Rettevejledning til sommer 2017

Makroøkonomi I

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

2. juni

Opgave 1:

1.1

Redegør kort for den grundlæggende intuition i, at konvergenshastigheden reduceres fra den generelle Solowmodel (pensumbogens kapitel 5) til Solowmodellen med human kapital (pensumbogens kapitel 6). Forklar om denne ændring er ønskværdig ud fra et empirisk perspektiv.

Svar:

Den grundlæggende intuition er, at en given ændring i fysisk kapital forstærkes af human kapital. I forelæsningerne snakkede vi om krydseffekter og selvforstærkende effekter. Fx krydseffekt: $s_K \uparrow \Rightarrow \tilde{k} \uparrow \Rightarrow$ indkomst øges ($\tilde{y} \uparrow$) $\Rightarrow$ opsparing øges ($s_H \tilde{y} \uparrow$) $\Rightarrow$ mere human kapital ($\tilde{h} \uparrow$) $\Rightarrow$ indkomst øges ($\tilde{y} \uparrow$) og dette giver anledning til en selvforstærkende effekt.

Dette er en ønskværdig ændring, eftersom konvergenshastigheden i kapitel 6 i højere grad er i overensstemmelse med den konvergenshastighed, der observeres i data.

1.2

I en lukket Solowmodel med land som fast faktor i produktionen er steady-state vækststien for BNP pr. arbejder givet ved:

$$y_t^* = (z^*)^{\frac{\alpha}{\beta+\kappa}} A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} (1+g)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}t} (1+n)^{-\frac{\kappa}{\beta+\kappa}t}, \tag{1}$$

dette svarer til den første model fra pensumbogens kapitel 7. Notationen og antagelser er også de samme som i kapitel 7.

1) Hvordan påvirkes BNP pr. arbejder i steady-state af en 1% stigning i den initial befolkningsstørrelse (L_0)? Med vægt på den økonomiske intuition, forklar dit resultat.

2) Find den approksimative vækstrate for BNP pr. arbejder på steady-state vækststien (dvs. $g_t^{y^*} = \ln y_{t+1}^* - \ln y_t^*$).

3) Diskuter kort følgende påstand: "Befolkningsvækstraten (n) har i denne model *kun* en negativ indflydelse på BNP pr. arbejder via vækstraten (dvs. g_t^y)"

Svar 1:

Ved at tage ln på begge sidder af ligning (1) og differentiere mht. $\ln L_0$ fås $-\frac{\kappa}{\beta+\kappa}$, hvilket vil sige, at hvis L_0 stiger med 1% falder y_t^* med $\frac{\kappa}{\beta+\kappa}$%. Grunden til størrelsen på befolkningen (dvs. her snakker vi niveauet *ikke* befolkningsvækst) har en negativ indflydelse på BNP pr. arbejder - i modsætning til fx den generelle Solowmodel - er, at der er DRS til kapital og arbejdskraft pga. land. En større befolkning lægger mere pres på den faste ressource (land) og produktiviteten falder.

Svar 2:

Fra ligning (1) har vi:

$$\begin{aligned}\ln y_t^* &= \ln (z^*)^{\frac{\alpha}{\beta+\kappa}} A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} + \frac{\beta}{\beta+\kappa} t \ln(1+g) - \frac{\kappa}{\beta+\kappa} t\,(1+n) \Leftrightarrow \\ \ln y_t^* &\approx \ln (z^*)^{\frac{\alpha}{\beta+\kappa}} A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} + \left(\frac{\beta}{\beta+\kappa} g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa} n\right) t\end{aligned}$$

og derfor må det gælde

$$\ln y_{t+1}^* \approx \ln (z^*)^{\frac{\alpha}{\beta+\kappa}} A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} + \left(\frac{\beta}{\beta+\kappa} g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa} n\right)(t+1)$$

Nu bruger vi definitionen på den approksimative vækstrate:

$$\begin{aligned}g_t^{y^*} &= \ln y_{t+1}^* - \ln y_t^* = \left(\frac{\beta}{\beta+\kappa} g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa} n\right)(t+1) - \left(\frac{\beta}{\beta+\kappa} g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa} n\right) t \Leftrightarrow \\ g_t^{y^*} &= \frac{\beta}{\beta+\kappa} g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa} n\end{aligned}$$

Svar 3:

Påstanden er falsk, eftersom kapital-output forholdet (z) er negativ påvirket af n. Derfor har befolkningsvækst i denne model (udover en negativ vækstefekt) *også* en negativ niveaueffekt på BNP pr. arbejder, som fungerer på samme måde som fx i den generelle Solowmodel (dvs. igennem øget udtynding).

