УДК 517.925.7

О численном методе решения семейства интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, возникающих в финансовой математике

О. Е. Кудрявцев

Ростовский филиал Российской таможенной академии

В. В. Родоченко

Южный Федеральный Университет

1 Аннотация

Мы представляем новый численный метод решения семейства интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, возникающих при вычислении стоимости барьерного опциона для широкого класса популярных моделей со скачками и стохастической волатильностью, вариация в которых подчиняется процессу CIR. Мы используем подходящие замены переменных для устранения эффекта корреляции, приближаем процесс вариации на малых отрезках времени при помощи специальным образом построенной марковской цепи, а затем в каждом из узлов цепи решаем задачи вычисления цены барьерного опциона при помощи метода линий. Для решения полученных задач используется авторский метод быстрой приближённой факторизации Винера-Хопфа. Итоговый ответ получаем при помощи рекуррентной процедуры, движущейся назад во времени по дереву вариации.

2 Введение

Со времен фундаментальных работ Е. Б. Дынкина, Р. Фейнмана и М. Каца известно, что решение уравнения диффузии в определенной области может быть интерпретировано как математическое ожидание выхода из нее винеровского процесса. В дальнейших исследованиях эта взаимосвязь была распространена, в частности, на процессы, комбинирующие диффузионную модель и модель Леви, траектории которых могут быть разрывными. В настоящее время процессы Леви используются при моделировании различных естественных и экономических явлений и привлекают внимание как исследователей, так и финансовых институтов. С точки зрения приложений в сфере финансовой математики, разработка инструментов для решения этих уравнений позволяет решать одну из важных прикладных задач – задачу вычисления цен производных финансовых инструментов, в частности – опционов.

Таким образом, вычисление функционалов от марковских процессов со скачками является важным и актуальным для приложений направлением исследования. Указанная задача является нетривиальной и сводится к решению достаточно сложных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, известных как прямое и обратное уравнение Колмогорова, с определенными начальными и краевыми условиями. Как правило, аналитические методы непригодны для решения подобных уравнений, поэтому возникает необходимость привлечения современного аппарата вычислительной математики.

В качестве базовой модели рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений, записанную в форме Ито, которая описывает динамику положения S_t частицы на прямой во взаимосвязи с процессом вариации V_t, которая подчиняется процессу CIR [CIR].

$$\begin{aligned} &dS_t = (r - \lambda_J \zeta) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t^S + (J-1) S_t dN_t, \\ &dV_t = \kappa_V(\theta_V - V_t)dt + \sigma_V \sqrt{V_t} dZ_t^V, \\ &< dZ_t^S, dZ_t^V >= \rho dt, \end{aligned} \tag{1}$$

где r – неотрицательный параметр, Z_t^S и Z_t^V - винеровские процессы, связанные коэффициентом корреляции ρ. В скачковой части, N_t представляет из себя пуассоновский процесс с интенсивностью λ_J, считающий к моменту t количество одинаково распределенных скачков размера J. Процесс N_t не зависит от процессов Z_t^S и Z_t^V, а также независим от J. Параметр κ_V определяет скорость "возврата" процесса вариации к "долговременному" среднему значению θ_V, $\sigma_V > 0$ называется "волатильностью" вариации. Соотношение между ζ и параметрами распределения J подбирается из соображения мартингальности процесса $\exp(-rt)S_t$.

В финансовых приложениях процесс S_t в (1) моделирует динамику цены финансового актива, а параметр $r \geq 0$ имеет смысл безрисковой процентной ставки. Если величина скачков J имеет логнормальное распределение $J \sim \mathrm{LogN}(\mu_J, \sigma_J^2)$, тогда $\zeta = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1$ и мы получаем "модель Бейтса", описанную в работе [Bates]. В случае, если положить интенсивность скачков равной нулю, сохраняя динамику процесса вариации, система выродится в систему уравнений модели Хестона – одну из наиболее известных моделей со стохастической волатильностью [Heston].

