Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2022

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Esta evaluación consta de 8 problemas y cada uno tiene como máximo puntaje un punto. Suponga que tres de estos problemas usted los podrá resolver exitosamente, en dos solo logrará la mitad del puntaje y en el resto no logrará puntaje. Si el orden en que usted aborda las preguntas es aleatorio, ¿cuál es la probabilidad que logre más de dos puntos entre las primeras cinco preguntas abordadas?

Solución

Tenemos $\binom{8}{5}$ maneras escoger cinco preguntas y 5! formas de abordarlas. **[0.3 Ptos.]**

Alternativa 1: Los casos favorables ocurren como siguen:

- Obtener 4.0 puntos: $\binom{3}{3} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{0} = 1.$
- Obtener 3.5 puntos: $\binom{3}{3} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} = 6.$
- Obtener 3.0 puntos: $\binom{3}{3} \cdot \binom{2}{0} \cdot \binom{3}{2} + \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{1} = 12.$
- Obtener 2.5 puntos: $\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2} = 18.$

Notar que cada término se debe multiplicar por las $5!$ maneras de abordarlas, si es que en los casos totales este factor fue considerado.

[0.4 Ptos.]

Por lo tanto la probabilidad solicitada está dada por

$$P(A) = \frac{(1+6+12+18)\cdot 5!}{\binom{8}{5}\cdot 5!} = \frac{(1+6+12+18)}{56} = 0.6607143 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Alternativa 2: Los casos favorables del complemento ocurren como siguen:

- Obtener 2.0 puntos: $\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{0} \cdot \binom{3}{3} + \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} = 12.$
- Obtener 1.5 puntos: $\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{3} = 6.$
- Obtener 1.0 puntos: $\binom{3}{0} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{3} = 1.$
- Obtener 0.5 puntos: No es posible.
- Obtener 0.0 puntos: No es posible.

Notar que cada término se debe multiplicar por las $5!$ maneras de abordarlas, si es que en los casos totales este factor fue considerado.

[0.3 Ptos.]

Por lo tanto la probabilidad solicitada está dada por

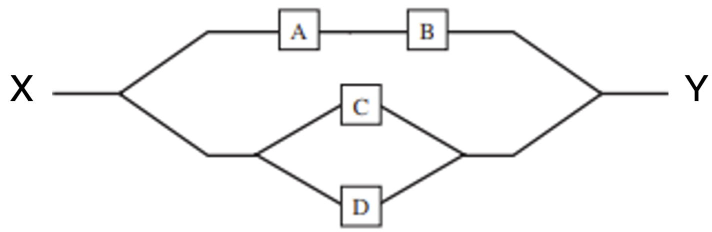
$$\textbf{[0.1 Ptos.]} \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{(12+6+1)\cdot 5!}{\binom{8}{5}\cdot 5!} = 1 - \frac{19}{56} = 0.6607143 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Observación:

- *Si él alumno NO considero las 5! maneras de abordar las preguntas seleccionadas, pero fue consecuente con esta forma de contar tanto en los casos totales y favorables, NO descontar puntaje.*

Pregunta 2

En tiempos de guerra, ir de una ciudad a otra es riesgoso. Suponga que desea ir de la ciudad X a la ciudad Y, para lo cual tiene tres vías alternativas, tal como se muestra en el esquema. En esas vías hay controles que se han identificado como A, B, C y D, los cuales funcionan en forma independiente. Suponga que los controles impiden el paso con probabilidad 0.10, 0.05, 0.15 y 0.20, respectivamente.



Si usted previamente escoge una ruta al azar, ¿cuál es la probabilidad de llegar a la ciudad Y?

Solución

Definamos A, B, C y D, a los eventos "se permite el paso en los controles" A, B, C y D respectivamente, y como E al evento "llega a ciudad Y".

Como son tres rutas equiprobable, el evento E ocurre con la siguiente probabilidad, ya que se debe escoger una vía previamente:

$$\begin{aligned}
P(E) &= \frac{P(A\cap B)+P(C)+P(D)}{3} \overset{\text{indep}}{=} \frac{P(A)\cdot P(B)+P(C)+P(D)}{3} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\\
&= \frac{0.90\cdot 0.95+0.85+0.80}{3} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= 0.835 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Es posible que algunos alumnos hayan interpretado el evento E como $(A\cap B)\cup C\cup D$, que corresponde al evento "al menos una ruta permite el paso".

