KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2010 S-1A rx

REEKSAMEN I MATEMATIK A

Tirsdag den 17. august 2010

---

2 sider med 3 opgaver.
Løsningstid: 2 timer.
Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Differensligninger af første orden.
Vi betragter differensligningen

$$(*) \qquad x_{t+1} = ax_t + b,$$

hvor $t \in \mathbf{N}_0$. Tallene a og b er reelle konstanter.

(1) Løs differensligningen $(*)$, hvis $a = 0$.

(2) Løs differensligningen $(*)$, hvis $a = 1$.

(3) Løs differensligningen $(*)$, hvis $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

(4) Løs differensligningen

$$x_{t+1} = \frac{1}{7}x_t + 2,$$

idet $x_0 = \frac{8}{3}$. Bestem desuden grænseværdien

$$\lim_{t\to\infty} x_t.$$

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^4) + x^2 + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Vis desuden, at $(0, 0)$ er et stationært punkt for funktionen f.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Vis, dernæst, at punktet $(0,0)$ er et minimumspunkt for funktionen f.

(3) Vis, at

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) \geq 0.$$

Bestem dernæst værdimængden for funktionen f.

Opgave 3. For ethvert $u \geq e$ betragter vi funktionen $I = I(u)$ defineret ved

$$\forall\, u \geq e : I(u) = \int_e^u \Big(\frac{1}{x(\ln x)^2}\Big)\,dx.$$

(1) Bestem en forskrift for funktionen $I = I(u)$.

(2) Vis, at det uegentlige integral

$$\int_e^\infty \Big(\frac{1}{x(\ln x)^2}\Big)\,dx$$

er konvergent, og bestem dets værdi.

(3) Løs ligningen $I(u) = \frac{1}{2}$.