Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2022

Curso : **Probabilidad y Estadística**
Sigla : **EYP1113**
Profesores : **Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O. y Felipe Ossa M.**

PAUTA INTERROGACIÓN 3

Pregunta 1

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución Uniforme, con soporte en los intervalos $(0,\,1)$ y $(0,\,2)$ respectivamente.

Obtenga la función de densidad $f_Z(z)$, con $Z = X + Y$.

Hint: Calcule por separado la función de densidad para $0 < z < 1$, $1 \leq z < 2$ *y* $2 \leq z < 3$.

Solución

Logro 1: Determinar limites de integración para el caso $0 < z < 1$.

$$f_Z(z) = \int_0^z f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \cdot |1|\,dx. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: Obtener función densidad para el caso $0 < z < 1$.

$$f_Z(z) = \int_0^z 1 \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{z}{2}. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: Determinar limites de integración para el caso $1 \leq z < 2$.

$$f_Z(z) = \int_0^1 f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \cdot |1|\,dx. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 4: Obtener función densidad para el caso $1 \leq z < 2$.

$$f_Z(z) = \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5: Determinar limites de integración para el caso $2 \leq z < 3$.

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^1 f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \cdot |1|\,dx. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 6: Obtener función densidad para el caso $2 \leq z < 3$.

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^1 1 \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{3-z}{2}. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+1 Puntos Base

Pregunta 2

En un centro neurológico se realiza un test para medir los reflejos motores de un paciente. Esto consiste en hacerlo escuchar una onda de sonido constante y en un momento cualquiera se detiene el sonido, y el paciente debe entonces presionar un botón lo antes posible. El tiempo entre que el sonido se detiene hasta que el paciente presiona el botón se llama *Tiempo de reacción*.

Suponga que el tiempo de reacción T (en segundos) distribuye Beta(1,2) con soporte en el intervalo $[0,\, 1]$, debido a que no se registraron tiempos de reacción mayores a un segundo.

La función de densidad de este modelo está dada por:

$$f_T(t) = 2\,(1-t)\,, \qquad 0 < t < 1.$$

El experimento completo consiste en medir con cierta precisión el tiempo de reacción de un paciente. Por eso se repite la medición del tiempo de reacción 64 veces, para luego promediar todas las mediciones.

Bajo el supuesto de independencia entre mediciones:

(a) ¿Cuál es la probabilidad aproximada de observar en un paciente un *tiempo de reacción promedio* mayor a 3 décimas de segundo (0.3 segundos)?

(b) ¿Cuál es la probabilidad que el tiempo de reacción más lento, entre las 64 mediciones, sea mayor a 0.8 segundos?

Solución

(a) **Logro 1:** Del formulario tenemos que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \mu_T = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \sigma_T^2 = \frac{2}{36}. \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Logro 2: Por teorema del limite central

$$\overline{T} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{48}\right). \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: Se pide

$$P(\overline{T} > 0.3) \approx 1 - \Phi(-1.13) = \Phi(1.13) = 0.8708 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

(b) Definamos como Y_{64} al máximo.

Logro 4: Se pide

$$P(Y_{64} > 0.8) \overset{\text{iid}}{=} 1 - F_X(0.8)^{64} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5:

$$P(Y_{64} > 0.8) = 1 - \left[\int_0^{0.8} 2\,(1-t)\,dt\right]^{64} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5:

$$P(Y_{64} > 0.8) = 1 - 0.96^{64} = 0.926657 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+1 Puntos Base

Pregunta 3

Las velocidades de transmisión que un proveedor de internet finalmente entrega a cada uno de sus clientes, es una variable aleatoria Gamma(k, ν). A partir de una muestra de n mediciones independientes, calcule el error cuadrático medio, aproximado de 1er orden, del estimador de momentos de ν, bajo el supuesto que el parámetro k es conocido. ¿Que podría comentar con respecto a sus propiedades?.

Hint: Si $\hat{\nu}$ es un estimador de ν, entonces su error cuadrático medio se define como

$$\textit{ECM}(\hat{\nu}) = \textit{Var}(\hat{\nu}) + [\textit{E}(\hat{\nu}) - \nu]^2.$$

Solución

Logro 1: El estimador de momentos:

$$\hat{\nu} = \frac{k}{\overline{X}_n} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: Valor esperado aproximado de 1er orden:

$$\mu_{\hat{\nu}} \approx \nu. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: Varianza aproximada de 1er orden:

$$\sigma^2_{\hat{\nu}} \approx \frac{\nu^2}{k\,n}. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 4: Reemplazando

$$\text{ECM}(\hat{\nu}) \approx \sigma^2_{\hat{\nu}} + (\mu_{\hat{\nu}} - \nu)^2 = \frac{\nu^2}{k\,n}. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5: Cuando $n \to \infty$

$$\text{ECM}(\hat{\nu}) \to 0, \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 6: Por lo tanto, $\hat{\nu}$ es un estimador aproximadamente insesgado y consistente para ν. **[1.0 Ptos.]**

+1 Puntos Base

Pregunta 4

Suponga que la productividad de una empresa se puede medir en términos del capital X, el nivel de avance tecnológico Y y los costos Z asociados a recursos humanos e insumos.

Considere que las variables antes mencionadas tienen un comportamiento Log-Normal con las siguientes características:

```
           X     Y    Z
median 7.00 10.00 5.00
c.o.v. 0.15  0.35 0.30

cor                     cor
     X    Y   Z                ln(X)  ln(Y) ln(Z)
X  1.0 -0.5 0.0        ln(X)  1.00  -0.45  0.00
Y -0.5  1.0 0.3        ln(Y) -0.45   1.00  0.35
Z  0.0  0.3 1.0        ln(Z)  0.00   0.35  1.00
```

Si $W = \dfrac{X \cdot Y^{1/2}}{Z}$ es el índice de productividad usado para esta empresa, ¿cuál es la probabilidad que este índice sea mayor a 5?

Solución

Logro 1: Tenemos que

$$\ln(X) \sim \text{Norma}(\lambda_X, \zeta_X), \quad \ln(Y) \sim \text{Norma}(\lambda_Y, \zeta_Y), \quad \ln(Z) \sim \text{Norma}(\lambda_Z, \zeta_Z) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: con

$$\lambda_X = \ln(7), \quad \lambda_Y = \ln(10), \quad \lambda_Z = \ln(5) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: y

$$\zeta_X = \sqrt{\ln(1 + 0.15^2)}, \quad \zeta_Y = \sqrt{\ln(1 + 0.35^2)}, \quad \zeta_Z = \sqrt{\ln(1 + 0.30^2)}. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 4: Por otra parte,

$$W \sim \text{Log-Normal}(\lambda, \zeta), \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

con

$$\lambda = \lambda_X + 0.5 \cdot \lambda_Y - \lambda_Z = 1.487765 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Logro 5: y

$$\zeta = \sqrt{\zeta_X^2 + (+0.5)^2 \cdot \zeta_Y^2 + (-1)^2 \cdot \zeta_Z^2 + 2 \cdot 0.45 \cdot \zeta_X \cdot (+0.5) \cdot \zeta_Y + 2 \cdot 0.35 \cdot (+0.5) \cdot \zeta_Y \cdot (-1) \cdot \zeta_Z} = 0.2820854. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 6: Se pide

$$P(W > 5) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(5) - \lambda}{\zeta}\right) \approx 1 - \Phi(0.43) = 0.3336 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+1 Puntos Base