Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano (enero 2024)

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C., Felipe Ossa M.**

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Considere un espacio muestral $\mathcal{S}$, y dos eventos A y B tales que

$$P(A \cap B) = 0.2\ , \quad P(A \cup B) = 0.6\ , \quad P(B \cup \bar{A}) = 0.8$$

(a) **[0.5 puntos]** Calcule $P(A)$.

(b) **[0.5 puntos]** Calcule $P(B)$.

Solución:

(a) Ya que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, una unión disjunta, se tiene

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ &= P(A \cap B) + 1 - P(\overline{A \cap \bar{B}}) \\ &= P(A \cap B) + 1 - P(\bar{A} \cup B) \\ &= 0.2 + 1 - 0.8 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

(b) Usando la ley aditiva, y el resultado en (a)

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ 0.6 &= 0.4 + P(B) - 0.2 \\ P(B) &= 0.4 \end{aligned}$$

Alternativamente, como $A \cup B = B \cup (A \cap \bar{B})$, una unión disjunta, entonces

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(B) + P(A \cap \bar{B}) \\ P(A \cup B) &= P(B) + 1 - P(\bar{A} \cup B) \\ 0.6 &= P(B) + 1 - 0.8 \\ P(B) &= 0.4 \end{aligned}$$

Pregunta 2

Sernatur ha publicado estadísticas respecto a cuándo y dónde vacacionan los chilenos.

Parte del informe indica: Considerando solo los meses de enero y febrero, el mes preferido es febrero donde el 60 % toma sus vacaciones. También la quincena es relevante, dado que de los que toman vacaciones en enero, 1/3 lo hace en la 1ª quincena del mes, mientras que los que toman vacaciones en febrero un tercio lo hace en la 2ª quincena del mes. En relación con el destino, en la 2ª quincena de enero y en la 1ª quincena de febrero los destinos se distribuyen con igual probabilidad (es decir, 50 % nacional, 50 % extranjero). Estos valores cambian en las otras quincenas. De hecho, en la 2ª quincena de febrero solo el 20 % opta por ir al extranjero, mientras que en la 1ª quincena de enero el 30 % se dirige al extranjero.

Asuma que sólo se vacaciona en una de las cuatro quincenas entre enero o febrero y sólo tiene un destino, ya sea nacional o extranjero.

(a) **[0.3 Ptos]** Para un chileno que vacaciona en febrero escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad que lo haga en territorio nacional?

(b) **[0.7 Ptos]** ¿Cuál es la probabilidad que un chileno escogido al azar tome vacaciones en el extranjero?

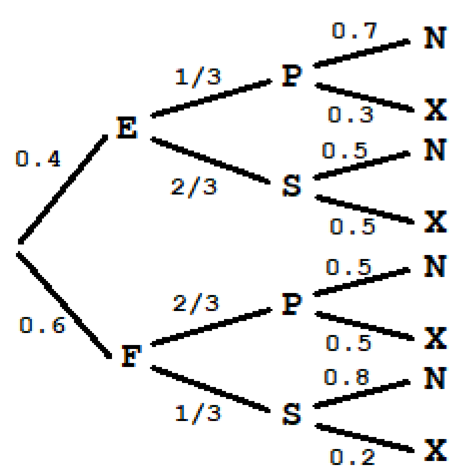
Solución:
Definiendo los eventos

- E, F: persona toma vacaciones en enero o febrero respectivamente.
- P, S: persona toma vacaciones en primera o segunda quincena del mes, respectivamente.
- N, X: persona viaja a destino nacional o al extranjero, respectivmente.

Se tiene la información

$$\begin{aligned} P(E) &= 0.4 & P(F) &= 0.6 \\ P(P|E) &= 1/3 & P(S|E) &= 2/3 \\ P(P|F) &= 2/3 & P(S|F) &= 1/3 \\ P(N|E\cap P) &= 0.7 & P(X|E\cap P) &= 0.3 \\ P(N|E\cap S) &= 0.5 & P(X|E\cap S) &= 0.5 \\ P(N|F\cap P) &= 0.5 & P(X|F\cap P) &= 0.5 \\ P(N|F\cap S) &= 0.8 & P(X|F\cap S) &= 0.2 \end{aligned}$$

o el árbol de probabilidades



(a) Se pide $P(N|F)$. Por ley de probabilidades totales,

$$\begin{aligned}
P(N|F) &= P(N|P \cap F) \cdot P(P|F) + P(N|S \cap F) \cdot P(S|F) \\
&= 0.5 \cdot \frac{2}{3} + 0.8 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1.8}{3} \\
&= 0.6
\end{aligned}$$

