Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2022

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C., Ricardo Olea O. y Felipe Ossa M.**

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Sean A, B y C tres eventos de un mismo espacio muestral $\mathcal{S}$, con

$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = 0.07\ , \qquad P(\overline{A} \cap B \cap C) = 0.13\ , \qquad P(A \cap B) = 0.17$$

$$P(A \cap C) = 0.26\ , \qquad P(\overline{B} \cap C) = 0.55$$

Encuentre $P(C)$.

Solución

Logro 1: Establecer C como unión de varias partes disjuntas. Un ejemplo es

$$C = (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: Aplicar Axioma 3, para escribir $P(C)$ como suma de probabilidades de eventos disjuntos. Una forma es

$$P(C) = P(A \cap B \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: Calcular $P(A \cap B \cap C)$,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap \overline{C}) = 0.17 - 0.07 = 0.1 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 4: Calcular $P(A \cap \overline{B} \cap C)$,

$$P(A \cap \overline{B} \cap C) = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0.26 - 0.1 = 0.16 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5: Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = P(\overline{B} \cap C) - P(A \cap \overline{B} \cap C) = 0.55 - 0.16 = 0.39 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 6: Calcular la suma

$$P(C) = 0.1 + 0.13 + 0.16 + 0.39 = 0.78 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Observación: Se puede utilizar diagrama de Venn para ayudar en el procedimiento, pero las partes y probabilidades deben estar debidamente señaladas.

Alternativamente, se puede hacer,

$$C = (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)$$

En ese caso, el cálculo sólo contendría los logros 1, 2, 3 y 6 anteriores, ahorrando todo el resto del desarrollo. Asignar el puntaje por el correcto cálculo de la probabilidad final o de $P(B \cap C)$ a los logros 4 y 5:

$$P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) = 0.1 + 0.13 = 0.23 \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}$$

Pregunta 2

En el reciente Plebiscito uno de los grandes derrotados fue el Data Science, (hay estudios basados en redes que predecían un triunfo del Apruebo por un $53.25\,\%$). Suponga que, según datos del Servel, la participación en el Plebiscito según rango de edad fue de un 30 % de Jóvenes (<35 años), 45 % de Adultos (35-59 años) y 25 % de Adultos Mayores (>=60 años).

La participación en redes sociales según rango de edad se estima en un 80 %, 50 % y 20 % respectivamente. Por otra parte el apoyo, entre los usuarios de redes sociales, al Apruebo iba en directa relación a la edad, con un 70 %, 55 % y 30 % en cada rango. En cambio, el resultado "oficial" fue un 60 %, 34 % y 20 % a favor de Apruebo en cada rango de edad. Es decir, el Apruebo logró un $38.3\,\%$.

¿Cuál es la probabilidad que al seleccionar una persona al azar esta sea Adulto, no use redes y haya votado rechazo?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

E_1: Joven
E_2: Adulto
E_3: Adulto Mayor
R: Usuario de redes sociales.
A: Aprueba.

Logro 1: Determinar $P(E_2) = 0.45$, $P(\overline{R}\,|\,E_2) = 0.50$ y $P(R\,|\,E_2) = 0.50$. **[1.0 Ptos.]**

Logro 2: Determinar $P(A\,|\,E_2 \cap R) = 0.55$ y $P(A\,|\,E_2) = 0.34$. **[1.0 Ptos.]**

Logro 3: Obtener la siguiente relación

$$P(E_2 \cap \overline{R} \cap \overline{A}) = P(\overline{A}\,|\,E_2 \cap \overline{R})P(E_2 \cap \overline{R}) = \left[1 - P(A\,|\,E_2 \cap \overline{R})\right] P(E_2 \cap \overline{R})$$ **[1.0 Ptos.]**

Logro 4: Obtener la siguiente relación

$$P(A\,|\,E_2) = P(A\,|\,E_2 \cap R)P(R\,|\,E_2) + P(A\,|\,E_2 \cap \overline{R})P(\overline{R}\,|\,E_2)$$ **[1.0 Ptos.]**

