ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ ХЕББА

Формальні нейрони штучних нейронних мереж

При моделюванні нейронних мереж в якості штучних нейронів зазвичай використовується простий процесорний елемент, зображений на рис. 1.1. На його входи надходить вектор $X = (x_1, \ldots, x_n)$ вхідних сигналів, що є вихідними сигналами інших нейронів, а також одиничний сигнал зсуву.

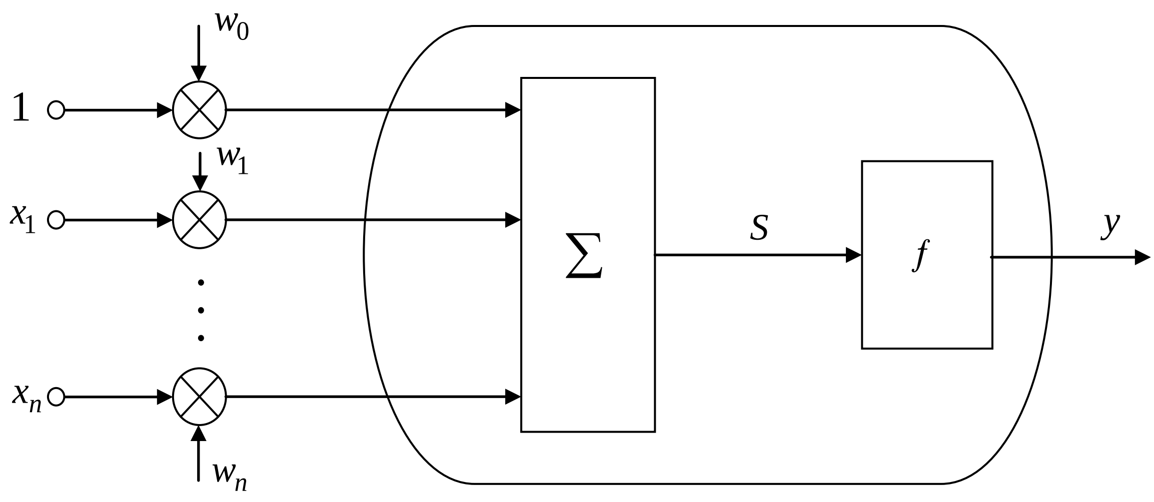

Рис. 1.1. Процесорний елемент, що використовується у звичайних нейронних мережах

Всі вхідні сигнали, включаючи й сигнал зсуву, помножуються на вагові коефіцієнти своїх зв'язків та підсумуються:

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i \, w_i \; + w_0 \,, \tag{1.1}$$

де S – сумарний вхідний сигнал; w_i $(i = \overline{1,n})$ – вагові коефіцієнти зв'язків вхідних сигналів x_1, …, x_n; w_0 – ваговий коефіцієнт зв'язку сигналу зсуву.

Отриманий сигнал S надходить на вхід блока, що реалізує функцію f активації нейрона. Типовими функціями активації є бінарна :

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S > 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad S \le 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

або біполярна

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S > 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad S \le 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Багато авторів при описуванні моделі нейрона використовують не сигнал зсуву, а поріг θ нейрона, що приводить до еквівалентної моделі елемента. У цьому випадку вирази (1.2) та (1.3) набувають відповідно такого вигляду:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S > \theta, \\ 0, & \text{якщо} \quad S \le \theta, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S > \theta, \\ -1, & \text{якщо} \quad S \le \theta, \end{cases} \tag{1.5}$$

де

$$S = \sum_{i=1}^{n} w_i \, x_i \; . \tag{1.6}$$

Графічне зображення бінарної та біполярної функцій активації для цього випадку наведено на рис. 1.2, *a* та 1.2, *b*.

Із зіставлення виразів (1.1) – (1.3) та (1.4) – (1.6) виходить, що кожному значенню порогу θ нейрона може бути поставлений у відповідність ваговий коефіцієнт w_0 зв'язку сигналу зсуву й навпаки.

