Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2024

Curso : Probabilidad y Estadística
Sigla : EYP1113
Profesores : Ricardo Aravena C., Cristian Capetillo C., Ingrid Guevara R., Ricardo Olea O. y Daniel Saavedra T.

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Un equipo de ingenieros está en la fase final de diseño de un puente crucial para una nueva autopista que conectará dos ciudades importantes. Para garantizar la seguridad del puente, deben realizar pruebas de resistencia a las vibraciones y cargas sobre 20 muestras de materiales que podrían ser utilizados en la construcción. Estas muestras incluyen 8 de acero, 6 de hormigón, y 6 de madera.

Entre estas muestras, hay tres de acero que provienen de un lote especial fabricado con una nueva aleación. Esta aleación ha sido desarrollada recientemente y se espera que ofrezca propiedades mecánicas superiores, como mayor resistencia a la corrosión y mejor capacidad de soportar tensiones sin deformarse. Debido a la importancia de evaluar este nuevo material de forma precisa, estas tres muestras son consideradas críticas para el proyecto.

Para asegurar una evaluación justa y evitar que cualquier anomalía se oculte por coincidencia en un solo grupo, es crucial que estas tres muestras críticas no estén juntas en el mismo grupo de pruebas.

El equipo ha decidido organizar las muestras en 4 grupos de 5, seleccionados de manera completamente aleatoria. Cada grupo será sometido a diferentes condiciones para simular los efectos de las cargas y vibraciones que el puente experimentará durante su vida útil.

¿Cuál es la probabilidad de que las tres muestras críticas no estén todas en el mismo grupo, asegurando así una evaluación rigurosa de este nuevo material?

Solución

Alternativa 1: Tenemos que el número total de formas de organizar las 20 muestras en 4 grupos de 5 es:

$$\# S = \frac{20!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{4!}.$$

Definamos como A al evento donde las 3 muestras críticas están en el mismo grupo.

Las 3 muestras críticas deben estar en el mismo grupo. Primero se seleccionan las 3 muestras críticas y 2 adicionales de las 17 restantes, luego se organizan los otros 3 grupos:

$$\# A = \binom{17}{2} \cdot \frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{17!}{2! \cdot 15!} \cdot \frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{17!}{2! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 3!}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que las 3 muestras críticas no estén en el mismo grupo es:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{17! \cdot 5! \cdot 4!}{2! \cdot 20! \cdot 3!} = 0.9649123.$$

Alternativa 2: Tenemos que el número total de formas de organizar las 20 muestras en 4 grupos de 5, importando el orden entre los grupos:

$$\# S = \frac{20!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!}.$$

Definamos como A al evento donde las 3 muestras críticas están en el mismo grupo.

Las 3 muestras críticas deben estar en el mismo grupo. Primero se seleccionan las 3 muestras críticas y 2 adicionales de las 17 restantes, luego se organizan los otros 3 grupos y finalmente se ordenan los grupos:

$$\# A = \binom{17}{2} \cdot \frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!} \cdot \binom{4}{3} = \frac{17!}{2! \cdot 15!} \cdot \frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{17! \cdot 4!}{2! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 3!}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que las 3 muestras críticas no estén en el mismo grupo es:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{17! \cdot 5! \cdot 4!}{2! \cdot 20! \cdot 3!} = 0.9649123.$$

Alternativa 3: Contar todas las maneras de ordenamos la muestra:

$$\# S = 20!.$$

Las primeras cinco muestras van al grupo 1, las segundas al grupo 2 y así sucesivamente hasta el cuarto grupo.

Definamos como A al evento donde las 3 muestras críticas están en el mismo grupo.

Consideremos por simplicidad que las tres muestras críticas estén entre el 1er grupo y luego este resultado se multiplica por $\binom{4}{3}$:

$$\# A = \left[3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \binom{5}{3} \cdot 15!\right] \cdot \binom{4}{3} = \frac{17! \cdot 5! \cdot 4!}{2! \cdot 3!}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que las 3 muestras críticas no estén en el mismo grupo es:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{17! \cdot 5! \cdot 4!}{2! \cdot 20! \cdot 3!} = 0.9649123.$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por el $20!$.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por definir el evento A que corresponde al complemento de lo que se pide.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por el $17!$.

