Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2024

Curso : **Probabilidad y Estadística**
Sigla : **EYP1113**
Profesores : **Ricardo Aravena C., Cristian Capetillo C., Ingrid Guevara R., Ricardo Olea O. y Daniel Saavedra T.**

PAUTA INTERROGACIÓN 2

Pregunta 1

En una planta de tratamiento de gas, se monitorea constantemente la presión en las tuberías para asegurar que el gas distribuido cumpla con los estándares de calidad requeridos para su uso doméstico e industrial. Esta planta realiza procesos de deshidratación, remoción de impurezas y fraccionamiento para garantizar que el gas sea adecuado y seguro para el consumo en la red de distribución.

Durante el monitoreo de la presión en las tuberías, se ha identificado que los incrementos de presión en ciertos puntos críticos siguen una distribución Log-Normal con una mediana de 25 psi y un coeficiente de variación de 45 %. Se sabe que cuando la presión en las tuberías supera los 50 psi, se activa un sistema de alarma para controlar la presión y evitar daños en la infraestructura de la planta y en la red de distribución.

En condiciones normales de operación, se esperan cuatro incrementos de presión cada diez minutos en distintos puntos de la planta, y estos eventos se distribuyen de manera independiente según un proceso Poisson.

(a) **[1.5 Ptos.]** Suponga que durante un periodo de observación se registraron 20 de estos incrementos de presión. Determine la probabilidad de que en al menos tres de ellos se active el sistema de alarma debido a que la presión supere los 50 psi.

(b) **[1.5 Ptos.]** Si un operador está monitoreando el sistema, ¿cuántos incrementos de presión deberá observar hasta que por tercera vez se active el sistema de alarma debido a una presión superior a 50 psi?

(c) **[1.5 Ptos.]** El operador, desde que comienza a observar el fenómeno, acaba de ver por tercera vez un incremento de presión que supera los 50 psi. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente incremento de presión ocurra en los siguientes tres minutos?

(d) **[1.5 Ptos.]** Suponga que al producirse un incremento de presión que supere los 50 psi, automáticamente se reduce la presión en el sistema durante 3 minutos (para estabilizar el sistema y prevenir fallos), de manera que no se registran incrementos en este periodo. Determine la probabilidad de que el siguiente incremento de presión se registre después de 8 minutos desde el último incremento que supere los 50 psi.

Solución

(a) Definamos como Y al número de incrementos de presión cuya presión superó los 50 psi, entre los 20 observados, con

$$Y \sim \text{Binomial}(n,\, p).$$

Sea Z el incremento de presión ocurrido en un punto crítico, con

$$Z \sim \text{Log-Normal}(\lambda,\, \zeta).$$

Del enunciado se tiene que

$$\lambda = \log(25) = 3.218876 \quad \text{y} \quad \zeta = \sqrt{\ln(1 + 0.45^2)} = 0.4294214.$$

Reemplazando se tiene que

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(50) - \lambda}{\zeta}\right) \approx 1 - \Phi(1.61) = 0.0537$$

y

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - \sum_{y=0}^{2} \binom{20}{y} p^y \, (1-p)^{20-y} = 0.08924156.$$

(b) Sea W el número de incrementos observados hasta el tercero con una presión sobre 50 psi, donde

$$W \sim \text{BinNeg}(k = 3,\, p).$$

Se pide $E(W) = \dfrac{k}{p} = 55.86592.$

(c) Sea X_t el número de incrementos en t minutos.

Del enunciado se tiene que

$$X_t \sim \text{Poisson}(\nu\, t),$$

con $\nu = 4/10$.

