Universidad de San Andrés

Práctica 7: Integrales definidas - Áreas y TFC

1. Calcular las siguientes integrales, aplicando la Regla de Barrow.

   (a) $\displaystyle\int_0^4 e^{-x}\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3x-2}\,dx.$

   (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx.$

   (d) $\displaystyle\int_0^2 |2x-1|\,dx.$

   (e) $\displaystyle\int_{-3}^2 (-2x+1)e^{-x}\,dx.$

   (f) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,dx.$

   (g) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(\tfrac{x}{6})^5\cos(\tfrac{x}{6})\,dx.$

   (h) $\displaystyle\int_{-1}^3 2x - \frac{6x}{\sqrt{2x+3}}\,dx.$

   (i) $\displaystyle\int_1^4 t\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt.$

2. (a) Si $\displaystyle\int_{-1}^6 [f(x)-4]\,dx = 5,$ calcular $\displaystyle\int_{-1}^6 f(x)\,dx.$

   (b) Si $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx = 4,$ calcular $\displaystyle\int_0^5 [f(x)+7]\,dx.$

   (c) Si $\displaystyle\int_1^2 2f(x)\,dx = 8$ y $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx = 3,$ calcular $\displaystyle\int_1^2 [f(x)+2g(x)]\,dx.$

3. Decidir, en cada caso, si la afirmación es verdarea o falsa.

   (a) El área limitada por el gráfico de $f(x) = x-2$, la recta $x=4$, el eje x y el eje y es la integral: $\displaystyle\int_0^4 (x-2)\,dx.$

   (b) El área limitada por el gráfico de $f(x) = x^2-1$ y el eje x para $-1 \le x \le 3$ es la suma de las integrales: $\displaystyle -\int_{-1}^1 (x^2-1)\,dx + \int_1^3 (x^2-1)\,dx.$

   (c) El área encerrada por las curvas $y=-x^2+4$ e $y=-x+2$ es la integral: $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2-x-2)\,dx.$

4. Una compañía determina que el ingreso marginal (en dólares por día) está dado por $MR(t) = 1 - \frac{1}{t+1}$ mientras que sus costos marginales (en dólares por día) están dados por $MC(t) = 80 - 0.2t$. Hallar la ganancia total de los primeros 8 días.

5. Una población sufre una epidemia de gripe, siendo $N(t)$ el número de personas enfermas en t días. Un estudio arroja que la gripe se expande a razón de $10t - \frac{108}{t^2}$ personas por día. Al iniciarse la epidemia, la problación enferma es $N(1) = 120$. Hallar cuántos enfermos habrá a los 12 días si no se controla la epidemia.

6. En 2010 se publica una estimación para la tasa mundial de consumo de petróleo en tiempo de t años, dada por $2.4te^{0.03t}$ miles de millones de barriles anuales. Hallar la cantidad de petróloeo consumido entre 2010 y 2020.

7. En cada uno de los siguientes casos, calcular el área de la región acotada encerrada por el gráfico de f y el eje x

   (a) $f(x) = x^2 - 6x$

   (b) $f(x) = 3(x^3 - x)$

8. Calcular, en cada caso, el área encerrada por la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo indicado.

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ en $[-1, 3]$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ en $[-2, 1]$.

   (c) $f(x) = \ln(x)$ en $[1, e]$.

   (d) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ en $[0, 4]$.

9. En cada caso, calcular el área de la región encerrada por las curvas (sugerencia: hacer un gráfico aproximado que ayude a identificar el área pedida).

   (a) $y = x^2;\ y = 2x - x^2$.

   (b) $y = x^{1/3};\ x = 0;\ y = 1$.

   (c) $y = x^3 - 12x;\ y = x^2$.

   (d) $y = x^{1/2};\ y = x - 2;\ y = 0$.

10. Calcular, en cada caso, el área encerrada entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, en el intervalo indicado.

    (a) $f(x) = e^x, \qquad g(x) = e^{-x}$ en $[-1, 1]$

    (b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}, \quad g(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ en $[0, 1]$.

    (c) $f(x) = \dfrac{3x-3}{x+3}, \quad g(x) = (x-1)(2x+1)$ en $[-1, 1]$.

11. En cada uno de los siguientes casos, calcular el área de la región acotada encerrada por los gráficos de f y g.

    (a) $f(x) = 8 - x^2, \quad g(x) = 2x$.

    (b) $f(x) = (x+2)^2,\ g(x) = \sqrt{8(x+2)}$.

    (c) $f(x) = \dfrac{4x}{1+4x^2},\ g(x) = 2x$.

    (d) $f(x) = xe^x, \qquad g(x) = xe^{x^2}$.

12. Sean $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ y $g(x) = -2x - 3$. Hallar el área de la región acotada por los gráficos de f y g y la recta $x = -3$.

13. Calcular el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2\, e^{3x+1}$ y $g(x) = 4\, e^{3x+1}$

14. Calcular el área de la región determinada por las restricciones $y \geq \frac{x^2}{2} - 2x + 1$; $y \leq \frac{x}{3} + 1$; $y \leq -x + 5$.

15. Considerar la región limitada por la curva $y = \sqrt{2x+2}$, el eje x entre las rectas $x = 1$ y $x = a$ (con $0 < a < 1$). Hallar el valor de a para que el área de la región sea $\frac{37}{24}$.

16. Si el área comprendida entre la parábola $y = 4x^2$ (con $x \geq 0$) y una recta que pasa por el origen es 18, ¿cuál es la pendiente de dicha recta?

17. Considerar la región limitada por la curva $y = \sqrt[n]{x-2}$ y la recta $y = x-2$ (con $2 \leq x \leq 3$). Hallar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los que el área de la región es menor que $\frac{5}{12}$.

Teorema fundamental del cálculo

18. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los dominios indicados:

(a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\, dt.$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \ln(t^2+1)\, dt.$

(c) $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin(x)} \frac{y}{2+y^3}\, dy.$

(d) $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{u-1}{1+u}\, du, \quad x \geq 0.$

(e) $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \tan^2(t)\cos(t)\, dt,\ x \in (0,1).$

(f) $F(x) = \displaystyle\int_{\ln(x)}^{x^3} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\, dt,\ x > 0.$

19. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin(\sqrt{t})dt}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\int_0^{2\ln(x)} \sqrt{t^2+1}dt}{3\ln(x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\int_2^{\sqrt{x}} 4e^{-t^2+4}dt - x}{(x-4)^2}.$

20. Sea $f\colon (0,\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sin(x)} \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}}\, dt$. Probar que f es creciente en $(0,\frac{\pi}{2})$.

21. Hallar el dominio, intervalos de crecimiento y extremos de las siguientes funciones

(a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} t^2 (t-1)(t-4)\, dt.$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^{x-3}} \ln^2(t) - 2\ln(t)\, dt.$

(c) $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} e^{7-t^2} - e^{t^2+1}\, dt.$

22. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x \frac{1+\sin(t)}{2+t^2}\, dt$. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x = 0$.

23. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 de F alrededor de $x_0 = 0$.

24. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que su recta tangente en $x = 4$ es $y = \frac{1}{4}x - 3$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 2$ de $f(x) = 3 + \displaystyle\int_4^{x^2} g(t)\, dt$.