УДК 517.925.7

О численном методе решения семейства интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, возникающих в финансовой математике

О. Е. Кудрявцев

Ростовский филиал Российской таможенной академии

В. В. Родоченко

Южный Федеральный Университет

1 Аннотация

Мы представляем новый численный метод решения семейства интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, возникающих при вычислении стоимости барьерного опциона для широкого класса популярных моделей со скачками и стохастической волатильностью, вариация в которых подчиняется процессу CIR. Мы используем подходящие замены переменных для устранения эффекта корреляции, приближаем процесс вариации на малых отрезках времени при помощи специальным образом построенной марковской цепи, а затем в каждом из узлов цепи решаем задачи вычисления цены барьерного опциона при помощи метода линий. Для решения полученных задач используется авторский метод быстрой приближённой факторизации Винера-Хопфа. Итоговый ответ получаем при помощи рекуррентной процедуры, движущейся назад во времени по дереву вариации.

2 Введение

Со времен фундаментальных работ Е. Б. Дынкина, Р. Фейнмана и М. Каца известно, что решение уравнения диффузии в определенной области может быть интерпретировано как математическое ожидание выхода из нее винеровского процесса. В дальнейших исследованиях эта взаимосвязь была распространена, в частности, на процессы, комбинирующие диффузионную модель и модель Леви, траектории которых могут быть разрывными. В настоящее время процессы Леви используются при моделировании различных естественных и экономических явлений и привлекают внимание как исследователей, так и финансовых институтов. С точки зрения приложений в сфере финансовой математики, разработка инструментов для решения этих уравнений позволяет решать одну из важных прикладных задач – задачу вычисления цен производных финансовых инструментов, в частности – опционов.

Таким образом, вычисление функционалов от марковских процессов со скачками является важным и актуальным для приложений направлением исследования. Указанная задача является нетривиальной и сводится к решению достаточно сложных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, известных как прямое и обратное уравнение Колмогорова, с определенными начальными и краевыми условиями. Как правило, аналитические методы непригодны для решения подобных уравнений, поэтому возникает необходимость привлечения современного аппарата вычислительной математики.

В качестве базовой модели рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений, записанную в форме Ито, которая описывает динамику положения S_t частицы на прямой во взаимосвязи с процессом вариации V_t, которая подчиняется процессу CIR [1].

$$\begin{aligned}
&dS_t = (r - \lambda_J \zeta) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t^S + (J-1) S_t dN_t, \\
&dV_t = \kappa_V(\theta_V - V_t)dt + \sigma_V \sqrt{V_t} dZ_t^V, \\
&< dZ_t^S, dZ_t^V >= \rho dt,
\end{aligned} \tag{1}$$

где r – неотрицательный параметр, Z_t^S и Z_t^V - винеровские процессы, связанные коэффициентом корреляции ρ. В скачковой части, N_t представляет из себя пуассоновский процесс с интенсивностью λ_J, считающий к моменту t количество одинаково распределенных скачков размера J. Процесс N_t не зависит от процессов Z_t^S и Z_t^V, а также независим от J. Параметр κ_V определяет скорость "возврата" процесса вариации к "долговременному" среднему значению θ_V, $\sigma_V > 0$ называется "волатильностью" вариации. Соотношение между ζ и параметрами распределения J подбирается из соображения мартингальности процесса $\exp(-rt)S_t$.

В финансовых приложениях процесс S_t в (1) моделирует динамику цены финансового актива, а параметр $r \geq 0$ имеет смысл безрисковой процентной ставки. Если величина скачков J имеет логнормальное распределение $J \sim \mathrm{LogN}(\mu_J, \sigma_J^2)$, тогда $\zeta = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1$ и мы получаем "модель Бейтса", описанную в работе [2]. В случае, если положить интенсивность скачков равной нулю, сохраняя динамику процесса вариации, система выродится в систему уравнений модели Хестона – одну из наиболее известных моделей со стохастической волатильностью [3].

