Eksamen i Matematik A, 8. juni 2020
Rettevejledning

Alle referencer er til lærebogen i kurset: Sydsæter, Hammond, Strøm og Carvajal: "Essential Mathematics for Economic Analysis". Fifth edition. Pearson, 2016.

Opgave 1

Betragt funktionen

$$f(x) = x^2 e^{-2x} \text{ for alle } x \in \mathbb{R}.$$

1) Vis, at $f'(x) = (2x - 2x^2)e^{-2x}$ og $f''(x) = (4x^2 - 8x + 2)e^{-2x}$

   Løsning:

   Ved brug af produktreglen og kædereglen for differentiation fås:

$$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2 \cdot (-2)e^{-2x} = (2x - 2x^2)e^{-2x}$$

$$f''(x) = (2 - 4x)e^{-2x} + (2x - 2x^2) \cdot (-2)e^{-2x}$$
$$= (4x^2 - 8x + 2)e^{-2x}$$

2) Bestem Taylorpolynomiet af anden orden for f omkring punktet $x = 0$.

   Brug det til at finde en tilnærmet værdi af funktionsværdien $f(0{,}01)$.

   Løsning:

   Kalder vi polynomiet $P_2(x)$, har vi

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2}f''(0)(x - 0)^2$$

   Vi udregner $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, der ved indsætning giver

$$P_2(x) = 0 + 0(x - 0) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x - 0)^2 = x^2$$

   En tilnærmet værdi af $f(0{,}01)$ er $P_2(0{,}01) = 0{,}01^2 = 0{,}0001$

3) Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{e^x - 1}$$

Løsning:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{e^x - 1} = \frac{"0"}{0}$$

Derfor bruger vi L'Hôpitals regel og differentierer tæller og nævner hver for sig:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{e^x} = \frac{f''(0)}{e^0} = \frac{2}{1} = 2$$

4) Vis, at for $x > 0$ er elasticiteten af f givet ved

$$El_x\, f(x) = 2 - 2x$$

Løsning:

$$El_x\, f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{(2x - 2x^2)e^{-2x}}{x^2 e^{-2x}} = \frac{2x - 2x^2}{x} = 2 - 2x,$$

som ønsket.

Opgave 2

Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x} - 1)^n = 4 + 4 \cdot (e^{2x} - 1) + 4 \cdot (e^{2x} - 1)^2 + 4 \cdot (e^{2x} - 1)^3 + \cdots$$

hvor x er en reel konstant.

1) Vis, at den uendelige række er konvergent, hvis og kun hvis

$$x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

Løsning:

Den uendelige række er en geometrisk række, hvor første led er 4 og kvotienten er $k = e^{2x} - 1$.

Derfor er rækken konvergent, hvis og kun hvis

$$|k| < 1 \Leftrightarrow -1 < k < 1 \Leftrightarrow -1 < e^{2x} - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < e^{2x} < 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} < 2 \Leftrightarrow 2x < \ln(2) \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2),$$

som ønsket.

2) Bestem en forskrift for sumfunktionen f, der er givet ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x} - 1)^n \quad \text{for alle} \quad x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

Løsning:

Ved hjælp af sumformlen for uendelige geometriske rækker fås for $x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$:

$$f(x) = \frac{a}{1-k} = \frac{4}{1-(e^{2x}-1)} = \frac{4}{2-e^{2x}}$$

3) Vis, at f er strengt voksende i definitionsmængden, og find værdimængden for f.

Løsning:

$$f'(x) = \frac{0 - 4(-2e^{2x})}{(2-e^{2x})^2} = \frac{8e^{2x}}{(2-e^{2x})^2}$$

Både tæller og nævner er positive for $x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$, så $f'(x) > 0$ for $x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$. Derfor er f strengt voksende i definitionsmængden.

Værdimængde:

$$f(x) \to \frac{4}{2-0} = 2 \ når \ x \to -\infty$$

$f(x)$ vil dog aldrig antage værdien 2.

Når x går mod $\frac{1}{2} \cdot \ln(2)$ fra venstre, vil e^{2x} gå mod $e^{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(2)} = e^{\ln(2)} = 2$ fra venstre.

