PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2024 - 1
Profesores: G. Angulo - C. Balbontin
R. Cuadrado - G. Pérez

Interrogación 1

Duración: 150 minutos.

Instrucciones

- **Deben rellenar sus datos en cada hoja de su prueba**.
- Deben responder cada **pregunta en hojas separadas**.
- La evaluación es **individual**.
- Está **prohibido escribir respuestas después de finalizar el tiempo de desarrollo**. Se penalizará con puntaje de la prueba a los estudiantes que no cumplan con esta regla.
- Al finalizar, cada estudiante debe **escanear su prueba y cargarla** en formato PDF a CANVAS en el buzón "Interrogación 1". El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 10 minutos después de terminar el tiempo de desarrollo de la prueba.
- **Debe entregar la prueba física antes de irse: esta es la versión que será corregida. El PDF subido a CANVAS es una copia de seguridad**.
- Está **prohibido el uso de dispositivos electrónicos** durante el desarrollo de la prueba. Solo pueden ocupar un dispositivo electrónico al momento de escanear y subir su prueba a CANVAS.
- Si un estudiante termina antes de finalizar el tiempo de desarrollo, debe avisar a algún miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.
- Favor acercarse a un miembro del equipo docente en caso de cualquier inconveniente técnico durante el escaneo de la prueba.
- Se aplicará un descuento a la nota final de la evaluación por el incumplimiento de una o más de las instrucciones anteriores.

Interrogación 1
Duración: 150 minutos.

Pregunta 1 (20 puntos)

Juanito tiene un campo frutal dividido en $k \in K$ cuadrantes en los cuales puede plantar $j \in J$ tipos de semillas en un horizonte de tiempo de T meses.

Las semillas se venden en sacos que permiten cubrir α_j cuadrantes, a un costo de c_{jt} por saco del tipo de semillas j en el mes t, con $t = 1, \dots, T$. Usted puede comprar semillas para plantarlas en otro mes si así lo desea, y no es necesario plantar los α_j cuadrantes de una sola vez.

A su vez, usted sabe que las semillas del tipo j demoran $\theta_j > 0$ meses en ser cultivadas desde que son plantadas, entregando un total de λ_j kilos de fruta j por cuadrante cosechado. Adicionalmente, usted sabe que en el mercado se puede vender en β_{jt} pesos cada kilo del fruto j durante el mes t. Naturalmente, usted no puede plantar semillas adicionales en un cuadrante en donde actualmente existen semillas en proceso de cultivo, y que los cultivos deben ser cosechados y vendidos obligatoriamente en el mismo mes que termina su período de cultivo ya que de lo contrario se pudren.

Formule un problema de programación lineal en variables mixtas con el cual pueda maximizar la cantidad de dinero que dispone al término del mes T. Para ello, considere variables binarias x_{jkt} e y_{jkt} que indican si se inicia la siembra y si existe sembrado de semillas del tipo j en el cuadrante k en el mes t, respectivamente. Considere que inicia con todos los cuadrantes disponibles para plantar, sin semillas en su stock, con un capital inicial de γ pesos, y que ningún mes puede terminar con capital negativo.

Solución:

Importante: Esta pauta esta diseñada asumiendo que el tiempo de cosecha inicia desde el mismo período en que es sembrado. Es decir, si un tipo de planta requiere 3 períodos y plantamos en el período 2, vamos a poder cosechar en el período 5.

En caso que se asuma que el inicio de cosecha inicia a partir del período siguiente, las restricciones de activación sembrado (R1), Inventario de dinero (R3) y Terminar cosecha antes de volver a cosechar (R7) tienen que ser consistente con aquel supuesto.

Variables de decisión:

- $X_{jkt} \in \{0, 1\}$: 1 si se decide iniciar el plantado de semillas j en el cuadrante k en el mes t, 0 e.o.c.
- $Y_{jkt} \in \{0, 1\}$: 1 si existe sembrado de semillas j en el cuadrante k durante el mes t, 0 e.o.c.
- I_t cantidad de dinero al término del período t.
- U_{jt} cantidad de semillas del tipo j al término del período t.
- W_{jt} cantidad de sacos de semilla tipo j a comprar en el mes t.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad I_T \\
&\quad \text{s.a.} \\
&\qquad \sum_{l=t}^{min(t+\theta_j-1,T)} Y_{jkl} \geq \theta_j X_{jkt} \quad \forall j \in J, k \in K, t \in T \quad \text{(activación sembrado)} \\
&\qquad \sum_{j \in J} Y_{jkt} \leq 1 \quad \forall k \in K, t = 1...T \quad \text{(solo 1 sembrado por cuadrante)} \\
&\qquad I_t = I_{t-1} - \sum_{j \in J} c_{jt} W_{jt} + \sum_{j \in J: t-\theta_j \geq 1} \sum_{k \in K} X_{j,k,t-\theta_j} \lambda_j \beta_{jt} \quad \forall t \in T : t \geq 2 \quad \text{(Inventario de dinero)} \\
&\qquad I_1 = \gamma - \sum_{j \in J} c_{j1} W_{j1} \qquad \text{(Condicion borde inventario dinero)} \\
&\qquad U_{jt} = U_{j,t-1} + \alpha_j W_{jt} - \sum_{k \in K} X_{jkt} \quad \forall j \in J, t = 2...T \quad \text{(Inventario semillas)} \\
&\qquad U_{j1} = \alpha_j W_{j1} - \sum_{k \in K} X_{jk1} \quad \forall j \in J \quad \text{(Condición borde semillas)} \\
&\qquad 1 - X_{jkt} \geq \sum_{l=t+1}^{min(t+\theta_j-1,T)} X_{jkl} \quad \forall j \in J, k \in K, t = 1...T-1 \quad \text{(Terminar cosecha antes de volver a cosechar)} \\
&\qquad X_{jkt}, Y_{jkt} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, k \in K, t = 1...T \\
&\qquad I_t \geq 0 \quad t = 1...T \\
&\qquad U_{jt}, W_{jt} \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \forall j \in J, t = 1...T
\end{aligned}
$$

Asignación Puntaje:

- **(3 puntos)**: Definición de variables adicionales a las entregadas en el enunciado (incluye naturaleza de variables).
- **(2 puntos)**: Función Objetivo correcta.
- **(3 puntos)**: Restricción de activación sembrado correcta.
- **(3 puntos)**: Restricción solo un sembrado por cuadrante.
- **(3 puntos)**: Restricción inventario de dinero (incluye condición borde).
- **(3 puntos)**: Restricción inventario de semillas (incluye condición borde).
- **(3 puntos)**: Restricción terminar cosecha antes de volver a cosechar.

Pregunta 2 (20 puntos)

Usted está encargado de la logística de entrega de productos de una fábrica de alimentos. Esta fábrica produce $i = 1, \ldots, n$ alimentos, donde cada unidad de alimento i tiene un volumen de v_i $[m^3]$. Usted debe satisfacer $j = 1, \ldots, m$ tiendas, donde cada una requiere d_{ij} unidades de cada alimento i. Usted dispone de $c = 1, \ldots, S$ camiones, cada uno con un volumen total de V $[m^3]$ para transportar estos alimentos. Si decide utilizar el camión c, debe pagar un costo fijo de F_c pesos y un costo variable de g_c por unidad transportada a cualquiera de las tiendas.

(a) **(6 puntos)** Escriba un modelo de programación lineal entera mixta que le permita producir y transportar estos alimentos al mínimo costo. No considere el orden en que las tiendas son visitadas.

Ahora considere que cada tienda debe ser visitada por un único camión y que cada camión debe hacer una ruta que comience en la fábrica, pase por las tiendas donde hará sus entregas y finalice en la fábrica. Se tienen las distancias entre la fábrica y las tiendas dadas por el parámetro μ_j. También se tienen las distancias entre pares de tiendas en la forma del parámetro ν_{jk} que representa la distancia entre la tienda j y la tienda k. Ningún camión puede recorrer más de L kilómetros en total.

(b) **(4 puntos)** Defina un grafo dirigido $G = (N, A)$ y un vector de distancias $l \in \mathbb{R}^A$ que representen la red de distribución. Defina claramente el conjunto de nodos $\sigma \in N$, el conjunto de arcos $a = (\sigma_1, \sigma_2) \in A$ y la distancia $l_a = l_{\sigma_1,\sigma_2}$ para cada arco $a = (\sigma_1, \sigma_2) \in A$.

(c) **(10 puntos)** Considere variables binarias π_{cj} y $x_{ca} = x_{c\sigma_1\sigma_2}$ que indican si el camión c visita la tienda j y si utiliza el arco $a = (\sigma_1, \sigma_2)$ en su ruta, respectivamente. Indique restricciones y variables adicionales que le permitan completar la formulación del problema. Para ello, adapte la formulación de flujo del problema del vendedor viajero de forma apropiada.

Solución:

(a) Variables de decisión:

- $u_{ic} \geq 0$ unidades del alimento i a llevar en el camión c
- $w_c \in \{0, 1\}$ si se usa el camión c
- $z_{icj} \geq 0$ unidades del alimento i que el camión c lleva a la tienda j

$$
\begin{aligned}
\text{Min}_{u,y,w,z} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{S} g_c u_{ic} + \sum_{c=1}^{S} F_c w_c \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} v_i u_{ic} \leq V_c w_c \quad \forall c \in \{1, ..., S\} \quad \text{(capacidad camiones)} \\
& u_{ic} = \sum_{j=1}^{m} z_{icj} \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \quad \forall c \in \{1, ..., S\} \quad \text{(conservación de alimentos en camiones)} \\
& \sum_{c=1}^{S} z_{icj} \geq d_{ij} \quad \forall j \in \{1, ..., m\} \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \quad \text{(demanda en tiendas)} \\
& u_{ic} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \quad \forall c \in \{1, ..., S\} \\
& z_{icj} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \quad \forall c \in \{1, ..., S\} \quad \forall j \in \{1, ..., m\} \\
& w_c \in \{0, 1\} \quad \forall c \in \{1, ..., S\}
\end{aligned}
$$

Asignación Puntaje:

- **(2 puntos)**: Definición correcta de variables **(1 puntos)** por variables continuas y **(1 puntos)** por variable binaria.
- **(1 puntos)**: Función Objetivo correcta.
- **(3 puntos)**: Restricciones correctas **(1 puntos)** por cada una.

(b) Consideraremos un grafo G dado por (N, A) donde N es el conjunto de nodos del grafo (la fábrica y las tiendas) y A es el conjunto de arcos del grafo (caminos que conectan la fábrica con las tiendas y las tiendas entre sí).
Tenemos que $N = \{1, ..., m\} \cup \{f\}$ (cada tienda es un nodo y la fábrica también). Además tenemos $A = \{(i, j) : i, j \in N, \ i \neq j\}$ (consideraremos un grafo completo). Los costos (distancias) de los arcos vienen dados por $l_a = l_{jk} = \nu_{jk}$ para todo $a = (j, k) \in A$ tal que $j, k \in N \setminus \{f\}$, y $l_a = l_{fj} = l_{jf} = \mu_j$ para todo $j \in N \setminus \{f\}$.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1 puntos)**: Definición correcta de conjunto de nodos N (si no incluye fábrica f como nodo, se descuenta la mitad el puntaje).
- ◇ **(1 puntos)**: Definición correcta de conjunto de arcos A.
- ◇ **(1 puntos)**: Definición correcta de costos (distancias) de arcos $a = (j, k), j, k \in N \setminus \{f\}$.
- ◇ **(1 puntos)**: Definición correcta de costos de arcos $a = (f, j), j \in N \setminus \{f\}$.

(c) Utilizando el grafo G ya definido, modelaremos el problema apoyándonos en el concepto de flujos:

Conjuntos y parámetros adicionales (auxiliares agregados para facilitar/aligerar la escritura de la formulación):

- ◇ C: conjunto de camiones ($\{1, ..., S\}$).
- ◇ J: conjunto de tiendas ($\{1, ..., m\}$).
- ◇ I: conjunto de tipos de alimentos ($\{1, ..., n\}$).
- ◇ A: conjunto de arcos del grafo con el que modelamos el problema.
- ◇ N: conjunto de nodos del grafo con el que modelamos el problema. Notar que se tiene un nodo por tienda y también un nodo para la fábrica. Al nodo de la fábrica lo denotaremos por f.
- ◇ l_a: distancia asociada al arco a del grafo.

