Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2023

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O., Felipe Ossa M. y Alejandro Sepulveda P.**

PAUTA INTERROGACIÓN 3

Pregunta 1

La energía eólica es importante porque es una fuente de energía limpia y renovable que ayuda a reducir las emisiones de gases de efecto invernadero y el cambio climático. Cuando se instalan aerogeneradores, es esencial conocer la potencia disponible en el viento, la cual se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$Z = \frac{1}{2} \cdot X \cdot A \cdot Y^2,$$

donde Z es la potencia, X es la densidad del aire (que dependen de las condiciones atmosféricas) en `kg/m3`, A es el área barrida en `m2` por las palas del aerogenerador e Y es la velocidad del viento en `m/s`.

En un estudio realizado en una ubicación específica, se tomaron mediciones de la velocidad del viento y la densidad del aire. Estas mediciones se resumen en una tabla que muestra la media y el coeficiente de variación de cada variable.

```
          X     Y
mean   1.23 99.53
c.o.v. 0.34  0.41
```

Bajo el supuesto de que las mediciones son independientes y siguen una distribución Log-Normal, se desea determinar el coeficiente de variación de la potencia cuando el área de barrido es de 47 m2.

Solución

Logro 1: Indicar que $Z \sim$ Log-Normal(λ, ζ) por ser un producto de dos variables aleatorias Log-Normal, que además son multiplicadas por $\frac{A}{2} > 0$. **[1.0 Puntos]**

Logro 2: Obtener ζ_X:

$$\zeta_X = \sqrt{\ln(1 + 0.34^2)} = 0.3307452 \quad \textbf{[1.0 Puntos]}$$

Logro 3: Obtener ζ_Y:

$$\zeta_Y = \sqrt{\ln(1 + 0.41^2)} = 0.3941808 \quad \textbf{[1.0 Puntos]}$$

Logro 4: Deducir que δ_Z solo requiere obtener ζ, ya que $\delta_Z = \sqrt{e^{\zeta^2} - 1}$. **[1.0 Puntos]**

Logro 5: Obtener $\zeta = \sqrt{\zeta_X^2 + 4 \cdot \zeta_Y^2} = 0.8549306$. **[1.0 Puntos]**

Logro 6: Calcular $\delta_Z = 1.037768$. **[1.0 Puntos]**

+ 1 Punto Base

Nota: Si el alumno calcula $\lambda = \ln(A/2) + \lambda_X + 2\,\lambda_Y$, donde $\lambda_X = \ln(1.23) - 0.5 \cdot \zeta_X^2$ y $\lambda_Y = \ln(99.53) - 0.5 \cdot \zeta_Y^2$, y luego indica que $\delta_Z = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X}$, asignar el puntaje del Logro 4.

Pregunta 2

Durante el último mes, el Servicio de Impuestos Internos (SII) ha estado examinando las solicitudes de devolución presentadas por los contribuyentes. Al analizar los promedios diarios de los montos entre las solicitudes rechazadas, se ha observado un patrón que depende de los promedios diarios, x, de los montos entre las solicitudes aprobadas, siendo una distribución Gamma$(1\,, 1/x)$ un buen ajuste para este caso. Si los promedios diarios de los montos entre las solicitudes aprobadas siguen una distribución Weibull$(\eta,\, 2)$, calcule el coeficiente de correlación entre ambos promedios diarios.

Solución

Logro 1: Tenemos que

$$\textbf{[0.5 Puntos]} \quad X \sim \text{Weibull}(\eta,\, 2) \quad \text{e} \quad Y \,|\, X = x \sim \text{Gamma}(1,\, 1/x). \quad \textbf{[0.5 Puntos]}$$

Del formulario se tiene que:

Logro 2:

$$\textbf{[0.5 Puntos]} \quad \text{E}(X) = \frac{\eta \cdot \sqrt{\pi}}{2} \quad \text{y} \quad \text{E}(X^2) = \eta^2 \to \text{Var}(X) = \frac{\eta^2}{4}\,(4 - \pi) \quad \textbf{[0.5 Puntos]}$$

Aplicando teoremas de esperanzas iteradas:

Logro 3:

$$\text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y \,|\, X)] = \text{E}(X) = \frac{\eta \cdot \sqrt{\pi}}{2} \quad \textbf{[1.0 Puntos]}$$

Logro 4:

$$\text{Var}(Y) = \text{E}[\text{Var}(Y \,|\, X)] + \text{Var}[\text{E}(Y \,|\, X)] = \text{E}(X^2) + \text{Var}(X) = \frac{\eta^2}{4}\,(8 - \pi) \quad \textbf{[1.0 Puntos]}$$

Logro 5:

$$\text{E}(X \cdot Y) = \text{E}[\text{E}(X \cdot Y \,|\, X)] = \text{E}(X^2) = \eta^2 \quad \textbf{[1.0 Puntos]}$$

Logro 6: Se pide

$$\rho = \frac{\text{E}(X \cdot Y) - \text{E}(X) \cdot \text{E}(Y)}{\sqrt{\text{Var(X)} \cdot \text{Var}(Y)}} = \sqrt{\frac{4 - \pi}{8 - \pi}} = 0.4203391 \quad \textbf{[1.0 Puntos]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

En inferencia estadística en muchas ocasiones se asume que una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ corresponde a una secuencia de variables aleatorias independientes con distribución Normal(μ, σ) y es de mucho interés determinar el comportamiento probabilístico de

$$C = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2.$$

(a) **[3.0 Ptos.]** Determine justificadamente la distribución de probabilidad exacta de C.