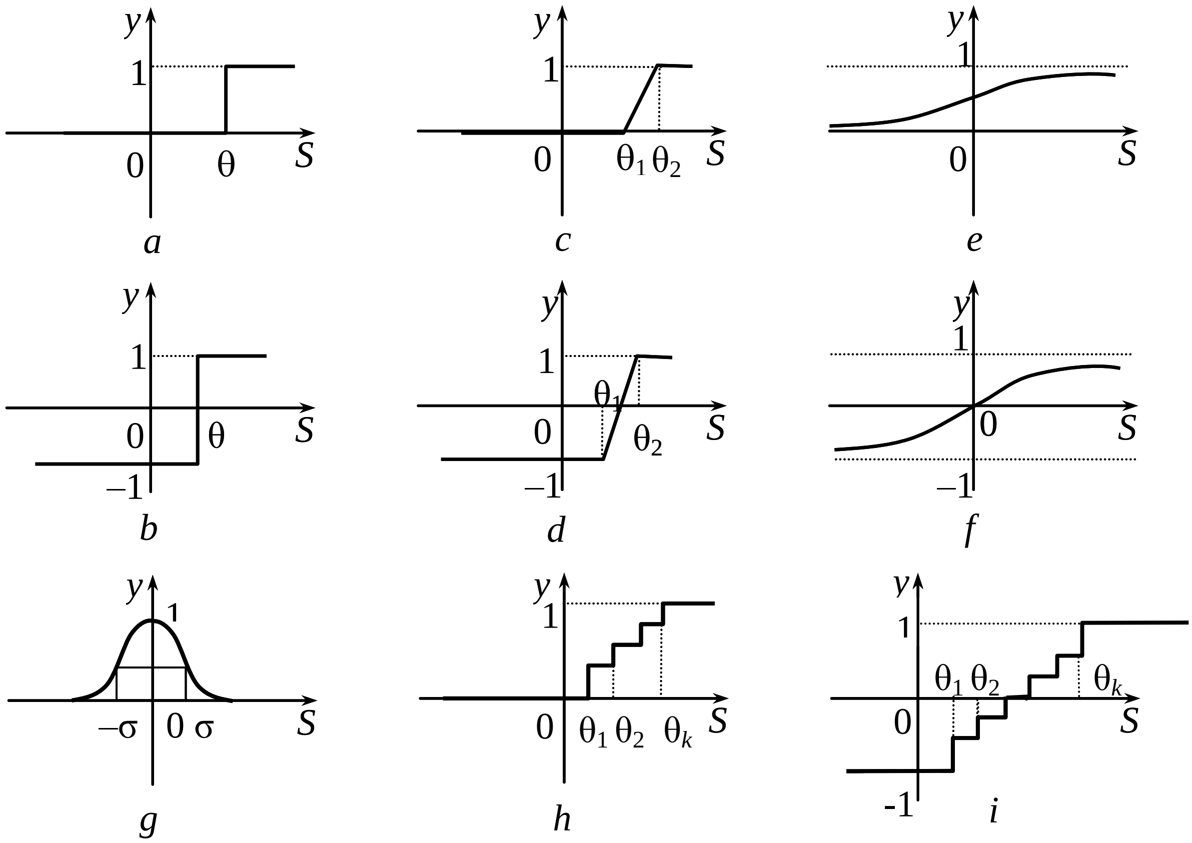

Рис. 1.2. Функції активації нейронів

Рідше використовуються лінійні бінарні або біполярні функції активації (рис. 1.2, *c* та 1.2, *d*):

$$y = \begin{cases} -a, & \text{при} \quad S < \theta_1, \\ k\,S + a_0, & \text{при} \quad \theta_1 \le S \le \theta_2, \\ 1, & \text{при} \quad S > \theta_2, \end{cases} \tag{1.7}$$

де a дорівнює нулю для бінарних вихідних сигналів нейронів й a дорівнює мінус одиниці для біполярних сигналів; k, a_0 – постійні коефіцієнти.