Para este caso asignar el siguiente puntaje:

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(A\cap B)+P(C)+P(D)-P(A\cap B\cap C)-P(A\cap B\cap D)-P(C\cap D)+P(A\cap B\cap C\cap D) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\\
&= 0.90\cdot 0.95+0.85+0.80-0.90\cdot 0.95\cdot 0.85-0.90\cdot 0.95\cdot 0.80-0.85\cdot 0.80+0.90\cdot 0.95\cdot 0.85\cdot 0.80 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= 0.99565 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Otra interpretación sería ir tomando desiciones equiprobables en cada intersección de rutas:

$$\begin{aligned}
P(E) &= \frac{1}{2}\cdot P(A\cap B)+\frac{1}{4}\cdot P(C)+\frac{1}{4}\cdot P(D) \overset{\text{indep}}{=} 0.5\cdot P(A)\cdot P(B)+0.25\cdot P(C)+0.25\cdot P(D) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\\
&= 0.50\cdot 0.90\cdot 0.95+0.25\cdot 0.85+0.25\cdot 0.80 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= 0.85 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Pregunta 3

Según datos recogidos en la fabricación de vigas, el $80\,\%$ de éstas tienen la resistencia mínima que se requiere para su utilización. Diariamente se seleciona una muestra de vigas para ser evaluadas con un método de ensayo que mide la resistencia y da el visto buena de calidad para su venta. El método no es perfecto dado que, solo al $90\,\%$ de las vigas que cumplen con la resistencia mínima, les da el visto bueno de calidad. Se sabe además que, la probabilidad que una viga cualquiera reciba el visto bueno de calidad es de 0.73.

¿Cuál es la probabilidad que una viga no cumpla con la resistencia mínima y reciba el visto bueno de calidad?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

R: viga presenta mínima resistencia para su utilización.
C: método entrega visto bueno a la viga.

Se pide $P(C \cap \overline{R})$.

Del enunciado se tiene que

$$P(R) = 0.80, \quad P(C \,|\, R) = 0.90, \quad P(C) = 0.73$$

Por teorema de probabilidades totales se tiene que

[0.5 Ptos.] $P(C) = P(C \cap R) + P(C \cap \overline{R}) = P(C \,|\, R) \cdot P(R) + P(C \cap \overline{R}) \to P(C \cap \overline{R}) = 0.73 - 0.90 \cdot 0.80 = 0.01$ **[0.5 Ptos.]**

Observación:

- *Si él alumno llega al resultado correcto vía árbol de probabilidad, no descontar puntaje.*

Pregunta 4

Como han de saber en la primera ronda de vacunación (dos dosis) se uso masivamente Coronavac (del laboratorio Sinovac) en el $75\,\%$ de las personas. Un $20\,\%$ recibió sus dos dosis de Pfizer y los restante otras (moderna, cancino, etc). Hoy, en el proceso de la 3era vacuna, los primeros (Sinovac) mayoritariamente han asistido, ya que el $65\,\%$ ha recibido su 3era vacuna. En cambio, la mitad de los pfizer han concurrido y de los que recibieron otras, solo 1 de cada 4 han concurrido. Si una persona llega a recibir su tercera dosis, ¿cuál es la probabilidad que en la primera ronda haya recibido Pfizer?

Solución

Definamos los siguientes eventos

A_1: 1ra ronda Sinovac.
A_2: 1ra ronda Pfizer.
A_3: 1ra ronda otros laboratorios.
B: Recibe 3ra dosis.

Se pide $P(A_2 \,|\, B)$.

Del enunciado se tiene que

$$P(A_1) = 0.75, \quad P(A_2) = 0.20, \quad P(A_3) = 0.05, \quad P(B \,|\, A_1) = 0.65, \quad P(B \,|\, A_2) = 0.50, \quad P(B \,|\, A_3) = 0.25$$

Aplicando Teorema de Bayes

$$\begin{aligned} P(A_2 \,|\, B) &= \frac{P(B \,|\, A_2) \cdot P(A_2)}{P(B \,|\, A_1) \cdot P(A_1) + P(B \,|\, A_2) \cdot P(A_2) + P(B \,|\, A_3) \cdot P(A_3)} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\ &= \frac{0.50 \cdot 0.20}{0.65 \cdot 0.75 + 0.50 \cdot 0.20 + 0.25 \cdot 0.05} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\ &= 0.1666667 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \end{aligned}$$

Observación:

- *Si él alumno llega al resultado correcto vía árbol de probabilidad, no descontar puntaje.*

Pregunta 5

Sea X una variable aleatoria Logistic-Exponential(α, β), con parametro de escala α y de forma β, cuya función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{\alpha\beta\,(e^{\alpha x} - 1)^{\beta-1}\,e^{\alpha x}}{\left(1 + (e^{\alpha x} - 1)^{\beta}\right)^2},$$

para $x > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Obtenga la mediana teórica de este modelo.