Если заменить процесс V_t положительной постоянной V_0, то первое уравнение системы (1) будет описывать процесс Леви, известный в литературе как диффузия со скачками (англ. jump-diffusion), см. например, [4]. В частности, если J имеет логнормальное распределение, мы получаем модель Мертона [5]. Если же положить интенсивность скачков равной нулю, модель сведётся к одной из наиболее исследованных и известных моделей финансового рынка – модели Блэка-Шоулза [6].

Целью работы является разработка универсального численного метода вычисления условного математического ожидания

$$f(S, V, t) = M[e^{-r(T-t)} \mathbf{1}_{\underline{S}_T > H} G(S_T) | S_t = S, V_t = V], \tag{2}$$

для моделей вида (1), где H – поглощающий барьер, $\underline{S}_T (= \inf_{0 \leq t \leq T} S_T)$ – процесс инфимума процесса S_t.

Функционалы вида (2) возникают в финансовой математике при решении задачи о нахождении цены барьерного опциона в модели (1). Под "барьерным опционом" мы будем понимать контракт, по которому выплачивается определённая сумма $G(S_T)$ в момент окончания срока действия контракта T, при условии, что в течение срока действия контракта цена актива S_T не упадёт ниже определённого барьера H (down-and-out barrier option) или не поднимется выше определённого барьера H (up-and-out barrier option). Например, для опциона, дающего право продать базовый актив по цене K ("опцион put"), $G(S) = \max\{0, K - S\}$, а для опциона, дающего право купить базовый актив по цене K ("опцион call"), $G(S) = \max\{0, S - K\}$.

Пусть $\tau = T - t$, тогда $F(S, V, \tau) (= f(S, V, T - \tau))$ удовлетворяет следующему (см, например, [7]) интегро-дифференциальному уравнению в частных производных с переменными коэффициентами в области $S(\tau) > H$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial \tau} &= \frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial S^2} + \rho\sigma_V VS\frac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial S\partial V} + \\
\frac{1}{2}\sigma_V^2 V\frac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial V^2} &+ (r-\lambda_J\zeta)S\frac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial S} + \kappa_V(\theta_V - V)\frac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial V} - \\
(r+\lambda_J)F(S,V,\tau) &+ \lambda_J\int_0^\infty F(JS,V,\tau)f(J)dJ, \\
F(S,V,0) &= G(S),
\end{aligned}$$

где $f(J)$ – функция плотности вероятностей величины скачков J. Поскольку H является поглощающим барьером и S_t может перескакивать через барьер, то необходимо добавить условие $F(S,V,\tau) = 0, S(\tau) \le H$.

Основными подходами к решению таких уравнений являются метод Монте-Карло [8], конечно-разностные схемы (см.[9]) и гибридный подход, комбинирующий метод деревьев и конечно-разностные схемы [10].

Наиболее серьезным недостатком методов Монте-Карло является низкая скорость вычислений, поскольку в случае задач с барьерами в моделях со скачками возникает необходимость детального моделирования траектории. Конечно-разностные схемы зависят от конкретной модели Леви и недостаточно точны, поскольку соответствующая матрица системы в отличие от диффузионных моделей является плотной, а для ее обращения многие авторы в неявном виде используют только трехдиагональную часть. Ряд авторов комбинируют метод расщепления и конечно-разностные схемы, аппроксимируя интегральную часть как функцию символа соответствующего псевдодифференциального оператора от конечных разностей [11], но для популярных моделей Леви это приводит к необходимости вычислять матричные логарифмы и экспоненты, что может приводить к существенным вычислительным погрешностям.

С целью снижения размерности уравнения ряд авторов (см., напр., [12, 10]) предлагают использовать марковскую цепь с непрерывным временем для аппроксимации процесса волатильности, простейшим случаем которой является биномиальной модель [13]. В результате, мы получаем модель Леви с переключением режимов по волатильности. Марковская цепь с непрерывным временем строится так, чтобы вероятности перехода из каждого состояния сохраняли соответствующие мгновенные снос и/или волатильность.

В серии статей (см., например, [14, 15, 16, 17]) универсальный метод приближенной факторизации Винера-Хопфа для широкого класса процессов Леви с фиксированной вариацией был применен для решения задач с барьерами для интегро-дифференциальных уравнений, к которым сводится вычисление цен различных видов опционов. Численная реализация операторов Винера-Хопфа осуществлялась с помощью быстрого преобразования Фурье, что делало соответствующие методы вычисления цен опционов по простоте реализации близкими к конечно-разностным схемам, но, как показывают численные эксперименты [14, 17], значительно более быстрыми и точными.