Logro 5: Calcular

$$P(A\,|\,E_2 \cap \overline{R}) = \frac{P(A\,|\,E_2) - P(A\,|\,E_2 \cap R)P(R\,|\,E_2)}{P(\overline{R}\,|\,E_2)} = \frac{0.34 - 0.55 \cdot 0.50}{0.50} = 0.13$$ **[1.0 Ptos.]**

Logro 6: Reemplazar y calcular respuesta final

$$P(E_2 \cap \overline{R} \cap \overline{A}) = (1 - 0.13) \cdot 0.50 \cdot 0.45 = 0.19575$$ **[1.0 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

Hoy día el mercado inmobiliario sufre por efectos de la recesión que se avecina, incrementando las retractaciones de las promesas de compra. Un análisis de todas las promesas de compra firmadas durante el periodo 2019-20 y que durante 2022 cumplieron su ciclo, le permite determinar

- Un 40 % de las promesas fueron en verde (durante la construcción) y el resto en blanco (sobre los planos, antes de construir).
- El 70 % de las promesas en blanco corresponden a departamentos (el resto son casas). El porcentaje de promesas de departamentos disminuye a la mitad cuando la promesa es verde.
- Respecto a las retractaciones de las promesas en blanco alcanza a un 10 % en las casas, valor que se duplica cuando son departamentos. Mientras que las retractaciones de las promesas en verde, el porcentaje es de un 40 % tanto en departamentos como en casas.

¿Cuál es la probabilidad que una promesa realizada en el periodo 2019-20 se haya retractado?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A: Promesa en Verde
B: Promesa corresponde a departamento.
C: Retracto.

Logro 1: Obtener $P(A \cap B \cap C) = 0.40 \cdot 0.35 \cdot 0.40 = 0.056$. **[1.0 Ptos.]**

Logro 2: Obtener $P(A \cap \overline{B} \cap C) = 0.40 \cdot 0.65 \cdot 0.40 = 0.104$. **[1.0 Ptos.]**

Logro 3: Obtener $P(\overline{A} \cap B \cap C) = 0.20 \cdot 0.70 \cdot 0.60 = 0.084$. **[1.0 Ptos.]**

Logro 4: Obtener $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 0.10 \cdot 0.30 \cdot 0.60 = 0.018$. **[1.0 Ptos.]**

Logro 5: Aplicar teorema de probabilidades totales

$$P(C) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$ **[1.0 Ptos.]**

Logro 6: Obtener resultado

$$P(C) = 0.262$$ **[1.0 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Observación: Si el alumno responde utilizando árbol de probabilidad, asignar puntaje según logros.

Pregunta 4

Es común que previo a fiestas patrias los equipos de trabajo se reúnan a celebrar anticipadamente. Suponga que un equipo de 10 personas se reúnen en un restaurante y el jefe pide empanadas surtidas para repartir al azar entre los comensales. Si desde la cocina mandan 5 empanadas de pino-carne, 3 vegetarianas y 2 de queso, ¿cuál es la probabilidad que al menos uno de los comensales pida cambio de empanada, si hay dos intolerantes a la lactosa, que no pueden comer queso y tres lacto-vegetariano, que no comen carne y huevo, pero si lácteos (comen queso)?

Solución

Logro 1: Definamos como A al evento "al menos uno de los comensales pida cambio de empanada" y establecer que la probabilidad se calculará a partir del complemento.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

[1.0 Ptos.]

Logro 2: Calcular los casos totales.

$$\# S = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5 = 2520 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

En el caso con orden:

$$\# S = 10! \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: Vegetarianos (3 vegetarianas), Intolerantes a la lactosa (2 pino-carne)

$$\# \overline{A}_1 = \binom{3}{3} \cdot \binom{5}{2} = 10 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Si considere orden, debe multiplicar el resultado anterior por $5! \cdot 3! \cdot 2!$.

