Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2018 S-1B rx ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik B

Fredag den 17. august 2018

Opgave 1. I vektorrummet $\mathbf{R}^5$ betragter vi hyperplanen H_0 med ligningen

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0,$$

idet $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5$.

(1) Bestem vektorer $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbf{R}^5$, så

$$H_0 = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Løsning. Vi isolerer den variable x_3 og finder så, at

$$x_3 = 2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 \Leftrightarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_2, 2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5, x_4, x_5) \Leftrightarrow$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
$$x_1(1, 0, 2, 0, 0) + x_2(0, 1, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, 1, 1, 0) + x_5(0, 0, 2, 0, 1),$$

så $v_1 = (1, 0, 2, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$ og $v_4 = (0, 0, 2, 0, 1)$.

(2) Vi betragter mængden $M = \{(t, t, -3t, t, 2t) \in \mathbf{R}^5 \mid t \in \mathbf{R}\}$. Vis, at M er et underrun af $\mathbf{R}^5$, og bestem fællesmængden $F = M \cap H_0$.

Løsning. Vi ser, at $M = \text{span}\{(1, 1, -3, 1, 2)\}$, hvoraf det fremgår, at M er et underrum.

Idet $2t + t + 3t + t + 4t = 0$ kun er opfyldt, dersom $t = 0$, får vi, at $F = \{\underline{0}\}$.

(3) Vi betragter mængden $U = \{(t,t,t,p,q) \in \mathbf{R}^5 \mid t,p,q \in \mathbf{R}\}$. Vis, at

$$U = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\},$$

hvor $u_1, u_2, u_3 \in \mathbf{R}^5$.

Løsning. Vi ser, at $(t,t,t,p,q) = t(1,1,1,0,0) + p(0,0,0,1,0) + q(0,0,0,0,1)$, så

$u_1 = (1,1,1,0,0)$, $u_2 = (0,0,0,1,0)$ og $u_3 = (0,0,0,0,1)$.

(4) Udregn normerne $\|u_1 - u_2\|$, $\|u_1 - u_3\|$ og $\|u_2 - u_3\|$.

Løsning. Vi finder, at $u_1 - u_2 = (1,1,1,-1,0)$, $u_1 - u_3 = (1,1,1,0,-1)$ og $u_2 - u_3 = (0,0,0,1,-1)$.

Heraf finder vi, at $\|u_1 - u_2\| = 2$, $\|u_1 - u_3\| = 2$ og $\|u_2 - u_3\| = \sqrt{2}$.

(5) Bestem mængden

$$U^\perp = \{x \in \mathbf{R}^5 \mid \forall\, u \in U : x \perp u\}.$$

Løsning. Hvis $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in U^\perp$, skal det gælde, at $x \perp u_1$, $x \perp u_2$ og $x \perp u_3$, så

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \wedge\ s, t \in \mathbf{R}.$$

Heraf aflæser vi så, at

$$U^\perp = \operatorname{span}\{(-1,1,0,0,0), (-1,0,1,0,0)\}.$$

Opgave 2. Vi betragter mængderne

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0\} \text{ og } D^O = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$$

samt den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x,y) \in D : f(x,y) = \sqrt{x} + y + xy^2.$$

(1) Bestem værdimængden for funktonen f.

Løsning. Vi ser, at $f(0, y) = y$, så værdimængden for funktionen f er $R(f) = \mathbf{R}$.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D^O$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + y^2 = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + y^2 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + 2xy.$$

(3) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter i mængden D^O.

Løsning. Da $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + y^2 > 0$ overalt på mængden D^O, har funktionen f ingen stationære punkter.

(4) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D^O$, og vis, at f hverken er konveks eller konkav på mængden D^O.

Løsning. Vi finder, at

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

og vi ser, at $\det f''(x, y) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4y^2 < 0$, hvoraf det ønskede fremgår.

Vi betragter mængden

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \land 0 \le y \le 1\}.$$

(5) Godtgør, at restriktionen af funktionen f til mængden K har både en største værdi og en mindste værdi, og bestem disse værdier.

