Skriftlig eksamen i Matematik B. Sommeren 2016

Tirsdag den 23. august 2016

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 S-1B rx

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 23. august 2016

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} s^2 & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem dernæst de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

(2) Bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er positiv definit.

(3) Vis, at matricen $A(s)$ ikke er negativ definit for noget tal $s \in \mathbf{R}$.

(4) Opstil det karakteristiske polynomium for matricen $A(-1)$, og bestem de karakteristiske rødder.

(5) Bestem egenværdierne for matricen $A(-1)$, og godtgør, at denne matrix er indefinit.

(6) Bestem nulrummet

$$N(A(-1)) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid A(-1)x = \underline{0}\}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = 2x^3 + 24y - 6xy^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Afgør, for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

Betragt den kompakte mængde

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}.$$

(6) Bestem integralet

$$I = \int_T f(x,y)\, d(x,y).$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = x^3 e^t.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem værdimængden for enhver af de maksimale løsninger til differentialligningen $(*)$.

Opgave 4. Vi betragter ligningssystemerne

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4w = 1 \\ x + 3y - 2z + w = 3 \end{cases}$$

og

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4w = 1 \\ x + 3y - 2z + w = 3 \\ 2x + y + 5z - w = s^2 - 1 \end{cases}, \quad \text{hvor } s \in \mathbf{R}.$$

(1) Løs ligningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4w = 1 \\ x + 3y - 2z + w = 3 \end{cases}.$$

(2) Løs – for ethvert $s \in \mathbf{R}$ – ligningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4w = 1 \\ x + 3y - 2z + w = 3 \\ 2x + y + 5z - w = s^2 - 1 \end{cases}.$$

En hyperplan H i vektorrummet $\mathbf{R}^4$ har ligningen

$$x + 3y - 7z + 5w = 0.$$

(3) Godtgør, at hyperplanen H er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$, og bestem tre vektorer b, c og d, så

$$H = \text{span}\{b, c, d\}.$$