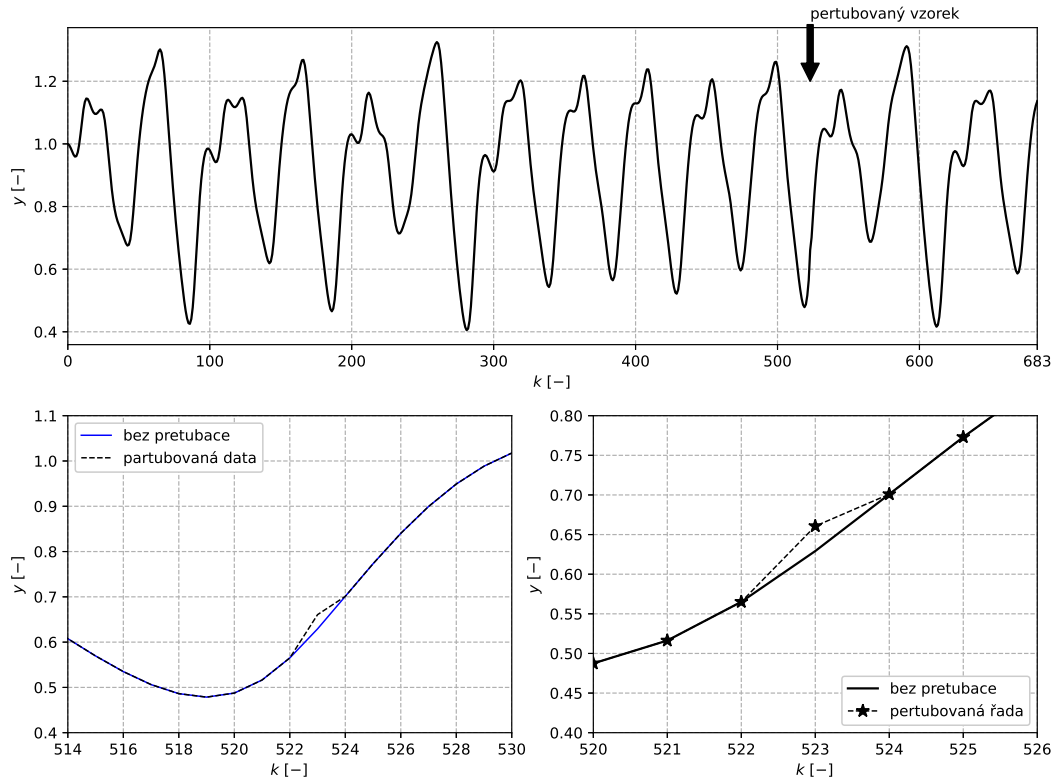
přičemž parametry  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\gamma = 0.1$  and  $\tau = 17$  byly vybrány tak, aby řešením této rovnice byla chaotická časová řada. Celkem bylo vygenerováno 701 vzorků. Data v diskrétní časový okamžiku  $k = 523$  pak byly pertubovány podle následujícího předpisu.

$$y(523) = y(523) + 0.05 \cdot y(523) \quad (5.2)$$

Výsledná časová řada a detail pertubace je znázorněn na obrázku 5.1. Jako adaptivní filtr byl zvolen QNU (resp. Volterrův filtr) jehož vstupem jsou 4 časově spožděné hodnoty časové řady  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$ ,  $y(k-3)$ ,  $y(k-4)$ . Hodnoty adaptivních vah tohoto filtru byly adaptovány

algoritmem NLMS. Struktura filtru byla zvolena stejně jako v [10]. Rychlost učení během experimentu byla nastavena na  $\mu = 1$ . Metoda POT byla zvolena podle rovnice 3.5 a délka okna pro detekci novosti algoritmem ESE byla nastavena na  $n_s = 300$ .

Výstup adaptivního filtru a chyba predikce jsou znázorněny na obrázku 5.2. Výsledky metod detekce novosti jsou zobrazeny na obrázku 5.3. Z obrázku je patrné, že globální maximum průběhu *ESE* odpovídá pertubovaným datům. Globální maximum metod *ELBND* a *LE* odpovídá vzorku u něhož byla největší chyba predikce. Hodnoty prahů algoritmu LE byly zvoleny  $\alpha = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  a délka okna byla nastavena na  $m = 30$ .

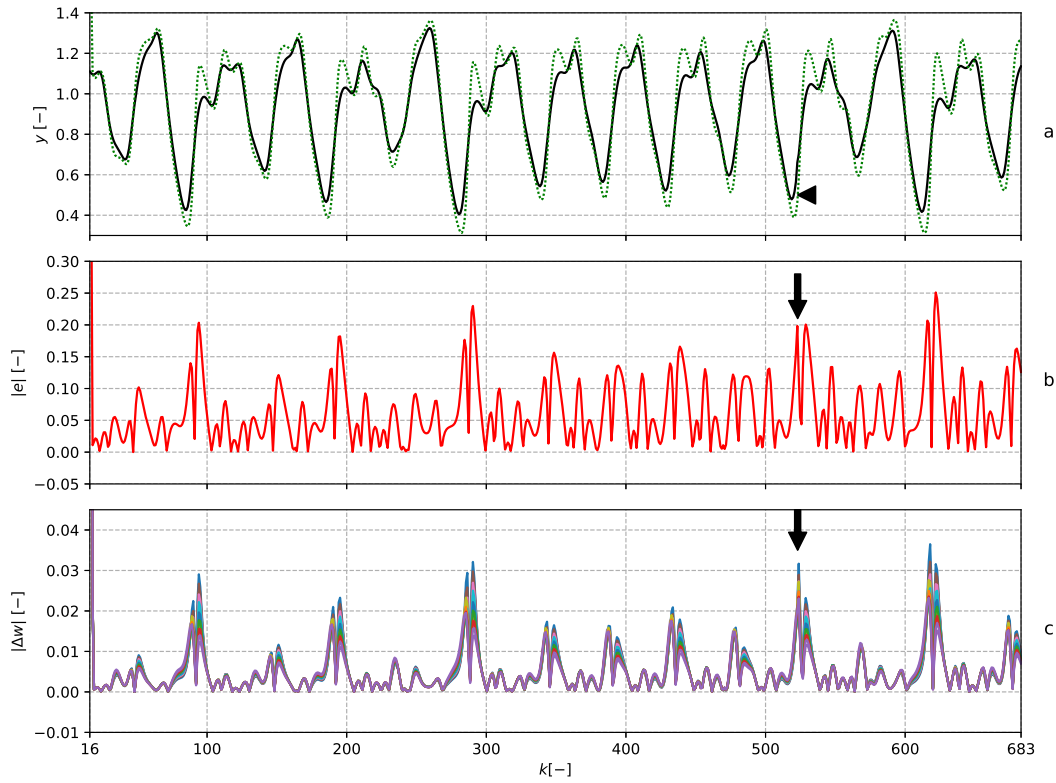


Obrázek 5.1: Horní graf zobrazuje celou datovou řadu. Spodní grafy zobrazují detail pertubovaného vzorku v diskrétní časový okamžik  $k = 523$ .

### 5.1.2 Případová studie: detekce změny rozptylu šumu v náhodném datovém toku

Tato případová studie je navržena na základě problému, který se vyskytuje v použití hybridních navigačních systémů využívajících GPS (Global Positioning System) senzory pro navigaci výpočtem [21]. Smyslem experimentu je demonstrovat možnost využití algoritmu ESE pro detekci změn rozptylu šumu v náhodných datech.





Obrázek 5.2: Graf (a) zobrazuje datovou řadu s pertubací (černá plná čára) a výstup adaptivního filtru (tečkovaná zelená čára). Pertubovaný vzorek je označen černou šipkou. Graf (b) zobrazuje velikost chyby predikce  $e$  (resp. její absolutní hodnotu). Na grafu (c) jsou znázorněny přírůstky adaptivních vah filtru (resp. absolutní hodnotu těchto přírůstků).

Uvažujme dva vstupy  $x_1(k)$  a  $x_2(k)$  a výstup generátoru signálu  $y(k)$  takový, že

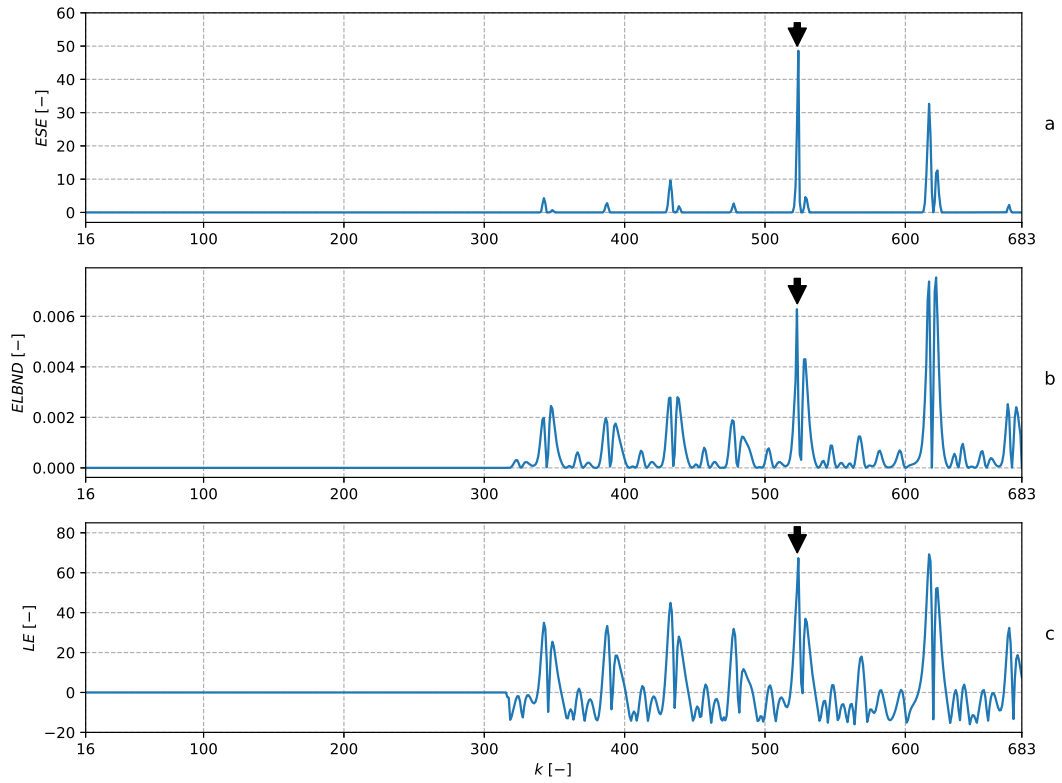
$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_1(k) \cdot x_2(k) + v(k) \quad (5.3)$$

kde člen  $v(k)$  reprezentuje aditivní Gaussovský šum který je přidán k výstupu generátoru  $y(k)$ . Přidaný šum má nulovou střední hodnotu a směrodatnou odchylku  $\sigma_n = 0.1$ , takže  $v(k) \sim N(0, 1)$ . Hodnoty vstupů jsou v každém diskrétním časovém okamžiku vybrány náhodně z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $\langle 0, \rangle$ . V diskrétním časovém okamžiku  $k = 500$  dojde ke změně směrodatné odchylky šumu na hodnota  $\sigma_n = 0.2$ ,  $v(k) \sim N(0, 0.2)$ .

Adaptivní filtr v tomto experimentu byl QNU ve tvaru

$$\hat{y}(k) = w_1 \cdot x_1(k) + w_2 \cdot x_2(k) + w_3 \cdot x_1(k) \cdot x_2(k) \quad (5.4)$$

tak, že jeho struktura odpovídá struktuře generátoru signálu. Adaptivní parametry filtru byly adaptovány algoritmem GNGD. Rychlost učení byla nastavená jako  $\mu = 1$ . Metoda POT byla zvolena podle 3.6 a délka okna  $n_s = 500$ . Výsledky experimentu jsou zobrazeny na obrázku



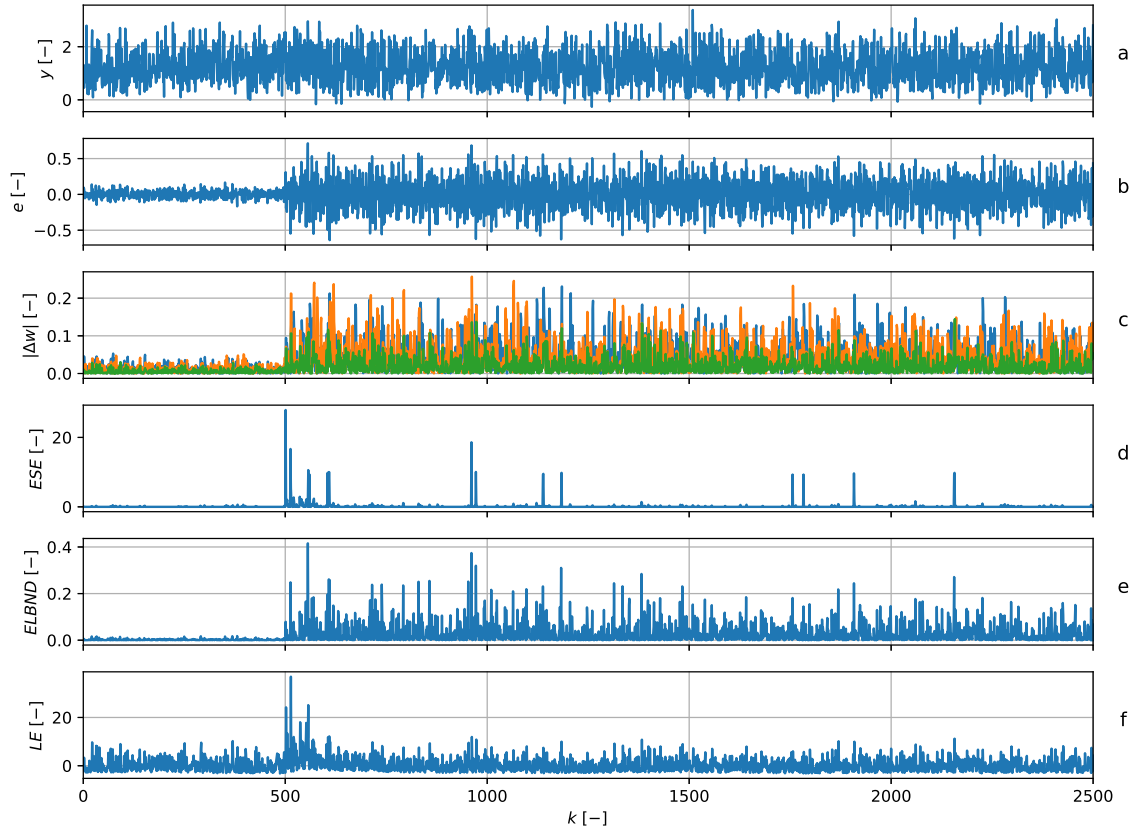
Obrázek 5.3: Graf (a) zobrazuje hodnotu ESE. Prvních 300 vzorků je hodnota ESE nulová, protože délka okna pro vyhodnocování novosti  $n_s = 300$ . Graf (b) zobrazuje výsledky algoritmu ELBND. Prvních 300 výsledků ELBND je pro názornost vynecháno. Graf (c) zobrazuje výsledky algoritmu LE.

5.4. Apriorní hodnoty parametrů GPD byly stanoveny na základě 500 vzorků, které nejsou v následujícím obrázku 5.4 zobrazeny. Globální maximum ESE odpovídá změně směrodatné odchylky šumu  $\sigma_n$ . Detekce pomocí algoritmů LE a ELBND je o několik vzorků opožděná. Pro výpočet LE byl použit vztah 1.14 a délka okna byla nastavena na  $M = 300$ . Výpočet ELBND byl proveden podle rovnice 1.17.

### 5.1.3 Případová studie: detekce skokové změny parametrů generátoru signálu

Tato případová studie je motivována problémem, který vzniká při sledování vícero náhodných datových toků [23] u kterých se kontroluje, zda nedošlo ke změně vlastností jejich generátoru. Uvažujme opět dva vstupy  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  a výstup generátoru signálu ve tvaru

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_1(k) \cdot x_2(k) + v(k) \quad (5.5)$$



Obrázek 5.4: Detekce změny rozptylu šumu. Na grafu (a) jsou zobrazeny data z generátoru (modrá) a výstup z adaptivního filtru (zelená). Na grafu (b) je vynesena chyba filtru  $e(k)$ . Graf (c) zobrazuje velikosti přírůstků adaptivních parametrů filtru. Na grafu (d) jsou zobrazeny hodnoty ESE. V diskretní časový okamžik  $k = 500$  je patrný značný nárůst v ESE, který reflektuje změnu směrodatné odchylky aditivního šumu. Na dalších grafech (e) a (f) jsou zobrazeny výsledné hodnoty algoritmů ELBND a LE.

