Ayudantes: Michael Ramón: `maramon@uc.cl`
Oscar Guerrero: `oscar.guerrero@uc.cl`

Ayudantía 2

Distribuciones

Problema 1 *Normal y Log-Normal*

En el antiguo caso de estafa de La Polar, los montos de las renegociaciones unilaterales alcanzan en promedio los $M\$650$ con un coeficiente de variación del 40 %. Si asumimos que los montos se comportan como una distribución Normal, evalúe:

a) Proporción de morosos renegociados unilateralmente que se encuentran sobre una desviación estándar del monto medio.

b) Monto máximo renegociado del 30 % de morosos de los menores montos renegociados.

Si asumimos que los montos renegociados se comportan como una distribución Log-Normal, evalúe:

c) Proporción de morosos renegociados unilateralmente que se encuentran sobre una desviación estándar de la mediana de los montos.

d) Monto mínimo renegociado del 30 % de morosos de los mayores montos renegociados.

Solución:

a) Como se asume distribución normal, tenemos como variables conocidas: δ_x, μ_x.

$$\delta_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x}, \quad \sigma_x = 260$$

Con la desviación ya calculada:

$$P(X \geq \mu_x + \sigma_x) = 1 - \Phi\left(\frac{(\mu_x + \sigma_x) - \mu_x}{\sigma_x}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

b) Resolviendo para $P(X \leq K) = 0,3$:

$$\Phi^{-1}(0,3) = \frac{K - \mu_x}{\sigma_x}, \quad -0,52 = \frac{K - \mu_x}{\sigma_x}, \quad K = \text{M\$514,8}$$

c) Asumiendo distribución Log-Normal, calculamos nuevos parámetros:

$$\zeta = \sqrt{\ln(1 + \delta_x^2)} = 0,385, \quad \lambda = \ln(\mu_x) - \frac{1}{2}\zeta^2 = 6,402$$

La mediana para una distribución Log-Normal se encuentra en e^λ. Luego:

$$P(X \geq x_{50\,\%} + \sigma_x) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(e^\lambda + \sigma_x) - \lambda}{\zeta}\right) = 1 - \Phi(0,936) = 0,1736$$

d) Resolviendo para $P(X \geq K) = 0,7$:

$$\Phi^{-1}(0,7) = \frac{\ln(K) - \lambda}{\zeta}, \quad 0,52 = \frac{\ln(K) - \lambda}{\zeta}, \quad K = \text{M\$736,714}$$

Problema 2 *Normal y Log-Normal*

Una de las hipótesis planteadas en referencia al accidente aéreo que ocurrió en 2011 en la Isla Juan Fernández, ha sido en relación a la trizadura de un ala y su impacto en la resistencia de ésta al viento. Lo anterior se sustenta en que las alas de un avión representan el elemento fundamental en la sustentación de éste. Por tanto, dentro del proceso de construcción de alas es relevante el control sobre la variabilidad del insumo más importante, las cuales son las planchas con una aleación de acero-aluminio utilizadas en su construcción. La principal característica de este material es su resistencia a la fricción (en kpsi). Suponga que a lo más se acepta un 8 % del material bajo el límite considerado crítico, igual a 6 kpsi. Si la resistencia del material tiene una media de 10 kpsi y una desviación estándar de σ kpsi:

a) Asumiendo que la resistencia se comporta según una distribución Normal:

   i) Determine el valor de σ.

   ii) Suponga que $\sigma = 5$ kpsi. Determine el mínimo valor de resistencia del 25 % de las planchas de mayor resistencia.

b) Asumiendo que la resistencia se comporta según una distribución Log-Normal con $\sigma = 5$, determine la probabilidad de que la resistencia sea mayor a 15 kpsi.

Solución:

a.i) Dado que $X \sim \text{Normal}(\mu = 10, \sigma)$ y $P(X \leq 6) = 0,08$:

$$\Phi^{-1}(0,08) = \frac{6-10}{\sigma}, \quad -1,41 = \frac{-4}{\sigma}, \quad \sigma = 2,8369$$

a.ii) Dado que $X \sim \text{Normal}(\mu = 10, \sigma = 5)$ y $P(X \geq k) = 0,25$:

$$\Phi^{-1}(0,75) = \frac{k-10}{5}, \quad 0,674 = \frac{k-10}{5}, \quad k = 13,35\,\text{kpsi}$$

b) Para la distribución Log-Normal, calculamos los parámetros:

$$\delta_x = \frac{5}{10} = 0,5, \quad \zeta = \sqrt{\ln(1+\delta_x^2)} = 0,4724, \quad \lambda = \ln(10) - \frac{1}{2}\zeta^2 = 2,191$$

