Rettevejledning til

Eksamen på Økonomistudiet sommer 2015

Makro A

2. årsprøve

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Opgave 1

1.1

En stigning i opsparingsraten vil på kort sigt få vækstraten i BNP pr. capita til stige, men ikke på lang sigt. Dvs. én sådan ændring har, i Solowmodellen (svarende til kap. 6), kun en niveau effekt på BNP pr. capita. Kort fortalt er grunden til dette: aftagende marginal produkt på kapital og lineært stigende nedslidning og udtydning i kapital.

I den såkaldte AK-model (svarende kap. 8) vil en stigning i opsparingsraten have en permanent vækst effekt, da der i dette tilfælde er konstant marginal produkt på kapital. Det er også ok, hvis der i denne forbindelse tolkes på den semi-endogene vækstmodel, hvor en stigning i opsparingsraten kun vil have en transitoriske effekt på vækstraten i BNP pr. capita (denne vil dog vare i længere tid ift. Solowmodellen i kap 6).

1.2

Her kan følgende nævnes, fx: I steady state er det kun Solowmodellen med knappe resurser som fx land (svarende til kap. 7), der er konsistent med mønsteret i Figur 1.

I Solowmodellen (svarende til kap 3, 5 eller 6) har befolkningsvækst kun en niveau effekt på BNP pr. capita i steady state (fra udtynding, der reducerer kapital pr. arbejder og dermed produktiviteten). Det bemærkes dog, at udenfor steady state (dvs. transitorisk) vil der være en negative sammenhæng ml. befolkningsvækst og vækstraten i BNP pr. capita. Det kan yderligere bemærkes, at Figur 1 kigger på en 43-årige periode, hvilket derfor kræver en ret langvarig konvergens mod steady state for, at Solowmodellen kan være konsistent med data.

I steady state har de semi-endogene og endogene modeller (svarerende til kap 8 og 9) modsatte forudsigelser. Men igen bemærkes det, at udenfor steady state (dvs. transitorisk) - i de semi-endogene modeller - vil der være en negative sammenhæng ml. befolkningsvækst og vækstraten i BNP pr. capita. Og ift. Solowmodellen (svarende til kap 3, 5 eller 6) vil konvergensprocessen her tage længere tid.

1.3

Denne tolkning er forkert. Her kan den studerende med fordel tage udgangspunkt i den lineariseret transitionsligning for BNP pr. capita fra kap. 5:

$$\ln y_{t+1} = g + \lambda \ln \tilde{y} + (1-\lambda) \ln y_t,$$

træk nu $\ln y_t$ fra på begge sider:

$$\ln y_{t+1} - \ln y_t = g + \lambda \ln \tilde{y} + (1-\lambda) \ln y_t - \ln y_t,$$

udnyt nu at $\ln y_t = g + \lambda \ln \tilde{y} + (1-\lambda) \ln y_{t-1}$

$$\begin{aligned}
\ln y_{t+1} - \ln y_t &= g + \lambda \ln \tilde{y} + (1-\lambda) \ln y_t - (g + \lambda \ln \tilde{y} + (1-\lambda) \ln y_{t-1}) \Leftrightarrow \\
\ln y_{t+1} - \ln y_t &= (1-\lambda) (\ln y_t - \ln y_{t-1}), \\
g_t^y &= (1-\lambda) g_{t-1}^y.
\end{aligned}$$

Dvs. i Solowmodellen med konvergens (dvs. $\lambda < 1$), vil der være en positiv relation (der er mindre end én) ml. vækstraten i BNP pr. capita i t og $t-1$. Dette er præcis, hvad Lant Pritchett og Lawrence H. Summers finder i deres artikel - jvf. lign. (2).

Opgave 2

2.1

Den repræsentatives virksomheds profitmaksimeringsproblem:

$$\max_{K_t, L_t} \pi_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - r_t K_t - w_t L_t,$$

reallejesatsen og reallønnen findes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_t}{\partial K_t} &= \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - r_t = 0 \Rightarrow \\ r_t &= \alpha A_t k_t^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_t}{\partial L_t} &= (1-\alpha) A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} - w_t = 0 \Rightarrow \\ w_t &= (1-\alpha) A_t k_t^{\alpha} \end{aligned}$$

2.2

Start med lign. (5):

$$K_{t+1} = sY_t,$$

indsæt produktionsfunktionen og brug lign. (6):

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= sA_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\ \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} &= \frac{1}{1+n} \frac{sA_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{L_t} \Leftrightarrow \\ k_{t+1} &= \frac{1}{1+n} sA_t k_t^{\alpha}, \end{aligned}$$

indsæt nu lign. (5):

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= \frac{1}{1+n} sBk_t^{\phi(1-\alpha)} k_t^{\alpha} \Leftrightarrow \\
k_{t+1} &= \frac{1}{1+n} sBk_t^{\alpha+\phi(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

2.3

Fra definitionen af steady state gælder $k_{t+1} = k_t = k^*$, brug dette i transitionsligningen for kapital pr. arbejder:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{1+n} sBk^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \Leftrightarrow \\
k^{1-\alpha-\phi(1-\alpha)} &= \frac{sB}{1+n} \Leftrightarrow \\
k^* &= \left(\frac{sB}{1+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\phi(1-\alpha)}},
\end{aligned}$$

herefter indsættes det udtryk i pr. capita produktionsfunktionen:

$$\begin{aligned}
y^* &= Bk^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \\
y^* &= B\left(\frac{sB}{1+n}\right)^{\frac{\alpha+\phi(1-\alpha)}{1-\alpha-\phi(1-\alpha)}} \Leftrightarrow \\
y^* &= B^{\frac{1-\alpha-\phi(1-\alpha)+\alpha+\phi(1-\alpha)}{1-\alpha-\phi(1-\alpha)}} + \left(\frac{s}{1+n}\right)^{\frac{\alpha+\phi(1-\alpha)}{1-\alpha-\phi(1-\alpha)}} \\
y^* &= B^{\frac{1}{1-\alpha-\phi(1-\alpha)}} \left(\frac{s}{1+n}\right)^{\frac{\alpha+\phi(1-\alpha)}{1-\alpha-\phi(1-\alpha)}}
\end{aligned}$$

Der skal etableres nogle egenskaber - for transitionslign givet ved lign. (8) - for konvergens, fx:

1) Passerer igennem (0,0), hvilket umiddelbart fremgår.

2) Er overalt voksende (dvs. $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} > 0$) $\Rightarrow$

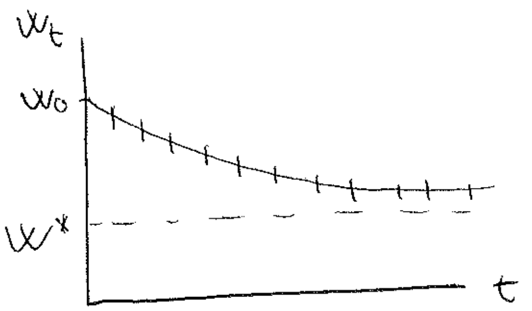
$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = [\alpha + \phi(1-\alpha)] \frac{sB}{1+n} k_t^{\alpha+\phi(1-\alpha)-1} > 0.$$

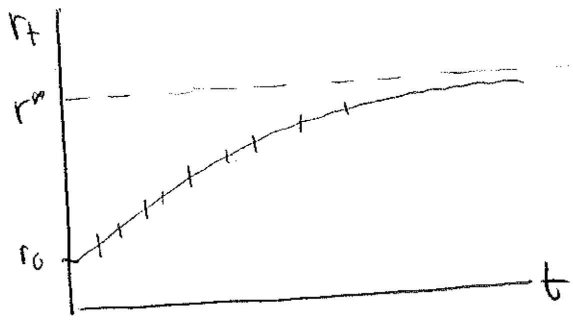
3) $\lim_{k_t \to 0} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} > 1$ og $\lim_{k_t \to \infty} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} < 1$. Disse er opfyldt såfremt:

$$\begin{aligned} \alpha + \phi(1-\alpha) - 1 &< 0 \Leftrightarrow \\ \phi(1-\alpha) &< 1 - \alpha \Leftrightarrow \\ \phi &< 1 \end{aligned}$$

