PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística
EYP1113 – Probabilidades y Estadística
Segundo semestre 2024

Ayudantes: Michael Ramón: maramon@uc.cl
Juan Merino: jcamilo.merino@uc.cl
Diego Pérez: dtperez1@uc.cl
Christoph Bürger: christoph.buerger@uc.cl
Oscar Guerrero: oscar.guerrero@uc.cl

Ayudantía 01

Álgebra de eventos, axiomas de probabilidad, cálculo

Problema 1 *Axiomas de Probabilidad I*

Sean A, B y C tres eventos mutuamente excluyentes de un mismo espacio muestral S. Demuestre que

$$P(A) + P(B) + P(C) < P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C})$$

Solución:

Al ser los tres eventos mutuamente excluyentes (disjuntos), entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

esto implica que

$$P(A \cap B) = 0$$
$$P(A \cap C) = 0$$
$$P(B \cap C) = 0$$
$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

Mediante la **ley del complemento** se sabe que:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(\overline{B}) = 1 - P(B)$$
$$P(\overline{C}) = 1 - P(C)$$

Entonces:

$$P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C}) = 3 - P(A) - P(B) - P(C)$$

Para realizar la demostración se utilizará la desigualdad hasta llegar a resultados lógicos, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
P(A) + P(B) + P(C) &< P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C}) \\
P(A) + P(B) + P(C) &< 3 - P(A) - P(B) - P(C) \\
P(A \cup B \cup C) &< 3 - P(A \cup B \cup C) \\
2 \cdot P(A \cup B \cup C) &< 3 \\
P(A \cup B \cup C) &< \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Debido al **axioma 1**, la probabilidad de cualquier evento siempre es menor o igual a 1, por lo que se tiene:

$$P(A \cup B \cup C) \leq 1 < \frac{3}{2}$$

Esta desigualdad es siempre verdadera para A, B y C, por lo que queda demostrado que

$$P(A) + P(B) + P(C) < P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C})$$

es verdadero.

Problema 2 *Axiomas de probabilidad II y álgebra de eventos*

Sean dos eventos A y B contenidos en un espacio muestral S, demuestre lo siguiente:

1. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
2. $A \subset B \longrightarrow P(A) \leq P(B)$
3. $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$
4. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

Solución:

Solución 1.

Para todo evento A es válido que:

$$A = A \cap S$$

Como el evento B está contenido en el espacio muestral, entonces es válido es:

$$S = B \cup \overline{B}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A &= A \cap S \\ &= A \cap (B \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) && \text{(Ley distributiva)} \end{aligned}$$

Además se tiene que $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$ son eventos disjuntos, esto se ve de dos formas:

- De forma matemática se tiene que calcular su intersección:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) &= (A \cap A) \cap (B \cap \overline{B}) && \text{(Ley asociativa)} \\ &= A \cap (B \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \phi \\ &= \phi \end{aligned}$$

  El evento resultante es el evento vacio, entonces ambos eventos son disjuntos.

- Analizando lo que representan ambos conjuntos se tiene que:
  - $(A \cap B)$: Sucede A y sucede B
  - $(A \cap \overline{B})$: Sucede A y no sucede B

  entonces, la intersección se ambos conjuntos representa que sucede A y sucede B y no sucede B a la vez, lo cual esto no tiene sentido, debido a esto ambos son eventos disjuntos.

Continuando, se puede aplicar probabilidad a A:

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) - P[A \cap B) \cap (A \cap \overline{B})] && \text{(Ley aditiva)} \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) - P(\phi) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

Despejando $P(A \cap \overline{B})$ se obtiene la igualdad buscada:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Solución 2.

Se observa que si A está contenido en B (i.e. $A \subset B$), entonces su intersección es:

$$A \cap B = A$$

Del ítem 1. se puede utilizar la igualdad:

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$

Del axioma 01 se sabe que cualquier probabilidad debe ser positiva, por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(B \cap \overline{A}) &\geq 0 \\ P(B) - P(A \cap B) &\geq 0 \\ P(B) - P(A) &\geq 0 \\ P(A) &\leq P(B) \end{aligned}$$

Solución 3.

Mediante la ley aditiva se tiene lo siguiente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Del axioma 02 se sabe que la máxima probabilidad de un evento es 1, por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &\leq 1 \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) &\leq 1 \\ P(A \cap B) - P(A) - P(B) &\geq -1 \\ P(A \cap B) &\geq P(A) + P(B) - 1 \end{aligned}$$

Solución 4.

Mediante la ley de De Morgan se tiene lo siguiente:

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

Aplicando probabilidad se obtiene:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P\left(\overline{A \cup B}\right) \\ &= 1 - P(A \cup B) && \text{(Ley del complemento)} \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] && \text{(Ley aditiva)} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

Problema 3 *Cálculo*

Probabilidades y estadística es un curso basado en matemáticas aplicadas a situaciones aproximadamente reales, por lo que el buen dominio de las herramientas de cálculo, como puede ser el cálculo diferencial, cálculo integral y sumas/series, es parte fundamental del mismo. Históricamente, un porcentaje considerable de alumnos presenta dificultades en este apartado, por lo que el objetivo de esta pregunta es familiarizarlos con el nivel de complejidad que encontrarán a lo largo del curso.

1. Demuestre el valor de la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = 1$$

2. Obtenga el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\nu x}\, dx$$

3. Obtenga el valor de la siguiente serie:

$$\sum_{y=x}^{\infty} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} \cdot \frac{\nu^y e^{-\nu}}{y!}$$

4. Obtenga el valor de x donde se maximiza la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

Hint: Puede utilizar las igualdades descritas en el formulario, además que está permitido de realizar todas las sustituciones que a usted le parezca útiles.

