Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2023

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O., Felipe Ossa M. y Alejandro Sepulveda P.**

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Un grupo de amigos hace un tiempo empezaron a jugar pádel y entre ellos hay 6 que juegan hace más de un año, 4 que llevan seis meses y otros 6 recién van a comenzar a dar sus primeros pasos. Para hacer partidos "competitivos" el ideal es juntar a los novatos con un experimentado (más de un año jugando) y a los que juegan hace 6 meses emparejarlos entre ellos.

Si las parejas se forman al azar, ¿cuál es la probabilidad que tengamos, en el papel al menos, solo partidos "competitivos"?

Solución

Sea A al evento en que todas las parejas formadas al azar son "competitivas", es decir, solo hay parejas de experimentados con novatos y otras formadas por jugadores que llevan jugando 6 meses.

Alternativa 1:

Tenemos que los casos totales son
$$\# S = \frac{16!}{(2!)^8 \cdot 8!},$$
mientras que los casos favorables están dados por
$$\# A = \frac{4!}{(2!)^2 \cdot 2!} \cdot \frac{6! \cdot 6!}{6!}$$

Alternativa 2:

Tenemos que los casos totales son
$$\# S = \frac{16!}{(2!)^8},$$
mientras que los casos favorables están dados por
$$\# A = \frac{6!}{(1!)^6} \cdot \frac{6!}{(1!)^6} \cdot \frac{4!}{(2!)^2} \cdot \binom{8}{6}$$

Alternativa 3:

Tenemos que los casos totales son
$$\# S = 16!,$$

mientras que los casos favorables están dados por

$$\# A = (2!)^8 \cdot 8! \cdot \frac{4!}{(2!)^2 \cdot 2!} \cdot \frac{6! \cdot 6!}{6!}$$

Por lo tanto la probabilidad solicitada es

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = 0.001065601$$

Desglose de puntaje:

Logro 1: Por el $16!$ en los casos totales. **[1.0 Ptos.]**

Logro 2: Por $\frac{6!}{(1!)^6} \cdot \frac{6!}{(1!)^6} = 6! \cdot 6!$ en los casos favorables. **[1.0 Ptos.]**

Logro 3: Por $\binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \cdot 2!}$. **[1.0 Ptos.]**

Logro 4: Por el $(2!)^8$. **[1.0 Ptos.]**

Logro 5: Por $\frac{4!}{(2!)^2}$. **[1.0 Ptos.]**

Logro 6: Por la respuesta final 0.001065601. **[1.0 Ptos.]**

+ 1 Puntos Base

Pregunta 2

A un proceso de selección laboral, se presentan tres egresados de ingeniería UC (digamos A, B y C), los cuales son derivados a tres reclutadores distintos, los cuales de manera independiente evaluarán si el candidato pasa a la siguiente etapa o no.

Si los reclutadores pasan a la siguiente etapa a un egresado de ingeniería UC con probabilidad 0.4, ¿cuál sería la probabilidad que estos tres egresados sigan en competencia, dado que dos de ellos ya fueron aprobados por los reclutadores que los entrevistaron?

Nota: Usted no sabe cuales son los dos que ya fueron aprobados.

Solución

Definamos como E_i al evento en que el i-ésimo egresado entrevistado pasa a la siguiente etapa del proceso de selección laboral.

Logro 1: Sea A el evento "dos de ellos ya fueron aprobados por los reclutadores que los entrevistaron".

Alternativa 1: Como son ocho los escenarios posibles, el evento A ocurre en los siguientes casos:

$$A = (E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (\overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Alternativa 2: Como NO sabemos cuales de los dos egresados ya fueron aprobados, el evento A es:

$$A = (E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_3) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: Sea B el evento "tres egresados sigan en competencia".

$$B = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: Como se pide $P(B \,|\, A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ se requiere primero $P(A)$.

Alternativa 1:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(\overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3), \quad \text{por axioma 3} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= 0.4^3 + 3 \cdot 0.6 \cdot 0.4^2, \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

Alternativa 2:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1 \cap E_2) + P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_3) - 3\,P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= 3 \cdot 0.4^2 - 3 \cdot 0.4^3 + 0.4^3, \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

Logro 4: Calcular ahora $P(A \cap B)$.

Alternativa 1:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= 0.4^3, \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

Alternativa 2:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P([(E_1 \cap E_2) \cap (E_1 \cap E_2 \cap E_3)] \cup [(E_1 \cap E_3) \cap (E_1 \cap E_2 \cap E_3)] \cup [(E_2 \cap E_2) \cap (E_1 \cap E_2 \cap E_3)]) \\ &= P([E_1 \cap E_2 \cap E_3] \cup [E_1 \cap E_2 \cap E_3] \cup [E_1 \cap E_2 \cap E_3]) \\ &= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= 0.4^3, \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

Logro 5: Reemplazar los valores obtenidos en $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Alternativa 1:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.4^3}{0.4^3 + 3 \cdot 0.6 \cdot 0.4^2} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Alternativa 2:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.4^3}{3 \cdot 0.4^2 - 3 \cdot 0.4^3 + 0.4^3} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 6: Al calcular resultado final se obtiene en ambos casos $P(B \mid A) = 0.1818182$. **[1.0 Ptos.]**

+ 1 Puntos Base

Pregunta 3

No hay dudas que la decisión de encender la calefacción centralizada, tanto en conjuntos de departamentos como en condominios de casas, es muy discutida (por los costos a repartir).

Estudios muestran que la probabilidad de lograr un acuerdo para encender la calefacción centralizada es de 0.6 en los conjuntos de departamentos y de 0.8 en los condominios de casas.

