УДК 517.925.7

О численном методе решения семейства интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, возникающих в финансовой математике

О. Е. Кудрявцев

Ростовский Филиал РТА

В. В. Родоченко

Южный Федеральный Университет

1 Аннотация

Мы представляем новый численный метод решения семейства интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, возникающих при вычислении стоимости барьерного опциона для широкого класса популярных моделей со скачками и стохастической волатильностью, вариация в которых подчиняется процессу CIR. Мы используем подходящие замены переменных для устранения эффекта корреляции, приближаем процесс вариации на малых отрезках времени при помощи специальным образом построенной марковской цепи, а затем в каждом из узлов цепи решаем задачи вычисления цены барьерного опциона при помощи метода линий. Для решения полученных задач используется авторский метод быстрой приближённой факторизации Винера-Хопфа. Итоговый ответ получаем при помощи рекуррентной процедуры, движущейся назад во времени по дереву вариации.

2 Введение

Со времен фундаментальных работ Е.Б.Дынкина, Р.Фейнмана и М.Каца известно, что решение уравнения диффузии в определенной области может быть интерпретировано как математическое ожидание выхода из нее винеровского процесса. В дальнейших исследованиях эта взаимосвязь была распространена, в частности, негауссовы процессы Леви, траектории которых могут быть разрывными. Вычисление таких функционалов является нетривиальной задачей и связано с решением достаточно сложных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, известных как прямое и обратное уравнение Колмогорова.

С точки зрения приложений в сфере финансовой математики, разработка инструментов для решения этих уравнений позволяет решать одну из важных прикладных задач - задачу вычисления цен производных финансовых инструментов, в частности - опционов.

Рынок фьючерсных и опционных контрактов, называемый "срочным рынком"является одной из важнейших составляющих финансового рынка, поскольку его оборот может в десятки и более раз превышать объем торгов на рынке базовых активов. Причиной этого является тот факт, что производные финансовые инструменты предоставляют возможность управления финансовыми рисками.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений, записанную в форме Ито, которая описывает поведение цены базового актива (например, цены акции, фьючерса, обменного курса валют) называемую "моделью Бейтса и описанную в работе [Bates]:

$$
\begin{aligned}
&dS_t = (r-\lambda\zeta)S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t^S + (J-1)S_t dN_t, \\
&dV_t = \kappa_V(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dZ_t^V, \\
&< dZ_t^S, dZ_t^V >= \rho dt
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь переменная S_t описывает приращение цены актива, параметр $r \geq 0$ имеет смысл безрисковой процентной ставки, переменная V_t описывает вариацию. Причина, по которой первое уравнение записано в логарифмической шкале, состоит в том, что для этого случая существуют известные формулы для записи характеристической экспоненты процесса Леви, в который вырождается первое уравнение системы в случае, если вариация оказывается постоянной. Такой подход при исследовании этих уравнений является общепринятым. Процессы Z_t^S и Z_t^V - винеровские процессы, связанные коэффициентом корреляции ρ. В скачковой части, J определяет величину скачков и распределён логнормально, при этом его параметры и плотность вероятности определяются некоторой подходящей функцией $f(J)$, N_t представляет из себя пуассоновский процесс с интенсивностью λ, считающий скачки к моменту t. Процесс N_t не зависит от процессов Z_t, а также независим от J. Соотношение между ζ и J подбирается из соображения мартингальности и является таковым $\zeta = e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1$ Параметр κ определяет скорость «возврата» процесса вариации к «долговременному» среднему значению, $\sigma > 0$ называется «волатильностью» вариации.

В случае, если положить интенсивность скачков равной нулю, сохраняя динамику процесса вариации, система выродится в систему уравнений модели Хестона - одну из известных моделей со стохастической волатильностью, описанную в статье [Heston].

Если положить V_t постоянной, первое уравнение системы (1) вырождается в уравнение модели Мертона, которое представляет собой одну из наиболее известных классических моделей для описания динамики цены актива с использованием диффузии со скачками, описанную в статье [Merton]. Если положить, вместе с тем, интенсивность скачков равной нулю, модель сведётся к одной из наиболее исследованных и известных моделей финансового рынка - модели Блэка-Шоулза [B-S].

