Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2019 V-1B ex ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 8. januar 2019

Opgave 1. For ethvert $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & s & s \\ 1 & s & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten $\det A(s)$ for matricen $A(s)$, og bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi finder, at $\det A(s) = -2s^2 + 3s - 1$, og vi finder så, at $\det A(s) = 0$, når og kun når $s = \frac{1}{2}$ eller $s = 1$.

Dette viser, at matricen $A(s)$ er regulær, når og kun når $s \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$.

(2) Bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er positiv definit.

Løsning. De ledende hovedunderdeterminanter for matricen $A(s)$ er $D_1 = 2, D_2 = 2s - 1$ og $D_3 = \det A(s) = -2s^2 + 3s - 1$.

Man har nu, at $A(s)$ er positiv definit, netop når de ledende hovedunderdeterminanter alle er positive. Dette er opfyldt, når $\frac{1}{2} < s < 1$.

(3) Godtgør, at matricen $A(s)$ ikke er negativ definit for noget tal $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Hvis matricen $A(s)$ skal være negativ definit, må vi kræve, at $D_1 < 0$, og det kan ikke lade sig gøre.

(4) Bestem egenværdierne for matricen $A(1)$, og godtgør, at denne matrix er positiv semidefinit.

Løsning. Vi ser, at

$$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium for denne matrix er

$$P(t) = \det(A(1) - tE) = -t^3 + 4t^2 - 2t = t(-t^2 + 4t - 2),$$

og vi finder, at de karakteristiske rødder - og dermed egenværdierne for $A(1)$ - er $t_1 = 0, t_2 = 2 + \sqrt{2}$ og $t_3 = 2 - \sqrt{2}$.

Da alle egenværdierne er ikke-negative, er matricen $A(1)$ positiv semidefinit.

(5) Bestem en forskrift for den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, der har matricen $A(1)$ som sin tilhørende symmetriske matrix.

Løsning. Vi finder straks, at

$$K(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(6) Opskriv en forskrift for den kvadratiske form $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_2) = K(x_1, x_2, -x_1),$$

og bestem den til L hørende symmetriske 2×2 matrix B.

Er L positiv definit?

Løsning. Vi finder, at

$$L(x_1, x_2) = K(x_1, x_2, -x_1) = x_1^2 + x_2^2,$$

så den tilhørende symmetriske 2×2 matrix er

$$B = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Heraf fremgår det, at den kvadratiske form L er positiv definit.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \land y > 0\}$$

samt den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) = \ln x + \sqrt{y} - x^2.$$

(1) Bestem værdimængden for funktonen f.

Løsning. Vi ser, at $f(x, 1) = \ln x + 1 - x^2 \to -\infty$ for $x \to 0+$, og at $f(1, y) = \sqrt{y} - 1 \to \infty$ for $y \to \infty$. Dette viser, at funktionen f har værdimængden $\mathbf{R}$.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x} - 2x \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}.$$

(3) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter i mængden D.

Løsning. Idet $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} > 0$ overalt på D, har funktionen f ingen stationære punkter.

(4) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$, og vis, at f er strengt konkav på mængden D.

Løsning. Vi finder, at

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} - 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} y^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Det er klart, at $f''(x, y)$ er negativ definit overalt på D, så funktionen f er strengt konkav.

Vi betragter den funktion $g : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in D : g(x, y) = 1642 - f(x, y)$$

og den funktion $\psi : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in D : \psi(x, y) = \exp(g(x, y)).$$

(5) Vis, at funktionen ψ er kvasikonveks, og afgør dernæst, om den endda er konveks.

Løsning. Det er klart, at funktionen g er strengt konveks, og da exp er en voksende funktion, er funktionen ψ kvasikonveks.

Vi ved også, at exp er strengt konveks, og derfor er ψ endda konveks.

