Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2024

Curso : **Probabilidad y Estadística**
Sigla : **EYP1113**
Profesores : **Ana María Araneda L., Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O., Felipe Ossa M. y Inés Varas C.**

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Un trabajador de un servicio técnico de dispositivos móviles escoge al azar el equipo que va a reparar al inicio de su jornada laboral. Suponga que, al cierre del día anterior, el $30\,\%$ de los dispositivos móviles provienen de una empresa a la cual se le presta el servicio de reparación, mientras que el resto son trabajos encargados por particulares. Además, quedó registrado que un tercio de los equipos en espera de reparación es por limpieza, mientras que un cuarto del total vienen por garantía de reparaciones realizadas anteriormente.

De los dispositivos provenientes de la empresa a la que se le presta el servicio de reparación, un $40\,\%$ tiene problemas de limpieza mientras que $1/3$ corresponde a reparaciones por garantía.

Si entre los dispositivos que se encuentran en garantía, ninguno tiene problema de limpieza, ¿cuál es la probabilidad de que el dispositivo que escoja el trabajador al inicio de su jornada corresponda a un dispositivo que proviene de la empresa a la que se le presta el servicio y no venga por garantía previa ni presenta problema de limpieza?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A: Dispositivo enviado a reparar por un particular.
B: Dispositivo enviado a reparar es por garantía.
C: Dispositivo enviado a reparar es por limpieza.

Del enunciado se tiene que

$$P(\overline{A}) = 0.30 \to P(A) = 0.70, \quad P(B) = 1/4, \quad P(C) = 1/3,$$

$$P(B \,|\, \overline{A}) = 1/3 \to P(\overline{B} \,|\, \overline{A}) = 2/3, \quad P(C \,|\, \overline{A}) = 0.40 \to P(\overline{C} \,|\, \overline{A}) = 0.60.$$

Además se indica que $P(C \,|\, B) = 0 \to P(C \cap B) = 0$.

Alternativa 1: Se pide

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{C} \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{B} \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = P(\overline{C} \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.30.$$

Además se tiene que

$$P(\overline{C} \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}),$$

donde $P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B})$ se puede obtener a partir del siguiente procedimiento:

$$
\begin{aligned}
P(C \,|\, \overline{A}) &= \frac{P(C \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) + P(C \cap \overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} \\
&= \frac{P(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \,|\, C \cap B) \cdot P(C \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \,|\, C \cap B) \cdot 0}{P(\overline{A})} \\
&= \frac{P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{B} \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A})}{P(\overline{A})}
\end{aligned}
$$

Reemplazando

$$
0.40 = \frac{P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.30}{0.30} \to P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) = 0.60 \to P(\overline{C} \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) = 0.40.
$$

Por lo tanto

$$
P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 0.40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.30 = 0.08.
$$

Alternativa 2: Se pide

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) &= 1 - P\left(\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}\right) = 1 - P\left(A \cup B \cup C\right) \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \,|\, B \cap C) \cdot P(B \cap C) \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + 0 - P(A \,|\, B \cap C) \cdot 0 \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + [P(B) - P(B \cap \overline{A})] + [P(C) - P(C \cap \overline{A})] \\
&= 1 - 0.70 - 1/4 - 1/3 + [1/4 - 1/3 \cdot 0.30] + [1/3 - 0.40 \cdot 0.30] \\
&= 0.08
\end{aligned}
$$

Asignación de Puntaje (Alternativa 1):

Logro 1: Asignar **[0.5 Ptos]** por $P(\overline{A}) = 0.3$ y **[0.5 Ptos]** por $P(\overline{B}\,|\,\overline{A}) = 2/3$. Si las probabilidades las asigna sobre la rama de un árbol de probabilidad, asignar puntaje.