Таким образом, модель Бейтса описывает поведение цены базового актива, вариация которого подчиняется процессу CIR из соответствующего уравнения модели Хестона, имеющего скачки, которые описываются составным пуассоновским процессом с нормально распределёнными скачками. Этот процесс был введён Бейтсом для рынка опционов на курсы валют с целью описать наблюдаемый эффект "улыбки волатильности".

Описываемый метод позволяет охватить семейство моделей с различным образом распределёнными скачками, из семейства регулярных процессов Леви экспоненциального типа. Описание ограничений, накладываемых на вид процесса цены, при фиксированной вариации, можно найти в работе [Кудрявцев, Мекс.].

Под «барьерным опционом» мы будем понимать контракт, по которому выплачивается определённая сумма $G(S_T)$ в момент окончания срока действия контракта T, при условии, что в течение срока тействия контракта цена актива S_T не упадёт ниже определённого барьера H (down-and-out barrier option) или не поднимется выше определённого барьера H (up-and-out barrier option). Например, для опциона, дающего право продать базовый актив по цене K ("опцион put"), $G(S) = max0, K - S$. Для опциона, дающего право купить базовый актив по цене K ("опцион call"), $G(S) = max0, S - K$.

Вычисление риск-нейтральной цены барьерного опциона в описанной модели сводится к вычислению функционала:

$$
\begin{aligned}
&F(S,V,t) = M[e^{-r(T-t)}\infty \underline{S_T > H} G_T(S) S_0 = S, V_0 = V],\\
&\underline{S_T} = \inf\nolimits_{0\le t\le T} S_T,
\end{aligned} \tag{2}
$$

Пусть $\tau = T - t$, тогда $F(S,V,\tau)$ удовлетворяет следующему [см, например, статья 17 Фенг]) интегро-дифференциальному уравнению в частных производных с переменными коэффициентами.

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial \tau} = \tfrac{1}{2} V S^2 \tfrac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial S^2} + \rho_m \sigma V S \tfrac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial S \partial V} +\\
&\tfrac{1}{2}\sigma^2 V \tfrac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial V^2} + (r - q - \lambda(e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} - 1))\tfrac{1}{2} S \tfrac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial S} + \kappa(\theta - V)\tfrac{\partial 2F(S,V,\tau)}{\partial V} -\\
&(r - \lambda)F(S,V,\tau) + \lambda \int_0^\infty F(JS,V,\tau) f(J) dJ, S(\tau) > H\\
&F(S,V,\tau) = 0, S(\tau) \le H
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $f(J)$ - логнормальная функция плотности вероятности,

В случае опциона европейского стиля, где не рассматривается поглощающий барьер, методы, связанные с применением преобразования Фурье могут позволять получать явные формулы для модели Бейтса [Антонино, Бейтс ссылка]. Для барьерных опционов явные формулы получить не удаётся.

Такие уравнения сложны для решения и требуют значительных вычислительных ресурсов в случае численного решения.

Основными методами вычисления таких функционалов являются методы Монте-Карло и конечно-разностные схемы. Обзор такого рода методов можно найти в статьях [Antonino, Chiarella] и монографии [Кудрявцев], а также в [Carr, P., Geman, H., Madan, D.B., Yor, M.: The fine structure of asset returns: an empirical investigation. J. Bus. 75, 305–332 (2002)]

В статьях [Иткин ($https : //www.researchgate.net/profile/Andrey_Itkin/publications$)] можно найти быстрые конечно-разностные схемы для вычисления цен таких опционов.

3 Замена процесса

Эффект корреляции винеровских процессов необходимо учесть при построении процедуры оценки. Методика, которой мы воспользуемся, аналогична применяемой в [Антонино, Хестон]. Мы посроим подходящую замену для процессов, чтобы го учесть. Обозначим $\hat{\rho} = \sqrt{1-\rho^2}$, $W = Z^V$ $\rho W + \hat{\rho} Z = Z^S$, где W_t Z_t - независимые броуновские движения. В этих терминах мы получаем возможноть переписать систему (1).

Введём также замену для процесса цены базового актива, полагая $Y_t = ln(\frac{S_t}{H}) - \frac{\rho}{sigma} V_t$. Такой вид замены одновременно констатирует переход к логарифмической шкале и производит нормировку по отношению к барьеру, что является удобным с вычислительной точки зрения.