Крім наведених у теорії нейронних мереж, використовуються також наступні нелінійні функції активації:

бінарна сигмоїдальна або логічна сигмоїдальна (рис. 1.2, *e*):

$$y = \frac{1}{1 + e^{-\tau S}}, \tag{1.8}$$

де τ – постійний коефіцієнт;

біполярна сигмоїдальна (рис. 1.2, *f*):

$$y = \frac{2}{1 + e^{-\tau S}} - 1; \tag{1.9}$$

радіально-симетрична (рис. 1.2, *g*):

$$y = e^{-\frac{S^2}{\tau^2}}; \tag{1.10}$$

K-значна бінарна (рис. 1.2, *h*):

$$y = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad S < \theta_1, \\ 1/(K-1), \quad \text{при} \;\; \theta_1 \le S < \theta_2, \\ 2/(K-1), \quad \text{при} \;\; \theta_2 \le S < \theta_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{K-2}{K-1}, \quad \text{при} \quad \theta_{k-1} \le S < \theta_k, \\ \;\; 1, \quad \text{при} \quad S \ge \theta_k; \end{cases} \tag{1.11}$$

K-значна біполярна (рис. 1.2, *i*):

$$y = \begin{cases} -1, \quad \text{при} \quad S < \theta_1, \\ -1 + 2/(K-1), \quad \text{при} \quad \theta_1 \le S < \theta_2, \\ -1 + 4/(K-1), \quad \text{при} \quad \theta_2 \le S < \theta_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -1 + \dfrac{2(K-2)}{K-1}, \quad \text{при} \quad \theta_{k-1} \le S < \theta_k, \\ \;\; 1, \quad \text{при} \quad S \ge \theta_k. \end{cases} \tag{1.12}$$

Наведені моделі штучних нейронів ігнорують багато відомих властивостей біологічних прототипів. Наприклад, вони не враховують тимчасові затримки нейронів, ефекти частотної модуляції, локального збудження та пов'язані з ними явища підпорогової часової та просторової сумації, коли клітина збуджується не імпульсами, що одночасно прийшли, а послідовностями збудливих сигналів, що надходять через короткі проміжки часу. Не враховуються також періоди абсолютної рефрактерності, під час яких нервові клітини не можуть бути збуджені, тобто вони нібито мають нескінченно великій поріг збудження, що потім за декілька мілісекунд після проходження сигналу знижується до нормального рівня. Цей список відмінностей, який багато біологів вважають вирішальним, легко продовжити, однак штучні нейронні мережі все-таки виявляють ряд цікавих властивостей, характерних для біологічних прототипів.

1.2.2. Розв’язання задач розпізнавання на основі окремих нейронів. Правило Хебба

Штучні нейронні мережі, призначені для розв’язання різноманітних конкретних задач, можуть містити від декількох нейронів до тисяч та навіть мільйонів елементів. Однак вже окремий нейрон (рис. 1.1) з біполярною або бінарною функцією активації може бути використаний для розв’язання простих задач розпізнавання та класифікації зображень. Вибір біполярного (1, –1) або бінарного (1, 0) подання сигналів у нейромережах здійснюється виходячи із розв'язуваної задачі, й у багатьох випадках він рівноцінний. Є спектр задач, у яких бінарне кодування сигналів більш зручне, однак узагалі біполярне подання інформації більш переважне.

Оскільки вихідний сигнал у двійкового нейрона (рис. 1.1) набуває тільки двох значень, то нейрон можна використовувати для розподілу поданих зображень на два класи.

Нехай є множина M зображень, для якої відомий коректний розподіл на два класи $X^1 = \{X^{11}, X^{12}, ..., X^{1q}\}$, $X^2 = \{X^{21}, X^{22}, ..., X^{2p}\}$, $X^1 \cup X^2 = M$, $X^1 \cap X^2 = \varnothing$, і нехай першому класу X^1 відповідає вихідний сигнал $y = 1$, а класу X^2 – сигнал $y = -1$. Якщо, наприклад, подане деяке зображення $X^\alpha = (X_1^\alpha, ..., X_n^\alpha)$, $X^\alpha \in M$ і його зважена сума вхідних сигналів перевищує нульове значення

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha w_i + w_0 > 0,$$

то $y = 1$ і, отже, вхідне зображення X^α належить до класу X^1. Якщо $S \leq 0$, то $y = -1$, й подане зображення належить до другого класу.

