Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2022

Curso : Probabilidad y Estadística
Sigla : EYP1113
Profesores : Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O. y Felipe Ossa M.

PAUTA INTERROGACIÓN 2

Pregunta 1

El tiempo de desplazamiento en la nueva AVO (Autopista Vespucio Oriente) entre el ingreso en El Salto y el egreso en Tobalaba (aprox. 10 km) se comporta como una distribución Log-Normal trasladada. Usted que requiere transitar ese trayecto desea evaluar la probabilidad que durante esta semana (M-W-J-V) en al menos dos días le tome más de 20 min.

Para evaluar la probabilidad, utiliza la información obtenida en los viajes previos, la cual se presenta a continuación:

```
Min. Median  Mean   Max.
  6      18    20     73
```

Solución

Sea T $\sim$ Lognormal desplazada con parámetros $(\lambda\,,\zeta\,,\alpha)$.

Logro 1: Determinar trasladamiento α.

$$\texttt{Min} = \alpha \rightarrow \alpha = 6 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: Expresar mediana y media en términos de los parámetros.

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \texttt{Median} = \exp^{\lambda} + \alpha, \quad \texttt{Mean} = \exp^{\lambda + \zeta^2/2} + \alpha, \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Logro 3: Obtener λ y ζ.

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \lambda = 2.485, \quad \zeta = 0.555 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Logro 4: Calcula $P(T > 20)$.

$$\begin{aligned} P(T > 20) &= P(T - \alpha > 20 - 6) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(14) - \lambda}{\zeta}\right) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\ &= 1 - 0.61 = 0.39 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \end{aligned}$$

Logro 5: Definir variable Binomial.

Sea Y el número de días de la semana "corta" que toma más de 20 min el viaje.

$$Y \sim \text{Binomial}(n = 4,\, p = 0.39) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 6: Calcular probabilidad pedida.

$$P(Y \geq 2) = 1 - p_Y(0) - p_Y(1) = 0.50745 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

Durante el verano, Europa vivió jornadas extremadamente calurosas. Suponga que las temperaturas máximas diarias, durante el verano, en cierta localidad distribuyen Weibull($\eta = 35,\, \beta$), con una mediana de 33.7ºC, y que una ola de calor se establece una vez que se observa un 3er día consecutivo con temperaturas sobre un umbral, el cual para efectos de esta evaluación será de 30ºC. ¿Cuál es la probabilidad que, después de un día no caluroso, en los próximos cinco días se observe una ola de calor? Asuma independencia entre días.

Solución

Definamos como X a la temperatura máxima registrada en un día cualquiera, la cual distribuye

$$\text{Weibull}(\eta = 35,\, \beta).$$

Logro 1: Presentar representación de la mediana teórica en función de los parámetros.

$$\ln(33.7) = \ln(35) + \frac{1}{\beta} \cdot \ln[-\ln(1 - 0.5)] \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: Obtener valor de β.

$$\beta = \frac{\ln[-\ln(1-0.5)]}{\ln(33.7) - \ln(35)} = 9.683243 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: Obtener la expresión para $P(X > 30)$.

$$P(X > 30) = \exp\left\{-\left(\frac{30}{\eta}\right)^{\beta}\right\} = p \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 4: Obtener valor numérico de $P(X > 30)$.

$$p = 0.7987001 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5: Aplicando independencia obtener una expresión en términos de p para la probabilidad del evento A "observar una ola de calor en los próximos 5 días".

$$\begin{aligned} P(A) &= p^3 \cdot [(1-p)^2 + (1-p)\,p + p\,(1-p) + p^2] + (1-p) \cdot p^3 \cdot [p + (1-p)] + p \cdot (1-p) \cdot p^3 + (1-p) \cdot (1-p) \cdot p^3 \\ &= p^3 + (1-p) \cdot p^3 + p \cdot (1-p) \cdot p^3 + (1-p) \cdot (1-p) \cdot p^3 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

Logro 6: Calcular valor numérico de $P(A)$.

$$P(A) = 0.7146361 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

En general, los fines de semana largo, se producen múltiples accidentes. Uno de los accidentes más recurrentes son los por alcance. En general, la causa de los accidentes por alcance es por el ingreso de vehículos a menor velocidad en los enlaces de las carreteras.

Suponga que un conductor pretende ingresar a una vía rápida siempre y cuando se produzca una ventana de al menos 10 seg entre vehículos que transitan por la vía.