После введения обеих замен, система (1) примет вид:

$$
\begin{aligned}
&dY_t = (r - \tfrac{1}{2}V_t - /frac\rho\sigma\kappa(\theta - V_t))dt + \hat{\rho}\sqrt{V_t} dZ_t^S + dJ_t,\\
&dV_t = \kappa_V(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dZ_t^V,
\end{aligned} \tag{4}
$$

Положим $\mu_Y(V_t) = r - \frac{1}{2}V_t - \frac{\rho}{\sigma}\kappa(\theta - V_t)$ и $\mu_V(V_t) = \kappa(\theta - V_t)$. Тогда:

$$
\begin{aligned}
&dY_t = \mu_Y(V_t)dt + \hat{\rho}\sqrt{V_t} dZ_t\\
&dV_t = \mu_V(V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t,
\end{aligned} \tag{5}
$$

4 Метод линий

Для того, чтобы иметь возможность свести рассматриваемую задачу к задаче на малых интервалах времени, мы используем процедуру, известную как "рандомизация Карра впервые введённую в статье [Карр, рандомизация] и обобщённую на общий случай задач стохастического управления в статьк [Карр, обобщение]. Пусть $F_n(Y_{t_n}, V_{t_n})$ - приближение Карра цены опциона в момент времени t_n; $\Delta\tau = \frac{T}{N}$, $t_i = i\Delta\tau$, $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ – независимые экспоненциально распределённые случайные величины со средним $\Delta\tau$. Обозначим $t_{n,\tau} = t_n + \tau_n$, $Z_t^n = Y_{t_{n,\tau}} + \frac{\rho}{\sigma} V_{t_{n,\tau}}$.

Полагая $F_N = g(Y_T)$, где g - функция выплат в логарифмической шкале, получаем возможность записать:

$$F_n(Y_{t_n}, V_{t_n}) = M_{t_n}[e^{-r\Delta\tau} I_{\underline{Z^n_{\tau_n}}>0} F_{n+1}(Y_{t_n+\tau_n}, V_{t_n+\tau_n})], n = N-1, .., 0$$

5 Аппроксимация

Для того, чтобы свести указанную задачу к семейству задач, связанных с процессами Леви, мы построим, следуя [Антонино, деревья], аппроксимацию процесса CIR при помощи марковской цепи. К достоинствам используемого метода можно отнести быструю сходимость к оригинальному процессу и способность сохранять адекватность в широком диапазоне изменения параметров. В частности, условие Феллера $2\kappa\theta > \sigma^2 r$ не является существенным для корректности работы процедуры.

Разделим промежуток $[0, T]$ на N частей, $\Delta t = \frac{T}{N}$. Зафиксируем точки $t_n = n \cdot \Delta T$

Построим биномиальное дерево со склеенными вершинами по схеме:

$$V(n, k) = (\sqrt{V_0} + \frac{\sigma}{2}(2k-n)\sqrt{\Delta t})^2 \mathbb{1}_{(\sqrt{V_0}+\frac{\sigma}{2}(2k-n)\sqrt{\Delta t})>0}, n = 0, 1, ..., N, \ k = 0, 1, ..., n. \quad (6)$$

Из вершины с (n, k) мы попадём либо "вверх в вершину $(n+1, k_u)$, либо "вниз - вершину $(n+1, k_d)$, при этом k_u и k_d подбираются так, чтобы согласовать движение по дереву со сносом $\mu(V_{(n,k)})$, по следующим правилам:

$$k_u^{\Delta t}(n, k) = min\{k^* : k+1 \le k^* \le n+1, V(n, k) + \mu_V(V(n, k))\Delta t \le V(n+1, k^*)\}$$

$$k_d^{\Delta t}(n, k) = max\{k^* : 0 \le k^* \le k, V(n, k) + \mu_V(V(n, k)) \ge V(n+1, k^*)\}$$

,

Возможные случаи движения показаны на рис. 1. По оси абсцисс отложены значения t_n, точками обозначены различные $V(n, k)$.

Марковская цепь, вершинами которой являются вершины этого дерева, будет иметь следующие вероятности переходов:

$$p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)} = \frac{\mu_V(V(n, k))\Delta t + V(n, k) - V(n+1, k_d^{\Delta t}(n, k))}{V(n+1, k_u^{\Delta t}(n, k)) - V(n+1, k_d^{\Delta t}(n, k))}$$

И, кроме того,

$$p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)} := \begin{cases} 1, & p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)} > 1 \\ p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)}, & p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)} \in [0,1] \\ 0, & p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)} < 0 \end{cases}, \quad p^{\Delta t}_{k_d^{\Delta t}(n,k)} := 1 - p^{\Delta t}_{k_u^{\Delta t}(n,k)}, \quad (7)$$

lattice-eps-converted-to.pdf

Рис. 1.

