Skriftlig eksamen i Matematik B. Vinteren 2013 - 2014

Onsdag den 8. januar 2014

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 V-1B ex

Skriftlig eksamen i Matematik B

Onsdag den 8. januar 2014

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ betragter vi den symmetriske 3×3 matrix

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 & v & 0 \\ v & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(u, v)$, og bestem de talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, så matricen $A(u, v)$ er regulær.

(2) Udregn de ledende hovedunderdeterminanter for matricen $A(u, v)$, og vis, at matricen $A(u, v)$ hverken er positiv definit eller negativ definit for noget talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$.

(3) Bestem 3×3 matricen

$$B = A(1, 1)^2 = \big(A(1, 1)A(1, 1)\big).$$

(4) Vis, at matricen B er positiv definit.

(5) Bestem nulrummet

$$N(B) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid Bx = \underline{0}\}$$

for matricen B.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = \sqrt{1 + x^2} + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Vis dernæst, at funktionen f er strengt konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for f.

For ethvert $v \in \mathbf{R}$ betragter vi dobbeltintegralet

$$I(v) = \int_0^1 \Big(\int_0^v x f(x,y)\, dx \Big) dy.$$

(5) Udregn $I(v)$.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \Big) x = \cos(t) e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = e^{-\frac{1}{2}}$ er opfyldt.

(3) Udregn differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0)$$

for en vilkårlig maksimal løsning $x = x(t)$ til differentialligningen $(*)$.

Opgave 4. I vektorrummet $\mathbf{R}^4$, som er forsynet med det sædvanlige indre produkt (prikproduktet), betragter vi hyperplanerne H_1 og H_2, som har ligningerne

$$H_1: \ \ x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0$$

og

$$H_2: \ \ 2x_1 + 14x_2 - 5x_3 - x_4 = 0.$$

(1) Godtgør, at hyperplanerne H_1 og H_2 begge er underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

(2) Bestem fællesmængden $U = H_1 \cap H_2$ af hyperplanerne H_1 og H_2, og godtgør, at mængden U er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.