Logro 4: Vegetarianos (2 vegetarianas + 1 Queso), Intolerantes a la lactosa (2 pino-carne) o (1 pino-carne + 1 vegetariana)

$$\# \overline{A}_2 = \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \left[\binom{5}{1} + \binom{5}{2}\right] = 90 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Si considere orden, debe multiplicar el resultado anterior por $5! \cdot 3! \cdot 2!$.

Logro 5: Vegetarianos (1 vegetariana + 2 Queso), Intolerantes a la lactosa (2 vegetariana) o (2 pino-carne) o (1 pino-carne + 1 vegetariana)

$$\# \overline{A}_3 = \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2} \cdot \left[1 + \binom{2}{1} \cdot \binom{5}{1} + \binom{5}{2}\right] = 63 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Si considere orden, debe multiplicar el resultado anterior por $5! \cdot 3! \cdot 2!$.

Logro 6:

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{163}{2520} = 0.9353175 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Con orden:

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{163 \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!}{10!} = 0.9353175 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 5

Sean A, B y C tres eventos mutuamente excluyentes de un mismo espacio muestral $\mathcal{S}$. Demuestre que

$$P(A) + P(B) + P(C) < P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C})$$

Solución

Logro 1: Definición de eventos mutuamente excluyentes

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$$

Son tres eventos disjuntos entre sí, con intersección vacía. **[1.0 Ptos.]**

Logro 2: Uso de axioma 3 para afirmar

$$P(A) + P(B) + P(C) = P(A \cup B \cup C)$$

Es decir, la suma al lado izquierdo corresponde también a una probabilidad. **[1.0 Ptos.]**

Logro 3: Utilizar regla del complemento para llegar a

$$P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C}) = 3 - P(A) - P(B) - P(C) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 4: Asumir que se cumple lo pedido, y si se llega a una afirmación equivalente *siempre verdadera*, habremos probado el ejercicio. Reordenar términos para llegar a

$$P(A) + P(B) + P(C) < \frac{3}{2} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5: Como $P(\mathcal{S}) = 1$ (axioma 2), todas las probabilidades son menores o iguales a 1. **[1.0 Ptos.]**

Logro 6: Como $P(A) + P(B) + P(C)$ es una probabilidad, concluimos que efectivamente

$$P(A) + P(B) + P(C) \leq 1 < \frac{3}{2}$$

es siempre verdadero. (*En estricto rigor, este paso permite luego establecer la desigualdad que se intenta demostrar, así que cuidar el orden*) **[1.0 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Alternativamente, se puede proceder por contradicción. Asignar puntaje similarmente, pues se cumplen los mismos logros, sólo que asumiendo lo opuesto, que existen A, B y C mutuamente excluyentes donde

$$P(A) + P(B) + P(C) \geq P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C})$$

El logro 6 correspondería al paso de llegar a la contradicción (siempre falsa)

$$\frac{3}{2} \leq P(A) + P(B) + P(C) \leq 1$$

Pregunta 6

La distribución Erlang(α) es utilizada para modelar fenómenos cuyo soporte corresponde a los $\mathbb{R}^+$ y presentan una asimetría positiva. La función de densidad y generadora de momentos se este modelo están dadas por:

$$f(x) = \frac{x}{\alpha^2}\, e^{-x/\alpha}, \quad x > 0,\ \alpha > 0 \quad \text{y} \quad M_X(t) = \frac{1}{(1 - t\,\alpha)^2}, \quad t < \frac{1}{\alpha}.$$

Algunas de sus medidas teóricas se presentan a continuación: $\mu_X = 2\,\alpha$, $\sigma_X^2 = 2\,\alpha^2$, $\theta_X = \sqrt{2}$. Calcule el coeficiente de kurtosis.

Solución

Logro 1: Obtener 1er momento.