В основе нового предлагаемого численного метода решения задачи (2) будет лежать новая усовершенствованная приближенная факторизация Винера-Хопфа, разработанная в [18]. Новые формулы являются более универсальными по сравнению с [14], поскольку не требуют выделения главной части факторизуемой характеристической функции. Для решения поставленной задачи после дискретизации по времени (рандомизация Карра) коэффициенты полученного интегро-дифференциального оператора будет аппроксимироваться с помощью метода деревьев, моделирующего процесс волатильности, тем самым сводя задачу в каждом узле дерева к модели с постоянной волатильностью, а для соответствующей задачи будут использованы новые явные формулы для факторов Винера-Хопфа. В результате, мы получим метод сравнимый по скорости с гибридной конечно-разностной схемой, но более универсальный и точный.

3 Замена процесса

Одним из свойств модели является эффект корреляции винеровских процессов в уравнениях для цены и вариации. Для решения уравнений его необходимо учесть при построении процедуры оценки. Методика, которой мы воспользуемся, аналогична применяемой в [10], и состоит в том, чтобы подобрать подходящую замену для процессов. Обозначим $\hat{\rho} = \sqrt{1-\rho^2}$, $W = Z^V$, $\rho W + \hat{\rho} Z = Z^S$, где W_t Z_t – независимые броуновские движения. В этих терминах мы получаем возможность переписать систему (1).

Введём также замену для процесса S_t, положив $Y_t = \ln(\frac{S_t}{H}) - \frac{\rho}{\sigma_V} V_t$. При этом $S_t = H \exp(Y_t + \frac{\rho}{\sigma_V} V_t)$ Такой вид замены одновременно позволяет перейти к логарифмической шкале и произвести нормировку по отношению к барьеру, которая является удобной с вычислительной точки зрения. После введения обеих замен, система (1) примет вид:

$$
\begin{aligned}
&dY_t = (r - \tfrac{1}{2} V_t - \tfrac{\rho}{\sigma_V} \kappa_V (\theta_V - V_t) - \lambda_J \zeta) dt + \hat{\rho} \sqrt{V_t} dZ_t + \ln J dN_t, \\
&dV_t = \kappa_V (\theta_V - V_t) dt + \sigma_V \sqrt{V_t} dW_t.
\end{aligned}
$$

Для дальнейшего описания алгоритма введём следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\mu_Y(V_t) = r - \tfrac{1}{2} V_t - \tfrac{\rho}{\sigma_V} \kappa_V (\theta_V - V_t) - \lambda_J \zeta, \\
&\mu_V(V_t) = \kappa_V (\theta_V - V_t).
\end{aligned}
$$

4 Рандомизация Карра

Для того, чтобы иметь возможность свести рассматриваемую задачу к задаче на малых интервалах времени, мы используем процедуру, известную как “рандомизация Карра”, впервые введённую в статье [19] и обобщённую на общий случай задач стохастического управления в статье [20]. Обозначим $F_n(Y_{t_n}, V_{t_n}) = F_n(H \exp(Y_t + \frac{\rho}{\sigma_V} V_t), V_{t_n}, t_n)$ – приближение Карра значения функции $F(S, V, \tau)$ в момент времени t_n, где $t_i = i \Delta\tau$ и $\Delta\tau = \frac{T}{N}$. Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ — набор независимых экспоненциально распределённых случайных величин со средним $\Delta\tau$. Обозначим $Z_\tau^n = Y_{t_n+\tau} + \frac{\rho}{\sigma_V} V_{t_n+\tau}$.