Alternativamente

$$\begin{aligned}
P(N \cap F) &= P(N|P \cap F) \cdot P(P|F)P(F) + P(N|S \cap F) \cdot P(S|F)P(F) \\
&= 0.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.6 + 0.8\frac{1}{3} \cdot 0.6 \\
&= 0.36
\end{aligned}$$

Y finalmente,

$$P(N|F) = \frac{P(N \cap F)}{P(F)} = \frac{0.36}{0.6} = 0.6$$

(b) Se pide $P(X)$. Por medio de probabilidades totales,

$$\begin{aligned}
P(X) &= P(X|P \cap F) \cdot P(P|F)P(F) + P(X|S \cap F) \cdot P(S|F)P(F) \\
&\quad + P(X|P \cap E) \cdot P(P|E)P(E) + P(X|S \cap E) \cdot P(S|E)P(E) \\
&= P(X|F) \cdot 0.6 + 0.3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.4 + 0.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.4 \\
&= 0.4 \cdot 0.6 + \frac{0.52}{3} \\
&\approx 0.4133
\end{aligned}$$

Pregunta 3

El número total de alumnos inscritos en el curso EYP1113-TAV alcanzó a 113. Suponga que los inscritos fueron distribuidos al azar en dos secciones, tal que 65 y 48 fueron asignados a la sección 1 y 2, respectivamente.

(a) **[0.5 Ptos]** Si 5 alumnos de los inscritos en EYP1113-TAV son seleccionados al azar, ¿cuál es la probabilidad que exactamente 2 de ellos hayan sido asignados a la sección 2?

(b) **[0.5 Ptos]** Si usted junto a su amigo(a) del alma inscribieron el curso EYP1113-TAV, ¿cuál es la probabilidad que hayan sido asignados a la misma sección?

Solución

(a) Ejercicio de probabilidad clásica. Se proponen dos alternativas de solución.

- *Alternativa 1:* Se puede considerar el espacio muestral de muestra (sin remplazo) de un total de 113 personas.

$$\#S = \frac{113!}{(113-5)!} = 113 \cdot 112 \cdots 109$$

Para contar el evento que 2 de esas 5 personas pertenezcan a la sección 2 (de 48 integrantes), entonces la siguiente cantidad de permutaciones tiene a dos personas en sección 2 y 3 en sección 1.

$$\#A = 65 \cdot 64 \cdot 63 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \binom{5}{3}$$

Donde el último factor consiste en diferentes órdenes en que se ubican estudiante de sección 1 o sección 2. Por lo tanto, la probabilidad pedida es

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{65 \cdot 64 \cdot 63 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 10}{113 \cdot 112 \cdot 111 \cdot 110 \cdot 109} = 0.3510$$

- *Alternativa 2:* Se puede considerar el espacio muestra de combinaciones de 5 estudiantes de un total de 113.

$$\#S = \binom{113}{5}$$

Para contar al evento que 2 de esas 5 personas pertenezcan a la sección 2 (de 48 integrantes), entonces la siguiente cantidad de combinaciones tiene a dos personas en sección 2 y 3 en sección 1.

$$\#A = \binom{65}{3} \cdot \binom{48}{2}$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{\binom{65}{3} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{113}{5}} = 0.3510$$

(b) Para este evento, se debe analizar el espacio de asignaciones completas de los 113 estudiantes. Se ofrecen dos alternativas de solución.

- *Alternativa 1:* Haciendo una permutación de los 113 estudiantes, y considerando los 65 primeros como Sección 1 y los otros 48 como sección 2, entonces se pueden hacer la siguiente cantidad de permutaciones

$$\#S = 113!$$

El evento que dos personas en particular (usted y su amigo(a)) queden en la misma sección puede calcularse separando el caso en quedar ambos en sección 1 (A_1) o ambos en sección 2 (A_2).

$$\#A = \#A_1 + \#A_2$$

donde

$$\#A_1 = 65 \cdot 64 \cdot 111!$$

y

$$\#A_2 = 48 \cdot 47 \cdot 111!$$

donde los primeros factores representan la cantidad de posiciones en que pueden ubicarse estas dos personas y aún estar dentro de sección 1 y 2, respectivamente. Las 111 personas restantes pueden ser asignadas de cualquier manera.

