УДК 517.925.7

О численном методе решения семейства интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, возникающих в финансовой математике

О. Е. Кудрявцев

Ростовский Филиал РТА

В. В. Родоченко

Южный Федеральный Университет

1 Аннотация

В этой работе мы представляем алгоритм вычисления цены барьерного опциона при условии, что динамика цена базового актива подчиняется системе стохастических дифференциальных уравнений модели Бейтса. Основная идея состоит в том, что мы приближаем процесс CIR вариации на малых отрезках времени марковской цепью, затем в каждом из узлов цепи решаем задачи вычисления цены барьерного опциона при помощи метода линий с использованием приближённой факторизации Винера-Хопфа, получая итоговый ответ при помощи рекуррентной процедуры.

2 Введение

Со времен фундаментальных работ Е.Б.Дынкина, Р.Фейнмана и М.Каца известно, что решение уравнения диффузии в определенной области может быть интерпретировано как математическое ожидание выхода из нее винеровского процесса. В дальнейших исследованиях эта взаимосвязь была распространена на более общие процессы - в частности, негауссовы процессы Леви, траектории которых могут быть разрывными.

С точки зрения финансовой математики, вычисление такого рода функционалов связано с решением одной из важных прикладных задач вычислением цен производных финансовых инструментов, в частности - опционов. Рынок фьючерсных и опционных контрактов, называемый "срочным рынком"является одной из важнейших составляющих финансового рынка, поскольку его оборот может в десятки и более раз превышать объем торгов на рынке базовых активов. Причиной этого является тот факт, что производные финансовые инструменты предоставляют возможность управления финансовыми рисками.

В этой работе мы будем иметь дело с системой стохастических дифференциальных уравнений, называемой "моделью Бейтса описанной в работе [Bates], следующего вида:

$$
\begin{aligned}
&d\ln S_t = (r - \tfrac{V_t}{2})dt + \sqrt{V_t}dZ^S(t) + dJ_t,\\
&dV_t = \kappa_V(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dZ_t^V,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Система описывает поведение цены базового актива на финансовом рынке. Переменная S_t описывает приращение цены актива, параметр $r \geq 0$ имеет смысл безрисковой процентной ставки, переменная V_t описывает вариацию. Процессы $Z_S(t)$ и $Z_V(t)$ - винеровские, связанные коэффициентом корреляции ρ. $J_t = \sum_{k=0}^{N_t} J_k)$ - составной пуассоновский процесс, где $J_k \equiv N(\delta, \mu)$, а N_t - пуассоновский процесс с интенсивностью λ, считающий скачки к моменту t. Процессы $Z(t)$ и N_t независимы, и также не зависят от J_k. Параметр κ определяет скорость «возврата» процесса вариации к «долговременному» среднему значению, $\sigma > 0$ называется «волатильностью» вариации.

В случае, если положить интенсивность скачков равной нулю, сохраняя динамику процесса вариации, система выродится в систему уравнений модели Хестона - одну из известных моделей со стохастической волатильностью, описанную в статье [Heston].

Если положить V_t постоянной, первое уравнение системы (1) вырождается в уравнение модели Мертона, которое представляет собой одну из наиболее известных классических моделей для описания динамики цены актива с использованием диффузии со скачками, описанную в статье [Merton]. Если положить, вместе с тем, интенсивность скачков равной нулю, модель сведётся к одной из наиболее исследованных и известных моделей финансового рынка - модели Блэка-Шоулза [B-S].

Таким образом, модель Бейтса описывает поведение цены базового актива, вариация которого подчиняется процессу CIR из соответствующего уравнения модели Хестона, имеющего скачки, которые описываются составным пуассоновским процессом. Этот процесс был введён Бейтсом для рынка опционов на курсы валют с целью описать наблюдаемый эффект "улыбки волатильности".

В рамках данной модели мы нами был разработан метод вычисления стоимости опционного контракта, называемого "барьерным опционом". Под «барьерным опционом» мы будем, аналогично [Кудрявцев, Chiarella, Zanette] понимать контракт, по которому выплачивается определённая сумма $G(S_T)$ в момент окончания срока действия контракта T, при условии, что в течение срока тействия контракта цена акции S_T не упадёт ниже определённого барьера H (down-and-out barrier option) или не поднимется выше определённого барьера H (up-and-out barrier option). В частности, для опциона, дающего право продать акцию по цене K ("опцион put"),

$$G(S) = max 0, K - S$$

Рассмотрим, для определённости, опцион «put». Вычисление его цены в описанной модели сводится к вычислению следующего функционала:

$$\begin{aligned} &F(S,V,t) = M[e^{-r(T-t)} \infty \underline{S_T > H} G_T(S) S_0 = S, V_0 = V], \\ &\underline{S_T} = \inf_{0 \leq t \leq T} S_T, \end{aligned} \tag{2}$$

В случае опциона европейского стиля, где не рассматривается поглощающий барьер, методы, связанные с применением преобразования Фурье могут позволять получать явные формулы для модели Бейтса [Антонино, ссылка]. Для барьерных опционов явные формулы получить не удаётся.

Основными методами вычисления таких функционалов являются методы Монте-Карло и конечно-разностные схемы. Обзор такого рода методов можно найти в статьях [Antonino, Chiarella] и монографии [Кудрявцев].

Литература

1. M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette A hybrid tree-finite difference approach for the Heston model. 2014.

2. E. Appolloni, L. Caramellino, A. Zanette A robust tree method for pricing American options with CIR stochastic interest rate. 2013

3. L. Heston A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. Review of Financial Studies. 1993. v. 6. p. 327–343.

4. Kudryavtsev, O.E., and S.Z. Levendorskiĭ, Fast and accurate pricing of barrier options under Levy processes, *Finance and Stochastics*, 2009, v. 13, n.4, p.531-562.

5. Кудрявцев, О.Е. Вычисление цен барьерных и американских опционов в моделях Леви.– *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2010, т.17, в.2, с.210-220.