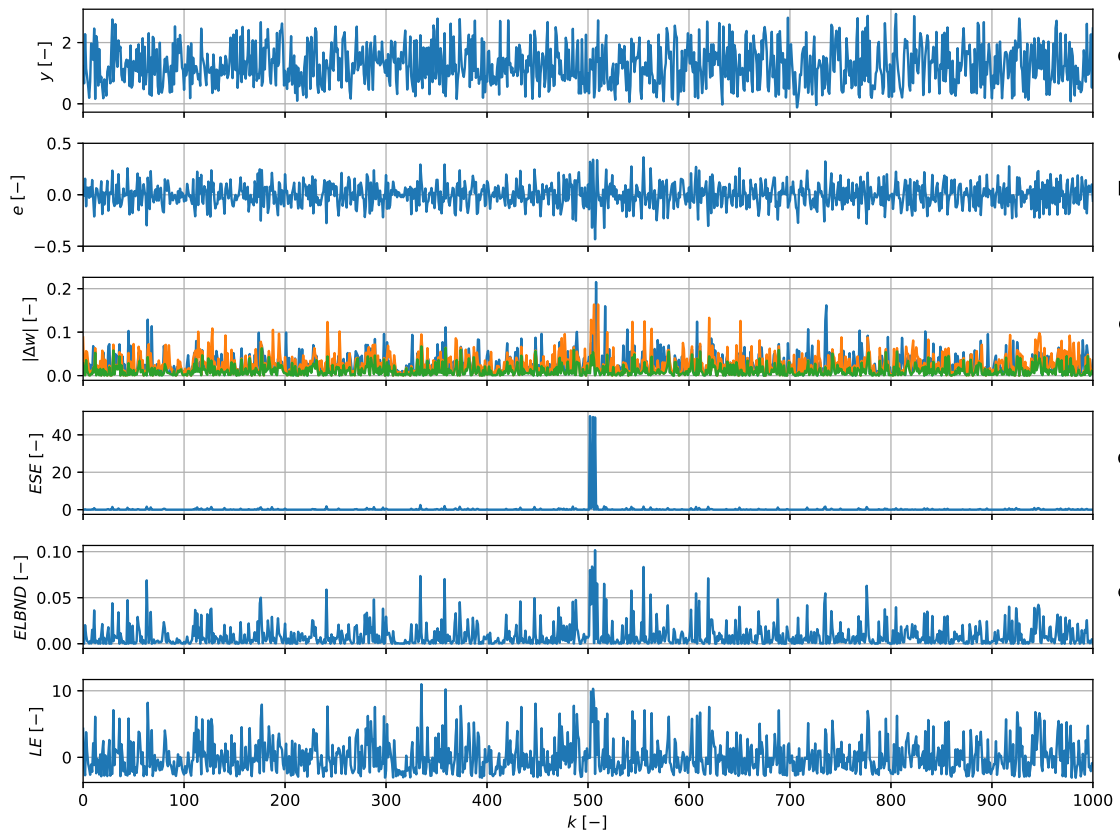
kde člen  $v(k)$  reprezentuje gaussovský aditivní šum s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou  $\sigma_n = 0.1$ ,  $v \sim N(0, 0.1)$ . Hodnoty vstupů  $x_1(k)$  a  $x_2(k)$  jsou v každém diskretním časovém okamžiku náhodně vybrány z rovnoměrného rozdělení,  $x_1(k) \sim U(0, 1)$  resp.  $x_2(k) \sim U(0, 1)$ . V časový diskretní okamžik  $k = 500$  dojde ke změně parametrů generátoru, a výstup generátoru přejde do tvaru

$$y(k) = 0.4 \cdot x_1(k) + 1.6x_2(k) + 0.99x_1(k) \cdot x_2(k) + v(k). \quad (5.6)$$

Jako adaptivní filtr byl v tomto případě zvolen QNU, jehož struktura odpovídá generátoru dat. Výstup tohoto filtru je tedy

$$\hat{y}(k) = w_1 \cdot x_1(k) + w_2 \cdot x_2(k) + w_3 \cdot x_1(k) \cdot x_2(k) \quad (5.7)$$

přičemž adaptivní parametry uvedeného filtru jsou adaptovány algoritmem GN GD. Rychlost učení během experimentu byla nastavena na  $\mu = 1$ . POT metoda byla zvolena podle rovnice 3.5 a parametr délky okna byl  $n_s = 500$ . Apriorní hodnota parametrů GPD a dat pro LE byla získána použitím 500 vzorků dat (vygenerovaných podle rovnice 5.6). Výsledky experimentu jsou znázorněny na obrázku 5.5. Z obrázku je patrné, že pomocí algoritmu ESE se podařilo detekovat skokovou změnu parametrů, čemuž odpovídá výrazné globální maximum v ESE. Globální maximum v LE neodpovídá skokové změně parametrů generátoru a detekce pomocí algoritmu ELBND je opožděná.



Obrázek 5.5: Detekce skokové změny generátoru signálu. Na grafu (a) je zobrazena původní časová řada (modrá). Graf (b) zobrazuje chybu filtru  $e$ . Na grafu (c) jsou zobrazeny velikosti přírůstků adaptivních vah filtru. Na grafu (d) jsou pak výsledky algoritmu ESE, přičemž k skokové změně parametrů generátoru signálu došlo v diskrétní časový okamžik  $k = 500$ . Je tedy vidět globální maximum v ESE odpovídající úspěšné detekci. Na grafech (e) a (f) jsou pak výsledky metod ELBND a LE. Detekci algoritmem ELBND lze považovat za úspěšnou. Detekce algoritmem LE byla neúspěšná. Globální maximum LE je v diskrétním časovém okamžiku  $k = 338$ , který neodpovídá skokové změně parametrů generátoru signálu.

### 5.1.4 Případová studie: detekce náhlé absence šumu

V tomto experimentu je ukázáno, že lehce modifikovaný algoritmus ESE může být využit také k detekci neobvykle malých změn parametrů adaptivního filtru. Oproti standardní variantě ESE budeme vyhodnocovat neobvykle malé přírůstky vah adaptivního filtru. Takže jediná změna v algoritmu je, že metodou POT budeme vybírat pouze nejmenší změny adaptivních vah a budeme odhadovat parametry GPD z takto vybraných hodnot.

Uvažujme dva vstupy  $x_1(k)$  a  $x_2(k)$  jejichž hodnoty jsou v každém diskrétním časovém okamžiku  $k$  vybrány z rovnoměrného rozdělení, takže  $x_1(k) \sim U(0, 1)$  a  $x_2(k) \sim U(0, 1)$ . Výstup generátoru dat  $y(k)$  je definován jako

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_1(k) \cdot x_2(k) + v(k) \quad (5.8)$$

kde člen  $v(k)$  reprezentuje aditivní gaussovský šum s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou  $\sigma_n = 0.1$ . V diskrétním časovém okamžiku dojde k odstranění aditivního šumu a výstup generátoru signálu přejde do tvaru

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_1(k) \cdot x_2(k). \quad (5.9)$$

který platí pro všechna  $k \geq 500$ .

Jako adaptivní filtr byl zvolen QNU, jehož výstup je definován

$$\hat{y}(k) = w_1 \cdot x_1(k) + w_2 \cdot x_2(k) + w_3 \cdot x_1(k) \cdot x_2(k) \quad (5.10)$$

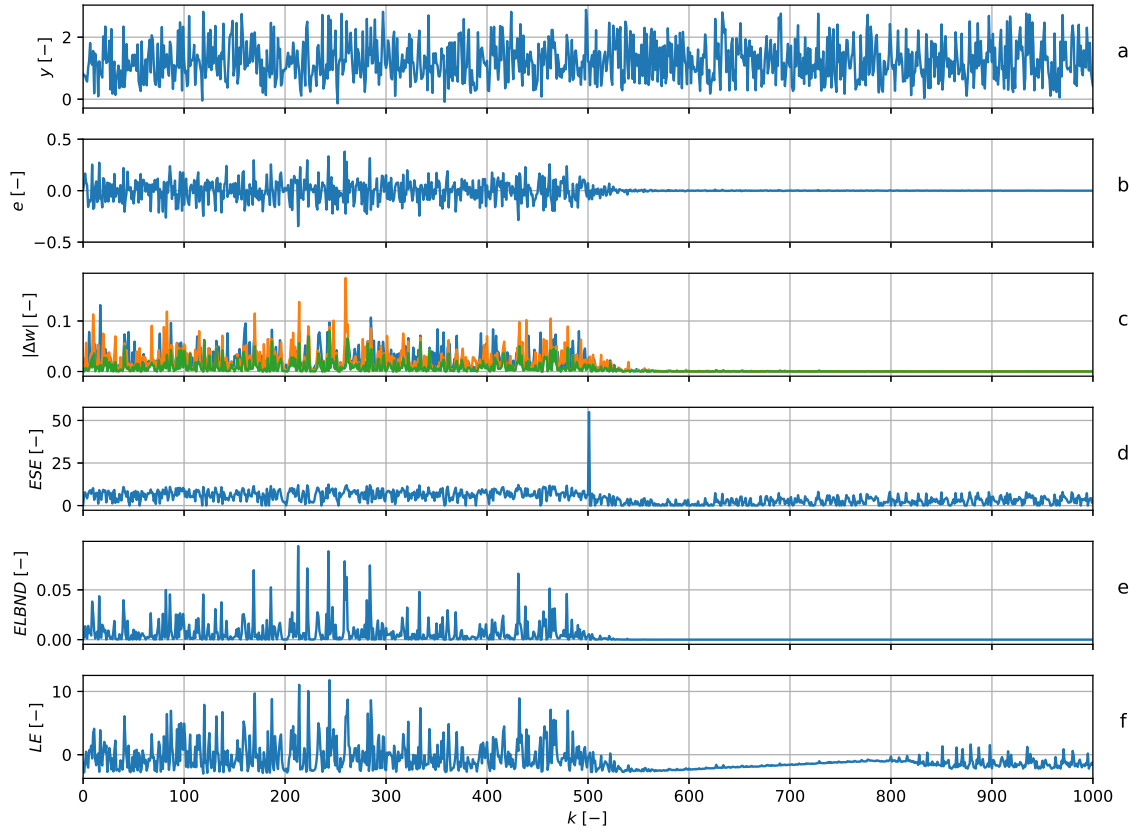
takže jeho struktura odpovídá generátoru signálu. Parametry toho filtru jsou adaptovány algoritmem GNGD. Rychlost učení byla nastavena jako  $\mu = 1$ . Metoda POT byla zvolena podle rovnice 3.5 a parametr  $n_s = 500$ . Pro výpočet LE byl použit vztah 1.14 a délka okna byla nastavena na  $M = 300$ . Výpočet ELBND byl proveden podle rovnice 1.17. Na obrázku 5.6 jsou zobrazeny výsledky experimentu. Maximum v ESE odpovídá detekci vymizení šumu z generátoru signálu. Výsledky metod ELBND a LE jsou uvedeny pouze pro ilustraci.

### 5.1.5 Případová studie: detekce změny trendu

Cílem tohoto experimentu je demonstrovat použití algoritmu ESE při detekci změny trendu, což je úloha, která se často vyskytuje v oblasti detekce poruch a diagnostice [22]. Uvažujme opět dva vstupy  $x_1(k) \sim U(0, 1)$  a  $x_2(k) \sim U(0, 1)$  a výstup generátoru dat  $y(k)$  takový, že

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + 0.01 \cdot k + v(k) \quad (5.11)$$

kde člen  $v(k)$  reprezentuje aditivní gaussovský šum s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou  $\sigma_n = 0.1$ . V diskrétním časovém okamžiku  $k = 500$  nastane změna trendu. Výstup



Obrázek 5.6: Detekce vymizení šumu ze signálu. Na grafu (a) je zobrazena původní časová řada (modrá). Graf (b) zobrazuje chybu filtru  $e$ . Na grafu (c) jsou zobrazeny velikosti přírůstků adaptivních vah filtru. Na grafu (d) jsou pak výsledky modifikovaného algoritmu ESE, přičemž k odstranění šumu ze signálu došlo v diskretní časový okamžik  $k = 500$ . Je tedy vidět globální maximum v ESE odpovídající úspěšné detekci. Na grafech (e) a (f) jsou pak výsledky metod ELBND a LE.

generátoru signálu se změní, tak, že

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + 0.0105 \cdot k + v(k), \quad (5.12)$$

pro  $k \geq 500$ .

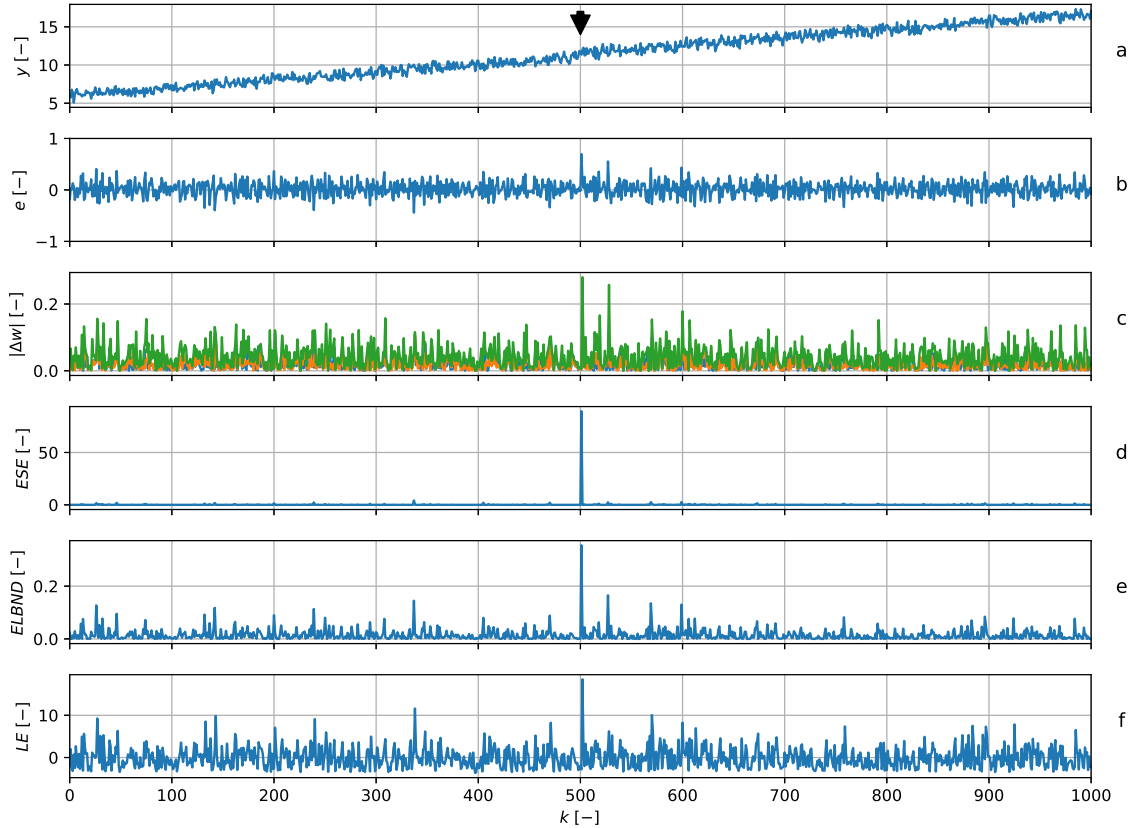
Pro zpracování signálu byl použit filtr typu LNU s třemi vstupy, takže výstup uvedeného filtru je ve tvaru

$$\hat{y}(k) = w_1 \cdot x_1(k) + w_2 \cdot x_2(k) + w_3 \quad (5.13)$$

takže odpovídající vektor vstupů je

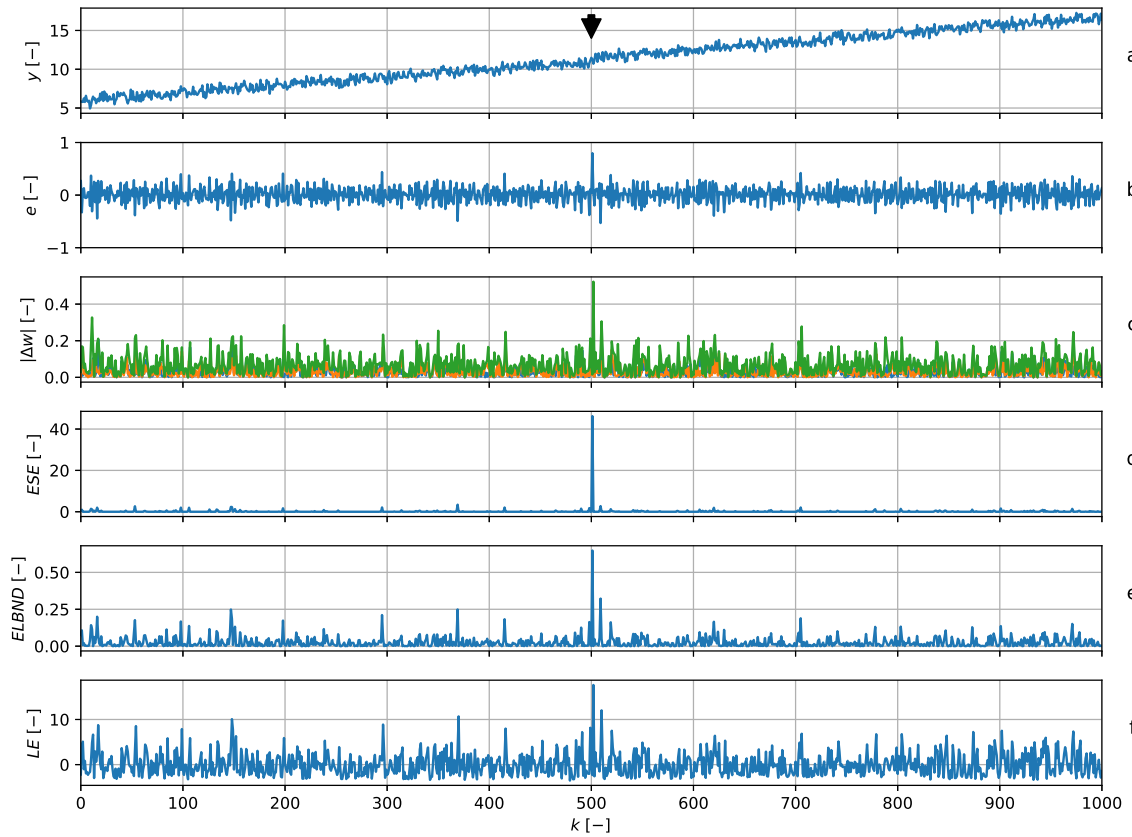
$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), 1]. \quad (5.14)$$

Struktura LNU byla vybrána tak, aby co nejlépe odpovídala struktuře generátoru signálu. Parametry adaptivního filtru byly v tomto experimentu adaptovány algoritmem GNGD. Rychlost učení byla nastavena na  $\mu = 1$ , délka okna byla  $n_s = 500$  a POT metoda byla zvolena podle 3.5. Na obrázku 5.7 jsou zobrazeny výsledky experimentu. Globální maximum ESE odpovídá okamžiku změny trendu. Algoritmy LE a ELBND úspěšně změnu trendu také detekovali. Pro výpočet LE byl použit vztah 1.14 a délka okna byla nastavena na  $M = 300$ . Výpočet ELBND byl proveden podle rovnice 1.17.



