Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano (enero 2023)

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O. y Felipe Ossa M.**

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Sea A, B y C, tres eventos asociados a un mismo espacio muestral. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $P\left([A \cap B] \cup \overline{C}\right)$?

(a) $P\left(A \cap \overline{C}\right) + P\left(B \cap \overline{C}\right)$.

(b) $P\left(A \cup \overline{C}\right) \cdot P\left(B \cup \overline{C}\right)$.

(c) $P\left(A \cap B\right) + P\left(\overline{C}\right)$.

(d) $P\left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}\right)$.

(e) $P\left([\overline{A} \cap \overline{B}] \cup C\right)$.

(f) $1 - P\left([\overline{A} \cup \overline{B}] \cap C\right)$.

(g) $1 - P\left(A \cap B \cap \overline{C}\right)$.

(h) $1 - P\left(\overline{[A \cup B]} \cap C\right)$.

(i) Ninguna de las anteriores.

Solución

Tenemos que

$$\begin{aligned}
P([A \cap B] \cup \overline{C}) &= 1 - P(\overline{[A \cap B] \cup \overline{C}}) \quad \text{por regla del complemento} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= 1 - P(\overline{A \cap B} \cap C) \quad \text{por De Morgan} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= 1 - P([\overline{A} \cup \overline{B}] \cap C) \quad \text{por De Morgan} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la alternativa (f) es la correcta.

La alternativa (c) no es correcta porque $A \cap B$ y $\overline{C}$ no son necesariamente disjuntos.

Pregunta 2

Un grupo de apoderados de un colegio, se animo a realizar un campeonato de pádel. Se inscribieron 10 hombres y 6 mujeres, por lo cual se procedió a arrendar 4 canchas, ya que se juega comúnmente en parejas. Si las parejas son formadas al azar, ¿cuál es la probabilidad que no hayan parejas mixtas en competencia?

Solución

- **Alternativa 1: (combinaciones de parejas)** Tenemos que los casos totales son

$$\# S = \frac{16!}{(2!)^8 \cdot 8!}, \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

mientras que los casos totales están dados por

$$\# A = \frac{10!}{(2!)^5 \cdot 5!} \cdot \frac{6!}{(2!)^3 \cdot 3!} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Por lo tanto la probabilidad solicitada es

$$P(A) = \frac{\frac{10!}{(2!)^5 \cdot 5!} \cdot \frac{6!}{(2!)^3 \cdot 3!}}{\frac{16!}{(2!)^8 \cdot 8!}} = \frac{10!\ 6!\ 8!}{16!\ 3!\ 5!} = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{16}{10}} = 0.006993007 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

- **Alternativa 2: (permutaciones de parejas)** Tenemos que los casos totales son

$$\# S = \binom{16}{2\ 2\ 2\ \cdots\ 2} = \frac{16!}{(2!)^8}, \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

mientras que los casos totales están dados por

$$\# A = \binom{10}{2\ 2\ 2\ 2\ 2} \cdot \binom{6}{2\ 2\ 2} \cdot \binom{8}{5} = \frac{10!}{(2!)^5} \cdot \frac{6!}{(2!)^3} \cdot \binom{8}{5} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Por lo tanto la probabilidad solicitada es

$$P(A) = \frac{\frac{10!}{(2!)^5} \cdot \frac{6!}{(2!)^3} \cdot \binom{8}{5}}{\frac{16!}{(2!)^8}} = \frac{10! \cdot 6! \binom{8}{5}}{16!} = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{16}{10}} = 0.006993007 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

- **Alternativa 3: (permutaciones de jugadoras/es)** Los casos totales son

$$\# S = 16!, \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

mientras que los casos totales están dados por

$$\# A = 10! \cdot 6! \cdot \binom{8}{5} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Por lo tanto la probabilidad solicitada es

$$P(A) = \frac{10! \cdot 6! \cdot \binom{8}{5}}{16!} = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{16}{10}} = 0.006993007 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Pregunta 3

Hoy en día existen 3 vías de admisión a la UC - centralizada (vía PAES), equidad (incluye talento, discapacidad, entre otras) y complementaria (deportistas, titulados, entre otras). Por otra parte, estas vías de admisión operan de manera independiente. Suponga que las probabilidades que un postulante cualquiera sea aceptado por estas vías son 0.16, 0.04 y 0.02, respectivamente. Si un alumno fue aceptado y además postuló por las tres vías, ¿cuál es la probabilidad que su ingreso a la Universidad sea deba a que solo fue aceptado por vía de equidad?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A: Postulante aceptado por vía centralizada.
B: Postulante aceptado por vía equidad.
C: Postulante aceptado por vía complementaria.
D: Postulante es aceptado.
F: Postulante es aceptado exclusivamente por equidad.

Se pide $P(F \mid D) = \dfrac{P(F \cap D)}{P(D)}$.

Notemos que

$$D = A \cup B \cup C \quad \text{y} \quad F = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}.$$

Por ley del complemento, De Morgan e independencia

$$P(D) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - 0.84 \cdot 0.96 \cdot 0.98 = 0.209728. \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Por independencia

$$P(F) = P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) = 0.84 \cdot 0.04 \cdot 0.98 = 0.032928 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Por lo tanto

$$P(F \mid D) = \frac{0.032928}{0.209728} = 0.1570034 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Pregunta 4

Parte importante de las comunas del Gran Santiago se abastecen de agua desde tres cuencas: Arrayán , Mapocho y Maipo, cuyas participaciones son 5 %, 10 % y 85 % respectivamente.

Este fin de semana en la cordillera se produjeron tormentas eléctricas que provocan desprendimientos, los cuales enturbiaron de sobremanera el agua haciendo que los filtros y lagunas estabilizadoras en algunos casos no lograran eliminar la turbiedad como habitualmente lo hacen.

