**Universidad de San Andrés**
**Práctica 4: Ejercicios de optimización / Respuestas.**

1.
   - Dos números: $x$ e $y$.
   - Mayor producto: indica que función=producto. O sea $P = xy$, y que hay que buscar un máximo.
   - Restricción: $x + y = 24$ de donde $y = 24 - x$.
   - Luego $P(x) = x(24 - x)$, $P'(x) = 24 - 2x = 0$ si $x = 12$ único PC.
   - $P''(x) = -2$, luego $P''(12) = -2 < 0$ y $x = 12$ es máximo.
   - Rta. $x = 12$, $y = 42 - 12 = 12$.

2.
   - Dos números no negativos que sumen 1: $x + y = 1$ con $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Esto dice, además que $x \leq 1$ e $y \leq 1$.
   - Suma de sus cuadrados $f = x^2 + y^2$ (a) mayor posible (bucar máximo) / (b) menor posible (bucar mínimo).
   - De la restricción queda $y = 1 - x$ y $f(x) = x^2 + (1 - x)^2$ con $x \in [0, 1]$.
   - $f'(x) = 4x - 2$. PC: $4x - 2 = 0$, o sea $x = \frac{1}{2}$ es único PC. Luego, al trabajar en un intervalo cerrado, todos los PC son $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.
   - $f(0) = f(1) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
   - En $x = 0$ hay máximo con $y = 1$. En $x = 1$ hay máximo con $y = 0$. En $x = \frac{1}{2}$ hay mínimo con $y = \frac{1}{2}$.

3. Caja rectangular de base cuadrada. Llamamos $b$ al lado de la base. Los lados comparten uno con la base y tienen (en principio) otra altura, digamos $h$.
   - Restricción: suma de las áreas de los lados: $4bh$, área de la base $b^2$.
     Luego $48 = 4bh + b^2$, de dónde $h = \frac{12}{b} - \frac{b}{4}$.
   - Caja con máximo volumen: volumen=función, se busca máximo.
   - $Vol$ =superficie de la base $\times$ altura $= b^2.h$ O sea,
     $V(b) = b^2(\frac{12}{b} - \frac{b}{4}) = 12b - \frac{b^3}{4}$.
   - PC: $V'(b) = 12 - \frac{3b^2}{4} = 0$ si $b = \pm 4$. Como $b$ es una base, $b = -4$ se descarta.
     Único PC $b = 4$.
   - $V''(b) = -\frac{3b}{2}$, $V''(4) = -6 < 0$ entonce $b = 4$ es máximo y $h = 2$.

4. Terreno rectangular base= $b$, altura= $h$. Por la subdivisión hay que usar alambre para $4h$ y $2b$.
   - Restricción: $4h + 2b = 100$ (la cantidad de almabre disponible), de dónde $b = 50 - 2h$.
   - Área máxima: función=área, se busca máximo.
   - $A = bh$. O sea, $A(h) = (50 - 2h)h = 50h - 2h^2$.
   - PC: $A'(h) = 50 - 4h = 0$ si $h = 12.5$ único PC.
   - $A''(h) = -4$, $A''(12.5) = -4 < 0$, luego $h = 12.5$ es máximo y $b = 25$.
   - El área vale $A = 312.5m^2$.

5. Rectángulo base= $b$, altura= $h$.

   - Restricción: $A = bh = 100$, de dónde $b = \frac{100}{h}$.
   - (a) Perímetro mínimo: función=perímetro, se busca mínimo.
     $P = 2b + 2h$. O sea $P(h) = \frac{200}{h} + 2h$.
     PC: $P'(h) = -\frac{200}{h^2} + 2 = 0$ si $h^2 = 100$, o sea $h = \pm 10$ como es una longitud $h = -10$ se descarta y queda único PC $h = 10$.
     $P''(h) = \frac{400}{h^3}$, $P''(10) = \frac{4}{10} > 0$, luego $h = 10$ hace mínimo el perímetro con $b = 10$ y el perímetro $P = 40m$.
   - (b) Diagonal más corta: función=diagonal, se busca mínimo.
     Por Pitágoras $D^2 = b^2 + h^2$. O sea $D(h) = \sqrt{\frac{10^4}{h^2} + h^2}$.
     Como la raíz es una función creciente, el mínimo de $D$ y de $D^2$ se alcanza en el mismo $h$.
     Trabajamos entonces con $d(h) = \frac{10^4}{h^2} + h^2$.
     PC: $d'(h) = -2\frac{10^4}{h^3} + 2h = 0$ si $h^4 = 10^4$, o sea $h = \pm 10$, siendo una longitud $h = -10$ se descarta y queda $h = 10$ único PC.
     $d''(h) = 6\frac{10^4}{h^4} + 2$, $d''(10) = 6 + 2 = 8 > 0$, luego $h = 10$ hace mínima la diagonal, con $b = 10$ y la diagonal $D = \sqrt{200}$.

