Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 V-1A rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Onsdag den 17. februar 2016

Rettevejledning

Opgave 1. Homogene funktioner.

Lad $C \subseteq \mathbf{R}^n$, for et givet $n \in \mathbf{N}$, være en kegle, hvilket betyder, at betingelsen

$$\forall\, t > 0 \,\forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C : tx = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \in C$$

er opfyldt.

(1) Vis, at mængderne

$$C_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \wedge x_3 > 0\}$$

og

$$C_2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 \geq 0 \wedge x_2 > 0 \wedge x_3 < 0\}$$

er kegler i $\mathbf{R}^3$.

Løsning. Lad $x = (x_1, x_2, x_3) \in C_1$. For $t > 0$ gælder det, at $tx_1, tx_2, tx_3 > 0$, så $tx \in C_1$. Desuden ser vi, at for $x = (x_1, x_2, x_3) \in C_2$ og for $t > 0$ gælder det, at $tx_1 \geq 0, tx_2 > 0, tx_3 < 0$, så $tx \in C_2$. Dermed er det vist, at mængderne C_1 og C_2 er kegler.

(2) Lad $C \subseteq \mathbf{R}^n$ være en kegle, og lad $f : C \to \mathbf{R}$ være en funktion. Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er homogen af grad k.

Løsning. Funktionen $f : C \to \mathbf{R}$ er homogen af grad k, hvis betingelsen

$$\forall\, x \in C \,\forall\, t > 0 : f(tx) = t^k f(x)$$

er opfyldt.

(3) Godtgør, at følgende funktioner er homogene, og angiv definitionsmængden og homogenitetsgraden i hvert enkelt tilfælde.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^5 + 3x_1 x_2^4 - x_1^2 x_2^3 \\ f_2(x_1, x_2) = e^{\frac{x_1}{x_2}} \\ f_3(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1 x_2^3 + x_2^4 \\ f_4(x_1, x_2) = \frac{x_1^4 + x_1 x_2^3 + x_2^4}{\sqrt{x_1^6 + x_2^6}} \end{cases}.$$

Løsning. Det er oplagt, at alle fire funktioner er homogene, jvf. definitionen på homogen funktion. Vi ser, at definitionsmængderne og homogenitetsgraderne er

$$\begin{cases} D(f_1) = \mathbf{R}^2, \; k = 5 \\ D(f_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}, \; k = 0 \\ D(f_3) = \mathbf{R}^2, \; k = 4 \\ D(f_4) = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \; k = 1 \end{cases}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^3 + xy^2 + x + y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2 + 1 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + 1.$$

(2) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

Løsning. Da $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \geq 1$ overalt på $\mathbf{R}^2$, har funktionen f ikke nogen stationære punkter.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

(4) Godtgør, at $(0,0)$ er en løsning til ligningen $f(x,y) = 0$. Vis dernæst, at der findes en omegn $U(0)$ af $x = 0$, så den variable y er givet implicit som en funktion $y = y(x)$ i denne omegn. Bestem desuden differentialkvotienten $y'(0)$.

Løsning. Vi ser umiddelbart, at $f(0,0) = 0$. Desuden ser vi, at $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, og at $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. Da de partielle afledede er kontinuerte funktioner, er $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) > 0$ i en vis omegn $U(0)$ af punktet $x = 0$. Heraf følger påstanden om, at $y = y(x)$ i $U(0)$. Vi finder nu, at

$$y'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -1.$$

Lad $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være den funktion, som er givet ved udsagnet

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : g(s) = f(e^s, e^s).$$

(5) Bestem en forskrift for funktionen g, og bestem Taylorpolynomiet P_2 af 2. orden for funktionen g ud fra punktet $s_0 = 0$.

Løsning. Vi får, at

$$g(s) = f(e^s, e^s) = e^{3s} + e^{3s} + 2e^s = 2e^{3s} + 2e^s.$$

Nu ser vi, at $g'(s) = 6e^{3s} + 2e^s$ og $g''(s) = 18e^{3s} + 2e^s$. Da får vi, at

$$P_2(s) = g(0) + g'(0)s + \frac{1}{2}g''(0)s^2 = 4 + 8s + 10s^2.$$

Opgave 3. For ethvert $a > 0$ og ethvert $x > 0$ betragter vi den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\ln(ax)\Big)^n.$$

(1) Bestem for ethvert $a > 0$ mængden

$$C_a = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid (\S) \text{ er konvergent}\}.$$

Bemærk, at C_a afhænger af konstanten $a > 0$.

Løsning. Vi får, at

$$x \in C_a \Leftrightarrow -1 < \ln(ax) < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < ax < e \Leftrightarrow C_a = \left]\frac{1}{ae}, \frac{e}{a}\right[.$$

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f_a : C_a \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, x \in C_a : f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\ln(ax)\Big)^n.$$

Dette er rækkens sumfunktion.

Løsning. Vi får straks, at

$$f_a(x) = \frac{1}{1 - \ln(ax)}.$$

(3) Bestem den afledede funktion f_a', og godtgør, at funktionen f_a er voksende.

Løsning. Vi ser, at

$$f_a'(x) = -\frac{1}{(1-\ln(ax))^2}\left(-\frac{1}{ax}\cdot a\right) = \frac{1}{x(1-\ln(ax))^2},$$

og da $f_a'(x) > 0$, er f_a' voksende på C_a.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f_a.

Løsning. Værdimængden er $R(f_a) =]\frac{1}{2}, \infty[$.

(5) Bestem elasticiteten f_a^ϵ.

Løsning. Vi får, at

$$f_a^\epsilon(x) = x\frac{1-\ln(ax)}{x(1-\ln(ax))^2} = \frac{1}{1-\ln(ax)}.$$