Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 S-1B ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Torsdag den 12. juni 2014

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi den symmetriske 3×3 matrix

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og specielt skal vi se på matricen

$$A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hvor $s = 3$.

(1) Udregn determinanten for matricen $A(3)$, og godtgør dernæst, at $A(3)$ er regulær.

Løsning. Vi ser, at $\det A(3) = -8$, og dette viser, at $A(3)$ er regulær.

(2) Bestem egenværdierne og egenrummene for matricen $A(3)$.

Løsning. Vi finder først, at det karakteristiske polynomium P for matricen $A(3)$ er givet ved forskriften

$$P(t) = \det\Big(A(3) - tE\Big) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 3 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 3 & 0 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$(1-t)^3 - 9(1-t) = (1-t)\Big((1-t)^2 - 9\Big),$$

hvoraf man ser, at de karakteristiske rødder er $t_1 = -2, t_2 = 1$ og $t_3 = 4$. Altså har matricen $A(3)$ egenværdierne $-2, 1$ og 4.

De tilhørende egenrum er

$$V(-2) = N\Big(A(3) + 2E\Big) = \operatorname{span}\{(-1, 0, 1)\},$$

$$V(1) = N\Big(A(3) - E\Big) = \operatorname{span}\{(0, 1, 0)\},$$

og

$$V(4) = N\Big(A(3) - 4E\Big) = \operatorname{span}\{(1, 0, 1)\}.$$

(3) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^{-1}A(3)Q.$$

Løsning. Vi finder, at

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ og } Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(4) Opskriv en forskrift for den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, der er givet ved den symmetriske matrix $A(3)$, og godtgør, at K er indefinit.

Løsning. Vi ser umiddelbart, at

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3.$$

Da matricen $A(3)$ er indefinit (egenværdierne har forskellige fortegn), er den kvadratiske form K indefinit.

(5) Udregn for ethvert $s \in \mathbf{R}$ de ledende hovedunderdeterminanter for matricen $A(s)$. Bestem dernæst de $s \in \mathbf{R}$, så matricen $A(s)$ er positiv definit.

Løsning. Vi ser, at $D_1 = 1, D_2 = 1$ og $D_3 = 1 - s^2$. Da ser vi også, at $A(s)$ er positiv definit, når og kun når $-1 < s < 1$.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \,\wedge\, y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in D : f(x,y) = -2\ln x + \ln y + x^2 - y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Løsning. Vi finder straks, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{x} + 2x \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} - 1.$$

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Det eneste stationære punkt for funkktionen f er $(1,1)$, thi $x > 0$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$. Vis dernæst, at Hessematricen $H(x,y)$ er indefinit overalt på definitionsmængden D.

Løsning. Vi får, at f har Hessematricen

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} + 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Det er klart, at $H(x,y)$ er indefinit overalt på definitionsmængden D, idet diagonalelementerne har forskellige fortegn.

For ethvert $\alpha > 0$ definerer vi funktionen $g_\alpha : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ ved udtrykket

$$\forall\, x > 0 : g_\alpha(x) = f(x, \alpha x).$$

(4) Vis, at for ethvert $\alpha > 0$ er funktionen g_α strengt konveks på hele $\mathbf{R}_+$.

Løsning. Vi får, at

$$g_\alpha(x) = -2\ln x + \ln(\alpha x) + x^2 - \alpha x = \ln\alpha - \ln x + x^2 - \alpha x,$$

så

$$g'_\alpha(x) = -\frac{1}{x} + 2x - \alpha \text{ og } g''_\alpha(x) = \frac{1}{x^2} + 2.$$

Da $g''_\alpha(x) > 0$ overalt på $\mathbf{R}_+$, er funktionen $g_\alpha(x)$ strengt konveks.

(5) Vis, at for ethvert $\alpha > 0$ har funktionen g_α netop et stationært punkt $x^*(\alpha)$, og vis, at

$$x^*(\alpha) \to \infty \text{ for } \alpha \to \infty.$$

Løsning. Idet $x > 0$, ser vi, at

$$g'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} + 2x - \alpha = 0 \Leftrightarrow 2x - \alpha - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - \alpha x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8}}{4},$$

thi $x > 0$. Dette viser, at funktionen g_α har netop et stationært punkt $x^*(\alpha)$, og endvidere ser vi, at

$$x^*(\alpha) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8}}{4} \to \infty \text{ for } \alpha \to \infty.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \left(\frac{6t^5}{2 + t^6}\right) x = \frac{\cos(t)}{2 + t^6}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser, at

$$\int \frac{6t^5}{2 + t^6}\, dt = \int \frac{1}{2 + t^6}\, d(2 + t^6) = \ln\left(2 + t^6\right) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$, så

$$x = Ce^{-\ln(2+t^6)} + e^{-\ln(2+t^6)} \int e^{\ln(2+t^6)} \frac{\cos(t)}{2 + t^6}\, dt =$$

$$Ce^{-\ln(2+t^6)} + e^{-\ln(2+t^6)} \int \left(2+t^6\right)\frac{\cos(t)}{2+t^6}\,dt = \frac{C}{2+t^6} + \frac{\sin t}{2+t^6}.$$

(2) Godtgør, at det for enhver maksimal løsning $x = x(t)$ til $(*)$ gælder, at

$$x(t) \to 0 \text{ for } t \to \pm\infty.$$

Løsning. Dette er klart, da funktionen sinus er begrænset.

(3) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 2014$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at $C = 4028$, så

$$\tilde{x}(t) = \frac{4028}{2+t^6} + \frac{\sin t}{2+t^6}.$$

(4) Udregn differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0)$$

for en vilkårlig maksimal løsning $x = x(t)$ til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser straks, at

$$\frac{dx}{dt}(0) = \frac{1}{2}.$$

Opgave 4. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x,y) \neq (0,0) : f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

(1) Vis, at betingelsen

$$\forall (x,y) \neq (0,0)\, \forall t > 0 : f(tx,ty) = \ln t + f(x,y)$$

er opfyldt.

Løsning. Ved direkte udregning får vi, at

$$f(tx,ty) = \ln\left(\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}\right) = \ln\left(t\sqrt{x^2+y^2}\right) =$$

$$\ln t + \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \ln t + f(x,y).$$

(2) Vis, at funktionen f er homotetisk, men ikke homogen.

Løsning. På baggrund af det ovenstående resultat er det klart, at funktionen f ikke er homogen.

Lad os nu antage, at $f(x,y) = f(u,v)$. Da får vi straks, at betingelsen

$$\forall\, t > 0 : f(tx,ty) = \ln t + f(x,y) = \ln t + f(u,v) = f(tu,tv)$$

er opfyldt, og dette viser, at f er homotetisk.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \neq (0,0)$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

(4) Vis, at udsagnet

$$\forall\,(x,y) \neq (0,0) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

er sandt.

(Man siger så, at funktionen f er harmonisk på mængden $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.)

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

hvoraf man finder, at udsagnet

$$\forall\,(x,y) \neq (0,0) : \Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

er sandt.

Tilføjelse. Operatoren

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

kaldes Laplaceoperatoren.