Полагая $F_N(Y_T, V_T) = G(H \exp(Y_T + \frac{\rho}{\sigma_V} V_T))$, получаем возможность записать:

$$
F_n(Y_{t_n}, V_{t_n}) = M_{t_n}[e^{-r\Delta\tau} I_{\underline{Z}^n_{\tau_n} > 0} F_{n+1}(Y_{t_n+\tau_n}, V_{t_n+\tau_n})], n = N-1, .., 0
$$

5 Аппроксимация

Нашей следующей целью является свести полученную задачу к семейству задач меньшей размерности и получить модель Леви с переключение режимов по волатильности . Для этого мы построим, следуя процедуре, описанной в [13], аппроксимацию процесса CIR при помощи марковской цепи. К её достоинствам можно отнести быструю сходимость к оригинальному процессу и способность сохранять адекватность в широком диапазоне изменения параметров. В частности, условие Феллера $2\kappa_V\theta_V > \sigma_V^2 r$ в этом случае не является существенным для корректной работы.

Построим биномиальное дерево со "склеенными" вершинами, определяемыми по формуле:

$$V(n,k) = (\sqrt{V_0} + \frac{\sigma_V}{2}(2k-n)\sqrt{\Delta\tau})^2 \mathbb{1}_{(\sqrt{V_0}+\frac{\sigma_V}{2}(2k-n)\sqrt{\Delta\tau})>0}, n = 0,1,...,N,\ k = 0,1,...,n.$$

Идея приближения состоит в том, что в каждый момент времени t_n вариация может находиться в одном из состояний $V(n,k)$. В момент t_{n+1} из вершины (n,k) мы можем попасть либо "вверх" – в вершину $(n+1,k_u)$, либо "вниз" – в вершину $(n+1,k_d)$, при этом k_u и k_d подбираются так, чтобы согласовать движение по дереву со сносом $\mu(V_{(n,k)})$, по следующим правилам:

$$k_u^{\Delta\tau}(n,k) = min\{k^* : k+1 \le k^* \le n+1, V(n,k) + \mu_V(V(n,k))\Delta\tau \le V(n+1,k^*)\}$$
$$k_d^{\Delta\tau}(n,k) = max\{k^* : 0 \le k^* \le k, V(n,k) + \mu_V(V(n,k)) \ge V(n+1,k^*)\}$$

Определим вероятности переходов следующим образом:

$$p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} = \frac{\mu_V(V(n,k))\Delta\tau + V(n,k) - V(n+1,k_d^{\Delta\tau}(n,k))}{V(n+1,k_u^{\Delta\tau}(n,k)) - V(n+1,k_d^{\Delta\tau}(n,k))}$$

Чтобы обеспечить корректную работу схемы в случае различных значений параметров, необходимо ввести дополнительные правила, предотвращающие появление отрицательных вероятностей в некоторых вершинах:

$$p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} := \begin{cases} 1, & p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} > 1 \\ p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)}, & p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} \in [0,1] \\ 0, & p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} < 0 \end{cases}, \quad p^{\Delta\tau}_{k_d^{\Delta\tau}(n,k)} := 1 - p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)},$$

6 Приближённая факторизация

Зафиксировав таким образом вариацию в каждом из узлов, мы имеем возможность рассматривать семейство задач с интегро-дифференциальным оператором следующего вида:

$$L_{n,k}f(y) := L_Y^{V(n,k)}f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\xi}\psi_{n,k}(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Этот оператор можно понимать как псевдодифференциальный оператор, символом которого является $\psi_{n,k}(\xi)$ – характеристическая экспонента процесса Y_t при $V_t = V(n,k)$:

$$\psi_{n,k}(\xi) = \hat{\rho}^2\frac{V(n,k)}{2}\xi^2 - i\mu_Y(V(n,k))\xi + \phi(\xi),$$

где $\phi(\xi)$ – характеристическая экспонента обобщённого пуассоновского процесса. Например, для модели Мертона оно имеет вид: $\phi(\xi) = \lambda_J(1 - e^{\frac{\sigma_J^2}{2}+\mu_J})$

