

Eksamen på økonomistudiet 2010-I

Operationsanalyse

Valgfag

25. januar 2010

4 timers prøve med hjælpemidler

Ved bedømmelsen vægtes alle spørgsmål ens

Besvarelse på dansk

OPGAVE 1

En mountainbiker eksperimenterer med at komponere den perfekte snack, eller powerbar, til langturerne. En powerbar laves ved at blande udvalgte ingredienser i et bestemt forhold for derefter at forme og bage barerne.

En bar skal mindst veje 50 gram og skal indeholde mindst 25 gram kulhydrat og mindst 15 gram kostfibre. Til formålet har mountainbikeren 6 ingredienser af vælge imellem. Disse nummereres 1, 2, ..., 6, og af hver af disse tilsættes, målt i gram, hhv. x_1, x_2, \dots, x_6 . De 3 førstnævnte ingredienser karakteriseres som "velsmagende" og disse skal udgøre mindst halvdelen af vægten i den endelige powerbar.

Pris i øre per gram, kulhydratindhold og kostfiberindhold i procent af hver af de 6 ingredienser fremgår af denne tabel:

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Pris (øre/gram) | 5 | 6 | 8 | 6 | 4 | 5 |
| Kulhydrat | 60 % | 50 % | 40 % | 40 % | 50 % | 20 % |
| Kostfibre | 10 % | 50 % | 10 % | 50 % | 30 % | 10 % |

Når det handler om at sammensætte ingredienser for at producere den billigste powerbar, der opfylder kravet, kan optimeringsmodellen derved opstilles som følger:

Minimer

$$z = 5 x_1 + 6 x_2 + 8 x_3 + 6 x_4 + 4 x_5 + 5 x_6$$

Under hensyntagen til

$$1.0 x_1 + 1.0 x_2 + 1.0 x_3 + 1.0 x_4 + 1.0 x_5 + 1.0 x_6 \geq 50 \quad (1)$$

$$0.6 x_1 + 0.5 x_2 + 0.4 x_3 + 0.4 x_4 + 0.5 x_5 + 0.2 x_6 \geq 25 \quad (2)$$

$$0.1 x_1 + 0.5 x_2 + 0.1 x_3 + 0.5 x_4 + 0.3 x_5 + 0.1 x_6 \geq 15 \quad (3)$$

$$1.0 x_1 + 1.0 x_2 + 1.0 x_3 - 1.0 x_4 - 1.0 x_5 - 1.0 x_6 \geq 0 \quad (4)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Spørgsmål 1: Begrund at denne LP-model beskriver optimeringsproblemet.

Omformet til standardform og løst med simplex er det optimale simplex tableau fundet til:

| z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | RHS |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | -0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 25.00 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | 0 | -0.5 | 0.5 | 0 | -2.5 | -0.25 | 12.50 |
| 0 | 0 | 0 | 0.2 | 0.05 | 0 | 0.35 | -0.6 | 1 | 0.25 | -0.025 | 1.25 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | -0.5 | 0 | 0.5 | -1 | 0 | 2.5 | -0.25 | 12.50 |
| 1 | 0 | 0 | 3 | 1.5 | 0 | 1.5 | 4 | 0 | 2.5 | 0.75 | 237.50 |

Spørgsmål 2: Forklar hvordan den optimale powerbar blandes af de 6 ingredienser. Hvor mange gram kulhydrat og kostfibre indeholder den? Hvad koster den at producere?

Ved den marginale omkostning for den optimale powerbar forstås den omkostning det ville medføre per gram at forøge vægtrakret (på 50 gram) en lille smule. Ved den gennemsnitlige omkostning forstås derimod forholdet mellem den samlede omkostning og den samlede vægt.

Spørgsmål 3: Angiv den gennemsnitlige omkostning samt den marginale omkostning for den optimale powerbar. Forklar hvorfor der evt. kan være forskel på de to størrelser.

Spørgsmål 4: Opstil den duale model og angiv dennes optimale løsning.

Producenten opdager nu, at der er mulighed for at iblande en ny ingrediens. Denne nye ingrediens indeholder 30% kulhydrat og 40% kostfibre og koster 5 øre per gram, men det vides endnu ikke om den er "velsmagende".

Spørgsmål 5: Kan det betale sig at iblande den nye ingrediens?