Se pide

$$P(X_3 \geq 1) = 1 - P(X_3 = 0) = 1 - e^{-3\,\nu} = 0.6988058.$$

Alternativamente podemos definir como T el tiempo transcurrido hasta el siguiente incremento de presión desde el último que supero los 50 psi, donde

$$T \sim \text{Exp}(\nu = 4/10)$$

Se pide

$$P(T \leq 3) = 1 - e^{-3\,\nu} = 0.6988058.$$

(d) Dado el supuesto, la variable aleatoria T el tiempo transcurrido hasta el siguiente incremento de presión desde el último que supero los 50 psi distribuye Exponencial(ν) traslada en 3.

Se pide

$$P(T > 8) = 1 - F_T(8) = 1 - (1 - e^{(8-3)\,\nu}) = e^{-5\,\nu} = 0.1353353.$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[0.25 Ptos]** por $\lambda = 3.218876$, **[0.25 Ptos]** por $\zeta = 0.4294214$.

Logro 2: Asignar **[0.5 Ptos]** por $p = 0.0537$ y **[0.5 Ptos]** por $P(Y \geq 3) = 0.08924156$ (incluye definir Binomial).

Logro 3: Asignar **[0.5 Ptos]** por definir $W \sim \text{BinNeg}(k = 3,\, p)$ y **[1.0 Ptos]** por $E(W)55.86592$.

Logro 4: Asignar **[0.5 Ptos]** por el $\nu = 4/10$ y **[1.0 Ptos]** por modelo Poisson + $P(X_3 \geq 1) = 0.6988058$ o modelo Exp + $P(T \leq 3) = 0.6988058$.

Logro 5: Asignar **[0.5 Ptos]** por definir la Exponencial(ν) traslada en 3.

Logro 6: Asignar **[1.0 Ptos]** por $P(T > 8) = 0.1353353$.

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

En un parque natural de Chile, un grupo de biólogos estudia el movimiento de partículas de polen en un pequeño lago con el fin de comprender cómo las corrientes influyen en su dispersión. La investigación busca desarrollar estrategias que contribuyan a preservar la biodiversidad del lago, garantizando que las plantas nativas puedan polinizarse de manera efectiva.

Durante la primavera, el viento y las corrientes generan un movimiento aleatorio de las partículas de polen sobre la superficie del agua. Para modelar el tiempo que el polen permanece en una sección del lago antes de ser arrastrado a otra, los investigadores emplean la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{2\,x\,e^{-x^2/\alpha}}{\alpha}, \qquad x > 0,$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro que representa la intensidad de la corriente en el lago, influyendo en la velocidad con la que el polen es arrastrado a otras secciones.

(a) **[2.0 Ptos.]** Calcule el coeficiente de variación del tiempo de permanencia del polen en una sección del lago.

(b) **[2.0 Ptos.]** ¿Comente en cuanto varía la probabilidad que el polen permanezca más de un tiempo t en una sección específica del lago a medida que el valor de α aumenta o disminuye?

(c) **[2.0 Ptos.]** Calcule el IQR del tiempo de permanencia del polen en una sección del lago.

Solución

(a) Se pide $\delta_X = \dfrac{\mu_X}{\sigma_X}$.

Por definción se tiene que

$$\mu_X = \mathsf{E}(X) = \int_0^\infty x \cdot \frac{2\,x\,e^{-x^2/\alpha}}{\alpha}\,dx = \alpha^{1/2}\int_0^\infty y^{3/2-1}\,e^{-y}\,dy = \sqrt{\alpha}\cdot\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\alpha\,\pi}}{2}.$$

y

$$\mathsf{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{2\,x\,e^{-x^2/\alpha}}{\alpha}\,dx = \alpha\int_0^\infty y^{2-1}\,e^{-y}\,dy = \alpha\cdot\Gamma(2) = \alpha.$$

Por lo tanto

$$\delta_X = \frac{\sqrt{\dfrac{\alpha\,(4-\pi)}{4}}}{\dfrac{\sqrt{\alpha\,\pi}}{2}} = \sqrt{\frac{(4-\pi)}{\pi}} = 0.5227232.$$

(b) Tenemos que para α grandes el valor esperado y varianza se amplifican, por lo que se esperan un tiempo mayor de permanencia, como también una mayor probabilidad que este tiempo sea mayor a t.