Løsning. Da K er en kompakt mængde, og da f er en kontinuert funktion, har restriktionen af f til K både en største værdi og en mindste værdi på K. (Dette er ekstremværdisætningen).

Da funktionen f ikke har nogen stationære punkter i det indre K^O af K, gennemfører vi straks en randundersøgelse.

$I: 0 \leq x \leq 1$ og $y = 0$. Funktionen $f(x, 0) = \sqrt{x}$ er voksende, og $f(0, 0) = 0$ og $f(1, 0) = 1$.

$II: x = 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Da er $f(1, y) = 1 + y + y^2$, som er voksende, og $f(1, 1) = 3$.

$III: 0 \leq x \leq 1$ og $y = 1$. Da er $f(x, 1) = \sqrt{x} + 1 + x$, som er voksende. Vi ser, at $f(0, 1) = 1$.

$IV: x = 0$ og $0 \leq y \leq 1$. Da er $f(0, y) = y$, som er voksende. Der er derfor ikke nogen yderligere ekstremumspunkter.

Dette viser, at der er globalt maksimum i $(1, 1)$ med værdien 3 og globalt minimum i $(0, 0)$ med værdien 0.

Vi betragter den funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : g(t) = f(e^{2t}, t).$$

(6) Bestem en forskrift for Taylorpolynomiet P_2 af anden orden for g ud fra punktet $t_0 = 0$.

Løsning. Vi ser, at $g(t) = e^t + t + t^2 e^{2t}$, så $g'(t) = e^t + 1 + 2te^{2t} + 2t^2 e^{2t}$ og $g''(t) = e^t + 2e^{2t} + 8te^{2t} + 4t^2 e^{2t}$. Da er $g(0) = 1, g'(0) = 2$ og $g''(0) = 3$. Vi får derfor, at Taylorpolynomiet P_2 af anden orden ud fra punktet $t_0 = 0$ er givet ved forskriften

$$P_2(t) = 1 + 2t + \frac{3}{2}t^2.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + (\cos t)x = (\sin t)e^{\cos t - \sin t}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Hvis $p(t) = \cos t$, er $P(t) = \sin t$. Vi får da, at

$$x = Ce^{-\sin t} + e^{-\sin t} \int e^{\sin t} e^{\cos t - \sin t} \sin t \, dt =$$

$$Ce^{-\sin t} - e^{-\sin t}\int e^{\cos t} d(\cos t) = e^{-\sin t}(C - e^{\cos t}),$$

hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 2018e$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder umiddelbart, at $C = 2019e$ så

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = e^{-\sin t}(2019e - e^{\cos t}).$$

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0),$$

og vis, at løsningen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ er aftagende i en omegn af punktet $t = 0$.

Løsning. Ved at benytte differentialligningen $(*)$ ser vi, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0) = -2018e < 0,$$

og heraf fremgår det ønskede resultat umiddelbart, da $\tilde{x}(t)$ er kontinuert.

Opgave 4. Lad A og B være $n \times n$ matricer. Vi ved, at

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \text{ og } \det(A^T) = \det(A),$$

idet A^T er den til A transponerede matrix.

(1) Vis, at

$$\det(AA^T) = (\det(A))^2.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) = (\det(A))^2.$$

(2) Idet E betegner $n \times n$ enhedsmatricen, skal man vise, at

$$\det((A - tE)^T) = \det(A^T - tE)$$

for $t \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi ser, at

$$(A - tE)^T = A^T - tE^T = A^T - tE,$$

hvoraf et ønskede resultat fremgår.

(3) Vis, at matricerne A og A^T har de samme egenværdier.

Løsning. Vi har, at

$$\det(A - tE) = \det((A - tE)^T) = \det(A^T - tE),$$

hvoraf det ønskede resultat fremgår.

(4) Lad $a \in \mathbf{R}$ være vilkårligt valgt. Vis, at

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} = a \det(A),$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Løsning. Ved udvikling efter $(n+1)$'ste søjle, finder vi, at

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} = (-1)^{n+n} a \det(A) = a \det(A).$$