6 Приближённая факторизация

Зафиксировав таким образом вариацию в каждом из узлов, мы имеем возможность рассматривать задачу (Леви, задача) с интегро-дифференциальным оператором следующего вида:

$$L_{n,k}f(y) := L_Y^{V(n,k)}f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\xi}\psi_{n,k}\hat{f}(\xi)d\xi$$

Заметим, что процесс Y_t при $V_t = V(n,k)$ имеет характеристическую экспоненту:

$$\psi(\xi) = \frac{\sigma^2_{(n,k)}}{2}\xi^2 - i\gamma_{(}n,k)\xi + \lambda(1 - e^{-\frac{\delta^2\xi^2}{2}+i\mu\xi}), \tag{8}$$

где $\sigma_{(n,k)} = \hat{\rho}\sqrt{V(n,k)}$, а $\gamma_{(}n,k) = \mu_Y + \lambda(1 - e^{\frac{\delta^2}{2}+\mu})$

Решение каждой задачи может быть теперь записано в терминах операторов ε_q^+ и ε_q^- - факторов Винера-Хопфа:

$$f_n^{k_d}(y) = (q\Delta t)^{-1}\ \varepsilon_q^- \mathbb{1}_{(-\frac{\rho}{\sigma}V(n,k),+\infty)}(y)\ \varepsilon_q^+ f_{n+1}^{k_d}(y); \tag{9}$$

$$f_n^{k_u}(y) = (q\Delta t)^{-1}\ \varepsilon_q^- \mathbb{1}_{(-\frac{\rho}{\sigma}V(n,k),+\infty)}(y)\ \varepsilon_q^+ f_{n+1}^{k_u}(y), \tag{10}$$

В отличие от более простого случая модели Хестона, наличие скачков здесь лишает возможности использовать известные явные формулы для факторов - их получить не удаётся. Получение приближённых формул для этих объектов является трудной задачей, последние успехи в которой, из [Мекс, 2016], позволяют обобщение на случай семейства моделей с различным образом распределёнными скачками.

Вид приближённых формул следующий:

$$\phi_q^+(\xi) = \exp\left[(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-}\frac{\xi\ln(q+\psi(\eta))}{\eta(\xi-\eta)}d\eta\right]; \tag{11}$$

$$\phi_q^-(\xi) = \exp\left[-(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_+}^{+\infty+i\omega_+}\frac{\xi\ln(q+\psi(\eta))}{\eta(\xi-\eta)}d\eta\right], \tag{12}$$

Константы ω_+ и ω_-, такие, что $\omega_- < 0 < \omega_+$, имеют здесь смысл параметров и подбираются так, чтобы сохранить сходимость соответствующих интегралов и зависят от параметров процесса Леви. Подробнее о выборе констант - см. статью [Кудрявцев, Мекс]. В этой же статье приведена теорема, согласно которой эти формулы допускают удобное для численной реализации представление. А именно, $\phi_q^+(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\Im\xi > \omega_-$ и может быть представлена как:

$$\phi_q^+(\xi) = \exp\left[i\xi F^+(0) - \xi^2\hat{F}^+(\xi)\right], \tag{13}$$

$$F^+(x) = \mathbf{1}_{(-\infty,\mathbf{0}]}(\mathbf{x})(\mathbf{2}\pi)^{-\mathbf{1}}\int_{-\infty+\mathbf{i}\omega_-}^{+\infty+\mathbf{i}\omega_-}\mathbf{e}^{\mathbf{ix}\eta}\frac{\ln(\mathbf{q}+\psi(\eta))}{\eta^{\mathbf{2}}}\mathbf{d}\eta; \tag{14}$$

$$\hat{F}^+(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}F^+(x)dx. \tag{15}$$