La probabilidad pedida es, entonces

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{65 \cdot 64 \cdot 111! + 48 \cdot 47 \cdot 111!}{113!} = \frac{65 \cdot 64 + 48 \cdot 47}{113 \cdot 112} = 0.50695$$

- *Alternativa 2:* Considerando la cantidad de combinaciones que se puede formar seleccionando 65 personas para la sección 1 de un total de 113, tenemos casos totales

$$\#S = \binom{113}{65}$$

Y la cantidad de combinaciones para que usted y su amigo(a) estén en la sección 1 ó 2 (eventos A_1 y A_2 respectivamente), se calculan como

$$\#A_1 = \binom{2}{2} \cdot \binom{111}{63} \cdot \binom{45}{45} = \binom{111}{63}$$

y

$$\#A_2 = \binom{2}{2} \cdot \binom{111}{46} \cdot \binom{65}{65} = \binom{111}{46}$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es

$$P(A) = \frac{\#A_1 + \#A_2}{\#S} = \frac{\binom{111}{63} + \binom{111}{46}}{\binom{113}{65}} = 0.50695$$

- *Alternativa 3:* Como variante de la alternativa 2, el siguiente cálculo también es correcto

$$\#S = \binom{113}{2}$$

y

$$\#A = \binom{65}{2} + \binom{48}{2}$$

donde el espacio muestral y resultados representa las posiciones en la lista que usted y su amigo(a) fueron asignados. El evento A considera pertenecer ambos en los 65 primeros, más pertentecer ambos en los 48 últimos en la lista. La probabilidad pedida es

$$P(A) = \frac{\binom{65}{2} + \binom{48}{2}}{\binom{113}{2}} = 0.50695$$

Pregunta 4

Considere una variable aleatoria continua X con soporte $[0, 4]$ y función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \\ \dfrac{4-x}{6} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre el primer y tercer cuartil de X (percentiles 25 % y 75 %) (**[0.5 puntos]** cada uno)

Solución

El primer cuartil se puede obtener resolviendo c_1 de la ecuación,

$$F_X(c_1) = 0.25$$

donde

$$F_X(c_1) = \int_0^{c_1} f_X(x)\, dx = \int_0^{c_1} \frac{1}{3}\, dx = \frac{c_1}{3}$$

por lo tanto

$$c_1 = 0.25 \cdot 3 = 0.75$$

El tercer cuartil se obtiene resolviendo c_3 de la ecuación

$$F_X(c_3) = 0.75$$

donde

$$\begin{aligned} F_X(c_3) &= \int_0^{c_3} f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^{2} \frac{1}{3}\, dx + \int_2^{c_3} \frac{4-x}{6}\, dx \\ &= \frac{2}{3} + \left[-\frac{(4-x)^2}{12} \right]_{x=2}^{x=c_3} \\ &= 1 - \frac{(4-c_3)^2}{12} \end{aligned}$$

Por lo tanto, despejamos c_3,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(4-c_3)^2}{12} &= 0.75 \\ \frac{(4-c_3)^2}{12} &= 0.25 \\ (4-c_3)^2 &= 3 \\ 4 - c_3 &= \sqrt{3} \\ c_3 &= 4 - \sqrt{3} \\ c_3 &\approx 2.26795 \end{aligned}$$

donde al final se obtiene la raíz positiva, de lo contrario resultaría en un valor fuera del soporte. Ese valor es conceptualmente inválido para este ejercicio.

Pregunta 5

Una bolsa de papas fritas (chips) de la marca C son vendidas con peso 200 gramos, pero el peso real de una bolsa es aleatorio y se modela con distribución Normal con media $\mu = 200$ gramos y coeficiente de variación $\delta = 0.08$. Asuma que los pesos de cada bolsa son estadísticamente independientes.

(a) **[0.4 puntos]** Calcule la probabilidad de que una bolsa, escogida al azar, de papas fritas de esta marca, al momento de pesarla, indique un peso menor a 180 gramos.

(b) **[0.3 puntos]** Si se seleccionan al azar 8 bolsas de papas fritas de esta marca, ¿cuál es la probabilidad que sólo 6 de ellas pesen **más** de 180 gramos cada una?

(c) **[0.3 puntos]** Si se revisaran y pesaran bolsas de un gran cargamento, una a la vez de manera consecutiva, ¿cuántas bolsas se esperaría pesar hasta encontrar una que pese menos de 180 gramos?