1.3

Redegør for om Solowmodellen fra forrige delspørgsmål udviser balanceret vækst.

Svar

Balanceret vækst:

1. BNP pr. arbejder, kapital pr. arbejder, forbrug pr. arbejder og reallønnen vokser alle med en og samme konstante vækstrate,

2. Arbejdsstyrken (eller befolkningen) vokser med en konstant rate, BNP, samlet forbrug og mængden af kapital vokser med fælles rate.

3. Reallejsesatsen og kapital-output forholdet er konstante.

Svaret er JA. Solowmodellerne i kapitel 7 er faktisk i overensstemmelse med begrebet balanceret vækst, selvom der er et såkaldt vækstfradrag pga. befolkningsvækst og DRS. En uddybende verbal forklaring er i princippet nok, men det kan vises som følger: Som udledt ovenfor så er SS vækstraten i BNP pr. arbejder $\frac{\beta}{\beta+\kappa}g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa}n$ og vækstraten i kapital pr. arbejder er den samme, da kapital-output forholdet er konstant (z^*). Da indkomstandelen til arbejdskraft er konstant (β) må reallønnen også vokse med det samme som BNP pr. arbejder. Forbrug pr. arbejder er givet $c_t^* = (1-s)y_t^*$ og vokser ligeledes med samme hastighed som y_t^*. BNP, kapital og samlet forbrug vokser med $\frac{\beta}{\beta+\kappa}g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa}n + n$. Det kan nemt vises at reallejsesatsen ligeledes er konstant. Fx er $r_t = \alpha k_t^{\alpha-1} A_t^{\beta} x_t^{\kappa} \Rightarrow \ln r_{t+1} - \ln r_t = (\alpha-1)g_t^k + \beta g - \kappa n = -(\beta+\kappa)g_t^k + \beta g - \kappa n$, udnyt at $g_t^k = g_t^y$ i SS $\Rightarrow \ln r_{t+1} - \ln r_t = -(\beta+\kappa)\left(\frac{\beta}{\beta+\kappa}g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa}n\right) + \beta g - \kappa n = 0$.

Opgave 2: Solowmodel med human kapital og endogen vækst

Ligningerne (2)-(6) udgør en lukket økonomi, der grundlæggende er beskrevet ved en model med fysisk kapital, human kapital og én produktiv eksternalitet:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} L_t^{\gamma}, \;\; \alpha, \varphi, \gamma > 0 \text{ og } \alpha + \varphi + \gamma = 1 \tag{2}$$

$$A_t = B \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\phi_k} \left(\frac{H_t}{L_t} \right)^{\phi_h}, \;\; B > 0, \;\; \phi_k, \phi_h \geq 0 \text{ og } 0 \leq \phi_k + \phi_h \leq \gamma \tag{3}$$

$$K_{t+1} = s_K Y_t + (1 - \delta) K_t, \;\; 0 < s_K < 1, \;\; K_0 \text{ givet}, \tag{4}$$

$$H_{t+1} = s_H Y_t + (1 - \delta) H_t, \;\; 0 < s_H < 1, \;\; H_0 \text{ givet}, \tag{5}$$

$$L_{t+1} = (1 + n) L_t, \;\; n > 0 \text{ og } L_0 \text{ givet}. \tag{6}$$

Ligning (2) angiver en Cobb-Douglas produktionsfunktion, der beskriver den samlede produktion, Y_t, som funktion af total faktor produktivitet (forkortet TFP), A_t, fysisk kapital, K_t, og human kapital, $H_t \equiv h_t L_t$. Ligning (3) er begrundet i "learning-by-doing", hvor det antages, at TFP potentielt afhænger positivt af kapital pr. arbejder, $k_t \equiv K_t / L_t$, og human kapital pr. arbejder, $h_t = H_t / L_t$. Ligningerne (4) and (5) beskriver, hvorledes fysisk kapital og human kapital udvikler sig over tid, hvor s_K (s_H) er opsparingsraten i fysisk (human) kapital og δ er nedslidningsraten. Ligning (6) angiver, hvordan arbejdsstyrken vokser over tid.