Dvs. så længe $\phi < 1$ vil modellen udvise konvergens mod k^* og y^*. Grunden til, at modellen - i dette tilfælde - konvergerer er aftagende marginal produkt på kapital, hvilket medfører, at opsparingen er stigende i en faldende grad. Eftersom nedslidningen (som i denne model implicit er antaget lig med 1) og udtyndingen er lineært stigende i kapital pr. arbejder (jvf. Solow-ligningen), vil der eksistere en steady state.

2.4 Reallen (w_t) reallejesats (r_t)





Elasticiteterne findes lettest ved at ln på begger sider af lign. (10):

$$\ln y^* = \frac{([\alpha + \phi(1-\alpha)]\,[\ln s - \ln(1+n)] + \ln B)}{1 - \alpha + \phi(1-\alpha)}$$

og differentiere

$$\begin{aligned} \frac{\ln y^*}{\ln s} &= \frac{\alpha + \phi(1-\alpha)}{1 - \alpha - \phi(1-\alpha)}, \\ \frac{\ln y^*}{\ln B} &= \frac{1}{1 - \alpha - \phi(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Grunden til disse er større end, fx, kap. 3 er den produktive eksternalitet. Fx en givet stigning i s vil øge opsparingen, som vil øge kapital pr. arbejder, hvilket som sidegevinst øger teknologiniveauet, dette øger så opsparingen yderligere og kapital pr. arbejder. Denne vekselvirkning vil i sidste ende betyder en større stigning i kapital pr. arbejder og dermed BNP pr. arbejder.

2.5

Start med at tage ln på begge sider af lign. (8):

$$\ln k_{t+1} = \ln \frac{sB}{1+n} + [\alpha + \phi(1-\alpha)] \ln k_t,$$

fra produktionsfunktionen ved vi:

$$\begin{aligned}
\ln y_t &= \ln B + [\alpha + \phi(1-\alpha)] \ln k_t \Leftrightarrow \\
\ln k_t &= \frac{\ln y_t - \ln B}{\alpha + \phi(1-\alpha)} \Rightarrow \\
\ln k_{t+1} &= \frac{\ln y_{t+1} - \ln B}{\alpha + \phi(1-\alpha)},
\end{aligned}$$

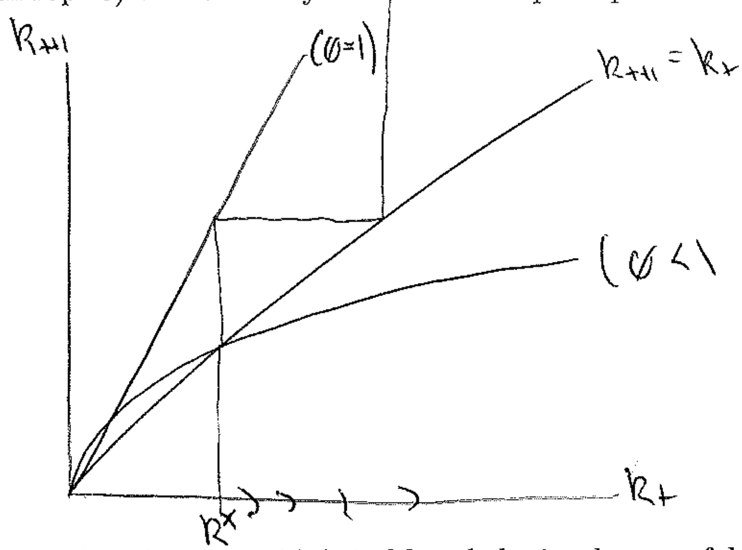
hvilket indsættes i den første ligning:

$$\begin{aligned}
\frac{\ln y_{t+1} - \ln B}{\alpha + \phi(1-\alpha)} &= \ln \frac{sB}{1+n} + [\alpha + \phi(1-\alpha)] \frac{\ln y_t - \ln B}{\alpha + \phi(1-\alpha)} \Leftrightarrow \\
\frac{\ln y_{t+1} - \ln B}{\alpha + \phi(1-\alpha)} &= \ln \frac{sB}{1+n} + \ln y_t - \ln B \Leftrightarrow \\
\ln y_{t+1} - \ln B &= [\alpha + \phi(1-\alpha)] \ln \frac{sB}{1+n} + [\alpha + \phi(1-\alpha)] [\ln y_t - \ln B] \Leftrightarrow \\
\ln y_{t+1} &= \ln B + [\alpha + \phi(1-\alpha)] \ln \frac{s}{1+n} + [\alpha + \phi(1-\alpha)] \ln y_t \Leftrightarrow \\
g_t^y &\equiv \ln y_{t+1} - \ln y_t = \ln B + [\alpha + \phi(1-\alpha)] \ln \frac{s}{1+n} + [\alpha + \phi(1-\alpha) - 1] \ln y_t.
\end{aligned}$$

Den transitoriske vækstrate i BNP pr. arbejder er upåvirket af arbejdsstyrkens størrelse, da specifikationen af den produktive eksternalitet i modellen ikke indeholder skalaeffekter. Den negative effekt fra vækstraten i arbejdsstyrken på BNP pr. arbejder vækst kommer fra udtyndingen, der reducerer produktiviteten (denne effekt fremkommer ikke i steady state).

Den semi-endogene model i kap. 8 indeholder skalaeffekter, da der her antages $A_t = BL_t k_t^{\phi(1-\alpha)}$, hvor der for den indeværende model antages $A_t = Bk_t^{\phi(1-\alpha)}$. Det er også grunden til, at der er nul vækst i steady state på trods af $n > 0$. I en model med skalaeffekter og $\phi < 1$ (svarende til kap. 8) vil $n > 0$ betyde vækst i BNP pr. capita i steady state.

2.6



Kapital pr. arbejder vokser kun over tid, hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\begin{aligned} \frac{sB}{1+n} &> 1 \Leftrightarrow \\ sB &> 1+n. \end{aligned}$$

Eftersom væksten er konstant i AK-modellen ($\phi = 1$), må udviklingen i kapital pr. arbejder være givet ved:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= \frac{sB}{1+n} k_t \Leftrightarrow \\ k_{t+1} &= \left(1 + \frac{sB-(1+n)}{1+n}\right) k_t \end{aligned}$$

løsningen til denne er:

$$k_t = k_0 \left(1 + \frac{sB-(1+n)}{1+n}\right)^t$$

og eftersom vi får oplyst, at vi initialt er i den gamle steady state, hvor $\phi < 1$, udskiftes k_0 med k^*:

$$k_t = k^* \left(1 + \frac{sB-(1+n)}{1+n}\right)^t.$$

2.7

i)

Betragt transitionsligningen i kapital pr. arbejder:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n} sBk_t^{\alpha+\phi_t(1-\alpha)},$$

hvor $\phi_t = 1 - \frac{1}{1+k_t}$. Omskriv transitionsligningen:

$$\begin{aligned}\frac{k_{t+1}}{k_t} &= \frac{1}{1+n} sBk_t^{\alpha+\phi_t(1-\alpha)-1} \Leftrightarrow \\ g_t^k &\equiv \frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{1}{1+n} sBk_t^{\alpha+\phi_t(1-\alpha)-1} - 1.\end{aligned}$$