Если заменить процесс V_t положительной постоянной V_0, то первое уравнение системы (1) будет описывать процесс Леви, известный в литературе как диффузия со скачками (англ. jump-diffusion), см. например, [Cont, Tankov]. В частности, если J имеет логнормальное распределение, то мы получем модель Мертона [Merton], а если положить интенсивность скачков равной нулю, модель сведётся к одной из наиболее исследованных и известных моделей финансового рынка – модели Блэка-Шоулза [B-S].

Целью работы является разработка универсального численного метода вычисления условного математического ожидания

$$f(S, V, t) = M[e^{-r(T-t)} \mathbf{1}_{\underline{S}_T > H} G(S_T) | S_t = S, V_t = V], \tag{2}$$

для моделей вида (1), где H – поглощающий барьер, $\underline{S}_T (= \inf_{0 \leq t \leq T} S_T)$ – процесс инфимума процесса S_t.

Функционалы вида (2) возникают в финансовой математике при решении задачи о нахождении цены барьерного опциона в модели (1). Под "барьерным опционом" мы будем понимать контракт, по которому выплачивается определённая сумма $G(S_T)$ в момент окончания срока действия контракта T, при условии, что в течение срока действия контракта цена актива S_T не упадёт ниже определённого барьера H (down-and-out barrier option) или не поднимется выше определённого барьера H (up-and-out barrier option). Например, для опциона, дающего право продать базовый актив по цене K ("опцион put"), $G(S) = \max\{0, K - S\}$, а для опциона, дающего право купить базовый актив по цене K ("опцион call"), $G(S) = \max\{0, S - K\}$.

Пусть $\tau = T - t$, тогда $F(S, V, \tau) (= f(S, V, T - \tau))$ удовлетворяет следующему [см, например, статья 17 Фенг]) интегро-дифференциальному уравнению в частных производных с переменными коэффициентами в области $S(\tau) > H$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial S^2} + \rho\sigma V S \frac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial S \partial V} + \\
\frac{1}{2}\sigma^2 V \frac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial V^2} &+ (r - \lambda_J \zeta) S \frac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial S} + \kappa(\theta - V) \frac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial V} - \\
(r + \lambda_J) F(S,V,\tau) &+ \lambda_J \int_0^\infty F(JS,V,\tau) f(J) dJ, \\
F(S,V,0) &= G(S),
\end{aligned}$$

где $f(J)$ - функция плотности вероятностей величины скачков J. Поскольку H является поглощающим барьером и S_t может перескакивать через барьер, то необходимо добавить условие $F(S,V,\tau) = 0, S(\tau) \leq H$.

Основными подходами к решению таких уравнений являются метод Монте-Карло (Alfonsi, A. High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and Heston models (2010)), конечно-разностные схемы (см. Chiarella, C. et. al., The Evaluation of Barrier Option Prices Under Stochastic Volatility (2010)) и гибридный подход, комбинирующий метод деревьев и конечно-разностные схемы (Briani, D.M. et. al., A hybrid tree-finite difference approach for the Heston model (2014)).

Наиболее серьезным недостатком методов Монте-Карло является низкая скорость вычислений, поскольку в случае задач с барьерами в моделях со скачками возникает необходимость детального моделирования траектории. Конечно-разностные схемы зависят от конкретной модели Леви и недостаточно точны, поскольку соответствующая матрица системы в отличие от диффузионных моделей является плотной, а для ее обращения многие авторы в неявном виде используют только трехдиагональную часть. Ряд авторов комбинируют метод расщепления и конечно-разностные схемы, аппроксимируя интегральную часть как функцию символа соответствующего псевдодифференциального оператора от конечных разностей (Itkin, A. Pricing Derivatives Under Levy Models (2017)), но для популярных моделей Леви это приводит к необходимости вычислять матричные логарифмы и экспоненты, что может приводить к существенным вычислительным погрешностям.

С целью снижения размерности уравнения ряд авторов (см., напр., [Ch1, Briani, D.M. et. al.]) предлагают использовать марковскую цепь с непрерывным временем для аппроксимации процесса волатильности, простейшим случаем которой является биномиальной модель [Appol]. В результате, мы получаем модель Леви с переключением режимов по волатильности. Марковская цепь с непрерывным временем строится так, чтобы вероятности перехода из каждого состояния сохраняли соответствующие мгновенные снос и/или волатильность.