Logro 2: Asignar **[0.3 Ptos]** por identificar que $P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ es lo solicitado y **[0.7 Ptos]** por la siguiente regla multiplicativa:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = P(\overline{C}\,|\,\overline{A}\cap\overline{B})\cdot\frac{2}{3}\cdot 0.30.$$

Logro 3: Asignar **[0.3 Ptos]** por $P(C\cap B) = 0$ y **[0.7 Ptos]** por la siguiente igualdad

$$P(C\,|\,\overline{A}) = \frac{P(C\cap\overline{A}\cap\overline{B}) + P(\overline{A}\,|\,C\cap B)\cdot P(C\cap B)}{P(\overline{A})}$$

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por

$$P(C\,|\,\overline{A}) = \frac{P(C\cap\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}$$

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por

$$0.40 = \frac{P(C\,|\,\overline{A}\cap\overline{B})\cdot\frac{2}{3}\cdot 0.30}{0.30} \to P(C\,|\,\overline{A}\cap\overline{B}) = 0.60.$$

Logro 6: Asignar **[0.5 Ptos]** por $P(\overline{C}\,|\,\overline{A}\cap\overline{B}) = 0.40$ y **[0.5 Ptos]** por $P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = 0.08$.

+ 1 Punto Base

Asignación de Puntaje (Alternativa 2):

Logro 1: Asignar **[0.25 Ptos]** por $P(\overline{A}) = 0.30$, **[0.25 Ptos]** por $P(A) = 0.70$, **[0.25 Ptos]** por $P(B) = 1/4$ y **[0.25 Ptos]** por $P(C) = 1/3$.

Logro 2: Asignar **[0.3 Ptos]** por $P(B\,|\,\overline{A}) = 1/3$, **[0.3 Ptos]** por $P(C\,|\,\overline{A}) = 0.40$, **[0.4 Ptos]** por $P(C\,|\,B) = 0$

Logro 3: Asignar **[0.3 Ptos]** por identificar que $P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ es lo solicitado, **[0.3 Ptos]** por aplicar regla del complemento $1 - P\left(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}}\right)$ y **[0.4 Ptos]** por de De Morgan $1 - P\,(A\cup B\cup C)$.

Logro 4: Asignar **[0.3 Ptos]** por ley aditiva, **[0.3 Ptos]** por $P(B\cap C) = 0$ y **[0.4 Ptos]** por $P(A\cap B\cap C) = 0$.

Logro 5: Asignar **[0.5 Ptos]** por $P(A\cap B) = P(B) - P(B\cap\overline{A})$ y **[0.5 Ptos]** por $P(A\cap C) = P(C) - P(C\cap\overline{A})$.

Logro 6: Asignar **[0.3 Ptos]** por $P(B\cap\overline{A}) = 1/3\cdot 0.30$, **[0.3 Ptos]** por $P(C\cap\overline{A}) = 0.40\cdot 0.30$ y **[0.4 Ptos]** por llegar a la respuesta 0.08.

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

El sistema de competencia tipo Copa Carranza es un sistema donde solo participan 4 equipos. El equipo 1 enfrenta al equipo 2, mientras que el equipo 3 enfrenta al equipo 4. Luego, los equipos perdedores juegan por el tercer lugar, mientras que los ganadores disputan el primer lugar del torneo. Suponga que un grupo de 24 amigos decide el fin de semana realizar un torneo con este formato, donde los equipos están compuestos de seis jugadores. Si entre los jugadores hay cuatrillizos y los equipos son conformados de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que estos hermanos estén todos en equipos distintos?

Solución

Definamos como A al evento en que cada equipo tiene a uno de los hermanos como integrante.

Alternativa 1: Crear 4 equipos a partir del ordenamiento multinomial, pero para evitar contar mismos equipos que aparecen en diferente orden, es que se divide por $4!$.

Los casos totales son:

$$\#S = \frac{24!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!} \cdot \frac{1}{4!},$$

mientras que los casos favorables están dado por:

$$\#A = \frac{20!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{4!} \cdot 4!.$$

Por lo tanto,

$$P(A) = 0.121965$$

Alternativa 2: Crear 4 equipos a partir del ordenamiento multinomial.

