Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2023

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Profesores	:	**Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O., Felipe Ossa M. y Mauricio Toro C.**

INTERROGACIÓN 3

Pregunta 1

Para un nuevo virus, consideremos que la tasa diaria de contagio, denotada como Y, sigue una distribución Exponencial con parámetro ν. Además, los casos diarios, representados por la variable X, están condicionados a una realización específica de la tasa diaria, es decir, X sigue una distribución Poisson con tasa y, donde y es una realización de la variable aleatoria Y.

(a) **[3.0 Ptos.]** ¿Cuál es el coeficiente de correlación entre la tasa diaria Y y el número de casos X?

(b) **[3.0 Ptos.]** Si en un día específico se observan x casos, ¿cuál es el mejor predictor para la tasa de contagio de ese día?

Solución

(a) Tenemos que

$$X \mid Y = y \sim \text{Poisson}(y) \quad \text{e} \quad Y \sim \text{Exponencial}(\nu)$$

Se pide

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{E}(X \cdot Y) - \text{E}(X) \cdot \text{E}(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}.$$

Por enunciado se tiene que

$$\text{E}(Y) = \frac{1}{\nu} \quad \text{y} \quad \text{Var}(Y) = \frac{1}{\nu^2}.$$

Aplicando teoremas de esperanzas iteradas

$$\begin{aligned}
\text{E}(X) &= \text{E}[\text{E}(X \mid Y)] = \text{E}(Y) = \frac{1}{\nu} \\
\text{E}(X \cdot Y) &= \text{E}[\text{E}(X \cdot Y \mid Y)] = \text{E}(Y^2) = \frac{2}{\nu^2} \\
\text{Var}(X) &= \text{E}[\text{Var}(X \mid Y)] + \text{Var}[\text{E}(X \mid Y)] = \text{E}(Y) + \text{Var}(Y) = \frac{1+\nu}{\nu^2}.
\end{aligned}$$

Reemplazado

$$\text{Corr}(X, Y) = \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^{1/2}.$$

(b) Se pide $\text{E}(Y \mid X = x)$.

Por teorema de probabilidades totales se tiene que

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \int_0^\infty \frac{y^x\, e^{-y}}{x!} \cdot \nu\, e^{-\nu\, y}\, dy \\
&= \frac{\nu}{(\nu+1)^{x+1}} \int_0^\infty \frac{(\nu+1)^{x+1}}{\Gamma(x+1)}\, y^{(x+1)-1}\, e^{-(\nu+1)\, y}\, dy \\
&= \frac{\nu}{(\nu+1)^{x+1}} \cdot 1 \\
&= \frac{\nu}{(\nu+1)^{x+1}}, \quad x \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Ya que

$$f_{Y \mid X=x}(y) = \frac{p_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y)}{p_X(x)} = \frac{(\nu+1)^{x+1}}{\Gamma(x+1)}\, y^{(x+1)-1}\, e^{-(\nu+1)\, y},$$

entonces se tiene que $Y \mid X = x \sim \text{Gamma}(x+1,\, \nu+1)$.

Por lo tanto

$$\text{E}(Y \mid X = x) = \frac{x+1}{\nu+1}.$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[0.5 Ptos]** por $\text{E}(Y) = \dfrac{1}{\nu}$ y **[0.5 Ptos]** por $\text{Var}(Y) = \dfrac{1}{\nu^2}$.

Logro 2: Asignar **[0.5 Ptos]** por $\text{E}(X) = \dfrac{1}{\nu}$ y **[0.5 Ptos]** por $\text{Var}(X) = \dfrac{1+\nu}{\nu^2}$.

Logro 2: Asignar **[0.5 Ptos]** por $\text{E}(X \cdot Y) = \dfrac{2}{\nu^2}$ y **[0.5 Ptos]** por $\text{Corr}(X,\, Y) = \left(\dfrac{1}{1+\nu}\right)^{1/2}$.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por obtener $p_X(x) = \dfrac{\nu}{(\nu+1)^{x+1}}, \quad x \in \mathbb{N}_0$.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por deducir que $Y \mid X = x \sim \text{Gamma}(x+1,\, \nu+1)$.