Obrázek 5.7: Detekce změny trendu při použití algoritmu GNGD. Na grafu (a) jsou zobrazena data z generátoru signálu (modré). Černá šipka znázorňuje okamžik ve kterém došlo ke změně trendu. Na grafu (b) je zobrazena chyba adaptivního filtru  $e$ . Na grafu (c) jsou znázorněny velikosti přírůstků adaptivních vah filtru. Grafy (d), (e) a (f) znázorňují výsledky detekce novosti pomocí algoritmů ESE, ELBND a LE. Všechny tři algoritmy vykazují úspěšnou detekci změny trendu, která koresponduje s jejich maximální hodnoty během experimentu.

Vzhledem k tomu, že pro algoritmus ESE není důležité, jaký konkrétní adaptivní algoritmus je použit, jsou na následujících obrázcích ještě zobrazeny výsledky detekce změny trendu s použitím algoritmů RLS (viz obrázek 5.8) a LMS (viz obrázek 5.9). Pro algoritmus RLS bylo prvodní nastavení parametru  $\delta = 10$ , pro algoritmus LMS byla nastavena rychlost učení  $\mu = 0.1$ .



Obrázek 5.8: Detekce změny trendu při použití algoritmu RLS. Na grafu (a) jsou zobrazena data z generátoru signálu (modré). Černá šipka znázorňuje okamžik ve kterém došlo ke změně trendu. Na grafu (b) je zobrazena chyba adaptivního filtru  $e$ . Na grafu (c) jsou znázorněny velikosti přírůstků adaptivních vah filtru. Grafy (d), (e) a (f) znázorňují výsledky detekce novosti pomocí algoritmů ESE, ELBND a LE. Všechny tři algoritmy vykazují úspěšnou detekci změny trendu, která koresponduje s jejich maximální hodnoty během experimentu.

### 5.1.6 Případová studie: detekce epilepsie v myším EEG

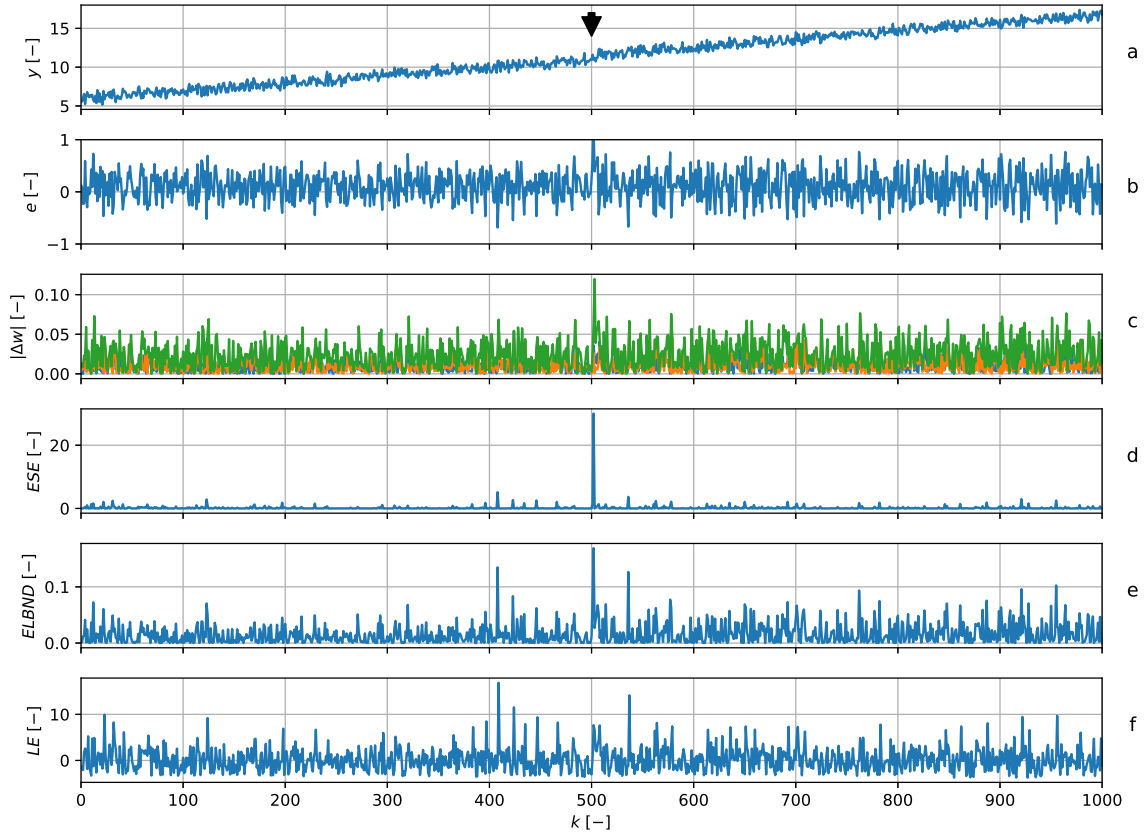
Poslední případová studie je věnována detekci epileptického záchvatu v signálu EEG myši pomocí algoritmu EEG. Standartizovaná data ze tří vybraných kanálů EEG, ve kterých byl expertem stanoven začátek epileptického záchvatu přibližně v čase  $k \approx 1700$ , jsou zobrazeny na obrázku 5.10. Standartizace byla provedena podle předpisu

$$y = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \quad (5.15)$$

kde  $y$  je výsledná standartizovaná hodnota,  $x$  je původní hodnota,  $\mu_x$  je průměrná hodnota původních dat daného kanálu a  $\sigma_x$  je jejich původní směrodatná odchylka.

Jako adaptivní filtr byl, na základě experimentů, zvolen FIR filtr délky 10. Vstupem je



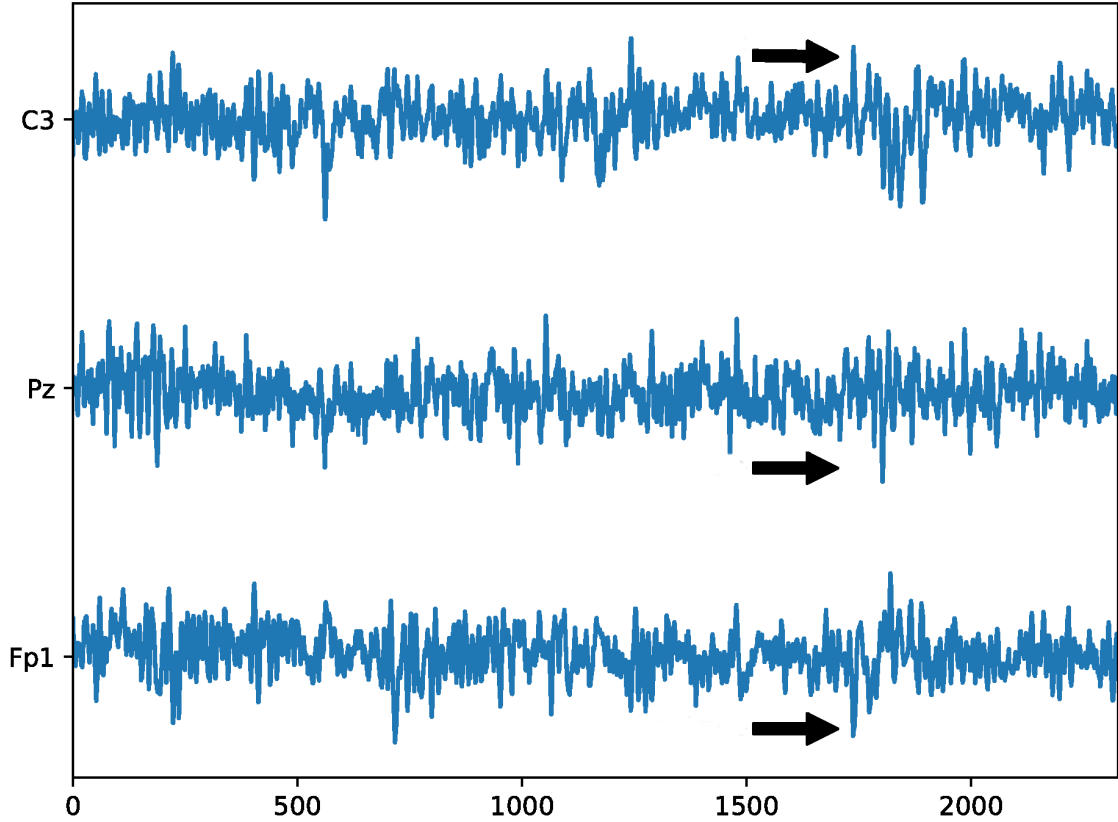


Obrázek 5.9: Detekce změny trendu při použití algoritmu LMS. Na grafu (a) jsou zobrazena data z generátoru signálu (modré). Černá šipka znázorňuje okamžik ve kterém došlo ke změně trendu. Na grafu (b) je zobrazena chyba adaptivního filtru  $e$ . Na grafu (c) jsou znázorněny velikosti přírůstků adaptivních vah filtru. Grafy (d), (e) a (f) znázorňují výsledky detekce novosti pomocí algoritmů ESE, ELBND a LE. Všechny tři algoritmy vykazují úspěšnou detekci změny trendu, která koresponduje s jejich maximální hodnoty během experimentu.

vektor dat

$$\mathbf{x} = [x(k-1), x(k-2), \dots, x(k-10)] \quad (5.16)$$

takže filtr má 10 adaptivních parametrů. Filtr byl adaptován algoritmem NLMS. Rychlost učení byla během experimentu nastavena na  $\mu = 1$ . Metoda POT byla zvolena podle vztahu 3.7 a délka okna  $n_s = 1000$ . Výsledky detekce algoritmem ESE jsou zobrazeny na obrázku 5.11. Pozice globálního maxima ESE v kanálu C3 (obzvláště signifikantní) je v diskretním časovém okamžiku  $k = 1735$ , v kanálu Pz je to  $k = 1698$  a v kanálu Fp1 je to v  $k = 1727$ .



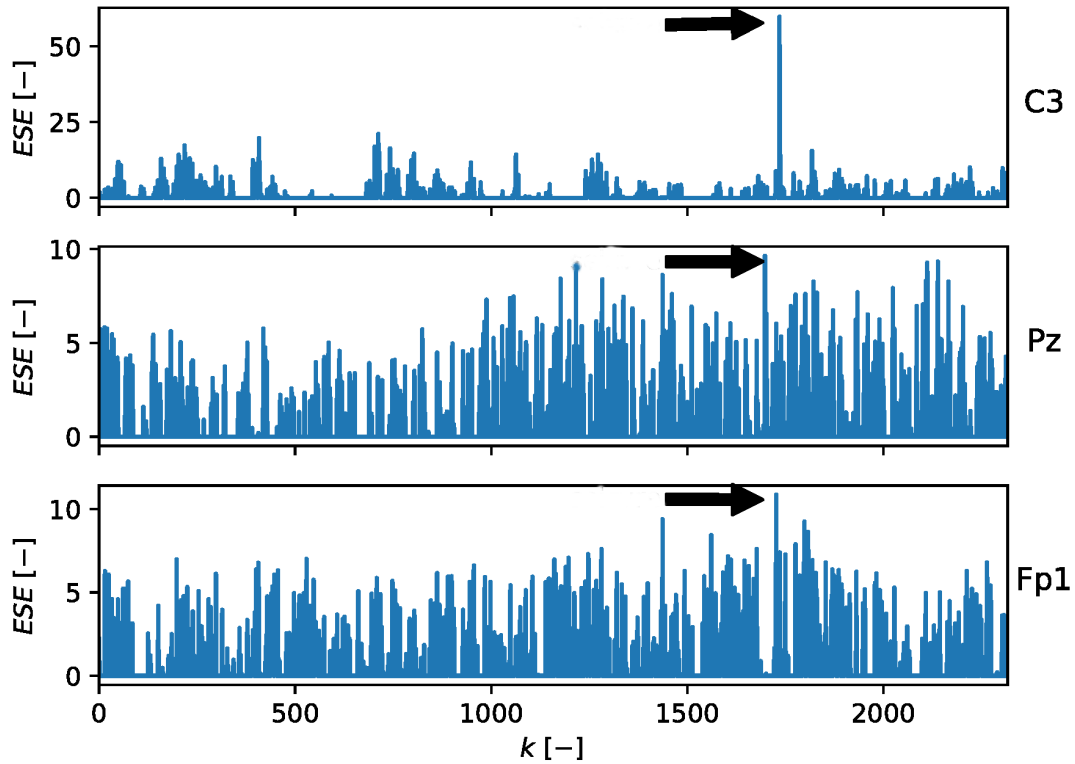
Obrázek 5.10: Vybrané kanály myšního EEG na kterých je patrný epileptický záchvat. Data byly standartizovány. Začátek záchvatu je přibližně v  $k \approx 1700$ , což znázorňuje černá šipka.

### 5.1.7 Vyhodnocení úspěšnosti detekce skokové změny parametrů generátoru signálu

Pro vyhodnocení úspěšnosti skokové změny parametrů generátoru signálu uvažujme generátor signálu s dvěma vstupy  $x_1(k)$  a  $x_2(k)$  a výstupem  $y(k)$  ve tvaru

$$y(k) = a_1 \cdot x_1(k) + a_2 \cdot x_2(k) + a_3 \cdot x_1(k) \cdot x_2(k) + v(k) \quad (5.17)$$

kde člen  $v(k)$  reprezentuje gaussovský aditivní šum s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou  $\sigma$ . Počáteční hodnoty parametrů  $a_1$ ,  $a_2$  a  $a_3$  jsou vygenerovány z rovnoměrného rozdělení  $U(-1, 1)$ . V diskrétním časovém okamžiku  $k = 200$ , dojde ke skokové změně těchto parametrů a jejich nová hodnota je opět náhodně vygenerována z rovnoměrného rozdělení  $U(-1, 1)$ . Celkový počet vzorků experimentu je 400. Použitý adaptivní filtr je stejný jako v předchozí případové studii detekce skokové změny parametrů generátoru signálu, viz kapitola 5.1.3. Parametry tohoto adaptivního filtru byly adaptovány algoritmem GNGD. Metoda POT byla zvolena podle rovnice 3.5 a délka okna byla zvolena  $n_s = 1200$ . Apriorní informace o



Obrázek 5.11: Hodnota ESE pro vybrané kanály se záznamem myšího EEG ve kterých je patrný epileptický záchvat. V kanále C3 je v ESE výrazný nárůst po začátku záchvatu (přibližně v  $k \approx 1700$ ), v porovnání s ostatními kanály. Černá šipka znázorňuje přibližný začátek epileptického záchvatu.

parametrech GPD byla pro každý experiment získána pomocí 1200 vzorků, s počátečními hodnotami parametrů  $a_1$ ,  $a_2$  a  $a_3$ . Pro každý experiment byla vyhodnocena hodnota SNR jako

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} \quad (5.18)$$

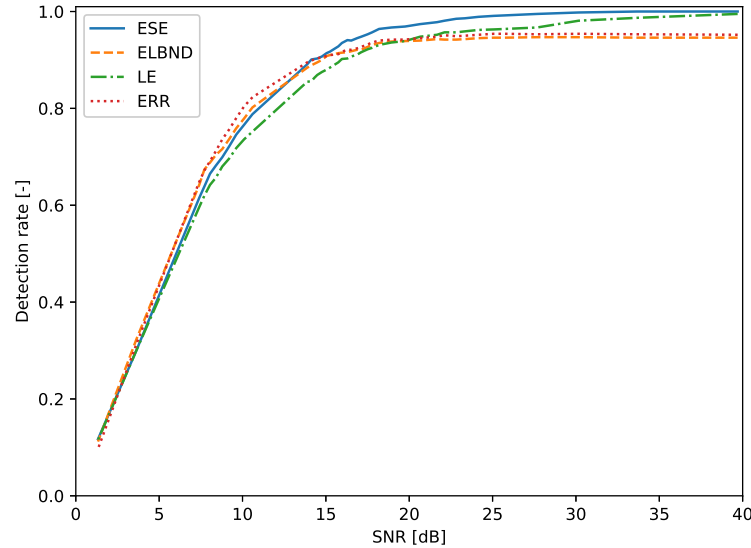
kde  $\sigma_s$  je hodnota směrodatné odchylky výstupu generátoru signálu během experimentu a  $\sigma$  je směrodatná odchylka aditivního gaussovského šumu. Vyhodnocení přesnosti detekce bylo provedeno následujícím způsobem:

1. nastavení hodnoty směrodatné odchylky šumu  $\sigma$
2. pro zvolenou hodnotu směrodatné odchylky  $\sigma$  se provede 1000 experimentů, přičemž pro každý experiment jsou nově vygenerovány počáteční hodnoty parametrů generátoru signálu  $a_1$ ,  $a_2$  a  $a_3$ .
3. pro každý experiment je vyhodnocena úspěšnost detekce. Za úspěšnou detekci je pova-

žováno, pokud globální maximum ESE, ELBND, EL respektive chyby filtru je v mezích  $k \geq 200$  a  $k \leq 210$ .