Restricciones adicionales:

- ◇ Restricción de distancia recorrida máxima por camión:
  $\sum\limits_{a \in A} l_a x_{ca} \leq L \quad \forall c \in C$
- ◇ Restricciones que relacionan la cantidad de alimento despachado con las rutas realizadas (no se puede llevar alimento a una tienda si no se pasa por la tienda). Estas restricciones "conectan" con el modelo anteriormente formulado. Cualquiera de las siguientes alternativas cumple dicho objetivo:
  $z_{icj} \leq V_c \pi_{cj} \quad \forall c \in C, \ \forall i \in I, \ \forall j \in J$
  $\sum_{i \in I} z_{icj} \leq V_c \pi_{cj} \quad \forall c \in C, \ \forall j \in J$
- ◇ Restricciones para garantizar que cada tienda es visitada por un único camión:
  $\sum\limits_{c \in C} \pi_{ck} = 1 \quad \forall k \in N \setminus \{f\}$
- ◇ Restricciones para forzar que todo vehículo utilizado pase por la fábrica (así nos aseguramos de poder obtener un ciclo que parta y termine en la fábrica). Cualquiera de las siguientes alternativas cumple dicho objetivo:

$$\sum_{\sigma_1 \in N : \sigma_1 \neq f} x_{c,(\sigma_1,f)} = w_c \quad \forall c \in C$$
$$\sum_{\sigma_1 \in N : \sigma_1 \neq f} x_{c,(f,\sigma_1)} = w_c \quad \forall c \in C$$
$$\sum_{a \in \delta_f^-} x_{ca} = w_c \quad \forall c \in C$$
$$\sum_{a \in \delta_f^+} x_{ca} = w_c \quad \forall c \in C$$

- Restricciones de entradas a los nodos en el ciclo:
  $$\sum_{a \in \delta_k^-} x_{ca} = \pi_{ck} \quad \forall c \in C,\ \forall k \in N \setminus \{f\}$$
- Restricciones de salidas de los nodos en el ciclo:
  $$\sum_{a \in \delta_k^+} x_{ca} = \pi_{ck} \quad \forall c \in C,\ \forall k \in N \setminus \{f\}$$

Para eliminar subtours, podemos usar adaptar la formmulación *single-commodity flow* del problema del vendedor viajero:

- $\phi_{ca} \geq 0$: variable auxiliar de flujo para el camión c en el arco a.

- Restricción de conservación de flujo para el nodo que representa la fábrica (f):
  $$\sum_{a \in \delta_f^+} \phi_{ca} - \sum_{a \in \delta_f^-} \phi_{ca} = \sum_{k \in N \setminus \{f\}} \pi_{ck} \quad \forall c \in C$$

- Restricciones de conservación de flujo para el resto de los nodos:
  $$\sum_{a \in \delta_f^+} \phi_{ca} - \sum_{a \in \delta_f^-} \phi_{ca} = -\pi_{ck} \quad \forall c \in C,\ \forall k \in N \setminus \{f\}$$
- Relación entre las variables de flujo y el uso de los arcos:
  $$\phi_{ca} \leq m x_{ca} \quad \forall a \in A,\ \forall c \in C$$

Alternativamente, podemos adaptar la formulación *Miller-Tucker-Zemlin* (MTZ) del problema del vendedor viajero:

- $\phi_{cj} \geq 0$: variable auxiliar de posición de la tienda j en la ruta del camión c.

- Restricciones MTZ:
  $$\phi_{cj} - \phi_{ck} + 1 \leq m(1 - x_{ca}) \quad \forall c \in C,\ \forall a = (j,k) \in A :\ j,k \in N \setminus \{f\}$$
  $$1 \leq \phi_{cj} \leq m,\ \forall c \in C, \forall j \in N \setminus \{f\}$$

Notar que en ambos formulaciones, $(|N| - 1) = |J| = m$ es la mejor constante de tipo *Big-M* que podemos definir *a priori*.

Asignación Puntaje:

- **(1 puntos)**: Definicion de la variable adicional.
- **(1 puntos)**: Restricción de distancia recorrida máxima por camión.
- **(1 puntos)**: Restricciones que relacionan la cantidad de alimento despachado con las rutas realizadas.
- **(1 puntos)**: Restricción para garantizar que cada tienda es visitada por un único camión.

- ◇ **(2 puntos)**: Restricciones para forzar que todo vehículo utilizado pase por la fábrica.
- ◇ **(1 puntos)**: Restricciones de entrada y salida a los nodos en el ciclo.
- ◇ **(3 puntos)**: Restricciones de subtours. En la de flujos corresponde a las conservaciones de flujo (se descuenta puntaje si es que el modelo no se relaciona con (a) y (b)).

Pregunta 3 (20 puntos)

(a) **(6 puntos)**

(i) **(2 puntos)** Explique en palabras los conceptos de valor óptimo y solución óptima para un problema de maximización. Si el primero es finito, ¿existe el segundo? Justifique claramente.

