Mikroøkonomi I: Eksamen februar 2017 med kortfattede løsningsforslag

Thomas Jensen

Februar 2017

1. **Diverse Korte Spørgsmål**

   (a) Definér, hvad henholdsvis et nødvendigt gode (necessity, necessary good) og et luksusgode er. I en forbrugssituation med to varer, kan begge varer da være nødvendige goder? Begrund dit svar.

   LØSNINGSFORSLAG: En vare er et nødvendigt gode for en forbruger, hvis den andel af sin indkomst hun bruger på varen er aftagende i indkomsten. I en forbrugssituation med to varer er vare i altså et nødvendigt gode, hvis

$$\frac{p_i x_i(p_1, p_2, I)}{I}$$

   er aftagende i I. En vare er et luksusgode for en forbruger, hvis den andel af sin indkomst hun bruger på varen er voksende i I.

   Hvis vi er en forbrugssituation med to varer, og den ene vare er et nødvendigt gode for forbrugen, da vil den andel af sin indkomst hun bruger på den anden vare nødvendigvis være voksende. Altså vil den anden vare være et luksusgode, så begge varer kan ikke være nødvendige goder.

   (b) Jens står i en situation, hvor han skal vælge mellem forskellige lotterier over pengebeløb (målt i kroner). Hans præferencer kan repræsenteres af en von-Neumann-Morgenstern forventet nyttefunktion, hvor nytten af pengebeløb er $u(x)$.

   Betragt lotteriet G, der udbetaler 50 kr med sandsynlighed $\frac{9}{10}$ og 1000 kr med sandsynlighed $\frac{1}{10}$. Opskriv Jens' forventede nytte af dette lotteri.

Forklar kort, hvad Jens' sikkerhedsækvivalent (certainty equivalent) for lotteriet G er.

LØSNINGSFORSLAG: Forventet nytte af G:

$$\frac{9}{10}u(50) + \frac{1}{10}u(1000)$$

Jens' sikkerhedsækvivalent for G er det beløb $C(G)$, så Jens præcis er indifferent mellem at få $C(G)$ med sikkerhed og lotteriet G:

$$u(C(G)) = \frac{9}{10}u(50) + \frac{1}{10}u(1000).$$

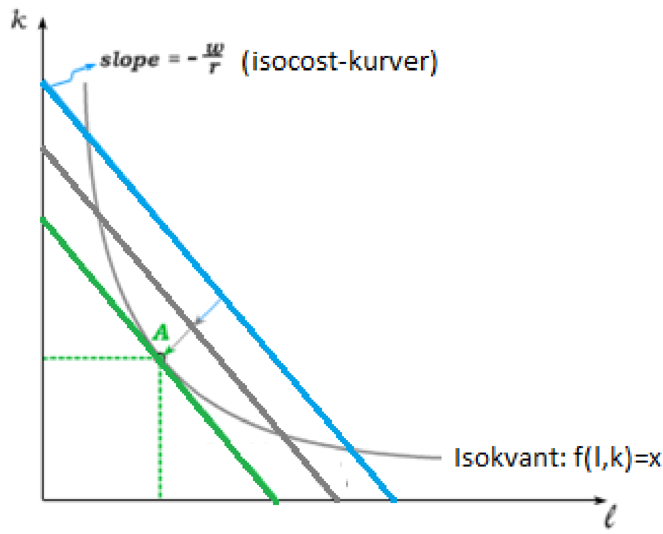
(c) Betragt en virksomhed, der producerer et output ved hjælp af arbejdskraft (l) og fysisk kapital (k). Virksomhedens produktionsfunktion er $f(l,k)$. Den agerer som pristager på input-markederne. Prisen på arbejdskraft betegnes w, lejeprisen på kapital betegnes r.

Opstil virksomhedens omkostningsminimeringsproblem, når den skal producere outputmængden $x > 0$. Illustrér grafisk løsningen til dette problem, idet produktionsfunktionen $f(l,k)$ antages at være konkav.