В серии статей (см., например, [KuLev, KuОбозрение, KuMathMod, KuZanet]) универсальный метод приближенной факторизации Винера-Хопфа для широкого класса процессов Леви с фиксированной вариацией был применен для решения задач с барьерами для интегро-дифференциальных уравнений, к которым сводится вычисление цен различных видов опционов. Численная реализация операторов Винера-Хопфа осуществлялась с помощью быстрого преобразования Фурье, что делало соответствующие методы вычисления цен опционов по простоте реализации близкими к конечно-разностным схемам, но, как показывают численные эксперименты [KuLev, KuZanet], значительно более быстрыми и точными.

В основе нового предлагаемого численного метода решения задачи (2) будет лежать новая усовершенствованная приближенная факторизация Винера-Хопфа, разработанная в [Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Levy-driven models (2016)]. Новые формулы являются более универсальными по сравнению с [KuL], поскольку не требуют выделения главной части факторизуемой характеристической функции. Для решения поставленной задачи после дискретизации по времени (метод линий) коэффициенты полученного интегро-дифференциального оператора будет аппроксимироваться с помощью метода деревьев, моделирующего процесс волатильности, тем самым сводя задачу в каждом узле дерева к модели с постоянной волатильностью, а для соответствующей задачи будут использованы новые явные формулы для факторов Винера-Хопфа. В результате, мы получим метод сравнимый по скорости с гибридной конечно-разностной схемой, но более универсальный и точный.

3 Замена процесса

Одним из свойств модели является эффект корреляции винеровских процессов в уравнениях для цены и вариации. Для решения уравнений его необходимо учесть при построении процедуры оценки. Методика, которой мы воспользуемся, аналогична применяемой в [Zanet, Деревья], и состоит в том, чтобы подобрать подходящую замену для процессов. Обозначим $\hat{\rho} = \sqrt{1-\rho^2}$, $W = Z^V$ $\rho W + \hat{\rho} Z = Z^S$, где W_t Z_t - независимые броуновские движения. В этих терминах мы получаем возможность переписать систему (1).

Введём также замену для процесса цены базового актива, положив $Y_t = \ln(\frac{S_t}{H}) - \frac{\rho}{\sigma} V_t$. Такой вид замены одновременно позволяет перейти к логарифмической шкале и произвести нормировку по отношению к барьеру, которая является удобной с вычислительной точки зрения. После введения обеих замен, система (1) примет вид:

$$\begin{aligned} &dY_t = (r - \tfrac{1}{2}V_t - \tfrac{\rho}{\sigma}\kappa(\theta - V_t) - \lambda_J \zeta)dt + \hat{\rho}\sqrt{V_t} dZ_t^S + lnJdN_t, \\ &dV_t = \kappa_V(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dZ_t^V, \\ &J = \textstyle\sum_i^{N_t} j_i \end{aligned} \tag{3}$$

где J имеет характеристическую экспоненту $\psi_j(\xi)$, для которой выполнено условие $\psi_j(-i) = 0$, а j_i распределены так же, как lnJ. Обозначим $\mu_Y(V_t) = r - \frac{1}{2}V_t - \frac{\rho}{\sigma}\kappa(\theta - V_t)$ и $\mu_V(V_t) = \kappa(\theta - V_t)$.

4 Метод линий

Для того, чтобы иметь возможность свести рассматриваемую задачу к задаче на малых интервалах времени, мы используем процедуру, известную как «рандомизация Карра», впервые введённую в статье [Карр, рандомизация] и обобщённую на общий случай задач стохастического управления в статье [Карр, обобщение]. Обозначим $F_n(Y_{t_n}, V_{t_n})$ - приближение Карра цены опциона в момент времени t_n, где $t_i = i\Delta\tau$ и $\Delta\tau = \frac{T}{N}$. Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ — набор независимых экспоненциально распределённых случайных величин со средним $\Delta\tau$. Обозначим $t_{n,\tau} = t_n + \tau_n$ и $Z_t^n = Y_{t_{n,\tau}} + \frac{\rho}{\sigma} V_{t_{n,\tau}}$.

Полагая $F_N = G(H\exp(Y_T + \frac{\rho}{\sigma}V_t))$, получаем возможность записать:

$$F_n(Y_{t_n}, V_{t_n}) = M_{t_n}[e^{-r\Delta\tau} I_{\underline{Z}^n_{\tau_n} > 0} F_{n+1}(Y_{t_n+\tau_n}, V_{t_n+\tau_n})], n = N-1, .., 0$$

5 Аппроксимация

Нашей следующей целью является свести полученную задачу к семейству задач меньшей размерности и получить модель Леви с переключение режимов по волатильности . Для этого мы построим, следуя процедуре [Антонино, деревья], аппроксимацию процесса CIR при помощи марковской цепи. К её достоинствам можно отнести быструю сходимость к оригинальному процессу и способность сохранять адекватность в широком диапазоне изменения параметров. В частности, условие Феллера $2\kappa\theta > \sigma^2 r$ в этом случае не является существенным для корректной работы.

Разделим промежуток $[0, T]$ на N равных частей, $\Delta t = \frac{T}{N}$. Зафиксируем точки $t_n = n \cdot \Delta T$. Построим биномиальное дерево со «склеенными» вершинами, определяемыми по формуле:

$$V(n,k) = (\sqrt{V_0} + \frac{\sigma}{2}(2k-n)\sqrt{\Delta t})^2 \mathbb{1}_{(\sqrt{V_0}+\frac{\sigma}{2}(2k-n)\sqrt{\Delta t})>0}, n = 0, 1, ..., N,\ k = 0, 1, ..., n.$$

Идея приближения состоит в том, что в каждый момент времени t_n вариация может находиться в одном из состояний $V(n,k)$. В момент t_{n+1} из вершины (n,k) мы можем попасть либо "вверх в вершину $(n+1, k_u)$, либо "вниз - вершину $(n+1, k_d)$, при этом k_u и k_d подбираются так, чтобы согласовать движение по дереву со сносом $\mu(V_{(n,k)})$, по следующим правилам:

$$k_u^{\Delta t}(n,k) = min\{k^* : k+1 \le k^* \le n+1, V(n,k) + \mu_V(V(n,k))\Delta t \le V(n+1,k^*)\}$$
$$k_d^{\Delta t}(n,k) = max\{k^* : 0 \le k^* \le k, V(n,k) + \mu_V(V(n,k)) \ge V(n+1,k^*)\}$$

Определим вероятности переходов следующим образом:

$$p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)} = \frac{\mu_V(V(n,k))\Delta t + V(n,k) - V(n+1, k_d^{\Delta t}(n,k))}{V(n+1, k_u^{\Delta t}(n,k)) - V(n+1, k_d^{\Delta t}(n,k))}$$

Чтобы обеспечить корректную работу схемы в случае различных значений параметров, необходимо ввести дополнительные правила, предотвращающие появление отрицательных вероятностей в некоторых вершинах:

$$p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)} := \begin{cases} 1, & p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)} > 1 \\ p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)}, & p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)} \in [0,1] \\ 0, & p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)} < 0 \end{cases}, \quad p^{\Delta t}_{k_d^{\Delta t}(n,k)} := 1 - p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)},$$

6 Приближённая факторизация

Зафиксировав таким образом вариацию в каждом из узлов, мы имеем возможность рассматривать семейство задач с интегро-дифференциальным оператором следующего вида:

$$L_{n,k} f(y) := L_Y^{V(n,k)} f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\xi} \psi_{n,k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

Этот оператор можно понимать как псевдодифференциальный оператор, символом которого является $\psi_{n,k}(\xi)$ – характеристическая экспонента процесса Y_t при $V_t = V(n,k)$:

$$\psi_{n,k}(\xi) = \frac{\sigma^2_{(n,k)}}{2}\xi^2 - i\gamma_(n,k)\xi + \lambda(1 - e^{-\frac{\delta^2\xi^2}{2} + i\mu\xi}), \tag{4}$$

где $\sigma_{(n,k)} = \hat{\rho}\sqrt{V(n,k)}$, а $\gamma_(n,k) = \mu_Y + \lambda(1 - e^{\frac{\delta^2}{2}+\mu})$

Для каждого из узлов $(n,k), n = N-1, ...0$ возникает две задачи – одна в предположении, что переход был совершён в вершину $(n+1, k_d)$, другая – в предположении, что переход был совершён в вершину $(n+1, k_u)$. Решение каждой из этих задач может быть записано в терминах операторов ε_q^+ и ε_q^- - факторов Винера-Хопфа:

$$f_n^{k_d}(y) = (q\Delta t)^{-1}\ \varepsilon_q^- \mathbb{1}_{(-\frac{\rho}{\sigma}V(n,k),+\infty)}(y)\ \varepsilon_q^+ f_{n+1}^{k_d}(y); \quad (5)$$

$$f_n^{k_u}(y) = (q\Delta t)^{-1}\ \varepsilon_q^- \mathbb{1}_{(-\frac{\rho}{\sigma}V(n,k),+\infty)}(y)\ \varepsilon_q^+ f_{n+1}^{k_u}(y), \quad (6)$$

Далее последовательно вычисляя $f_n^k = p_{k_d^{\Delta t}(n,k)} f_n^{k_d}(y) + p_{k_u^{\Delta t}(n,k)} f_n^{k_u}(y)$ для $n = N-1, .., 0, k = 0, ..., n$, где $f_n^k = F(He^{y+\frac{\rho}{\sigma}V(n,k)}, V(n,k), n\Delta t)$, мы, после возвращения к исходным обозначениям, получаем приближённые значения искомого функционала (2). В отличие от более простого случая модели Хестона [hikari, мы], наличие скачков лишает возможности использовать явные формулы для факторов - их получить не удаётся. Получение приближённых формул для этих объектов является трудной задачей, последние успехи в которой (см. [см. Мекс, 2016]) позволяют обобщение на случай семейства моделей с различным образом распределёнными скачками.

Приближённые формулы имеют вид:

$$\begin{aligned}
\phi_q^+(\xi) &= \exp\left[(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-} \frac{\xi\ln(q+\psi(\eta))}{\eta(\xi-\eta)}d\eta\right];\\
\phi_q^-(\xi) &= \exp\left[-(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_+}^{+\infty+i\omega_+} \frac{\xi\ln(q+\psi(\eta))}{\eta(\xi-\eta)}d\eta\right],
\end{aligned}$$

Константы ω_+ и ω_-, такие, что $\omega_- < 0 < \omega_+$, имеют здесь смысл параметров и подбираются так, чтобы сохранить сходимость соответствующих интегралов и зависят от параметров процесса Леви. Вопросы выбора констант подробнее освещается в статье [Кудрявцев, Мекс]. Свойства этих функций позволяют получить удобное для численной реализации представление. Функция $\phi_q^+(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\Im\xi > \omega_-$ и может быть представлена как:

$$\phi_q^+(\xi) = \exp\left[i\xi F^+(0) - \xi^2\hat{F}^+(\xi)\right], \quad (7)$$

$$F^+(x) = \mathbf{1_{(-\infty,0]}(x)(2\pi)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-} e^{ix\eta}\frac{\ln(q+\psi(\eta))}{\eta^2}d\eta}; \quad (8)$$

$$\hat{F}^+(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}F^+(x)dx. \quad (9)$$

Аналогично, $\phi_q^-(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\Im\xi < \omega_+$ и может быть представлена как:

$$\phi_q^-(\xi) = \exp\left[-i\xi F^-(0) - \xi^2\hat{F}^-(\xi)\right], \quad (10)$$

$$F^-(x) = \mathbf{1_{[0,+\infty)}(x)(2\pi)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_+}^{+\infty+i\omega_+} e^{ix\eta}\frac{\ln(q+\psi(\eta))}{\eta^2}d\eta}; \quad (11)$$

$$\hat{F}^-(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}F^-(x)dx. \quad (12)$$

Для вычисления интегралов используется алгоритм быстрого преобразования Фурье.

7 Выводы

Получен универсальный метод приближённого решения интегро-дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, основанный на применении быстрой приближённой факторизации Винера-Хопфа сохраняющий работоспособность в широком диапазоне изменения параметров. Метод позволяет вычислять значения функционалов вида (2), для семейства моделей, основанных на широком классе процессов Леви с различным образом распределёнными скачками и имеет ряд приложений в области вычислительной финансовой математики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-32-01390).

Литература

1. E. Appolloni, L. Caramellino, A. Zanette A robust tree method for pricing American options with CIR stochastic interest rate. 2013

2. *Bates, D. S.* Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutshe Mark Options / D. S. Bates // Review of Financial Studies. — 1996. -– Vol. 9. — P. 69–107.

3. M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette A hybrid tree-finite difference approach for the Heston model. 2014.

4. *Cox, J. C.* A Theory of the Term Structure of Interest Rates / J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross // Econometrica. -– 1985. -– Vol. 53. — P. 385-408.

5. Ch2 *Chourdakis, K.* Levy processes driven by stochastic volatility / K.Chourdakis // Asia-Pacific Finan. Markets. – 2005. - № 12. – P. 333-352.

6. L. Heston A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. Review of Financial Studies. 1993. v. 6. p. 327–343.

7. *Kudryavtsev, O.* Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes / O. Kudryavtsev, S. Levendorskiĭ // Finance and Stochastics. -– 2009. – Vol. 13. -– № 4. -– P. 531–562.

8. Кудрявцев, О.Е. Вычисление цен барьерных и американских опционов в моделях Леви.– *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2010, т.17, в.2, с.210-220.

9. *Kudryavtsev O.* Efficient pricing of Swing options in Lévy-driven models / O. Kudryavtsev, A. Zanette //Quantitative Finance. – 2013. –V. 13. – № 4. – P. 627-635.

10. A. Alfonsi, High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and Heston models, Mathematics of Computation, 79 (2010), 209 - 237. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-09-02252-2

11. E. Appolloni, L. Caramellino, A. Zanette, A robust tree method for pricing American options with CIR stochastic interest rate, 2013.

12. B. Bouchard, N. El Karoui, N. Touzi, Maturity randomization for stochastic control problems, Ann. Appl. Probab., 15 (2005), no. 4, 2575 – 2605. https://doi.org/10.1214/1050516050000005

13. D.M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette, A hybrid tree-finite difference approach for the Heston model, 2014.

14. *C*ont, R. Financial modelling with jump processes: monograph / R. Cont, P. Tankov. – Chapman & Hall/CRC Press, 2004. – 535 p.

15. P. Carr, Randomization and the American put, Review of Financial Studies, 11 (1998), 597 - 626. https://doi.org/10.1093/rfs/11.3.597

16. C. Chiarella, B. Kang, G. H. Meyer, The Evaluation of Barrier Option Prices Under Stochastic Volatility, Computers & Mathematics with Applications, 64 (2010), 2034 - 2048. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.03.103

17. *F*eng, Y. Q. CVA under Bates Model with Stochastic Default Intensity /Y. Q. Feng // Journal of Mathematical Finance. – 2017. – №7. – P. 682-698.

18. O. Kudryavtsev, S. Levendorskii, Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes, Finance and Stochastics, 13 (2009), no. 4, 531 - 562.

19. O. Ye. Kudryavtsev, An efficient numerical method to solve a special cass of integro-differential equations relating to the Levy models, Mathematical Models and Computer Simulations, 3 (2011), no. 6, 706–711.

20. *Kudryavtsev, O.* Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Lévy-driven models / O. Kudryavtsev // J. Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. – 2016. – V. 22. – № 2. – P. 711–731.

21. PREMIA: An Option Pricer Project CERMICS-INRIA, available at http://www.premia.fr

8 Об авторах

1. Кудрявцев Олег Евгеньевич; 2. Доктор физико-математических наук, доцент; 3. Должность (например, Заведующий кафедры информационных таможенных технологий); 4. Ростовский филиал Российской Таможенной Академии; 5. *********@mail.ru; 6. +7(903)-999-99-99

1. Родоченко Василий Владимирович; 2. нет; 3. аспирант; 4. Южный Федеральный Университет; 5. *******************@gmail.com; 6. +7(904)-999-99-99