Si el número de vehículos en la vía rápida se comporta como un proceso Poisson con tasa 10 vehículos por minuto, ¿cuál es la probabilidad que el conductor ingrese a la vía rápida justo después del cuarto vehículo que transita por la vía rápida?

Solución

Logro 1: Definir variable aleatoria X_t.

Sea X_t el número de vehículos en t segundos.

$$X_t \sim \text{Poisson}\left(\lambda = \frac{10\,t}{60}\right). \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: Definir variable aleatoria T.

Sea T el Tiempo, en segundos, entre vehículos

$$T \sim \text{Exponencial}(\nu = 1/6). \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: Calcular $P(T > 10)$.

Sea p la probabilidad de una ventana de más de 10 seg

$$p = P(T > 10) = e^{-\frac{10}{6}} = 0.1889. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 4: Definir variable aleatoria Y.

Sea Y el número de vehículos HASTA que se produce una ventana de más de 10 seg.

$$Y \sim \text{Geométrica}(p = 0.1889). \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5:Determinar que se pide $p_Y(5)$.

$$p_Y(5) = (1-p)^4\,p. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 6: Entregar valor numérico.

$$p_Y(5) = 0.08176. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 4

Suponga que el nivel diario de O_3 (ozono, en ppb) y CO (Monóxido de carbono, en ppm) distribuyen conjuntamente Normal Bivariada. Mediciones tomadas el último año entregan la siguiente información:

```
        CO     O3
mean 0.596 18.438
sd   0.396  8.236
```

Si la correlación entre CO y O_3 fue de -0.42: ¿cuál sería el mejor pronóstico para O_3, si el nivel de CO fuese de 0.5 ppm?, ¿cuál es la probabilidad que el nivel CO sea más de 1 ppm, dado que el nivel de O_3 es de 15 ppb?

Solución

Sea X el nivel de CO e Y el nivel de O_3.

$$(X, Y)' \sim \text{Normal}_2(\mu_X,\, \mu_Y,\, \sigma_X,\, \sigma_Y,\, \rho)$$

Logro 1: Estimar parámetros.

$$\mu_X = 0.596, \text{ \textbf{[0.2 Ptos.]}} \quad \mu_Y = 18.438, \text{ \textbf{[0.2 Ptos.]}} \quad \sigma_X = 0.396, \text{ \textbf{[0.2 Ptos.]}}$$
$$\sigma_Y = 8.236, \text{ \textbf{[0.2 Ptos.]}} \quad \rho = -0.42 \text{ \textbf{[0.2 Ptos.]}}$$

Logro 2: Mejor pronostico para Y.

$$E(Y \mid X = 0.5) = 18.438 + (0.5 - 0.596) \cdot \frac{8.236 \cdot (-0.42)}{0.396} = 19.27241 \quad \text{\textbf{[1.0 Ptos.]}}$$

Logro 3: Distribución condicional de X dado Y.

$$X \mid Y = y \sim \text{Normal}\left(\mu_X + (y - \mu_Y) \cdot \frac{\sigma_X \cdot \rho}{\sigma_Y},\, \sqrt{\sigma_X^2 \cdot (1 - \rho^2)}\right) \quad \text{\textbf{[1.0 Ptos.]}}$$

Logro 4: Obtener E$(X \mid Y = 15)$.

$$\text{E}(X \mid Y = 15) = 0.596 + (15 - 18.438) \cdot \frac{0.396 \cdot (-0.42)}{8.236} = 0.6650829 \quad \text{\textbf{[1.0 Ptos.]}}$$

Logro 5: Obtener Var$(X \mid Y = 15)$.

$$\text{Var}(X \mid Y = 15) = 0.396^2 \cdot [1 - (-0.42)^2] = 0.3597609^2 = 0.1294279 \quad \text{\textbf{[1.0 Ptos.]}}$$

Logro 6: Calcular $P(X > 1 \mid Y = 15)$.

$$P(X > 1 \mid Y = 15) = 1 - \Phi\left(\frac{1 - 0.6650829}{0.3597609}\right) = 1 - 0.8240586 = 0.1759414 \quad \text{\textbf{[1.0 Ptos.]}}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 5

Considere un vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x \cdot e^{-y} + y \cdot e^{-x}}{k},$$

con $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$.

Determine el valor de k y la distribución marginal de X.