LØSNINGSFORSLAG: Omkostningsminimerings-problem:

$$\min_{l,k \geq 0} wl + rk \text{ u.b. } f(l,k) = x.$$

Grafisk illustration:



(bemærk at isokvantens øvre konturmængde er konveks, idet f er konkav og dermed også quasi-konkav).

(d) Opskriv Slutsky-ligningen for ændringen i en forbrugers efterspørgsel efter vare i ved en marginal prisstigning på vare j. Forklar kort den økonomiske betydning af hvert enkelt led i ligningen.

LØSNINGSFORSLAG: Slutsky-ligningen som opskrevet i Nechyba:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i}{\partial I}\frac{\partial E}{\partial p_j}$$

Venstresiden er den totale effekt på efterspørgslen efter vare i ved en marginal prisstigning på vare j. Første led på højresiden er substitutionseffekten (ved Hicks-kompensation). Sidste led er indkomsteffekten og består af to faktorer: 1) Ændringen i efterspørgslen ved en marginal indkomststigning og 2) den ændring i indkomst, der, pga. den marginale prisstigning, skal til for at opretholde det oprindelige nytteniveau.

2. **Forbrugerteori**

Johanne kan forbruge to goder: Kartofler (vare 1) og kød (vare 2). Hun har præferencer, der kan repræsenteres af nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = x_1(x_2 + 5),$$

hvor x_1 er forbruget af kartofler og x_2 er forbruget af kød. Priserne på de to varer betegnes p_1 og p_2. Johannes indkomst betegnes I.

(a) Find Johannes efterspørgselsfunktion (for begge varer).

LØSNINGSFORSLAG: Den indre løsning findes vha en af standardmetoderne, fx Lagrange. For $I > 5p_2$ fås:

$$x_1(p_1, p_2, I) = \frac{I + 5p_2}{2p_1} \text{ og } x_2(p_1, p_2, I) = \frac{I - 5p_2}{2p_2}.$$

For $I \leq 5p_2$ fås en randløsning:

$$x_1(p_1, p_2, I) = \frac{I}{p_1} \text{ og } x_1(p_1, p_2, I) = 0.$$

(b) Antag $I > 5p_2$. Udregn den andel af indkomsten I, som Johanne bruger på kød (vare 2). Er kød et nødvendigt gode eller et luksusgode for Johanne? Hvad med kartofler? Begrund dine svar.

LØSNINGSFORSLAG: Andelen af I, som Johanne bruger på kød (for $I > 5p_2$):

$$\frac{p_2 x_2(p_1, p_2, I)}{I} = \frac{I - 5p_2}{2I} = \frac{1}{2} - \frac{5p_2}{2I}$$

Denne funktion er voksende i I, og dermed er kød et luksusgode for Johanne. Altså må kartofler være et nødvendigt gode.

(c) En anden forbruger, Søren, har præferencer, der kan repræsenteres af nyttefunktionen

$$u^S(x_1, x_2) = 4x_1 x_2 + 20x_1 - 3.$$

Vil Søren altid efterspørge samme varebundt som Johanne, hvis deres indkomst er den samme? Begrund dit svar.

LØSNINGSFORSLAG: Sørens nyttefunktion er en monoton transformation af Johannes nyttefunktion:

$$u^S(x_1, x_2) = 4u(x_1, x_2) - 3.$$

Heraf følger, at Johanne og Søren har identiske præferencer, så ved samme indkomst må de efterspørge samme varebundt.

3. **Produktion og Partiel Ligevægt**

Betragt en virksomhed, der producerer et output ved hjælp af to inputs: arbejdskraft (l) og fysisk kapital (k). Virksomheden agerer som pristager på både output- og inputmarkeder. Dens produktionsfunktion er

$$x = f(l, k) = l^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}},$$

hvor x er mængden af output. Udover udgifterne til inputs har virksomheden en gentagen fast omkostning (recurring fixed cost) ved produktion. Denne betegnes FC.