Можливе використання окремого нейрона й для виділення з множини класів $M = \{X^1 = \{X^{11}, ..., X^{1k}\}, ..., X^i = \{X^{i1}, ..., X^{iq}\}, ..., X^p =$

$= \{X^{p1}, ..., X^{pm}\}\}$ зображень єдиного класу X^{i}. У цьому випадку припускають, що один із двох можливих вихідних сигналів нейрона (наприклад, 1) відповідає класу X^{i}, а другий – всім іншим класам. Тому, якщо вхідне зображення X^{α} приводить до появи сигналу $y = 1$, то $X^{\alpha} \in X^{i}$, якщо $y = -1$ (або $y = 0$, якщо використовується бінарне кодування), то це означає, що пред'явлене зображення не належить до виділеного класу.

Система розпізнавання на основі єдиного нейрона ділить весь простір можливих рішень на дві області за допомогою гіперплощини

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_n w_n + w_0 = 0.$$

Для двовимірних вхідних векторів границею між двома класами зображень є пряма лінія. Вхідні вектори, які розташовані вище цієї прямої, належать до одного класу, а нижче – до іншого.

Для адаптації, настроювання або навчання ваг зв'язків нейрона можна використовувати кілька методів. Розглянемо один з них, що одержав назву "правило Хебба". Хебб, досліджуючи механізми функціонування центральної нервової системи, припустив, що навчання відбувається шляхом посилення зв'язків між нейронами, активність яких збігається за часом. Хоча в біологічних системах це припущення виконується далеко не завжди та не вичерпує всіх видів навчання, однак при навчанні одношарових нейромереж з біполярними сигналами воно досить ефективне.

Відповідно до правила Хебба, якщо пред'явленому біполярному зображенню $X = (x_1, ..., x_n)$ відповідає неправильний вихідний сигнал y, то ваги w_i $(i = \overline{1,n})$ зв'язків нейрона адаптуються за формулою

$$w_i (t + 1) = w_i (t) + x_i y, \quad i = \overline{0,n}, \tag{1.13}$$

де $w_i (t)$, $w_i (t + 1)$ відповідно вага i-го зв'язку нейрона до й після адаптації; x_i $(i = \overline{1,n})$ – компоненти вхідного зображення; $x_0 \equiv 1$ – сигнал зсуву; y – вихідний сигнал нейрона.

У більш повній та строгій формі алгоритм настроювання ваг зв'язків нейрона з використанням правила Хебба має такий вигляд.

Крок 1. Задається множина $M = \{(X^{1}, t^{1}), \ldots, (X^{m}, t^{m})\}$, яка складається з пар (вхідне зображення $X^k = \left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right)$, необхідний вихідний сигнал нейрона t^k, $k = \overline{1, m}$). Ініціюються ваги зв'язків нейрона:

$$w_i = 0, \quad i = \overline{0, n}.$$

Крок 2. Для кожної пари (X^{k}, t^{k}), $k = \overline{1, m}$, поки не досягнуті умови зупину, виконуються кроки 3 – 5.

Крок 3. Ініціюється множина входів нейрона:

$$x_0 = 1, \; x_i = x_i^k, \quad i = \overline{1, n}.$$

Крок 4. Ініціюється вихідний сигнал нейрона: $y = t^{k}$.

Крок 5. Коректуються ваги зв'язків нейрона за правилом

$$w_i\,(new) = w_i\,(old) + x_i\, y, \quad i = \overline{0, n}\,.$$

Крок 6. Перевірка умов зупину. Для кожного вхідного зображення X^{k} розраховується відповідний до нього вихідний сигнал y^{k}:

$$y^k = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S^k > 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad S^k \le 0, \end{cases} \qquad k = \overline{1, m}\,,$$

де

$$S^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i \; + w_0 .$$

Якщо вектор $(y^1, \ldots, y^m)$ розрахованих вихідних сигналів дорівнює вектору $(t^1, \ldots, t^m)$ заданих сигналів нейрона, тобто кожному вхідному зображенню відповідає заданий вихідний сигнал, то обчислення припиняються (перехід до кроку 7). Якщо ж $(y^1, \ldots, y^m) \neq (t^1, \ldots, t^m)$, то здійснюється перехід до кроку 2 алгоритму.