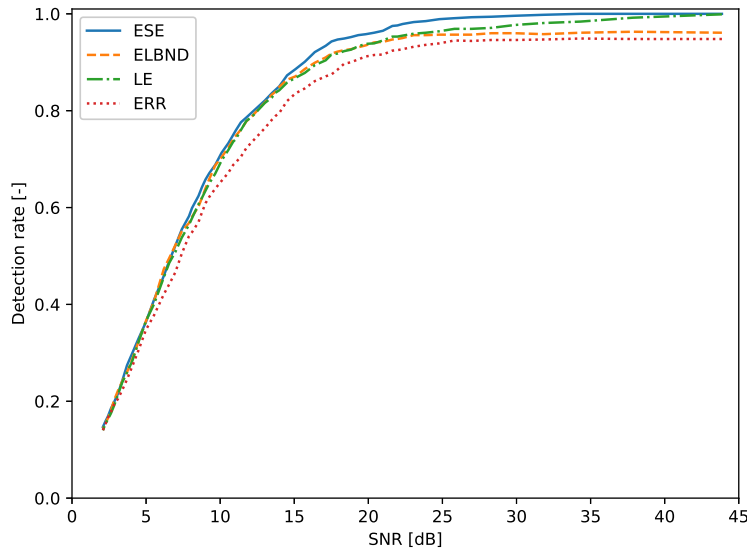
4. vypočíte se celková úspěšnost detekce pro danou hodnotu směrodatné odchylky (poměr počtu úspěšných detekcí k celkovému počtu experimentů)
5. pro každý experiment se vyhodnotí SNR podle 5.18 a pak se pro zvolenou hodnotu  $\sigma$  vypočítá průměrná hodnota  $SNR$  pro všechny experimenty

Vyhodnocení úspěšnosti detekce bylo vyhodnoceno pro dva případy. V prvním případě, byly hodnoty vstupů  $x_1(k)$  a  $x_2(k)$  generovány z rovnoměrného rozdělení  $U(-1, 1)$ . Výsledky úspěšnosti detekce pro různé hodnoty směrodatných odchylek šumu  $\sigma$  jsou zobrazeny na obrázku 5.12. Výsledky jsou také shrnuty v tabulce XXX (viz příloha). Pro porovnání jsou zvoleny metody ELBND (výpočet podle rovnice 1.17), LE s oknem  $n_s = 1200$  (výpočet podle rovnice 1.14) a velikost chyby adaptivního filtru  $e$  (v grafu označeno jako ERR).



Obrázek 5.12: Úspěšnost detekce skokové změny parametrů generátoru signálu. Hodnoty vstupů generátoru signálu jsou generovány z rovnoměrného rozdělení  $U(-1, 1)$ . Pro hodnoty  $SNR > 15 \text{ dB}$  dosáhl algoritmus ESE vyšší úspěšnost než algoritmy LE, ELBND a vyhodnocení pomocí chyby filtru (ERR). Pro  $SNR > 33 \text{ dB}$  dosáhl algoritmus ESE 100% úspěšnost detekce.

Ve druhém případě byly hodnoty vstupů  $x_1(k)$  a  $x_2(k)$  generovány z normálního rozdělení. Vyhodnocení úspěšnosti detekce bylo provedeno stejně jako v případě popsáném výše. Výsledky úspěšnosti detekce pro různé hodnoty směrodatných odchylek šumu  $\sigma$  jsou zobrazeny na obrázku 5.13. Uvedené výsledky v číselné podobě jsou uvedeny v tabulce XXX (viz příloha). Výpočet hodnot ELBND, LE a ERR bylo provedeno stejně jako ve výše uvedeném případě.



Obrázek 5.13: Úspěšnost detekce skokové změny parametrů signálu. Hodnoty vstupů generátoru signálu jsou generovány z normálního rozdělení  $N(0, 1)$ . Pro hodnoty  $SNR > 8 \text{ dB}$  dosáhl algoritmus ESE lepší úspěšnosti detekce než algoritmy LE, ELBND a vyhodnocení pomocí velikosti chyby predikce (ERR). Pro  $SNR > 34 \text{ dB}$  dosáhl algoritmus ESE 100% úspěšnosti detekce.

### 5.1.8 Vyhodnocení úspěšnosti detekce skokové změny trendu

Pro vyhodnocení úspěšnosti změny trendu uvažujme výstup generátoru signálu  $y(k)$  se dvěma vstupy  $x_1(k)$  a  $x_2(k)$  jehož výstup je definován jako

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + 0.01 \cdot k + v(k) \quad (5.19)$$

kde člen  $v(k)$  reprezentuje aditivní gaussovský šum s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou  $\sigma$ . V diskrétním časovém okamžiku  $k = 200$  se změní výstup generátoru signálu

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + (0.01 + a) \cdot k + v(k) \quad (5.20)$$

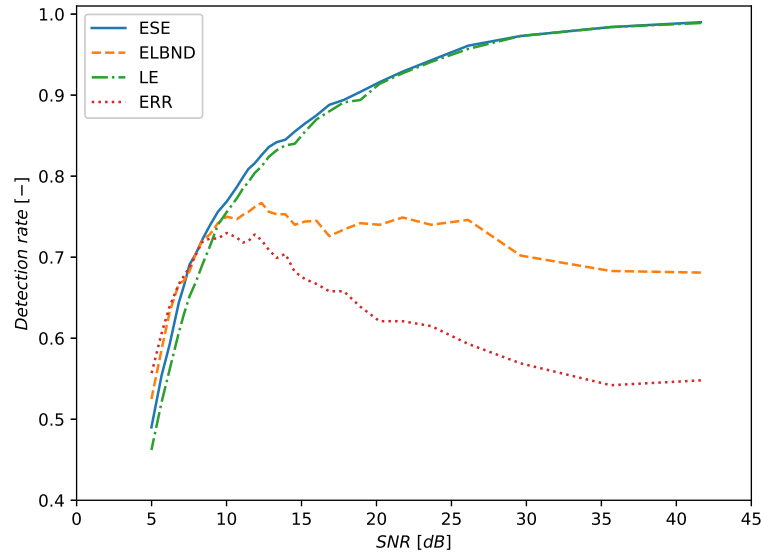
přičemž parametr  $a$  je vygenerován v každém experimentu z rovnoměrného rozdělení  $U(-0.02, 0.02)$ . Počet vzorků experimentu je 400.

Struktura adaptivního filtru byla zvolena stejně jako v předcházející případové studii detekce změny trendu (viz kapitola 5.1.3). Adaptivní parametry filtru byly adaptovány algoritmem GNGD. Metoda POT pro algoritmus ESE byla zvolena jako 3.5 a délka okna byla nastaven na  $n_s = 1200$ . Apriorní informace o parametrech GPD byla získána na základě 1200 vzorků, ve kterých nedošlo ke změně trendu.

Vyhodnocení přesnosti detekce změny trendu bylo provedeno následujícím způsobem:

1. nastavení hodnoty směrodatné odchylky šumu  $\sigma$
2. pro zvolenou hodnotu směrodatné odchylky  $\sigma$  se provede 1000 experimentů. V každém experimentu dojde v diskrétním časovém okamžiku  $k = 200$  k novému vygenerování hodnoty parametru  $a$  z rovnoměrného rozdělení  $U(-0.02, 0.02)$ .
3. pro každý experiment je vyhodnocena úspěšnost detekce. Za úspěšnou detekci je považováno, pokud globální maximum ESE, ELBND, EL respektive chyby filtru je v mezích  $k \geq 200$  a  $k \leq 210$ .
4. vypočte se celková úspěšnost detekce pro danou hodnotu směrodatné odchylky (poměr počtu úspěšných detekcí k celkovému počtu experimentů)
5. pro každý experiment se vyhodnotí SNR podle 5.18 a pak se pro zvolenou hodnotu  $\sigma$  vypočítá průměrná hodnota  $SNR$  pro všechny experimenty

Vyhodnocení úspěšnosti detekce změny trendu bylo vyhodnoceno pro hodnoty vstupů  $x_1(k)$  a  $x_2(k)$  vygenerovány z rovnoměrného rozdělení  $U(-1, 1)$ . Výsledky úspěšnosti detekce pro různé hodnoty směrodatných odchylek šumu  $\sigma$  jsou zobrazeny na obrázku 5.14. Výsledky jsou také shrnuty v tabulce XXX (viz příloha). Pro porovnání jsou zvoleny metody ELBND (výpočet podle rovnice 1.17), LE s oknem  $n_s = 1200$  (výpočet podle rovnice 1.14) a velikost chyby adaptivního filtru  $e$  (v grafu označeno jako ERR).



Obrázek 5.14: Úspěšnost detekce změny trendu. Hodnoty vstupů generátoru signálu byly generovány z rovnoměrného rozdělení  $U(-1, 1)$ . Pro hodnoty  $SNR > 8 \text{ dB}$  dosáhl algoritmus ESE větší úspěšnosti detekce než LE, ELBND a vyhodnocení pomocí velikosti chyby filtru.

## 5.2 Vyhodnocení úspěšnosti detekce změny trendu a evaluace ROC křivky

Protože úspěšná detekce novosti pomocí algoritmu ESE je závislá na volbě hodnoty, od které budeme považovat hodnotu ESE za "novost", byl proveden experiment detekce změny trendu a vyhodnocena ROC (Receiver Operating Characteristics) křivka [24]. ROC křivka poskytuje vhodný způsob jak vizualizovat schopnost binárního klasifikátoru klasifikovat správně data na základě proměnlivé velikosti prahu, který klasifikaci určuje (v případě algoritmu ESE je to hodnota ESE) a zároveň umožňuje objektivně jednotlivé klasifikátory porovnávat [25] (více viz následující podkapitola 5.2.2). Pro porovnání algoritmu ESE byly opět zvoleny algoritmy LE, ELBND a klasifikátor, který klasifikuje vzorky náhodně.

### 5.2.1 Popis experimentu

Stejně jako v případě vyhodnocení přesnosti detekce změny trendu (viz podkapitola 5.1.8) i v tomto experimentu uvažujeme dva vstupy  $x_1(k)$  a  $x_2(k)$  výstup generátoru signálu  $y(k)$  ve tvaru

$$d(k) = x_1(k) + x_2(x) + 0.01 \cdot k + v(k) \quad (5.21)$$

$$0 \leq k < 200$$

kde člen  $v(k)$  reprezentuje gaussovský aditivní šum s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou  $\sigma_n$ . V diskretním časovém okamžiku  $k = 200$  přejde výstup generátoru signálu do tvaru

$$y(k) = x_1(k) + x_2(x) + (0.01 + a) \cdot k + v(k) \quad (5.22)$$

$$200 \leq k \leq 399$$

přičemž hodnota parametru  $a$  je vygenerována z rovnoměrného rozdělení  $U(-0.02, 0.02)$  a pro všechna  $200 \leq k \leq 399$  je během daného experimentu konstantní. Hodnoty vstupů  $x_1(k)$  a  $x_2(k)$  jsou generovány z rovnoměrného rozdělení  $U(-1, 1)$ .

Jako adaptivní filtr byl zvolen QNU, jehož struktura odpovídá struktuře generátoru signálu. Výstup adaptivního filtru je ve tvaru

$$\hat{y}(k) = w_1 \cdot x_1(k) + w_2 \cdot x_2(k) + w_3 \cdot x_1(k) \cdot x_2(k) \quad (5.23)$$

a parametry toho adaptivního filtru byly adaptovány algoritmem GNGD. Rychlost učení během experimentů byla nastavený na  $\mu = 0.5$ .

Apriorní hodnota parametrů GPD pro algoritmus ESE je získána pomocí 1200 vzorků, získaných z výstupu generátoru signálu, který je dán rovnicí 5.21. Během experimentů byla délka okna  $n_s = 1200$ . Metoda POT byla zvolena podle 3.5. Pro výpočet ELBND byl použit vztah

1.17. Výsledky algoritmu LE byly získány pro okno délky  $n_s = 1200$  pomocí vztahu 1.14. Pro každou hodnotu  $\sigma$  bylo provedeno 10000 experimentů na jejichž základě byla zkonstruována ROC křivka. Hodnoty směrodatných odchylek  $\sigma$  byly vybrány takto:

$$\sigma = \{0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 2.5\} \quad (5.24)$$

a pro každou hodnotu *sigma* byla pro všech 10000 experimentů určená průměrná hodnota *SNR*, která byla pro každý experiment vypočtena podle rovnice 5.18.

### 5.2.2 Konstrukce ROC křivky

Pro konstrukci ROC křivky je důležité, aby množina výsledků byla vyvážená. Tedy aby obsahovala stejný počet pozitivních i negativních vzorků. Pro získání vyvážené množiny výsledků byl nejdřív každý experiment převzorkován podle následujícího předpisu

$$ND_r(i) = \max\{ND(i \cdot 10), ND(i \cdot 10 + 1), ND(i \cdot 10 + 2), \dots, ND(i \cdot 10 + 9)\} \quad (5.25)$$

$$i = 0, 1, \dots, 39$$

kde *ND* reprezentuje hodnotu detektoru novosti (resp. hodnoty algoritmu ESE, ELBND, LE). Z každé převzorkované datové řady jsou vybrány dva vzorky jsou vygenerovány dvě jednorvkové množiny. Množina *P* obsahuje pozitivní vzorek, takový, že  $P = \{ND_r(20)\}$  (protože v diskretním časovém okamžiku  $k = 200$  došlo ke změně trendu). Množina *N* obsahuje zbylých 39 negativních vzorků, takže  $N = \{ND(0), \dots, ND(19), ND(21), \dots, ND(39)\}$ . Při konstrukci ROC křivky jsou pro každý experiment vybrány dva vzorky. Jeden vzorek z množiny *P* a jeden náhodně vybraný vzorek z množiny *N*. Pro vyhodnocení ROC je klíčové zjistit, jestli jsou pozitivní vzorky (prvky množiny *P*) pro daný práh správně klasifikovány jako pozitivní (True Positive) a zda-li jsou negativní vzorky klasifikovány jako falešně pozitivní (False Positive). Pro danou velikost prahu se určí úspěšnost detekce skutečně pozitivních (True Positive Rate) jako

$$TPR = \frac{TP}{P} = \frac{TP}{10000} \quad (5.26)$$

kde *TP* je počet správně pozitivně klasifikovaných vzorků a *P* je celkový počet skutečně pozitivních vzorků. Dále je potřeba určit poměr falešně pozitivních (False Positive Rate) vzorků pro daný práh jako

$$FPR = \frac{FP}{N} = \frac{FP}{10000} \quad (5.27)$$

kde *FP* je počet vzorků klasifikovaných jako falešně pozitivní a *N* je celkový počet skutečně negativních vzorků. ROC pak zobrazuje závislost úspěšnost detekce skutečně pozitivních vzorků (*TPR*) v závislosti na poměru falešně pozitivních vzorků (*FPR*).

Hodnota *TPR* bývá nazývána také jako sensitivita. Komplementární hodnotou k *FPR* je



potom specifita (True Negative Rate  $TNR$ ), která určuje, kolik opravdu negativních vzorků ( $TN$ ) je klasifikováno jako negativní. Komplementární ve smyslu

$$TNR = \frac{TN}{N} = 1 - FPR. \quad (5.28)$$

Komplementární k sensitivitě je hodnota míry falešně negativních ( $FNR$ ), která určuje poměr falešně negativních k ( $FN$ ) k celkovému počtu pozitivních, tedy

$$FNR = \frac{FN}{P} = 1 - TPR. \quad (5.29)$$

Pro každou ROC křivku je možné určit plochu pod touto křivkou (Area Under ROC), která vypovídá o schopnosti klasifikátoru rozlišovat mezi jednotlivými třídami. Čím větší plocha pod křivkou, tím víc klasifikátor správně klasifikuje pozitivní případy jako pozitivní a negativní případy jako negativní. Plocha AUROC ideálního klasifikátoru bude 1, zatímco plocha nejhoršího možného klasifikátoru bude rovna 0 (tento klasifikátor, ale bude dokonalým klasifikátorem, pokud zaměníme označení negativní třídy za pozitivní). Plocha AUROC náhodného klasifikátoru bude 0.5, neboť tento klasifikátor nedokáže vůbec rozlišovat mezi pozitivními a negativními případy.

### 5.2.3 Výsledky experimentu

Výsledné ROC křivky pro různé hodnoty  $SNR$  jsou zobrazeny v obrázcích 5.15-5.20. Modrá čára zobrazuje výsledky algoritmu ESE, zelená tečkovaná čára zobrazuje výsledky algoritmu LE, červená přerušovaná čára výsledky algoritmu ELBND a černá čerchovaná čára zobrazuje výsledky náhodného klasifikátoru.

