Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2023

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O., Felipe Ossa M. y Mauricio Toro C.**

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

En el Consejo Constitucional se terminó el análisis de las enmiendas presentadas en comisiones. Las aprobadas (con y sin modificaciones) serán sometidas al plenario del Consejo a partir de hoy martes 12 de septiembre.

Análisis de los resultados de las comisiones permiten asignar una probabilidad de 0.60 de ser aprobadas sin modificaciones, para aquellas enmiendas que presentó la oposición, y una probabilidad de 0.10 de ser rechazadas. La diferencia corresponde a las aprobadas con modificaciones. En cambio, si las enmiendas fuesen presentada por el oficialismo, existe una probabilidad de 0.15 ser aprobada sin modificaciones y de 0.55 de ser rechazada.

De acuerdo a los diferentes escenarios, se puede inferir que las enmiendas que serán analizadas, tienen probabilidad 1 de ser aprobadas por el plenario del Consejo si fue propuesta por la oposición y aprobada (sin modificación) en la comisión respectiva, valor que baja a q si fue propuesta por el oficialismo y aprobada (sin modificación) en la comisión respectiva. La probabilidad de aprobar una enmienda que fue presentada por la oposición y aprobada con modificaciones en la comisión también es q, y en el caso de haber sido presentada por el oficialismo y aprobada con modificaciones en la comisión respectiva la probabilidad es $1 - q$.

Por último, se tiene que del total de enmiendas presentadas a las comisiones, un 65 % fueron realizadas por la oposición.

(a) **[3.0 Ptos]** Si la probabilidad que una enmienda analizada por el plenario del Consejo sea aprobada es de 0.57, determine el valor de q.

(b) **[3.0 Ptos]** Suponga que el valor de q es igual a 0.7. Actualice el valor asignado en (a) a la probabilidad que una enmienda analizada por el plenario del Consejo sea aprobada y luego determine la probabilidad que una enmienda aprobada por el plenario, haya sido propuesta por el oficialismo.

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A : Enmienda enviada por oposición.

B_1: Enmienda aprobada sin modificación en comisión respectiva.

B_2: Enmienda aprobada con modificación en comisión respectiva.

B_3: Enmienda rechazada en comisión respectiva.

D : Enmienda aprobada por el plenario del Consejo.

Del enunciado se obtienen las siguientes probabilidades

$$P(A) = 0.65, \quad P(B_1 \,|\, A) = 0.60, \quad P(B_2 \,|\, A) = 0.30, \quad P(B_3 \,|\, A) = 0.10$$

$$
\begin{gathered}
P(\overline{A}) = 0.35, \quad P(B_1 \,|\, \overline{A}) = 0.15, \quad P(B_2 \,|\, \overline{A}) = 0.30, \quad P(B_3 \,|\, \overline{A}) = 0.55 \\
P(D \,|\, B_1 \cap A) = 1.00, \quad P(D \,|\, B_2 \cap A) = q, \quad P(D \,|\, B_3 \cap A) = 0.00 \\
P(D \,|\, B_1 \cap \overline{A}) = q, \quad P(D \,|\, B_2 \cap \overline{A}) = 1 - q, \quad P(D \,|\, B_3 \cap \overline{A}) = 0.00
\end{gathered}
$$

(a) Por Teorema de Probabilidades Totales se tiene que

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(D \cap B_1 \cap A) + P(D \cap B_2 \cap A) + P(D \cap B_1 \cap \overline{A}) + P(D \cap B_2 \cap \overline{A}) \\
0.57 &= 1.00 \cdot 0.60 \cdot 0.65 + q \cdot 0.30 \cdot 0.65 + q \cdot 0.15 \cdot 0.35 + (1 - q) \cdot 0.30 \cdot 0.35
\end{aligned}
$$

Despejando $q = 0.5263158$.

(b) Ahora supondremos que $q = 0.7$ y se pide actualizar $P(D)$.

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(D \cap B_1 \cap A) + P(D \cap B_2 \cap A) + P(D \cap B_1 \cap \overline{A}) + P(D \cap B_2 \cap \overline{A}) \\
&= 1.00 \cdot 0.60 \cdot 0.65 + 0.70 \cdot 0.30 \cdot 0.65 + 0.70 \cdot 0.15 \cdot 0.35 + 0.30 \cdot 0.30 \cdot 0.35 \\
&= 0.59475
\end{aligned}
$$

Luego se solicita

$$
P(\overline{A} \,|\, D) = \frac{P(D \cap B_1 \cap \overline{A}) + P(D \cap B_2 \cap \overline{A})}{P(D)} = \frac{0.70 \cdot 0.15 \cdot 0.35 + 0.30 \cdot 0.30 \cdot 0.35}{0.59475} = 0.1147541
$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por bajar la información del enunciado, mediante un árbol de probabilidad o como se presenta en esta pauta.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por aplicar el teorema de probabilidades totales:

$$
P(D) = 1.00 \cdot 0.60 \cdot 0.65 + q \cdot 0.30 \cdot 0.65 + q \cdot 0.15 \cdot 0.35 + (1 - q) \cdot 0.30 \cdot 0.35
$$

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por $q = 0.5263158$ a partir de $P(D) = 0.57$. En el caso que calculen q a partir de $P(D \,|\, B_1 \cup B_2)$ la asignación de puntaje de este logro la realizaran los profesores.