1) Da $\phi_t = 1 - \frac{1}{1+k_t}$ går mod 0, når $k_t \to 0$, vil modellen i denne grænse opfører sig som den normale Solowmodel (svarende til kap. 3). Derfor følger det, at $\lim_{k\to 0} g_t^k = \infty$

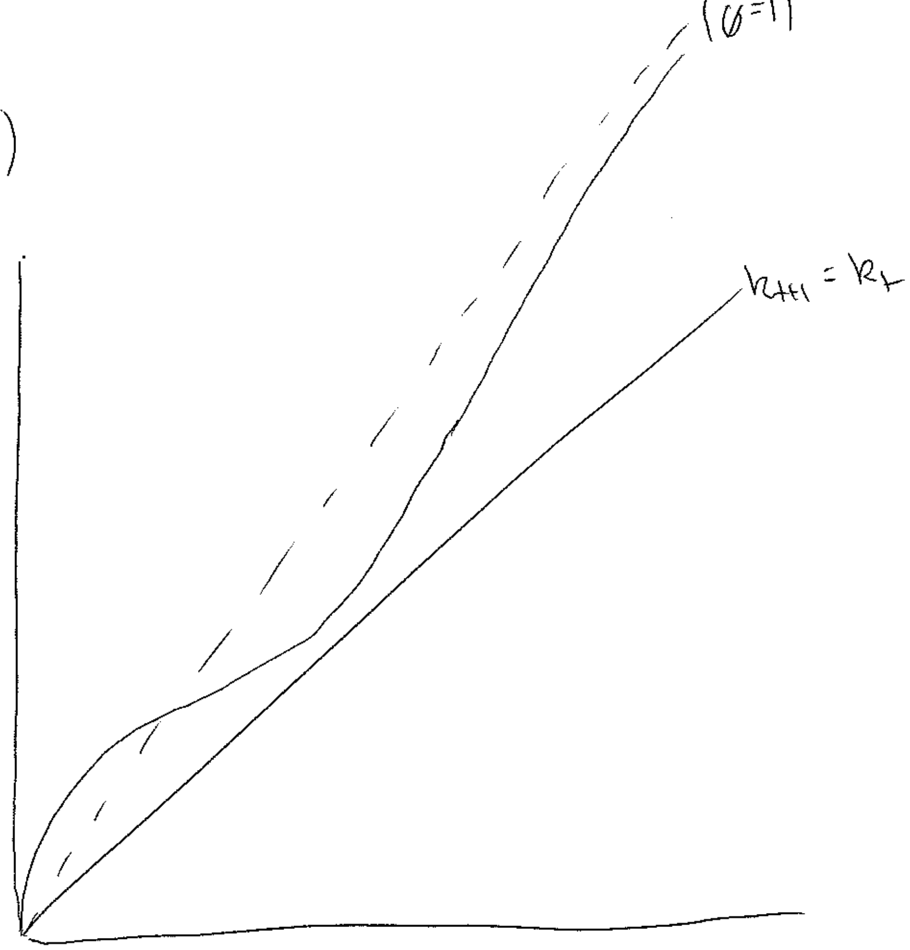
2) Da $\phi_t = 1 - \frac{1}{1+k_t}$ går mod 1, når $k_t \to \infty$, vil modellen i denne grænse opfører sig som AK-modellen (svarende til kap. 8). Derfor følger det, at $\lim_{k\to\infty} g_t^k = \frac{1}{1+n} sB - 1$ og kapital pr. arbejder vokser over tid såfremt $\frac{1}{1+n} sB - 1 > 0$.

Se næste side for figur

ii)

Da k_1^* er en lokal stabil steady state og k_2^* er en ustabil steady state, vil denne økonomi opleve fattigdomsfælden såfremt $k_0 < k_2^*$, eftersom det betyder konvergens mod k_1^*, hvilket vil være lig med økonomisk stagnation. Hvis vi som beslutningstagere vil sørge for at økonomien slipper fri af denne fælde, skal der tilføres så meget kapital pr arbejder, at k_0 bliver større end k_2^*.

i)



ii)