Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2024

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Profesores	:	**Ana María Araneda L., Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O., Felipe Ossa M. y Inés Varas C.**

PAUTA INTERROGACIÓN 3

Problema 1

De acuerdo a la Policía de Investigaciones, PDI, en cuando a delitos informáticos durante el primer trimestre 2024, se registraron: 1 ataque a la integridad de un sistema informático, 42 accesos ilícitos, 2 interceptaciones ilícitas, 5 ataques a la integridad de los datos informáticos, 2 falsificaciones informáticas, 2 receptaciones de datos informáticos, 1 abuso de dispositivos, y 27 casos de otro tipo. Considere que 2024 es un año bisiesto (febrero tiene 29 días).

Asuma que los delitos informáticos, en todos sus tipos, ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que durante la realización de esta prueba, es decir, entre 17.45 y 19.30 horas, se produzca al menos un acceso ilícito?

(b) Si partir de las 17.45 horas de hoy se comienzan a registrar delitos informáticos, ¿cuál es la probabilidad que no transcurra más de un día entre el 2º y 5º delito informático?

Solución

(a) Definamos como X_t al número de accesos ilícitos en t horas.

$$X_t \sim \text{Poisson}(\nu \cdot t)$$

con $\nu = \dfrac{42}{91 \cdot 24} = 0.01923077$.

Se pide

$$P(X_{1.75} \geq 1) = 1 - P(X_{1.75} = 0) = 1 - e^{-\nu \cdot 1.75} = 0.03345534$$

(b) Definamos como Y_t al número de delitos informáticos en t días.

$$X_t \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$$

con $\lambda = \dfrac{82}{91} = 0.9010989$.

Sea Z el tiempo, en días, transcurrido entre el 2º y 5º delito informático.

$$Z \sim \text{Gamma}(k = 3,\, \lambda)$$

Se pide

$$P(Z < 1) = 1 - \sum_{x=0}^{3-1} \frac{(\lambda \cdot 1)^x \, e^{-\lambda \cdot 1}}{x!} = 0.063038$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Definir X_t como el número de accesos ilícitos en t unidades de tiempo, por ejemplo en t horas, e indicar que su distribución es Poisson$(\nu \cdot t)$. **[1.0 Ptos]**.

Logro 2: Calcular ν, en el caso que la unidad de tiempo sea hora, el valor será 0.01923077. **[1.0 Ptos]**.

Logro 3: Indicar que la probabilidad solicitada es 0.03345534. **[1.0 Ptos]**.

Logro 4: Obtener $\lambda = 0.9010989$. **[1.0 Ptos]**.

Logro 5: Indicar que $Z \sim$ Gamma$(k = 3,\, \lambda)$. **[1.0 Ptos]**.

Logro 6: Calcualr correctamente $P(Z < 1) = 0.063038$. **[1.0 Ptos]**.

+ 1 Punto Base

Problema 2

Esta semana se esperan precipitaciones en la zona centro y sur del país, afectando los tiempos de traslado. Según la última encuesta origen destino, el tiempo de traslado (en horas) entre dos puntos fijos de la Región Metropolitana (RM) sigue una distribución Exponencial, cuya media en días de lluvia, dependerá de la cantidad X de agua que haya caído en la última hora antes de iniciar el viaje, siendo en este caso igual a $(1 + X)$. Suponga que X se comporta como una variable aleatoria Gamma cuyo valor esperado es de 2 mm por hora, con un coeficiente de variación del 50 %.

Haciendo uso de la propiedad de esperanza y varianza iterada, determine el coeficiente de correlación entre el tiempo de traslado entre los dos puntos de la RM y la cantidad de agua caída en la última hora antes del inicio del viaje.