6. Ventana rectangular base= $b$, altura= $h$.

   - Restricción $A = bh = 25$, de dónde $b = \frac{25}{h}$.
   - Costo $C = b^2 + 16h^2$, o sea $C(h) = \frac{25^2}{h^2} + 16h^2$.
   - PC: $C'(h) = -2\frac{25^2}{h^3} + 32h = 0$ si $h^4 = \frac{25^2}{16}$, o sea $h = \pm\frac{5}{2}$. Siendo una longitud, $h = -\frac{5}{2}$ se descarta y queda $h = \frac{5}{2}$ único PC.
   - $C''(h) = 6\frac{25^2}{h^4} + 32$, $C''(\frac{5}{2}) = 6 \cdot 16 + 32 > 0$. Luego $h = \frac{5}{2}$ minimiza el costo. Con $b = 10$ y $C = 200$.

7. 
   - Suma de la áreas del círculo y el cuadrado = función. Mínima y máxima es lo que se busca optimizar.
   - Con el alambre se bordea las figuras. La restricción tiene que ver con el perímetro de ambas. Si $x$ es el perímetro de la circunferencia e $y$ es perímetros del cuadrado, se tiene que $x + y = 1$.
   - La superficie del círculo es $\pi r^2$ y la del cuadrado es $l^2$. La función a optimizar es $S = \pi r^2 + l^2$.
   - El perímetro de la ciercunferencias es $2\pi r = x$, el del cuadrado es $4l = y$.
   - De la restricción $y = 1 - x$, con $x = 2\pi r$, queda $y = 1 - 2\pi r$ y $l = y/4 = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{2}r$.
   - Finalmente se tiene $S = \pi r^2 + (\frac{1}{4} - \frac{\pi}{2}r)^2$, para $0 \leq r \leq \frac{1}{2\pi}$. (Notar que $x$ es a los sumo 1.)
   - PC: $S'(r) = 2\pi r + 2(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{2}r)(-\frac{\pi}{2}) = 2\pi r - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{2}r = 0$ si $(8 + 2\pi)r = 1$, o sea $r = \frac{1}{8+2\pi}$.
   - $S$ es continua en un intervalo cerrado: $r \in [0, \frac{1}{2\pi}]$. Los PC son $\{0, \frac{1}{8+2\pi}, \frac{1}{2\pi}\}$.
   - $S(0) = \frac{1}{16} = 0.06$, $S(\frac{1}{8+2\pi}) = 0.035$, $S(\frac{1}{2\pi}) = 0.08$.
   - Luego, el máximo se da en $r = \frac{1}{2\pi}$ o sea $x = 1$ e $y = 0$. Esto es, se usa todo el alambre para hacer el círculo. El mínimo se da en $r = \frac{1}{8+2\pi}$, o sea $x = 0.44$ e $y = 0.56$.

8. La distancia entre dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, por el teorema de Pitágoras es $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
   - Puntos a considerar $P = (0, 0)$ y $Q = (x, y)$ con $Q$ sobre la recta. O sea, $y = 2x + 1$. Esto es $Q = (x, 2x + 1)$.
   - Menor distancia es buscar el mínimo de la función distancia. $D(x) = \sqrt{x^2 + (2x + 1)^2}$. Como la raíz es creciente, el mínimo de $D$ se alcanza en el mismo valor que el de $d = D^2$.
   - Consideramos $d(x) = x^2 + (2x + 1)^2 = 5x^2 + 4x + 1$.
   - PC: $d'(x) = 10x + 4 = 0$ si $x = -\frac{2}{5}$, único PC.
   - $d''(x) = 10$ que en $x = -\frac{2}{5}$ vale lo mismo, o sea es positiva. Así, $x = -\frac{2}{5}$ es mínimo global.
   - Rta. El punto más cercano es $Q = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$.

9. Mismo tipo de ejercicio que el anterior. La distancia de un punto $(x, f(x))$ al $(0, 0)$ es $D(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$.
   - Como la raíz es creciente, el mínimo/máximo de $D$ se alcanza en los mismos puntos que los de $d = D^2$.
   - $d = x^2 + (16 - 3x)$. Con $d'(x) = 2x - 3 = 0$ para $x = \frac{3}{2} \in [0, \frac{16}{3}]$.
   - $d$ es continua en $[0, \frac{16}{3}]$, luego los PC con $\{0, \frac{3}{2}, \frac{16}{3}\}$.
   - $d(0) = 16$, $d(\frac{3}{2}) = 13.75$ y $d(\frac{16}{3}) = 28.44$.
   - Luego, en $x = \frac{3}{2}$ se da el mínimo y $P = (1.5, 3.39)$. El máximo se da en $x = \frac{16}{3}$ con $P = (5.33, 0)$.