Для каждого из узлов $(n,k), n = N-1, ...0$ возникает две задачи – одна в предположении, что переход был совершён в вершину $(n+1,k_d)$, другая – в предположении, что переход был совершён в вершину $(n+1, k_u)$. Решение каждой из этих задач может быть записано в терминах операторов ε_q^+ и ε_q^- – факторов Винера-Хопфа (см статью [14]):

$$
\begin{aligned}
f_n^{k_d}(y) &= (q\Delta\tau)^{-1}\ \varepsilon_q^- \mathbb{1}_{(-\frac{\rho}{\sigma_V}V(n,k),+\infty)}(y)\ \varepsilon_q^+ f_{n+1}^{k_d}(y);\\
f_n^{k_u}(y) &= (q\Delta\tau)^{-1}\ \varepsilon_q^- \mathbb{1}_{(-\frac{\rho}{\sigma_V}V(n,k),+\infty)}(y)\ \varepsilon_q^+ f_{n+1}^{k_u}(y),
\end{aligned}
$$

Далее последовательно вычисляя $f_n^k = p_{k_d^{\Delta\tau}(n,k)} f_n^{k_d}(y) + p_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} f_n^{k_u}(y)$ для $n = N-1,..,0, k = 0,...,n$, где $f_n^k = F(He^{y+\frac{\rho}{\sigma_V}V(n,k)}, V(n,k), n\Delta\tau)$, мы, после возвращения к исходным обозначениям, получаем приближённые значения искомого функционала (2). В отличие от более простого случая модели Хестона [21], наличие скачков лишает возможности использовать явные формулы для факторов – их получить не удаётся. Получение приближённых формул для этих объектов является трудной задачей, последние успехи в которой (см. [18]) позволяют обобщение на случай семейства моделей с различным образом распределёнными скачками.

Приближённые формулы имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\phi_q^+(\xi) &= \exp\left[(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-} \frac{\xi\ln(q+\psi(\eta))}{\eta(\xi-\eta)}d\eta\right];\\
\phi_q^-(\xi) &= \exp\left[-(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_+}^{+\infty+i\omega_+} \frac{\xi\ln(q+\psi(\eta))}{\eta(\xi-\eta)}d\eta\right],
\end{aligned}
$$

Константы ω_+ и ω_-, такие, что $\omega_- < 0 < \omega_+$, имеют здесь смысл параметров и подбираются так, чтобы сохранить сходимость соответствующих интегралов и зависят от параметров процесса Леви. Вопросы выбора констант подробнее освещается в статье [18]. Свойства этих функций позволяют получить удобное для численной реализации представление. Функция $\phi_q^+(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\Im\xi > \omega_-$ и может быть представлена как:

$$
\begin{aligned}
\phi_q^+(\xi) &= \exp\left[i\xi F^+(0) - \xi^2\hat{F}^+(\xi)\right],\\
F^+(x) &= \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x)(2\pi)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-} e^{ix\eta}\frac{\ln(q+\psi(\eta))}{\eta^2}d\eta;\\
\hat{F}^+(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}F^+(x)dx.
\end{aligned}
$$

Аналогично, $\phi_q^-(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\Im\xi < \omega_+$ и может быть представлена как:

$$
\begin{aligned}
\phi_q^-(\xi) &= \exp\left[-i\xi F^-(0) - \xi^2\hat{F}^-(\xi)\right],\\
F^-(x) &= \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)(2\pi)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_+}^{+\infty+i\omega_+} e^{ix\eta}\frac{\ln(q+\psi(\eta))}{\eta^2}d\eta;\\
\hat{F}^-(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}F^-(x)dx.
\end{aligned}
$$

Для вычисления интегралов используется алгоритм быстрого преобразования Фурье.

7 Выводы

Получен универсальный метод приближённого решения интегро-дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, основанный на применении быстрой приближённой факторизации Винера-Хопфа сохраняющий работоспособность в широком диапазоне изменения параметров. Метод позволяет вычислять значения функционалов вида (2), для семейства моделей, основанных на широком классе процессов Леви с различным образом распределёнными скачками и имеет ряд приложений в области вычислительной финансовой математики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-32-01390).

Литература

1. *Cox, J. C.* A Theory of the Term Structure of Interest Rates / J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross // Econometrica. – 1985. – Vol. 53. – P. 385-408.

2. *Bates, D. S.* Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutshe Mark Options / D. S. Bates // Review of Financial Studies. – 1996. – Vol. 9. – P. 69–107.

3. *L. Heston* A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. Review of Financial Studies. 1993. – Vol. 6. – P. 327-343.