Los casos totales son:

$$\#S = \frac{24!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!},$$

mientras que los casos favorables están dado por:

$$\#A = \frac{20!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!} \cdot 4!.$$

Por lo tanto,

$$P(A) = 0.121965$$

Alternativa 3: Ordenar a los 24 jugadores. Luego asignar 1 a 6 al equipo 1, 7 a 12 al equipo 2, 13 a 18 al equipo 3 y 19 a 24 al equipo 4.

Los casos totales son:

$$\#S = 24!,$$

mientras que los casos favorables están dado por:

$$\#A = 4! \cdot 20! \cdot \left[\binom{6}{5}\right]^4 = \frac{4! \cdot 20! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!}.$$

Por lo tanto,

$$P(A) = 0.121965$$

Alternativa 4: Tenemos 24 lugares, 1 a 6 van al equipo 1, 7 a 12 al equipo 2, 13 a 18 al equipo 3 y 19 a 24 al equipo 4. Se escogerá la posición donde van los hermanos.

$$\#S = \binom{24}{4} = \frac{24!}{4! \cdot 20!},$$

mientras que los casos favorables están dado por:

$$\#A = \binom{6}{1} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{6}{1} = \frac{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!}.$$

Por lo tanto,

$$P(A) = 0.121965$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por el $24!$.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por el $4!$.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por los $6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!$.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por los $5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!$

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por el $20!$

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por responder que $P(A) = 0.121965$.

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

Emol 26/03/2024 publicó: *"Un 10 % de las compras online son informales y Aliexpress es la plataforma preferida. La informalidad online da cuenta de un gran porcentaje de compras que no están siendo formales, resultando en una enorme competencia desleal, señaló la Cámara Nacional de Comercio (CNC)"*.

Estudios muestran que el 16 % de las compras online son internacionales y que 5 % de las compras online nacionales son de carácter informal. ¿Cuál es la probabilidad que una venta online informal provenga de una compra internacional?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A: Compra online nacional.
B: Compra online caracter informal.

Se pide $P(\overline{A}\,|\,B)$.

Del enunciado se tiene que $P(\overline{A}) = 0.16 \to P(A) = 0.84$, $P(B\,|\,A) = 0.05$ y $P(B) = 0.10$.

Por definición

$$P(\overline{A}\,|\,B) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\,|\,\overline{A})\cdot P(\overline{A})}{P(B)}.$$

Además

$$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = P(B\,|\,A)\cdot P(A) + P(B\,|\,\overline{A})\cdot P(\overline{A})$$

y al despejar se tiene que

$$P(B\,|\,\overline{A}) = \frac{0.10 - 0.05\cdot 0.84}{0.16} = 0.3625.$$

Por lo tanto

$$P(\overline{A}\,|\,B) = \frac{0.3625\cdot 0.16}{0.10} = 0.58.$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[0.6 Ptos]** por deducir que se pide $P(\overline{A}\,|\,B)$, ya que en la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad que una venta online informal provenga de una compra internacional?, la incertidumbre esta en la procedencia y no la informalidad de la venta y **[0.6 Ptos]** por $P(B) = 0.10$.

Logro 2: Asignar **[1.2 Ptos]** por $P(\overline{A}\,|\,B) = \dfrac{P(B\,|\,\overline{A})\cdot 0.16}{0.10}$.

Logro 3: Asignar **[1.2 Ptos]** por $P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = P(B\,|\,A)\cdot P(A) + P(B\,|\,\overline{A})\cdot P(\overline{A})$.

Logro 4: Asignar **[1.2 Ptos]** por los $P(B\,|\,\overline{A}) = \dfrac{0.10 - 0.05\cdot 0.84}{0.16} = 0.3625$.

Logro 5: Asignar **[1.2 Ptos]** por $P(\overline{A}\,|\,B) = \dfrac{0.3625\cdot 0.16}{0.10} = 0.58$.

+ 1 Punto Base