Vi betragter nu den funktion $h : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ : h(x) = f(x, x).$$

(6) Bestem en forskrift for Taylorpolynomiet P_3 af tredje orden for h ud fra punktet $x_0 = 1$

Løsning. Funktionen h har forskriften

$$\forall x > 0 : h(x) = \ln x + \sqrt{x} - x^2,$$

så

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x,\ h''(x) = -x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - 2,\ h'''(x) = 2x^{-3} + \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Nu ser vi, at $h(1) = 0, h'(1) = -\frac{1}{2}, h''(1) = -\frac{13}{4}$ og $h'''(1) = \frac{19}{8}$. Heraf finder vi så, at

$$P_3(x) = -\frac{1}{2}(x-1) - \frac{13}{8}(x-1)^2 + \frac{19}{48}(x-1)^3.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \left(\frac{4t^3}{2 + t^4}\right) x = 1 + t.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi benytter "Panserformlen", og idet $p(t) = \frac{4t^3}{2+t^4}$, er $P(t) = \ln(2+t^4)$.

Vi får så, at

$$x = Ce^{-\ln(2+t^4)} + e^{-\ln(2+t^4)} \int e^{\ln(2+t^4)}(1+t)\,dt =$$

$$\frac{C}{2+t^4} + \frac{1}{2+t^4}\int (2+2t+t^4+t^5)\,dt = \frac{C}{2+t^4} + \frac{2t+t^2+\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{6}t^6}{2+t^4} =$$

$$\frac{C}{2+t^4} + \frac{60t+30t^2+6t^5+5t^6}{30(2+t^4)}, \quad \text{hvor } \ C \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 2$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at $C = 4$, så

$$\tilde{x}(t) = \frac{120+60t+30t^2+6t^5+5t^6}{30(2+t^4)}.$$

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0),$$

og vis, at enhver maksimal løsning $x = x(t)$ er voksende i en omegn af punktet $t = 0$.

Løsning. Ved at sætte $t = 0$ i differentialligningen ser vi, at

$$\frac{dx}{dt}(0) = 1,$$

og da $\frac{dx}{dt}$ er kontinuert, må det gælde, at enhver maksimal løsning er voksende i en vis omegn af $t = 0$.

Opgave 4. I vektorrummet $\mathbf{R}^4$ betragter vi den hyperplan H, der har ligningen

$$H: \ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

(1) Godtgør, at hyperplanen H er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$, og bestem tre vektorer a, b og c, så

$$H = \text{span}\{a, b, c\}.$$

Løsning. Da nulvektoren åbenbart ligger i den givne hyperplan, er hyperplanen et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

Vi ser desuden, at $x_3 = 2x_1 + 3x_2 + x_4$ så

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, 2x_1 + 3x_2 + x_4, x_4) =$$

$$x_1(1, 0, 2, 0) + x_2(0, 1, 3, 0) + x_4(0, 0, 1, 1),$$

hvilket viser, at

$$H = \text{span}\{(1, 0, 2, 0), (0, 1, 3, 0), (0, 0, 1, 1)\}.$$

(2) Bestem mængden

$$H^{\perp} = \{y \in \mathbf{R}^4 \mid \forall\, x \in H : y \perp x\}$$

og godtgør, at $H^{\perp}$ er et underrum af $\mathbf{R}^4$.

Løsning. En vektor $y \in H^{\perp}$, hvis og kun hvis y er vinkelret på de tre vektorer a, b og c, som udspænder hyperplanen H.

Koefficientmatricen for det tilhørende homogene lineære ligningssystem er da

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

og denne matrix omformes ti echelonmatricen

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Heraf ses det, at $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (2u, 3u, -u, u)$, hvor $u \in \mathbf{R}$. Heraf fremgår det, at $H^{\perp}$ er et underrum af $\mathbf{R}^4$.

Vi betragter nu funktionen $f : H^{\perp} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, y \in H^{\perp} : f(y) = \|z - y\|^2,$$

hvor $z = (1, 1, 1, 1)$.

(3) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Vi finder, at

$$f(u) = \|z - y\|^2 = (1 - 2u)^2 + (1 - 3u)^2 + (1 + u)^2 + (1 - u)^2,$$

og da følger det, at $f'(u) =$

$$2(1-2u)\cdot(-2)+2(1-3u)\cdot(-3)+2(1+u)+2(1-u)\cdot(-1) = 30u-10.$$

Funktionen f har da det ene stationære punkt $u = \frac{1}{3}$, som vi hurtigt indser, er et minimumspunkt, thi $f''(u) = 30 > 0$. Vi finder så, at minimumsværdien er

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}.$$