LogoUC.jpg

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS

ICS1113 - Optimización
1er semestre del 2024

Tarea 2 ICS1113

Pregunta 1

Simplex y programción lineal

1. En la siguiente pregunta se le solicita usar el algoritmo simplex. Cuando se le pida graficar debe incluir imágenes muy claras que incluyan explícitamente todos los puntos de interés solicitados. Puede adjuntar imágenes de gráficos hechos a mano o graficados con software (no se descontará en el bonus por LaTeX). Puede usar calculadoras de matrices como Mathematica, pero debe explicitar los pasos que realiza en su desarrollo. Considere el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{array}{rll}
\text{P)} & \multicolumn{2}{l}{\max\, x_1 + x_2} \\
\text{s.a.} & R_1) & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
 & R_2) & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & R_3) & x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & R_4) & x_1 \geq 0 \\
 & R_5) & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

a) Resuelva el problema de forma gráfica. Considere indicar todos los siguientes elementos en la gráfica y en su descripción:

1. Grafique el dominio del problema indicando cada restricción (incluidas las restricciones de no negatividad).
2. Coloque sobre el gráfico nombres VF_j a todos los vértices j del problema y tabule sus coordenadas en el formato (x_1, x_2) (para bonus, la tabla debe ser en LaTeX). Indique en la tabla qué restricciones se intersectan formando ese vértice.
3. Haga exactamente lo mismo que el punto 2 con todas las n intersecciones de restricciones que no pertenecen al dominio y llámelas VI_n. Agregue en la tabla qué restricción del problema no están cumpliendo esos puntos y qué los torna infactibles.
4. Grafique desde el origen el vector gradiente de la función objetivo.
5. Indique la solución y el valor óptimo del problema.
6. Indique qué restricción(es) se activa(n) en la solución óptima. Indique cuál(es) no se activa(n).

R_1: $x_1 + 3x_2 \leq 9 \Rightarrow x_2 \leq 3 - \frac{x_1}{3}$ (Azul)

R_2: $2x_1 + x_2 \leq 4 \Rightarrow x_2 \leq 4 - 2x_1$ (Rojo)
R_3: $x_1 + x_2 \leq 1 \Rightarrow x_2 \geq 1 - x_1$ (Verde)
R_4: $x_1 \geq 0$ (Naranja)
R_5: $x_2 \geq 0$ (Morado)
Región factible: (Celeste)

2. Coloque sobre el gráfico nombres VF_j a todos los vértices j del problema y tabule sus coordenadas en el formato (x_1, x_2) (para bonus, la tabla debe ser en LaTeX). Indique en la tabla qué restricciones se intersectan formando ese vértice.

3. Haga exactamente lo mismo que el punto 2 con todas las n intersecciones de restricciones que no pertenecen al dominio y llámelas VI_n. Agregue en la tabla qué restricción del problema no están cumpliendo esos puntos y qué los torna infactibles.

Vertice	Intersección	Coordenadas
VF_1	R_1 y R_4	$(0, 3)$
VF_2	R_1 y R_2	(0.6, 2.8)
VF_3	R_2 y R_5	$(2, 0)$
VF_4	R_3 y R_5	$(1, 0)$
VF_5	R_3 y R_4	$(0, 1)$

Cuadro 1: Vertices Factibles

Vertice	Intersección	Coordenadas
VI_1	R_2 y R_4	$(0, 4)$
VI_2	R_1 y R_5	(9, 0)
VI_3	R_2 y R_3	$(3, -2)$
VI_4	R_4 y R_5	$(0, 0)$
VI_5	R_1 y R_3	$(-3, 4)$

Cuadro 2: Vertices Infactibles

Revisando los valores que se obtienen de evaluar los vértices en la función objetivo, se tiene que el vértice factible que maximiza la función objetivo es VF_2 con un valor de 3,4.

