Ayudantes: Michael Ramón: maramon@uc.cl
Juan Merino: jcamilo.merino@uc.cl
Diego Pérez: dtperez1@uc.cl
Christoph Bürger: christoph.buerger@uc.cl
Oscar Guerrero: oscar.guerrero@uc.cl

Ayudantía #6

Distribuciones de Probabilidad

Problema 1 *Distribución Poisson, Exponencial y Gamma*

Games of Thrones (GoT) se caracteriza por las muertes de personajes importantes. Producto de lo anterior diversos estudios se han realizado respecto a los tiempos de vida de los personajes en cada episodio. Por ejemplo, Rudy, K. (2017), *Poisson Data: Examining the number deaths in an episode of Game of Thrones*, determinó que la tasa de muertes de personajes relevantes por hora es de 3,14 (estudio basado en los primeros 57 capítulos).

Se pide que determine:

a) El tiempo esperado para la 1era muerte.

Si el primer capítulo solo duró 54 minutos,

b) ¿Cuál es la probabilidad que la tercera muerte ocurra durante el primer capítulo?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran tres o más muertes en el primer capítulo?

Solución:

a) Sea T_1 el tiempo transcurrido hasta la primera muerte. Luego, $T_1 \sim \text{Exponencial}(\nu = 3{,}14)$. El tiempo esperado está dado por $E[T_1] = \frac{1}{3{,}14} = 0{,}3185$ horas (19,1) minutos.

b) Sea T_3 el tiempo hasta la tercera muerte. Se tiene que $T_3 \sim \text{Gamma}(k = 3, \nu = 3{,}14)$. Se pide entonces $P(T_3 \leq \frac{54}{60}) = 1 - \sum_{x=0}^{3-1} \frac{(3{,}14 \cdot 0{,}9)^x e^{-3{,}14 \cdot 0{,}9}}{x!} = 0{,}5367$.

c) Sea Y_t el número de muertes en t horas. Se cumple que $Y_t \sim \text{Poisson}(3{,}14t)$.
Luego $P(Y_{0,9} \geq 3) = 1 - \sum_{x=0}^{3-1} \frac{(3{,}14 \cdot 0{,}9)^x e^{-3{,}14 \cdot 0{,}9}}{x!} = 0{,}5367$.

Problema 2 *Distribución Gamma trasladada*

Los sismos son descritos por diversas caracter ısticas, tales como magnitud (escala Richter), profundidad (en kms) y ubicaci on (longitud, y latitud), entre otras. Usted analiza la informaci on de los ultimos sismos y de acuerdo a diversos estudios determina:

- Se esperan 6 sismos diarios según un proceso de Poisson.
- La profundidad se comporta como una variable aleatoria Gamma desplazada con media de 80 km y desviación estándar de 40 km, valor que coincide con el mínimo (desplazamiento).

Asumiendo independencia entre sismos:

(a) ¿Cuál es la probabilidad que desde este momento el 4to sismo ocurra después de 8 horas? (Indicación: Utilice la distribución Gamma)

(b) ¿Cuál es la probabilidad que la profundidad del próximo sismo supere los 60 km?

Solución:

a) Sea T_4 el tiempo transcurrido (en horas) hasta el 4to sismo. Luego $T_4 \sim \text{Gamma}(k = 4, \nu = 6/24)$. Se pide

$$P(T > 8) = \sum_{x=0}^{4-1} \frac{(8 \cdot 6/24)^x e^{-8 \cdot 6/24}}{x!} = 0{,}8571$$

b) Sea K la profundidad del siguente sismo y del enunciado se tiene que:

$$K \sim \text{Gamma}(k, \nu) \text{ trasladada en } \alpha$$

Donde $\alpha = 40,\ \mu = \frac{k}{\nu} + \alpha = 80,\ \sigma^2 = \frac{k}{\nu^2} = 40^2$. Despejando se cumple que $k = 1, \nu = 1/40$. Finalmente se pide

$$P(K > 60) = e^{-(60-40)/40} = 0{,}6065$$

Problema 3 *Poisson, Binomial*

Suponga que el número de ingresos clandestinos diarios que ocurren en Colchane, frontera con Bolivia en la Región de Tarapacá, es una variable aleatoria Poisson cuyo coeficiente de variación es de 17.5

a) El personal de frontera (que debería evitar los ingresos) almuerza diariamente entre 13:00 y 15:00 hrs. Determine la probabilidad que, durante el horario de almuerzo, en los próximos cinco días, al menos en dos días ingresen clandestinamente más de tres personas.

b) Si usted, mediante un drone, registra los ingresos clandestinos en Colchane, y comienza a grabar a las 09.00 hrs, ¿cuál es la probabilidad que registre al menos un ingreso antes de las 09:45 hrs, si ya revisó los primeros 20 minutos de grabación y no registró ingresos clandestinos?

Solución:

a) Sea X_t el número de ingresos clandestinos en Colchane en t días. $X_t \sim \text{Poisson}(\nu t)$ donde $\nu = \frac{1}{0{,}175^2} = 32{,}653$. Sea p la probabilidad que durante el horario de almuerzo ingresen clandestinamente más de tres personas. Luego,

$$p = P\left(X_{2/24} > 3\right) = 1 - P\left(X_{2/24} \leq 3\right) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{(\nu \cdot 2/24)^x e^{-\nu \cdot 2/24}}{x!} = 0{,}2905$$

Definamos como Y el número de días, entre los próximos cinco, en que ingresan más de tres personas clandestinamente durante el horario de almuerzo.

$$Y \sim \text{Binomial}(n = 5, p)$$

Se pide:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - \sum_{y=0}^{1} \binom{5}{y} p^y (1-p)^{5-y} = 0{,}452275$$

b) Sea T el tiempo, en minutos, transcurrido hasta el 1er ingreso clandestino desde el inicio de la grabación (09:00 horas).

$$T \sim \text{Exponencial}\left(\frac{\nu}{24 \cdot 60}\right)$$

Se pide:

$$\begin{aligned}
P(T \leq 45 \mid T > 20) &= 1 - P(T > 45 \mid T > 20) \\
&= 1 - \frac{P(\{T > 45\} \cap \{T > 20\})}{P(T > 20)} \\
&= 1 - \frac{P(T > 45)}{P(T > 20)} \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{\nu}{24 \cdot 60} \cdot (45 - 20)\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{\nu}{24 \cdot 60} \cdot 25\right), \quad \text{por propiedad de carencia de memoria} \\
&= 0{,}432715
\end{aligned}$$