Logro 6: Asignar **[0.5 Ptos]** por indicar que se pide $\text{E}(Y \mid X = x)$ y **[0.5 Ptos]** por el resultado $\dfrac{x+1}{\nu+1}$.

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

Un vendedor en una tienda, desde la apertura, tiene como tarea, ordenar productos hasta que llegue el primer cliente. Suponga que los clientes llegan a la tienda de acuerdo con un proceso de Poisson, con una tasa esperada de ν clientes por hora.

(a) **[5.0 Ptos.]** ¿Calcule la función de densidad de la proporción de tiempo que el vendedor dedica a ordenar productos, considerando el tiempo total transcurrido desde la apertura hasta que ingresa el segundo cliente?

(b) **[1.0 Ptos.]** Identifique el modelo correspondiente a la densidad obtenida en (a).

Solución

Sea X el tiempo desde que se abre la tienda y la llegada del 1er clientes, es decir, el tiempo que el vendedor dedica a ordenar, y como Y al tiempo transcurrido entre el 1er y 2do clientes.

(a) **Alternativa 1**: Como las llegadas en t días ocurren según un modelo Poisson($\nu\, t$), entonces los tiempos X e Y, en días, son variables aleatorias independientes con distribución Exponencial(ν).

Se pide $f_Z(z)$ con $Z = g(X, Y) = \dfrac{X}{X+Y} \to Y = \dfrac{X\,(1-Z)}{Z} = g^{-1} \to \dfrac{\partial}{\partial\, Z}\, g^{-1} = -\dfrac{X}{Z^2}$.

Esto implica que $\Theta_Z = (0, 1)$.

Por independencia

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y\left(\frac{x\,(1-z)}{z}\right) \cdot \left|-\frac{x}{z^2}\right|\, dx \\
&= \Gamma(2) \int_0^{\infty} \frac{(\nu/z)^2}{\Gamma(2)}\, x^{2-1}\, e^{-x\,\nu/z}\, dx \\
&= \Gamma(2) \cdot 1, \quad \text{por área sobre todo el soporte de una Gamma}(2,\, \nu/z) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Alternativa 2: Como las llegadas en t días ocurren según un modelo Poisson($\nu\, t$), entonces los tiempos X e Y, en días, son variables aleatorias independientes con distribución Exponencial(ν).

Se pide $f_Z(z)$ con $Z = g(X, Y) = \dfrac{X}{X+Y} \to X = \dfrac{Z \cdot Y}{1-Z} = g^{-1} \to \dfrac{\partial}{\partial\, Z}\, g^{-1} = \dfrac{Y}{(1-Z)^2}$.

Esto implica que $\Theta_Z = (0, 1)$.

Por independencia

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{y\,z}{1-z}\right) \cdot f_Y(y) \cdot \left|\frac{y}{(1-z)^2}\right|\, dy \\
&= \Gamma(2) \int_0^{\infty} \frac{\left[\nu/(1-z)\right]^2}{\Gamma(2)}\, y^{2-1}\, e^{-y\,\nu/(1-z)}\, dy \\
&= \Gamma(2) \cdot 1, \quad \text{por área sobre todo el soporte de una Gamma}\left(2,\, \frac{\nu}{(1-z)}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Alternativa 3: Como las llegadas en t días ocurren según un modelo Poisson($\nu\, t$), entonces los tiempos X e Y, en días, son variables aleatorias independientes con distribución Exponencial(ν).

Se pide $f_Z(z)$ con $Z = g(X, Y) = \dfrac{X}{X+Y} = \dfrac{X}{W} = g(X, W) \to X = Z \cdot W = g^{-1} \to \dfrac{\partial}{\partial\, Z}\, g^{-1} = W$.

Esto implica que $\Theta_Z = (0, 1)$.

Notemos que $W \,|\, X = x \sim$ Exp(ν), con $w > x$.

