Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2017 S-1B ex ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik B

Lørdag den 17. juni 2017

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & s & 1 \\ 2 & 1 & s \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi finder, at $\det A(s) = s^2 - 5s + 3$. Matricen $A(s)$ er regulær, netop når determinanten ikke er 0, og det betyder, at

$$s \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right\}.$$

(2) Bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er positiv definit.

Løsning. Matricen $A(s)$ har de ledende hovedunderdeterminanter $D_1 = 1, D_2 = s - 1$ og $D_3 = s^2 - 5s + 3$. Hvis disse alle tre skal være positive, hvorved $A(s)$ er positiv definit, må vi kræve, at

$$s > \frac{5 + \sqrt{13}}{2}.$$

(3) Bestem egenværdierne for matricen $A(1)$, (Her er $s = 1$.)

Løsning. Vi ser, at

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomiun P for $A(1)$ er givet ved udtrykket

$$P(t) = \det(A(1) - tE) = -t^3 + 3t^2 + 3t - 1.$$

Vi ser umiddelbart, at $t = -1$ er en karakteristisk rod, og ved at benytte polynomiers division får vi, at

$$P(t) = (t + 1)(-t^2 + 4t - 1)$$

De karakteristiske rødder for P – og dermed egenværdierne for $A(1)$ – er da $t_1 = -1, t_2 = 2 - \sqrt{3}$ og $t_3 = 2 + \sqrt{3}$.

(4) Udregn matricen $B = A(0)^2 = A(0)A(0)$ (Her er $s = 0$), og vis, at B er positiv definit.

Løsning. Idet

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

finder vi, at

$$B = A(0)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

De ledende hovedunderterminanter for B er $D_1 = 6, D_2 = 3$ og $D_3 = 9$, hvilket viser, at B er positiv definit.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2y + y^3 + xy^2.$$

(1) Godtgør, at funktionen f er homogen, og angiv homogenitetsgraden.

Løsning. For ethvert $t > 0$ finder vi, at

$$f(tx, ty) = (tx)^2(ty) + (ty)^3 + (tx)(ty)^2 = t^3(x^2y + y^3 + xy^2) = t^3 f(x, y),$$

og heraf fremgår det, at f er homogen af grad $k = 3$.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + y^2 = (2x + y)y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy.$$

(3) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Funktionen f har det ene stationære punkt $(0, 0)$.

(4) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 6y + 2x \end{pmatrix},$$

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Idet $f(0, y) = y^3$, ser vi, at f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

For ethvert $v > 0$ betragter vi den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq v\}.$$

(6) Udregn integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x, y)\, d(x, y).$$

Løsning. Vi finder, at

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x, y)\, d(x, y) = \int_0^1 \Big(\int_0^v (x^2y + y^3 + xy^2)\, dy \Big)\, dx =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}xy^3\right]_0^v dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{3}xv^3\right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{6}x^3v^2 + \frac{1}{4}v^4x + \frac{1}{6}x^2v^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}v^2 + \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{4}v^4.$$

(7) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v\to 0+} \frac{I(v)}{v\sin(2v)}.$$

Løsning. Ved at benytte L'Hôpitals regel får vi, at

$$\lim_{v\to 0+} \frac{I(v)}{v\sin(2v)} = \lim_{v\to 0+} \frac{\frac{1}{6}v + \frac{1}{6}v^2 + \frac{1}{4}v^3}{\sin(2v)} = \lim_{v\to 0+} \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}v + \frac{3}{4}v^2}{2\cos(2v)} = \frac{1}{12}.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \left(\frac{12t^3}{1+t^4}\right)x = \frac{t}{(1+t^4)^2}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Den simpleste stamfunktion til funktionen $p(t) = \frac{12t^3}{1+t^4}$ er $P(t) = \ln((1+t^4)^3)$. Vi finder så, at

$$x = Ce^{-\ln((1+t^4)^3)} + e^{-\ln((1+t^4)^3)} \int (1+t^4)^3 \frac{t}{(1+t^4)^2}\, dt =$$

$$\frac{C}{(1+t^4)^3} + \frac{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^6}{(1+t^4)^3} = \frac{6C + t^6 + 3t^2}{6(1+t^4)^3},$$

hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(1) = \frac{5}{6}$ er opfyldt.

Løsning. Hvis $\frac{6C+4}{48} = \frac{5}{6}$, er $C = 6$. Heraf ser vi, at

$$\tilde{x} = \frac{36 + t^6 + 3t^2}{6(1+t^4)^3}.$$

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(1).$$

Løsning. Vi benytter den givne differentialligning og finder så, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(1) = \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{5}{6} = -4\frac{3}{4} = -\frac{19}{4}.$$

Opgave 4. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = -x^2 - y^2 + xy + 1.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x + y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 2y.$$

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Punktet $(0, 0)$ er det eneste stationære punkt for f.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og godtgør, at funktionen f er strengt konkav.

Løsning. Vi finder, at funktionen f har Hessematricen

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

som åbenbart er negativ definit. Dette viser, at f er strengt konkav.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Det stationære punkt $(0,0)$ er et globalt maksimumspunkt for funktionen f, og vi ser, at $f(0,0) = 1$. Desuden ser vi, at

$$f(x,0) = -x^2 + 1 \to -\infty \text{ for } x \to \infty,$$

og hermed får vi, at f har værdimængden $R(f) =]-\infty, 1]$.

(5) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(1, 3, f(1,3))$.

Løsning.

Idet $f(1,3) = -6$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 1$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -5$, ser vi, at

$$z = -6 + (x-1) - 5(y-3) = x - 5y + 8.$$

(6) En funktion $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ er givet ved forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : \psi(x,y) = \ln(5 - f(x,y)).$$

Vis, at funktionen ψ er kvasikonveks.

Løsning. Det er klart, funktionen ln er voksende, og at funktionen $(x,y) \to 5 - f(x,y)$ er strengt konveks. Heraf fremgår det umiddelbart, at funktionen ψ er kvasikonveks.