Ayudantes: Michael Ramón: maramon@uc.cl
Juan Merino: jcamilo.merino@uc.cl
Diego Pérez: dtperez1@uc.cl
Christoph Bürger: christoph.buerger@uc.cl
Oscar Guerrero: oscar.guerrero@uc.cl

Ayudantía 9

Estimación de Momentos

Problema 1 *Máxima Verosimilitud y Estimador de Momentos*

Ayer miércoles 5 de julio a las 20:31:56 horas ocurrió un sismo de 5.8° en la escala de Richter. Las magnitudes de los n sismos que le siguieron distribuyen Log-Normal(λ, ζ). Bajo el supuesto que las magnitudes se comportan de manera independiente y que el parámetro ζ es conocido:

a) Obtenga el estimador de momento de λ.

b) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de λ y su distribución asintótica.

Solución:

Solución del problema 1

a) Igualando el momento empírico al momento teórico del formulario para la log-normal y despejamos λ.

$$\bar{X} = e^{\left(\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right)} \qquad \breve{\lambda} = \ln\left(\bar{X}\right) - \frac{1}{2}\zeta^2$$

b)

$$L(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \zeta^{-n} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{-1} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\zeta^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln(X_i) - \lambda)^2\right\}$$

aplicamos logaritmo natural:

$$\ln L(\lambda) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\log(\zeta) - \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) - \frac{1}{2\zeta^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln(X_i) - \lambda)^2$$

como buscamos maximizar, derivamos con respecto a λ e igualamos a 0

$$\frac{\partial(\ln(l(\lambda))}{\partial\lambda} = 0$$

$$0 = -\frac{1}{2\zeta^2}\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot -1(\ln(X_i) - \lambda)$$

Despejando λ

$$\frac{1}{\zeta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) = n\frac{\lambda}{\zeta^2}, \qquad \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)$$

Ahora para la distribución asintótica, la esperanza del método de máxima verosimilitud es el parámetro λ y la desviación se obtiene por la información de Fisher.

$$I(\lambda) = -E\left[\frac{\partial^2(\ln(l(\lambda)))}{\partial\lambda^2}\right] \qquad \frac{\partial^2(\ln(l(\lambda)))}{\partial\lambda^2} = -\frac{n}{\zeta^2}$$

$$I(\lambda) = -E\left[-\frac{n}{\zeta^2}\right] = \frac{n}{\zeta^2}$$

Con la información de Fisher ya podemos obtener la varianza del parámetro estimado $\hat{\lambda}$.

$$Var\left(\hat{\lambda}\right) = \frac{1}{I(\lambda)} = \frac{\zeta^2}{n}$$

$$\hat{\lambda} \sim Normal\left(\lambda, \sqrt{\frac{\zeta^2}{n}}\right)$$

Problema 2 *Estimador de Momentos y eficiencia*

Considere una muestra aleatoria de tamaño n proveniente de una distribución $Uniforme(0, \theta)$.

a) Obtenga el estimador de momento para θ y calcule su error cuadrático medio.

b) Se propone como estimador para θ el máximo valor observado en la muestra, el cual distribuye Beta$(n, 1)$ con soporte en el intervalo $(0, \theta)$. ¿Este estimador es más eficiente que el obtenido en (a)?

Solución:

Solución Problema 2

a) Igualamos el momento empírico a al teórico:

$$\frac{0+\theta}{2} = \bar{X} \qquad \hat{\theta} = 2\bar{X}$$

Para el error cuadrático medio es necesario obtener la esperanza y varianza del parámetro estimado.

$$E\left[\hat{\theta}\right] = E\left[2\bar{X}\right] = 2E\left[\bar{X}\right] = \theta \qquad Var\left[\hat{\theta}\right] = Var\left[2\bar{X}\right] = 4Var\left[\bar{X}\right] = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$ECM[\hat{\theta}] = Var\left[\hat{\theta}\right] + Sesgo^2$$

$$ECM[\hat{\theta}] = \frac{\theta^2}{3n} + (\theta - \theta)^2 = \frac{\theta^2}{3n}$$

b) Como distribuye Beta del formulario tenemos que:

$$E(\tilde{\theta}) = \frac{n\theta}{n+1} \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}(\tilde{\theta}) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

$$\mathrm{ECM}(\tilde{\theta}) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} + \left[\frac{n\theta}{n+1} - \theta\right]^2 = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Ahora resta comparar los ECM para ver cual es más eficiente

$$\frac{\mathrm{ECM}(\tilde{\theta})}{\mathrm{ECM}(\hat{\theta})} = \frac{6n}{(n+1)(n+2)} \to 0,$$

cuando $n \to \infty$, por lo que efectivamente $\tilde{\theta}$ es más eficiente para estimar θ que $\hat{\theta}$.

Problema 3 *Estimación de Momentos*

Durante el reciente fenómeno acaecido en Concepción-Chile (tornados y trombas marinas), un especialista realizó, con un anemómetro, mediciones de velocidad de viento (m/s). La siguiente figura y salidas de R muestran el comportamiento empírico de las mediciones obtenidas:

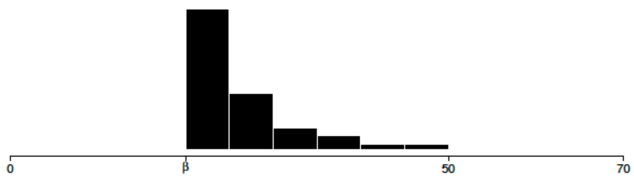

Figura 1: Comportamiento de los fenómenos climáticos

N	min(x)	max(x)	sum(x)	sum(log(x))
40	25.02385	50.04845	1259.933	137.4285

Un posible modelo que podría ajustar bien este comportamiento empírico está dado por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{\theta\,\beta^\theta}{x^{\theta+1}}, \quad \text{para } x > \beta \quad y \quad \theta > 1.$$

a) Obtenga el estimador de momentos y de máxima verosimilitud de θ. Por simplicidad, considere β conocido e igual a 25 m/s.

Solución:

Solución Problema 2

a) Calculamos el primer momento teórico

$$E(X) = \int_\beta^\infty x \cdot \frac{\theta\,\beta^\theta}{x^{\theta+1}}\,dx = \frac{\theta\,\beta^\theta}{\theta-1}\int_\beta^\infty \frac{(\theta-1)\beta^{\theta-1}}{x^{(\theta-1)+1}}\,dx = \frac{\theta\,\beta}{\theta-1}\cdot 1$$

Ahora igualando al primer momento empírico

$$\frac{\theta\,\beta}{\theta-1} = \bar{X}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-25}$$

Ahora por máxima verosimilitud

$$L(\theta) = \theta^n B^{n\theta}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{-(\theta+1)}$$

$$\ln L(\theta) = n\ln(\theta) + n\theta\ln(\beta) - (\theta+1)\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$$

$$\frac{\partial(\ln L(\theta))}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + n\ln(\beta) - \sum_{i=1}^n \ln(X_i)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i) - n\ln(\beta)} = 4{,}6117$$