LM Januar 2017 Løsninger

opg 1

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{Lx = \bar{0}}$:

$x_3 = s$, $x_4 = t$ er frie variable, så

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \iff x_2 = -x_3 - x_4 = -s - t$$
$$x_1 + x_4 = 0 \iff x_1 = -x_4 = -t,$$

Heraf fås

$$N(L): \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}}_{v_2}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$v_1, v_2 = (0,-1,1,0), (-1,-1,0,1)$ er en basis for $N(L)$ og L er ikke injektiv da $N(L) \neq \{\bar{0}\}$

2) $Lv = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, hvorfor

$v \in N(L)$.

Da $v = -v_1 - v_2$ er $\underline{v = (-1,-1)}$ i $N(L)$.

3) $R(L) = \text{span}\{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{basis.}}\} = \mathbb{R}^2$

L $\underline{\text{er}}$ surjektiv.

4) $\mathcal{L}x = y$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_2 \end{array}\right]$$

$x_3 = s$, $x_4 = t$

$x_2 = y_2 - s - t$

$x_1 = y_1 - t$ så

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5) T har matricen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Da $\det(T) \neq 0$ er T bijektiv. Så gælder

$$x \in N(T\mathcal{L}) \Leftrightarrow T(\mathcal{L}x) = \bar{0} \Leftrightarrow \mathcal{L}x = \bar{0}$$
$$\Leftrightarrow x \in N(\mathcal{L})$$

heraf ses, at

$$\underline{\underline{N(T\mathcal{L}) = N(\mathcal{L})}}.$$

Opg 2.

1) $Av = 4v$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Altså er $3 + a = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 1}}$

2) Egenværdierne er $2, 4$, med $rm(2) = 2$
$rm(4) = 1$

Da A sym, er rm = em.

3) A kan diagonaliseres ved

$$A = Q D_A Q^T, \quad D_A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

og $E = QEQ^T$.

Så er

$$(A - 4E)^2 = Q\,(D_A - 4E)^2 Q^T, \text{ hvor}$$

$$(D_A - 4E)^2 = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

Egenværdierne er altså $4, 0$, med $rm(4) = 2$, $rm(0) = 1$.

4) $\det(A) = 2\cdot 2\cdot 4 = 16$ så
$\det(A^{-1}) = \frac{1}{16}$.

5) $A^{-1}v = \frac{1}{4}v = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$.

Opg 3

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\cos(x)\,dx =$$

$$\int \left(\frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)dx$$

$$-\frac{1}{8}\int \left(e^{i(a+b)x} - e^{i(a-b)x} - e^{-i(a-b)x} + e^{-i(a+b)x}\right)\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{\cancel{4}}\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\int e^{i(a+b+1)x} - e^{i(a-b+1)x} - e^{-i(a-b-1)x} + e^{-i(a+b-1)x} + e^{i(a+b-1)x} - e^{i(a-b-1)x} - e^{-i(a-b+1)x} + e^{-i(a+b+1)x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \cos(a+b+1)x - \cos(a-b+1)x - \cos(a-b-1)x + \cos(a+b-1)x\,dx$$

For $a-b+1$, $a-b-1$ og $a+b-1 \neq 0$ fås da

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\sin(a+b+1)x}{a+b+1} - \frac{\sin(a-b+1)x}{a-b+1} - \frac{\sin(a-b-1)x}{a-b-1} + \frac{\sin(a+b-1)}{a+b-1} \right) + k.$$

Da $\cos(0) = 1$ skal, hvis f.ex. $a-b+1=0$, det pågældende led erstattes med x i løsningen, i dette tilfælde.
Analogt for de andre muligheder.
(Då a og b er positive ved vi at $a+b+1 \neq 0$.)