Vi betragter i denne opgave det lange sigt, hvor alle inputs er variable, og den gentagne faste omkostning kan undgås ved at forlade industrien (exit). Priserne på arbejdskraft og kapital betegnes som sædvanligt w og r.

(a) Find virksomhedens marginalprodukt for arbejdskraft, MP_l. Er det voksende eller aftagende i l? Forklar kort marginalproduktets økonomiske betydning.

LØSNINGSFORSLAG: Marginalprodukt for arbejdskraft:

$$MP_l = \frac{\partial f(l,k)}{\partial l} = \frac{1}{3} l^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{1}{3}}.$$

MP_l er aftagende i l. Marginalproduktet udtrykker (marginalt!), hvor meget ekstra output virksomheden kan producere ved at anvende en ekstra enhed arbejdskraft.

(b) Find virksomhedens samlede (langsigts-)omkostning ved at producere mængden $x > 0$ når $w = 1$, $r = 4$ og $FC = 16$.

LØSNINGSFORSLAG: Virksomhedens udgift til inputs findes ved at løse følgende omkostningsminimerings-problem:

$$\min_{l,k \geq 0} l + 4k \text{ u.b. } l^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}} = x.$$

Dette kan fx. løses vha Lagrange (eller ved at bruge bi-betingelsen til at omforme det til et problem i en variabel). Løsning: $l^* = 2x^{\frac{3}{2}}$ og $k^* = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}$. Dermed bliver virksomhedens samlede omkostning ved at producere x:

$$C(1,4,x) = l^* + 4k^* + FC = 4x^{\frac{3}{2}} + 16.$$

(c) Betragt markedet for virksomhedens output. Antag udbudssiden består af identiske virksomheder (alle med samme karakteristika som virksomheden i denne opgave), og at der er fri entry og exit på lang sigt.

Udregn hvor meget den enkelte virksomhed vil producere i langsigtsligevægten på dette marked, når inputpriser og den gentagne faste omkostning er som i spørgsmål (b).

Hvis FC stiger, vil produktionen pr virksomhed så være højere eller lavere i den nye langsigts-ligevægt? Hvad vil der ske med ligevægts-prisen? Begrund dine svar.

LØSNINGSFORSLAG: I langsigtsligevægten vil hver enkelt virksomhed opnå en profit på nul, så den producerede mængde vil være givet ved det laveste punkt på AC-kurven.

$$AC(1,4,x) = \frac{C(1,4,x)}{x} = 4x^{\frac{1}{2}} + 16x^{-1}.$$

Minimum findes ved førsteordensbetingelsen:

$$2x^{-\frac{1}{2}} - 16x^{-2} = 0.$$

Løsning af denne ligning giver

$$x^{LR} = 4,$$

så hver virksomhed vil producere fire enheder output i langsigts-ligevægten.

Hvis FC stiger vil minimum for AC-kurven rykke mod højre, altså vil den enkelte virksomhed producere mere i den nye langsigts-ligevægt. AC-kurven vil selvfølgelig også rykke opad, hvilket betyder at den nye langsigts-ligevægtspris vil være højere. (Heraf kan vi så også konkludere, at der vil være færre virksomheder i den nye ligevægt.)

4. **Generel Ligevægt**

Betragt en bytteøkonomi med to forbrugere (A og B) og to varer (1 og 2). Forbrugernes initialbeholdninger af de to varer (endowments) er:

$$\begin{aligned}(e_1^A, e_2^A) &= (30, 30), \\ (e_1^B, e_2^B) &= (60, 30).\end{aligned}$$

De to forbrugeres præferencer er repræsenteret af følgende nyttefunktioner:

$$\begin{aligned}u^A(x_1, x_2) &= x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \\ u^B(x_1, x_2) &= x_1^{\beta} x_2^{1-\beta},\end{aligned}$$

hvor $\alpha, \beta \in (0, 1)$ er konstanter.

(a) Afgør om nedenstående udsagn er sandt eller falsk. Begrund dit svar.