Restricción	Estado
R_1	Activa
R_2	Activa
R_3	Inactiva
R_4	Inactiva
R_5	Inactiva

Cuadro 3: Estado de las restricciones en el valor óptimo

b) Escriba el problema en su forma estándar. Explicite cuáles son variables de holgura y cuáles son variables de exceso.

$$\begin{array}{lll} \text{P)} & \multicolumn{2}{l}{\text{mín} -x_1 - x_2} \\ \text{s.a.} & R_1) & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & R_2) & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & R_3) & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & R_4) & x_1 \geq 0 \\ & R_5) & x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{P)} & \multicolumn{2}{l}{\text{mín} -x_1 - x_2} \\ \text{s.a.} & R_1) & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ & R_2) & 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & R_3) & x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ & R_4) & x_1 \geq 0 \\ & R_5) & x_2 \geq 0 \\ & R_6) & x_3 \geq 0 \\ & R_7) & x_4 \geq 0 \\ & R_8) & x_5 \geq 0 \end{array}$$

c) Resuelva la Fase 1 de simplex aplicado a este problema. Durante cada iteración, las variables x_1 y x_2 toman determinados valores. Estos se deben mostrar como un punto en un nuevo gráfico del problema, similar al gráfico del inciso a). Debe construirse un nuevo gráfico para cada iteración simplex.

$$
\begin{array}{lll}
\text{P)} & \text{mín} & y_1 \\
\text{s.a.} & R_1) & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\
 & R_2) & 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\
 & R_3) & x_1 + x_2 - x_5 + y_1 = 1 \\
 & R_4) & x_1 \geq 0 \\
 & R_5) & x_2 \geq 0 \\
 & R_6) & x_3 \geq 0 \\
 & R_7) & x_4 \geq 0 \\
 & R_8) & x_5 \geq 0 \\
 & R_9) & y_1 \geq 0
\end{array}
$$

Sea A, $\mathbf{b}$ y $C^{\intercal}$:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^{\intercal} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Si $B = \{3, 4, 6\}$ entonces la matriz de coeficientes básicos, la matriz de coeficientes no básicos y la matriz de coeficientes básicos inversa son:

$$
A_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_n = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_b^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Luego A_b^{-1}b y $A_b^{-1} A_n X_n$ es:

$$
A_b^{-1} b = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_b^{-1} A_n X_n = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}
$$

Con $C_n^{\intercal}$ y $C_b^{\intercal}$:

$$
C_n^{\intercal} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_b^{\intercal} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Calculamos $C_b^{\intercal} A_b^{-1} A_n$:

$$
C_b^{\intercal} A_b^{-1} A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Y entonces $\bar{C}_n^{\intercal} = C_n^{\intercal} - C_b^{\intercal} A_b^{-1} A_n$ es:

$$
\bar{C}_n^{\intercal} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Ya que hay costos reducidos negativos fijamos x_1 y x_5 en 0 y buscamos incrementar x_2. Para eso calculamos taza de razón mínima de x_2

$$
\text{mín}\left\{\tfrac{9}{3}, \tfrac{4}{1}, \tfrac{1}{1}\right\} = 1
$$

Por lo tanto sale de la base y_1 y entra x_2 tal que la base nueva es $B = \{2,3,4\}$ y, A_b y A_n

$$A_b = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_b^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego A_b^{-1}b y $A_b^{-1} A_n X_n$ es:

$$A_b^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad A_b^{-1} A_n X_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Con $C_n^{\intercal}$ y $C_b^{\intercal}$:

$$C_n^{\intercal} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_b^{\intercal} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos $C_b^{\intercal} A_b^{-1} A_n$:

$$C_b^{\intercal} A_b^{-1} A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y entonces $\bar{C}_n^{\intercal} = C_n^{\intercal} - C_b^{\intercal} A_b^{-1} A_n$ es:

$$\bar{C}_n^{\intercal} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto x = (0,1,6,3,0,0) es la solución óptima, y como $y_1 = 0$ entonces se puede continuar con la Fase 2 con base factible $B = \{2,3,4\}$

d) En base al resultado de c), resuelva la Fase 2 de simplex aplicado a este problema, partiendo desde la base factible encontrada en c). Continúe el procedimiento de graficar los valores de las variables x_1 y x_2. Concluya la solución y el valor óptimo del problema original.

$$\begin{array}{rll} \text{P)} & \multicolumn{2}{l}{\text{mín} -x_1 - x_2} \\ \text{s.a.} & R_1) & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ & R_2) & 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & R_3) & x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ & R_4) & x_1 \geq 0 \\ & R_5) & x_2 \geq 0 \\ & R_6) & x_3 \geq 0 \\ & R_7) & x_4 \geq 0 \\ & R_8) & x_5 \geq 0 \end{array}$$

Con A , b y $C^{\intercal}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^{\intercal} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $B = \{2, 3, 4\}$ entonces la matriz de coeficientes básicos, la matriz de coeficientes no básicos y la matriz de coeficientes básicos inversa son:

$$A_b = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_b^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego A_b^{-1}b y $A_b^{-1} A_n X_n$ es:

$$A_b^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad A_b^{-1} A_n X_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Con $C_n^\intercal$ y $C_b^\intercal$:

$$C_n^\intercal = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_b^\intercal = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos $C_b^\intercal A_b^{-1} A_n$:

$$C_b^\intercal A_b^{-1} A_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -2 & 3 & \\ 1 & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y entonces $\bar{C}_n^\intercal = C_n^\intercal - C_b^\intercal A_b^{-1} A_n$ es:

$$\bar{C}_n^\intercal = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ya que hay costos reducidos negativos fijamos x_1 en 0 y buscamos incrementar x_5. Para eso calculamos taza de razón mínima de x_5

$$\min \left\{ \tfrac{6}{3}, \tfrac{3}{1} \right\} = 2$$

Por lo tanto sale de la base x_3 y entra x_5 tal que la base nueva es $B = \{2, 4, 5\}$ y, A_b y A_n

$$A_b = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_b^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego A_b^{-1}b y $A_b^{-1} A_n X_n$ es:

$$A_b^{-1} b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad A_b^{-1} A_n X_n = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 5/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Con $C_n^\intercal$ y $C_b^\intercal$:

$$C_n^\intercal = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_b^\intercal = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos $C_b^\intercal A_b^{-1} A_n$:

$$C_b^\intercal A_b^{-1} A_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 5/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Y entonces $\bar{C}_n^\intercal = C_n^\intercal - C_b^\intercal A_b^{-1} A_n$ es:

$$\bar{C}_n^\intercal = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Ya que hay costos reducidos negativos fijamos x_3 en 0 y buscamos incrementar x_1. Para eso calculamos taza de razón mínima de x_1

$$\text{mín}\left\{9, \tfrac{3}{5}\right\} = 2$$

Por lo tanto sale de la base x_4 y entra x_1 tal que la base nueva es $B = \{1, 2, 5\}$ y, A_b y A_n

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_b^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego A_b^{-1}b y $A_b^{-1}A_nX_n$ es:

$$A_b^{-1}b = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 14/5 \\ 12/5 \end{bmatrix} \quad A_b^{-1}A_nX_n = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Con $C_n^\intercal$ y $C_b^\intercal$:

$$C_n^\intercal = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_b^\intercal = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos $C_b^\intercal A_b^{-1}A_n$:

$$C_b^\intercal A_b^{-1}A_n = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

Y entonces $\bar{C}_n^\intercal = C_n^\intercal - C_b^\intercal A_b^{-1}A_n$ es:

$$\bar{C}_n^\intercal = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Ya que no hay costos reducidos negativos, la solución óptima es x = (3/5,14/5,0,0,12/5) y el valor óptimo es -17/5.

e) Por alguna razón, se generó cierta variación δ en el recurso (4) de la restricción R_2. Indique mediante un argumento gráfico entre qué valores puede estar δ para mantener la configuración de base óptima actual sin que haya degenerancia. Indique los valores que debe tomar delta para que haya degenerancia en la base óptima actual.

Primero notamos que la región factible sin la restricción R_2 es la siguiente:
Luego notamos que al variar δ la restricción R_2 se desplaza hacia los lados siempre intersectando con R_1 y este punto se econtrará en la región factible siempre y cuando $\delta \in (-1, 14)$.

Sin embargo como nuestra Base $B = \{1, 2, 5\}$, si $\delta = \{1, 14\}$ entonces la solución es degenerada. Por lo tanto para mantener la base óptima y que no haya degerancia $\delta \in (-1, 14)$

2. Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro en forma estándar no vacío definido por m restricciones $a_i^T x = b_i$ para $i = 1, \ldots, m$ tales que la matriz A tiene filas linealmente dependientes.

a) Explique por qué, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i a_i = a_m$.

b) Explique por qué podemos remover la restricción $a_m^T x = b_m$ sin que P se vea alterado.

c) ¿Cómo se relaciona lo anterior con el supuesto de filas linealmente independientes en el método simplex?

