Universidad de San Andrés

Práctica 5: Polinomio de Taylor

Con Respuestas.

Recordar: Sea f una función n veces derivable en $x = x_0$. El polinomio de Taylor de f de orden n desarrollado en $x = x_0$ está dado por la fórmula

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

1. Escribir los siguientes polinomios en potencias de $(x - x_0)$ para los x_0 indicados.

   (a) $$\begin{aligned} p(x) &= -1 - 9(x-1) - 17(x-1)^2 - 12(x-1)^3 - 3(x-1)^4 \\ &= -46 + 93(x+2) - 71(x+2)^2 + 24(x+2)^3 - 3(x+2)^4 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} p(x) &= 12 - 7(x+1) + (x+1)^2 \\ &= 6 - 5x + x^2 \end{aligned}$$

2. (a) Reconstruir el polinomio $p(x)$ de grado 3 del que se sabe que ...
   $p(x) = 2 + 3x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3$

   (b) Sea $q(x)$ un polinomio de grado 2 tal que $q(2) = -1$, $q'(2) = 3$ y $q''(2) = 4$ ...
   $q(x) = -1 + 3(x - 2) + 2(x - 2)^2$.

   (c) Expresar el polinomio $q(x)$ del ítem anterior en la forma habitual...
   $q(x) = 1 - 5x + 2x^2$.

3. Sea $q(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

   (a) $p_1(x) = 3x - 5,\ p_2(x) = -2x^2 + 3x - 5,\ p_3(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = p_4(x) = p_5(x)$.

   (b) $p_1(x) = 3,\ p_2(x) = x^2 + 3,\ p_3(x) = x^3 + x^2 + 3 = p_4(x) = p_5(x)$.

4. Hallar el polinomio de Taylor de las siguientes funciones hasta el orden indicado en el punto dado.

   (a) $p_4(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$.

   (b) $p_5(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \frac{1}{5}(x - 1)^5$.

   (c) $p_5(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$.

   (d) $p_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$.

   (e) $p_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

   (f) $p_4(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3$; $p_5(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5$.

   (g) $p_4(x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4$

   (h) $p_3(x) = 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{16}(x - 2)^2 + \frac{1}{64}(x - 2)^3$.

   (i) $p_3(x) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{81}x^3$.

   (j) $p_3(x) = 1 + 3(x - 1) + \frac{9}{2}(x - 1)^2 + \frac{9}{2}(x - 1)^3$.

   (k) $p_2(x) = 5 - \frac{5}{3}(x - 5) + \frac{107}{54}(x - 5)^2$.

5. En cada caso, aproximar el valor pedido usando del ejercicio anterior el polinomio ...

   (a) $(1.02)^3 = f_{(\text{a})}(0.02) \approx p_4(0.02)$.
   (b) $\ln(1.1) = f_{(\text{b})}(1.1) = f_{(c)}(0.1)$.
   (c) $\sin(0.5) = f_{(\text{f})}(0.25) \approx p_{4,5}(0.25)$.
   (d) $\sqrt{4.2} = f_{(\text{h})}(2.1) \approx p_3(2.1)$.
   (e) $\sqrt[3]{0.5} = f_{(\text{i})}(0.5) \approx p_3(0.5)$.
   (f) $e^{-1} = f_{(\text{j})}(\frac{2}{3}) \approx p_3(\frac{2}{3})$

6. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor ...

   (a) $f(2) = 5,\ f'(2) = -3,\ f''(2) = -6,\ f'''(2) = -3$.
   (b) $h(-1) = 5,\ h'(-1) = 2,\ h''(-1) = -170$.
   (c) $p_2(x) = 5 + 2(x+1) - 85(x+1)^2$.

7. Sea f una función tres veces derivable tal que su polinomio de Taylor de orden 3 ...
   $p_3(x) = -2 - (x-1) - 2(x-1)^2 - 6(x-1)^3$.

8. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor ...

   (a) $f(0) = 7,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -10,\ f'''(0) = 6$.
   (b) $f^{(iv)}(0) = 0$.
   (c) $p_4(x) = 7 - 5(x-2)^2 - 9(x-2)^3 - 2(x-2)^4$.

9. Sea $p(x) = x^3 - 3x^2 + x$, el polinomio de Taylor de orden 3 de una función f ...
   $p_3(x) = 1 + (x-2) + \frac{7}{2}(x-2)^2 + \frac{25}{6}(x-2)^3$

10. Sean p y q los polinomios de Taylor de orden 2 de f y g respectivamente ...

   (a) $p_2(x) = 1 - 2(x+1) + 9(x+1)^2$,
   (b) $p_2(x) = -4 + 2(x+1) + 5(x+1)^2$,
   (c) $p_2(x) = -4 + 2(x+1) - 11(x+1)^2$,
   (d) $p_2(x) = 5 - 4(x+1) - 20(x+1)^2$.

11. Sean f y g dos funciones 3 veces derivables tales que el polinomio de Taylor de orden 2 ...
   $p_2(x) = \frac{1}{2} + 4(x-2) - (x-2)^2$.

12. Sea $p(x) = x^2 - 3x + 3$, el polinomio de Taylor de orden 2 de una función f ...
   $p_2(x) = -4 - 4(x-1) + 3(x-1)^2$

13. Hallar todos los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = (1+bx)e^{ax}$ ...
   $a = 3,\ b = 0$.

14. Determine los valores de a y b para que el polinomio de Taylor de ...
   $a = \frac{1}{2},\ b = -1$. Empieza con potencia 3.

15. Determinar $a, b > 0$ para que $p(x) = 4x^2 - \frac{1}{6}x^4$ sea el polinomio de Taylor de orden 4 ...
   $a = 32,\ b = \frac{\sqrt{2}}{4}$

16. Determinar todos los valores de $a \neq 0$ para que el polinomio de Taylor centrado en ...
    $a = -1$, empieza con potencia 4.

17. Hallar a y b para que los polinomios de Taylor de orden 2 centrados en $x = 0$ ...
    $a = -\frac{1}{4},\ b = -2$ y $a = \frac{1}{4},\ b = 2$.