"I en Walras-ligevægt i denne økonomi vil forbruger A opnå en nytte på mindst 30".

LØSNINGSFORSLAG: Forbruger A's nytte af sin initialbeholdning er

$$u^A(e_1^1, e_2^1) = 30^{\alpha} 30^{1-\alpha} = 30.$$

I en Walras-ligevægt maksimerer begge forbrugere deres nytte givet deres budgetbetingelse. Da hver forbruger altid har råd til sin initialbeholdning, følger det, at forbruger A i en Walras-ligevægt må opnå en nytte på mindst $u^A(e_1^A, e_2^A) = 30$.

(b) Lad $\alpha = \frac{1}{2}$ og $\beta = \frac{1}{5}$. Brug pris-normaliseringen $p_1 = 1$. Find Walras-ligevægten i økonomien, dvs. find både ligevægts-priser og ligevægtsallokation.

LØSNINGSFORSLAG:Forbrugernes indkomster er:

$$\begin{aligned} I^A &= 30p_1 + 30p_2 \\ I^B &= 60p_1 + 30p_2 \end{aligned}$$

Da forbrugerne er Cobb-Douglas, er deres efterspørgselsfunktioner:

$$\begin{aligned} x_1^A(p_1, p_2, I) &= \frac{1}{2}\frac{I}{p_1} \text{ og } x_2^A(p_1, p_2, I) = \frac{1}{2}\frac{I}{p_2} \\ x_1^B(p_1, p_2, I) &= \frac{1}{5}\frac{I}{p_1} \text{ og } x_2^B(p_1, p_2, I) = \frac{4}{5}\frac{I}{p_2} \end{aligned}$$

Betingelsen for "markeds-clearing" (efterspørgsel=udbud) for vare 1 (som automatisk giver markedsclearing for vare 2 pga Walras' lov) er således:

$$\frac{1}{2}\frac{I^A}{p_1^*} + \frac{1}{5}\frac{I^B}{p_1^*} = 30 + 60.$$

Ved at indsætte I^A, I^B og $p_1^* = 1$ (fra pris-normaliseringen) fås:

$$\frac{1}{2}(30 + 30p_2^*) + \frac{1}{5}(60 + 30p_2^*) = 90,$$

hvilket giver

$$p_2^* = 3.$$

Ligevægtsallokationen fås så ved anvendelse af forbrugernes efterspørgselsfunktioner:

$$\begin{aligned} x_1^{*A} &= x_1^A(1, 2, 60) = 60 \text{ og } x_2^{*A} = x_2^A(1, 2, 60) = 20 \\ x_1^{*B} &= x_1^B(1, 2, 60) = 30 \text{ og } x_2^{*B} = x_2^B(1, 2, 60) = 40 \end{aligned}$$

Altså vil forbruger A's ligevægtsforbrug være $(60, 20)$, mens forbruger B's vil være $(30, 40)$.

(c) Lad $\alpha = \frac{1}{2}$. Find β, så forbrugernes initialbeholdninger udgør en Pareto-efficient allokation.

LØSNINGSFORSLAG: $(30, 30), (60, 30)$ er en Pareto-efficient allokation hvis

$$MRS^A(30, 30) = MRS^B(60, 30).$$

De to forbrugeres marginale substitutionsforhold er:

$$
\begin{aligned}
MSR^A(x_1,x_2) &= -\frac{\frac{\partial u^A(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u^A(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{x_2}{x_1} \\
MSR^B(x_1,x_2) &= -\frac{\frac{\partial u^B(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u^B(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{\beta x_2}{(1-\beta)x_1}
\end{aligned}
$$

Altså bliver betingelsen for at $(30,30)$, $(60,30)$ er en Pareto-efficient allokation:

$$-\frac{30}{30} = -\frac{\beta}{1-\beta}\frac{30}{60}.$$

Ved løsning af denne ligning fås:

$$\beta = \frac{2}{3}.$$