Derivando $M_X(t) = \frac{1}{(1-t\,\alpha)^2}$ con respecto a t se tiene:

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{2\,\alpha}{(1 - t\,\alpha)^3} \to M_X^{(1)}(0) = \mathsf{E}(X) = 2\,\alpha \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Alternativamente,

$$\mathsf{E}(X) = \mu_X = 2\,\alpha. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 2: Obtener 2do momento.

$$M_X^{(2)}(t) = \frac{6\,\alpha^2}{(1 - t\,\alpha)^4} \to M_X^{(2)}(0) = \mathsf{E}(X^2) = 6\,\alpha^2 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Alternativamente,

$$\mathsf{E}(X^2) = \sigma_X^2 + \mu_X^2 = 6\,\alpha^2. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 3: Obtener 3er momento.

$$M_X^{(3)}(t) = \frac{24\,\alpha^3}{(1 - t\,\alpha)^5} \to M_X^{(3)}(0) = \mathsf{E}(X^3) = 24\,\alpha^3 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X^3) &= \mathsf{E}((X - \mu_X)^3) + 3\,\mathsf{E}(X^2)\cdot\mu_X - 2\,\mu_X^3 \\
&= 2\sqrt{2}\,\alpha^3 \cdot \theta_X + 3\cdot 6\,\alpha^2 \cdot 2\,\alpha - 2\cdot 8\,\alpha^3 \\
&= 24\,\alpha^3, \quad \text{si utiliza } \theta_X = 1/\sqrt{2}\text{, la respuesta sería } 22\,\alpha^3 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Logro 4: Obtener 4to momento.

$$M_X^{(4)}(t) = \frac{120\,\alpha^4}{(1 - t\,\alpha)^6} \to M_X^{(4)}(0) = \mathsf{E}(X^4) = 120\,\alpha^4 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Logro 5: Obtener $\mathsf{E}[(X - \mu_X)^4$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[(X - \mu_X)^4] &= \mathsf{E}(X^4) - 4\,\mathsf{E}(X^3)\cdot\mu_X + 6\,\mathsf{E}(X^2)\cdot\mu_X^2 - 4\,\mathsf{E}(X)\cdot\mu_X^3 + \mu_X^4 \\
&= 24\,\alpha^4, \quad \text{si utiliza } \theta_X = 1/\sqrt{2}\text{, la respuesta sería } 40\,\alpha^4 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Logro 6: Calcular K_X.

$$K_X = \frac{24\,\alpha^4}{(\sqrt{2}\,\alpha)^4} - 3 = 6 - 3 = 3. \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

si utiliza $\theta_X = 1/\sqrt{2}$, la respuesta sería 7.

+ 1 Punto Base

Formulario

Igualdades

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}; \qquad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda); \qquad \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k-1}{k-1} \phi^x = \frac{1}{(1-\phi)^k} \quad \text{si } 0 < \phi < 1 \text{ y } k \in \mathbb{N}$$

Propiedades función $\Gamma(\cdot)$ y $B(\cdot,\,\cdot)$

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du = \texttt{gamma}(k); \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a); \quad (3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0;$$

$$(4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}; \quad (5) \qquad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (6) \quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} = \texttt{beta}(q,r)$$

Medidas descriptivas

$$\mu_X = \mathsf{E}(X), \quad \sigma_X^2 = \mathsf{E}\left[(X-\mu_X)^2\right], \quad \delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}, \quad \theta_X = \frac{\mathsf{E}\left[(X-\mu_X)^3\right]}{\sigma_X^3}, \quad K_X = \frac{\mathsf{E}\left[(X-\mu_X)^4\right]}{\sigma_X^4} - 3$$

$$M_X(t) = \mathsf{E}\left(e^{t\,X}\right), \quad \mathsf{E}[g(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \Theta_X} g(x) \cdot p_X(x) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx \end{cases}, \quad \text{Rango} = \text{máx} - \text{mín}, \quad \text{IQR} = x_{75\,\%} - x_{25\,\%}$$