Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2024

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C., Cristian Capetillo C., Ingrid Guevara R., Bladimir Morales T., Ricardo Olea O. y Daniel Saavedra M.**

PAUTA INTERROGACIÓN 3

Pregunta 1

Una empresa de servicios de ciberseguridad ofrece monitoreo y respuesta ante amenazas de seguridad específicamente para bancos, gestionando las alertas generadas por posibles intentos de ataque a sus sistemas. Estos eventos de alerta son críticos, ya que pueden representar intentos de acceso no autorizado, robos de datos o ataques de denegación de servicio, todos los cuales pueden comprometer la seguridad financiera y la confianza de los clientes en el banco.

Cada día, el sistema de monitoreo registra múltiples alertas de seguridad. El equipo de ciberseguridad ha observado que el número de alertas generadas en un día sigue un patrón de ocurrencia aleatoria, con un coeficiente de variación del 50 %. Esto indica que, aunque la frecuencia promedio de alertas diarias es relativamente constante, existe variabilidad significativa en el número de alertas que pueden producirse cada día.

Además, el costo de atender estas alertas depende de la cantidad total de alertas recibidas en un período determinado: cuando el número de alertas aumenta, el costo de atención también se incrementa debido a los recursos adicionales necesarios para investigar y mitigar cada evento. Para modelar esta relación, se define el número total de alertas en un período de t días como X_t, y el costo total de atención, dado que se atienden x alertas, se modela con una distribución que permite variabilidad en función de x. En este caso, se asume una distribución Gamma$(2,\, 1/x)$, lo cual refleja que el costo se ajusta en función de la cantidad de alertas y la complejidad que estas representan.

Dado que el número de alertas sigue una distribución de Poisson, determine el coeficiente de correlación entre el número de alertas en una semana y el costo total de atención para ese período.

Solución

Definamos Y como el costo asociado a x alertas.

Del enunciado se tiene que

$$X_t \sim \text{Poisson}(\nu\, t) \quad \text{e} \quad Y \mid X_t = x \sim \text{Gamma}(2,\, 1/x),$$

Para $t = 1$ se sabe que

$$\delta_{X_1} = \frac{1}{\sqrt{\nu \cdot 1}} = \frac{1}{2} \to \nu = 4.$$

Nos piden

$$\text{Corr}(X_7, Y) = \frac{\text{Cov}(X_7, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X_7) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{\text{E}(X_7 \cdot Y) - \text{E}(X_7)\text{E}(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X_7) \cdot \text{Var}(Y)}}.$$

Del formulario se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{E}(X_7) &= \nu \cdot 7 = 28, \\
\text{Var}(X_7) &= \nu \cdot 7 = 28, \\
\text{E}(Y) &= \text{E}[\text{E}(Y \mid X_7)] = \text{E}(2 \cdot X_7) = 2 \cdot \text{E}(X_7) = 2 \cdot 28, \\
\text{Var}(Y) &= \text{Var}[\text{E}(Y \mid X_7)] + \text{E}[\text{Var}(Y \mid X_7)] = \text{Var}(2 \cdot X_7) + \text{E}(2 \cdot X_t^2) \\
&= 4 \cdot \text{Var}(X_7) + 2 \cdot \text{E}(X_7^2) = 4 \cdot 28 + 2 \cdot (28 + 28^2) = \\
&= 4 \cdot 28 + 2 \cdot 28 \cdot (1 + 28) = 2 \cdot 28 \cdot 31, \\
\text{E}(X_7 \cdot Y) &= \text{E}[\text{E}(X_7 \cdot Y \mid X_7)] = \text{E}[X_7 \cdot \text{E}(Y \mid X_7)] \\
&= \text{E}[X_7 \cdot 2 \cdot X_t] = 2 \cdot \text{E}(X_7^2) = 2 \cdot 28 \cdot (28 + 1) = 2 \cdot 28 \cdot 29,
\end{aligned}$$

