Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano (enero 2025)

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Hernán Robledo A. - Felipe Ossa M.**

Esperanza de Distribución Normal

Sea una variable aleatoria X que sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Queremos calcular el valor esperado $\mathsf{E}(X)$, definido como:

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx.$$

Sustituyendo la función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ en la definición de $\mathsf{E}(X)$:

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Factorizamos los términos constantes fuera de la integral:

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Realizamos el cambio de variable $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$, de donde $x = \mu + u\sigma$ y $dx = \sigma\, du$. Los límites de integración permanecen $-\infty$ a ∞ porque la distribución normal es definida en toda la recta real. Sustituyendo, obtenemos:

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + u\sigma) e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Distribuimos el término $\mu + u\sigma$ dentro de la integral:

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \right].$$

Notemos que la primera integral es la acumulada de una distribución normal estándar sólo que le falta la constante $\sqrt{2\pi}$. Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \sqrt{2\pi}.$$

De la segunda integral, se puede identificar lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \int_{-\infty}^{0} u e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \int_{0}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = -\int_{0}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \int_{0}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 0.$$

En otras palabras, el integrando es una función impar, por lo que la integral sobre los reales es igual a cero. Así, se tiene que

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\mu\sqrt{2\pi} + \sigma \cdot 0 \right] = \mu.$$

Varianza de Distribución Normal

Calculamos la varianza como $\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - \text{E}(X)^2$. El primer momento ya lo conocemos y es $\text{E}(X) = \mu$. El segundo momento de X está dado por

$$\text{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Hacemos el cambio de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, de modo que $x = \mu + \sigma z$ y $dx = \sigma dz$. Sustituyendo en la integral:

$$\text{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz.$$

Expandiendo $(\mu + \sigma z)^2$:

$$(\mu + \sigma z)^2 = \mu^2 + 2\mu\sigma z + \sigma^2 z^2.$$

Por lo tanto:

$$\text{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mu^2 + 2\mu\sigma z + \sigma^2 z^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz.$$

Separando en tres integrales:

$$\text{E}(X^2) = \mu^2\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + 2\mu\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

- La primera integral es la integral de una función de densidad normal estándar, que es igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1.$$

- La segunda integral es la esperanza de una normal estándar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.$$

- Para resolver la tercera integral se usa una propiedad auxiliar. Primero, se hace un cambio de variable $u = \frac{z^2}{2}$, de manera que $z^2 = 2u$ y $dz = \frac{du}{\sqrt{2u}}$ para valores positivos. Así, obtenemos que:

$$\int_0^{\infty} \frac{2u}{\sqrt{2\pi}} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{2u}} du = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2u} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-u} du = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du.$$

Esta última integral es conocida como la función Gamma. La función Gamma (que aparece en formulario) está dada por $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}$, y tiene propiedades que nos permitirán obtener un valor para esta integral. En este caso en particular, tenemos que

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\infty} u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du.$$

Una propiedad clave de la función Gamma es que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Utilizando esta propiedad, tenemos que

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Por otra parte, se da en formulario que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Así, finalmente,$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Sustituyendo, la integral resulta ser:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 1.$$

Reuniendo todos los resultados, se tiene que

$$\text{E}(X^2) = \mu^2\sigma \cdot 1 + 2\mu\sigma^2 \cdot 0 + \sigma^2 \cdot 1 = \mu^2 + \sigma^2.$$

Finalmente, la varianza es

$$\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - \text{E}(X)^2 = \sigma^2.$$