Si el mercado nos muestra que el 40 % de los conjuntos de viviendas corresponden a departamentos, donde la mitad disponen de calefacción centralizada, mientras que en los condominios de casas se sabe que no todos disponen de calefacción centralizada.

Asuma que los conjuntos que no disponen de calefacción centralizada (donde no se discute) equivale a que no hay acuerdo, y que la probabilidad de no llegar a acuerdo en general es de 0.72.

Si no hay acuerdo, ¿cuál es la probabilidad que esto ocurra en un condominio de casas que dispone de calefacción centralizada?.

Solución

Definamos los siguientes eventos:

D : Conjunto de Departamentos,
C : Dispone de calefacción central,
A : Hay acuerdo en encender.

La información entregada permita asignar las siguientes probabilidades:

Logro 1:

$$P(\overline{A}) = 0.72 \to P(A) = 0.28, \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2:

$$\begin{aligned}
P(D) = 0.40 &\to P(\overline{D}) = 0.60, \\
P(C \,|\, D) = 0.50 &\to P(\overline{C} \,|\, D) = 0.50, \\
P(A \,|\, D \cap C) = 0.60 &\to P(\overline{A} \,|\, D \cap C) = 0.40 \\
P(A \,|\, \overline{D} \cap C) = 0.80 &\to P(\overline{A} \,|\, \overline{D} \cap C) = 0.20, \\
P(A \,|\, D \cap \overline{C}) = 0.00 &\to P(\overline{A} \,|\, D \cap \overline{C}) = 1.00, \\
P(A \,|\, \overline{D} \cap \overline{C}) = 0.00 &\to P(\overline{A} \,|\, \overline{D} \cap \overline{C}) = 1.00.
\end{aligned}$$

Estas probabilidades también pueden representarse en un árbol de probabilidad. **[1.0 Ptos.]**

Logro 3: Por otra parte, las siguientes probabilidades son desconocidas:

$$P(C \,|\, \overline{D}) = p \to P(\overline{C} \,|\, \overline{D}) = 1 - p \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 4: Notemos que

$$P(A) = 0.60 \cdot 0.50 \cdot 0.40 + 0.00 \cdot 0.50 \cdot 0.4 + 0.80 \cdot p \cdot 0.60 + 0.00 \cdot (1 - p) \cdot 0.6 = 0.28 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5:

$$p = \frac{1}{3}. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 6: Se pide

$$P(\overline{D} \cap C \,|\, \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \,|\, \overline{D} \cap C) \cdot P(C \,|\, \overline{D}) \cdot P(\overline{D})}{P(\overline{A})} = \frac{0.20 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 0.6}{0.72} = 0.05555556 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Puntos Base

Pregunta 4

El ChatGPT es el chatbot más popular actualmente. Esta herramienta, que utiliza la inteligencia artificial para potenciarse, ha generado una ola de novedades en el campo tecnológico debido a los múltiples usos que se le puede dar. Sin embargo, le salió competencia ya que Google con Bard y microsoft con Bing AI no quisieron quedarse atrás. Defina como A, B y C a los eventos en que la respuesta es satisfactoria al usuario cuando esta proviene desde ChatGPT, Bard o Bing AI respectivamente. A partir de una encuestas realizada a usuarios de este tipo de chatbot, se pueden estimar las siguientes probabilidades:
Solución

$$P(A) = 0.55; \quad P(B) = 0.55; \quad P(C) = 0.45; \quad P(A \cup B) = 0.85$$
$$P(A \cup C) = 0.80; \quad P(B \cup C) = 0.80; \quad P(A \cap B \cap C) = 0.1$$

¿Cuál es la probabilidad que ante una consulta realizada a los tres chatbot, el usuario solo quede satisfecho con la respuesta de Bing AI?

Solución

Se pide $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

Logro 1: Por De Morga

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = P\left((\overline{A} \cap \overline{B}) \cap C\right) = P\left(\overline{(A \cup B)} \cap C\right). \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: Por otra parte

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(C \cap S) \\
&= P\left(C \cap \left[(A \cup B) \cup \overline{(A \cup B)}\right]\right), \quad \text{por propiedad de complementos} \\
&= P\left(\left[C \cap (A \cup B)\right] \cup \left[C \cap \overline{(A \cup B)}\right]\right), \quad \text{por ley distributiva} \\
&= P\left(C \cap (A \cup B)\right) + P\left(C \cap \overline{(A \cup B)}\right), \quad \text{por axioma 3} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Logro 3:

$$\begin{aligned}
P(C) &= P\left((C \cap A) \cup (C \cap B)\right) + P\left(C \cap \overline{(A \cup B)}\right), \quad \text{por ley distributiva} \\
&= P(C \cap A) + P(C \cap B) - P(A \cap B \cap C) + P\left(C \cap \overline{(A \cup B)}\right), \quad \text{por ley aditiva} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Logro 4:

$$P(C) = [P(C) + P(A) - P(C \cup A)] + [P(C) + P(B) - P(C \cup B)] - P(A \cap B \cap C) + P\left(C \cap \overline{(A \cup B)}\right), \quad \text{por ley aditiva}$$

[1.0 Ptos.]

Logro 5:

$$0.45 = [0.55 + 0.45 - 0.80] + [0.55 + 0.45 - 0.80] - 0.10 + P\left(C \cap \overline{(A \cup B)}\right). \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5: Por lo tanto

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 0.15 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Nota: Si el alumno desarrolla el ejercicio apoyado en diagramas de Venn, asignar puntaje según logro.

+ 1 Puntos Base