Крок 7. Зупин.

Приклад 1.1. Нехай потрібно навчити біполярний нейрон розпізнавання зображень X^1 й X^2, наведених на рис. 1.3.

X^1

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

X^2

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

Рис. 1.3. Вхідні зображення

При цьому необхідно, щоб зображенню X^1 відповідав вихідний сигнал нейрона “+1”, а зображенню X^2 – сигнал “–1”.

Застосування алгоритму Хебба дає такі результати.

Крок 1. Задається множина

$$M = \{(X^1 = (1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1), 1),$$
$$(X^2 = (1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1), -1)\};$$

ініціюються ваги зв'язків нейрона: $w_i = 0,\ i = \overline{0, 9}$.

Крок 2. Для кожної із двох пар $(X^1,\ 1)$, $(X^2,\ -1)$ виконуються кроки 3 – 5.

Крок 3. Ініціюється множина входів нейрона для зображення першої пари: $x_0 = 1,\ x_i = x_i^1,\ i = \overline{0, 9}$.

Крок 4. Ініціюється вихідний сигнал нейрона для зображення першої пари: $y = t^1 = 1$.

Крок 5. Корегуються ваги зв'язків нейрона за правилом Хебба $w_i = w_i + x_i^1 y \quad (i = \overline{0, n})$:

$$w_0 = w_0 + x_0 y = 0 + 1 \cdot 1 = 1; \quad w_1 = w_1 + x_1^1 y = 0 + 1 \cdot 1 = 1;$$

$$w_1 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w_9 = 1; \quad w_2 = w_2 + x_2^1 y = 0 + (-1) \cdot 1 = -1;$$

$$w_2 = w_7 = w_8 = -1.$$

Крок 3. Ініціюється множина входів нейрона для зображення X^2 другої пари: $x_0 = 1,\ x_i = x_i^2,\ i = \overline{0, 9}$.

Крок 4. Ініціюється вихідний сигнал нейрона для зображення другої пари (X^2, t^2):

$$y = t^2 = -1.$$

Крок 5. Корегуються ваги зв'язків нейрона:

$$w_0 = w_0 + x_0 y = 1 + 1 \cdot (-1) = 0; \;\; w_1 = w_1 + x_1^2 y = 1 + 1 \cdot (-1) = 0;$$

$$w_1 = w_3 = w_4 = w_6 = w_9 = 0; \;\; w_2 = w_2 + x_2^2 y = -1 + 1 \cdot (-1) = -2;$$

$$w_2 = w_7 = -2; \;\; w_5 = w_5 + x_5^2 y = 1 + (-1) \cdot (-1) = 2;$$

$$w_8 = w_8 + x_8^2 y = -1 + (-1) \cdot (-1) = 0.$$

Крок 6. Перевіряються умови зупину. Розраховуються вхідні та вихідні сигнали нейрона при пред'явленні зображення X^1:

$$S^1 = \sum_{i=1}^{9} x_i^1 w_i + w_0 = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) +$$
$$+ (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 = 6,$$
$$y^1 = 1, \text{ тому що } S^1 > 0.$$

Розраховуються вхідний та вихідний сигнали нейрона при пред'явленні зображення X^2:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{9} x_i^2 w_i + w_0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) +$$
$$+ (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 = -6,$$
$$y^2 = -1, \text{ тому що } S^2 < 0.$$

Оскільки вектор (y^1, y^2) = (1, –1) дорівнює вектору (t^1, t^2), то обчислення припиняються, тому що мета досягнута – нейрон правильно розпізнає задані зображення.

Крок 7. Зупин.