Pro každou ROC křivku byla vypočtena AUROC pomocí lichoběžníkové metody, jako

$$AUROC \approx \sum_{j=1}^{n_t} \frac{TPR(FPR(j)) + TPR(FPR(j+1))}{2} \cdot (FPR(j+1) - FPR(j)) \quad (5.30)$$

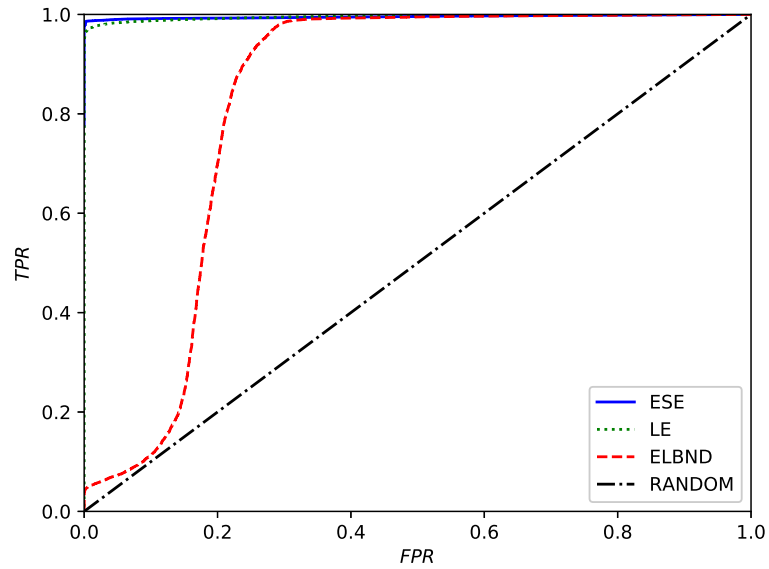
kde  $n_t$  reprezentuje počet vyhodnocovaných prahů zmenšený o 1. Výsledné plochy pod křivkami ROC jsou pro jednotlivé metody a směrodatné odchylky šumu uvedené v následující tabulce 5.1. Tučně je zvýrazněna největší hodnota AUROC. Podle uvedených hodnot při průměrném  $SNR = 35.8$  nejlepe rozlišuje mezi pozitivními a negativními případy algoritmus LE. Pro nižší hodnoty  $SNR$  je nejlepe separujícím algoritmem ESE. V další tabulce 5.2 je uvedená úspěšnost klasifikace, kde za úspěšnou klasifikaci je považován případ, kdy maximální hodnota ESE, ELBND nebo LE během experimentu je v intervalu  $200 \leq k \leq 210$ , tedy do deseti vzorků po změně trendu. Tučně jsou zvýrazněny hodnoty nejvyšší úspěšnosti detekce. Z výsledků je patrné, že pro průměrné  $SNR = 35.8$  má nejvyšší úspěšnost algoritmus LE. Pro nižší hodnoty  $SNR$  je algoritmem s nejvyšší úspěšností detekce algoritmus ESE.

Tabulka 5.1: *AUROC* pro detekci změny trendu

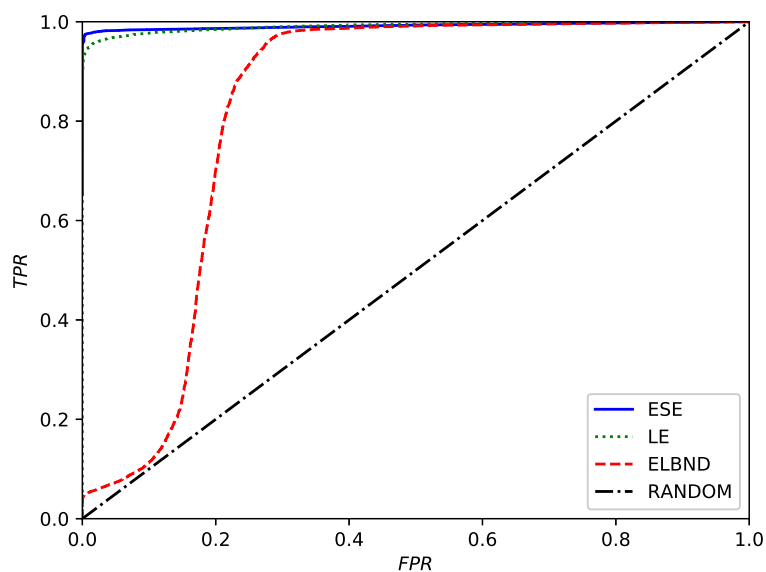
		<b>AUROC</b>		
$\sigma_n$	$SNR$ [dB]	<i>ESE</i>	<i>LE</i>	<i>ELBND</i>
0.1	35.8	0.9954	<b>0.9952</b>	0.8234
0.2	30.0	<b>0.9920</b>	0.9912	0.8299
0.5	21.7	<b>0.9816</b>	0.9777	0.8288
1.0	16.2	<b>0.9576</b>	0.9496	0.8263
2.0	10.8	<b>0.9286</b>	0.9214	0.8397
2.5	9.2	<b>0.9134</b>	0.9056	0.8446

Tabulka 5.2: Úspěšnost detekce změny trendu

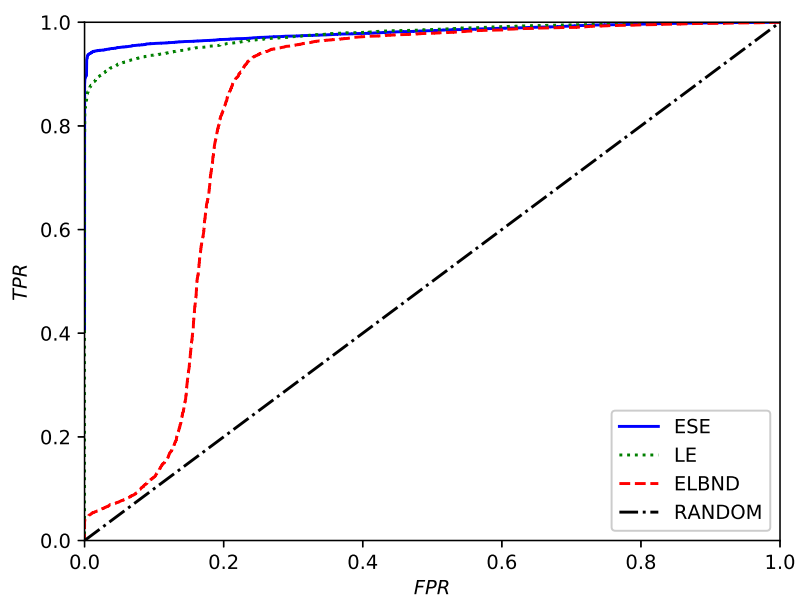
		<b>Detection rate</b>		
$\sigma_n$	$SNR$ [dB]	<i>ESE</i>	<i>LE</i>	<i>ELBND</i>
0.1	35.8	98.88	<b>98.92</b>	60.00
0.2	30.0	<b>98.14</b>	98.03	59.61
0.5	21.7	<b>95.18</b>	95.08	59.65
1.0	16.2	<b>90.42</b>	89.96	57.67
2.0	10.8	<b>81.27</b>	78.51	57.69
2.5	9.2	<b>75.86</b>	71.56	57.16



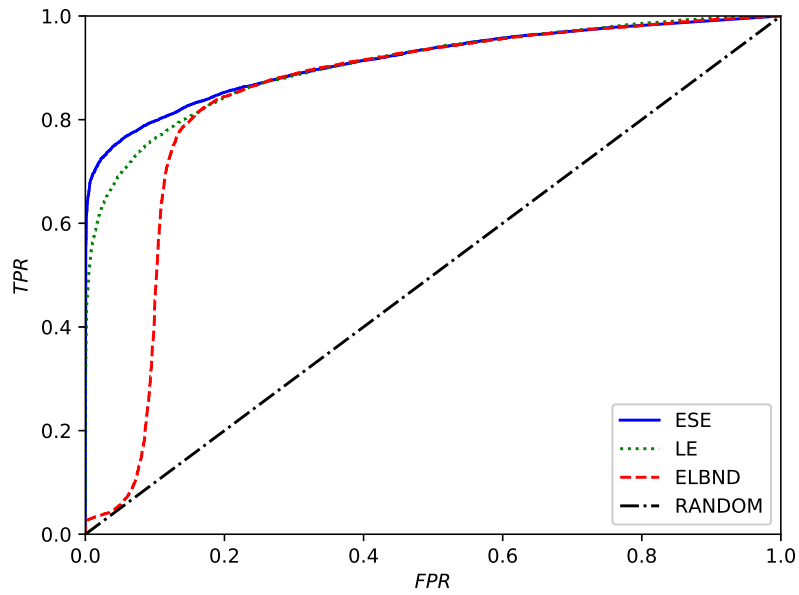
Obrázek 5.15: ROC křivky v případě detekce změny trendu signálu obsahujícího aditivní gaussovský šum se směrodatnou odchylkou  $\sigma = 0.1$ . Průměrná hodnota  $SNR$  experimentů byla  $SNR = 35.80$  dB. Černá čerchovaná čára (RANDOM) reprezentuje náhodný klasifikátor.



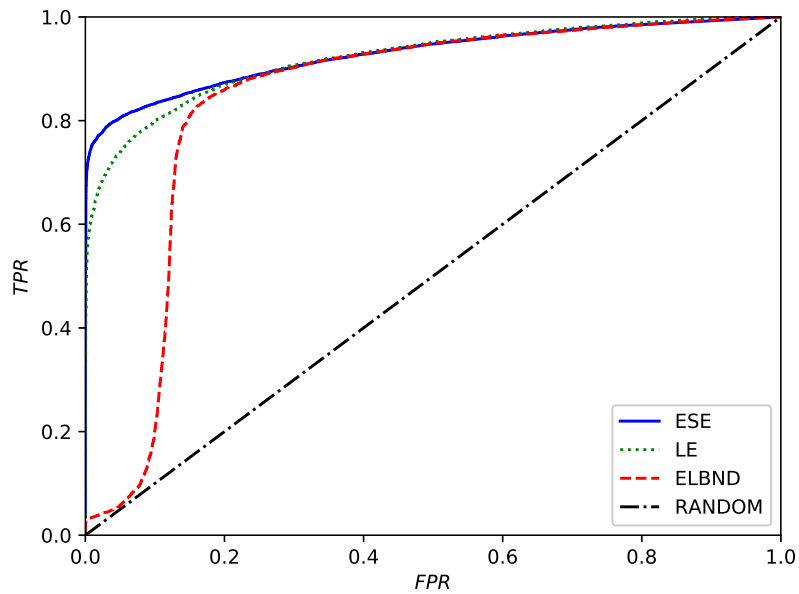
Obrázek 5.16: ROC křivky v případě detekce změny trendu signálu obsahujícího aditivní gaussovský šum se směrodatnou odchylkou  $\sigma = .2$ . Průměrná hodnota  $SNR$  experimentů byla  $SNR = 30.00 \text{ dB}$ . Černá čerchovaná čára (RANDOM) reprezentuje náhodný klasifikátor.



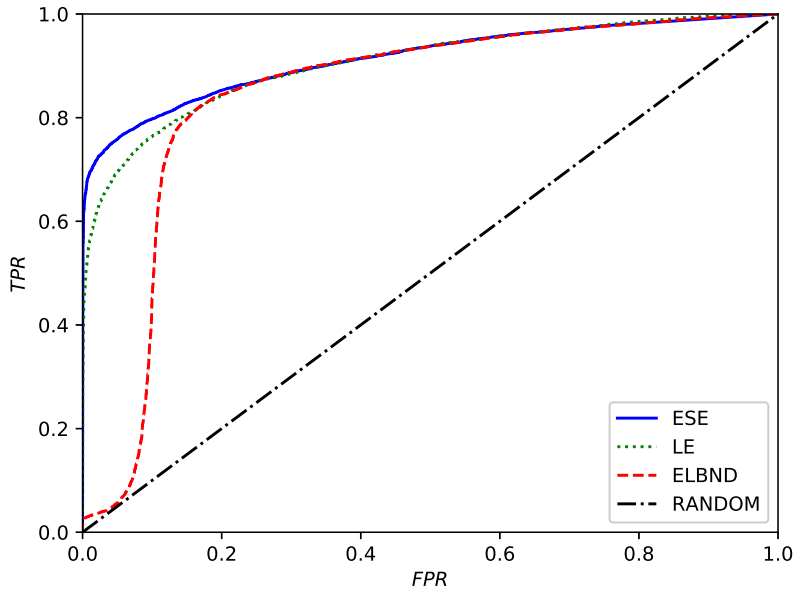
Obrázek 5.17: ROC křivky v případě detekce změny trendu signálu obsahujícího aditivní gaussovský šum se směrodatnou odchylkou  $\sigma = 0.5$ . Průměrná hodnota  $SNR$  experimentů byla  $SNR = 21.70 \text{ dB}$ . Černá čerchovaná čára (RANDOM) reprezentuje náhodný klasifikátor.



Obrázek 5.18: ROC křivky v případě detekce změny trendu signálu obsahujícího aditivní gaussovský šum se směrodatnou odchylkou  $\sigma = 1.0$ . Průměrná hodnota  $SNR$  experimentů byla  $SNR = 16.20 \text{ dB}$ . Černá čerchovaná čára (RANDOM) reprezentuje náhodný klasifikátor.



Obrázek 5.19: ROC křivky v případě detekce změny trendu signálu obsahujícího aditivní gaussovský šum se směrodatnou odchylkou  $\sigma = 2.0$ . Průměrná hodnota  $SNR$  experimentů byla  $SNR = 10.88 \text{ dB}$ . Černá čerchovaná čára (RANDOM) reprezentuje náhodný klasifikátor.



Obrázek 5.20: ROC křivky v případě detekce změny trendu signálu obsahujícího aditivní gaussianový šum se směrodatnou odchylkou  $\sigma = 2.5$ . Průměrná hodnota  $SNR$  experimentů byla  $SNR = 9.20 \text{ dB}$ . Černá čerchovaná čára (RANDOM) reprezentuje náhodný klasifikátor.

### 5.3 Vyhodnocení výpočetní náročnosti metod odhadu parametrů zobecněného Paretova rozdělení

Výsledky v této podkapitole byli publikovány v (můj shit). Cílem bylo určit výpočetní čas výpočtu parametrů GPD v typické aplikaci pro použití algoritmu ESE, který byl, v tomto případě, testován ne experimentu detekce skokové změny parametrů generátoru signálu.

#### 5.3.1 Motivace

Detekce novosti v reálném čase je úloha, která nalézá své uplatnění nejen v oblasti detekci a diagnostiky v průmyslových aplikacích [14], ale také např. v detekci narušení počítačových sítí [15] nebo v zabezpečovacích systémech [16]. Další oblastí uplatnění je např. mobilní robotika, která je specifická tím, že robot má k dispozici pouze limitovaný výpočetní výkon [17, 18]. Pro metody detekce novosti v reálném čase je tedy důležité, aby vynikali dostatečně nízkou výpočetní náročností. Z tohoto důvodu byli otestováni tři různé metody výpočtu parametrů GPD (viz kapitola 3, protože tento výpočet je z hlediska použití algoritmu ESE potenciálně limitující z hlediska využitelnosti v aplikacích detekce v reálném čase. Jmenovitě byli otestováni tyto metody: metoda maximální věrohodnosti (ML), metoda momentů (MOM) a metoda kvazi-maximální věrohodnosti (QML) (více viz kapitola 3). Výpočetní čas potřebný k určení parametrů GPD pomocí těchto metod byl vyhodnocen při experimentu, ve kterém dojde ke

skokové změně parametrů generátoru signálu.

### 5.3.2 Specifikace experimentu

Vzhledem k povaze experimentu, který slouží k vyhodnocení výpočetní náročnosti různých metod určení parametrů GPD, a nikoliv k detekci novosti v nějakém komplexním procesu, byl zvolen jednoduchý lineární kombinační filtr (LNU), jehož výstup v diskretním časovém okamžiku  $k$  je definován jako

$$\hat{y}(k) = w_1 \cdot x_1(k) + w_2 \cdot x_2(k) + w_3 \cdot x_3(k) \quad (5.31)$$

a tento filtr je adaptován algoritmem NLMS (viz kapitola 2.2.1), přičemž rychlost učení  $\mu$  byla nastavena jako  $\mu = 0.8$ .

Pro výstup generátoru signálu platí vztah

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + v(k) \quad (5.32)$$

pro všechny  $1 \leq k \leq 200$ . Člen  $v(k)$  reprezentuje aditivní gaussovský šum s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou  $\sigma_{noise} = 0.1$ . V diskretním časovém okamžiku  $k = 201$  dojde ke změně generátoru signálu a jeho výstup přejde do tvaru

$$y(k) = 0.7 \cdot x_1(k) + 1.2 \cdot x_1(k) + 1.1 \cdot x_1(k) + v(k) \quad (5.33)$$

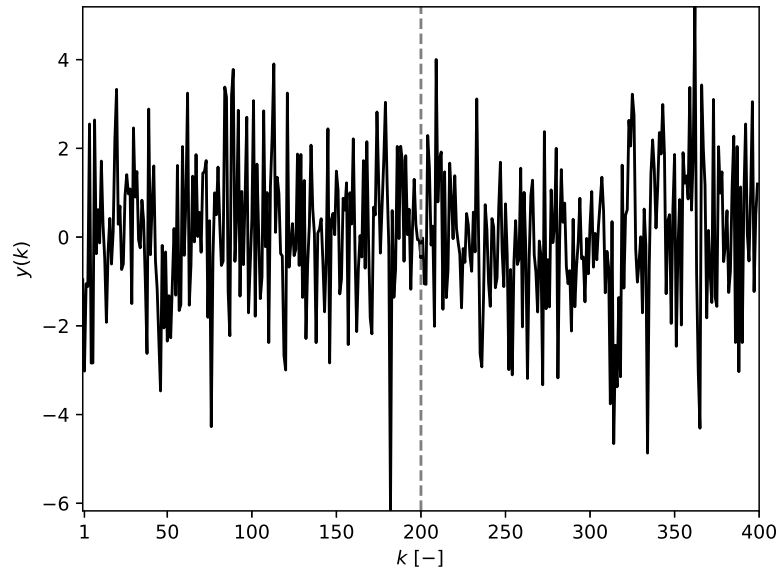
pro  $201 \leq k \leq 400$ . Hodnota všech vstupů generátoru signálu je v každém časovém okamžiku  $k$  vybrána ze standardního rozdělení normálního rozdělení, takže  $i$ -tý vstup  $x_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Změna parametrů signálu byla vybrána tak, aby nedošlo ke změně střední hodnoty signálu  $y(k)$ .