Solución

Sea X la cantidad de agua caída en la última hora antes del inicio del viaje e Y el tiempo de traslado entre los dos puntos.

$$X \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \quad \text{e} \quad Y \,|\, X = x \sim \text{Exponencial}\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Del enunciado se tiene que

$$k = 4 \quad \text{y} \quad \nu = 2.$$

Se pide

$$\text{Corr}(X,\, Y) = \frac{\text{Cov}(X,\, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\text{E}(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y}{\sigma_X \cdot \sigma_Y},$$

donde

$$\begin{aligned}
\mu_X &= 2 \\
\mu_Y &= \text{E}[\text{E}(Y \,|\, X)] = 1 + \text{E}(X) = 3 \\
\sigma_X^2 &= 1 \\
\sigma_Y^2 &= \text{E}[\text{Var}(Y \,|\, X)] + \text{Var}[\text{E}(Y \,|\, X)] = \text{E}(X^2) + 2\,\text{E}(X) + 1 + \text{Var}(X) = 11 \\
\text{E}(X \cdot Y) &= \text{E}[\text{E}(X \cdot Y \,|\, X)] = \text{E}(X^2 + X) = \text{E}(X^2) + \text{E}(X) = 7.
\end{aligned}$$

Reemplazando

$$\text{Corr}(X,\, Y) = \frac{1}{\sqrt{11}} = 0.3015113$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Obtener los valores $k = 4$ y $\nu = 2$ de la distribución Gamma. **[1.0 Ptos]**.

Logro 2: Obtener que $\mu_X = 2$ y $\sigma_X^2 = 1$. **[1.0 Ptos]**.

Logro 3: Obtener que $\mu_Y = 3$. **[1.0 Ptos]**.

Logro 4: Obtener que $\sigma_Y^2 = 11$. **[1.0 Ptos]**.

Logro 4: Obtener que $\text{E}(X \cdot Y) = 7$. **[1.0 Ptos]**.

Logro 6: Obtener que $\text{Corr}(X,\, Y) = \frac{1}{\sqrt{11}} = 0.3015113$. **[1.0 Ptos]**.

+ 1 Punto Base

Problema 3

En ingeniería estructural, es fundamental estimar correctamente las cargas que actuarán sobre una estructura para garantizar su integridad y seguridad. Consideremos una viga en un edificio que soporta cargas que provienen de dos fuentes diferentes: carga debido al peso propio del material (carga estática) y carga debido al uso del edificio (carga dinámica, como el movimiento de personas y equipos).

Suponga que la carga estática tiene valor esperado de 5000 newton(N) con desviación estándar de 300N, mientras que la carga dinámica tiene valor esperado de 2000N con desviación estándar de 500N. Si las cargas estática y dinámica se comportan según una distribución Normal Bivariada con un coeficiente de correlación ρ igual a 0.5, ¿cuál es la probabilidad que la carga dinámica sea mayor a 2700N, si se sabe que la carga estática de la viga es de 5300N?

Solución

Definamos como X a la carga estática e Y a la carga dinámica.

Del enunciado se tiene que

$$Y \,|\, X = x \sim \text{Normal}\left(\mu_Y + \frac{\rho\,\sigma_Y}{\sigma_X}\,(x - \mu_X),\, \sigma_Y\,\sqrt{(1-\rho^2)}\right) \tag{1}$$

$$Y \,|\, X = 5300 \sim \text{Normal}\left(2000 + \frac{0.5 \cdot 500}{300}\,(5300 - 5000),\, 500\,\sqrt{(1-0.5^2)}\right) \tag{2}$$

$$\sim \text{Normal}\,(2250,\, 433.0127) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Se pide

$$P(Y > 2070 \,|\, X = 5300) = 1 - \Phi\,(1.03923) \approx 1 - \Phi(1.04) = 1 - 0.8508 = 0.1492$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Indica que $Y \,|\, X$ distribuye Normal. **[1.0 Ptos]**.

Logro 2: Indicar que el valor esperado de la Normal es 2250. **[1.0 Ptos]**.

Logro 3: Indicar que la desviación estándar de la Normal es 433.0127. **[1.0 Ptos]**.

Logro 4: Identificar que la probabilidad solicitada es $P(Y > 2070 \,|\, X = 5300)$. **[1.0 Ptos]**.

Logro 5: Estandarizar correctamente $P(Y > 2070 \,|\, X = 5300) = 1 - \Phi\,(1.03923)$. **[1.0 Ptos]**.

Logro 6: Indicar que la probabilidad solicitada es aproximadamente 0.1492. **[1.0 Ptos]**.

+ 1 Punto Base