Logro 4: Asignar **[0.5 Ptos]** por el $5!$ y **[0.5 Ptos]** por el $2!$.

Logro 5: Asignar **[0.5 Ptos]** por el $4!$ y **[0.5 Ptos]** por el $3!$.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por responder que $P(\overline{A}) = 0.9649123$.

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

Un grupo de biólogos y pescadores se embarca en una serie de viajes para monitorear la cantidad de peces capturados en diferentes lagos de una región. Estos lagos varían significativamente en sus características. Algunos son poco profundos, lo que reduce drásticamente la supervivencia de los peces durante el invierno debido a las bajas temperaturas. En estos lagos, es frecuente que la cantidad de peces sea extremadamente baja o incluso nula. Por otro lado, en lagos más profundos y estables, las poblaciones de peces pueden ser abundantes. Sin embargo, el éxito de cada captura no depende solo de la cantidad de peces en el lago, sino también de factores como las condiciones climáticas durante el viaje y la habilidad del pescador. Incluso en un lago con abundancia de peces, es posible que no se capture ninguno.

Para modelar el número de peces capturados en cada viaje, utilizamos una distribución de probabilidad que considera dos situaciones:

- Existe una probabilidad adicional θ, $0 < \theta < 1$, de no capturar ningún pez, sin importar las condiciones del lago, debido a factores externos.
- En caso de capturar algún pez, el número de peces capturados sigue una distribución con soporte en $\mathbb{N}_0$, que sea útil para modelar escenarios donde la tasa de captura varía de lago en lago.

Una función de probabilidad adecuada para el número de peces capturados podría ser la siguiente:

$$p_X(x) = \theta \cdot \delta(x) + (1-\theta)\frac{\Gamma(x+\beta)\cdot\alpha^x}{\Gamma(\beta)\cdot(1+\alpha)^{\beta+x}\cdot x!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{N}_0, \text{donde } \delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Los parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ controlan la tasa de captura y la dispersión, respectivamente. Por simplicidad considere que $\beta \in \mathbb{N}$.

Con esta información, responde las siguientes preguntas:

(a) Muestre que $p_X(x)$ efectivamente es una función de probabilidad.

(b) Calcula la probabilidad de capturar al menos 2 peces durante un viaje de pesca.

(c) Calcula el valor esperado E(X) del número de peces capturados en un viaje.

Solución

(a) Debemos demostrar que $p_X(x) \geq 0$ y $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} p_X(x) = 1$, lo primero es inmediato al ser multiplicación de términos positivos. Lo segundo se demuestra a continuación:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \theta\cdot\delta(x) + (1-\theta)\frac{\Gamma(x+\beta)\cdot\alpha^x}{\Gamma(\beta)\cdot(1+\alpha)^{\beta+x}\cdot x!} = \theta + (1-\theta)\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\Gamma(x+\beta)\cdot\alpha^x}{\Gamma(\beta)\cdot(1+\alpha)^{\beta+x}\cdot x!}$$

Luego notemos que:

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\Gamma(x+\beta)\cdot\alpha^x}{\Gamma(\beta)\cdot(1+\alpha)^{\beta+x}\cdot x!} = \frac{1}{(1+\alpha)^\beta}\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+\beta-1}{\beta-1}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x = \frac{1}{(1+\alpha)^\beta}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\right)^\beta} = 1$$

Finalmente,

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_X(x) = \theta + (1-\theta) = 1$$

(b) Queremos calcular $P(X \geq 2)$, lo que se puede hacer restando las probabilidades de capturar 0 y 1 pez:

$$P(X \geq 2) = 1 - p_X(0) - p_X(1)$$

1. Calculemos $p_X(0)$:

$$p_X(0) = \theta + (1-\theta)\frac{1}{(1+\alpha)^\beta}$$

2. Calculemos $p_X(1)$:

$$p_X(1) = (1-\theta)\frac{\alpha\beta}{(1+\alpha)^{\beta+1}}$$

Por lo tanto, la probabilidad de capturar al menos 2 peces es:

$$P(X \geq 2) = 1 - \left[\theta + (1-\theta)\frac{1}{(1+\alpha)^\beta}\right] - \left[(1-\theta)\frac{\alpha\beta}{(1+\alpha)^{\beta+1}}\right]$$

