PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística
EYP1113 – Probabilidades y Estadística
Segundo semestre 2024

Ayudantes: Michael Ramón: maramon@uc.cl
Juan Merino: jcamilo.merino@uc.cl
Diego Pérez: dtperez1@uc.cl
Christoph Bürger: christoph.buerger@uc.cl
Oscar Guerrero: oscar.guerrero@uc.cl

Ayudantía #7

Distribuciones conjuntas y transformaciones

Problema 1 *Distribuciones Condicionales*

Suponga que el número de accidentes en una carretera concesionada siguen un proceso de Poisson con tasa mensual esperada λ. Sea T una variable aleatoria Exponencial(v) que representa el período en meses de observación. Si Y representa el número de accidentes observados incondicionalmente al tiempo de observación, muestre que si $y \in \mathbb{N}_0$ entonces

$$P(Y = y) = \left(\frac{v}{\lambda + v}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda + v}\right)^y$$

Además, hallar $\mathrm{E}[Y]$ sin integrar.

Solución:

Se tiene del enunciado que $T \sim$ Exponencial(v) y $Y|T = t \sim$ Poisson(λt). Por teorema de probabilidades totales:

$$\begin{aligned}
P(Y = y) &= \int_0^\infty P(Y = y|T = t) \cdot f_T(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^y e^{-\lambda t}}{y!} \cdot v e^{-vt}\, dt \\
&= \frac{v\lambda^y}{y!} \cdot \frac{\Gamma(y+1)}{(\lambda+v)^{y+1}} \int_0^\infty \frac{(\lambda+v)^{y+1}}{\Gamma(y+1)} t^{(y+1)-1} e^{-(\lambda+v)t}\, dt \\
&= \frac{v\lambda^y}{y!} \cdot \frac{y!}{(\lambda+v)^{y+1}} \\
&= \left(\frac{v}{\lambda + v}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda + v}\right)^y .
\end{aligned}$$

Adicionalmente, por esperanzas iteradas,

$$E[Y] = E[E[Y|T]] = E[\lambda T] = \lambda E[T] = \frac{\lambda}{v}.$$

Problema 2 *Distribución Normal Bivariada*

Suponga que la temperatura máxima en un día de enero es una variable aleatoria Normal con media 26.5[°C] y desviación estándar 3.4[°C]. La energía solar que capta y almacena un panel solar de 1[m^2] es una variable aleatoria Normal con media 2[kWh] y desviación estándar 0.7[kWh].

Si la temperatura máxima y la energía almacenada en un día presentan un coeficiente de correlación de 0.6, y ambas presentan un comportamiento normal bivariado, ¿Cuál es la probabilidad de almacenar menos de 2 [kWh] un día de enero con 35 [°C] de temperatura máxima.

Solución:

Sea T la temperatura máxima de un día de enero y E la energía captada y almacenada un día de enero. Por enunciado se tiene:

$$T \sim \text{Normal}(\mu_T = 26{,}5, \sigma_T = 3{,}4) \quad \text{y} \quad E \sim \text{Normal}(\mu_E = 2, \sigma_E = 0{,}7)$$

Si definimos $X = (E \,|\, T = 35)$, por el formulario se tiene

$$X \sim \text{Normal}(\mu_X = \mu_E + (35 - \mu_t)\frac{\rho\sigma_E}{\sigma_t} = 3{,}05, \sigma_X = \sigma_E\sqrt{1-\rho^2} = 0{,}56)$$

donde $\rho = 0{,}6$. Luego,

$$P(X < 2) = \Phi\left(\frac{2 - 3{,}05}{0{,}56}\right) = \Phi(-1{,}88) = 0{,}0301.$$

Problema 3 *Esperanza Iteradas*

El desborde de un río causó un colapso en la ciudad de Springfield. Suponga que el número de residentes Y (en miles) afectados por área inundada (en km^2) es una variable aleatoria Poisson, cuyo valor esperado depende del área en cuestión y de la densidad poblacional de Springfield (9000 residentes por km^2). Suponer que el caudal X que salió del río durante la inundación seguía una distribución Log-Normal con media de 100 m^3/s y c.o.v. del 45 %, y el área afectada es igual a $X^2/100$. Calcular el c.o.v. del número de residentes afectados incondicional al caudal.

Solución:

Por enunciado, se tiene

$$Y \mid X = x \sim \text{Poisson}(9 \text{ mil} \cdot x^2/100 = 0{,}09 \cdot x^2) \quad \text{y} \quad X \sim \text{Log-Normal}(\lambda, \zeta)$$

donde

$$\zeta = \sqrt{\ln(1 + 0{,}45^2)} = 0{,}4294 \quad \text{y} \quad \lambda = \ln(100) - \frac{1}{2}\zeta^2.$$

Adicionalmente,

$$\mu_Y = E[Y] = E[E[Y \mid X]] = E[0{,}09 \cdot X^2] = 0{,}09 \cdot \exp\left(2\lambda + 2\zeta^2\right) = 1082{,}25$$

ya que en general $E[X^r] = \exp\left(r\lambda + (r\zeta)^2/2\right)$. Similarmente,

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}[Y] = \text{Var}[E[Y \mid X]] + E[\text{Var}[Y \mid X]] = \text{Var}[0{,}09 \cdot X^2] + E[0{,}09 \cdot X^2]$$

donde

$$\begin{aligned} \text{Var}[0{,}09 \cdot X^2] &= 0{,}09^2(E[X^4] - E[X^2]^2) = 0{,}09^2(\exp(4 + 8\zeta^2) - \exp(4 + 4\zeta^2)) \\ E[0{,}09 \cdot X^2] &= 0{,}09 \cdot \exp\left(2\lambda + 2\zeta^2\right) \end{aligned}$$

por lo que $\sigma_Y^2 = 1278855$. Finalmente,

$$\delta_Y = \frac{\sqrt{\sigma_Y^2}}{\mu_Y} = 1{,}0449$$

Problema 4 *Transformaciones*

La distribución Log-Gamma(α, β) es una distribución muy popular para ajuste a datos con asimetría negativa. Su función de densidad se define como

$$f(x) = \frac{1}{\alpha^\beta \Gamma(\beta)} \exp\left[bx - \frac{1}{\alpha}\exp(x)\right]$$

con $x \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ y $\beta > 0$. Obtenga la distribución de $Y = \exp(X)$, reconozca el modelo e identifique sus parámetros.

Solución:

En primer lugar, el soporte Θ_Y de Y son los reales no negativos. Adicionalmente, si $g(X) = \exp(X)$, entonces $g^{-1}(Y) = \ln(Y)$ que es biyectiva y $|\frac{d}{dY} g^{-1}(Y)| = \frac{1}{Y}$. Luego,

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(\ln(y)) \cdot \frac{1}{y} \\
&= \frac{1}{\alpha^\beta \Gamma(\beta)} \exp\left[b\ln(y) - \frac{1}{\alpha}\exp(\ln(y))\right] \cdot \frac{1}{y} \\
&= \frac{(1/\alpha)^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-y/\alpha}
\end{aligned}$$

Por lo que $Y \sim \text{Gamma}(\beta, 1/\alpha)$.