Основна ідея правила (1.13) – підсилювати зв'язки, які з'єднують нейрони з однаковою за часом активністю, та послабляти зв'язки, що з'єднують елементи із різною активністю. Ця ідея може бути використана й при настроюванні нейромереж із бінарними елементами. Правило Хебба (1.13) для одношарових бінарних мереж можна записати у такому вигляді:

$$w_i\,(t+1) = w_i\,(t) + \Delta w_i\,, \tag{1.14}$$

де

$$\Delta w_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x_i y = 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x_i = 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad x_i \neq 0 \quad \text{и} \quad y = 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

Приклад 1.2. Нехай потрібно навчити бінарний нейрон розпізнавання зображень X^1 та X^2 з прикладу 1.1. При цьому зображенню X^1 нехай відповідає вихідний сигнал нейрона "+1", а зображенню X^2 – "0". Застосування правила Хебба в цьому випадку дає такі результати.

Крок 1. Задається множина

$$M = \{(X^1 = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1), 1),$$
$$(X^2 = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1), 0)\},$$

та ініціюються ваги зв'язків нейрона $w_i = 0$, $i = \overline{0, 9}$.

Крок 2. Для пар $(X^1, 1)$, $(X^2, 0)$ виконуються кроки 3 – 5.

Крок 3. Ініціюється множина входів нейрона елементами зображення X^1:

$$x_0 = 1, \quad x_i = x_i^1, \quad i = \overline{0,9}.$$

Крок 4. Ініціюється вихідний сигнал нейрона для зображення X^1:

$$y = t^1 = 1.$$

Крок 5. Корегуються ваги зв'язків нейрона за допомогою співвідношень (1.14), (1.15):

$$w_0 = w_0 + \Delta w_0 = 0 + 1 = 1; \quad w_1 = w_1 + \Delta w_1 = 0 + 1 = 1;$$

$$w_1 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w_9 = 1; \;\; w_2 = w_2 + \Delta w_2 = 0 + 0 = 0;$$

$$w_2 = w_7 = w_8 = 0.$$

Крок 3. Ініціюється множина входів нейрона елементами зображення X^2:

$$x_0 = 1,\; x_i = x_i^2,\; i = \overline{0, 9}.$$

Крок 4. Ініціюється вихідний сигнал нейрона для зображення X^2:

$$y = t^2 = 0.$$

Крок 5. Корегуються ваги зв'язків нейрона за допомогою співвідношень (1.14), (1.15):

$$w_0 = w_0 + \Delta w_0 = 1 + (-1) = 0; \;\; w_1 = w_1 + \Delta w_1 = 1 + (-1) = 0;$$

$$w_1 = w_3 = w_4 = w_6 = w_9 = 0; \;\; w_2 = w_2 + \Delta w_2 = 0 + (-1) = -1;$$

$$w_5 = w_5 + \Delta w_5 = 1 + 0 = 1; \;\; w_7 = w_2 = -1;$$

$$w_8 = w_8 + \Delta w_8 = 0 + 0 = 0.$$

Крок 6. Перевіряються умови зупину. Розраховуються вхідні та вихідні сигнали нейрона при поданні зображень X^1, X^2:

$$S^1 = \sum_{i=1}^{9} x_i^1 w_i + w_0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) +$$

$$+ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 = 1,$$

$$y^1 = 1, \text{ тому що } S^1 > 0.$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{9} x_i^2 w_i + w_0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) +$$

$$+ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -2;$$

$$y^2 = -1, \text{ тому що } S^2 < 0.$$

Оскільки вектор (y^1, y^2) = (1, 0) дорівнює заданому вектору (t^1, t^2) = (1, 0), то мета досягнута й обчислення припиняються.

Крок 7. Зупин.

1.2.3. Нейронна мережа Хебба

Використання групи з m біполярних або бінарних нейронів $A_1, ..., A_m$ (рис. 1.4) дозволяє істотно розширити можливості нейронної мережі й розпізнавати до 2^m різних зображень. Однак застосування цієї мережі для розпізнавання 2^m (або близьких до 2^m чисел) різних зображень може призводити до нерозв'язних проблем адаптації ваг зв'язків нейромережі. Тому часто рекомендують використовувати дану архітектуру для розпізнавання тільки m різних зображень, задаючи кожному з них одиничний вихід тільки на виході одного A-елемента (виходи інших при цьому повинні набувати значення “–1” для біполярних нейронів або “0” – для бінарних).