Solución: El valor óptimo de un problema de maximización corresponde a la menor cota superior para la función objetivo sobre el dominio del problema. Una solución óptima es una solución factible cuyo valor objetivo coincide con el valor óptimo del problema. Un problema de maximización puede tener valor óptimo finito sin tener solución óptima, como por ejemplo $\max\{-e^x : x \in \mathbb{R}\}$, cuyo valor óptimo es 0, pero no es alcanzado por ninguna solución factible.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1 puntos)**: Explicación.
- ◇ **(1 puntos)**: Justificación de que el segundo no existe.

(ii) **(2 puntos)** Explique en palabras el concepto de conjunto convexo. ¿Todo conjunto convexo es cerrado? ¿Todo conjunto convexo es acotado? Justifique claramente.

Solución: Un conjunto es convexo si contiene todas la combinaciones convexas de cualquier par de elementos del conjunto. El intervalo $[0, 1)$ es convexo y no cerrado, mientras que $\mathbb{R}_+$ es convexo y no acotado.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1 puntos)**: Concepto.
- ◇ **(1 puntos)**: Contraejemplo.

(iii) **(2 puntos)** Explique por qué la definición de función convexa requiere que el dominio sea convexo. Indique un ejemplo de una función no convexa sobre un dominio convexo.

Solución: La definición de función convexa requiere que la función esté definida en toda combinación convexa de elementos del dominio, por lo que dicho conjunto debe ser convexo. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2$ es no convexa sobre el dominio $\mathbb{R}$. **Asignación Puntaje:**

- ◇ **(1 puntos)**: Correcta explicación.
- ◇ **(1 puntos)**: Ejemplo adecuado.

(b) **(4 puntos)** Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\max\{f(x) + g(x) : x \in D\} \leq \max\{f(x) : x \in D\} + \max\{g(x) : x \in D\}$. Puede suponer que todos los problemas tienen solución óptima.

Solución: Sean $x^*, x^f, x^g \in D$ tales que $f(x^*) + g(x^*) = \max\{f(x) + g(x) : x \in D\}$, $f(x^f) = \max\{f(x) : x \in D\}$ y $g(x^g) = \max\{g(x) : x \in D\}$. Tenemos $f(x^*) \leq f(x^f)$ y $g(x^*) \leq g(x^g)$. Luego, $f(x^*) + g(x^*) \leq f(x^f) + g(x^g)$.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(4 puntos)**: Demostración perfecta.
- ◇ **(3 puntos)**: Demostración con errores pequeños.
- ◇ **(1 puntos)** o **(2 puntos)**: Demostración con errores mayores.

(c) **(5 puntos)** Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, cerrado y no vacío, sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ tales que f es estrictamente convexa y continua en D, g es coercitiva en D y $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in D$. Demuestre que $\min\{f(x) : \ x \in D\}$ tiene solución óptima única.

Solución: Tenemos $f(x) \geq g(x) \to +\infty$ si $x \in D$ y $\|x\| \to +\infty$. Luego f es coercitiva sobre D. Como f es continua en D y D es cerrado y no vacío, por el teorema de Bolzano-Weierstrass extendido, tenemos que $\min\{f(x) : \ x \in D\}$ tiene solución óptima. Más aún, como f es estrictamente convexa, dicha solución es única.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(2 puntos)**: Demostrar que es coercitiva.
- ◇ **(1 puntos)**: Mostrar condiciones para aplicar Bolzano-Weierstrass.
- ◇ **(1 puntos)**: Aplicar Bolzano-Weierstrass.
- ◇ **(1 puntos)**: Concluir.

(d) **(5 puntos)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, y sean $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Demuestre que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(\alpha^\top x + \beta)$ es convexa. Puede serle útil notar que $\beta = \lambda\beta + (1-\lambda)\beta$.

Solución: Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$, tenemos

$$
\begin{aligned}
g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\alpha^\top[\lambda x + (1-\lambda)y] + \beta) = f(\lambda(\alpha^\top x + \beta) + (1-\lambda)(\alpha^\top y + \beta)) \\
&\leq \lambda f(\alpha^\top x + \beta) + (1-\lambda) f(\alpha^\top y + \beta) = \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y).
\end{aligned}
$$

Asignación Puntaje:

- ◇ **(5 puntos)**: Demostración perfecta.
- ◇ **(4 puntos)**: Demostración con errores pequeños.
- ◇ **(3 puntos)** o **(2 puntos)**: Demostración con errores mayores.