Аналогично, $\phi_q^-(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\Im\xi < \omega_+$ и может быть представлена как:

$$\phi_q^-(\xi) = \exp\left[-i\xi F^-(0) - \xi^2\hat{F}^-(\xi)\right], \tag{16}$$

$$F^-(x) = \mathbf{1}_{[\mathbf{0},+\infty)}(\mathbf{x})(\mathbf{2}\pi)^{-\mathbf{1}}\int_{-\infty+\mathbf{i}\omega_+}^{+\infty+\mathbf{i}\omega_+}\mathbf{e}^{\mathbf{ix}\eta}\frac{\ln(\mathbf{q}+\psi(\eta))}{\eta^{\mathbf{2}}}\mathbf{d}\eta; \tag{17}$$

$$\hat{F}^-(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}F^-(x)dx. \tag{18}$$

Для расчёта этих формул

7 Выводы

Получен быстрый и точный метод приближённого решения интегро-дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, сохраняющий работоспособность в широком диапазоне изменения параметров. Получен быстрый и точный метод вычисления стоимости барьерного опциона в модели Бейтса, позволяющий обобщение на семейство моделей, основанных на широком классе процессов Леви с различным образом распределёнными скачками. Численные эксперименты показывают, что результаты применяемого метода соответствуют результатам, которые можно получить с использованием метода Монте-Карло и отражают особенности поведения функции-решения вблизи поглощающего барьера. Другим преимуществом является тот факт, что использования разработанного метода позволяет за один проход получить результат для набора начальных значений S_0, что значительно ускоряет процедуры, в которых вычисление цены требуется проводить более чем в одной точке, при условии, что остальные параметры остаются неизменными.

Литература

1. M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette A hybrid tree-finite difference approach for the Heston model. 2014.

2. E. Appolloni, L. Caramellino, A. Zanette A robust tree method for pricing American options with CIR stochastic interest rate. 2013

3. L. Heston A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. Review of Financial Studies. 1993. v. 6. p. 327–343.

4. Kudryavtsev, O.E., and S.Z. Levendorskiĭ, Fast and accurate pricing of barrier options under Levy processes, *Finance and Stochastics*, 2009, v. 13, n.4, p.531-562.

5. Кудрявцев, О.Е. Вычисление цен барьерных и американских опционов в моделях Леви.– *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2010, т.17, в.2, с.210-220.

6. A. Alfonsi, High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and Heston models, Mathematics of Computation, 79 (2010), 209 - 237. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-09-02252-2

7. E. Appolloni, L. Caramellino, A. Zanette, A robust tree method for pricing American options with CIR stochastic interest rate, 2013.

8. B. Bouchard, N. El Karoui, N. Touzi, Maturity randomization for stochastic control problems, Ann. Appl. Probab., 15 (2005), no. 4, 2575 – 2605. https://doi.org/10.1214/105051605000000

9. D.M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette, A hybrid tree-finite difference approach for the Heston model, 2014.

10. P. Carr, Randomization and the American put, Review of Financial Studies, 11 (1998), 597 - 626. https://doi.org/10.1093/rfs/11.3.597

11. C. Chiarella, B. Kang, G. H. Meyer, The Evaluation of Barrier Option Prices Under Stochastic Volatility, Computers & Mathematics with Applications, 64 (2010), 2034 - 2048. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.03.103

12. L. Heston, A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, Review of Financial Studies, 6 (1993), 327 - 343. https://doi.org/10.1093

13. O. Kudryavtsev, S. Levendorski?, Fast and accurate pricing of barrier options under L?vy processes, Finance and Stochastics, 13 (2009), no. 4, 531 - 562. https://doi.org/10.1007/s00780-009-0103-2

14. O. Ye. Kudryavtsev, An efficient numerical method to solve a special cass of integro-differential equations relating to the Levy models, Mathematical Models and Computer Simulations, 3 (2011), no. 6, 706–711. https://doi.org/10.1134/s2070048211060068

15. PREMIA: An Option Pricer Project CERMICS-INRIA, available at http://www.premia.fr

8 Об авторах

1. Кудрявцев Олег Евгеньевич; 2. Доктор физико-математических наук, профессор; 3. Должность (например, Заведующий кафедры информационных таможенных технологий); 4. Ростовский филиал Российской Таможенной Академии; 5. *********@mail.ru; 6. +7(903)-999-99-99

1. Родоченко Василий Владимирович; 2. нет; 3. аспирант; 4. Южный Федеральный Университет; 5. *******************@gmail.com; 6. +7(904)-999-99-99