Mens tælleren i $f(x)$ er konstant 4, vil nævneren altså gå mod 0 fra højre, og derfor vil $f(x)$ gå mod uendelig, når x går mod $\frac{1}{2} \cdot \ln(2)$ fra venstre.

Da f er kontinuert og strengt voksende, er værdimængden for f derfor intervallet

$$(2, \infty).$$

Opgave 3

Betragt funktionen f givet ved forskriften

$$f(x,y) = x^2 - 2 \cdot \ln(2x) - y^3 + \frac{3}{2} \cdot y^2 + 6y - 5, \text{ hvor } x > 0 \text{ og } y \in \mathbb{R}.$$

1) Bestem de partielle afledede

$$f_1'(x,y) \quad \text{og} \quad f_2'(x,y)$$

Løsning:

$$f_1'(x,y) = 2x - 2 \cdot \frac{2}{2x} = 2x - \frac{2}{x}$$

$$f_2'(x,y) = -3y^2 + \frac{3}{2} \cdot 2y + 6 = -3y^2 + 3y + 6$$

2) Bestem de fire anden-ordens partielle afledede for f og opstil Hessematricen (*the Hessian Matrix*) $f''(x,y)$.

Løsning:

$f''_{11}(x,y) = 2 + \frac{2}{x^2}$, $f''_{12}(x,y) = f''_{21}(x,y) = 0$, $f''_{22}(x,y) = -6y + 3$

Hermed er

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{x^2} & 0 \\ 0 & -6y + 3 \end{pmatrix}$$

3) Vis, at f har de to kritiske punkter $(x,y) = (1,-1)$ og $(x,y) = (1,2)$, og at der ikke er andre kritiske punkter.

Løsning:

Vi finder de punkter, i hvilke begge første-ordens partielle afledede er nul:

$2x - \frac{2}{x} = 0$ giver ved multiplikation med x, at
$2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
Da $x > 0$, forkastes $x = -1$, så $x = 1$ er eneste løsning.

$-3y^2 + 3y + 6 = 0$ løses ved hjælp af diskriminantmetoden:

$$D = 3^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 6 = 81$$

og derfor

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-3 \pm 9}{-6} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Dermed fås de to kritiske punkter

$(x,y) = (1,-1)$ og $(x,y) = (1,2)$, og der er ikke andre.

4) Afgør for hvert af de kritiske punkter, om det er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt.

Løsning:

Hertil bruges anden-afledet testen for lokale ekstrema, Sætning 13.3.1:

For $(x, y) = (1, -1)$ udregnes:

$A = f''_{11}(1, -1) = 4, \qquad B = f''_{12}(1, -1) = 0, \qquad C = f''_{22}(1, -1) = 9$

Hermed er $A > 0$ og $AC - B^2 = 36 > 0$, så $(x, y) = (1, -1)$ er et lokalt minimumspunkt.

For $(x, y) = (1,2)$ udregnes tilsvarende

$A = f''_{11}(1,2) = 4, \qquad B = f''_{12}(1,2) = 0, \qquad C = f''_{22}(1,2) = -9$

Hermed er $AC - B^2 = -36 < 0$, så $(x, y) = (1,2)$ er et saddelpunkt.

5) Afgør, om f har nogen globale ekstremumspunkter.

Løsning:

f har, jf. 4), ikke noget globalt maksimumspunkt, da de to eneste kandidater til et sådant punkt viste sig at være hhv. et lokalt minimumspunkt og et saddelpunkt.

Sættes for eksempel $x = 1$, fås

$$f(1, y) = 1 - 2 \cdot \ln(2) - y^3 + \frac{3}{2} \cdot y^2 + 6y - 5 \to -\infty \text{ for } y \to \infty,$$

hvilket udelukker, at der er et globalt minimumspunkt.

Ved at lade y gå mod minus uendelig i dette udtryk, kan man også igen udelukke, at der er et globalt maksimumspunkt.

f har altså ingen globale ekstremumspunkter.

Rettevejledning slut