Conjuntos

- P) max $x_1 + x_2$

Parámetros

- C_{bn}, costo de viajar desde b hasta n.
- CL_b, tarifa de pasar la noche en el estacionamiento b.
- D_{nt}, demanda de agua en el punto n el día t.

Variables de decisión

- x_{ktbn}, una variable binaria que indica si el camíon k en el día t viaja desde b hasta n ($x_{ktbn} = 1$) o no ($x_{ktbn} = 0$).
- x_{ktnb}, una variable binaria que indica si el camíon k en el día t viaja desde n hasta b ($x_{ktnb} = 1$) o no ($x_{ktnb} = 0$).

- y_{kbt}, una variable binaria que indica si el camíon k pasa la noche en el estacionamiento b en el dia t ($y_{kbt} = 1$) o no ($y_{kbt} = 0$).
- z_{kt}, cantidad de agua transportada por el camión k en el día t.

Función Objetivo

$$\text{Minimizar} \sum_{n \in N} \sum_{b \in \Theta} \sum_{k \in \Gamma} \sum_{t \in T} C_{bn} \cdot x_{ktbn} + C_{nb} \cdot x_{ktbnb} + CL_b \cdot y_{kbt}$$

Restricciones

- $\sum_{k \in \Gamma} z_{kt} = D_{nt} \quad \forall\, t \in T,\ \forall\, n \in N$ (restricción de satisfacción de demanda diaria)
- $z_{kt} \leq W$ (Restricción de capacidad de transporte)
- $\sum_{n \in N} x_{ktbn} \leq 1$ (restricción de cantidad de viajes por día)
- $\sum_{b \in \Theta} y_{kbt} = 1$ (Restricción de capacidad de transporte)
- $\sum_{n \in N} x_{ktbn} = 1$ (Restricción de capacidad de transporte)

Naturaleza de las variables

- $C_{bn},\ CL_b,\ D_{nt},\ z_{kt} \geq 0$ son variables binarias
- $z_{ktbn},\ x_{ktnb},\ y_{ktb} \in \{0, 1\}$.

Problema 2

La empresa Rayos tiene el monopolio de generación y transmisión de energía eléctrica en el país Demo. Rayos quiere minimizar sus costos, satisfaciendo la demanda en un día típico de 24 horas. A lo largo y ancho del país, la empresa tiene instalado un conjunto N de plantas generadoras. Además, existe un conjunto M de nodos de consumo eléctrico en el país. Para cada hora $h \in H = \{1, ..., 24\}$, existe una demanda de $D_{m,h}$ MWh que debe llegar al nodo de consumo de índice $m \in M$, después de restar las pérdidas en los cables. Cada generadora $n \in N$ decide cuánta energía en MWh envía de manera constante a cada nodo durante cada hora $h \in H$, sin superar su capacidad máxima de producción por hora que es $C_{Nn,h}$. Todas las generadoras están apagadas inicialmente, sin poder producir. Sin embargo, si se decide encender la generadora $n \in N$ en la hora $h \in H$, entonces desde esa hora se podrá producir hasta el final del día costando $c_{n,h}$ pesos dicha acción. Existe un conjunto Φ que contiene todos los pares (n, m) tales que existe una conexión única por cable entre la generadora $n \in N$ y el nodo $m \in M$. Para cada conexión, existe una pérdida de la energía enviada por concepto de resistencia normal y resistencia no ohmica en los cables. Esta pérdida de energía es proporcional a la energía enviada, según un coeficiente de pérdida $R_{n,m}$, entre la generadora $n \in N$ y el nodo de consumo $m \in M$. Además, el parámetro $G_{n,m}$ (medido en $\frac{1}{\text{MWh}}$) representa un factor que debe multiplicarse por el cuadrado de la energía enviada cada hora para obtener la energía perdida en el cable por su comportamiento no ohmico. Además, esa conexión solo puede transmitir un máximo de $C_{Ln,m}$ MWh cada hora. Si $(n, m) \notin \Phi$, entonces $R_{n,m}$, $G_{n,m}$ y $C_{Ln,m}$ deben ser ignorados. El costo medio variable de generar L unidades de energía (MWh) está determinado en cada planta $n \in N$ y en cada hora $h \in H$ por una función afin decreciente: $CM_{eV}(L) = a_{n,h} - b_{n,h} \cdot L$. Se debe considerar que la unidad de medida de $a_{n,h}$ es pesos/MWh, y que la de $b_{n,h}$ es pesos por cada unidad de $pesos/(MWh)^2h$. El costo de producir, en una hora de generación, se obtiene multiplicando lo producido por el costo medio variable de producir esa cantidad.