Notemos que

$$P(X > t) = 1 - F_X(t) = e^{-t^2/\alpha} \to 1,$$

cuando $\alpha \to \infty$.

(c) Tenemos que

$$F_X(xp) = 1 - e^{-x_p^2/\alpha} = p \to x_p = \sqrt{-\alpha\,\ln(1-p)}.$$

Se pide

$$\text{IQR} = x_{0.75} - x_{0.25} = \sqrt{\alpha}\cdot\left[\sqrt{-\ln(1-0.75)} - \sqrt{-\ln(1-0.25)}\right] = 0.64105\cdot\sqrt{\alpha}.$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[1.0 Ptos]** por $\mathsf{E}(X) = \dfrac{\sqrt{\alpha\,\pi}}{2}$.

Logro 2: Asignar **[0.5 Ptos]** por $\mathsf{E}(X^2) = \alpha$ y **[0.5 Ptos]** $\delta_X = 0.5227232$.

Logro 3: Asignar **[2.0 Ptos]** por indicar que para α grande se esperan un tiempo mayor de permanencia.

Logro 4: Asignar **[1.0 Ptos]** por $x_p = \sqrt{-\alpha\,\ln(1-p)}$.

Logro 5: Asignar **[1.0 Ptos]** por $IQR = 0.64105$.

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

En un parque natural de Chile, un grupo de biólogos desea estimar el número total de peces en un lago pequeño utilizando la técnica de captura, marcado y recaptura. Este método se basa en capturar una muestra de individuos, marcarlos y liberarlos de nuevo en el lago. Posteriormente, se captura una segunda muestra para observar cuántos de los individuos capturados están marcados, con el fin de hacer una estimación de la población total.

En el primer muestreo, los biólogos capturan y marcan 30 peces, que luego son devueltos al lago. En los siguientes 14 días posteriores, se capturan muestras sin reemplazo de 20 peces, las cuales se vuelve a integrar al lago.

El conteo registrado fue el siguiente:

Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5	Día 6	Día 7	Día 8	Día 9	Día 10	Día 11	Día 12	Día 13	Día 14
0	0	2	0	1	0	1	2	2	1	0	0	0	1

(a) **[2.0 Ptos.]** ¿Como distribuye el número de peces marcados en la muestra?

(b) **[2.0 Ptos.]** Según los datos del enunciado, ¿cuál sería el valor esperado de la población total de peces en este lago pequeño?

(c) **[2.0 Ptos.]** Si mañana se repite el ejercicio de remuestreo, ¿cuál es la probabilidad de observar al menos dos peces marcados según el tamaño total estimado en (b)?

Solución

(a) Por tratarse de un muestro sin reemplazo, el modelo corresponde a una

$$\text{Hipergeométrica}(n = 20,\, m = 30,\, N).$$

(b) Del enuncido se tiene que

$$\overline{X} = 0.7142857 = n \cdot \frac{m}{N} \to N = \frac{n \cdot m}{\overline{X}} = 840.$$

(c) Se pide

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{\binom{30}{0} \cdot \binom{810}{20}}{\binom{840}{20}} - \frac{\binom{30}{1} \cdot \binom{810}{19}}{\binom{840}{20}} = 0.1575024.$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1: Asignar **[2.0 Ptos]** por Hipergeométrica$(n = 20,\, m = 30,\, N)$.

Logro 2: Asignar **[2.0 Ptos]** por $N = 840$.

Logro 3: Asignar **[2.0 Ptos]** por $P(X \geq 2) = 1 - \frac{\binom{30}{0} \cdot \binom{810}{20}}{\binom{840}{20}} - \frac{\binom{30}{1} \cdot \binom{810}{19}}{\binom{840}{20}}$.

+ 1 Punto Base