Det antages, at den repræsentative virksomhed maksimerer profitten og, at der eksisterer faktormarkeder for ydelserne fra fysisk kapital og arbejdskraft, men ikke noget særskilt marked for human kapital. Den repræsentative virksomhed skal opfattes som lille i forhold til hele økonomien, hvorfor den ikke opfatter at have indflydelse på aggregerede størrelser. Den tager derfor A_t som en udefra given størrelse i sine produktionsbeslutninger. BNP pr. arbejder er defineret som $y_t \equiv Y_t / L_t$.

2.1

Vis ved at benytte ligningerne (2) og (3), at BNP pr. arbejder kan skrives som:

$$y_t = Bk_t^{\alpha+\phi_k} h_t^{\varphi+\phi_h}. \tag{7}$$

Hvilket skalaafkast udviser pr.-arbejder produktionsfunktionen i ligning (7), hvis $\phi_k + \phi_h = \gamma$?

Svar 1:

Start med ligning (2) og divder med L_t på begge sider:

$$\frac{Y_t}{L_t} = A_t \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{H_t}{L_t}\right)^{\varphi} \left(\frac{L_t}{L_t}\right)^{\gamma},$$

hvilket kan lade sig gøre på den måde eftersom funktionen udviser CRS. Nu anvendes definitioner ovenfra og ligning (3) indsættes:

$$\begin{aligned}
y_t &= A_t k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} \Leftrightarrow \\
y_t &= B \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi_k} \left(\frac{H_t}{L_t}\right)^{\phi_h} k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} \Leftrightarrow \\
y_t &= B k_t^{\phi_k} h_t^{\phi_h} k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} \\
y_t &= B k_t^{\alpha+\phi_k} h_t^{\varphi+\phi_h}
\end{aligned}$$

Svar 2:

Summen af eksponenterne er givet ved:

$$\alpha + \varphi + \phi_k + \phi_h$$

og eftersom vi i dette tilfælde antager at $\phi_k + \phi_h = \gamma$ kan vi skrive det som:

$$\alpha + \varphi + \gamma,$$

hvilket ifølge ligning (2) er lig med én. Derfor er der konstant skalaafkast til k_t og h_t, hvilket er den "tekniske" grund til, at modellen er i stand til at udvise endogen vækst. Fx i pensum bogens kapitel 6 er der DRS til pr. arbejder produktionsfunktionen (svarende til tilfældet $\phi_k + \phi_h = 0$)

2.2

De approksimative vækstrater i y_t, k_t, og h_t er defineret som henholdsvis $g_t^y \equiv \ln y_{t+1} - \ln y_t$, $g_t^k \equiv \ln k_{t+1} - \ln k_t$ og $g_t^h \equiv \ln h_{t+1} - \ln h_t$. Vis at den approksimative vækstrate i BNP pr. arbejder kan skrives som:

$$g_t^y = (\alpha + \phi_k)\, g_t^k + (\varphi + \phi_h)\, g_t^h. \tag{8}$$

Det oplyses, at der i denne model findes en balanceret steady-state vækststi med positiv vækst, hvor fysisk-kapital pr. arbejder og human-kapital pr. arbejder vokser med samme hastighed (dvs. $x_t \equiv k_t/h_t$ er konstant), såfremt $\phi_k + \phi_h = \gamma$. Find under disse forudsætninger vækstraten for BNP pr. arbejder i steady state.

Svar:

$$\begin{aligned}
\ln y_t &= \ln B + (\alpha + \phi_k)\ln k_t + (\varphi + \phi_h)\ln h_t \text{ og} \\
\ln y_{t+1} &= \ln B + (\alpha + \phi_k)\ln k_{t+1} + (\varphi + \phi_h)\ln h_{t+1} \;\Rightarrow \\
g_t^y &= \ln y_{t+1} - \ln y_t = (\alpha + \phi_k)\, g_t^k + (\varphi + \phi_h)\, g_t^h.
\end{aligned}$$

Hvis x_t er konstant må det betyder at $g_t^k = g_t^h \equiv g^e > 0$, og vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned}
g_t^y &= (\alpha + \phi_k)\, g_t^k + (\varphi + \phi_h)\, g_t^h \Leftrightarrow \\
g_t^y &= (\alpha + \phi_k + \varphi + \phi_h)\, g_t^h \Leftrightarrow \\
g_t^y &= g_t^k = g_t^h = g^e > 0
\end{aligned}$$

I delspørgsmålene 2.3 og 2.4 skal du antage at $\phi_k = \phi_h = 0$.

