Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2023

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O., Felipe Ossa M. y Mauricio Toro C.**

PAUTA INTERROGACIÓN 2

Pregunta 1

Durante las últimas semanas, el Servicio Nacional de Geología y Minería de Chile (Sernageomin) ha emitido informes especiales sobre la actividad reciente del Volcán Villarrica. Por ejemplo, las cámaras de monitoreo han registrado que la altura de la columna y la liberación de material piroclástico en la atmósfera han superado consistentemente los mil metros sobre el nivel del cráter. Se supone que estas alturas siguen una distribución Log-Normal con un coeficiente de variación del 40 % y un rango intercuartil de 200 metros. Además, se considera que las erupciones que emiten material piroclástico siguen una distribución de Poisson, con una tasa esperada de 20 erupciones al día.

(a) **[2.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad que una columna de material piroclástico alcance una altura sobre los 350 metros desde el nivel del cráter?

(b) **[2.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad que entre las próximas 6 erupciones, al menos dos se encuentren sobre los 350 metros desde el nivel del cráter?

(c) **[2.0 Ptos.]** Utilizando la distribución de Poisson, ¿cuál es la probabilidad que el tiempo transcurrido entre tres erupciones consecutivas sea mayor a 2 horas?

Solución

(a) Definamos como X la altura sobre el nivel del cráter que alcanza la columna con material piroclástico de una erupción.

$$X \sim \text{Log-Normal}(\lambda, \zeta)$$

Del enunciado se tiene que

$$\delta_X = 0.40 \to \zeta = \sqrt{\ln(1 + \delta_X^2)} = 0.3853$$

y

$$\text{IQR} = e^{\lambda + \zeta \cdot \Phi^{-1}(0.75)} - e^{\lambda + \zeta \cdot \Phi^{-1}(0.25)} = 200 \to \lambda = 5.9407,$$

con $\Phi^{-1}(0.75) = -\Phi^{-1}(0.25) \approx 0.675$.

Se pide

$$P(X > 350) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(350) - \lambda}{\zeta}\right) \approx 1 - \Phi(-0.21) = \Phi(0.21) = 0.5832$$

(b) Sea Y el numero de erupciones sobre los 350 metros sobre el cráter entre las próximas 6.

$$Y \sim \text{Binomial}(n = 6, \, p = 0.5832)$$

Se pide

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - \sum_{y=0}^{1} \binom{6}{y} p^y \, (1-p)^{6-y} = 0.9507$$

(c) Sea Z_t el numero de erupciones en t horas.

$$Z_t \sim \text{Poisson}(\nu \cdot t)$$

Del enunciado se tiene que E$(Z_{24}) = \nu \cdot 24 = 20 \to \nu = 5/6$.

Si ponemos el origen al momento en que ocurre una erupción, entonces la probabilidad solicitada corresponde a

$$P(Z_2 \leq 1) = \sum_{z=0}^{1} \frac{(2\,\nu)^z\, e^{-2\,\nu}}{z!} = 0.5037$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[0.5 Ptos]** por $\Phi^{-1}(0.75) = 0.675$ (también es correcto asignar 0.67 o 0.68). Asignar **[0.5 Ptos]** por ζ y λ.

Logro 2: Asignar **[0.5 Ptos]** por estandarizar y **[0.5 Ptos]** por uso correcto de tabla Normal estándar para el calculo $P(X > 350)$. No descontar puntaje si existe error de arrastre producido en logro 1.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por reconocer modelo Binomial. No descontar puntaje por error de arrastre producido en logro 2.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por calcular la probabilidad del evento utilizando modelo Binomial. No descontar puntaje por error de arrastre producido en logro 2.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por $\nu = 5/6$.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por calcular la probabilidad del evento utilizando modelo Poisson. Si calcula $P(Z_2 \leq 2) = 0.7660$ no descontar puntaje.

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

La caminata aleatoria es un concepto de gran relevancia en el contexto de los movimientos de precios, y se emplea ampliamente en la teoría financiera y la economía para modelar el comportamiento de los precios de activos financieros, como acciones, bonos, divisas y otros instrumentos financieros, utilizando variables aleatorias generalmente independientes. En la actualidad, el valor del dólar está experimentando un período de elevada volatilidad, en gran medida debido a los conflictos internacionales en curso. Basándonos en mediciones horarias realizadas en los últimos días, se observa que los cambios porcentuales del valor del dólar, por hora, siguen una distribución Normal$(0,\, \sigma)$.

(a) **[3.0 Ptos.]** ¿Cuántas horas se espera que transcurran hasta observar un incremento porcentual, del valor del dólar, mayor a σ?

(b) **[3.0 Ptos.]** Si desde que compró dólares, ya han pasado tres horas y no ha observado un incremento porcentual del valor del dólar sobre σ. ¿Cuál es la probabilidad que el incremento, sobre σ, se observe después de cinco horas de haber comprado los dólares?