Délka okna pro odhad parametrů GPD byla během experimentu nastavena na  $n_s = 1200$ . Metoda POT byla zvolena podle REF na 10%. Před experimentem bylo pořízeno 1200 vzorků vygenerovaných generátorem signálu definovaným vztahem 5.31, na něž byla použita metoda POT, tak aby při experimentu v diskretní časový okamžik  $k = 1$  byla hodnota ESE relevantní.

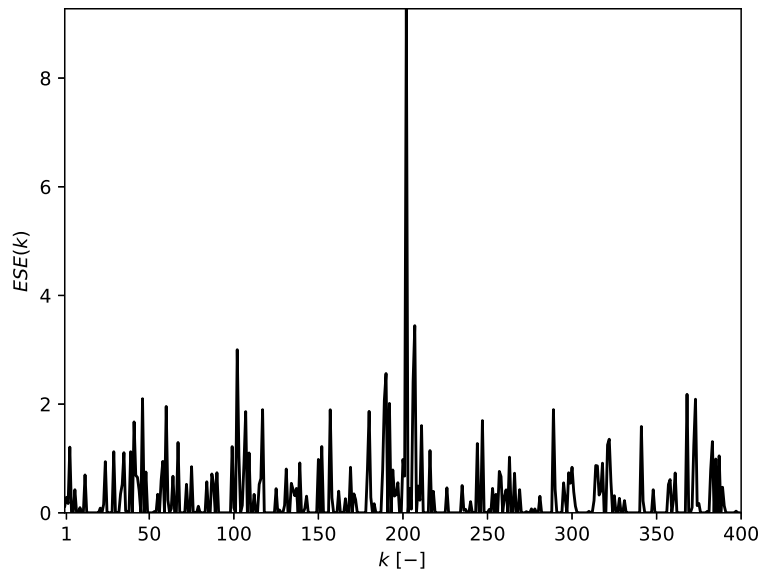
Experiment byl proveden na PC s procesorem Intel(R) Core(TM) i5-7400 se 4mi jádry s taktovací frekvencí 3001 MHz a operační pamětí o velikosti 32 GB. Operační systém byl Windows 10 Pro, 64-bitová verze 10.0.18362. Kód byl napsán v Python 3.6.1 a byly použity knihovny Numpy 1.17.0 a Scipy 1.4.1.

### 5.3.3 Výsledky a diskuze

Průměrný čas výpočtu  $\bar{t}$  parametrů všech tří GPD (počet GPD odpovídá počtu adaptivních parametrů filtru) a odpovídající směrodatné odchylky  $\sigma_t$  jsou uvedeny v následující tabulce



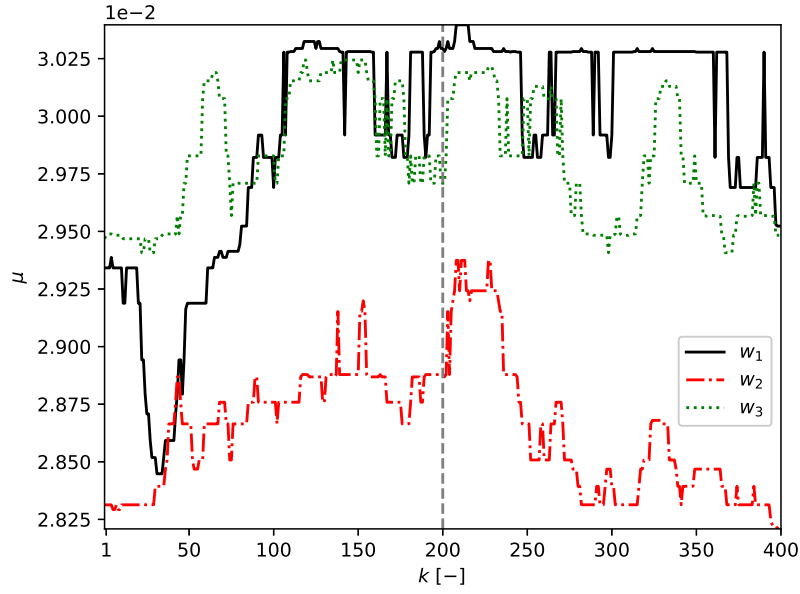
Obrázek 5.21: Výstup adaptivního filtru během experimentu. Skoková změna parametrů generátoru signálu je zvýrazněná svislou vodorovnou čarou v diskretním časovém okamžiku  $k = 200$ .



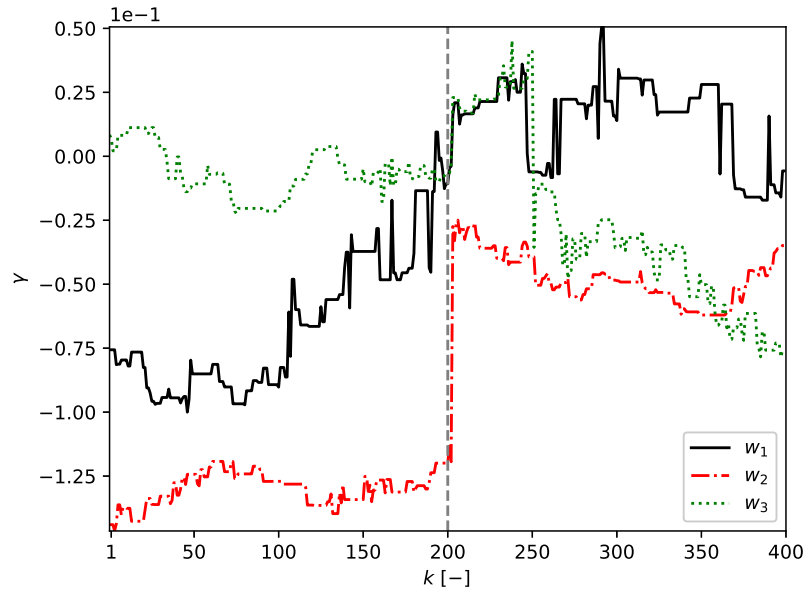
Obrázek 5.22: Hodnota ESE během experimentu. Globální maximum odpovídá změně parametrů generátoru signálu, resp. úspěšné detekci novosti.

5.3. Čas výpočtu je určený pro jeden experiment (400 vzorků).

Z uvedených výsledků je patrné, že nejrychlejší metoda je MOM. Podstatnou nevýhodou

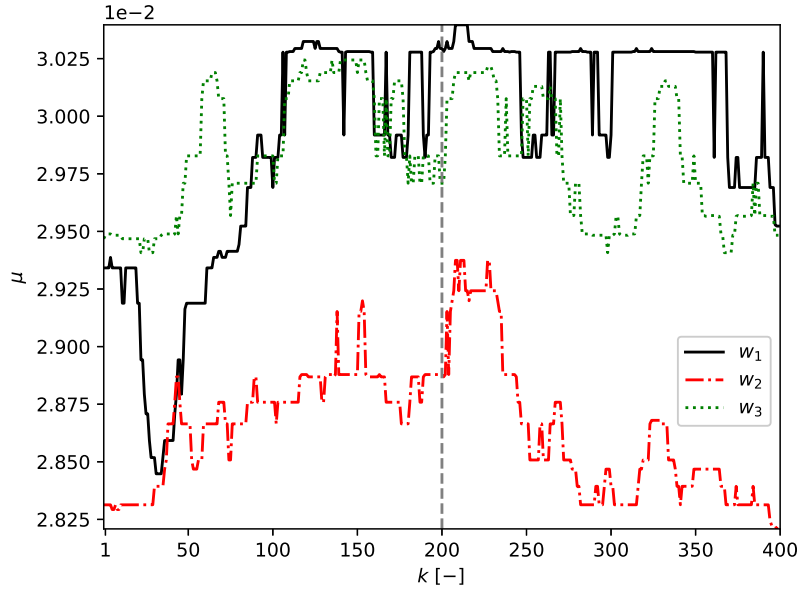


Obrázek 5.23: Hodnota parametru  $\mu$  GPD pro všechny tři adaptivní váhy  $w_1, w_2, w_3$  během experimentu detekce změn parametrů generátoru signálu. Svislá čára v diskretním časovém okamžiku  $k = 200$  znázorňuje skokovou změnu parametrů generátoru signálu.



Obrázek 5.24: Hodnota parametru  $\gamma$  GPD pro všechny tři adaptivní váhy  $w_1, w_2, w_3$  během experimentu detekce změn parametrů generátoru signálu. Svislá čára v diskretním časovém okamžiku  $k = 200$  znázorňuje skokovou změnu parametrů generátoru signálu.





Obrázek 5.25: Hodnota parametru  $\sigma$  GPD pro všechny tři adaptivní váhy  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  během experimentu detekce změn parametrů generátoru signálu. Svislá čára v diskretním časovém okamžiku  $k = 200$  znázorňuje skokovou změnu parametrů generátoru signálu.

Tabulka 5.3: Tabulka průměrných časů výpočtu pro jednotlivé adaptivní váhy a odpovídajících směrodatných odchylek vybraných metod výpočtu parametrů GPD

	Metoda	$\bar{t}$ [ms]	$\sigma_t$ [ms]
$w_1$	ML	26.198	3.396
	QML	0.354	0.478
	MOM	<b>0.076</b>	0.264
$w_2$	ML	26.718	2.302
	QML	0.337	0.471
	MOM	<b>0.064</b>	0.244
$w_3$	ML	24.982	1.964
	QML	0.395	0.489
	MOM	<b>0.060</b>	0.238

této metody pro využití v aplikacích, které vyhodnocují data v reálném čase je její omezení na hodnoty parametrů GPD (viz kapitola 3). Pokud parametry uvedené omezení nesplňují, vypočtené hodnoty nepřesné (resp. nesmyslné) a tedy nepoužitelné pro algoritmus ESE, který začne produkovat nepřesné výsledky. Z pohledu úlohy detekce novosti je diskutabilní, zda-li můžeme garantovat, že sledovaný proces po celou dobu bude splňovat uvedené omezení.

Metoda, jejíž výpočetní čas byl nejvyšší je ML, což je vzhledem k iterativnímu určení parametrů GPD očekávatelné. Nevýhoda použití této metody tkví v nemožnosti určit minimální resp. maximální počet iterací. Jednou z možností jak zrychlit nalezení parametrů je využití

apriorní informace o hodnotách těchto parametrů. V rámci experimentu však byla využita pouze apriorní informace o parametru  $\mu$ , který odpovídá nejmenší hodnotě přírůstku vah, které byli získány metodou POT aplikovanou na plovoucí okno délky  $n_s$ .

Dobrým kompromisem mezi výše uvedenými metodami je použití metody QML. Výpočetní čas této metody byl v uvedeném experimentu o dva řády kratší než ML a asi pětkrát delší než MOM. Pro každou z vyhodnocovaných vah byl kratší než 500  $\mu s$ .

Z provedeného experimentu je patrné, že použití algoritmu ESE pro aplikace v reálném čase je limitováno počtem parametrů filtru a rychlostí vzorkování monitorovaného procesu.

## 5.4 Případová studie použití algoritmu Learning Entropy a adaptivního fuzzy filtru pro detekci změn stavů bioproduktu

Cílem této studie je ověřit, že algoritmus LE, který byl doposud publikován s adaptivními filtry typu LNU a HONU, je možné použít i pro jiné typy adaptivních filtrů. Pro provedenou studii tak byl vybrán adaptivní fuzzy filtr (viz kapitola 2.1.4).

### 5.4.1 Popis bioproduktu a specifikace problému

Podle [1] je pro fermentační procesy, které probíhají v dávkovém režimu je podstatné, aby probíhalo správně dávkované živění substrátem. Pro tyto procesy je specifické, že se při nadměrných koncentracích stává substrát pro mikroorganismy toxickým a může dojít k tzv. přeživení a tím i zahubení těchto mikroorganismů. Naopak, v důsledku nedostatečného zábovení živinami může dojít k odumření kultivovaného organismu. Z tohoto pohledu se je tedy důležité v závislosti na koncentraci substrátu a stavu populace mikroorganismů měnit i strategii pro řízení procesu kultivace. Historicky byl stav bioproduktu klasifikován expertem, přičemž vyhodnocení bylo poměrně časově náročné a nebylo neobvyklé, že různí experti docházeli k rozdílným závěrům. Protože výnos fermentačního procesu je zásadním způsobem ovlivněn správnou klasifikací stavu ve kterém se právě nachází, bylo by vhodné klasifikaci automatizovat a pokud možno zvýšit její přesnost. Tomuto problému je právě věnována publikace [1], která řeší problém automatické klasifikace stavů bioproduktu kultivace bakterie *Pseudomonas putida* KT2442. V této publikaci je navržen komplexní algoritmus pro online klasifikaci stavů bioproduktu. Autoři zde rozlišují celkem tři stavy bioproduktu kultivace *Pseudomonas putida* KT2442, konkrétně:

1. normální živění
2. přeživení
3. nedoživení

Navržený algoritmus vyhodnocuje přísun vstupujících živin (Fm), respektive substrátu, a změny a trendu rozpuštěného kyslíku (DO), který je produkován bakteriemi *Pseudomonas putida* a pomocí hřebenové regrese (v literatuře se vyskytuje také pod názvem Tichonova regularizace) je určován vývoj populace bakterií respektive stav bioprocesu. Vzhledem k tomu, že modely vývoje populace pro jednotlivé stavy jsou různé, mohlo by v průběhu experimentu dojít i k podstatným změnám v adaptivním modelu v okamžicích změn stavů kultivace. Tyto změny se mohli projevit neobvykle velkými přírůstky adaptivních parametrů.

Protože algoritmus Learning Entropy využívá přírůstek adaptivních parametrů, mohl by být vhodným nástrojem pro detekci změn stavů bioprocesu. Předpokládáme, že tedy existuje souvislost mezi změnami stavu bioprocesu a nárůstem Learning Entropy. Přestože může být proces kultivace bakterií *Pseudomonas Putidas* modelován různými a různě složitými modely, pro využití algoritmu Learning Entropy se jeví výhodné použít jednoduché prediktory nebo sledovače. Dosud publikované články využívali pro algoritmus LE pouze FIR filtry, případně Volterrovy filtry, které mají adaptivní parametry v lineární závislosti. V tomto experimentu je použit adaptivní fuzzy filtr, jehož struktura je specifikována v kapitole 2.1.4 a k jehož adaptaci byl použit algoritmus, který je uveden v kapitole 2.2.4.

Použitý adaptivní fuzzy filtr má 9 pravidel ( $M = 9$ ), jehož  $l$ -té pravidlo je ve tvaru

$$IF\ do(k-1)\ is\ A_1^l\ AND\ do(k-6)\ is\ A_2^l\ AND\ do(k-19)\ is\ A_3^l\ THEN\ do(k)\ is\ B^l\quad (5.34)$$

kde  $A_i^l$  je množina ve vstupním prostoru  $U \subset R^3$  a  $B^l$  je fuzzy množina ve výstupním prostoru  $V \subset R$ . V uvedeném pravidle jsou  $do(k-1)$ ,  $do(k-6)$ ,  $do(k-19)$  a  $do(k)$  lingvistické proměnné, které vyjadřují koncentraci rozpuštěného kyslíku  $do$  v diskretních časových okamžicích  $k$ ,  $k-1$ ,  $k-6$  respektive  $k-19$ , kde  $k$  je diskretní časový index. Vzhledem k tomu, že uvedený adaptivní fuzzy filtr používá Gaussovske funkce příslušnosti (viz kapitola 2.1.4 je zobrazení popisující jeho výstup ve tvaru

$$\hat{y}(\mathbf{x}(k)) = \frac{\sum_{j=1}^9 \bar{b}^j \left[ \prod_{i=1}^3 \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right) \right]}{\sum_{j=1}^9 \left[ \prod_{i=1}^3 \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right) \right]} \quad (5.35)$$

kde vektor  $\mathbf{x}(k)$  je

$$\mathbf{x}(k) = [do(k-1), do(k-6), do(k-19)]. \quad (5.36)$$

Protože hodnota koncentrace rozpuštěného kyslíku je uváděna v procentech, platí pro všechna  $x_i \in \langle 0; 100 \rangle$ . K adaptování výše uvedeného filtru byl použit algoritmus gradient descent (viz kapitola 2.2.4. Maximální počet epoch byl stanoven na  $q_{max} = 100$  a požadovaná chyba predikce mezi výstupem adaptivního filtru a naměřenými daty na  $\epsilon = 0,001$ . Rychlost učení byla během experimentů nastavena na  $\mu = 1$ .