OPGAVE 2

En forhandler sælger moderigtige cykelhjelme i sin butik. Når hendes lager af hjelme når ned på r^* bestiller hun q^* hjelme yderligere. Hver bestilling koster 1000 kr. og det varer 2 uger fra hun bestiller til hjelmene når butikken. Det årlige salg er normalfordelt med en middelværdi på 10.000 og en spredning på 2.000. Hun har en lagerenhedsomkostning på 10 kr/år. Da hjelmene er unikke kan man regne med at kunderne accepterer efterlevering i tilfælde af at lageret løber tomt, men at der da bør beregnes et tab på 20 kr. per efterlevering til dækning af administrationsomkostninger og tabt goodwill.

Spørgsmål 1: Bestem den optimale værdi af r^ og af q^* .*

Forhandleren synes det er svært at prissætte tabet ved efterlevering og er derfor interesseret i at få den netop fundne (r, q) politik præsenteret i form af servicemål.

Spørgsmål 2: Hvad er sandsynligheden for at en kunde må modtage hjelmen som en efterlevering (SLM_1 -niveauet)? Hvor mange gange om året (SLM_2 -niveauet) må forhandleren melde udsolgt?

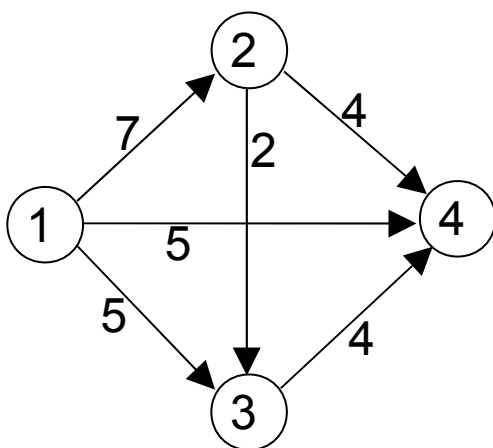
OPGAVE 3

I denne opgave betragtes et strømningsnetværk. De 3 grafer nedenfor angiver hhv.

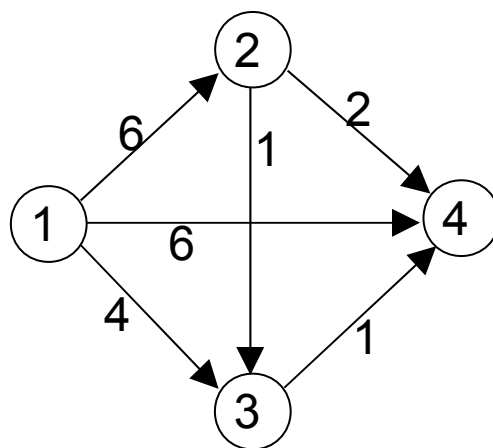
- kantkapaciteter, dvs. den maksimale strømning der kan gå gennem hver kant (den minimale strømning antages at være 0 i hver kant)
- kantomkostninger, der er omkostningen per enhed der strømmer gennem kanten og
- den nuværende strømning, der antages at repræsentere en lovlig løsning.

Spørgsmål 1: Foretag én netværkssimplexiteration. Angiv hvor meget de samlede strømningsomkostninger faldt ved iterationen.

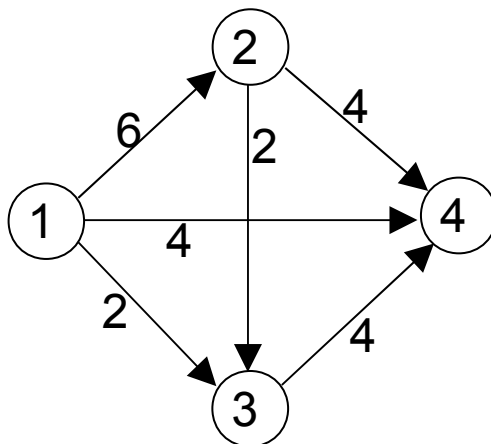
Kantkapaciteter



Kantomkostninger



Nuværende strømning



OPGAVE 4

Der tager nu udgangspunkt i optimeringsmodellen fra Opgave 1 og der tilføjes følgende to restriktioner: a) Powerbaren højst må bestå af 3 forskellige ingredienser og b) hvis Powerbaren indeholder ingrediens nummer 2 må den ikke også indeholde ingrediens nummer 4.

Spørgsmål 1: Opstil en optimeringsmodel der beskriver den udvidede problemstilling. (modellen skal ikke løses)

Under løsning af Mixed Integer Programming (MIP) modeller anvendes ofte heltalsrelaksation som en del af løsningsmetoden.

Spørgsmål 2: Forklar hvad begrebet "heltalsrelaksation" dækker over og hvordan det kan anvendes til undertalsberegning for minimeringsproblemer.