Matematik B, 10. februar 2020: Rettevejledning

Opgave 1

Betragt den symmetriske matrix A givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Vis, at A er en regulær matrix.

   Løsning:

   Determinanten af A udregnes til -16. Da determinanten er forskellig fra 0, er A regulær.

2) Bestem en forskrift for den til matricen A hørende kvadratiske form $K: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

   Løsning:

   $K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2$ for $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

3) Bestem det karakteristiske polynomium for matricen A.

   Løsning:

   $$p_A(t) = det(A - tE) = det\begin{pmatrix} 1-t & 3 & 0 \\ 3 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} =$$

   $$(2-t) \cdot det\begin{pmatrix} 1-t & 3 \\ 3 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t) \cdot ((1-t)^2 - 9) =$$

   $(2-t) \cdot (t^2 - 2t - 8)$, der kan reduceres til

   $-t^3 + 4t^2 + 4t - 16.$

4) Vis, at matricen A har egenværdierne -2, 2 og 4.

Løsning:

Ved indsættelse af disse værdier i det karakteristiske polynomium ses, at $p_A(-2) = p_A(2) = p_A(4) = 0$, så -2, 2 og 4 er egenværdier for A.

5) Bestem egenrummet hørende til egenværdien 4 for matricen A.

Løsning:

Vi skal løse ligningssystemet, der har totalmatricen

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ved rækkeoperationer omformes den til echelonmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenvektorer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ hørende til egenværdien 4 opfylder altså $x_1 - x_2 = 0$ og $x_3 = 0$, så egenrummet hørende til egenværdien 4 er givet som Span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

6) Afgør, om matricen A er positiv definit, negativ definit, indefinit eller ingen af delene.

Løsning:

Da A er symmetrisk og har både en positiv og en negativ egenværdi, er A indefinit.

Opgave 2

1) Bestem alle løsninger til det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 - & x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ 0x_1 + & 2x_2 + & 6x_3 & = & -4 \\ -2x_1 + & 4x_2 + & 2x_3 & = & -8 \end{array}$$

Løsning:

Ligningssystemet har totalmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ -2 & 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Ved rækkeoperationer omformes den til echelonmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Løsningerne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ til ligningssystemet opfylder altså
$x_1 + 5x_3 = 0$ og $x_2 + 3x_3 = -2$.

Sæt $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Så fås løsningerne givet som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

2) Vis, at følgende lineære ligningssystem ikke har nogen løsning:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 - & x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ 0x_1 + & 2x_2 + & 6x_3 & = & -4 \\ -2x_1 + & 4x_2 + & 2x_3 & = & -7 \end{array}$$

Løsning:

Dette ligningssystem har totalmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ -2 & 4 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Ved rækkeoperationer omformes den til echelonmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den tredje række i echelonmatricen er et krav om, at
$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, så ligningssystemet har ingen løsninger.

3) Vis, at følgende lineære ligningssystem har netop én løsning, og find den:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 - & x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ 0x_1 + & 2x_2 + & 6x_3 & = & -4 \\ -2x_1 + & 4x_2 + & x_3 & = & -7 \end{array}$$

Løsning:

Dette ligningssystem har totalmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ -2 & 4 & 1 & -7 \end{pmatrix},$$

der omformes til echelonmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Af denne aflæses direkte, at der er én løsning, nemlig

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

Betragt for $t > 0$ differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} + \left(\frac{1}{t} - 1\right) x = 4e^t$$

1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Løsning:

Ligningen er en lineær differentialligning af første orden med
$p(t) = \frac{1}{t} - 1$ og $q(t) = 4e^t$.

$P(t) = \ ln(t) - t, \ t > 0$, er en stamfunktion til $p(t)$.

Den fuldstændige løsning er derfor, jf. "Panserformlen", givet ved

$x = Ce^{-ln(t)+t} + e^{-ln(t)+t} \int e^{ln(t)-t} 4e^t dt =$
$Ce^{-ln(t)}e^t + e^{-ln(t)}e^t \int e^{ln(t)}e^{-t}4e^t dt =$
$C\frac{1}{t}e^t + \frac{1}{t}e^t \int 4tdt = C\frac{1}{t}e^t + \frac{1}{t}e^t 2t^2 = C\frac{1}{t}e^t + 2te^t, t > 0,$
hvor C er en arbitrær konstant.

2) Find den specielle løsning $\tilde{x} = \ \tilde{x}(t)$ til differentialligningen, hvor betingelsen $\tilde{x}(1) = 5e$ er opfyldt.

Løsning:

Ved indsættelse af $t = 1$ fås

$Ce + 2e = 5e \ \Leftrightarrow Ce = 3e \Leftrightarrow C = 3.$

$\tilde{x} = \ \tilde{x}(t)$ har dermed forskriften

$$\tilde{x}(t) = \frac{3}{t}e^t + 2te^t, t > 0.$$

Opgave 4

Lad funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$f(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 4xy + 4x + 4y - 15.$$

1) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for f i ethvert punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Løsning:

$f'_x(x, y) = -4x + 4y + 4, \ f'_y(x, y) = -6y + 4x + 4$ og dermed

$H(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Vis, at f er en strengt konkav funktion.

Løsning:

Hessematricen er symmetrisk, og de to ledende hovedunder-determinanter, der ikke afhænger af (x,y), udregnes straks til $D_1 = -4 < 0$ og $D_2 = 8 > 0$.

Derfor er Hessematricen negativ definit for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, så f er en strengt konkav funktion.

3) Vis, at f har netop ét stationært punkt, og find det.

Løsning:

For at finde eventuelle stationære punkter løses ligningssystemet

$-4x + 4y + 4 = 0 \ \wedge \ -6y + 4x + 4 = 0.$

Ved addition af de to ligninger fås $-2y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 4$, og dermed ved indsættelse $x = 5$.

$(x,y) = (5,4)$ er altså et stationært punkt for f - og det eneste.

4) Find værdimængden for f.

Løsning:

Da f er en strengt konkav funktion, er det stationære punkt et entydigt bestemt globalt maksimumspunkt. Den tilhørende globale maksimums-værdi er

$f(5,4) = -2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 15 = 3.$

Da $f(x,0) = -2x^2 + 4x - 15 \to -\infty$ for $x \to \infty$, og f er en kontinuert funktion, er værdimængden for f intervallet $]-\infty, 3]$.