10. Abertura rectangular base$= 2b$ (partiendo del punto medio que es el origen, ponemos una longitud $b$ a la derecha y otra a la izquierda); altura$= h$ que se da sobre el punto $b$.
    - Mayor cantidad de luz posible: es área máxima. $A = 2bh$ a la que se le busca el máximo. Con la base $b$ entre 0 y el radio 10. O sea $b \in [0, 10]$.
    - La altura está sobre el semicírculo que tiene ecuación $x^2 + y^2 = 10^2$. O sea, $b^2 + h^2 = 100$. Con $h > 0$ por ser una altura, queda $h = \sqrt{100 - b^2}$.
    - $A(b) = 2b\sqrt{100 - b^2}$ y $A'(b) = 2\sqrt{100 - b^2} - \frac{2b^2}{\sqrt{100-b^2}}$.
    - PC: $A'(b) = 0$, si $100 - b^2 = b^2$, como $b > 0$ por ser una base, $b = \sqrt{50} \in (0, 10)$.
    - Como $A$ es continua en $[0, 10]$, los PC son $\{0, \sqrt{50}, 10\}$.
    - $A(0) = 0$, $A(\sqrt{50}) = 2\sqrt{50}\sqrt{50} = 100$ y $A(10) = 0$. Luego el máximo se da en $b = \sqrt{50} = 7.07$. Luego la base de la apertura es $2b = 14.14$ y $h = \sqrt{50} = 7.07$.

11. La función ganacia está armada y es suma y producto de funciones derivables. Se busca máximo en $[0, 15]$.
    - PC: $G'(x) = D(x) = xD'(x) - C'(x) = 20 - 3x - \frac{1}{5}x^2 = 0$, sólo si $x = -20$ o $x = 5$.
    - Como $G$ es continua en $[0, 15]$, los PC son $\{0, 5, 15\}$.
    - $G(0) = -5$, $G(5) = 49.17$ y $G(15) = -267.4$.
    - Luego, para $x = 5$ la ganancia es máxima.

12. El laboratorio vende un mínimo de 40 gr a \$15 por gr. O sea, parte de una venta de \$600.
Por $x$ grs adicionales a los 40 cobra \$ $15 - 0.1x$.
    - Hay que tener en cuenta que sobre los primeros 40 gr, no hay descuento. Luego, hay un pago mínimo de \$ 600.
    - El excedente de la compra será $x$ para $x \geq 0$, la función ingreso es $I(x) = 600 + x(15 - 0.1x)$.
    - $I'(x) = (15 - 0.1x) + x(-0.1) = 15 - 0.2x = 0$ sólo si $x = 0$ o sea $x = 75$.
    - Como $I''(x) = -0.2 < 0$ y en $x = 75$ vale los mismo, $x = 75$ es máximo.
    - Rta. Debe vender $40 + 75 = 115$ grs.

13. (a) La tasa de crecimiento instantánea es $P'(t) = \dfrac{24e^{-\frac{t-1950}{10}}}{\left(1 + 3e^{-\frac{t-1950}{10}}\right)^2}$.

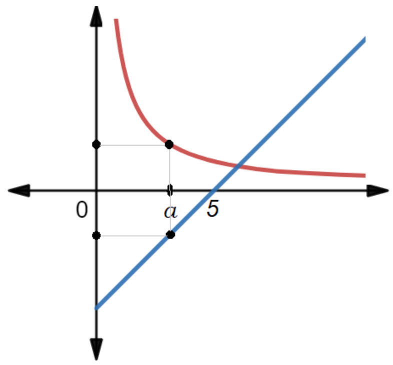
    (b) Para hallar tasa de crecimiento máxima, buscamos extremos de esa tasa. Lalmamos $T(t) = P'(t)$. Para derivar ponemos $L = L(t) = -\frac{t-1950}{10}$ cuya derivada es $-\frac{1}{10}$.
    - Para que sea fácil derivar: $T(t) = 24e^L(1 + 3e^L)^{-2}$.
    - $$\begin{aligned} T'(t) &= 24e^L(L')(1 + 3e^L)^{-2} + 24e^L(-2)(1 + 3e^L)^{-3}(1 + 3e^L)' \\ &= 24e^L((-\tfrac{1}{10})(1 + 3e^L)^{-2} - 48e^L(1 + 3e^L)^{-3}(3e^L)(-\tfrac{1}{10}) \\ &= 2.4e^L\Big(-(1 + 3e^L)^{-2} + 6e^L(1 + 3e^L)^{-3}\Big) \\ &= 2.4e^L(1 + 3e^L)^{-3}\Big(-(1 + 3e^L) + 6e^L\Big) \\ &= 2.4e^L(1 + 3e^L)^{-3}\Big(3e^L - 1\Big) \end{aligned}$$
    - $T'(t) = 0$ sólo si $3e^L - 1 = 0$. Osea $e^L = \frac{1}{3}$, o $L = \ln(\frac{1}{3}) = -\ln(3)$.
    Así, $t - 1950 = 10\ln(3)$ y queda $t = 1950 + 10.98 \sim 1961$.
    - El signo de $T'(t)$ es el signo de $3e^L - 1$.
    Para $t = 1960$, queda $3e^{-1} - 1 = 0.10 > 0$. Para $t = 1970$ queda $3e^{-2} - 1 = -0.6 < 0$.
    - Luego, la tasa $T = P'$ crece a derecha de 1961 y decrece a izquierda, dando en $t = 1961$ un máximo.

