KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 V-1A ex ret

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A

Mandag den 17. januar 2011

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. Partiel integration. Lad I være et åbent interval og lad $f, g : I \to \mathbf{R}$ være to differentiable funktioner, der har kontinuerte afledede henholdsvis f' og g'. Lad endvidere F og G betegne stamfunktioner til henholdsvis f og g.

(1) Vis, at

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx,$$

og at

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx.$$

Løsning. Ved differentiation finder vi, at

$$\frac{d}{dx}\Big(\int f(x)g(x)\,dx\Big) = f(x)g(x),$$

og

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx\Big) =$$
$$f(x)g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) = f(x)g(x),$$

hvoraf det ønskede fremgår.

Endvidere finder vi ved differentiation, at

$$\frac{d}{dx}\Big(\int f(x)g(x)\,dx\Big) = f(x)g(x),$$

og

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx\Big) =$$
$$f'(x)G(x) + f(x)g(x) - f'(x)G(x) = f(x)g(x),$$

hvilket verificerer den anden påstand.

(2) Udregn det ubestemte integral

$$\int 3x^2 \ln(x)\, dx\,.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\int 3x^2 \ln(x)\, dx = x^3 \ln(x) - \int x^3 \frac{1}{x}\, dx = x^3 \ln(x) - \int x^2\, dx =$$
$$x^3 \ln(x) - \frac{1}{3}x^3 + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

(3) Udregn det ubestemte integral

$$\int 4xe^{2x}\, dx\,.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\int 4xe^{2x}\, dx = 4x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 4\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\, dx = 2xe^{2x} - \int 2e^{2x}\, dx = 2xe^{2x} - e^{2x} + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3 + 2y^4.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3x^2 = x(2+3x) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 4y^2 = 2y(1+8y^3).$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi har, at

$$\Big(x(2+3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \,\vee\, x = -\frac{2}{3}\Big) \wedge$$
$$\Big(2y(1+4y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0\Big).$$

Dette viser, at funktionen f har de stationære punkter $(0,0)$ og, $(-\frac{2}{3}, 0)$.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\ \text{ og }\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + 6x\,,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0\ \text{ og }\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + 24y^2.$$

Vi ser endvidere, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2\,,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0\ \text{ og }\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2,$$

hvilket viser, at $(0, 0)$ er et minimumspunkt for funktionen f.

Desuden får vi, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{2}{3},0) = -2\,,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\frac{2}{3},0) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\frac{2}{3},0) = 0\ \text{ og }\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{2}{3},0) = 2,$$

hvilket viser, at $(-\frac{2}{3}, 0)$ er et sadelpunkt for funktionen f.

Opgave 3. For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$(\S)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{5+e^x}\Big)^n.$$

(1) Vis, at den uendelige række er konvergent overalt på mængden $\mathbf{R}$, altså at

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{5+e^x}\Big)^n < \infty.$$

Løsning. Den givne uendelige række (§) er en kvotientrække med kvotienten

$$q = \frac{1}{5+e^x}\,,$$

og vi ser, at

$$\forall x \in \mathbf{R} : q = \frac{1}{5+e^x} \in \,]0,1[\,,$$

hvoraf det fremgår, at

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{5+e^x}\Big)^n < \infty.$$

(2) Bestem en forskrift for funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{5+e^x}\Big)^n.$$

Løsning. Vi, ser, at

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{5+e^x}\Big)^n = \frac{1}{5+e^x}\,\frac{1}{1-\frac{1}{5+e^x}} = \frac{1}{4+e^x}.$$

(3) Løs ligningen $f(x) = \frac{1}{5}$.

Løsning. Vi ser, at

$$f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{4+e^x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = 0.$$

(4) Bestem den afledede funktion $f^{'}$ af f, og vis, at f er aftagende.

Løsning. Vi finder, at

$$f^{'}(x) = -\frac{1}{(4+e^x)^2}\, e^x = -\frac{e^x}{(4+e^x)^2},$$

og da

$$\forall x \in \mathbf{R} : f^{'}(x) = -\frac{e^x}{(4+e^x)^2} < 0,$$

ser vi, at funktionen f er aftagende.

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Vi finder, at

$$f(x) = \frac{1}{4+e^x} \to \frac{1}{4} \ \text{ for } \ x \to -\infty\,,$$

og at

$$f(x) = \frac{1}{4+e^x} \to 0 \ \text{ for } \ x \to \infty\,,$$

hvilket viser, at funktionen f har værdimængden $R(f) =]0, \frac{1}{4}[$.