2.3

Vis at transitionsligningerne for fysisk kapital pr. arbejder og human kapital pr. arbejder kan skrives som henholdsvis:

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= \frac{1}{1+n}\left(Bs_K k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} + (1-\delta)k_t\right), &(9)\\
h_{t+1} &= \frac{1}{1+n}\left(Bs_H k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} + (1-\delta)h_t\right). &(10)
\end{aligned}
$$

Svar:

Start fx med ligningerne (2)-(4):

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{s_K B K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} L_t^{\gamma}}{L_{t+1}} + (1-\delta)\frac{K_t}{L_{t+1}},$$

brug nu at $L_{t+1} = (1+n)L_t$:

$$
\begin{aligned}
\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} &= \frac{1}{1+n}\left(\frac{s_K B K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} L_t^{\gamma}}{L_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{L_t}\right) \Leftrightarrow \\
k_{t+1} &= \frac{1}{1+n}\left(Bs_K k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} + (1-\delta)k_t\right)
\end{aligned}
$$

ved at benytte (5) istedet for (4) kan det på samme måde vises at:

$$h_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(Bs_H k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} + (1-\delta)h_t\right).$$

2.4

Beskriv vha. relevante diagrammer, hvordan økonomien udvikler sig over tid for givne initial værdier $k_0 > 0$ og $h_0 > 0$. Giv en intuitiv forklaring på hvorfor økonomien altid konvergerer mod steady-state værdierne:

$$
\begin{aligned}
k^* &= \left(\frac{s_K^{1-\varphi} s_H^{\varphi}}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}, \\
h^* &= \left(\frac{s_K^{1-\alpha} s_H^{\alpha}}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}},
\end{aligned}
$$

og derfor ikke oplever vedvarende vækst i BNP pr. arbejder på trods af, at tilstedeværelsen af human kapital vil forstærke fysisk-kapital akkumulation.

Svar 1:

Her kan man starte med at tegne et fasediagram som i Figur 6.2 fra pensumbogen (s. 163), hvor man så starter et tilfældigt sted ($k_0 > 0$ og $h_0 > 0$) og viser, at der er konvergens mod k^* og h^* (altså der hvor de såkaldte nullclines krydser hinanden). Se et eksempel i Figur 2.4a nedenfor. Man kan derefter yderligere vise tidsprofilerne for kapital pr. arbejder, human kapital pr. arbejder og BNP pr. arbejder. Hvis man har tegnet stien som i fasediagrammet i Figur 2.4a, ser tidsprofilerne ud som i Figurerne 2.4b-2.4d.

[Figurerne 2.4a-2.4d her]

Svar 2:

Grunden til at vi oplever konvergens i dette tilfælde er, at der er DRS til k_t og h_t i pr.-arbejder produktionsfunktionen. Dvs. man kan populært sige, at krydseffekterne ikke er stærke nok til opveje for de aftagende marginal produkter og pga. udtynding (n) og nedslidning (δ) vil økonomien konvergere mod en steady state, hvor der ikke er vækst i BNP pr. arbejder.

I delspørgsmålene 2.5-2.7 skal du antage at $\phi_k + \phi_h = \gamma$.

2.5

Vis at man kan skrive en transitionsligning i fysisk-human kapital forholdet, $x_t \equiv k_t/h_t$, som:

$$x_{t+1} = \frac{Bs_K x_t^{\alpha+\phi_k} + (1-\delta)x_t}{Bs_H x_t^{\alpha+\phi_k} + 1 - \delta}. \tag{11}$$

Svar:

Brug ligningerne (9) og (10)

$$\begin{aligned}
\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} &= \frac{\frac{1}{1+n}\left(Bs_K k_t^{\alpha+\phi_k} h_t^{\varphi+\phi_h} + (1-\delta)k_t\right)}{\frac{1}{1+n}\left(Bs_H k_t^{\alpha+\phi_k} h_t^{\varphi+\phi_h} + (1-\delta)h_t\right)} \Leftrightarrow \\
\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} &= \frac{Bs_K k_t^{\alpha+\phi_k} h_t^{\varphi+\phi_h-1} + (1-\delta)\frac{k_t}{h_t}}{Bs_H k_t^{\alpha+\phi_k} h_t^{\varphi+\phi_h-1} + (1-\delta)} \\
\text{brug nu } \phi_h &= 1-\alpha-\varphi-\phi_k \\
\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} &= \frac{Bs_K \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha+\phi_k} + (1-\delta)\frac{k_t}{h_t}}{Bs_H \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha+\phi_k} + 1 - \delta} \Leftrightarrow \\
x_{t+1} &= \frac{Bs_K x_t^{\alpha+\phi_k} + (1-\delta)x_t}{Bs_H x_t^{\alpha+\phi_k} + 1 - \delta}
\end{aligned}$$

2.6

Vis at steady-state værdien for fysisk-human kapital forholdet er givet ved:

$$x^* = \frac{s_K}{s_H},$$

og vis herefter, at x_t altid konvergerer mod x^*. Det oplyses, at betingelsen at $\lim_{x\to\infty} \frac{\partial x_{t+1}}{x_t} < 1$ faktisk er opfyldt (og du behøver derfor ikke undersøge denne).

Svar 1:

$x^* = x_{t+1} = x_t$ findes udfra ligning (11)

$$\begin{aligned}
x &= \frac{Bs_K x^{\alpha+\phi_k} + (1-\delta)x}{Bs_H x^{\alpha+\phi_k} + 1 - \delta} \Leftrightarrow \\
\left(Bs_H x^{\alpha+\phi_k} + 1 - \delta\right) x &= Bs_K x^{\alpha+\phi_k} + (1-\delta)x \Leftrightarrow \\
Bs_H x^{\alpha+\phi_k+1} &= Bs_K x^{\alpha+\phi_k} \Leftrightarrow \\
x &= \frac{s_K}{s_H}
\end{aligned}$$

Svar 2:

For global konvergens er det tilstrækkeligt at vise følgende:

1) Transitionsligningen går igennem (0,0). Kan indses ved at sætte $x_t = 0 \Rightarrow x_{t+1} = 0$

2) Positiv hældning: $\frac{\partial x_{t+1}}{x_t} > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_{t+1}}{x_t} &= \frac{\begin{array}{c}\left(Bs_H x^{\alpha+\phi_k} + 1 - \delta\right)\left(\left(\alpha + \phi_k\right) Bs_K x^{\alpha+\phi_k-1} + (1-\delta)\right) - \\ \left(Bs_K x^{\alpha+\phi_k} + (1-\delta)x\right)\left(\alpha + \phi_k\right) Bs_H x^{\alpha+\phi_k-1}\end{array}}{\left(Bs_H x^{\alpha+\phi_k} + 1 - \delta\right)^2} \Leftrightarrow \\
\frac{\partial x_{t+1}}{x_t} &= (1-\delta)\frac{s_K(\alpha+\phi_k)x_t^{\alpha+\phi_k-1} + (1-\delta) + (1-\alpha-\phi_k)s_H x_t^{\alpha+\phi_k}}{\left(Bs_H x^{\alpha+\phi_k} + 1 - \delta\right)^2} > 0
\end{aligned}$$

3a) $\lim_{x\to 0} \frac{\partial x_{t+1}}{x_t} > 1$. Eftersom $\alpha + \phi_k < 1$ ved vi at $\lim_{x\to 0} \frac{\partial x_{t+1}}{x_t} = \infty$ fra leddet $s_K(\alpha + \phi_k)x_t^{\alpha+\phi_k-1}$ ovenfor.

3b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\partial x_{t+1}}{x_t} > 1$ (denne er antaget opfyldt og skal derfor *ikke* vises).

2.7

Vis først, at til ethvert tidspunkt kan de aproksimative vækstrater i fysisk kapital og human kapital skrives som henholdsvis.

$$
\begin{aligned}
g_t^k &= \ln\left(Bs_K\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha+\phi_k-1}+(1-\delta)\right)-\ln(1+n), && (12)\\
g_t^h &= \ln\left(Bs_H\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha+\phi_k}+(1-\delta)\right)-\ln(1+n). && (13)
\end{aligned}
$$

Beskriv dernæst med ord, hvordan disse to vækstrater udvikler sig over tid fra $x_0 < x^*$. Udled til sidst steady-state vækstraten for BNP pr. arbejder og forklar hvorfor denne afhænger negativt af befolkningsvækst.