Solución

Si x_p representa al percentil $p \times 100\,\%$, entonces se tiene que

$$F_X(x_p) = \int_0^{x_p} f_X(x)\,dx = \int_1^{1+(e^{\alpha x_p}-1)^{\beta}} \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y}\,\Bigg|_1^{1+(e^{\alpha x_p}-1)^{\beta}} = 1 - \frac{1}{1 + (e^{\alpha x_p} - 1)^{\beta}} = p \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Despejando

$$x_p = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln\left[\left(\frac{p}{1-p}\right)^{1/\beta} + 1\right] \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Por lo tanto,

$$x_{50\,\%} = \frac{\ln(2)}{\alpha} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Observación:

- *Si él alumno llega al resultado utilizando $p = 1/2$, no descontar puntaje.*

Pregunta 6

Sea X una variable aleatoria Gamma–Poisson(α, β), con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Cuando β es igual a dos, su función de probabilidad está dada por

$$p_X(x) = (x+1) \cdot \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \cdot \frac{1}{(1+\alpha)^2}$$

para $x \in \mathbb{N}_0$.

Obtenga el valor esperado de X.

Hint: Si $|\phi| < 1$, entonces se tiene que

$$\sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \phi^k = \frac{\phi}{(1-\phi)^2}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \phi^k = \frac{\phi\,(1+\phi)}{(1-\phi)^3}$$

Solución

Se pide

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (x+1) \cdot \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \cdot \frac{1}{(1+\alpha)^2} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \cdot \frac{1}{(1+\alpha)^2} + \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \cdot \frac{1}{(1+\alpha)^2} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left[1 + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\right]^3} + \frac{1}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\right]^2} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \cdot (1 + 2\,\alpha) + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 2\,\alpha \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Alternativamente el alumno podría haber resuelto este ejercicio obteniendo previamente la función generadora de momentos, en este caso asignar puntaje de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot (x+1) \cdot \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \cdot \frac{1}{(1+\alpha)^2} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \cdot e^t\right]^x \cdot \frac{1}{(1+\alpha)^2} + \sum_{x=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \cdot e^t\right]^x \cdot \frac{1}{(1+\alpha)^2} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \cdot e^t}{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \cdot e^t\right]^2} + \frac{1}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \cdot e^t\right]}, \quad \text{si } t < -\ln\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

$\rightarrow M_X^{(1)}(0) = 2\,\alpha$ **[0.4 Ptos.]**

Pregunta 7

Un análisis de los rendimiento de los alumnos durante el año 2021 (pandemia) muestra que el $75\,\%$ ha obtenido un PPS (promedio ponderado semestral) igual o superior a 4.6. Por otra parte el IQR fue de 1.6. Asumiendo que el PPS distribuye Normal, calcule la probabilidad que un alumno haya obtenido un PPS superior a 5.0 el año 2021.

Solución

Tenemos que $X \sim \text{Normal}(\mu,\, \sigma)$ y se pide $P(X > 5.0)$.

Del enunciado

$$x_{25\,\%} = 4.6 \quad \text{y} \quad \text{IQR} = 1.6$$

Como

$$x_p = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(p)$$

entonces

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad \sigma = \frac{\text{IQR}}{\Phi^{-1}(0.75) - \Phi^{-1}(0.25)} \approx 1.185185 \quad \text{y} \quad \mu = x_{25\,\%} - \sigma \cdot \Phi^{-1}(0.25) \approx 5.4 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Por lo tanto

$$P(X > 5.0) = 1 - \Phi\left(\frac{5.0 - \mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi(-0.34) = \Phi(0.34) = 0.63307 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

-0.3375001

Pregunta 8

Un análisis de los rendimiento de los alumnos durante el año 2019 (pre-pandemia) muestra que el $50\,\%$ ha obtenido un PPS (promedio ponderado semestral) superior a 4.4, con un coeficiente de variación del 35 %. Asumiendo que el PPS distribuye según una distribución Log-Normal, ¿cuál es la probabilidad que un alumno ese año haya logrado un PPS inferior a 5.0?

Solución

Tenemos que $X \sim$ Log-Normal$(\lambda,\, \zeta)$ y se pide $P(X < 5.0)$.

Del enunciado

$$x_{50\,\%} = 4.4 \quad \text{y} \quad \delta_X = 0.35$$

Como

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad \lambda = \ln(x_{50\,\%}) = 1.481605 \quad \text{y} \quad \zeta = \sqrt{\ln(1 + \delta_X^2)} = 0.3399387 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

entonces se tiene que

$$P(X < 5.0) = \Phi\left(\frac{\ln(5.0) - \lambda}{\zeta}\right) \approx \Phi(0.37) = 0.6443 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$