Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2022

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

PAUTA INTERROGACIÓN 2

Pregunta 1

Suponga que el número de eventos en t minutos se comportan como una variable aleatoria Poisson$(\nu \cdot t)$. Calcule el valor esperado de $\dfrac{1}{\overline{X}_n}$, donde $\overline{X}_n$ es el promedio que se obtendrá de los próximos n tiempos transcurridos entre eventos (en minutos).

Solución

Tenemos que $\overline{X}_n \sim$ Gamma$(n,\, n\,\nu)$ **[0.4 Ptos]**, ya que los tiempos distribuyen Exp(ν). **[0.2 Ptos]**

Se pide

$$
\begin{aligned}
\text{E}\left(\frac{1}{\overline{X}_n}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{y} \cdot \frac{(n\,\nu)^n}{\Gamma(n)}\, y^{n-1}\, e^{-n\,\nu\,y}\, dy \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
&= \frac{n\,\nu}{n-1} \int_0^\infty \frac{(n\,\nu)^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\, y^{(n-1)-1}\, e^{-n\,\nu\,y}\, dy \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
&= \frac{n\,\nu}{n-1} \cdot 1 \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
&= \frac{\nu}{1 - 1/n} \quad \textbf{[0.1 Ptos]}
\end{aligned}
$$

Pregunta 2

Supongamos que el número de emergencias que deben atender una empresa distribuidora eléctrica diariamente en una zona se comporta como una variable aleatoria Binomial-Negativa, con coeficiente de variación del 30 % y una valor esperado de 6.25 emergencias. ¿Cuál es la probabilidad que hoy deban atender más de 7 emergencias?

Solución

Tenemos que $X \sim$ Bin-Neg$(k,\, p)$ y del enunciado se tiene que

$$\textbf{[0.1 Ptos]} \quad \mu_X = \frac{k}{p} = 6.25 \quad \text{y} \quad \delta_X = \sqrt{\frac{1-p}{k}} = 0.30 \quad \textbf{[0.1 Ptos]}$$

Despejando se tiene que

$$\textbf{[0.2 Ptos]} \quad k = 4 \quad \text{y} \quad p = 0.64 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

Se pide

$$\textbf{[0.1 Ptos]} \quad P(X > 7) = 1 - \sum_{x=4}^{7} \binom{x-1}{4-1} p^4\,(1-p)^{x-4} = 1 - 0.7833483 = 0.2166517 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Pregunta 3

Suponga que usted esta realizando una encuesta telefónica y la probabilidad que un llamado sea exitoso se comporta como una variable aleatoria Beta(1,1). Si hoy piensa realizar 20 llamados, ¿cuál es la probabilidad que al menos 5 sean exitosos, si la probabilidad de éxito hoy permanece constante, pero desconocida?

Solución

Definamos como X la probabilidad de éxito de una llamada telefónica durante un día cualquiera e Y el número de llamados exitosos ese día.

$$\textbf{[0.1 Ptos]} \quad X \sim \text{Beta}(1,1) \quad \text{e} \quad Y \,|\, X = x \sim \text{Binomial}(n = 20,\, p = x) \quad \textbf{[0.1 Ptos]}$$

Se pide $P(Y \geq 5)$.

Por teorema de probabilidades totales se tiene que

$$\begin{aligned}
p_Y(y) &= \int_0^1 \binom{20}{y} x^y\,(1-x)^{20-y}\,dx \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
&= \binom{20}{y} \cdot \text{B}(y+1,\, 20-y+1) \int_0^1 \frac{1}{\text{B}(y+1,\, 20-y+1)} x^y\,(1-x)^{20-y}\,dx \quad \textbf{[0.3 Ptos]} \\
&= \frac{1}{21} \quad \textbf{[0.1 Ptos]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\textbf{[0.1 Ptos]} \quad P(Y \geq 5) = 1 - P(Y < 5) = 1 - \frac{5}{21} = 0.7619048 \quad \textbf{[0.1 Ptos]}$$

Pregunta 4

Suponga el tiempo en minutos que le toma a un alumno desarrollar la I2 de hoy distribuye Weibull$(\eta,\, \beta)$. En cambio el tiempo desde que ingresa a la sala y se retira, dado el tiempo que le toma en hacer la prueba distribuye Gamma$(k,\, \nu)$. Calcule la covarianza entre el tiempo que toma a un alumnos rendir la prueba y el tiempo de permanencia en la sala.