Svar 1:

Start med

$$
g_t^k \equiv \ln\frac{k_{t+1}}{k_t},
$$

udnyt at $k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(Bs_K k_t^{\alpha+\phi_k} h_t^{\varphi+\phi_h} + (1-\delta)k_t\right)$:

$$
g_t^k = \ln\left(\frac{1}{1+n}\left(Bs_K k_t^{\alpha+\phi_k-1} h_t^{\varphi+\phi_h} + (1-\delta)\right)\right),
$$

brug nu $\phi_h = 1-\alpha-\varphi-\phi_k$

$$
\begin{aligned}
g_t^k &= \ln\left(\frac{1}{1+n}\left(Bs_K k_t^{\alpha+\phi_k-1} h_t^{\varphi+1-\alpha-\varphi-\phi_k} + (1-\delta)\right)\right) \Leftrightarrow\\
g_t^k &= \ln\left(\frac{1}{1+n}\left(Bs_K k_t^{\alpha+\phi_k-1} h_t^{1-\alpha-\phi_k} + (1-\delta)\right)\right) \Leftrightarrow\\
g_t^k &= \ln\left(\frac{1}{1+n}\left(Bs_K \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha+\phi_k-1} + (1-\delta)\right)\right) = \ln\left(Bs_K\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha+\phi_k-1}+(1-\delta)\right)-\ln(1+n)
\end{aligned}
$$

på samme måde kan $g_t^h \equiv \ln\frac{h_{t+1}}{h_t}$ udledes til:

$$
g_t^h = \ln\left(\frac{Bs_H\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha+\phi_k}+(1-\delta)}{1+n}\right) = \ln\left(Bs_H\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha+\phi_k}+(1-\delta)\right)-\ln(1+n)
$$

Svar 2:

Hvis $x_0 < x^*$ ved vi fra analysen i 2.5 og 2.6 at x_t må være stigende over tid (indtil $x_{t+1} = x_t = x^*$). Det må derfor betyde at g_t^h må være stigende pga. leddet $\frac{1}{1+n} B s_H x_t^{\alpha+\phi_k}$ fra ligning (13) og $0 < \alpha + \phi_k < 1$. Fra ligning (12) ser vi at g_t^k må være faldende pga. leddet $\frac{1}{1+n} B s_K x_t^{\alpha+\phi_k-1}$ og $\alpha + \phi_k - 1 < 0$.

Svar 3:

I SS er $x^* = \frac{k_t}{h_t} = \frac{s_K}{s_H}$, hvilket kan indsættes i ligning (12) eller (13):

$$\begin{aligned} g_t^k &= \ln\left(\frac{1}{1+n}\left(B s_K \left(\frac{s_K}{s_H}\right)^{\alpha+\phi_k-1} + (1-\delta)\right)\right) \Leftrightarrow \\ g_t^k &= \ln\left(\frac{1}{1+n}\left(B s_K^{\alpha+\phi_k} s_H^{\varphi+\phi_h} + (1-\delta)\right)\right) = g_t^h. \end{aligned}$$

Fra svaret til delspørgsmål 2.2 ved vi at $g_t^y = g_t^k = g_t^h$ i steady state. Denne afhænger negativ af befolkningsvækst eftersom eksternaliteten er modelleret vha. pr. arbejder variable. Derfor er der ingen skalaeffekter som i kapitel 8, fx.

