Universidad de San Andrés
Práctica 9: Sucesiones y Series

1. Escribir los primeros 7 términos de las siguientes sucesiones.

(a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

(b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

(d) $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

(e) $a_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n}$.

(f) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

2. Para cada una de las siguientes sucesiones, hallar el término general a_n y determinar cuales son convergentes, divergentes u oscilantes. En caso de ser posible, calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(a) $1, 2, 3, 4, \dots$

(b) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

(c) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$

(d) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$

(e) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$

(f) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$

(g) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \dots$

3. Analizar la existencia de los siguientes límites de sucesiones. Si existen, calcular su valor.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-6n^4}{5n^4+2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}+2}{5^n-7}$.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n-2}+3}{6^n+1}$.

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n}$.

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}$.

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sin(\frac{1}{n})$.

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4}$.

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+1}$.

4. Determinar si la siguientes series geométricas convergen o no. En caso de que converjan calcular la suma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-2}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2-n}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3^{n+1}-4^{n+2}}{6^n}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^{n+1}-8^n}{4^{2n}}$.

5. Hallar, cuando sea posible, todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que se cumple:

   (a) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{a^n}{9^n}$ es convergente.

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{9^n} = \frac{9}{4}$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot a^n}{9^n} = 1$.

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{9^n} = -1$.

6. Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{a^n} = \frac{35}{12}$.

7. A partir de la igualdad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$, deducir las siguientes fórmulas:

   (a) $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$, para $|x| < 1$.

   (b) $x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2}$, para $|x| < 1$.

   (c) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots + 2^n x^n + \cdots = \frac{1}{1-2x}$, para $|x| < \frac{1}{2}$.

8. Hallar todos los valores de x para los que cada una de las siguientes series convergen y calcular la suma correspondiente al x_0 dado.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{x}{7}\right)^n$. Dar la suma si $x_0 = 2$.

   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} (x-3)^n$. Dar la suma si $x_0 = \frac{5}{2}$.

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x-1)^n$. Dar la suma si $x_0 = \frac{1}{4}$.

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{8^n}$. Dar la suma si $x_0 = 5$.

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{x^n}$. Dar la suma si $x_0 = 6$.

9. Para cada una de las series del Ejercicio 8 hallar la fórmula de la suma en términos de x. Usar la fórmula hallada para calcular la suma correspondiente al x_0 dado. Comparar los resultados y el esfuerzo de hacerlo de una y otra manera.

10. Utilizar el criterio de la integral para analizar si las siguientes series son convergentes o no.

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

    (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^3}$.

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2n+1}}$.

    (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$.

    (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$.

11. Utilizar el criterio de la integral para determinar para cuales $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ la series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge.