

**О численном методе решения семейства интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, возникающих в финансовой математике**

**О. Е. Кудрявцев**

*Ростовский филиал Российской таможенной академии*

**В. В. Родоченко**

*Южный Федеральный Университет*

## **1 Аннотация**

Мы представляем новый численный метод решения семейства интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, возникающих при вычислении стоимости барьерного опциона для широкого класса популярных моделей со скачками и стохастической волатильностью, вариация в которых подчиняется процессу CIR. Мы используем подходящие замены переменных для устранения эффекта корреляции, приближаем процесс вариации на малых отрезках времени при помощи специальным образом построенной марковской цепи, а затем в каждом из узлов цепи решаем задачи вычисления цены барьерного опциона при помощи метода линий. Для решения полученных задач используется авторский метод быстрой приближённой факторизации Винера-Хопфа. Итоговый ответ получаем при помощи рекуррентной процедуры, движущейся назад во времени по дереву вариации.

## **2 Введение**

Со времен фундаментальных работ Е. Б. Дынкина, Р. Фейнмана и М. Каца известно, что решение уравнения диффузии в определенной области может быть интерпретировано как математическое ожидание выхода из нее винеровского процесса. В дальнейших исследованиях эта взаимосвязь была распространена, в частности, на процессы, комбинирующие диффузионную модель и модель Леви, траектории которых могут быть разрывными. В настоящее время процессы Леви используются при моделировании различных естественных и экономических явлений и привлекают внимание как исследователей, так и финансовых институтов. С точки зрения приложений в сфере финансовой математики, разработка инструментов для решения этих уравнений позволяет решать одну из важных прикладных задач – задачу вычисления цен производных финансовых инструментов, в частности – опционов.

Таким образом, вычисление функционалов от марковских процессов со скачками является важным и актуальным для приложений направлением исследования. Указанная задача является нетривиальной и сводится к решению достаточно сложных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, известных как прямое и обратное уравнение Колмогорова, с определенными начальными и краевыми условиями. Как правило, аналитические методы непригодны для решения подобных уравнений, поэтому возникает необходимость привлечения современного аппарата вычислительной математики.

В качестве базовой модели рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений, записанную в форме Ито, которая описывает динамику положения  $S_t$  частицы на прямой во взаимосвязи с процессом вариации  $V_t$ , которая подчиняется процессу CIR [1].

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - \lambda_J \zeta) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t^S + (J - 1) S_t dN_t, \\ dV_t &= \kappa_V (\theta_V - V_t) dt + \sigma_V \sqrt{V_t} dZ_t^V, \\ \langle dZ_t^S, dZ_t^V \rangle &= \rho dt, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $r$  – неотрицательный параметр,  $Z_t^S$  и  $Z_t^V$  – винеровские процессы, связанные коэффициентом корреляции  $\rho$ . В скачковой части,  $N_t$  представляет из себя пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda_J$ , считающий к моменту  $t$  количество одинаково распределённых скачков размера  $J$ . Процесс  $N_t$  не зависит от процессов  $Z_t^S$  и  $Z_t^V$ , а также независим от  $J$ . Параметр  $\kappa_V$  определяет скорость “возврата” процесса вариации к “долговременному” среднему значению  $\theta_V$ ,  $\sigma_V > 0$  называется “волатильностью” вариации. Соотношение между  $\zeta$  и параметрами распределения  $J$  подбирается из соображения мартингалности процесса  $\exp(-rt)S_t$ .

В финансовых приложениях процесс  $S_t$  в (1) моделирует динамику цены финансового актива, а параметр  $r \geq 0$  имеет смысл безрисковой процентной ставки. Если величина скачков  $J$  имеет логнормальное распределение  $J \sim \text{LogN}(\mu_J, \sigma_J^2)$ , тогда  $\zeta = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1$  и мы получаем “модель Бейтса”, описанную в работе [2]. В случае, если положить интенсивность скачков равной нулю, сохраняя динамику процесса вариации, система вырождается в систему уравнений модели Хестона – одну из наиболее известных моделей со стохастической волатильностью [3].

Если заменить процесс  $V_t$  положительной постоянной  $V_0$ , то первое уравнение системы (1) будет описывать процесс Леви, известный в литературе как диффузия со скачками (англ. jump-diffusion), см. например, [4]. В частности, если  $J$  имеет логнормальное распределение, мы получаем модель Мертона [5]. Если же положить интенсивность скачков равной нулю, модель сведётся к одной из наиболее исследованных и известных моделей финансового рынка – модели Блэка-Шоулза [6].

Целью работы является разработка универсального численного метода вычисления условного математического ожидания

$$f(S, V, t) = M[e^{-r(T-t)} \mathbf{1}_{\underline{S}_T > H} G(S_T) | S_t = S, V_t = V], \quad (2)$$

для моделей вида (1), где  $H$  – поглощающий барьер,  $\underline{S}_T (= \inf_{0 \leq t \leq T} S_t)$  – процесс инфимума процесса  $S_t$ .

Функционалы вида (2) возникают в финансовой математике при решении задачи о нахождении цены барьерного опциона в модели (1). Под “барьерным опционом” мы будем понимать контракт, по которому выплачивается определённая сумма  $G(S_T)$  в момент окончания срока действия контракта  $T$ , при условии, что в течение срока действия контракта цена актива  $S_t$  не упадёт ниже определённого барьера  $H$  (down-and-out barrier option) или не поднимется выше определённого барьера  $H$  (up-and-out barrier option). Например, для опциона, дающего право продать базовый актив по цене  $K$  (“опцион put”),  $G(S) = \max\{0, K - S\}$ , а для опциона, дающего право купить базовый актив по цене  $K$  (“опцион call”),  $G(S) = \max\{0, S - K\}$ .

Пусть  $\tau = T - t$ , тогда  $F(S, V, \tau) (= f(S, V, T - \tau))$  удовлетворяет следующему (см, например, [7]) интегро-дифференциальному уравнению в частных производных с пере-

менными коэффициентами в области  $S(\tau) > H$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(S, V, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 F(S, V, \tau)}{\partial S^2} + \rho \sigma_V V S \frac{\partial^2 F(S, V, \tau)}{\partial S \partial V} + \\ \frac{1}{2} \sigma_V^2 V \frac{\partial^2 F(S, V, \tau)}{\partial V^2} &+ (r - \lambda_J \zeta) S \frac{\partial F(S, V, \tau)}{\partial S} + \kappa_V (\theta_V - V) \frac{\partial F(S, V, \tau)}{\partial V} - \\ (r + \lambda_J) F(S, V, \tau) &+ \lambda_J \int_0^\infty F(JS, V, \tau) f(J) dJ, \\ F(S, V, 0) &= G(S), \end{aligned}$$

где  $f(J)$  – функция плотности вероятностей величины скачков  $J$ . Поскольку  $H$  является поглощающим барьером и  $S_t$  может перескакивать через барьер, то необходимо добавить условие  $F(S, V, \tau) = 0, S(\tau) \leq H$ .

Основными подходами к решению таких уравнений являются метод Монте-Карло [8], конечно-разностные схемы (см. [9]) и гибридный подход, комбинирующий метод деревьев и конечно-разностные схемы [10].

Наиболее серьезным недостатком методов Монте-Карло является низкая скорость вычислений, поскольку в случае задач с барьерами в моделях со скачками возникает необходимость детального моделирования траектории. Конечно-разностные схемы зависят от конкретной модели Леви и недостаточно точны, поскольку соответствующая матрица системы в отличие от диффузионных моделей является плотной, а для ее обращения многие авторы в неявном виде используют только трехдиагональную часть. Ряд авторов комбинируют метод расщепления и конечно-разностные схемы, аппроксимируя интегральную часть как функцию символа соответствующего псевдодифференциального оператора от конечных разностей [11], но для популярных моделей Леви это приводит к необходимости вычислять матричные логарифмы и экспоненты, что может приводить к существенным вычислительным погрешностям.

С целью снижения размерности уравнения ряд авторов (см., напр., [12, 10]) предлагают использовать марковскую цепь с непрерывным временем для аппроксимации процесса волатильности, простейшим случаем которой является биномиальной модель [13]. В результате, мы получаем модель Леви с переключением режимов по волатильности. Марковская цепь с непрерывным временем строится так, чтобы вероятности перехода из каждого состояния сохраняли соответствующие мгновенные снос и/или волатильность.

В серии статей (см., например, [14, 15, 16, 17]) универсальный метод приближенной факторизации Винера-Хопфа для широкого класса процессов Леви с фиксированной вариацией был применен для решения задач с барьерами для интегро-дифференциальных уравнений, к которым сводится вычисление цен различных видов опционов. Численная реализация операторов Винера-Хопфа осуществлялась с помощью быстрого преобразования Фурье, что делало соответствующие методы вычисления цен опционов по простоте реализации близкими к конечно-разностным схемам, но, как показывают численные эксперименты [14, 17], значительно более быстрыми и точными.

В основе нового предлагаемого численного метода решения задачи (2) будет лежать новая усовершенствованная приближенная факторизация Винера-Хопфа, разработанная в [18]. Новые формулы являются более универсальными по сравнению с [14], поскольку не требуют выделения главной части факторизируемой характеристической функции. Для решения поставленной задачи после дискретизации по времени (рандомизация Карра) коэффициенты полученного интегро-дифференциального оператора будет аппроксимироваться с помощью метода деревьев, моделирующего процесс волатильности, тем самым сводя

задачу в каждом узле дерева к модели с постоянной волатильностью, а для соответствующей задачи будут использованы новые явные формулы для факторов Винера-Хопфа. В результате, мы получим метод сравнимый по скорости с гибридной конечно-разностной схемой, но более универсальный и точный.

### 3 Замена процесса

Одним из свойств модели является эффект корреляции винеровских процессов в уравнениях для цены и вариации. Для решения уравнений его необходимо учесть при построении процедуры оценки. Методика, которой мы воспользуемся, аналогична применяемой в [10], и состоит в том, чтобы подобрать подходящую замену для процессов. Обозначим  $\hat{\rho} = \sqrt{1 - \rho^2}$ ,  $W = Z^V$ ,  $\rho W + \hat{\rho} Z = Z^S$ , где  $W_t$   $Z_t$  – независимые броуновские движения. В этих терминах мы получаем возможность переписать систему (1).

Введём также замену для процесса  $S_t$ , положив  $Y_t = \ln(\frac{S_t}{H}) - \frac{\rho}{\sigma_V} V_t$ . При этом  $S_t = H \exp(Y_t + \frac{\rho}{\sigma_V} V_t)$  Такой вид замены одновременно позволяет перейти к логарифмической шкале и произвести нормировку по отношению к барьеру, которая является удобной с вычислительной точки зрения. После введения обеих замен, система (1) примет вид:

$$\begin{aligned} dY_t &= (r - \frac{1}{2} V_t - \frac{\rho}{\sigma_V} \kappa_V (\theta_V - V_t) - \lambda_J \zeta) dt + \hat{\rho} \sqrt{V_t} dZ_t + \ln J dN_t, \\ dV_t &= \kappa_V (\theta_V - V_t) dt + \sigma_V \sqrt{V_t} dW_t. \end{aligned}$$

Для дальнейшего описания алгоритма введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mu_Y(V_t) &= r - \frac{1}{2} V_t - \frac{\rho}{\sigma_V} \kappa_V (\theta_V - V_t) - \lambda_J \zeta, \\ \mu_V(V_t) &= \kappa_V (\theta_V - V_t). \end{aligned}$$

### 4 Рандомизация Карра

Для того, чтобы иметь возможность свести рассматриваемую задачу к задаче на малых интервалах времени, мы используем процедуру, известную как “рандомизация Карра”, впервые введённую в статье [19] и обобщённую на общий случай задач стохастического управления в статье [20]. Обозначим  $F_n(Y_{t_n}, V_{t_n}) = F_n(H \exp(Y_t + \frac{\rho}{\sigma_V} V_t), V_{t_n}, t_n)$  – приближение Карра значения функции  $F(S, V, \tau)$  в момент времени  $t_n$ , где  $t_i = i\Delta\tau$  и  $\Delta\tau = \frac{T}{N}$ . Пусть  $\{\tau_i\}_{i=1}^N$  – набор независимых экспоненциально распределённых случайных величин со средним  $\Delta\tau$ . Обозначим  $Z_\tau^n = Y_{t_n+\tau} + \frac{\rho}{\sigma_V} V_{t_n+\tau}$ .

Полагая  $F_N(Y_T, V_T) = G(H \exp(Y_T + \frac{\rho}{\sigma_V} V_T))$ , получаем возможность записать:

$$F_n(Y_{t_n}, V_{t_n}) = M_{t_n} [e^{-r\Delta\tau} I_{Z_{\tau_n}^n > 0} F_{n+1}(Y_{t_n+\tau_n}, V_{t_n+\tau_n})], n = N - 1, \dots, 0$$

### 5 Аппроксимация

Нашей следующей целью является свести полученную задачу к семейству задач меньшей размерности и получить модель Леви с переключение режимов по волатильности. Для этого мы построим, следуя процедуре, описанной в [13], аппроксимацию процесса CIR при помощи марковской цепи. К её достоинствам можно отнести быструю сходимость

к оригинальному процессу и способность сохранять адекватность в широком диапазоне изменения параметров. В частности, условие Феллера  $2\kappa_V\theta_V > \sigma_V^2 r$  в этом случае не является существенным для корректной работы.

Построим биномиальное дерево со “склеенными” вершинами, определяемыми по формуле:

$$V(n, k) = (\sqrt{V_0} + \frac{\sigma_V}{2}(2k - n)\sqrt{\Delta\tau})^2 \mathbb{1}_{(\sqrt{V_0} + \frac{\sigma_V}{2}(2k - n)\sqrt{\Delta\tau}) > 0}, n = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots, n.$$

Идея приближения состоит в том, что в каждый момент времени  $t_n$  вариация может находиться в одном из состояний  $V(n, k)$ . В момент  $t_{n+1}$  из вершины  $(n, k)$  мы можем попасть либо “вверх” – в вершину  $(n + 1, k_u)$ , либо “вниз” – в вершину  $(n + 1, k_d)$ , при этом  $k_u$  и  $k_d$  подбираются так, чтобы согласовать движение по дереву со сносом  $\mu(V(n, k))$ , по следующим правилам:

$$\begin{aligned} k_u^{\Delta\tau}(n, k) &= \min\{k^* : k + 1 \leq k^* \leq n + 1, V(n, k) + \mu_V(V(n, k))\Delta\tau \leq V(n + 1, k^*)\} \\ k_d^{\Delta\tau}(n, k) &= \max\{k^* : 0 \leq k^* \leq k, V(n, k) + \mu_V(V(n, k))\Delta\tau \geq V(n + 1, k^*)\} \end{aligned}$$

Определим вероятности переходов следующим образом:

$$p_{k_u^{\Delta\tau}(n, k)}^{\Delta\tau} = \frac{\mu_V(V(n, k))\Delta\tau + V(n, k) - V(n + 1, k_d^{\Delta\tau}(n, k))}{V(n + 1, k_u^{\Delta\tau}(n, k)) - V(n + 1, k_d^{\Delta\tau}(n, k))}$$

Чтобы обеспечить корректную работу схемы в случае различных значений параметров, необходимо ввести дополнительные правила, предотвращающие появление отрицательных вероятностей в некоторых вершинах:

$$p_{k_u^{\Delta\tau}(n, k)}^{\Delta\tau} := \begin{cases} 1, & p_{k_u^{\Delta\tau}(n, k)}^{\Delta\tau} > 1 \\ p_{k_u^{\Delta\tau}(n, k)}^{\Delta\tau}, & p_{k_u^{\Delta\tau}(n, k)}^{\Delta\tau} \in [0, 1] \\ 0, & p_{k_u^{\Delta\tau}(n, k)}^{\Delta\tau} < 0 \end{cases}, \quad p_{k_d^{\Delta\tau}(n, k)}^{\Delta\tau} := 1 - p_{k_u^{\Delta\tau}(n, k)}^{\Delta\tau},$$

## 6 Приближённая факторизация

Зафиксировав таким образом вариацию в каждом из узлов, мы имеем возможность рассматривать семейство задач с интегро-дифференциальным оператором следующего вида:

$$L_{n, k} f(y) := L_Y^{V(n, k)} f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\xi} \psi_{n, k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Этот оператор можно понимать как псевдодифференциальный оператор, символом которого является  $\psi_{n, k}(\xi)$  – характеристическая экспонента процесса  $Y_t$  при  $V_t = V(n, k)$ :

$$\psi_{n, k}(\xi) = \hat{\rho}^2 \frac{V(n, k)}{2} \xi^2 - i\mu_Y(V(n, k))\xi + \phi(\xi),$$

где  $\phi(\xi)$  – характеристическая экспонента обобщённого пуассоновского процесса. Например, для модели Мертона она имеет вид:  $\phi(\xi) = \lambda_J(1 - e^{\frac{\sigma_J^2}{2} + \mu_J})$

Для каждого из узлов  $(n, k), n = N - 1, \dots, 0$  возникает две задачи – одна в предположении, что переход был совершён в вершину  $(n + 1, k_d)$ , другая – в предположении, что

переход был совершён в вершину  $(n+1, k_u)$ . Решение каждой из этих задач может быть записано в терминах операторов  $\varepsilon_q^+$  и  $\varepsilon_q^-$  – факторов Винера-Хопфа (см статью [14]):

$$\begin{aligned} f_n^{k_d}(y) &= (q\Delta\tau)^{-1} \varepsilon_q^- \mathbb{1}_{(-\frac{\rho}{\sigma_V}V(n,k), +\infty)}(y) \varepsilon_q^+ f_{n+1}^{k_d}(y); \\ f_n^{k_u}(y) &= (q\Delta\tau)^{-1} \varepsilon_q^- \mathbb{1}_{(-\frac{\rho}{\sigma_V}V(n,k), +\infty)}(y) \varepsilon_q^+ f_{n+1}^{k_u}(y), \end{aligned}$$

Далее последовательно вычисляя  $f_n^k = p_{k_d\Delta\tau(n,k)} f_n^{k_d}(y) + p_{k_u\Delta\tau(n,k)} f_n^{k_u}(y)$  для  $n = N-1, \dots, 0, k = 0, \dots, n$ , где  $f_n^k = F(He^{y+\frac{\rho}{\sigma_V}V(n,k)}, V(n,k), n\Delta\tau)$ , мы, после возвращения к исходным обозначениям, получаем приближённые значения искомого функционала (2). В отличие от более простого случая модели Хестона [21], наличие скачков лишает возможности использовать явные формулы для факторов – их получить не удаётся. Получение приближённых формул для этих объектов является трудной задачей, последние успехи в которой (см. [18]) позволяют обобщение на случай семейства моделей с различным образом распределёнными скачками.

Приближённые формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} \phi_q^+(\xi) &= \exp \left[ (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-} \frac{\xi \ln(q + \psi(\eta))}{\eta(\xi - \eta)} d\eta \right]; \\ \phi_q^-(\xi) &= \exp \left[ -(2\pi i)^{-1} \int_{-\infty+i\omega_+}^{+\infty+i\omega_+} \frac{\xi \ln(q + \psi(\eta))}{\eta(\xi - \eta)} d\eta \right], \end{aligned}$$

Константы  $\omega_+$  и  $\omega_-$ , такие, что  $\omega_- < 0 < \omega_+$ , имеют здесь смысл параметров и подбираются так, чтобы сохранить сходимость соответствующих интегралов и зависят от параметров процесса Леви. Вопросы выбора констант подробнее освещается в статье [18]. Свойства этих функций позволяют получить удобное для численной реализации представление. Функция  $\phi_q^+(\xi)$  допускает аналитическое продолжение в полуплоскость  $\Im \xi > \omega_-$  и может быть представлена как:

$$\begin{aligned} \phi_q^+(\xi) &= \exp \left[ i\xi F^+(0) - \xi^2 \hat{F}^+(\xi) \right], \\ F^+(x) &= \mathbb{1}_{(-\infty, 0]}(x) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-} e^{ix\eta} \frac{\ln(q + \psi(\eta))}{\eta^2} d\eta; \\ \hat{F}^+(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} F^+(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогично,  $\phi_q^-(\xi)$  допускает аналитическое продолжение в полуплоскость  $\Im \xi < \omega_+$  и может быть представлена как:

$$\begin{aligned} \phi_q^-(\xi) &= \exp \left[ -i\xi F^-(0) - \xi^2 \hat{F}^-(\xi) \right], \\ F^-(x) &= \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(x) (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\omega_+}^{+\infty+i\omega_+} e^{ix\eta} \frac{\ln(q + \psi(\eta))}{\eta^2} d\eta; \\ \hat{F}^-(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} F^-(x) dx. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов используется алгоритм быстрого преобразования Фурье.

## 7 Выводы

Получен универсальный метод приближённого решения специального класса задач с барьерами для интегро-дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в частных производных, возникающих в финансовой математике и других приложениях. Разработанный численный метод основан на применении эффективных формул приближённой факторизации Винера-Хопфа, позволяет быстро вычислять значения функционалов вида (2) для широкого класса моделей, представимых в виде диффузионного процесса и негауссова процесса Леви, и не зависит от конкретного вида модели скачков.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-32-01390).

### Литература

1. *Cox, J. C.* A Theory of the Term Structure of Interest Rates / J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross // *Econometrica*. – 1985. – Vol. 53. – P. 385-408.
2. *Bates, D. S.* Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options / D. S. Bates // *Review of Financial Studies*. – 1996. – Vol. 9. – P. 69–107.
3. *L. Heston* A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*. 1993. – Vol. 6. – P. 327-343.
4. *Cont, R.* Financial modelling with jump processes: monograph / R. Cont, P. Tankov. – Chapman & Hall/CRC Press. 2004. – 535 p.
5. *Merton, R.* Option pricing when underlying stock returns are discontinuous / R. Merton // *J. Financ. Econ.* – 1976. – Vol. 3. – P. 125–144.
6. *Black, F.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // *Journal of Political Economy*. – 1973. – Vol. 81. – № 3. – P. 637-654.
7. *Feng, Y. Q.* CVA under Bates Model with Stochastic Default Intensity / Y. Q. Feng // *Journal of Mathematical Finance*. – 2017. – №7. – P. 682-698.
8. *Alfonsi, A.* High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and Heston models / A. Alfonsi // *Mathematics of Computation*. – 2010. – № 79. – P. 209-237.
9. *Chiarella, C.* The Evaluation of Barrier Option Prices Under Stochastic Volatility / C. Chiarella, B. Kang, G. H. Meyer // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2010. – № 64. – P. 2034-2048.
10. *Briani, D.M.* A hybrid approach for the implementation of the Heston model / D. M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette // *IMA Journal of Management Mathematics*. – 2017. – V. 28. – № 4. – P. 467-500.
11. *Itkin, A.* Pricing Derivatives Under Levy Models: book / A. Itkin – Birkhäuser. 2017. – 308 p.
12. *Chourdakis, K.* Levy processes driven by stochastic volatility / K. Chourdakis // *Asia-Pacific Finan. Markets*. – 2005. – № 12. – P. 333-352.
13. *Appolloni, E.* A robust tree method for pricing American options with CIR stochastic interest rate / E. Appolloni, L. Caramellino, A. Zanette // *IMA Journal of Management Mathematics*. – 2015. – V. 26. – № 4. – P. 377-401.
14. *Kudryavtsev, O.* Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes / O. Kudryavtsev, S. Levendorskiĭ // *Finance and Stochastics*. – 2009. – Vol. – № 4. – P. 531–562.
15. Кудрявцев, О.Е. Вычисление цен барьерных и американских опционов в моделях Леви. – *Обзорные прикл. и промышл. матем.* 2010. т.17, в.2, с.210-220.

16. *Kudryavtsev, O. Ye.* An efficient numerical method to solve a special case of integro-differential equations relating to the Levy models / O. Ye. Kudryavtsev // *Mathematical Models and Computer Simulations*, – 2011. – V. 3. – № 6. – P. 706-711.
  17. *Kudryavtsev O.* Efficient pricing of Swing options in Lévy-driven models / O. Kudryavtsev, A. Zanette // *Quantitative Finance*. – 2013. – V. 13. – № 4. – P. 627-635.
  18. *Kudryavtsev, O.* Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Lévy-driven models / O. Kudryavtsev // *J. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. – 2016. – V. 22. – № 2. – P. 711–731.
  19. *Carr, P.* Randomization and the American put, *Review of Financial Studies* / P. Carr // *Review of Financial Studies*. – 1998. – № 11. – P. 597-626.
  20. *Bouchard, B.* Maturity randomization for stochastic control problems / B. Bouchard, N. El Karoui, N. Touzi // *Annals of Applied Probability*. – 2005. – V. 15. – № 4. – P. 2575-2605.
  21. *Kudryavtsev, O.* A Wiener-Hopf factorization approach for pricing barrier options in the Heston model / Kudryavtsev O., Rodochenko V. // *Applied Mathematical Sciences*. – 2017. – V. 11. – № 2. – P. 93–100.
1. *Cox, J. C.* A Theory of the Term Structure of Interest Rates / J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross // *Econometrica*. – 1985. – Vol. 53. – P. 385-408.
  2. *Bates, D. S.* Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options / D. S. Bates // *Review of Financial Studies*. – 1996. – Vol. 9. – P. 69–107.
  3. *L. Heston* A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*. 1993. – Vol. 6. – P. 327-343.
  4. *Cont, R.* Financial modelling with jump processes: monograph / R. Cont, P. Tankov. – Chapman & Hall/CRC Press. 2004. – 535 p.
  5. *Merton, R.* Option pricing when underlying stock returns are discontinuous / R. Merton // *J. Financ. Econ.* – 1976. – Vol. 3. – P. 125–144.
  6. *Black, F.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // *Journal of Political Economy*. – 1973. – Vol. 81. – № 3. – P. 637-654.
  7. *Kudryavtsev, O.* Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Lévy-driven models / O. Kudryavtsev // *J. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. – 2016. – V. 22. – № 2. – P. 711–731.
  8. *Feng, Y. Q.* CVA under Bates Model with Stochastic Default Intensity /Y. Q. Feng // *Journal of Mathematical Finance*. – 2017. – №7. – P. 682-698.
  9. *Chiarella, C.* The Evaluation of Barrier Option Prices Under Stochastic Volatility / C. Chiarella, B. Kang, G. H. Meyer // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2010. – № 64. – P. 2034-2048.
  10. *Briani, D.M.* A hybrid approach for the implementation of the Heston model / D. M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette // *IMA Journal of Management Mathematics*. – 2017. – V. 28. – № 4. – P. 467-500.
  11. *Apolloni, E.* A robust tree method for pricing American options with CIR stochastic interest rate / E. Apolloni, L. Caramellino, A. Zanette // *IMA Journal of Management Mathematics*. – 2015. – V. 26. – № 4. – P. 377-401.
  12. *Kudryavtsev, O.* Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes / O. Kudryavtsev, S. Levendorskiĭ // *Finance and Stochastics*. – 2009. – Vol. – № 4. – P. 531–562.
  13. Кудрявцев, О.Е. Вычисление цен барьерных и американских опционов в моделях Леви.– *Обзорные прикл. и промышл. матем.* 2010. т.17, в.2, с.210-220.



14. *Kudryavtsev, O. Ye.* An efficient numerical method to solve a special case of integro-differential equations relating to the Levy models / O. Ye. Kudryavtsev // *Mathematical Models and Computer Simulations*, – 2011. –V. 3. – № 6. – P. 706-711.
15. *Kudryavtsev O.* Efficient pricing of Swing options in Lévy-driven models / O. Kudryavtsev, A. Zanette // *Quantitative Finance*. – 2013. –V. 13. – № 4. – P. 627-635.
16. *Carr, P.* Randomization and the American put, *Review of Financial Studies* / P. Carr // *Review of Financial Studies*. – 1998. – № 11. – P. 597-626.
17. *Bouchard, B.* Maturity randomization for stochastic control problems / B. Bouchard, N. El Karoui, N. Touzi // *Annals of Applied Probability*. – 2005. –V. 15. – № 4. – P. 2575-2605.
18. *Kudryavtsev, O.* A Wiener-Hopf factorization approach for pricing barrier options in the Heston model / Kudryavtsev O., Rodochenko V. // *Applied Mathematical Sciences*. – 2017. – V. 11. – № 2. – P. 93-100.

Itkin

## 8 Об авторах

1. Ф.И.О. полностью: Кудрявцев Олег Евгеньевич; 2. Ученая степень, звание (если есть): доктор физико-математических наук, доцент; 3. Должность: заведующий кафедрой информатики и информационных таможенных технологий; 4. Место работы: Ростовский филиал Российской Таможенной Академии; 5. E-mail: \*\*\*\*\*@mail.ru; 6. Контактный телефон: +7(903)-999-99-99

1. Ф.И.О. полностью: Родоченко Василий Владимирович; 2. Ученая степень, звание (если есть): нет; 3. Должность: аспирант; 4. Место работы: Южный Федеральный Университет; 5. E-mail: \*\*\*\*\*@gmail.com; 6. Контактный телефон: +7(904)-999-99-99