Eksamen på Økonomistudiet sommeren 2017
Sandsynlighedsteori og Statistik
2. årsprøve
21. august, 2017
(3-timers prøve med hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 5 sider (forsiden inklusiv).

Opgaven består af tre delopgaver, som alle skal besvares. De tre opgaver kan regnes uafhængigt af hinanden. Opgave 1 og 2 indgår tilsammen med samme vægt som opgave 3.

Opgave 1

X og Y er uafhængige stokastiske variable fordelt på 0 og 1.
P(X=0)=0,3; P(X=1)=0,7 og P(Y=0)=0,4; P(X=1)=0,6. (OBS P(Y=1))

1. Angiv den simultane fordeling for (X,Y).

	Y=0	Y=1
X=0	0,12	0,18
X=1	0,28	0,42

Lad nu $Z_1 = X + Y$ og $Z_2 = X - Y$

2. Udregn den betingede middelværdi og den betingede varians af X givet $Z_1 = 1$, dvs. udregn $E(X|Z_1 = 1)$ og $V(X|Z_1 = 1)$.

$P(X = 0|X + Y = 1) = \frac{P(X=0,X+Y=1)}{P(X+Y=1)} = \frac{P(X=0,Y=1)}{P(X+Y=1)} = \frac{0,18}{0,28+0,18} = 0,39$

$P(X = 1|X + Y = 1) = ...0,61$

E=0*0,39+1*0,61=0,61

E$^2 = 0^2 * 0,39 + 1^2 * 0,61 = 0,61$

V=0,61-0,61$^2 = 0,23$

3. Udregn middelværdi og varians af Z_1 og Z_2.

0	0,12		
1	0,46		
2	0,42		

-1	0,18		
0	0,54		
1	0,28		

$E(Z_1) = 1,3 \quad V(Z_1) = 0,45 \quad E(Z_2) = 0,1 \quad V(Z_2) = 0,45$

4. Er Z_1 og Z_2 uafhængige? Begrund svaret.

P$(Z_1 = 0, Z_2 = -1) = P(X + Y = 0, X - Y = -1) = 0$.Så afhængige

Opgave 2

Forretning A's månedlige omsætning i 1.000 kr. kan beskrives med en normalfordeling med middelværdi 50 og en spredning (standard afvigelse) på 5.

Tilsvarende kan den månedlige omsætning hos konkurrenten B beskrives med en normalfordeling der har middelværdi 52 og også en spredning på 5.

De to forretninger er konkurrenter og deres korrelationskoefficient er på -0,5.

Så vi har at $X \sim N(50, 5^2)$ $\quad Y \sim N(52, 5^2)$. Hvor X og Y repræsenterer omsætningen hos henholdsvis A og B. korrelationskoefficienten $\rho = -0,5$

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) * V(Y)}} = -0,5.$$

1. Angiv et symmetrisk interval omkring 50, hvor omsætningen fra forretning A med 95% vil ligge.

   50 +- 1,96*5 stort set 40 til 60

   Lad Z=X+Y

2. Angiv fordelingen for Z.

   $V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 * cov(X,Y) = V(X) + V(Y) + 2 * (-0,5) * \sqrt{V(X) * V(Y)} =$

   $5^2 + 5^2 - 5^2 = 5^2$. Så $Z \sim N(102, 5^2)$

3. Udregn P(Z>110)=0,05 (Brug Excel)

   I de sidste 12 måneder er det registreret at antallet af måneder hvor det samlede salg overstiger 110 er 5.

   T=antal måneder der overstiger 110. T bliver BIN(12;0,05)

4. Hvad er sandsynligheden for at dette indtræffer. Begrund dine udregninger.

   P(T=>5)=1-P(T<=4)=0,000184

Opgave 3

Blandt gæster i det københavnske natteliv, har der igennem længere tid været en diskussion om, hvor man hurtigst kunne praje en taxa fra.

Diskussionen går på, om der er forskel på punkt A og B mht. den tid det tager at vente på, at en fri taxa ankommer.

Man beslutter derfor, at foretage en række målinger af ventetiden i min. til den næste frie taxa ankommer.

punkt	antal målinger	sum af ventetider	gns af ventetider
A	15	17,91	1,19
B	17	7,36	0,43

Der opstilles følgende model:
X_i = Ventetid til næste frie taxa ved punkt A. i=1,2,.......15.
Y_i = Ventetid til næste frie taxa ved punkt B. i=1,2,.......17.
Alle målinger antages at være uafhængige.
X_i er $eksp(\lambda_1)$ og Y_i er $eksp(\lambda_2)$
dvs. at tætheden for X er f(x)=$\lambda_1 \exp(-\lambda_1 x)$ og tæthed for Y er g(y)=$\lambda_2 \exp(-\lambda_2 y)$

1. Angiv middelværdierne for X og Y

2. Opskriv likelihood funktionen $L(\lambda_1, \lambda_2)$ og vis at log-likelihood funktionen $log[L(\lambda_1, \lambda_2)]$ bliver

   $15\ln(\lambda_1) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{15} X_i + 17\ln(\lambda_2) - \lambda_2 \sum_{i=1}^{17} Y_i$

   Angiv scorefunktionerne og Hesse-matricen.

   Udregn MLE (maksimumlikelihood estimaterne) for λ_1 og λ_2

   $\lambda_1 : \frac{15}{\lambda_1}$- $\sum_{i=1}^{15} X_i$ $\quad$ $\lambda_2 : \frac{17}{\lambda_2}$ -$\sum_{i=1}^{17} Y_i$

   $\frac{15}{\lambda_1}$- $\sum_{i=1}^{15} X_i$ =0 giver $\widehat{\lambda}_1 = \frac{15}{\sum_{i=1}^{15} X_i} = \frac{1}{\overline{X}}$

   $\widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{1{,}19} = 0{,}84$ $\qquad$ $\widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{0{,}43} = 2{,}31$

   H=$\begin{bmatrix} \frac{-15}{\lambda_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{-17}{\lambda_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$

3. Udregn et konfidensinterval for λ_1.

   $E(-H_1) = \frac{15}{\lambda_1^2}$ $E(-H_1)^{-1} = \frac{\lambda_1^2}{15}$

   0,84+-1,96*$\sqrt{\frac{0{,}84^2}{15}}$ [0,41 - 1,26]

4. Det antages nu at $\lambda_1 = \lambda_2$ .Den fælles parameter kaldes λ

   Opskriv likelihood funktionen $L(\lambda)$ samt log-likelihood funktionen $log[L(\lambda)]$.

   Udregn MLE for λ som kaldes $\widehat{\lambda}$

   $\widehat{\lambda} = \frac{15+17}{\sum_{i=1}^{17} Y_i + \sum_{i=1}^{15} X_i} = 1,27$

5. Angiv den approksimative fordeling for $\widehat{\lambda}$

   normalfordelt med den rigtige middelværdi og varians $\frac{\lambda^2}{15+17}$

6. Test $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = (\lambda)$ mod $H_A : H_0^C$.

   Ved brug af et likelihood ratio test.

15	17,91	0,84	-17,66
17	7,36	2,31	-2,77
32	25,27	1,27	-24,44

   test=(-17,66-2,77)-24,44 ganget med 2 = ca 8 klart signifikant

7. Giv en samlet konklusion.