(c) Calculemos el valor esperado por definición:

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p_X(x) = (1-\theta)\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\Gamma(x+\beta)\cdot\alpha^x}{\Gamma(\beta)\cdot(1+\alpha)^{\beta+x}\cdot x!} = (1-\theta)\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\Gamma(x+\beta)\cdot\alpha^x}{\Gamma(\beta)\cdot(1+\alpha)^{\beta+x}\cdot(x-1)!}.$$

Realizamos ahora el siguiente cambio de variable: $y = x - 1$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X) &= (1-\theta)\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\Gamma(y+1+\beta)\cdot\alpha^{y+1}}{\Gamma(\beta)\cdot(1+\alpha)^{\beta+y+1}\cdot y!}, \\
&= (1-\theta)\cdot\alpha\beta\cdot\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\Gamma(y+(\beta+1))\cdot\alpha^y}{\Gamma(\beta+1)\cdot(1+\alpha)^{(\beta+1)+y}\cdot y!}, \\
&= (1-\theta)\cdot\alpha\beta\cdot\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\Gamma(y+\beta^*)\cdot\alpha^y}{\Gamma(\beta^*)\cdot(1+\alpha)^{\beta^*+y}\cdot y!}, \quad \beta^* = \beta+1, \\
&= (1-\theta)\cdot\alpha\beta\cdot 1 \quad \text{por (a)}, \\
&= (1-\theta)\cdot\alpha\beta
\end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[0.5 Ptos]** por indicar que $p_X(x) \geq 0$ y **[0.5 Ptos]** por mencionar que se requiere mostrar que se cumple $\sum_{x\in\Theta_X} p_X(x) = 1$ para todo $x \in \Theta_X = \mathbb{N}_0$.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por utilizar correctamente el formulario e indicar que

$$\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+\beta-1}{\beta-1}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x = \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^\beta}$$

y con esto mostrar que $\sum_{x\in\Theta_X} p_X(x) = 1$.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por evaluar correctamente $p_X(0)$ y $p_X(1)$.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por aplicar ley del complemento y responder correctamente $P(X \geq 2)$.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por $\mathsf{E}(X) = (1-\theta)\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\Gamma(y+1+\beta)\cdot\alpha^{y+1}}{\Gamma(\beta)\cdot(1+\alpha)^{\beta+y+1}\cdot y!}$.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por $\mathsf{E}(X) = (1-\theta)\cdot\alpha\beta$.

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

El jueves pasado el INE informó que el desempleo para el trimestre móvil mayo - julio alcanzó a un $8.7\,\%$, el cual se calcula sobre la fuerza de trabajo (FdeT), que está compuesta por todas las personas en edad de trabajar que trabajan y desean trabajar. Además, se sabe que entre todas las personas en edad de trabajar, un 54 % son mujeres y el resto hombres.

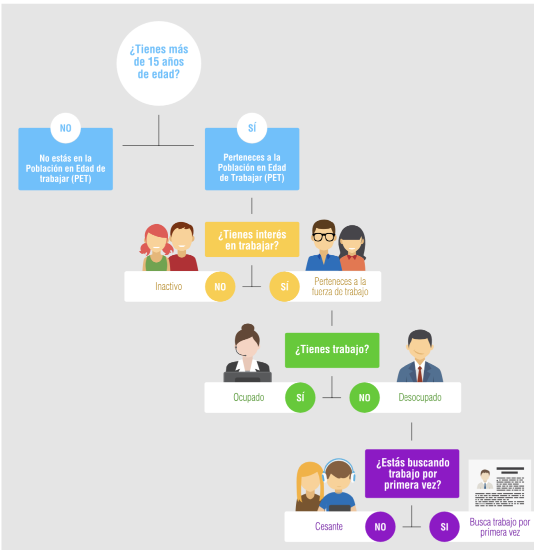

Figura 1: Clasificación de la población dentro y fuera de la fuerza de trabajo.