Pro vyhodnocení novosti byla použita přímá verze algoritmu LE, takže

$$E(k) = \max\{0, \sum_{j=1}^9 z(|\Delta \bar{b}^j|) - \beta\} \quad (5.37)$$

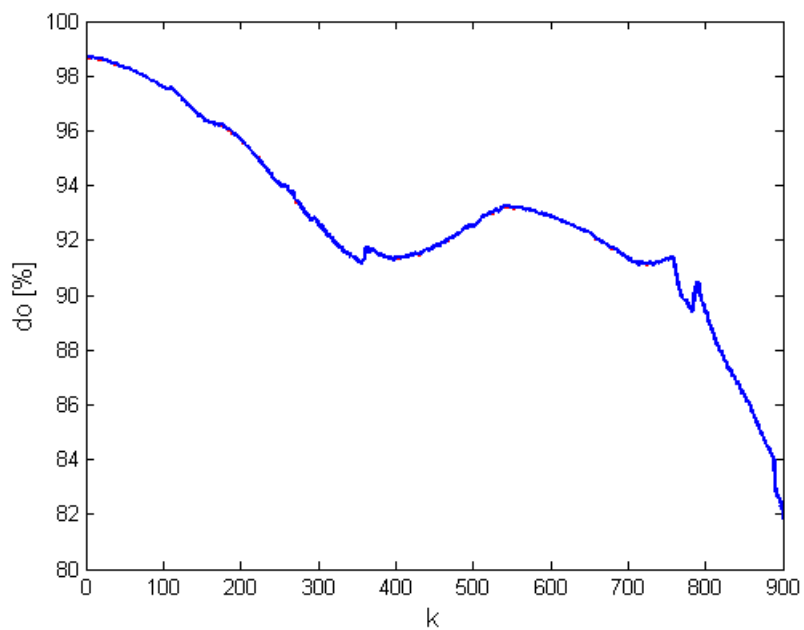
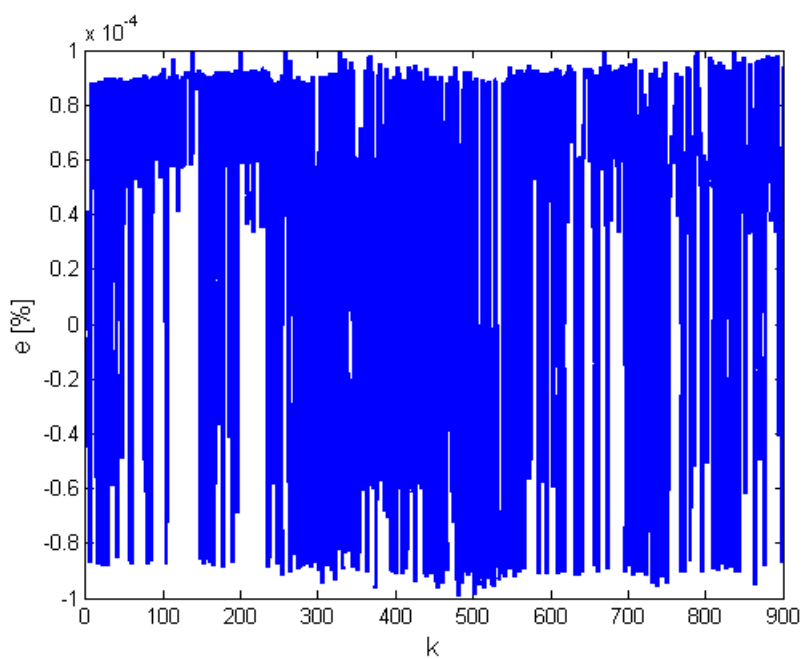
kde funkce  $z$  je dána rovnicí (XY) a  $\beta$  je citlivostní parametr. Pro vyhodnocení novosti jsou tedy použity změny polohy středů množin ve výstupním prostoru, nikoliv změny parametrů fuzzy množin ve vstupním prostoru.

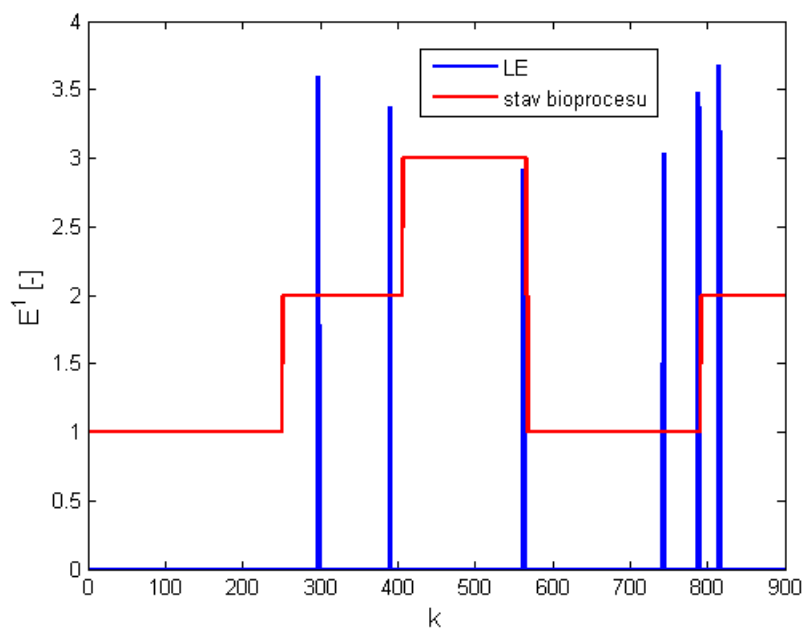
#### 5.4.2 Experiment a zhodnocení

Experiment s použitím algoritmu LE a adaptivního fuzzy filtru byl uskutečněn na datech z kultivace bakterie *Pseudomonas Putida*, který byl uskutečněn na Ústavu počítačové a řídicí techniky VŠCHT Praha. Celkem byly zpracovávány hodnoty ze dvou kultivací. Přestože bylo během experimentu měřena sada různých veličin (např. teplota, pH, atd.), osvědčil se pro použití LE signál rozpustěného kyslíku  $do$  [%]. Během experimentu bylo použito vzorkování  $T = 1 \text{ min}$ , což je vzhledem k rychlosti celého procesu dostatečně rychlé vzorkování. Počáteční nastavení parametrů adaptivního fuzzy filtru bylo provedeno tak, jak je popsáno v kapitole 2.2.4. Podstatný vliv na výsledek detekce změn stavu bioprocesu měla volba délky okna pro vyhodnocení změn adaptabilních parametrů filtru  $M_{ND}$ . Na základě experimentů s různými délkami byla nakonec zvolena délka okna  $M_{ND} = 20$ .

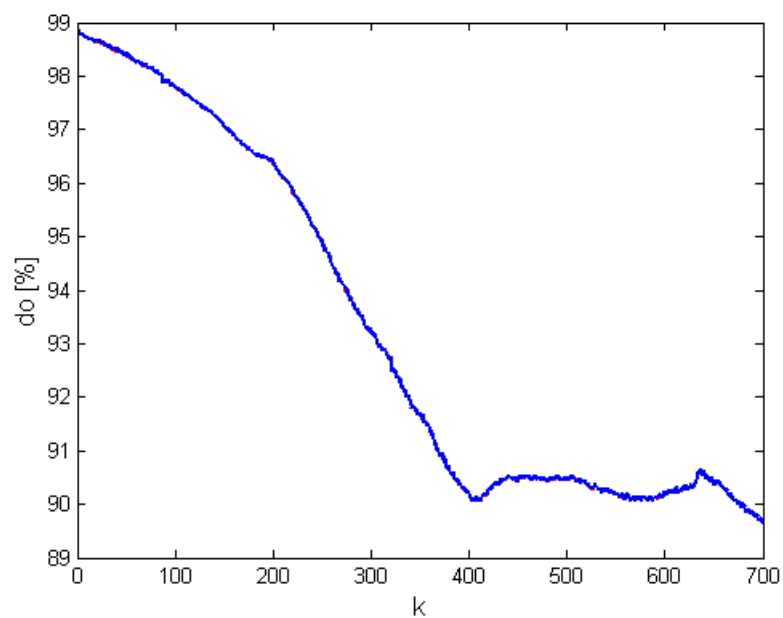
Na následujících obrázcích je znázorněn průběh signálu  $do$  během první kultivace (viz obrázek 5.26), chyba predikce (viz obrázek 5.27) a odpovídající hodnoty  $LE$  společně se stavy bioprocesu (viz obrázek 5.30). Význam stavů bioprocesu znázorněných na obrázku 5.27 respektive obrázku 5.31 jsou: 1 - nedoživení, 2 - živení, 3 - přeživení. Aby byli detekovány všechny změny stavu bioprocesů, byla stanovena hodnota parametru  $\beta = 2,58$  (viz rovnice 5.37).

Data z druhé kultivace byla použita k ověření správného nastavení parametru  $\beta$ . Obrázek 5.29 zobrazuje průběh signálu  $do$  během druhého experimentu. Chyba predikce adaptivního fuzzy filtru je zobrazena na obrázku 5.28. Obrázek 5.31 zobrazuje stavy bioprocesu během kultivace a odpovídající hodnoty  $LE$ . S tímto nastavením parametru  $\beta$  se podařilo detekovat pouze tři změny bioprocesu. Nicméně pro jiné hodnoty délky okna  $M_{ND}$  a hodnoty parametru  $\beta$  se tyto změny detekovat podařilo. Je tedy zřejmé, že pro praktické použití je správná volba obou parametrů zásadní. Vzhledem k malému množství dat a časové náročnosti kultivace nebylo možné použít nějakou validační metodu.

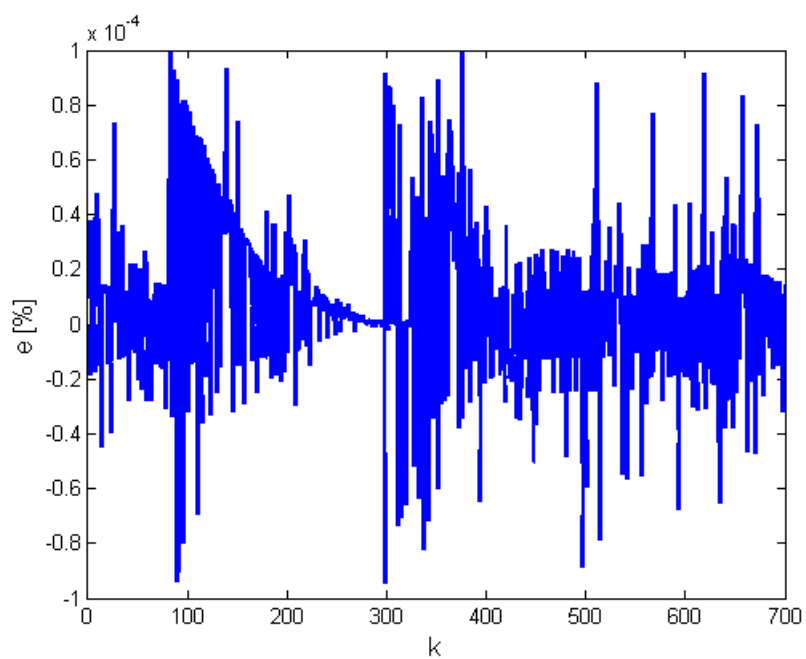
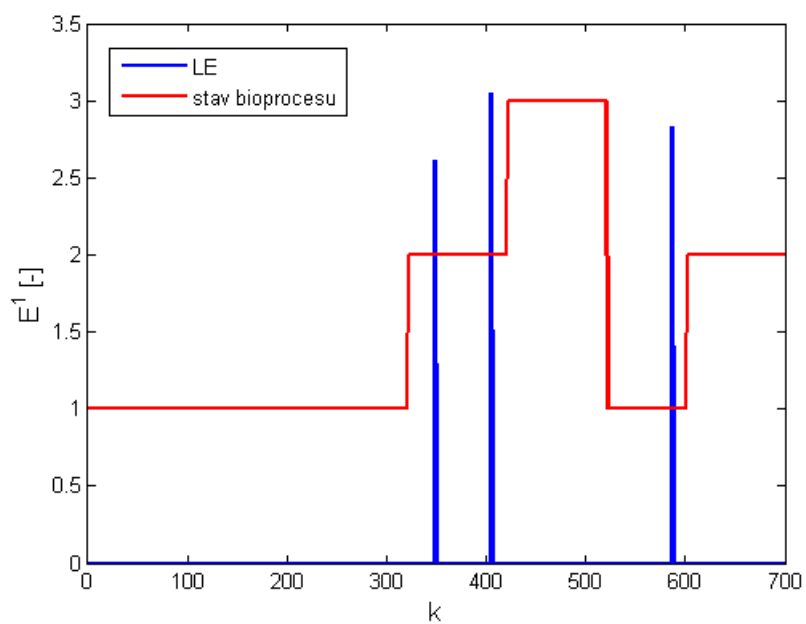
Obrázek 5.26: Průběh signálu  $do$  během první kultivaceObrázek 5.27: Chyba predikce  $e$  během první kultivace



Obrázek 5.28: Stav bioprocesu a hodnota  $LE$  první kultivace



Obrázek 5.29: Průběh signálu  $do$  během druhé kultivace

Obrázek 5.30: Chyba predikce  $e$  během druhé kultivaceObrázek 5.31: Stav bioproduktu a hodnota  $LE$  během druhé kultivace





## 6 Závěr

Předložená dizertační práce je věnována použití adaptivních systémů při analýze dat. Z chronologického pohledu je prvním výstupem během zpracování této práce případová studie algoritmu Learning Entropy pro detekci změn stavu bioprocesu s využitím adaptivního fuzzy filtru [9]. Dále byla úspěšně vyzkoušena detekce fázové změny v krystalografických datech pomocí adaptivního filtru a zobecněného rozdělení extrémních hodnot [10]. Zobecněné rozdělení extrémních hodnot bylo také využito v případové studii skokové změny parametrů generátoru signálu [3].

Za zásadní výsledek lze považovat nový originální algoritmus pro detekci novosti, který vyhodnocuje přírůstky adaptivních vah filtru, Extreme Seeking Entropy [1] (viz kapitola 4). Tento algoritmus byl otestován v následujících případových studiích (viz kapitola 5.1): detekce pertubace v chaotické časové řadě získané řešením Mackey-Glassovy rovnice, detekce změny rozptylu šumu v náhodném datovém toku, detekce skokové změny parametrů generátoru signálu, detekce náhlé absence šumu, detekce změny trendu a při detekci epilepsie v myším EEG. Pro detekci skokové změny trendu a skokové změny parametrů signálu byla vyhodnocena úspěšnost této detekce a výsledky porovnány s výsledky algoritmů Learning Entropy a Error and Learning Based Novelty Detection, přičemž v obou případech byla úspěšnost detekce algoritmu ESE vyšší pro téměř všechny vyhodnocované hodnoty SNR. Pro hodnotu  $SNR > 34 \text{ dB}$  dosáhl algoritmus při detekci skokové změny parametrů generátoru signálu 100% úspěšnost. Při detekci změny trendu měl algoritmus ESE pro hodnoty  $SNR > 8 \text{ dB}$  větší úspěšnost detekce než srovnávané algoritmy LE a ELBND.

Pro možné použití v aplikacích detekce v reálném čase byla experimentálně zjišťována výpočetní časová náročnost různých metod odhadů parametrů zobecněného Paretova rozdělení v případě použití algoritmu ESE při detekci skokové změny parametrů [12]. Výsledkem je porovnání 3 různých metod odhadu parametrů. Limitujícím faktorem použití ESE v reálném čase je v zásadě počet adaptivních parametrů filtru, které je potřeba vyhodnocovat a samozřejmě rychlost vzorkování monitorovaného signálu.

Pro odhad úspěšnosti detekce novosti pomocí algoritmu ESE byla také vyhodnocena ROC křivka v případě detekce změny trendu signálu s různými poměry SNR a byly určeny příslušné plochy pod těmito ROC křivkami [13]. Dosažené výsledky byly opět porovnány s algoritmy

LE a ELBND a bylo ověřeno, že pro hodnoty  $SNR \leq 30 \text{ dB}$  dosahuje algoritmus ESE lepších výsledků. Pro vyšší hodnoty  $SNR$  pak byly výsledky ESE srovnatelné s výsledky LE. Cílem této studie bylo zjistit jak dobře dokáže algoritmus ESE separovat nová data v závislosti na volbě prahu, který rozhoduje o tom zda data obsahují novost či nikoliv. Pro představu ještě uveďme, že např. pro hodnotu  $SNR = 16.2 \text{ dB}$  bylo dosaženo úspěšnosti detekce 90.42%.

V budoucnu se nabízí rozvíjet téma využití adaptivních systémů ve zpracování dat několika směry. Potenciální využití vyhodnocení změn vah adaptivních systémů lze využít v optimalizaci velikosti datasetů v oblasti hlubokého učení, což by mohlo výrazně snížit časovou náročnost učení hlubokých sítí. Za účelem snížení výpočetního času algoritmu ESE je potřeba vyzkoušet další metody odhadu parametrů zobecněného Paretova rozdělení a vyzkoušet adaptivní metody volby velikosti prahu pro metodu Peak-over-threshold. Zajímavým tématem je také vliv šumu a jeho typu na velikost přírůstků adaptivních vah filtrů a jejich pravděpodobnostní rozdělení. V neposlední řadě se nabízí otázka, jak ovlivní typ kriteriální funkce pro optimalizaci adaptivního filtru výsledky algoritmu ESE a je-li možné různé kriteriální funkce využívat k detekci novosti, případně pomocí nich typ novosti klasifikovat.

