Skriftlig eksamen i Matematik A. Sommeren 2016

Torsdag den 18. august 2016

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 S-1A rx

Skriftlig eksamen i Matematik A

Torsdag den 18. august 2016

---

2 sider med 3 opgaver.
Løsningstid: 2 timer.
Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Integration ved substitution.

(1) Forklar, hvorledes man udregner et ubestemt integral af formen

$$\int f\Big(g(x)\Big)g'(x)\,dx,$$

hvor f er en kontinuert funktion, og g er en C^1-funktion på et åbent interval $I \subseteq \mathbf{R}$.

(2) Udregn følgende ubestemte integraler:

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx,\ \int e^{\sin x}\cos x\,dx,\ \int \frac{2x}{2+x^2}\,dx$$

og

$$\int \frac{x^{n-1}}{2+x^n}\,dx, \quad \text{hvor} \quad n \in \mathbf{N} \ \text{ og } \ 2+x^n \neq 0.$$

(3) Vis, at det for ethvert $a \in \mathbf{R}$ gælder, at

$$2\int_0^a e^{x^2}x\,dx = \int_0^{a^2} e^x\,dx.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = 3x + xy + x^2 + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

(6) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1,1,f(1,1)\big)$.

Opgave 3. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2y + y^3 - xy^2.$$

(1) Vis, at funktionen f er homogen, og angiv homogenitetsgraden.

(2) Er funktionen f homotetisk?

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Godtgør, at $(1,1)$ er en løsning til ligningen $f(x,y) = 1$. Vis dernæst, at der findes en omegn $U(0)$ af $x = 1$, så den variable y er givet implicit som en funktion $y = y(x)$ i denne omegn. Bestem desuden differentialkvotienten $y'(1)$.

(5) Vis, at der findes en omegn $U(1)$ af $x = 1$, hvor funktionen $y = y(x)$ er aftagende.