Skriftlig eksamen på Økonomistudiet

Sommeren 2017

MATEMATIK B

Lørdag den 17. juni 2017

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler.
Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

OBS: Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du kontakte eksamenstilsynet og blive registeret som syg af vedkommende eksamensvagt. Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen. Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende en lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2017 S-1B ex

Skriftlig eksamen i Matematik B

Lørdag den 17. juni 2017

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & s & 1 \\ 2 & 1 & s \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

(2) Bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er positiv definit.

(3) Bestem egenværdierne for matricen $A(1)$, (Her er $s = 1$.)

(4) Udregn matricen $B = A(0)^2 = A(0)A(0)$ (Her er $s = 0$), og vis, at B er positiv definit.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 y + y^3 + xy^2.$$

(1) Godtgør, at funktionen f er homogen, og angiv homogenitetsgraden.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(3) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

(4) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

For ethvert $v > 0$ betragter vi den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq v\}.$$

(6) Udregn integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x,y)\, d(x,y).$$

(7) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \frac{I(v)}{v \sin(2v)}.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \left(\frac{12t^3}{1+t^4}\right) x = \frac{t}{(1+t^4)^2}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(1) = \frac{5}{6}$ er opfyldt.

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(1).$$

Opgave 4. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 1.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og godtgør, at funktionen f er strengt konkav.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

(5) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(1, 3, f(1, 3))$.

(6) En funktion $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \psi(x, y) = \ln(5 - f(x, y)).$$

Vis, at funktionen ψ er kvasikonveks.