PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística
EYP1113 – Probabilidades y Estadística
Segundo semestre 2024

Ayudantes: Michael Ramón: maramon@uc.cl
Juan Merino: jcamilo.merino@uc.cl
Diego Pérez: dtperez1@uc.cl
Christoph Bürger: christoph.buerger@uc.cl
Oscar Guerrero: oscar.guerrero@uc.cl

Ayudantía #5

Distribuciones de Probabilidad

Problema 1 *Distribución Poisson*

Durante el año 2018 hubo 232.450 nacimientos. Estadísticas muestran que el 75 % de los nacimientos ocurren fuera del matrimonio y que solo el 12 % de los nacimientos son hijos de extranjeros. Suponiendo que los nacimientos ocurrieron durante el 2018 de acuerdo a un proceso Poisson, determine:

1. ¿Cuántos minutos se esperó en promedio el 2018 entre nacimientos de hijos de extranjeros?
2. Al seleccionar al azar y sin reemplazo 50 de los primeros cinco mil nacimientos, ¿cuál es la probabilidad que el 24 % de ellos sean hijos dentro de un matrimonio?

Solución:

1. Sea N la variable aleatoria que modela la cantidad de nacimientos en el año 2018 durante un minuto y T la variable aleatoria que modela el tiempo de espera entre nacimiento de hijos de extranjeros. Por enunciado se tiene que

$$N \sim \text{Poisson}(v) \quad \text{y} \quad T \sim \text{Exp}(0{,}12 \cdot v)$$

donde

$$v = E[N] = \frac{232450}{60 \cdot 24 \cdot 365} = 0{,}4423.$$

Luego,

$$E[T] = \frac{1}{0,12 \cdot v} = 18{,}8409 \text{ min.}$$

2. Sea X la variable aleatoria que modela la cantidad de hijos dentro de matrimonio al seleccionar una muestra de 50 nacimientos dentro de los 5000 primeros. Entonces

$$X \sim \text{HiperGeom}(n, N, m) \quad \text{con} \quad n = 50,\, N = 5000,\, m = N(1 - 0{,}75) = 1250.$$

Por lo que

$$p_X(0{,}24 \cdot 50) = p_X(12) = \frac{\binom{1250}{12} \cdot \binom{3650}{38}}{\binom{5000}{50}} \approx 0{,}12998$$

Problema 2 *Distribuciones Varias*

Los sismos son descritos por diversas características, tales como magnitud (escala Richter), profundidad (en kms) y ubicación (longitud, y latitud), entre otras. Usted analiza la información de los últimos sismos y de acuerdo a diversos estudios determina:

- Que se esperan 6 sismos diarios seguún un proceso de Poisson.
- La magnitud se comporta de acuerdo a una distribución tipo Exp($v = 1/2$)

Asumiendo independencia entre sismos:

1. ¿Cuál es la probabilidad que la magnitud del próximo sismo supere los 5° Richter?
2. ¿Cuál es la probabilidad que desde este momento el 4to sismo ocurra después de 8 horas?
3. ¿Cuál es la probabilidad que desde este momento el 4to sismo sea el segundo con una magnitud superior a los 5° Richter?

Solución:

1. Sea M la variable aleatoria que modela la magnitud de un sismo. Por enunciado, $M \sim \text{Exp}(v = 1/2)$, luego,

$$P(M > 5) = 1 - P(M \leq 5) = 1 - F_M(5) = 1 - (1 - e^{-5/2}) = 0{,}0821$$

2. Sea X la variable aleatoria que modela la cantidad de sismos en 8 horas. Se tiene

$$X \sim \text{Poisson}(vt = \frac{6}{24} \cdot 8 = 2)$$

Por lo que

$$P(X \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} P(X = i) = \sum_{i=0}^{3} \frac{2^i e^{-2}}{i!} = 0{,}8571$$

3. Sea Y la variable aleatoria que modela la cantidad de sismos que ocurren hasta observar por segunda vez un sismo de magnitud superior a 5°. Así, usando la parte 1. se tiene

$$Y \sim \text{Bin-Neg}(r = 2, p = 0{,}0821).$$

Por lo que

$$P(Y = 4) = \binom{4-1}{2-1} p^2 (1-p)^{4-2} = 0{,}017.$$

Problema 3 *Distribución Poisson*

Datos históricos (CONASET, Período 1999-2008) indican que en un día de celebración de fiestas patrias el número de accidentes de tránsito promedio (esperado) son 143 en todo el país. Si estos accidentes ocurren según un Proceso de Poisson,

1. ¿Cuál es la probabilidad que el próximo 18 de septiembre entre las 07:00 y 09:00 horas ocurran por lo menos cinco accidentes de tránsito en el país?
2. ¿Cuál es la probabilidad que el tiempo transcurrido entre dos accidentes durante la celebración de fiestas patrias sea inferior a 30 minutos?

Solución:

1. Sea X_t la variable aleatoria que modela la cantidad de accidentes en t minutos. Por enunciado,

$$X_t \sim \text{Poisson}(vt) \quad \text{con } v = \frac{143}{24 \cdot 60} = 0{,}0993.$$

Por lo que

$$P(X_{120} \geq 5) = 1 - P(X_{120} < 5) = 1 - P(X_{120} \leq 4) = 1 - \sum_{i=0}^{4} \frac{(120v)^i e^{-120v}}{i!} = 0{,}9919$$

2. Si T es la cantidad de minutos entre accidentes, entonces

$$T \sim \text{Exp}(v).$$

De donde se puede deducir que

$$P(T < 30) = F_T(30) = 1 - e^{-30v} = 0{,}9492 \text{ minutos.}$$

Problema 4 *Distribuciones Varias*

El número de alumnos de Ingeniería que se ausenta al menos a una interrogación durante un año es una variable aleatoria. Por ejemplo, datos históricos indican que un 15 % de los alumnos se ausentaron al menos a una interrogación durante el año. Un curso actualmente tienen 100 alumnos inscritos, si tomásemos una muestra aleatoria de tamaño 25.

1. ¿Cuál es la probabilidad que una muestra con reemplazo contenga al menos un alumno que haya faltado al menos a una interrogación durante el último año? Identifique el modelo.
2. Si el muestreo fuese sin reemplazo, ¿que modelo sería adecuado?, ¿Cuál seria ahora la probabilidad del evento calculado en 1.? Comente.

Solución:

1. Sea X la cantidad de alumnos que han faltado a al menos una interrogación el último año de la muestra con reemplazo. Se tiene

$$X \sim \text{Binomial}(n = 25, p = 0{,}15).$$

Por lo que

$$P(X \geq 1) = 1 - p_x(0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = 0{,}9828$$

2. Sea Y la cantidad de alumnos que han faltado a al menos una interrogación el último año de la muestra sin reemplazo. Se tiene

$$Y \sim \text{Hipergeom}(N = 100, m = Np = 15, n = 25).$$

Por lo que

$$P(Y \geq 1) = 1 - p_Y(0) = 1 - \frac{\binom{15}{0} \cdot \binom{85}{25}}{\binom{100}{25}} = 0{,}991$$

Los resultados en 1. y 2. tienen diferencia considerable ya que el tamaño de muestra es es un 25 % del tamaño total.