Por la dependencia entre X y W tenemos que

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,W}(z \cdot w,\, w) \cdot |w|\; dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z \cdot w) \cdot f_{W \,|\, X = z\cdot w}(w) \cdot |w|\; dw \\
&= \int_0^{\infty} \nu\, e^{-\nu\, z \cdot w} \cdot \nu\, e^{-\nu (w - z \cdot w)} \cdot |w|\; dw \\
&= \Gamma(2) \int_0^{\infty} \frac{\nu^2}{\Gamma(2)}\, w^{2-1}\, e^{-\nu\, w}\, dw \\
&= \Gamma(2) \cdot 1, \quad \text{por área sobre todo el soporte de una Gamma}(2,\, \nu) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Alternativa 4: Como las llegadas en t días ocurren según un modelo Poisson($\nu\, t$), entonces los tiempos X e Y, en días, son variables aleatorias independientes con distribución Exponencial(ν).

Se pide $f_Z(z)$ con $Z = g(X, Y) = \dfrac{X}{X+Y} = \dfrac{X}{W} = g(X, W) \to W = \dfrac{X}{Z} = g^{-1} \to \dfrac{\partial}{\partial\, Z}\, g^{-1} = -\dfrac{X}{Z^2}$.

Esto implica que $\Theta_Z = (0, 1)$.

Notemos que $W \,|\, X = x \sim$ Exp(ν), con $w > x$.

Por la dependencia entre X y W tenemos que

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,W}(x,\, x/z) \cdot \left| -\frac{x}{z^2} \right|\; dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_{W \,|\, X = x}(x/z) \cdot \frac{x}{z^2}\, dx \\
&= \int_0^{\infty} \nu\, e^{-\nu\, x} \cdot \nu\, e^{-\nu (x/z - x)} \cdot \frac{x}{z^2}\, dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\nu^2}{z^2}\, x\, e^{-\nu\, x/z}\, dx \\
&= \Gamma(2) \int_0^{\infty} \frac{(\nu/z)^2}{\Gamma(2)}\, x^{2-1}\, e^{-\nu\, x/z}\, dx \\
&= \Gamma(2) \cdot 1, \quad \text{por área sobre todo el soporte de una Gamma}(2,\, \nu/z) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Alternativa 5: Como las llegadas en t días ocurren según un modelo Poisson($\nu\, t$), entonces los tiempos X e Y, en días, son variables aleatorias independientes con distribución Exponencial(ν).

Se pide $f_Z(z)$ con $Z = g(X, Y) = \dfrac{X}{X+Y}$, esto implica que $\Theta_Z = (0, 1)$.

Por la independencia entre X e Y tenemos que

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P\left(X \leq \left(\frac{z}{1-z}\right) \cdot Y\right) \\
&= \int_0^\infty \int_0^{z\,y/(1-z)} \nu^2\, e^{-\nu(x+y)}\, dx\, dy \\
&= \int_0^\infty \nu\, e^{-\nu\, y} \left\{ \int_0^{z\,y/(1-z)} \nu\, e^{-\nu\, x}\, dx \right\} dy \\
&= \int_0^\infty \nu\, e^{-\nu\, y} \left\{ 1 - e^{-\nu\, y\, z/(1-z)} \right\} dy \\
&= \int_0^\infty \nu\, e^{-\nu\, y}\, dy - (1-z) \int_0^\infty \frac{\nu}{(1-z)} e^{-\nu\, y/(1-z)}\, dy \\
&= z, \quad 0 < z < 1 \\
f_Z(z) &= \frac{d}{dz} F_Z(z) = 1, \quad 0 < z < 1.
\end{aligned}
$$

(b) Como $f_Z(z) = 1$ si $0 < z < 1$, entonces, $Z \sim$ Uniforme$(0,\, 1)$ = Beta$(1, 1)$.

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por indicar que $\Theta_Z = (0, 1)$.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por aplicar correctamente la independencia en las alternativa 1-2 y la regla multiplicativa en las alternativas 3-4.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por $\frac{\partial}{\partial\, Z}\, g^{-1}$ correcto dependiendo la alternativas 1, 2, 3 y 4.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por establecer que los limites de integración son 0 y $+\infty$.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** Por construir correctamente la Gamma que integra 1 en las alternativas 1, 2, 3 y 4.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por reconocer que $Z \sim$ Uniforme$(0,\, 1)$ = Beta$(1, 1)$.

