PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística
EYP1113 – Probabilidades y Estadística
Segundo semestre 2024

Ayudantes: Michael Ramón: maramon@uc.cl
Juan Merino: jcamilo.merino@uc.cl
Diego Pérez: dtperez1@uc.cl
Christoph Bürger: christoph.buerger@uc.cl
Oscar Guerrero: oscar.guerrero@uc.cl

Ayudantía 03

Independencia, Probabilidades totales, Probabilidad condicional

Problema 1 *Independencia*

Si usted ha decidido ir de vacaciones y al revisar la pagina del Ministerio de Salud se entera de los siguiente:

¿Cuál es la probabilidad que un adulto que decide salir de vacaciones, deba pedir permiso? Asuma que la probabilidad que una comuna se encuentre en cualquiera de estos pasos es $1/5$ y esta es independiente al paso en que se encuentren el resto de las comunas.

Solución:

Definamos A_i el paso en que se encuentra la comuna de origen, con $i = 1, 2, ..., 5$, y B_j el paso en que se encuentra la comuna de destino, $j = 1, 2, ..., 5$.

El evento D: Pedir permiso, solo ocurre:

$$D = (A_2 \cap B_3) \cup (A_2 \cap B_4) \cup (A_2 \cap B_5) \cup (A_3 \cap B2) \cup (A_4 \cap B_2) \cup (A_5 \cap B_2)$$

Por axioma 3 e independencia se tiene que

$$P(D) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{25} = 0,24$$

Problema 2 *Probabilidades totales*

Suponga que al 15 de enero, en Chile se ha inoculado con la primera dosis al personal medico con vacunas contra el Covid19 de dos orígenes: Pfizer (Bélgica) y AstraZeneca (Inglaterra), 75 % y 25 % respectivamente.

En un centro de salud, el profesional a cargo del proceso de vacunación, reciben 6 frascos de AstraZeneca y 3 frascos de Pfizer, a los cuales les quita la etiqueta (es decir, ya no se sabe cuál es cuál). Si estos 9 frascos son utilizados para la aplicación de la segunda dosis. Determine la probabilidad que, sin consultar que tipo de dosis recibio inicialmente, a un profesional medico le apliquen correctamente la 2da dosis.

Solución:

Definamos los siguientes eventos:

A: 1ra dosis Pfizer
B: 2da dosis Pfizer
C: 2da dosis correcta

Se pide:

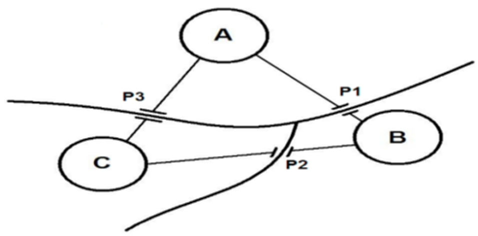
$$P(C) = P[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})]$$

Por teorema de probabilidades totales se tiene que

$$P(C) = P(B|A)P(A) + P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A}) = \frac{3}{9} \cdot 0{,}75 + \frac{6}{9} \cdot 0{,}25 = 0{,}4166667$$

Problema 3 *Probabilidad Condicional*

Tres ciudades A, B y C están separadas por dos ríos. Las ciudades están conectadas con tres carreteras como muestra la figura, cada cual con un puente. Un temporal puede destruir un puente con probabilidad p. La destrucción de puentes ocurre de manera mutuamente independiente.



a) ¿Cuál es la probabilidad que después de un temporal no haya paso de A a B?

b) ¿Cuál es la probabilidad que después de un temporal no haya paso de A a B dado que exactamente dos puentes fueron destruidos?