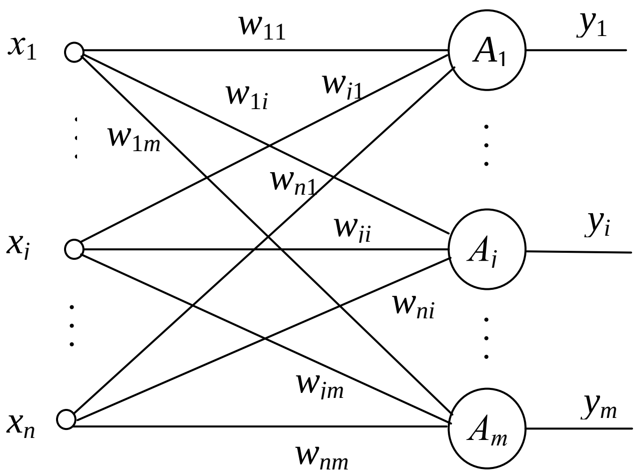

Рис 1.4. Нейронна мережа із m елементів

Одношарова нейронна мережа із двійковими нейронами, наведена на рис. 1.4, може бути навчена за допомогою алгоритму на основі правила Хебба. У цьому випадку вона називається мережею Хебба. Використання інших алгоритмів навчання цієї ж мережі призводить й до зміни назви нейронної мережі. Використання в назві мереж їхніх алгоритмів навчання характерне для теорії нейронних мереж. Для біполярного подання сигналів можливе навчання нейромережі за допомогою наступного алгоритму.

Крок 1. Задається множина $M = \{(X^1, t^1), \ldots, (X^m, t^m)\}$, що складається із пар (вхідне зображення $X^k = \left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right)$, а також необхідний вихідний сигнал нейрона t^k, $k = \overline{1, m}$). Ініціюються ваги зв'язків нейрона:

$$w_{ji} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Крок 2. Кожна пара $(X^k,\ t^k)$ перевіряється на правильність реакції нейронної мережі на вхідне зображення. Якщо отриманий вихідний вектор мережі $(y_1^k,\ \ldots,\ y_m^k)$, відрізняється від заданого $t^1 = (t_1^k,\ \ldots,\ t_m^k)$, то виконуються кроки 3 – 5.

Крок 3. Ініціюється множина входів нейронів: $x_0 = 1$, $x_j = x_{jk}$, $j = \overline{1, n}$.

Крок 4. Ініціюються вихідні сигнали нейронів: $y_i = t_i^k$, $i = \overline{0, m}$.

Крок 5. Корегуються ваги зв'язків нейронів за правилом

$$w_{ji}(new) = w_{ji}(old) + x_j y_i\,, \quad j = \overline{0, n}, \quad i = \overline{0, m}.$$

Крок 6. Перевіряються умови зупину, тобто правильності функціонування мережі при пред'явленні кожного вхідного зображення. Якщо умови не виконуються, то переходять до кроку 2 алгоритму, а якщо виконуються, то обчислення припиняється (переходять до кроку 7).

Крок 7. Зупин.

1.3. Індивідуальні завдання

3.1. Розробити структуру мережі Хебба, здатну розпізнавати чотири різні букви вашого імені або прізвища. При цьому необхідно обґрунтувати вибір: числа рецепторних нейронів (число n x-елементів мережі повинне бути в межах $12 \le n \le 30$); числа вихідних нейронів; векторів вихідних сигналів.

3.2. Розробити алгоритм та програму, що моделює мережу Хебба. При цьому в алгоритмі необхідно обов'язково передбачити можливість виникнення ситуацій з нерозв'язними проблемами адаптації ваг зв'язків нейромережі.

3.3. Навчити нейронну мережу Хебба розпізнавати чотири заданих символи.

3.4. Навести набір вхідних символів та необхідних вихідних сигналів, при яких в мережі виникає ситуація із нерозв'язною проблемою адаптації ваг зв'язків.