Solución

(a) Sea X el incremento porcentual del precio del dólar en una hora.

$$X \sim \text{Normal}(0,\, \sigma)$$

Se pide

$$p = P(X > \sigma) = 1 - P(X \leq \sigma) = 1 - \Phi(1) = 0.1587.$$

Definamos como Y al número de periodos de una hora consecutivos hasta observar uno con un incremento porcentual del valor del dólar mayor al valor de σ.

$$Y \sim \text{Geométrica}(p = 0.1587)$$

Se pide $\text{E}(Y) = \dfrac{1}{p} = 6.301197$ horas (6 horas y 18 minutos).

(b) Por carencia de memoria se tiene que

$$P(Y > 5 \,|\, Y > 3) = P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = (1 - p)^2 = 0.7078.$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por obtener $p = 0.1587$.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por definir la variable aleatoria $Y \sim \text{Geométrica}(p = 0.1587)$.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por calcular periodo de retorno igual a $\dfrac{1}{p} = 6.301197$ horas.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por mostrar que $P(Y > 5 \,|\, Y > 3) = P(Y > 2)$. No descontar si el alumno muestra que $P(Y \geq 5 \,|\, Y > 3) = P(Y \geq 2)$.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por mostrar que $P(Y > 5 \,|\, Y > 3) = (1 - p)^2$. No descontar si el alumno muestra que $P(Y \geq 5 \,|\, Y > 3) = (1 - p)$

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por evaluar y responder 0.7078 (o 0.8413). No descontar por error de arrastre en logro 1.

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

La salmonicultura es una rama de la acuicultura enfocada a la producción de peces de la familia salmonidae o peces salmoniformes, tanto truchas como salmones. A partir de una muestra aleatoria de 857 piezas de salmón se obtuvo el siguiente resumen:

```
-------------------------------
Sexo    1st Qu.    Median     n
-------------------------------
Hembra   2.3685    2.6165   358
Macho    2.6140    2.9270   499
-------------------------------
```

(a) **[3.0 Ptos.]** Si los pesos en hembras distribuyen Normal y en machos Log-Normal, calcule la probabilidad que una pieza de salmón, tomada al azar, supere los 2.9 kilos.

(b) **[3.0 Ptos.]** Si a usted le piden pesar piezas de salmón, ¿cuál es la probabilidad que la 3era pieza de salmón sobre 2.9 kilos, ocurra después del 6to pesaje?

Solución

(a) Sea X el peso fuera del agua de una pieza de salmón.

Se pide

$$\begin{aligned} p &= P(X > 2.9 \,|\, H) \cdot P(H) + P(X > 2.9 \,|\, M) \cdot P(M) \\ &= \left[1 - \Phi\left(\frac{2.9 - \mu}{\sigma}\right)\right] \cdot \frac{358}{857} + \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(2.9) - \lambda}{\zeta}\right)\right] \cdot \frac{499}{857}. \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos que

$$\mu = 2.6165, \quad \sigma = \frac{2.3685 - \mu}{\Phi^{-1}(0.25)} = 0.3674074$$

y

$$\lambda = \ln(2.9270), \quad \zeta = \frac{\ln(2.6140) - \lambda}{\Phi^{-1}(0.25)} = 0.1675502,$$

con $\Phi{-1}(0.25) \approx -0.675$.

Reemplazando

$$\begin{aligned} p &\approx \left[1 - \Phi\left(0.77\right)\right] \cdot \frac{358}{857} + \left[1 - \Phi\left(-0.06\right)\right] \cdot \frac{499}{857} \\ &= 0.3972 \end{aligned}$$

(b) Definamos como Y al numero de piezas de salmón pesadas hasta observar la 3era que supera los 2.9 kilos.

$$Y \sim \text{Binomial-Negativa}(k = 3,\, p = 0.3972)$$

Se pide

$$P(Y > 6) = 1 - P(Y \leq 6) = 1 - \sum_{y=3}^{6} \binom{y-1}{3-1} p^3 \,(1-p)^{y-3} = 0.5501.$$

Alternativamente, podemos definir Z como el número de piezas de salmón que pesan mas de 2.9 kilos entre los primero 6 chequeados.

$$Z \sim \text{Binomial}(n = 6,\, p = 0.3972)$$

Se pide

$$P(Y > 6) = P(Z \leq 2) = \sum_{z=0}^{2} \binom{6}{z} p^z\, (1-p)^{6-z} = 0.5501$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por obtener μ y σ.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por obtener λ y ζ.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por obtener $p = 0.3972$.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por definir correctamente la variable aleatoria Binomial-Negativa (o Binomial).

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por la expresión de la probabilidad solicitada según Bin-Neg (o Binomial) del evento solicitado.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por obtener obtener el valor 0.5501. No descontar por error de arrastre en logro 3.

+ 1 Punto Base