Suponga que los filtros y lagunas estabilizadoras pueden verse superadas, bajo estas condiciones climáticas, con las siguientes probabilidades: 10 %, 8 % y 4 % respectivamente. En el caso de verse superadas, logran eliminar la turbiedad el 20 %, 30 % y 50 % de las veces respectivamente.

Si hoy, en una casa cualquiera, el agua el agua salió turbia, ¿cuál es la probabilidad que esta provenga de la cuenca del Maipo?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A_1: Agua proveniente cuenca Arrayán.
A_2: Agua proveniente cuenca Mapocho.
A_3: Agua proveniente cuenca Maipo.
B: Filtros y lagunas estabilizadoras superadas.
C: Se logra eliminar turbiedad.

Se pide $P(A_3 \,|\, \overline{C})$.

Por Teorema de Bayes y Teorema de Probabilidades Totales se tiene que

$$P(A_3 \,|\, \overline{C}) = \frac{P(\overline{C} \cap B \cap A_3) + P(\overline{C} \cap \overline{B} \cap A_3)}{P(\overline{C} \cap B \cap A_1) + P(\overline{C} \cap B \cap A_2) + P(\overline{C} \cap B \cap A_3) + P(\overline{C} \cap \overline{B} \cap A_1) + P(\overline{C} \cap \overline{B} \cap A_2) + P(\overline{C} \cap \overline{B} \cap A_3)}$$

$$P(A_3 \,|\, \overline{C}) = \frac{P(\overline{C} \cap B \cap A_3) + 0}{P(\overline{C} \cap B \cap A_1) + P(\overline{C} \cap B \cap A_2) + P(\overline{C} \cap B \cap A_3) + 0 + 0 + 0} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

$$= \frac{0.50 \cdot 0.04 \cdot 0.85}{0.80 \cdot 0.10 \cdot 0.05 + 0.70 \cdot 0.08 \cdot 0.10 + 0.50 \cdot 0.04 \cdot 0.85} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

$$= 0.6390977 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Pregunta 5

El volcán Villarrica es un estrato volcán chileno de 2847 m s.n.m. y es uno de los más activos de Sudamérica.

Desde `www.sernageomin.cl` se obtuvieron el número diario de sismos y sismos LP (asociados al movimiento de fluidos al interior del volcán) que se registraron en el último año.

La base de datos `Villarrica.xlsx` presenta la información diaria del último año. Estime a partir del promedio de los datos, para ambos casos, el parámetro de un modelo Poisson.

Según los coeficientes de variación empíricos, ¿cuál de los dos tipos de sismos registrados diariamente presentan un comportamiento más cercano a lo esperado de un modelo Poisson?

Hint: Si $X \sim$ Poisson(λ), entonces su función de probabilidad está dada por

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x \, e^{-\lambda}}{x!},$$

con $x \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$, $\mu_X = \lambda$ y $\sigma_X^2 = \lambda$.

Solución

```
Data <- rio::import("Villarrica.xlsx")
X <- Data$Sismos
lambda.X <- mean(X)
delta.X <- 1/sqrt(lambda.X)
delta <- sd(X)/mean(X)

cbind(lambda.X, delta.X, delta, delta/delta.X)
      lambda.X delta.X   delta  delta/delta.X
[1,] 0.5357143 1.36626 3.42566       2.507326

cbind(lambda.Y, delta.Y, delta, delta/delta.Y)
     lambda.Y    delta.Y    delta  delta/delta.Y
[1,]  272.044 0.06062901 1.018946       16.80625
```

Respuesta: SISMOS | $\delta_X = 1.36626$

[0.4 Ptos.]: Por indicar que el coeficiente de variación empírico es 2.5 veces lo esperado en SISMOS ó que el teórico es 0.3988312 lo observado.
[0.4 Ptos.]: Por indicar que el coeficiente de variación empírico es 16.8 veces lo esperado en SISMOS LP ó que el teórico es 0.05950167 lo observado.
[0.2 Ptos.]: SISMOS presenta un comportamiento más cercano a lo que se esperaría en un modelo Poisson.

Pregunta 6

La base de datos `Fondos.xlsx` contiene una muestra de 138 fondos de inversión. Cada uno de estos fondos tienen un cambio de clasificación de riesgo desde A (más riesgoso) a E (menos riesgoso). En el último año algunos de estos fondos cambiaron de clasificación de riesgo. Las variables se describen a continuación.

- Numero: Código identificatorio del fondo de inversión.
- Antigua: Clasificación de riesgo hace un año (A a E)
- Nueva: Clasificación de riesgo actual (A a E).
- Renta: Rentabilidad actual (en %).

Un modelo comúnmente utilizado para ajustar las rentabilidades es el modelo Logístico(μ, σ), el cual tiene las siguientes características:

$$F_X(x) = \frac{\exp\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)}{1+\exp\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)} \quad \text{y} \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\exp\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\left[1+\exp\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^2},$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

A partir de la mediana y del percentil 80 % de los datos, estime los parámetros y calcule la probabilidad que una rentabilidad cualquiera de un fondo sea positiva.

Solución

```
Data <- rio::import("Fondos.xlsx")
X <- Data$Renta
mu <- median(X)
mu
[1] 1.083
sigma <- (quantile(X, 0.80)-mu)/log(0.8/0.2)
sigma
[1] 0.8617217
1 - plogis(0, location = mu, scale = sigma)
[1] 0.7784724
```

[0.3 Ptos.]: Por $\mu = 1.083$.
[0.3 Ptos.]: Por $\sigma = 0.8617217$.
[0.4 Ptos.]: Por probabilidad solicitada.