LM Januar 18

Opg 1

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1)

$$L \overset{\text{GAUSS}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$N(L)$: $Lx = \bar{0}$

frie : $x_3 = s$, $x_4 = t$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \iff x_2 = -x_3 - x_4 = -s - t$$
$$x_1 - x_3 + x_4 = 0 \iff x_1 = x_3 - x_4 = s - t$$

$$N(L): \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Så er $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en basis for $N(L)$.

Da $N(L) \neq \{\bar{0}\}$ er L ikke injektiv.

2) Fra sp1 ses at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en

basis for $R(L)$. L er ej surjektiv, da $\dim R(L) = 2$.

Dim.sætn. : $4 - 2 = 2$

3) $Lx = y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & y_1 - y_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 - y_1 + 2y_3 \end{array}\right]$

Heraf ses, at løsningsmængden er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - y_3 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

og at $y \in R(L) \Leftrightarrow y_2 - y_1 + 2y_3 = 0$.

4) $L(1,1,1,1)$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Mht $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Koordinaterne er altså $\underline{\underline{(1,3)}}$.

Opg 2

1) $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 1\right] = (1-\lambda)(\lambda^2-2)$

$= -\lambda^3+\lambda^2+2\lambda-2$

2) Egenværdierne er $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. Da A er symmetrisk er A diagonaliserbar.

3) Med $D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ er

$P_A(D) = \begin{bmatrix} P_A(\sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 0 & P_A(-\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & P_A(1) \end{bmatrix} = 0$, hvorfor

$P_A(A) = Q P_A(D) Q^T = 0$, hvor Q er ortogonalmatricen med de normaliserede egenvektorer som søjler.

4) $\det(e^A) = \det(e^D) = e^{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}}e^1 = \underline{\underline{e}}$.

5) Da $0 = P_A(A) = -A^3+A^2+2A-2E$ er åbenbart $E = \frac{1}{2}(-A^3+A^2+2A) \Longrightarrow B_k = E^k = E$

så $\det(B_k) = \det(E) = \underline{1}$.

Opg 3 1) $\int \cos(ax)\sin^2(bx)\,dx$

$$= \int \left(\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2bx}+e^{-i2bx}-2}{-4}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{8}\int e^{i(a+2b)x} + e^{i(a-2b)x} + e^{i(-a+2b)x} + e^{i(-a-2b)x} - 2(e^{iax}+e^{-iax})\,dx$$

$$= -\frac{1}{8}\int e^{i(a+2b)x} + e^{-i(a+2b)x} + e^{i(a-2b)x} + e^{-i(a-2b)x} - 2(e^{iax}+e^{-iax})\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \cos(a+2b)x + \cos(a-2b)x - 2\cos(ax)\,dx$$

Hvis $a+2b \neq 0$, $a-2b \neq 0$, $a \neq 0$ fås

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2b}\sin(a+2b)x + \frac{1}{a-2b}\sin(a-2b)x - \frac{2}{a}\sin(ax)\right) + k.$$

Hvis f.ex $a+2b=0$ er $\cos(a+2b)x = 1$ og stamfunktionen bliver så x for denne.

Analogt med de øvrige.

2) $z^2 = 6 + i8$

$z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

Så fås

$$x^2 - y^2 = 6$$
$$2xy = 8$$

Så er $y = \frac{4}{x}$, hvoraf $x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 6$

$$x^4 - 16 = 6x^2$$
$$x^4 - 6x^2 - 16 = 0.$$

Lad $u = x^2 > 0$. $u = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = 8$

(da (−) forkastes).

Så er $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$, hvorfor

$$z = x + iy = \pm\left(2\sqrt{2} + i\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

(Da $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ kan dette skrives

$$z = \pm\sqrt{2}(2+i)$$)

Opg 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n(x^4-4x^2)}$$

1)+2) $g(x) = e^{x^4-4x^2}$, veldefineret for $|g(x)| < 1$.

$$\left|e^{x^4-4x^2}\right| < 1 \iff e^{x^4-4x^2} < 1$$

dvs $x^4 - 4x^2 < 0$.

$$x^4-4x^2 = x^2(x^2-4) = 0 \iff x \in \{0, 2, -2\}.$$

Så er $x^4-4x^2<0$ for $\underline{\underline{x \in]-2,0[\cup]0,2[}}$

og her er

$$f(x) = \frac{1}{1-e^{x^4-4x^2}} \text{ veldefineret.}$$

3) f har samme monotoniforhold som g.

$$g'(x) = e^{x^4-4x^2}(4x^3-8x) = 0$$

$$\iff 4x^3-8x = 4x(x^2-2) = 0$$

Dvs $x \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, men $x=0$ er ikke tilladt.

x	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2
g'		÷	0	+		÷	0	+	
f		↘	min	↗		↘	min	↗	

for $x \to \pm 2$ vil $f(x) \to \infty$

for $x \to 0^{+-}$ vil $f(x) \to \infty$

for $x = \pm\sqrt{2}$ er $f(\pm\sqrt{2}) = \frac{1}{1-e^{-4}}$

$$Vm(f) = \left[\frac{1}{1-e^{-4}}, \infty\right[$$

f er ikke injektiv da f har et (lok.)min i et indre punkt i sin definitionsmgd.

5) $f(x) = y \quad , \quad y \in Vm(f)$.

$$\frac{1}{1-e^{x^4-4x^2}} = y$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{x^4-4x^2} = \frac{y-1}{y}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^4-4x^2 = \ln\left(\frac{y-1}{y}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^4-4x^2-\ln\left(\frac{y-1}{y}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16+4\ln\left(\frac{y-1}{y}\right)}}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{16+4\ln\left(\frac{y-1}{y}\right)}}{2}}$$

2 løsninger for $y = \frac{1}{1-e^{-4}}$.

4 løsninger for $y > \frac{1}{1-e^{-4}}$.