Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2017 V-1A rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Torsdag den 9. februar 2017

Rettevejledning

Opgave 1. Logaritme- og eksponentialfunktioner.

(1) Definer, hvad man forstår ved en logaritmefunktion. (Bl.a. skal logaritmefunktionernes funktionalligning anføres.)

Løsning. En funktion $L : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ er en logaritmefunktion, dersom den er monotont voksende eller aftagende, og hvis den opfylder betingelsen

$$\forall\, x, y \in \mathbf{R}_+ : L(xy) = L(x) + L(y).$$

Denne betingelse kaldes logaritmefunktionernes funktionalligning.

(2) Hvordan defineres grundtallet e for den naturlige logaritmefunktion ln?

Løsning. Den naturlige logaritmefunktion ln er monotont voksende, og dens grundtal e er defineret ved ligningen $\ln e = 1$.

(3) Idet vi erindrer om, at den naturlige logaritmefunktion ln er differentiabel med differentialkvotienten $\frac{d \ln}{dx}(x) = \frac{1}{x}$, skal man udregne følgende differentialkvotienter:

$$\frac{d}{dx}\Big(\ln(x^2 + 7x + 5)\Big) \text{ og } \frac{d}{dx}\Big(\ln(\ln(\ln(x^3 + 5)))\Big).$$

Løsning.

$$\frac{d}{dx}\Big(\ln(x^2 + 7x + 5)\Big) = \frac{2x + 7}{x^2 + 7x + 5}$$

og

$$\frac{d}{dx}\Big(\ln(\ln(\ln(x^3 + 5)))\Big) = \frac{3x^2}{\ln(\ln(x^3 + 5))\ln(x^3 + 5)(x^3 + 5)}.$$

(4) Indfør grundeksponentialfunktionen exp. (Bl.a. skal funktionalligningen for exp anføres.)

Løsning. Den naturlige logaritmefunktion $\ln : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ er bijektiv, og grundeksponentialfunktionen $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ er dens inverse funktion. Den er derfor monotont voksende og opfylder funktionalligningen

$$\forall\, x, y \in \mathbf{R} : \exp(x+y) = \exp x \exp y.$$

(5) Vis, at grundeksponentialfunktionen exp er differentiabel, og at det gælder, at $\frac{d\exp}{dx}(x) = \exp x$.

Løsning. Idet vi sætter $y = \exp x$, har vi, at $x = \ln y$. Af reglen om differentiation af omvendt afbildning får vi så, at

$$\frac{d\exp}{dx}(x) = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = \exp x.$$

(6) Udregn følgende differentialkvotienter

$$\frac{d}{dx}\Big(e^{e^x} + e^{x^e}\Big) \text{ og } \frac{d}{dx}\Big(e^{2x} + 5e^{7x} - xe^x\Big).$$

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{d}{dx}\Big(e^{e^x} + e^{x^e}\Big) = e^x e^{e^x} + ex^{e-1}e^{x^e}$$

og

$$\frac{d}{dx}\Big(e^{2x} + 5e^{7x} - xe^x\Big) = 2e^{2x} + 35e^{7x} - e^x - xe^x.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^3 + x^2y + y^3.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi får, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy = x(3x + 2y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 3y^2.$$

(2) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & 6y \end{pmatrix}.$$

(3) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Idet $f(x, 0) = x^3$, er det oplagt, at funktionen f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

Vi betragter funktionen $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, \theta \in \mathbf{R} : \phi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta).$$

(4) Bestem differentialkvotienten $\phi'(\theta)$.

Løsning. Først bemærker vi, at

$$\phi(\theta) = \cos^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta,$$

hvoraf man så finder, at

$$\phi'(\theta) = -3\cos^2\theta\sin\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta + 3\sin^2\theta\cos\theta =$$

$$\cos^3\theta + \sin^2\theta\cos\theta - 3\cos^2\theta\sin\theta.$$

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} e^{2nx}.$$

(1) Bestem mængden

$$K = \{x \in \mathbf{R} \mid (\S) \text{ er konvergent}\}.$$

Løsning. Vi finder, at

$$K = \{x \in \mathbf{R} \mid e^{2x} < 1\} = \mathbf{R}_{-}.$$

(2) Bestem en forskrift for sumfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2nx}, \quad \forall\, x \in K.$$

Løsning. Vi ser umiddelbart, at

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{2x}}, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}_{-}.$$

(3) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ for et vilkårligt $x \in K$.

Løsning. Vi udregner, at

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(1 - e^{2x})^2}, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}_{-}.$$

(4) Bestem værdimængden for sumfunktionen f.

Løsning. Det er klart, at $f'(x) > 0$ overalt på $\mathbf{R}_{-}$, så funktionen f er monotont voksende. Desuden ser vi, at $f(x) \to 1$ for $x \to -\infty$, og $f(x) \to \infty$ for $x \to 0-$. Dermed har vi godtgjort, at funktionen f har værdimængden $R(f) = \,]1, \infty[$.

(5) Godtgør, at sumfunktionen er bijektiv, og bestem en forskrift for den omvendte funktion f^{-1}.

Løsning. Af svaret på det foregående spørgsmål ser vi, at funktionen $f : \mathbf{R}_{-} \to]1, \infty[$ er bijektiv. Lad $y \in]1, \infty[$ være vilkårligt valgt. Da finder vi, at

$$\frac{1}{1 - e^{2x}} = y \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 - e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} = 1 - \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{y}\right).$$

Dette viser, at den inverse funktion $f^{-1} :]1, \infty[\to \mathbf{R}_-$ har forskriften

$$\forall\, x \in]1, \infty[\colon\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right).$$