Reemplazando

$$\text{Corr}(X_7, Y) = \frac{2 \cdot 28 \cdot 29 - 28 \cdot 2 \cdot 28}{\sqrt{28 \cdot 2 \cdot 28 \cdot 31}} = \frac{2 \cdot 28}{28\sqrt{2 \cdot 31}} = \sqrt{\frac{2}{31}} = 0.254.$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[0.5 Ptos]** por el $\text{E}(X_7) = 28$ y **[0.5 Ptos]** por el $\text{Var}(X_7) = 28$.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por el $\text{E}(Y) = 2 \cdot 28 = 56$.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por el $\text{Var}(Y) = 2 \cdot 28 \cdot 31 = 1736$.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por el $\text{E}(X_7 \cdot Y) = 2 \cdot 28 \cdot 29 = 1624$.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por el $\text{Corr}(X_7, Y) = \dfrac{2 \cdot 28 \cdot 29 - 28 \cdot 2 \cdot 28}{\sqrt{28 \cdot 2 \cdot 28 \cdot 31}} = \dfrac{1624 - 1568}{\sqrt{28 \cdot 1736}} = \dfrac{2 \cdot 28}{28\sqrt{2 \cdot 31}}$.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por el $\text{Corr}(X_7, Y) = \sqrt{\dfrac{2}{31}} = 0.254$.

Nota: Si el alumno responde en términos de t, la respuesta sería $\sqrt{\dfrac{2}{3 + 4\,t}}$, no descontar puntaje en este caso.

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

En una sala de emergencias de un hospital, los pacientes llegan en promedio a una tasa de ν pacientes por hora, siguiendo un proceso de Poisson. Suponga que el tiempo que cada paciente permanece en la sala de emergencias antes de ser dado de alta o trasladado (en horas) sigue una distribución Exponencial con parámetro ν. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer paciente que ingresa sea dado de alta o trasladado antes que el segundo paciente?

Solución

Sea X el tiempo de permanencia del 1er paciente que ingresa e Y el tiempo de permanencia del 2do paciente más el tiempo transcurrido entre la llegada del 1ro y el 2do paciente.

Del enunciado se deduce que

$$X \sim \text{Exp}(\nu) \quad \text{y} \quad Y \sim \text{Gamma}(2, \nu)$$

Notar que ambas variables aleatorias son independientes.

Se pide $P(X < Y)$.

$$\begin{aligned}
P(X < Y) &= \int_0^\infty \int_x^\infty f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx = \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty \nu e^{-\nu x} \cdot \nu^2 y e^{-\nu y}\, dy\, dx = \int_0^\infty \left(\nu e^{-2\nu x} + \nu^2 x e^{-2\nu x}\right) dx \\
&= \int_0^\infty \nu e^{-2\nu x}\, dx + \int_0^\infty \nu^2 x e^{-2\nu x}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty 2\,\nu e^{-2\nu x}\, dx + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{(2\,\nu)^2}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-2\nu x}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.5 Ptos]** por indicar que $Y \sim \text{Gamma}(2, \nu)$.

Logro 2: Asignar **[1.5 Ptos]** por indicar que X e Y son independientes o aplicar que $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Logro 3: Asignar **[1.5 Ptos]** por determinar correctamente los limites de integración para el evento $X < Y$.

Logro 4: Asignar **[1.5 Ptos]** por llegar a que la respuesta es $\frac{3}{4}$.

Nota: Una alternativa es definir $Z = X/Y$, obtener $F_Z(z)$ y evaluar en cero. En este caso distribuir puntaje logros 3 y 4.

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

En el norte de Chile, donde las condiciones climáticas son favorables para la generación de energía eólica, es fundamental analizar los valores extremos de velocidad del viento para asegurar una generación continua de energía. Supongamos que la velocidad mínima diaria del viento V (medida en m/s) sigue una distribución Weibull($\eta = 8,\ \beta = 3$).

Dentro de un conjunto de 10 días críticos (no necesariamente consecutivos) en los que se espera una menor actividad de viento, los ingenieros desean evaluar el mínimo de velocidad que puede afectar la producción de energía y cómo esta velocidad mínima podría comportarse en el largo plazo.

(a) Determine la distribución de $V_{\text{mín}} = \text{mín}(V_1, V_2, \ldots, V_{10})$. Esto permitirá caracterizar los valores extremos bajos de velocidad de viento en estos 10 días críticos. Asume que las velocidades mínimas diarias son variables aleatorias independientes.