Logro 4: Al suponer que $q = 0.7$, asignar **[1.0 Ptos]** por actualizar $P(D) = 0.59475$ o $P(D \,|\, B_1 \cup B_2) = 0.8080808$, según interpretación que se haga en (a) del 0.57.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por aplicar Teorema de Bayes:

$$
P(\overline{A} \,|\, D) = \frac{0.70 \cdot 0.15 \cdot 0.35 + 0.30 \cdot 0.30 \cdot 0.35}{0.59475}
$$

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por $P(\overline{A} \,|\, D) = 0.1147541$

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

Este año hemos presenciado cantidad e intensidad de precipitaciones que no se habían registrado hace décadas y al parecer esto hizo que al momento de construir, por ejemplo obras viales y recintos habitacionales, se nos haya “olvidado” que la naturaleza muchas veces nos puede sorprender. Una manera de estar preparados, es tener conciencia de que ciertos fenómenos extremos si tienen probabilidad de ocurrencia y que no tenerlas en cuenta al momento de planificar y diseñar, puede traernos consecuencia lamentables.

Un análisis de los últimos 60 años con respecto a intensidades de precipitaciones en zonas costeras, permitió concluir que las máximas intensidades de lluvia registradas, y que pueden hacer colapsar algunas estructuras, se pueden modelar con la función de densidad que se presenta a continuación, la cual tiene como soporte $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{\beta}\right) \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\beta}\right] \cdot \exp\left\{-\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\beta}\right]\right\},$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$.

Para poder estimar los parámetros de este modelo, es útil representar en términos de estos algunas medidas descriptivas, y a modo de ejercicio a usted le piden que obtenga:

(a) **[2.0 Ptos]** La moda de este modelo.

(b) **[3.0 Ptos]** El IQR de este modelo.

Otro modelo ampliamente utilizado, en este mismo contexto, es el que está representado por la siguiente función de densidad,

$$f(x) = \frac{1}{\alpha^\beta\,\Gamma(\beta)} \cdot \exp(\beta x) \cdot \exp\left[-\frac{1}{\alpha} \cdot \exp(x)\right],$$

para $x \in \mathbb{R}$, donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

(c) **[1.0 Ptos]** Como algunas medidas teóricas que caracterizan a los modelos se obtienen a partir de momentos teóricos, y una manera de obtenerlos es a partir de la función generadora de momentos. Calcule esta función, en términos de la función $\Gamma(\cdot)$, y especifique sobre que valores en $\mathbb{R}$ se puede evaluar.

Solución

(a) La moda se obtiene despejando x de la siguiente igualdad $f'_X(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'_X(x) = &-\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\beta}\right]\,\exp\left\{-\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\beta}\right]\right\} \\ &+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \exp\left[-2\,\frac{(x-\mu)}{\beta}\right]\,\exp\left\{-\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\beta}\right]\right\} = 0 \to \exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\beta}\right] = 1 \to x = \mu. \end{aligned}$$

(b) Tenemos que $F_X^{-1}(p) = x_p$, donde x_p corresponde al percentil $p \times 100\,\%$ de este modelo.

$$\begin{aligned} F_X(x_p) &= \int_{-\infty}^{x_p} \left(\frac{1}{\beta}\right) \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\beta}\right] \cdot \exp\left\{-\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\beta}\right]\right\} dx \\ &= -\int_{+\infty}^{\exp\left[-\frac{(x_p-\mu)}{\beta}\right]} e^{-y}\,dy, \quad \text{con } y = \exp\left[-\frac{(x_p-\mu)}{\beta}\right] \\ &= \int_{\exp\left[-\frac{(x_p-\mu)}{\beta}\right]}^{+\infty} e^{-y}\,dy \\ &= \exp\left\{-\exp\left[-\frac{(x_p-\mu)}{\beta}\right]\right\} \\ &= p \end{aligned}$$

Despejando se tiene que

$$x_p = F_X^{-1}(p) = \mu - \beta \cdot \ln[-\ln(p)]$$

Por lo tanto

$$\text{IQR} = x_{75\,\%} - x_{25\,\%} = \beta \cdot \Big\{ \ln[-\ln(0.25)] - \ln[-\ln(0.75)] \Big\} = 1.572534\,\beta$$

(c) Tenemos que

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathsf{E}(e^{t\,X}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\,x} \cdot \frac{1}{\alpha^\beta\,\Gamma(\beta)} \cdot \exp\left(\beta x\right) \cdot \exp\left[-\frac{1}{\alpha} \cdot \exp(x)\right] dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+t)\,\alpha^t}{\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^{\beta+t}\,\Gamma(\beta+t)} \cdot \exp\left[(\beta+t)x\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{\alpha} \cdot \exp(x)\right] dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+t)\,\alpha^t}{\Gamma(\beta)} \cdot 1, \quad \text{si } t > -\beta \\
&= \frac{\Gamma(\beta+t)\,\alpha^t}{\Gamma(\beta)}.
\end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por $f'_X(x) = 0$.