Solución

Logro 1: Plantear ecuación de la integral = 1

El valor de la constante k debe ser tal que la integral de la función de densidad en todo el soporte $\Theta_{X,Y} = (0,1)^2$ sea 1. Para ello calculamos dicha integral. **[1.0 Ptos.]**

Logro 2: Resolver integral y encontrar k

$$\iint_{\Theta_{X,Y}} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xe^{-y} + ye^{-x}}{k}\,dx\,dy = \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{1}{2} \cdot e^{-y} + y(1-e^{-1})\,dy \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{1}{2} \cdot (1-e^{-1}) + \frac{1}{2} \cdot (1-e^{-1})\right] = \frac{1-e^{-1}}{}k \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Logro 3: Despejar k

Para que esta integral sea 1, entonces $k = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$. **[1.0 Ptos.]**

Logro 4: Plantear la integral a resolver

Por definición de densidad marginal de X, usando $0 < x < 1$,

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{xe^{-y} + ye^{-x}}{k}\,dy \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Logro 5: Resolver integral

Para $0 < x < 1$,

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad f_X(x) = \int_0^1 \frac{xe^{-y} + ye^{-x}}{1-e^{-1}}\,dy = \frac{x(1-e^{-1}) + \frac{1}{2}e^{-x}}{1-e{-1}} = x + \frac{e^{-x}}{2(1-e^{-1})} = x + \frac{e^{-x+1}}{2(e-1)} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Logro 6: Respuesta densidad en todo su soporte

La función de densidad marginal de X es

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{e^{-x}}{2(1-e^{-1})} & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 6

Se está desarrollando un nuevo nutriente para los ciruelos que son afectadas por la patología de "hoja blanca". Se ha llegado a una efectividad del producto de 80 %, es decir, un ciruelo con "hoja blanca" puede recuperarse y tener hojas sanas con probabilidad 0.80 al cabo de un año de este tratamiento. Asuma que la efectividad del tratamiento actúa de manera independiente entre árboles.

Afortunadamente, la patología no es común ni contagiosa; por lo que que se puede asumir que actúa de manera independiente entre los árboles. La probabilidad de contagio es 0.30 para cada árbol.

Un equipo científico visita una plantación de 20 ciruelos, quienes denotan como X a la cantidad de ciruelos que sufren la enfermedad de "Hoja blanca". A todos estos X ciruelos se les aplica el tratamiento con el nutriente, y se realiza un seguimiento durante un año.

Considere Y como la cantidad de ciruelos que se mejoraron y calcule la covarianza entre X e Y.

Solución

Logro 1: Definir modelo marginal

La presencia o no de la enfermedad en cada uno de los 20 ciruelos puede considerarse como un experimento Bernoulli (probabilidad constante, independientes y dos resultados). Por lo tanto

$$X \sim \text{Binomial}(n = 20,\, p = 0.3) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: Definir modelo condicional

Por otra parte, para los árboles enfermos, el éxito o no del tratamiento también puede considerarse como un experimento Bernoulli (probabilidad constante, independientes y dos resultados). Existen un total de X árboles enfermos, por lo tanto sólo se trataron a ellos, y

$$Y \mid X = x \sim \text{Binomial}(x,\, q = 0.8) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: Calcular esperanza marginal de X

Por formulario

$$\text{E}(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0.3 = 6 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 4: Calcular esperanza marginal de Y

Por fórmula de esperanzas iteradas y por formulario,

$$\text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y|X)] = \text{E}[X \cdot q] = q \cdot \text{E}(X) = n \cdot p \cdot q = 20 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 4.8 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Alternativamente, el alumno podría demostrar que $Y \sim$ Binomial$(20,\, 0.3 \cdot 0.8) \to$ E$(Y) = 20 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 4.8$.

Logro 5: Calcular 1er momento conjunto

Por fórmula de esperanzas iteradas

$$\begin{aligned}
\text{E}(X \cdot Y) &= \text{E}[\text{E}(X \cdot Y|X)] = \text{E}[X \cdot \text{E}(Y|X)] = \text{E}[X \cdot X \cdot q] \\
&= q \cdot \text{E}(X^2) = q \cdot [\text{Var}(X) + \text{E}(X)^2] = n\,p\,q\,(1 - p + n\,p) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= 0.8 \cdot [20 \cdot 0.3(1 - 0.3) + 20^2 \cdot 0.3^2] \\
&= 0.8 \cdot [4.2 + 36] = 32.16 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Logro 6: Calcular covarianza

Utilizando la fórmula:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Cov}(X, Y) &= \mathsf{E}(X \cdot Y) - \mathsf{E}(X) \cdot E(Y) \\
&= n\,p\,q\,(1 - p + n\,p) - n\,p \cdot n\,p\,q \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= n\,p\,q\,(1 - p) \\
&= 3.36 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base