(b) Usando la fórmula $P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot V^3$, con una densidad del aire $\rho \approx 1.225$ kg/m^3, transforme la distribución de $V_{\text{mín}}$ para obtener la distribución de la potencia mínima generada $P_{\text{mín}}$ durante estos 10 días críticos. Notar que A es el área barrida por las aspas de la turbina en m^2, la cuál no es aleatoria por lo que la puede considerar como conocida.

(c) Suponga que se repite el análisis del mínimo de velocidad de viento en varios conjuntos de 10 días a lo largo de los años. Proponga una distribución aproximada y exacta para la potencia mínima promedio entre n conjuntos medidos a lo largo de los años. Asuma independencia entre las potencias mínimas entre conjuntos e identifique los parámetros de cada distribución que proponga.

Solución

(a) Por independencia e idéntica distribución tenemos que

$$F_{V_{\text{mín}}}(x) = 1 - [1 - F_V(x)]^n = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x\, n^{1/\beta}}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

$$\to f_{V_{\text{mín}}}(x) = \frac{\beta}{\eta/n^{1/\beta}} \left(\frac{x}{\eta/n^{1/\beta}}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta/n^{1/\beta}}\right)^{\beta}\right].$$

Por lo tanto

$$V_{\text{mín}} \sim \text{Weibull}\left(\frac{\eta}{n^{1/\beta}},\, \beta\right)$$

y reemplazando $\beta = 3$, $\eta = 8$ y $n = 10$ se tiene que

$$V_{\text{mín}} \sim \text{Weibull}\left(\frac{8}{10^{1/3}},\, 3\right).$$

(b) Tenemos que

$$F_{P_{\text{mín}}}(x) = P\left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot V_{\text{mín}}^3 \le x\right) = F_{V_{\text{mín}}}\left[\left(\frac{x}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A}\right)^{1/3}\right]$$

$$= 1 - \exp\left\{-\left[\left(\frac{x}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A}\right)^{1/3} \cdot \frac{10^{1/3}}{8}\right]^3\right\}$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{10 \cdot x}{256 \cdot \rho \cdot A}\right)$$

$$\to f_{P_{\text{mín}}}(x) = \frac{10}{256 \cdot \rho \cdot A} \exp\left(-\frac{10 \cdot x}{256 \cdot \rho \cdot A}\right).$$

Por lo tanto

$$P_{\text{mín}} \sim \text{Exponencial}\left(\frac{10}{256 \cdot \rho \cdot A}\right),$$

con $\rho \approx 1.225\,\text{kg/m}^3$.

(c) Definamos como X_i a la potencia mínima observada en el conjunto i-ésimo.

De (b) tenemos que

$$X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exponencial}\left(\frac{10}{256 \cdot \rho \cdot A}\right) = \text{Gamma}\left(1, \frac{10}{256 \cdot \rho \cdot A}\right).$$

Por lo tanto

$$\overline{X}_n \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{10 \cdot n}{256 \cdot \rho \cdot A}\right)$$

y por teorema central del límite

$$\overline{X}_n \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(\frac{256 \cdot \rho \cdot A}{10}, \frac{256 \cdot \rho \cdot A}{10\sqrt{n}}\right),$$

con $\rho \approx 1.225\,\text{kg/m}^3$.

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por obtener correctamente $F_{V_{\text{mín}}}(x)$ o $f_{V_{\text{mín}}}(x)$.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por indicar que $V_{\text{mín}} \sim \text{Weibull}\left(\frac{8}{10^{1/3}}, 3\right)$.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por obtener correctamente $F_{P_{\text{mín}}}(x)$ o $f_{P_{\text{mín}}}(x)$.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por indicar que $P_{\text{mín}} \sim \text{Exponencial}\left(\frac{10}{256 \cdot \rho \cdot A}\right)$.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por indicar que $\overline{X}_n \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{10 \cdot n}{256 \cdot \rho \cdot A}\right)$.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por indicar que $\overline{X}_n \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(\frac{256 \cdot \rho \cdot A}{10}, \frac{256 \cdot \rho \cdot A}{10\sqrt{n}}\right)$.

+ 1 Punto Base