Formule un modelo de optimización no lineal que ayude a la empresa Rayos a minimizar sus costos en total satisfaciendo la demanda de todos los nodos de consumo del país. Escriba claramente las variables de decisión, restricciones y función objetivo del modelo.

Conjuntos

- $n \in \{1, \ldots, N\}$, número de planta generadora.
- $m \in \{1, \ldots, M\}$, número de nodos de consumo electrico.
- $h \in \{1, \ldots, H\}$, número de horas del día.

Parámetros

- D_{mh}, demanda que debe llegar al nodo m en la hora h.
- CN_{nh}, capacidad máxima de produción de la planta n en la hora h.
- c_{nh}, coste de producción de la planta n por h horas.
- R_{nm}, coeficiente de perdida de energia entre la planta n y el nodo m.
- G_{nm}, parametro para calcular la energía perdida entre n y m
- CL_{nm}, capacidad máxima de transmision entre la planta n y el nodo m.
- $CMeV(L)$, función afín decreciente que define el costo medio variable de generar L unidades de energía.
- a_{nh}, coste de producción de la planta n por h horas.
- b_{nh}, coste de producción de la planta n por h horas.

Variables de decisión

- E_{nh}, energía enviada a los nodos n en la hora h.
- x_{nh}, variable binaria que indica si la planta n en la hora h está encendida $(X_{nh} = 1)$ o no $(X_{nh} = 1)$.
- E_{base}, energía básica o mínima que se debe enviar a un nodo
- y_{nh}, variable binaria que indica si la planta n fué encendida en la hora h $(X_{nh} = 1)$ o no $(X_{nh} = 1)$.

Función Objetivo

$$\text{Min} \sum_{h \in H} \sum_{n \in N} C_{nh} \cdot y_{nh} + (a_{nh} - b_{nh} \cdot E_{nh}) \cdot E_{nh}$$

Restricciones

- $\sum_{n \in N} (E_{nh} - Enh \cdot R_{nm} - E_{nm}^2 \cdot G_{nm}) = D_{mh} \quad \forall\, (n, m) \in \Phi\ \forall\, n \in H$ (Restricción satisfacción de demanda)
- $E_{nh} \leq CNnh \quad \forall\, n \in N\ \forall\, h \in H$ (Restricción de producción de energía)
- $E_{nh} \leq CLnh \quad \forall\, (n, m) \in \Phi\ \forall\, h \in H$ (Restricción de transmision de energía)
- $\sum_{n \in N} E_{nh} = Dmh \quad \forall\, (n, m) \notin \Phi\ \forall\, h \in H$ (Cables sin restrición de capacidad)

- $E_{nh} \geq x_{nh} \cdot E_{base} \quad \forall\, n \in N \;\forall\, h \in H$ (Restriccion de energía mínima)
- $x_{nh} \leq x_{n,h+1} \quad \forall\, n \in N \;\forall\, h \in [0, 24)$ (Restricción de que una vez prendida no se puede apagar)

Naturaleza de las variables

- $D_{nm},\ E_{nm},\ CN_{nh},\ C_{nh},\ CL_{nm},\ R_{nm},\ G_{nm},\ E_{base} \geq 0 \quad \forall\, n \in N \;\forall\, h \in H \;\forall\, m \in M$
- $x_{nm},\ y_{nh} \in \{0, 1\} \quad \forall\, n \in N \;\forall\, h \in H \;\forall\, m \in M$

Real_grafico_Opti.jpg

Figura 1: Gráfico

Fase_I_00.png

Figura 2: Fase 1 - Iteración 0

Fase_I_01.png

Figura 3: Fase 1 - Iteración 0

Fase_I_01.png

Figura 4: Fase 2 - Iteración 0

Fase_II_03.png

Figura 5: Fase 2 - Iteración 1

Fase_II_opti.png

Figura 6: Fase 2 - Iteración 2

Regin_Factible.png

Figura 7: Región factible sin R_2

Regin_Factible_1.png

Figura 8: Región factible $\gamma = -1$

Regin_Factible_2.png

Figura 9: Región factible $\gamma = 14$