La probabilidad de que $X \geq 15$ es:

$$P(X \geq 15) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(15)-\lambda}{\zeta}\right) = 1 - \Phi(1,095) = 0,137$$

Problema 3 *Log-Normal y Binomial*

Durante las últimas semanas, el Servicio Nacional de Geología y Minería de Chile (Sernageomin) ha emitido informes especiales sobre la actividad reciente del Volcán Villarrica. Por ejemplo, las cámaras de monitoreo han registrado que la altura de la columna y la liberación de material piroclástico en la atmósfera han superado consistentemente los mil metros sobre el nivel del cráter. Se supone que estas alturas siguen una distribución Log-Normal con un coeficiente de variación del 40 % y un rango intercuartil (IQR) de 200 metros. Además, se considera que las erupciones que emiten material piroclástico siguen una distribución de Poisson, con una tasa esperada de 20 erupciones al día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una columna de material piroclástico alcance una altura superior a los 350 metros desde el nivel del cráter?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre las próximas 6 erupciones, al menos dos se encuentren sobre los 350 metros desde el nivel del cráter?

Solución:

a) Dado que $X \sim \text{Log-Normal}(\lambda, \zeta)$ con $\delta_x = 0,4$:

$$\zeta = \sqrt{\ln(1 + \delta_x^2)} = 0,3853$$

Usando el rango intercuartil (IQR) se calcula λ:

$$IQR = e^{\lambda + \zeta \Phi^{-1}(0,75)} - e^{\lambda + \zeta \Phi^{-1}(0,25)}$$

Resolviendo para λ:

$$\lambda = 5,9407$$

Con los parámetros $\lambda = 5,9407$ y $\zeta = 0,3853$, calculamos la probabilidad:

$$P(X \geq 350) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(350) - \lambda}{\zeta}\right) = 1 - \Phi(-0,207) = 0,5832$$

b) Usando una distribución binomial $Y \sim \text{Binomial}(n = 6, p = 0,5832)$, la probabilidad de que al menos 2 erupciones estén sobre los 350 metros es:

$$P(Y \geq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{6}{x} p^x (1-p)^{6-x}$$

Calculando:

$$P(Y \geq 2) = 1 - \left[\binom{6}{0} p^0 (1-p)^6 + \binom{6}{1} p^1 (1-p)^5\right]$$

Sustituyendo $p = 0,5832$:

$$P(Y \geq 2) = 1 - [0,0878 + 0,2852] = 0,9507$$

Problema 4 *Log-Normal desplazada y Binomial*

El tiempo de desplazamiento en la nueva AVO (Autopista Vespucio Oriente) entre el ingreso en El Salto y el egreso en Tobalaba (aproximadamente 10 km) se comporta como una distribución Log-Normal desplazada. Usted que requiere transitar ese trayecto desea evaluar la probabilidad de que durante esta semana (lunes, miércoles, jueves y viernes) en al menos dos días le tome más de 20 minutos.

Para evaluar la probabilidad, utiliza la información obtenida en los viajes previos, la cual se presenta a continuación:

Min.	**Median**	**Mean**	**Max.**
6	18	20	73

Solución:

Sea $T \sim$ Log-Normal desplazada(λ, ζ, α).

1. Determinación del parámetro de desplazamiento (α):

$$\text{Min} = \alpha \implies \alpha = 6$$

2. Expresión de la mediana y la media en términos de los parámetros:

$$\text{Median} = e^{\lambda} + \alpha, \quad \text{Mean} = e^{\lambda+\zeta^2/2} + \alpha$$

3. Obtención de λ y ζ:

$$\lambda = 2{,}485, \quad \zeta = 0{,}555$$

4. Cálculo de $P(T > 20)$:

$$P(T > 20) = P(T - \alpha > 20 - 6)$$

$$P(T > 20) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(14) - \lambda}{\zeta}\right)$$

$$P(T > 20) = 1 - \Phi(0{,}28) = 1 - 0{,}61 = 0{,}39$$

5. Definición de la variable Binomial:
   Sea Y el número de días en la semana corta en que el viaje toma más de 20 minutos.

$$Y \sim \text{Binomial}(n = 4, p = 0{,}39)$$

6. Cálculo de la probabilidad pedida:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - \binom{4}{0} p^0 (1-p)^4 - \binom{4}{1} p^1 (1-p)^3$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - (0{,}610^4 + 4 \cdot 0{,}39 \cdot 0{,}610^3)$$

$$P(Y \geq 2) = 0{,}50745$$