PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística
EYP1113 – Probabilidades y Estadística
Segundo semestre 2024

Ayudantes: Michael Ramón: maramon@uc.cl
Juan Merino: jcamilo.merino@uc.cl
Diego Pérez: dtperez1@uc.cl
Christoph Bürger: christoph.buerger@uc.cl
Oscar Guerrero: oscar.guerrero@uc.cl

Ayudantía 4

Distribuciones de probabilidad

Problema 1 *Distribución Normal y Log-Normal*

En el antiguo caso de estafa de La Polar, los montos de las renegociaciones unilaterales alcanzan en promedio los M$650 con un coeficiente de variación del 40 %.
Si asumimos que los montos se comportan como una distribución Normal, evalúe:

a) Proporción de morosos renegociados unilateralmente que se encuentran sobre una desviación del monto medio.

b) Monto máximo renegociado del 30 % de morosos de los menores montos renegociados.

Si asumimos que los montos renegociados se comportan como una distribución Log-Normal, evalúe:

c) Proporción de morosos renegociados unilateralmente que se encuentran sobre una desviación estándar de la mediana de los montos.

d) Monto mínimo renegociado del 30 % de morosos de los mayores montos renegociados.

Solución:

Solución del problema 1

a) Como se asume distribución normal, tenemos como variables conocidas: $\delta_x,\ \mu_x$.

$$\delta_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \qquad \sigma_x = 260$$

Con la desviación ya calculada ya se puede responder los solicitado:

$$P\left(X \geq \mu_x + \sigma_x\right) = 1 - \Phi\left(\frac{(\mu_x + \sigma_x) - \mu_x}{\sigma_x}\right) = 1 - \Phi\left(1\right) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

b)

$$P(X \leq K) = 0{,}3$$

$$\Phi^{-1}(0{,}3) = \frac{K - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$-0{,}52 = \frac{K - \mu_x}{\sigma_x} \qquad K = M\$514{,}8$$

c) Asumiendo distribución Log-Normal hay que calcular nuevos parámetros:

$$\zeta = \sqrt{\ln\left(1 + \delta_x^2\right)} = 0{,}385$$

$$\lambda = \ln \mu_x - \frac{1}{2}\zeta^2 = 6{,}402$$

La mediana para una distribución Log-Normal se encuentra en e^{λ}

$$P\left(X \geq x_{50\,\%} + \sigma_x\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\left(\ln\left(e^{\lambda} + \sigma_x\right) - \lambda\right.}{\zeta}\right) = 1 - \Phi(0{,}936) = 0{,}1736$$

d)

$$P(X \geq K) = 0{,}7$$

$$\Phi^{-1}(0{,}7) = \frac{\ln(K) - \lambda}{\zeta}$$

$$0{,}52 = \frac{\ln(K) - \lambda}{\zeta} \qquad K = M\$736{,}714$$

Problema 2 *Distribución Normal y Log-Normal*

Una de las hipótesis planteadas en referencia al accidente aéreo que ocurrió el 2011 en la Isla Juan Fernández, ha sido en relación a la trizadura de un ala y su impacto en la resistencia de ésta al viento. Lo anterior se sustenta en que las alas de un avión representan el elemento fundamental en la sustentación de éste. Por tanto dentro del proceso de construcción de alas es relevante el control sobre la variabilidad del insumo más importante, las cuales son las planchas con una aleación de acero-aluminio utilizadas en su construcción. Por tanto, la principal característica de este material es su resistencia a la fricción (en kpsi). Suponga que a lo más se acepta un 8 % del material bajo el límite considerado crítico e igual a 6 kpsi. Si la resistencia del material tiene una media de 10 kpsi y una desviación de σ kpsi.

a) Asumiendo que la resistencia se comporta según una distribución Normal,

   i) Determine el valor de σ.

   ii) Suponga que $\sigma = 5$ kpsi, determine el mínimo valor de resistencia del 25 % de las planchas de mayor resistencia.

b) Asumiendo que la resistencia se comporta según una distribución Lognormal, con $\sigma = 5$, determine la probabilidad que la resistencia sea mayor a 15 kpsi.

Solución:

Solución del problema 2

a.i)

$$X \sim Normal(\mu = 10, \sigma)$$

$$P(X \leq 6) = 0{,}08$$

$$\Phi^{-1}(0{,}08) = \frac{6-10}{\sigma} \qquad \sigma = 2{,}8369$$

a.ii)

$$X \sim Normal(\mu = 10, \sigma = 5)$$

$$P(X \geq k) = 0{,}25$$

$$\Phi^{-1}(0{,}75) = \frac{k-10}{5} \qquad k = 13{,}35\, kpsi$$

b)

$$X \sim Log-Normal(\lambda, \zeta)$$

$$\delta_x = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

$$\zeta = \sqrt{\ln\left(1+\delta_x^2\right)} \qquad \lambda = \ln\mu - \frac{1}{2}\zeta^2$$

$$\zeta = 0{,}4724 \qquad \lambda = 2{,}191$$

$$P(x \geq 15) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(15)-\lambda}{\zeta}\right) = 1 - \Phi(1{,}095) = 0{,}137$$

Problema 3 *Log-Normal y Binomial*

Durante las últimas semanas, el Servicio Nacional de Geología y Minería de Chile (Sernageomin) ha emitido informes especiales sobre la actividad reciente del Volcán Villarrica. Por ejemplo, las cámaras de monitoreo han registrado que la altura de la columna y la liberación de material piroclástico en la atmósfera han superado consistentemente los mil metros sobre el nivel del cráter. Se supone que estas alturas siguen una distribución Log-Normal con un coeficiente de variación del 40 % y un rango intercuartil de 200 metros. Además, se considera que las erupciones que emiten material piroclástico siguen una distribución de Poisson, con una tasa esperada de 20 erupciones al día.

a) ¿Cuál es la probabilidad que una columna de material piroclástico alcance una altura sobre los 350 metros desde el nivel del cráter?

b) ¿Cuál es la probabilidad que entre las próximas 6 erupciones, al menos dos se encuentren sobre los 350 metros desde el nivel del cráter?

Solución:

Solución del problema 3

a)

$$Log-Normal \sim (\lambda, \zeta)$$

$$\delta_x = 0{,}4 \qquad \zeta = \sqrt{\ln(1+\delta_x)} = 0{,}3853$$

Como sabemos el IQR podemos obtener un λ:

$$IQR = e^{\lambda+\zeta\Phi^{-1}(0{,}75)} - e^{\lambda+\zeta\Phi^{-1}(0{,}25)}$$

$$\lambda = 5{,}9407$$

Con los parámetros ya calculados podemos calcular la probabilidad solicitada

$$Log-Normal \sim (\lambda = 5{,}9407, \zeta = 0{,}3853)$$

$$P(X \geq 350) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(350)-\lambda}{\zeta}\right) = 0{,}5832$$

b) Debemos usar una distribución binomial

$$Binomial \sim (n = 6, p = 0{,}5832)$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{6}{y} p^y (1-p)^{(6-y)} = 0{,}9507$$