(b) **[2.0 Ptos.]** Proponga justificadamente una distribución aproximada para C.

(c) **[1.0 Ptos.]** Basado en el resultado obtenido en (b), calcule $P(C > 30)$ cuando el tamaño de la muestra es igual a 36.

Solución

(a) **Logro 1**: Tenemos que

$$\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right) \sim \text{Normal}(0, 1) \quad \textbf{[1.0 Puntos]}$$

Logro 2: Luego,

$$\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad \textbf{[1.0 Puntos]}$$

Logro 3: Por lo tanto

$$C = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad \textbf{[1.0 Puntos]}$$

(b) **Logro 4**: Definamos $Y = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2 \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ **[0.5 Puntos]**, lo que implica que

$$\textbf{[0.25 Puntos]} \quad \mu_Y = 1 \quad \text{y} \quad \sigma_Y = 2. \quad \textbf{[0.25 Puntos]}$$

Logro 5: Por Teorema central del limite se tiene que

$$C = \sum_{i=1}^{n} Y_i \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(n \cdot \mu_Y, \sqrt{n} \cdot \sigma_Y \right) \quad \textbf{[0.5 Puntos]}$$

$$\overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(n, \sqrt{2\,n} \right) \quad \textbf{[0.5 Puntos]}$$

(c) **Logro 6**: Para $n = 36$ se tiene que

$$C \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(36, 6 \cdot \sqrt{2}). \quad \textbf{[0.5 Puntos]}$$

Se pide

$$P(C > 30) = 1 - \Phi\left(\frac{30 - 36}{6 \cdot \sqrt{2}} \right) = 1 - \Phi(-0.7071068) \approx \Phi(0.71) = 0.7611 \quad \textbf{[0.5 Puntos]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 4

El Centro Sismológico Nacional es una institución chilena dedicada al estudio de los sismos. Su objetivo principal es proporcionar información sísmica a la Oficina Nacional de Emergencia del Ministerio del Interior (ONEMI) y al Servicio Hidrográfico y Oceanográfico de la Armada de Chile (SHOA). Diariamente, se encarga de registrar la cantidad de sismos ocurridos en nuestro país. Según estudios estadísticos basados en datos históricos, se ha determinado que el número de sismos diarios sigue una distribución de Poisson, con un promedio de 12 sismos al día.

(a) **[3.0 Ptos.]** A partir de este momento, ¿cuál es la probabilidad de que el tercer sismo ocurra después de 6 horas?

(b) **[3.0 Ptos.]** Si la magnitud de un sismo, en escala Richter, distribuye Exponencial con una mediana igual a 3º Richter, ¿cuántas horas se esperan que transcurran entre 3 sismos sobre 4º Richter?

Solución

(a) **Logro 1**: Definamos X_t como el número de sismos que a partir de este momento ocurren en t horas.

[1.0 Puntos]

Logro 2: Del enunciado se tiene que:

$$X_t \sim \text{Poisson}(0.5 \cdot t). \quad \textbf{[1.0 Puntos]}$$

Logro 3:Se pide

$$\textbf{[0.5 Puntos]} \quad P(X_6 \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{(0.5 \cdot 6)^x \, e^{-0.5 \cdot 6}}{x!} = 0.4231901 \quad \textbf{[0.5 Puntos]}$$

Nota: Alternativamente se puede definir T_3 al tiempo transcurrido desde este momento hasta la ocurrencia del 3er sismo, el cual distribuye Gamma$(3,\, 0.5)$.

En esta caso se pide

$$P(T_3 > 6) = 1 - F_{T_3}(6) = 1 - \left[1 - \sum_{x=0}^{3-1} \frac{(0.5 \cdot 6)^x \, e^{-0.5 \cdot 6}}{x!}\right] = 0.4231901$$

Asignar puntaje según logro.

(b) **Logro 4**: Definamos como Y a la magnitud de un sismo cualquiera y del enunciado se tiene que

$$Y \sim \text{Exponencial}(\lambda), \quad \textbf{[0.5 Puntos]}$$

con $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{3} = 0.2310491.$ **[0.5 Puntos]**

Logro 5: Sea $p = P(Y > 4)$. Esto implica que $p = e^{-\lambda \cdot 4} = 0.3968503.$ **[1.0 Puntos]**

Logro 6: Sea Z_t el número de sismos sobre 4 grados Richter en t horas, el cual distribuye Poisson$(\nu \cdot p \cdot t)$.

[0.5 Puntos]

Definamos ahora como W al tiempo transcurrido entre 3 sismos sobre 4 grados Richter, que corresponde a la suma de dos tiempos Exponenciales con parámetro $\nu \cdot p$, entonces el tiempo esperado corresponde al de una variable aleatoria Gamma$(2,\, \nu \cdot p)$, es decir,

$$\text{E}(W) = \frac{2}{\nu \cdot p} = 10.07937 \text{ horas.} \quad \textbf{[0.5 Puntos]}$$

+ 1 Punto Base