4. *Cont, R.* Financial modelling with jump processes: monograph / R. Cont, P. Tankov. – Chapman & Hall/CRC Press. 2004. – 535 p.

5. *Merton, R.* Option pricing when underlying stock returns are discontinuous / R. Merton // J. Financ. Econ. – 1976. – Vol. 3. – P. 125–144.

6. *Black, F.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – № 3. – P. 637-654.

7. *Feng, Y. Q.* CVA under Bates Model with Stochastic Default Intensity /Y. Q. Feng // Journal of Mathematical Finance. – 2017. – №7. – P. 682-698.

8. *Alfonsi, A.* High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and Heston models / A. Alfonsi // Mathematics of Computation. – 2010. - № 79. – P. 209-237.

9. *Chiarella, C.* The Evaluation of Barrier Option Prices Under Stochastic Volatility / C. Chiarella, B. Kang, G. H. Meyer // Computers & Mathematics with Applications. – 2010. – № 64. – P. 2034-2048.

10. *Briani, D.M.* A hybrid approach for the implementation of the Heston model / D. M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette // IMA Journal of Management Mathematics. – 2017. –V. 28. – № 4. – P. 467-500.

11. *Itkin, A.* Pricing Derivatives Under Levy Models: book / A. Itkin – Birkh?user. 2017. – 308 p.

12. *Chourdakis, K.* Levy processes driven by stochastic volatility / K.Chourdakis // Asia-Pacific Finan. Markets. – 2005. - № 12. – P. 333-352.

13. *Apolloni, E.* A robust tree method for pricing American options with CIR stochastic interest rate / E. Appolloni, L. Caramellino, A. Zanette // IMA Journal of Management Mathematics. – 2015. –V. 26. – № 4. – P. 377-401.

14. *Kudryavtsev, O.* Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes / O. Kudryavtsev, S. Levendorskiĭ // Finance and Stochastics. -– 2009. – Vol. -– № 4. -– P. 531–562.

15. Кудрявцев, О.Е. Вычисление цен барьерных и американских опционов в моделях Леви.– *Обозрение прикл. и промышл. матем.*. 2010. т.17, в.2, с.210-220.

16. *Kudryavtsev, O. Ye.* An efficient numerical method to solve a special cass of integro-differential equations relating to the Levy models / O. Ye. Kudryavtsev // Mathematical Models and Computer Simulations, – 2011. –V. 3. – № 6. – P. 706-711.

17. *Kudryavtsev O.* Efficient pricing of Swing options in Lévy-driven models / O. Kudryavtsev, A. Zanette //Quantitative Finance. – 2013. –V. 13. – № 4. – P. 627-635.

18. *Kudryavtsev, O.* Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Lévy-driven models / O. Kudryavtsev // J. Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. – 2016. – V. 22. – № 2. – P. 711–731.

19. *Carr, P.* Randomization and the American put, Review of Financial Studies / P. Carr // Review of Financial Studies. – 1998. - № 11. – P. 597-626.

20. *Bouchard, B.* Maturity randomization for stochastic control problems / B. Bouchard, N. El Karoui, N. Touzi // Annals of Applied Probability. – 2005. –V. 15. – № 4. – P. 2575-2605.

21. *Kudryavtsev, O.* A Wiener-Hopf factorization approach for pricing barrier options in the Heston model / Kudryavtsev O., Rodochenko V. // Applied Mathematical Sciences. – 2017. – V. 11. – № 2. – P. 93–100.

8 Об авторах

1. Ф.И.О. полностью: Кудрявцев Олег Евгеньевич; 2. Ученая степень, звание (если есть): доктор физико-математических наук, доцент; 3. Должность: заведующий кафедрой информатики и информационных таможенных технологий; 4. Место работы: Ростовский филиал Российской Таможенной Академии; 5. E-mail: *********@mail.ru; 6. Контактный телефон: +7(903)-999-99-99

1. Ф.И.О. полностью: Родоченко Василий Владимирович; 2. Ученая степень, звание (если есть): нет; 3. Должность: аспирант; 4. Место работы: Южный Федеральный Университет; 5. E-mail: *******************@gmail.com; 6. Контактный телефон: +7(904)-999-99-99