Solución:

Solución 1.

Dado que la función par, entonces la integral es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

Una primera sustitución es la siguiente:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \longrightarrow dz = \frac{dx}{\sigma}$$
$$x = \sigma\, z + \mu \longrightarrow dx = \sigma\, dz$$

La integral resultante es

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx &= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \sigma\, dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz \end{aligned}$$

Realizando una segunda sustitución se obtiene:

$$u = \frac{z^2}{2} \;\longrightarrow\; du = z\,dz$$

$$z = \sqrt{2u} \;\longrightarrow\; dz = \frac{du}{z} = \frac{du}{\sqrt{2u}}$$

La integral resultante es:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2/2}\,dz &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{\sqrt{2u}} \\
&= \frac{2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{1/2-1} e^{-u} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Esta es una integral que tomará importancia más adelante en el curso. Note que la función a integrar no tiene primitiva, pero a pesar de ello es posible calcular su valor gracias a igualdades y/o funciones útiles.

Solución 2.

Reescribiendo se tiene:

$$\int_0^\infty \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\nu x} dx = \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty x^{k-1} e^{-\nu x} dx$$

Mediante el cambio de variable $u = \nu\, x$ y la función Gamma $\Gamma(\cdot)$ se obtiene:

$$u = \nu\, x \;\longrightarrow\; du = \nu\, dx$$

$$x = \frac{u}{\nu} \;\longrightarrow\; dx = \frac{du}{\nu}$$

El valor de la integral pedida es:

$$\begin{aligned}
\frac{\nu^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{u^{k-1}}{\nu^{k-1}} e^{-u}\, \frac{du}{\nu} &= \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} \cdot \frac{1}{\nu^k} \int_0^\infty u^{k-1} e^{-u}\, du \\
&= \frac{1}{\Gamma(k)} \cdot \Gamma(k) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Solución 3.

Primero se expande el numero binomial y se sacan todas las constantes de la suma:

$$\sum_{y=x}^{\infty} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} \cdot \frac{\nu^y e^{-\nu}}{y!} = \frac{p^x e^{-\nu}}{x!} \sum_{y=x}^{\infty} \frac{(1-p)^{y-x} \nu^y}{(y-x)!}$$

Realizando el cambio de variable $u = y - x$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{p^x e^{-\nu}}{x!}\sum_{y=x}^{\infty}\frac{(1-p)^{y-x}\nu^y}{(y-x)!} &= \frac{p^x e^{-\nu}}{x!}\sum_{y-x=0}^{\infty}\frac{(1-p)^{y-x}\nu^y}{(y-x)!}\\
&= \frac{p^x e^{-\nu}}{x!}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(1-p)^{u}\nu^{u+x}}{u!}\\
&= \frac{p^x e^{-\nu}\nu^x}{x!}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{\nu^u(1-p)^{u}}{u!}\\
&= \frac{p^x e^{-\nu}\nu^x}{x!}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{[\nu(1-p)]^{u}}{u!}
\end{aligned}$$

De formulario se tiene la expansión de Taylor de la función exponencial, por lo tanto:

$$\frac{p^x e^{-\nu}\nu^x}{x!}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{[\nu(1-p)]^{u}}{u!} = \frac{(\nu p)^x e^{-\nu p}}{x!}$$

Este resultado es la función de probabilidad marginal de la variable aleatoria X, es muy importante conocerlo para varios problemas que aparecen más adelante en el curso.

Solución 4.

Para determinar donde ocurre el máximo primero se deriva respecto a x:

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{\beta}{\eta}\frac{(\beta-1)}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-2}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right] + \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right](-1)\left(\frac{\beta}{\eta}\right)\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}\\
&= \frac{\beta(\beta-1)}{\eta^2}\frac{x^{\beta-2}}{\eta^{\beta-2}}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right] - \frac{\beta}{\eta}\frac{x^{\beta-1}}{\eta^{\beta-1}}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right]\frac{\beta}{\eta}\frac{x^{\beta-1}}{\eta^{\beta-1}}\\
&= \frac{\beta(\beta-1)}{\eta^{\beta}}x^{\beta-2}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right] - \frac{\beta^2}{\eta^{2\beta}}x^{2\beta-2}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right]
\end{aligned}$$

segundo, la derivada se iguala a cero y se despeja el valor de x:

$$\begin{aligned}
\frac{\beta(\beta-1)}{\eta^{\beta}}x^{\beta-2}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right] - \frac{\beta^2}{\eta^{2\beta}}x^{2\beta-2}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right] = 0&\\
\frac{\beta(\beta-1)}{\eta^{\beta}}x^{\beta-2}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right] &= \frac{\beta^2}{\eta^{2\beta}}x^{2\beta-2}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right]\\
(\beta-1)x^{\beta-2} &= \frac{\beta}{\eta^{\beta}}x^{2\beta-2}\\
\frac{x^{\beta-2}}{x^{2\beta-2}} &= \frac{\beta}{(\beta-1)\eta^{\beta}}\\
x^{-\beta} &= \frac{\beta}{(\beta-1)\eta^{\beta}}\\
x^{\beta} &= \frac{(\beta-1)}{\beta}\eta^{\beta}\\
x &= \eta\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{1/\beta}
\end{aligned}$$

Es decir, el máximo ocurre en:

$$x = \eta \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)^{1/\beta}$$

Usted puede comprobar que en efecto aquí ocurre un máximo, más adelante aprenderá a que este tipo de funciones son siempre positivas y (en la gran mayoría de casos) solo tiene un máximo.