Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano (enero 2022)

Interrogación 2 - Pauta

Pregunta 1

Aplicando teorema de probabilidades totales se tiene que

$$f_X(x) = \int_0^\infty \nu\, y\, e^{-y\,(x+\nu)}\, dy = \frac{\nu}{(x+\nu)^2}, \quad x > 0 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Luego

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{\nu}{(u+\nu)^2}\, du = 1 - \left(\frac{\nu}{x+\nu}\right), \quad x > 0 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Se pide

$$P(X > 1) = 1 - F_X(1) = \frac{\nu}{\nu + 1}. \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Pregunta 2

Sea T la temperatura máxima en un día e Y la energía que se almacena.

Del enunciado se tiene que

$$Y \,|\, T = t \sim \text{Normal}\left(\mu_Y + (t - \mu_T)\cdot\frac{\sigma_Y \cdot \rho}{\sigma_T},\, \sigma_Y\,\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

Se pide

$$P(Y < 2 \,|\, T = t) = \texttt{pnorm(2, mean = } \mu_Y + (t - \mu_T)\cdot\frac{\sigma_Y \cdot \rho}{\sigma_T}\texttt{, sd = } \sigma_Y\,\sqrt{1-\rho^2}\texttt{)} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Pregunta 3

Tenemos que

$$X \sim \text{Binomial}(n,\, p) \quad \text{e} \quad Y \,|\, X = x \sim \text{Binomial}(x,\, 1-q)$$

Se pide

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{E}(X\cdot Y) - \text{E}(X)\cdot\text{E}(Y)$$

Aplicando teorema de esperanzas iteradas se tiene

$$E(Y) = (1-q)\, n\, p \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

$$\text{E}(X\cdot Y) = (1-q)\cdot\left[n\, p\,(1-p) + n^2\, p^2\right] - n\, p\cdot(1-q)\, n\, p \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Reemplazando se tiene que

$$\text{Cov}(X, Y) = n\, p\,(1-p)\,(1-q) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Pregunta 4

Tenemos que

$$F_X(x) = \int_\beta^x \frac{\alpha\,\beta^\alpha}{u^{\alpha+1}}\,du = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha, \quad x > \beta, \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

mientras que la distribución del mínimo está dada por

$$F_{Y_1}(y) = 1 - [1 - F_X(y)]^n = 1 - \left(\frac{\beta}{y}\right)^{n\,\alpha} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Se pide

$$P(Y_1 > y) = 1 - F_{Y_1}(y) = \left(\frac{\beta}{y}\right)^{n\,\alpha} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Pregunta 5

Tememos que X, Y y Z son variables aleatorias dependientes con distribución Normal(0,1).

Se pide

$$\begin{aligned}
\text{Corr(IDH, ICH)} &= \frac{\text{Cov}\left(X + \dfrac{Y}{4},\, 3\,Z + X\right)}{\sqrt{\text{Var}\left(X + \dfrac{Y}{4}\right) \cdot \text{Var}\left(3\,Z + X\right)}} \\
&= \frac{3\,\rho_{X,Z} + 1 + \dfrac{3}{4}\,\rho_{Y,Z} + \dfrac{1}{4}\rho_{X,Y}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{2}\,\rho_{X,Y} + \dfrac{1}{16}\right) \cdot (9 + 6\,\rho_{X,Z} + 1)}} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Nota: Si el alumno responde correctamente la covarianza en vez de la correlación, asignar [0.5 Ptos.].

Pregunta 6

Tenemos que

$$Z = \frac{X}{X+Y} \approx \frac{\mu_X}{\mu_X + \mu_Y} + (X - \mu_X) \cdot \left[\frac{\mu_Y}{(\mu_X + \mu_Y)^2}\right] + (Y - \mu_Y) \cdot \left[-\frac{\mu_X}{(\mu_X + \mu_Y)^2}\right]$$

Como $\mu_X = \mu_Y = \sigma_X = \sigma_Y = \dfrac{1}{\nu}$ se tiene que:

$$\textbf{[0.4 Ptos.]} \quad \mu_Z \approx \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sigma_Z^2 \approx \frac{1}{8} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

$$\delta_Z \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Pregunta 7

Igualando los 1ros dos momentos teóricos a los empíricos se tiene que

$$\mu = \overline{X} \quad \text{y} \quad \frac{\mu^3}{\sigma} + \mu^2 = \overline{X^2}$$

Despejando

$$\hat{\mu} = \overline{X} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma} = \frac{(\overline{X})^3}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Pregunta 8

Tenemos que

$$L(\alpha) = (1-\alpha)^{2\,n_1} \cdot [2\,\alpha \cdot (1-\alpha)]^{n_2} \cdot \alpha^{2\,(n-n_1-n_2)} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Aplicando logaritmo natural, derivando parcialmente con respecto a α e igualando a cero se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial\,\alpha} \ln L = \frac{2\,n_1}{(1-\alpha)} \cdot (-1) + \frac{n_2}{2\,\alpha \cdot (1-\alpha)} \cdot (2 - 4\,\alpha) + \frac{2\,(n - n_1 - n_2)}{\alpha} = 0 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n - n_1 - n_2/2}{n} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Pregunta 9

El EMV de ζ^2 es $\hat{\zeta}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln(X_i) - \lambda)^2$.

Como $\ln(X_i)$ distribuyen Normal(λ, ζ), entonces $\frac{n\,\hat{\zeta}^2}{\zeta^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\ln(X_i) - \lambda}{\zeta}\right)^2 \sim \chi^2(n)$. **[0.5 Ptos.]**

Se pide

$$P\left(\hat{\zeta} > (1 + p/100) \cdot \zeta\right) = P\left(\frac{n\,\hat{\zeta}^2}{\zeta^2} > (1 + p/100)^2 \cdot n\right) = \texttt{1 - pchisq((1+}p\texttt{/100)}^2\cdot n\texttt{, df = }n\texttt{)} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Pregunta 10

Sean $X_1, \ldots X_n$ una muestra aleatorias Bernoulli(p), con p la proporción de jóvenes vacunados.

Se pide contrastar las siguientes hipótesis

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_a : p < p_0$$

con $p_0 = 2/3$ y $n = 124$.

Estadístico de prueba:

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} = \texttt{-1.841502} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Valor-p:

$$\texttt{p.value = pnorm(}Z_0\texttt{) = 0.03277403} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Respuesta: NO **[0.2 Ptos.]**

Pregunta 11

Sean $X_1, \ldots X_n$ una muestra aleatoria Normal correspondiente a los días de demora.

Se pide contrastar las siguientes hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu > \mu_0$$

con $\mu_0 = 14$ y $n = 73$.

Estadístico de prueba:

$$T_0 = \frac{16 - \mu_0}{7/\sqrt{n}} = \texttt{2.441144} \sim \text{t-Student}(n-1) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Valor-p:

$$\texttt{p.value = 1 - pt(}T_0\texttt{, df = 73-1) = 0.008550243} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Respuesta: SI **[0.2 Ptos.]**

Pregunta 12

Se pide

$$n = \frac{124}{73} \cdot \left(\frac{\texttt{qnorm(0.975)} \cdot 7}{1} \right)^2 = 319.7357 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Nota: Si no aplica el factor para obtener el tamaño muestral de jóvenes, asignar a lo más [0.6 Ptos.].