Solución

Definamos como X el tiempo en minutos que le toma al alumnos desarrollar la I2 e Y al tiempo desde que ingresa y se retira.

Del enunciado se tiene que

$$\textbf{[0.1 Ptos]} \quad X \sim \text{Weibull}(\eta,\, \beta) \quad \text{e} \quad Y \,|\, X = x \sim \text{Gamma}(k\, \nu), \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \quad y \geq x \quad \textbf{[0.1 Ptos]}$$

Se pide

$$\text{Cov}(X,\, Y) = \text{E}(X \cdot Y) - \text{E}(X) \cdot \text{E}(Y) \quad \textbf{[0.1 Ptos]}$$

Del formulario y aplicando teorema de esperanzas iteradas se tiene que:

$$\begin{aligned}
\text{E}(X) &= \eta\, \Gamma(1 + 1/\beta) \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
\text{E}(Y) &= \text{E}[\text{E}(Y \,|\, X)] = \text{E}\left(\frac{k}{\nu} + X\right) = \frac{k}{\nu} + \eta\, \Gamma(1 + 1/\beta) \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
\text{E}(X \cdot Y) &= \text{E}[\text{E}(X \cdot Y \,|\, X)] = \text{E}\left(\frac{k}{\nu}\, X + X^2\right) = \frac{k}{\nu} \cdot \eta\, \Gamma(1 + 1/\beta) + \eta^2\, \Gamma(1 + 2/\beta) \quad \textbf{[0.2 Ptos]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{Cov}(X,\, Y) = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right] \quad \textbf{[0.1 Ptos]}$$

Pregunta 5

La información del año académico 2021 muestra que el puntaje PDT-MAT de ingreso a la carrera y el promedio ponderado semestral (PPS) del primer semestre, se comportan conjuntamente como una distribución Normal Bivariada, con valores esperados 650 y 5.2, desviaciones estándar igual a 70 y 0.8, respectivamente y un coeficiente de correlación de 0.7.

Si un alumno ingresó a la carrera con 720 puntos en PDT-MAT, ¿cuál sería la probabilidad de obtener un PPS entre 5.7 y 6.2 el primer semestre?

Solución

Sea X el puntaje PDT-MAT e Y el PPS del 1er seemstre.

Del enunciado se tiene que

$$\begin{aligned} Y \,|\, X = x &\sim \text{Normal}\left(\mu_Y + (x - \mu_X) \cdot \frac{\rho \cdot \sigma_Y}{\sigma_X},\, \sigma_Y\,\sqrt{1-\rho^2}\right) \\ &\sim \text{Normal}(5.76,\, 0.5713143), \quad \text{para } x \text{ igual a } 720 \quad \textbf{[0.6 Ptos]} \end{aligned}$$

Se pide

$$\begin{aligned} P(5.7 < Y \leq 6.2 \,|\, X = 720) &= \Phi(0.770154) - \Phi(-0.105021) \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\ &\approx \Phi(0.77) - 1 + \Phi(0.11) \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\ &= 0.7794 - 1 + 0.5438 \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\ &\approx 0.32 \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \end{aligned}$$

Pregunta 6

A una tienda se esperan que ingresen, según un proceso de Poisson, ν clientes por hora. Si el tiempo (en horas) en que un cliente permanece en la tienda distribuye Exponencial(ν), ¿cuál es a probabilidad que el primer cliente que ingresa salga antes que el segundo?

Solución

Sea X el tiempo de permanencia del 1er cliente que ingresa e Y el tiempo de permanencia del 2do clienta más el tiempo transcurrido entre él y el primero que llegó.

Del enunciado se deduce que

$$\textbf{[0.1 Ptos]} \quad X \sim \text{Exp}(\nu) \quad \text{e} \quad Y \sim \text{Gamma}(2, \nu) \quad \textbf{[0.1 Ptos]}$$

Notar que ambas variables aleatorias son independientes. **[0.1 Ptos]**

Se pide

$$\begin{aligned}
P(X < Y) &= \int_0^\infty \int_x^\infty \nu\, e^{-\nu\, x} \cdot \nu^2\, y\, e^{-\nu\, y}\, dy\, dx \quad \textbf{[0.3 Ptos]} \\
&= \int_0^\infty \left(\nu\, e^{-2\,\nu\, x} + \nu^2\, x\, e^{-2\,\nu\, x}\right)\, dx \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
&= \frac{3}{4} \quad \textbf{[0.1 Ptos]}
\end{aligned}$$