Solución

(a) Considerando X como el peso de una bolsa de papas escogida al azar, entonces, X tiene distribución normal con media $\mu = 200$ y desviación estándar $\sigma = 0.08 \cdot 200 = 16$ (en gramos). La probabilidad pedida es

$$P(X < 180) = \Phi\left(\frac{180 - 200}{16}\right) = \Phi(-1.25) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

(b) La cantidad X de bolsas que pesan más que 180 gramos de un total de 8, tiene distribución Binomial con parámetros $n = 8$ y $p = 0.8944$. Alternativamente la cantidad Y de bolsas que pesan menos que 180 gramos de un total de 8 tiene distribución Binomial$(n = 8, p = 0.1056)$. La probabilidad pedida es

$$P(X = 6) = \binom{8}{6} 0.8944^6 \cdot 0.1056^2 \approx 0.1598$$

equivalentemente,

$$P(Y = 2) = \binom{8}{2} 0.1056^2 \cdot 0.8944^6 \approx 0.1598$$

(c) La cantidad N de bolsas que se pesarían hasta seleccionar una que pese menos que 180 gramos tiene distribución Geométrica con parámetro $p = 0.1056$ (del ítem (a)). Su valor esperado es

$$E(N) = \frac{1}{p} = 9.4696$$

Pregunta 6

Lamentablemente, durante enero las *incivilidades* (hurtos, robos, beber alcohol, etc.) se han trasladado al litoral. Suponga que en una playa muy concurrida (ej. El Quisco) el número de incivilidades que se cometen entre las 14.00 y 20.00 hrs de un día de enero cualquiera se comportan como un proceso Poisson con una tasa promedio de 7 incivilidades durante ese intervalo de tiempo.

(a) **[0.4 puntos]** Entre las 15.00 y 18.00 hrs, ¿cuál es la probabilidad que en esta playa ocurran al menos dos incivilidades?

(b) **[0.3 puntos]** Hoy a las 16:30 hrs, acaba de ocurrir una incivilidad en esta playa, ¿cuál es la probabilidad que en los próximos 45 min ocurra al menos una nueva incivilidad?

(c) **[0.3 puntos]** Hoy a las 16:30 hrs, acaba de ocurrir una incivilidad en esta playa, ¿cuál es el tiempo esperado hasta que ocurra una nueva incivilidad?

Solución

(a) La cantidad N_1 de incivilidades entre las 15 y 18 horas en la playa tiene distribución Poisson con parámetro

$$\lambda = \nu \cdot 3$$

donde ν corresponde a la tasa de ocurrencia *por hora*. Según el enunciado, en 6 horas ocurren en promedio 7, por lo tanto

$$\nu = \frac{7}{6} = 2.333$$

(equivalentemente, $\nu' = \frac{7}{6 \cdot 60} = 0.0194$ que es la tasa de ocurrencia *por minuto*)

La probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(N_1 \geq 2) &= 1 - P(N_1 = 0) - P(N_1 = 1) \\ &= 1 - \frac{(\frac{7}{6} \cdot 3)^0 \cdot e^{-\frac{7}{6} \cdot 3}}{0!} - \frac{(\frac{7}{6} \cdot 3)^1 \cdot e^{-\frac{7}{6} \cdot 3}}{1!} \\ &= 1 - e^{-7/2} - \frac{7}{2} \cdot e^{-7/2} \\ &= 0.86411 \end{aligned}$$

(b) El tiempo T_1 (en horas) que transcurre desde un instante cualquiera hasta una nueva incivilidad tiene distribución Exponencial$(7/6)$. 45 minutos equivale a 0.75 horas, por lo tanto la probabilidad pedida equivale a que la siguiente ocurrencia sucede antes de 45 minutos.

$$P(T_1 < 0.75) = 1 - e^{-\frac{7}{6} \cdot 0.75} = 0.5831$$

Alternativamente, se considera la probabilidad que no ocurran incivilidades entre las 16:30 y 17:15 horas. Dicha cantidad N_2 tiene distribución Poisson con parámetros $\lambda = \frac{7}{6} \cdot 0.75$, por lo tanto la probabilidad pedida es

$$P(N_2 \geq 1) = 1 - P(N_2 = 0) = 1 - \frac{(\frac{7}{6} \cdot 0.75)^0 \cdot e^{-\frac{7}{6} \cdot 0.75}}{0!} = 1 - e^{-\frac{7}{8}} = 0.5831$$

(c) El tiempo T_1 (en horas) que transcurre desde un instante cualquiera hasta una nueva incivilidad tiene distribución Exponencial$(7/6)$. Su valor esperado corresponde a

$$E(T_1) = \frac{1}{\nu} = \frac{6}{7} = 0.8571 \text{ horas}$$

Equivalentemente en minutos,

$$E(T_1) = \frac{1}{\nu'} = \frac{360}{7} = 51.4286 \text{ minutos}$$