Por otra parte, el INE informó que el $71.6\,\%$ de las personas de sexo masculino, y el $52.6\,\%$ de sexo femenino conforman la FdeT. Además, el INE indicó que el $8.3\,\%$ de las personas de sexo masculino de la FdeT se encuentra desempleado.

(a) Si seleccionamos al azar una persona en edad de trabajar y resulta estar fuera de la FdeT, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

(b) Considerando únicamente a la FdeT, ¿cuál es la probabilidad que una persona de sexo femenino seleccionada al azar se encuentre desempleada?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A: Persona en edad de trabajar es hombre.
B: Persona en edad de trabajar es parte de la FdeT.
D: Persona en edad de trabajar está desempleada.

(a) Del enunciado tenemos que

$$P(\overline{B} \mid A) = 0.284, \quad P(A) = 0.46 \to P(\overline{A}) = 0.54, \quad \text{y} \quad P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0.474.$$

Por teorema de Bayes se tiene que

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \mid A) \cdot P(A)}{P(\overline{B} \mid A) \cdot P(A) + P(\overline{B} \mid \overline{A}) \cdot P(\overline{A})} = \frac{0.284 \cdot 0.46}{0.284 \cdot 0.46 + 0.474 \cdot 0.54} = 0.3379.$$

(a) Se pise la probabilidad de que una persona de sexo femenino esté desempleada, considerado como nuevo espacio muestral la FdeT, es decir, $P(D \mid \overline{A} \cap B)$.

Del enunciado se tiene que

$$P(D \mid B) = 0.087, \quad P(B \mid A) = 0.716, \quad P(B \mid \overline{A}) = 0.526 \quad \text{y} \quad P(D \mid A \cap B) = 0.083.$$

Por teorema de probabilidades totales se tiene que

$$
\begin{aligned}
P(D\cap B) &= P(D\cap B\cap A) + P(D\cap B\cap \overline{A})\\
&= P(D\mid B\cap A)\,P(B\cap A) + P(D\mid B\cap \overline{A})\,P(B\cap \overline{A})\\
\rightarrow \frac{P(D\cap B)}{P(B)} = P(D\mid B) &= P(D\mid B\cap A)\cdot\frac{P(A\cap B)}{P(B)} + P(D\mid B\cap \overline{A})\cdot\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}\\
0.087 &= 0.083\cdot\frac{P(B\mid A)\,P(A)}{P(B)} + P(D\mid B\cap \overline{A})\cdot\frac{P(B\mid \overline{A})\,P(\overline{A})}{P(B)}\\
\rightarrow P(D\mid B\cap \overline{A}) &= \left[0.087 - 0.083\cdot\frac{P(B\mid A)\,P(A)}{P(B)}\right]\cdot\frac{P(B)}{P(B\mid \overline{A})\,P(\overline{A})}.
\end{aligned}
$$

Por teorema de probabilidades totales también se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B\mid A)\,P(A) + P(B\mid \overline{A})\,P(\overline{A})\\
&= 0.716\cdot 0.46 + 0.526\cdot 0.54\\
&= 0.32936 + 0.28404\\
&= 0.6134.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
P(D\mid B\cap \overline{A}) &= \left[0.087 - 0.083\cdot\frac{0.32936}{0.6134}\right]\cdot\frac{0.6134}{0.28404}\\
&= 0.09163822
\end{aligned}
$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por las siguientes probabilidades: $P(\overline{B}\mid A) = 0.284$, $P(A) = 0.46 \rightarrow P(\overline{A}) = 0.54$ y $P(\overline{B}\mid \overline{A}) = 0.474$.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por aplicar teorema de Bayes:

$$
P(A\mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{B}\mid A)\cdot P(A)}{P(\overline{B}\mid A)\cdot P(A) + P(\overline{B}\mid \overline{A})\cdot P(\overline{A})}
$$

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por responder que $P(A\mid \overline{B}) = 0.3379$.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por indicar que $P(D\mid B\cap \overline{A}) = \left[0.087 - 0.083\cdot\frac{P(B\mid A)\,P(A)}{P(B)}\right]\cdot\frac{P(B)}{P(B\mid \overline{A})\,P(\overline{A})}$.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por $P(B) = 0.6134$.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por $P(D\mid B\cap \overline{A}) = 0.09163822$.

+ 1 Punto Base