2) $(2+i)z^2 - (3+i) = (1+2i)z^2 \iff$

$$(1-i)z^2 = 3+i \iff$$

$$z^2 = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \iff$$

$$z^2 = \frac{3-1+3i+i}{1+1} \iff$$

$$z^2 = 1+2i$$

Vi skriver $z = x+iy$ så $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

Da fås $x^2 - y^2 = 1$ og $2xy = 2$.
Da er hverken x eller y lig 0, så

$y = \frac{1}{x}$ indsættes:

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \iff x^4 - x^2 - 1 = 0$$

Med $u = x^2 > 0$ fås

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Da $u > 0$ forkastes $-$, så

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Da fås

$$z = x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\right).$$

Opg 4

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (g(x))^n \quad \text{med}$$

$$g(x) = \frac{1}{e^{2ax} - 4e^{ax} + 4} = \frac{1}{(e^{ax}-2)^2}, \quad \underline{a>0}.$$

1) Veldefineret for $|g(x)| < 1$, dvs

$$\frac{1}{(e^{ax}-2)^2} < 1 \iff$$

$$(e^{ax}-2)^2 > 1 \iff$$

$$e^{ax} - 2 < -1 \quad \text{eller} \quad e^{ax} - 2 > 1, \text{ dvs.}$$

$$e^{ax} < 1 \quad \text{eller} \quad e^{ax} > 3.$$

Så fås $ax < 0$, dvs $\underline{x < 0}$ (da $\underline{a > 0}$.)
eller

$$ax > \ln(3), \text{ dvs } \underline{x > \frac{\ln(3)}{a}}.$$

Veldef. for $x \in M =]-\infty; 0[\cup]\frac{\ln(3)}{a}, \infty[$

2) for $x \in M$ er

$$f(x) = \frac{1}{1-g(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(e^{ax}-2)^2}}.$$

3) f har monotoniforhold som g, .

$g(x) = (e^{ax}-2)^{-2}$

$g'(x) = -2(e^{ax}-2)^{-3} \cdot e^{ax} \cdot a$

For $x < 0$ er $e^{ax}-2 < 0$, hvorfor $g'(x) > 0$.

For $x > \frac{\ln(3)}{a}$ er $e^{ax}-2 > 0$, hvorfor

$g'(x) < 0$.

f er altså aftagende i $]\frac{\ln(3)}{a}, \infty[$ og voksende i $]-\infty, 0[$

4)

For $x \to 0^-$ vil $g(x) \to 1$ så $f(x) \to \infty$.
For $x \to \frac{\ln(3)}{a}^+$ vil $g(x) \to 1$ så $f(x) \to \infty$.

For $x \to -\infty$ vil $g(x) \to \frac{1}{4}$ så
$f(x) \to \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

For $x \to \infty$ vil $g(x) \to 0$ så $f(x) \to 1$

Da er $Vm(f) =]1, \infty[$

f er ikke injektiv, da ligningen $f(x)=y$ har to løsninger for $y > \frac{4}{3}$.

5) $$f(x) = y \quad , \quad \underline{y > 1} \iff$$

$$\frac{1}{1-(e^{ax}-2)^{-2}} = y \iff$$

$$1 = y - y(e^{ax}-2)^{-2} \iff$$

$$y(e^{ax}-2)^{-2} = y-1 \iff$$

$$(e^{ax}-2)^{2} = \frac{y}{y-1} \iff$$

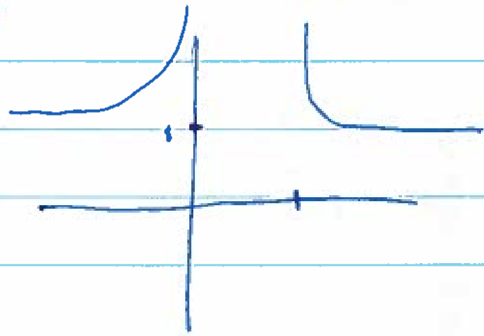
(*) $$e^{ax}-2 = \pm\sqrt{\frac{y}{y-1}} \iff$$

$$e^{ax} = 2 \pm \sqrt{\frac{y}{y-1}} \iff$$

$$x = \frac{1}{a}\ln\left(2 \pm \sqrt{\frac{y}{y-1}}\right).$$

(*) For $1 < y \leq \frac{4}{3}$ bortfalder − løsningen

(se graf.)



6) Netop een løsning for $y \in]1, \frac{4}{3}]$