Eksamen på Økonomistudiet. Vinteren 2011 - 2012

MATEMATIK A

1. årsprøve

Fredag den 6. januar 2012

(2 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2012 V-1A ex

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A

Fredag den 6. januar 2012

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Differentiabilitet. Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en given funktion.

(1) Lad $a \in I$ være et fast valgt punkt. Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er differentiabel i punktet a, og forklar, hvordan man bestemmer differentialkvotienten $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

(2) Betragt funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{for } x \geq 0 \\ -x^3, & \text{for } x < 0 \end{cases} .$$

Vis, at funktionen f er differentiabel i ethvert punkt $x \in \mathbf{R}$, og bestem den afledede funktion $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(3) Vis, at den afledede funktion $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ikke er differentiabel i $x = 0$.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \ \text{ og } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør hvilke af disse partielle afledede af anden orden, der er homogene funktioner, og angiv deres grad.

Opgave 3. Betragt funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)}.$$

(1) Bestem, for ethvert $t \in \mathbf{R}$, integralet

$$I(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)}\,dx.$$

(2) Bestem, for ethvert $a \neq 0$ og ethvert $t \in \mathbf{R}$, integralet

$$I_a(t) = \int_0^t f(ax)\,dx = \int_0^t \frac{\cos(ax)}{2+\sin(ax)}\,dx.$$

(3) Bestem, for ethvert $a \neq 0$ og ethvert $t \in \mathbf{R}$, integralet

$$J_a(t) = \int_0^t f(ax)\,d(ax) = \int_0^t \frac{\cos(ax)}{2+\sin(ax)}\,d(ax).$$