# Publikace autora

- [1] VRBA, Jan; MAREŠ, Jan. Introduction to Extreme Seeking Entropy. *Entropy*, 2020, 22.1: 93.
- [2] BUKOVSKÝ, Ivo, CEJNEK, Matouš, VRBA, Jan, HOMMA, Noryasu. Study of Learning Entropy for Onset Detection of Epileptic Seizures in EEG Time Series. *The 2016 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN 2016)*. IEEE WCCI 2016, Vancouver, 2016. ISBN 978-1-5090-0620-5
- [3] VRBA, Jan. Adaptive Novelty Detection with Generalized Extreme Value Distribution. In: 2018 International Conference on Applied Electronics (AE). IEEE, 2018. p. 1-4.
- [4] OSWALD, Cyril, CEJNEK, Matouš, VRBA, Jan, BUKOVSKÝ, Ivo. Novelty Detection in System Monitoring and Control with HONU. In: ZHANG, Ming. *Applied artificial higher order neural networks for control and recognition*. Hershey, PA: Information Science Reference, an imprint of IGI Global, 2016. ISBN 9781522500643.
- [5] VRBA, Jan, et al. An Automated Platform for Microrobot Manipulation. In: International Workshop on Soft Computing Models in Industrial and Environmental Applications. Springer, Cham, 2020. p. 255-265.
- [6] BÍLA, Jiří; VRBA, Jan. The Detection and Interpretation of Emergent Situations in ECG Signals. In: International Conference on Soft Computing-MENDEL. Springer, Cham, 2016. p. 264-275.
- [7] MOJZES, Matej, et al. Feature selection via competitive levy flights. In: 2016 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). IEEE, 2016. p. 3731-3736.
- [8] BILA, Jiri; NOVAK, Martin; VRBA, Jan. Detection of emergent situations in complex systems represented by algebras of transformations. In: MATEC Web of Conferences. EDP Sciences, 2016. p. 02035.
- [9] VRBA, Jan. Využití fuzzy systémů a algoritmu learning entropy pro detekci změn stavů bioprocesu. In: *Automatizacia a riadenie v teorii a praxi ARTEP 2017*. 11. ročník konfe-

- rencie odborníků z univerzit, vysokých škol a praxe. Technická univerzita Košice, 2017. ISBN 978-80-553-3075-4.
- [10] VRBA, Jan, ŠKOLÁKOVÁ, Andrea. Adaptivní metoda detekce novosti, XLIII. In: *Seminář ASŘ 2018*. VŠB TU Ostrava, 2018.
- [11] BUKOVSKÝ, Ivo, OSWALD, Cyril, VRBA, Jan. Případová studie použití entropie učení pro adaptivní detekci při řízení spalování tuhých paliv. In: *Automatizácia a riadenie v teórii a praxi 2015*. Technická univerzita Košice, 2015. ISBN 978-80-553-1968-1.
- [12] VRBA, Jan; MAREŠ, Jan. Computational Performance of the Parameters Estimation in Extreme Seeking Entropy Algorithm. In: 2020 International Conference on Applied Electronics (AE). IEEE, 2020. p. 1-4.
- [13] VRBA, Jan; MAREŠ, Jan. ROC Analysis of Extreme Seeking Entropy for Trend Change Detection. In: 2020 International Conference on Applied Electronics (AE). IEEE, 2020. p. 1-4.

# Literatura

- [1] MAREŠ, Jan, et al. Process state classification of fed-batch fermentation based on process variables analysis. *Biochemical Engineering Journal*, 2016, 112: 178-185.
- [2] ROWELL, D. 2.161 Signal Processing: Continuous and Discrete, Fall 2008. 2008.
- [3] MANDIC, Danilo P.; KANNA, Sithan; CONSTANTINIDES, Anthony G. On the intrinsic relationship between the least mean square and Kalman filters [Lecture Notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2015, 32.6: 117-122.
- [4] PROAKIS, John G. a Dimitris G. MANOLAKIS. Digital signal processing: principles, algorithms, and applications. 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1996. ISBN 0133737624.
- [5] OOSTENVELD, Robert; PRAAMSTRA, Peter. The five percent electrode system for high-resolution EEG and ERP measurements. *Clinical neurophysiology*, 2001, 112.4: 713-719.
- [6] HAYKIN, Simon S. Adaptive filter theory. Fifth edition. vyd. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson, 2014. ISBN 978-0-13-267145-3.
- [7] STRICHARTZ, Robert S. A guide to distribution theory and Fourier transforms. World Scientific Publishing Company, 2003.
- [8] GERSHO, Allen; GRAY, Robert M. Vector quantization and signal compression. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] BUKOVSKY, Ivo; KINSNER, Witold; HOMMA, Noriyasu. Learning Entropy as a Learning-Based Information Concept. *Entropy*, 2019, 21.2: 166.
- [10] BUKOVSKY, Ivo. Learning entropy: Multiscale measure for incremental learning. *Entropy*, 2013, 15.10: 4159-4187.
- [11] CEJNEK, Matous; BUKOVSKY, Ivo. Concept drift robust adaptive novelty detection for data streams. *Neurocomputing*, 2018, 309: 46-53.

- [12] CEJNEK, Matous; BUKOVSKY, Ivo. Influence of type and level of noise on the performance of an adaptive novelty detector. In: 2017 IEEE 16th International Conference on Cognitive Informatics & Cognitive Computing (ICCI\* CC). IEEE, 2017. p. 373-377.
- [13] CEJNEK, Matous; BUKOVSKY, Ivo; VYSATA, Oldrich. Adaptive classification of EEG for dementia diagnosis. In: 2015 International Workshop on Computational Intelligence for Multimedia Understanding (IWCIM). IEEE, 2015. p. 1-5.
- [14] GERTLER, Janos. Fault detection and diagnosis in engineering systems. CRC press, 1998.
- [15] YU, Kangqing, et al. Real-time Outlier Detection over Streaming Data. In: 2019 IEEE SmartWorld, Ubiquitous Intelligence & Computing, Advanced & Trusted Computing, Scalable Computing & Communications, Cloud & Big Data Computing, Internet of People and Smart City Innovation (SmartWorld/SCALCOM/UIC/ATC/CBDCom/IOP/SCI). IEEE, 2019. p. 125-132.
- [16] RAMEZANI, Ramin; ANGELOV, Plamen; ZHOU, Xiaowei. A fast approach to novelty detection in video streams using recursive density estimation. In: 2008 4th International IEEE Conference Intelligent Systems. IEEE, 2008. p. 14-2-14-7.
- [17] MARSLAND, Stephen; NEHMZOW, Ulrich; SHAPIRO, Jonathan. On-line novelty detection for autonomous mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems*, 2005, 51.2-3: 191-206.
- [18] NEHMZOW, Ulrich, et al. Novelty detection as an intrinsic motivation for cumulative learning robots. In: *Intrinsically Motivated Learning in Natural and Artificial Systems*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. p. 185-207.
- [19] SCARROTT, Carl; MACDONALD, Anna. A review of extreme value threshold estimation and uncertainty quantification. *REVSTAT–Statistical Journal*, 2012, 10.1: 33-60.
- [20] MACKEY, Michael C.; GLASS, Leon. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 1977, 197.4300: 287-289.
- [21] SPANGENBERG, Mariana, et al. Detection of variance changes and mean value jumps in measurement noise for multipath mitigation in urban navigation. *Navigation*, 2010, 57.1: 35-52.
- [22] MAURYA, Mano Ram; RENGASWAMY, Raghunathan; VENKATASUBRAMANIAN, Venkat. Fault diagnosis using dynamic trend analysis: A review and recent developments. *Engineering Applications of artificial intelligence*, 2007, 20.2: 133-146.

- [23] L'ECUYER, Pierre. History of uniform random number generation. In: 2017 Winter Simulation Conference (WSC). IEEE, 2017. p. 202-230.
- [24] EGAN, J.P. Signal Detection Theory and ROC-analysis. Academic Press, 1975. Academic Press series in cognition and perception. ISBN 978-0-12-232850-3.
- [25] FAWCETT, Tom. An introduction to ROC analysis. Pattern recognition letters, 2006, 27.8: 861-874.
- [26] HOSKING, Jonathan RM; WALLIS, James R. Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. Technometrics, 1987, 29.3: 339-349.
- [27] DUMOUCHEL, William H. Estimating the stable index  $\alpha$  in order to measure tail thickness: a critique. the Annals of Statistics, 1983, 1019-1031.
- [28] HALD, Anders. A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930. New York: Wiley, 1998.
- [29] MONTGOMERY, Douglas C.; RUNGER, George C. Applied Statistics and Probability for Engineers. 2007.
- [30] GRIMSHAW, Scott D. Computing maximum likelihood estimates for the generalized Pareto distribution. Technometrics, 1993, 35.2: 185-191.
- [31] SMITH, Richard L. Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. Biometrika, 1985, 72.1: 67-90.
- [32] LUCENO, Alberto. Fitting the generalized Pareto distribution to data using maximum goodness-of-fit estimators. Computational Statistics & Data Analysis [online]. 2006, 51(2), 904-917 [cit. 2020-09-25]. ISSN 01679473. Dostupné z: doi:10.1016/j.csda.2005.09.011
- [33] ZHANG, Jin. Likelihood moment estimation for the generalized Pareto distribution. Australian & New Zealand Journal of Statistics, 2007, 49.1: 69-77.
- [34] ZHAO, Xu, et al. A New Parameter Estimator for the Generalized Pareto Distribution under the Peaks over Threshold Framework. Mathematics, 2019, 7.5: 406.
- [35] PARK, Myung Hyun; KIM, Joseph HT. Estimating extreme tail risk measures with generalized Pareto distribution. Computational Statistics & Data Analysis, 2016, 98: 91-104.
- [36] DE ZEA BERMUDEZ, P.; KOTZ, Samuel. Parameter estimation of the generalized Pareto distribution—Part I. Journal of Statistical Planning and Inference, 2010, 140.6: 1353-1373.

- [37] MILJKOVIĆ, Dubravko. Review of novelty detection methods. In: The 33rd International Convention MIPRO. IEEE, 2010. p. 593-598.
- [38] ZIMEK, Arthur; FILZMOSER, Peter. There and back again: Outlier detection between statistical reasoning and data mining algorithms. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, 2018, 8.6: e1280.
- [39] MARKOU, Markos; SINGH, Sameer. Novelty detection: a review—part 1: statistical approaches. *Signal processing*, 2003, 83.12: 2481-2497.
- [40] MARKOU, Markos; SINGH, Sameer. Novelty detection: a review—part 2:: neural network based approaches. *Signal processing*, 2003, 83.12: 2499-2521.
- [41] PIMENTEL, Marco AF, et al. A review of novelty detection. *Signal Processing*, 2014, 99: 215-249.
- [42] GOLLAMUDI, Sridhar, et al. Set-membership filtering and a set-membership normalized LMS algorithm with an adaptive step size. *IEEE Signal Processing Letters*, 1998, 5.5: 111-114.
- [43] DINIZ, Paulo SR; YAZDANPANA, Hamed. Data censoring with set-membership algorithms. In: 2017 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP). IEEE, 2017. p. 121-125.
- [44] ZHOU, Bo, et al. Multi-sensor fusion robust localization for indoor mobile robots based on a set-membership estimator. In: 2015 IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER). IEEE, 2015. p. 157-162.
- [45] JAULIN, Luc. Robust set-membership state estimation; application to underwater robotics. *Automatica*, 2009, 45.1: 202-206.
- [46] HUANG, Jian; WANG, Yuan; FUKUDA, Toshio. Set-membership-based fault detection and isolation for robotic assembly of electrical connectors. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2016, 15.1: 160-171.
- [47] DINIZ, Paulo Sergio Ramirez. Adaptive filtering: algorithms and practical implementation. 3rd ed. New York: Springer, 2008. ISBN 978-0-387-31274-3.
- [48] NICOLAU, Miguel, et al. A hybrid autoencoder and density estimation model for anomaly detection. In: International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Springer, Cham, 2016. p. 717-726.
- [49] AN, Jinwon; CHO, Sungzoon. Variational autoencoder based anomaly detection using reconstruction probability. *Special Lecture on IE*, 2015, 2.1: 1-18.



- [50] MARCHI, Erik, Fabio VESPERINI, Florian EYBEN, Stefano SQUARTINI a Bjorn SCHULLER. A novel approach for automatic acoustic novelty detection using a denoising autoencoder with bidirectional LSTM neural networks. In: 2015 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) [online]. IEEE, 2015, 2015, s. 1996-2000 [cit. 2020-09-03]. ISBN 978-1-4673-6997-8. Dostupné z: doi:10.1109/ICASSP.2015.7178320
- [51] FENG, Qingsong, et al. Anomaly detection of spectrum in wireless communication via deep auto-encoders. *The Journal of Supercomputing*, 2017, 73.7: 3161-3178.
- [52] DOMINGUES, Rémi, et al. Deep Gaussian Process autoencoders for novelty detection. *Machine Learning*, 2018, 107.8-10: 1363-1383.
- [53] BHATTACHARJEE, Supritam; MANDAL, Devraj; BISWAS, Soma. Autoencoder based novelty detection for generalized zero shot learning. In: 2019 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). IEEE, 2019. p. 3646-3650.
- [54] KIEU, Tung, et al. Outlier Detection for Time Series with Recurrent Autoencoder Ensembles. In: *IJCAI*. 2019. p. 2725-2732.
- [55] MARCHI, Erik, et al. Deep recurrent neural network-based autoencoders for acoustic novelty detection. *Computational intelligence and neuroscience*, 2017, 2017.
- [56] KAWACHI, Yuta; KOIZUMI, Yuma; HARADA, Noboru. Complementary set variational autoencoder for supervised anomaly detection. In: 2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2018. p. 2366-2370.
- [57] WANG, Xuhong, et al. adVAE: A self-adversarial variational autoencoder with Gaussian anomaly prior knowledge for anomaly detection. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 190: 105187.
- [58] REYNOLDS, Douglas A. Gaussian Mixture Models. *Encyclopedia of biometrics*, 2009, 741.
- [59] HEYNS, Theo; HEYNS, Philippus Stephanus; DE VILLIERS, Johan Pieter. Combining synchronous averaging with a Gaussian mixture model novelty detection scheme for vibration-based condition monitoring of a gearbox. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, 32: 200-215.
- [60] BISHOP, Christopher M. *Pattern recognition and machine learning*. Springer, 2006.
- [61] DUDA, Richard O.; HART, Peter E.; STORK, David G. *Pattern classification*. John Wiley Sons, 2012.

- [62] DOAN, AnHai; HALEVY, Alon; IVES, Zachary. Principles of data integration. Elsevier, 2012.
- [63] ZHANG, Yu, et al. Detection of emerging faults on industrial gas turbines using extended Gaussian mixture models. *International Journal of Rotating Machinery*, 2017, 2017.
- [64] NASIOS, Nikolaos; BORS, Adrian G. Variational learning for Gaussian mixture models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2006, 36.4: 849-862.
- [65] MIYAZAKI, Bungo, Kiyoshi IZUMI, Fujio TORIUMI a Ryo TAKAHASHI. CHANGE DETECTION OF ORDERS IN STOCK MARKETS USING A GAUSSIAN MIXTURE MODEL. *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management* [online]. 2014, 21(3), 169-191 [cit. 2020-09-04]. ISSN 1055615X. Dostupné z: doi:10.1002/isaf.1356
- [66] DEMPSTER, Arthur P.; LAIRD, Nan M.; RUBIN, Donald B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 1977, 39.1: 1-22.
- [67] WATANABE, Hidenori; MURAMATSU, Shogo; KIKUCHI, Hisakazu. Interval calculation of EM algorithm for GMM parameter estimation. In: *Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. IEEE, 2010. p. 2686-2689.
- [68] BOUGUILA, Nizar a Wentao FAN, ed. *Mixture Models and Applications* [online]. Cham: Springer International Publishing, 2020 [cit. 2020-09-04]. Unsupervised and Semi-Supervised Learning. ISBN 978-3-030-23875-9. Dostupné z: doi:10.1007/978-3-030-23876-6
- [69] FERREIRA, A.; DE HAAN, Laurens; PENG, Liang. On optimising the estimation of high quantiles of a probability distribution. *Statistics*, 2003, 37.5: 401-434.
- [70] LORETAN, Mico; PHILLIPS, Peter CB. Testing the covariance stationarity of heavy-tailed time series: An overview of the theory with applications to several financial datasets. *Journal of empirical finance*, 1994, 1.2: 211-248.
- [71] SCARROTT, Carl; MACDONALD, Anna. A review of extreme value threshold estimation and uncertainty quantification. *REVSTAT–Statistical Journal*, 2012, 10.1: 33-60.
- [72] FORBES, Catherine, et al. *Statistical distributions*. John Wiley Sons, 2011.
- [73] COLES, Stuart, et al. *An introduction to statistical modeling of extreme values*. London: Springer, 2001.
- [74] LEE, Hyoungh-joo; ROBERTS, Stephen J. On-line novelty detection using the kalman filter and extreme value theory. In: *2008 19th International Conference on Pattern Recognition*. IEEE, 2008. p. 1-4.

- [75] LIMPERT, Eckhard; STAHEL, Werner A. Problems with using the normal distribution—and ways to improve quality and efficiency of data analysis. PLoS One, 2011, 6.7: e21403.
- [76] GRUBBS, Frank E. Procedures for detecting outlying observations in samples. Technometrics, 1969, 11.1: 1-21.
- [77] PICKANDS III, James, et al. Statistical inference using extreme order statistics. the Annals of Statistics, 1975, 3.1: 119-131.
- [78] BALKEMA, August A.; DE HAAN, Laurens. Residual life time at great age. The Annals of probability, 1974, 792-804.



# Příloha