14. La producción será $P(x) = (40 + x)(720 - 10x)$ por parcela.
Se busca produción máxima, con $P$ derivable.
$P'(x) = 720 - 10x + (40 + x)(-10) = 320 - 20x = 0$ sólo si $x = 16$.
Se pueden plantar 16 manzanos más.

15. El nuevo precio será $(40 + 5x)$ con el que alquila $(120 - 10x)$ autos.
El costo por auto será de $4(120 - 10x) = 480 - 40x$.
La ganacia es $G(x) = (40 + 5x)(120 - 10x) - (480 - 40x) = 4320 + 240x - 50x^2$.
Se busca ganancia máxima para $G$ derivable con $G'(x) = 240 - 100x = 0$ sólo si $x = 2.4$.
Como $G''(x) = -100 < 0$ y en $x = 2.4$ conserva signo y valor, la ganancia será máxima.
Deberá alquilar cada auto a u\$d 52.

16. Costo $= x + y$.
    - De la restricción $y = \frac{1}{48x^3}$. Notar que ni $x$ ni $y$ pueden vales 0, porque no verificarían la restricción.
    - Queda $C(x) = x + \frac{1}{48x^3}$ que se quiere que sea mínimo.
    - $C'(x) = 1 + \frac{1}{48}\frac{(-3)}{x^4} = 0$ sólo si $16x^4 = 1$, o sea, $x = \pm\frac{1}{2}$. Como $x$ es el índice de costo por insumos queda $x = \frac{1}{2}$ y $6y = 1$, con lo que $y = \frac{1}{6}$.

17. Hacemos un gráfico a pulso: $f(x) = \frac{6}{x}$ y $g(x) = x - 5$.




Los puntos marcados son para $x = a$ las alturas $f(a)$ y $g(a)$, para $x = 0$ las alturas $f(a)$ y $g(a)$.

- El rectángulo queda de base $b = a$ y altura $h = f(a) - g(a)$.
- Área del ractángulo, $A(a) = a(\frac{6}{a} - (a-5)) = 6 + 5a - a^2$, derivable. Se busca área máxima en $(0, 6]$.
- $A'(a) = 5 - 2a = 0$ sólo si $a = 5/2$ que pertenece al dominio.
- Como $A''(a) = -2 < 0$ y lo mismo vale en $a = 5/2$, resulta ser el valor donde el área en máxima.

18. El área del semicírculo es $S = \frac{\pi}{2}r^2$, donde $r$ es el radio del círculo. Modelizamos el problema en térmninos de $b$.

- Si $a$ =base del triángulo el área es $\frac{1}{2}ab = 18$ entonces $a = \frac{36}{b}$.
- La hipotenusa del traiángulo es el diámetro de círculo, mide $2r$ (dos veces el radio). Entonces, como $a^2 + b^2 = (2r)^2 = 4r^2$.
  Reemplazamos $r^2$ en $S$, donde $r^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, y usamos la reclacón entre $a$ y $b$ de arriba.
- Así tiene: $S = \frac{\pi}{2}r^2 = \frac{\pi}{8}(\frac{36^2}{b^2} + b^2)$.
- $S'(b) = \frac{\pi}{4}(-\frac{36^2}{b^3} + b) = 0$ sólo si $b^4 = 36^2$, o sea $b = \pm 6$. Como $b$ es una longitud, $-6$ se descarta y queda $b = 6$.
- Como $S$ es continua en $[1, 12]$, los PC son $\{1, 6, 12\}$. Evaluando tenemos $S(1) = \frac{\pi}{8}(36^2+1) = 509.33$, $S(6) = \frac{\pi}{8}(72) = 10.6$ y $S(12) = 60.08$.
- Luego, $S$ tienen un máximo para $b = 1$ con radio $r = \frac{1}{4}\sqrt{36^2 + 1} = 9.003$ y tiene un mínimo para $b = 6$ con radio $r = \frac{1}{4}\sqrt{72} = 2.12$.