Solución:

a) Consideremos los siguientes eventos:

D_i = i-ésimo puente queda destruido
H = no hay paso entre A y B

El evento H se puede escribir como

$$H = D_1 \cap (D_2 \cup D_3) = (D_1 \cap D_2) \cup (D_1 \cap D_3)$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} P(H) &= P([D_1 \cap D_2] \cup [D_1 \cap D_3]) \\ &= P(D_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap D_3) - P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) \\ &= P(D_1)P(D_2) + P(D_1)P(D_3) - P(D_1)P(D_2)P(D_3) \\ &= (p \cdot p) + (p \cdot p) - (p \cdot p \cdot p) \\ &= 2p^2 - p^3 \\ &= p^2(2 - p) \end{aligned}$$

b) Sea el evento

J = dos puentes están destruidos

Se pide $P(H|J)$, luego por definición de probabilidad condicional tenemos

$$P(H|J) = \frac{P(H \cap J)}{P(J)}$$

Donde el evento $(H \cap J) = (D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}) \cup (D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3)$, por lo tanto su probabilidad es

$$\begin{aligned}
P(H \cap J) &= P((D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}) \cup (D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3)) \\
&= P(D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}) + P(D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3) \\
&= P(D_1)P(D_2)P(\overline{D_3}) + P(D_1)P(\overline{D_2})P(D_3) \\
&= p \cdot p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) \cdot p \\
&= 2p^2(1-p)
\end{aligned}$$

Y el evento J es igual al evento $(D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}) \cup (D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3) \cup (\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3)$, siendo su probabilidad

$$\begin{aligned}
P(J) &= P((D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}) \cup (D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3) \cup (\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3)) \\
&= P(D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}) + P(D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3) \\
&= P(D_1)P(D_2)P(\overline{D_3}) + P(D_1)P(\overline{D_2})P(D_3) + P(\overline{D_1})P(D_2)P(D_3) \\
&= p \cdot p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) \cdot p + (1-p) \cdot p \cdot p \\
&= 3p^2(1-p)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(H|J) = \frac{2p^2(1-p)}{3p^2(1-p)} = \frac{2}{3}$$

Problema 4 *Probabilidades totales - Diagrama de arbol*

Como es sabido, el 2012 entró en vigencia la llamada Ley Tolerancia cero-Alcohol que modificó los niveles de alcohol en la sangre permitidos a conductores. De manera de fiscalizar que éstos se respeten, la autoridad está utilizando un alcotest que es capaz de detectar al 95 % de los conductores que han bebido alcohol por sobre los niveles permitidos (0,3 gr/l). Sin embargo el test también indica positivo en un 10 % de las personas cuyo nivel de alcohol se encuentra bajo estos niveles.

En caso de que el alcotest resulte positivo, la persona es invitada a la ambulancia donde se le realiza un segundo test que detecta el 99 % de los conductores bajo los efectos del alcohol. Sin embargo, este también marca positivo a un 5 % de conductores cuyo nivel de alcohol esta bajo los permitidos. Revisando estadísticas globales, el 2012 aún existía un 30 % de conductores que beben por sobre los niveles permitidos. Las autoridades aplican multa sólo a quienes den positivo en el test realizado en la ambulancia (segundo alcotest). Usted, consciente de esta nueva ley, decidió divertirse el fin de semana y concurrió a un centro de entretención ubicado en la carretera, sin auto, con la idea de volverse en taxi. Sin embargo, después de media hora intentando conseguir un taxi, usted decide viajar con un conocido, que se ofrece a llevarlo. Usted acepta pero, a poco andar, son detenidos por la autoridad para realizar un control al conductor.

a) ¿Cuál es la probabilidad que su amigo sea multado?

b) Si, una vez en la carretera antes de ser controlado su amigo le confió que había consumido un par de cervezas, ¿cuál es la probabilidad de no ser multado?

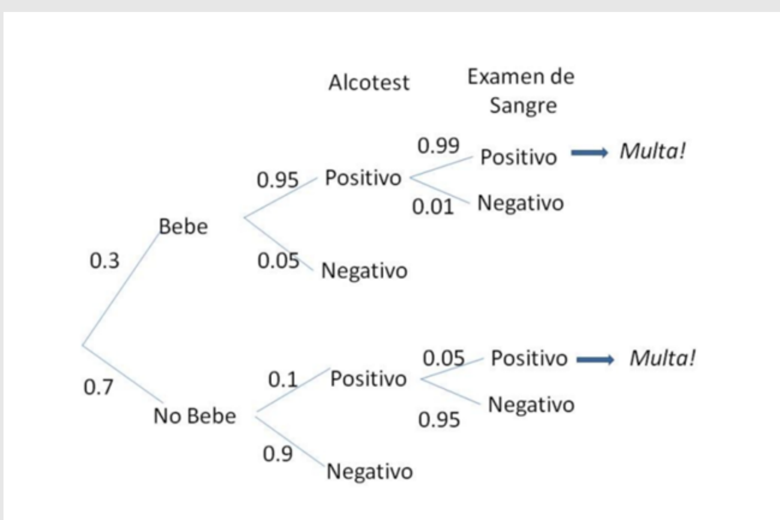
Solución:

Sean

B = conductor bebido y $\overline{B}$ = conductor no bebido
A = alcotest positivo y $\overline{A}$ = alcotest negativo
S = test de sangre positivo y $\overline{S}$ = test de sangre negativo
M = el conductor es multado y $\overline{M}$ = el conductor no es multado

De los datos se tiene:

Alternativa 1



a) $P(M) = 0{,}99 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}3 + 0{,}05 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}7 = 0{,}28565$

b) Mirando la parte alta del árbol se tiene

$$P(\overline{M}|B) = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}3 + 0{,}05 \cdot 0{,}3}{0{,}3} = 0{,}0595$$

Alternativa 2

$$P(B) = 0{,}3$$

$$P(A|B) = 0{,}95 \quad y \quad P(A|\overline{B}) = 0{,}1 \to P(\overline{A}|B) = 0{,}05 \quad y \quad P(\overline{A}|\overline{B}) = 0{,}9$$

$$P(S|A \cap B) = 0{,}99 \quad y \quad P(S|A \cap \overline{B}) = 0{,}05 \to P(\overline{S}|A \cap B) = 0{,}01 \quad y \quad P(\overline{S}|A \cap \overline{B}) = 0{,}95$$

Nótese que el conductor es multado si y solo si el test de sangre arroja positivo, por lo tanto,

a)

$$P(M) = P(S) = \sum_i P(S|E_i)P(E_i)$$

por el Teorema de Probabilidad Total, donde los E_i forman una partición adecuada. Conforme a la información disponible, la partición puede ser conformada a partir de los conjuntos A y B, es decir,

$$E_1 = A \cap B, \quad E_2 = A \cap \overline{B}, \quad E_3 = \overline{A} \cap B, \quad E_4 = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Además, conocemos las probabilidades de ocurrencia de cada uno de ellos:

$$P(S|E_1) = P(S|A \cap B) = 0{,}99 \to P(E_1) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0{,}95 \cdot 0{,}3 = 0{,}285$$

$$P(S|E_2) = P(S|A \cap \overline{B}) = 0{,}05 \to P(E_2) = P(A \cap \overline{B}) = P(A|\overline{B})P(\overline{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07$$

$$P(S|E_3) = P(S|\overline{A} \cap B) = 0$$

ya que si el alcotest es negativo, no se realiza el examen de sangre. De todas formas

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}|B)P(B) = 0{,}05 \cdot 0{,}3 = 0, 015$$

Luego

$$P(M) = 0{,}99 \cdot 0{,}285 + 0{,}05 \cdot 0{,}3 = 0{,}28565$$

b) No solamente nos piden una probabilidad condcional, $P(\overline{S}|B) = \frac{P(B \cap \overline{S})}{P(B)}$, ya que debemos incluir la posibilidad de tener un alcotest negativo (en cuyo caso no es multado). En este caso, no se realiza el examen de sangre. Es decir, en estricto rigor nos piden:

$$P(\overline{S}|B) + P(\overline{A}|B) = \frac{P(B \cap \overline{S}) + P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$$

Sabemos que $P(B) = 0, 3$ y la primera parte del numerador la calculamos extendiendo el resultado del alcotest. $P(B \cap \overline{S}) = P(B \cap \overline{S} \cap (A \cup \overline{A})) = P(A \cap \overline{S}) + P(\overline{A} \cap \overline{S})$
El último término es cero, ya que si el alcotest es negativo no se realiza test de sangre. Por lo tanto,

$$P(\overline{S}|B) + P(\overline{A}|B) = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}3 + 0{,}05 \cdot 0{,}3}{0{,}3} = 0{,}0595$$