Nota: Si el alumno realiza la alternativa 5 de manera correcta asignar logros 1 a 5 y si reconoce el modelo, asignar logro 6.

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

Imaginemos que estás involucrado en un proyecto de telecomunicaciones donde debes diseñar un sistema de comunicación inalámbrica para brindar cobertura en un entorno urbano. En este escenario, la señal de radio emitida por una estación base debe superar obstáculos como edificios, árboles y otros elementos antes de llegar a los receptores de los dispositivos móviles.

La atenuación de la señal, que representa la pérdida de potencia de la señal a medida que atraviesa estos obstáculos, es el resultado de una secuencia, multiplicativa, de atenuaciones debidas a diferentes obstáculos. Cada uno de estos obstáculos puede considerarse como una fuente de atenuación, y es razonable suponer que la atenuación debida a cada uno de ellos sigue una distribución Log-Normal.

Por otro lado, los amplificadores de recepción aumentan la potencia de la señal recibida antes de su procesamiento, lo cual es crucial cuando la señal ha sido atenuada en su viaje a través de los obstáculos. La variación porcentual en la potencia amplificada también sigue una distribución Log-Normal.

¿Cuál es la probabilidad de que la amplificación al menos compense las atenuaciones sufridas por dos obstáculos? Suponga que, en promedio, cada obstáculo atenúa la señal en un 10 % en términos porcentuales, que será la unidad de medida, mientras que el amplificador está configurado para aumentar la potencia en un 80 % en promedio. Además, consideramos que el coeficiente de variación es constante en todos los casos, con un valor de 0.25, y que los efectos de los obstáculos y el amplificador son independientes.

Solución

Sean X e Y las atenuaciones y Z la amplificación.

Del enunciado se tiene que X, Y y Z son variables aleatorias independientes con distribución Log-Normal.

Los parámetros Log-Normal de X e Y son:

$$\zeta_X = \zeta_Y = \sqrt{\ln(1 + 0.25^2)} = 0.2462207$$

y

$$\lambda_X = \lambda_Y = \ln(0.90) - \frac{0.2462207^2}{2} = -0.1356728.$$

Mientras que para Z se tiene que

$$\zeta_Z = \sqrt{\ln(1 + 0.25^2)} = 0.2462207 \quad \text{y} \quad \lambda_Z = \ln(1.80) - \frac{0.2462207^2}{2} = 0.5574744.$$

Se pide

$$P(X \cdot Y \cdot Z > 1) = P(\ln(X) + \ln(Y) + \ln(Z) > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - \lambda}{\zeta}\right),$$

con

$$\lambda = \lambda_X + \lambda_Y + \lambda_Z = 0.2861287$$

y

$$\zeta = \sqrt{\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2} = \sqrt{3 \cdot \ln(1 + 0.25^2)} = 0.4264667$$

Reemplazando

$$P(X \cdot Y \cdot Z > 1) \approx 1 - \Phi(-0.67) = \Phi(0.67) = 0.7486$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por $\zeta_X = \zeta_y = \zeta_Z = 0.2462207$.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por $\lambda_X = \lambda_Y = -0.1356728$.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por $P(X \cdot Y \cdot Z > 1) = 1 - \Phi\left(\dfrac{0-\lambda}{\zeta}\right)$.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por $\lambda = 0.2861287$.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por $\zeta = 0.4264667$.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por $P(X \cdot Y \cdot Z > 1) \approx 1 - \Phi(-0.67) = \Phi(0.67) = 0.7486$.

Nota: En el caso que aproximen $\zeta \approx \sqrt{3 \cdot 0.25^2} = 0.4330127$ *no descontar puntaje, y la respuesta correcta sería* $P(X \cdot Y \cdot Z > 1) \approx 1 - \Phi(-0.65) = \Phi(0.65) = 0.7422$.

+ 1 Punto Base