2.8

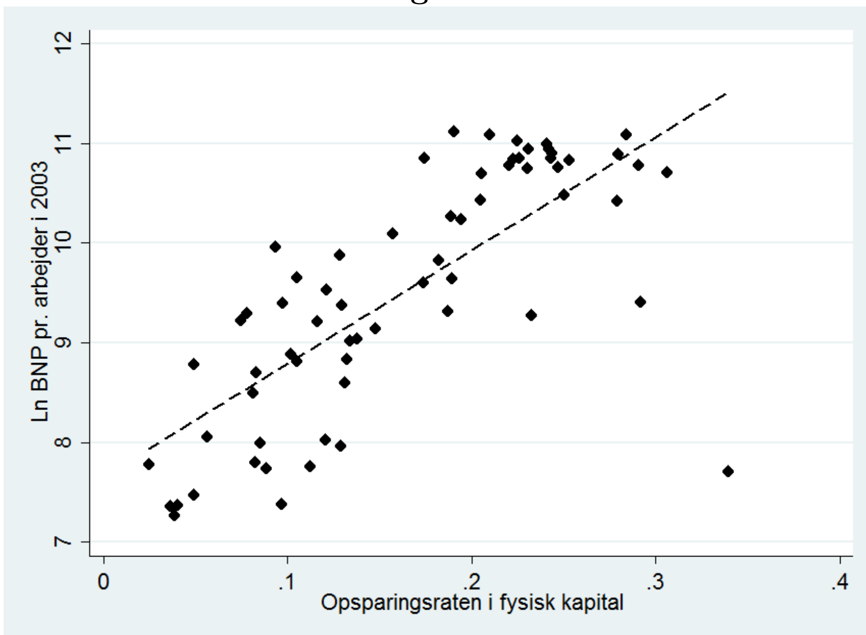
Diskuter med udgangspunkt i Figurerne 1 og 2 (på næste side), der viser den simple sammenhæng mellem BNP pr. arbejder i 2003 på den ene side og opsparingsrater i henholdsvis fysisk kapital og human kapital på den anden side, rimeligheden i den specifikke antagelse til delspørgsmålene 2.5-2.7 (dvs. $\phi_k = \phi_h = \gamma$). Inddrag også i denne diskussion generelle betragtninger omkring opsparingsrater i fysisk kapital og velstandsforskelle på tværs af land på lang sigt (jvf. resultater fra forskellige teoretiske modeller fra pensum).

Svar:

Dette er et mere åben spørgsmål, hvor der ikke nødvendigvis kun er ét korrekt svar. Figurerne viser, at der er positiv sammenhæng ml. opsparingsraterne og *niveauet* af BNP pr. arbejder i 2003. Det understøtter ikke nødvendigvis vores antagelse i 2.5-2.7, at $\phi_k = \phi_h = \gamma$, fordi her fandt vi ud af, at opsparingsraterne har positive effekter på *vækstraten* i BNP pr. arbejder. På den anden side er figurerne ikke nok til at afvise vores antagelse, eftersom der også sagtens (samtidig) kan være en positiv sammenhæng ml. opsparingsraterne og BNP pr. arbejder vækst i data (det kan vi bare ikke se om er tilfældet hér).

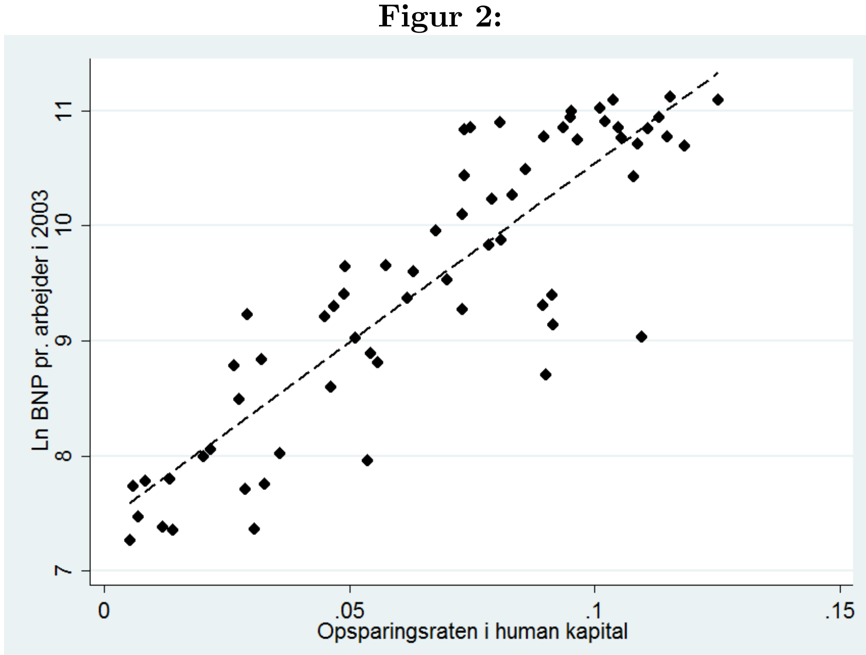
Generelt så vil Solowmodellerne kapitel 3-7 tilsige, at opsparingsraten i fysisk kapital spiller en mindre rolle i forståelsen af velstandsforskelle på lang sigt på tværs af lande, sammenlignet med fx de endogene vækst modeller (kapital 8). Det skyldes naturligvis, at i kapitel 3-7 har opsparingsraten kun en niveau effekt på BNP pr. arbejder, hvorimod i en AK modellen er der en vaksteffekt.