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por indicar que la moda es μ.

Logro 3: Asignar **[1.0 Ptos]** por $F_X(x_p) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{(x_p-\mu)}{\beta}\right]\right\}$.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por $x_p = \mu - \beta \cdot \ln[-\ln(p)]$.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por $\text{IQR} = x_{75\,\%} - x_{25\,\%} = \beta \cdot \Big\{ \ln[-\ln(0.25)] - \ln[-\ln(0.75)] \Big\}$.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por $M_X(t) = \frac{\Gamma(\beta+t)\,\alpha^t}{\Gamma(\beta)}$.

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

Suponga que en un almuerzo dieciochero, en una mesa redonda se disponen al azar 9 platos, de los cuales 3 son azules, 3 son rojos y 3 son blancos.

(a) **[4.0 Ptos]** ¿Cuál es la probabilidad que no queden platos blancos juntos?

(b) **[2.0 Ptos]** ¿Cuál es la probabilidad que los platos formen tres zonas (blanca, roja y azul)?

Solución

(a) Definamos como A al evento en que los platos blancos no queden juntos y como $\overline{A}$ a su complemento.

El evento $\overline{A}$ esta compuesto de los casos en que los tres platos blancos están juntos o dos de ellos están juntos (aclarado durante la prueba).

Alternativa 1: Asignar colores a las posiciones en la mesa, distinguiendo los 9 posibles puntos de partida (rotación).

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - \frac{(9 \cdot 3! \cdot 6! + 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5!)}{9!} \\ &= 0.3571429 \end{aligned}$$

Alternativa 2: Asignar colores a las posiciones en la mesa, sin considerar rotación.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - \frac{(3! \cdot 6! + 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5!)}{8!} \\ &= 0.3571429 \end{aligned}$$

(b) Definamos como B al evento en que los platos forman tres zonas, es decir, los tres platos blancos están juntos y lo mismo ocurre con los azules y rojos.

$$P(B) = \frac{(3!)^3 \cdot 2! \cdot 9}{9!} = \frac{(3!)^3 \cdot 2!}{8!} = 0.01071429$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por indicar que los casos totales son 9! (considerando las 9 rotaciones en los casos favorables) u 8! (si no considera las rotaciones en los casos favorables).

Logro 2: Asignar **[1.0 Ptos]** por abordar el problema con el complemento, es decir, contar los casos: BB y BBB.

Logro 3: Asignar **[0.5 Ptos]** por contar el caso de tres platos blancos juntos: $3! \cdot 6!$ y **[0.5 Ptos]** por contar los $3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5!$ casos en que solo dos blancas están unidas.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por llegar al resultado 0.3571429. Este puntaje contiene dependiendo la manera de contar los casos totales las rotaciones o no.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por contar $(3!)^3 \cdot 2!$ los casos en que los platos forman tres zonas.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por llegar al resultado 0.01071429. Este puntaje contiene dependiendo la manera de contar los casos totales las rotaciones o no.

+ 1 Punto Base

Formulario

Igualdades

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}; \qquad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda); \qquad \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k-1}{k-1} \phi^x = \frac{1}{(1-\phi)^k} \quad \text{si } 0 < \phi < 1 \text{ y } k \in \mathbb{N}$$

Propiedades función $\Gamma(\cdot)$ y $B(\cdot,\,\cdot)$

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^{\infty} u^{k-1}\, e^{-u}\, du = \texttt{gamma}(k); \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a); \quad (3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0;$$

$$(4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}; \quad (5) \qquad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (6) \quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} = \texttt{beta}(q,r)$$

Medidas descriptivas

$$\mu_X = \mathsf{E}(X), \quad \sigma_X^2 = \mathsf{E}\left[(X-\mu_X)^2\right], \quad \delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}, \quad \theta_X = \frac{\mathsf{E}\left[(X-\mu_X)^3\right]}{\sigma_X^3}, \quad K_X = \frac{\mathsf{E}\left[(X-\mu_X)^4\right]}{\sigma_X^4} - 3$$

$$M_X(t) = \mathsf{E}\left(e^{t\,X}\right), \quad \mathsf{E}[g(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \Theta_X} g(x) \cdot p_X(x) \\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx \end{cases}, \quad \text{Rango} = \text{máx} - \text{mín}, \quad \text{IQR} = x_{75\,\%} - x_{25\,\%}$$