Figur 1:



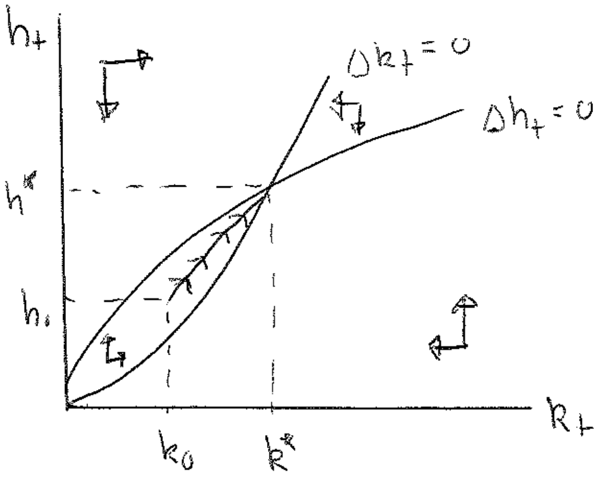
Noter: 1. aksen angiver opsparingsraten i fysisk kapital, s_K, og 2. aksen angiver ln BNP pr. arbejder i 2003. Den stiplede linje er den bedste rette linje (OLS). Observationerne er lande.

Figur 2:

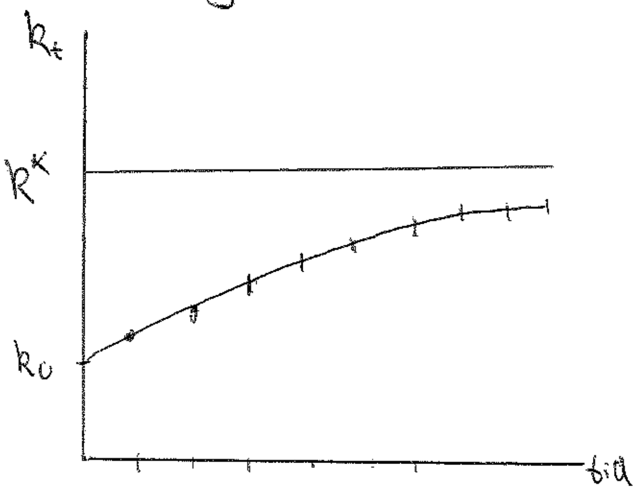


Noter: 1. aksen angiver opsparingsraten i human kapital, s_H, og 2. aksen angiver ln BNP pr. arbejder i 2003. Den stiplede linje er den bedste rette linje (OLS). Observationerne er lande.

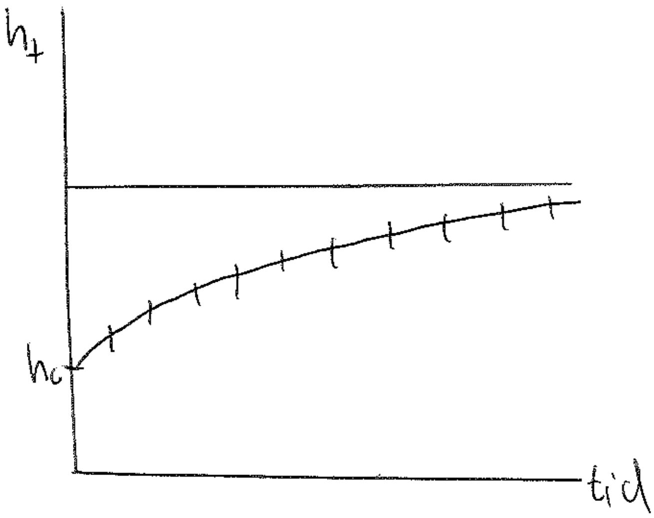
Figur 2.4a



Figur 2.4b



Figur 2.4c



Figur 2.4d