KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2010 S-1A ex

EKSAMEN I MATEMATIK A

Fredag den 18. juni 2010

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1.

Optimeringsproblemer for funktioner af flere reelle variable.

Lad $z = f(x, y)$ være en C^2-funktion (dvs., at alle de partielle afledede af anden orden for f er kontinuerte). Vi antager, at funktionen f er defineret på en åben delmængde D af $\mathbf{R}^2$.

(1) Vis, at hvis funktionen f har et ekstremum i punktet (x_0, y_0), så er (x_0, y_0) et stationært punkt for f. Altså gælder det, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

(2) Lad (x_0, y_0) være et stationært punkt for funktionen f. Opskriv en betingelse for, at (x_0, y_0) er henholdsvis et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for f.

(3) Betragt funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^6 + y^2.$$

Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Vis, dernæst, at $(0, 0)$ er et stationært punkt for f, og afgør om dette punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for f.

Opgave 2. For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{5xn}.$$

(1) Bestem mængden

$$K = \{x \in \mathbf{R} \mid (*) \text{ er konvergent}\} = \{x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} e^{5xn} < \infty\}.$$

(2) Bestem en forskrift for funktionen $f : K \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, x \in K : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{5xn}.$$

(3) Bestem den afledede f' af funktionen f, og vis, at f er voksende på hele mængden K.

(4) Bestem elasticiteten $\mathrm{El} f(x)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $x \in K$.

Opgave 3. For ethvert $u \geq 1$ betragter vi funktionen $I = I(u)$ defineret ved

$$\forall\, u \geq 1 : I(u) = \int_1^u \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

(1) Bestem en forskrift for funktionen $I = I(u)$.

(2) Vis, at det uegentlige integral

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

er konvergent, og bestem dets værdi.

(3) Bestem værdimængden $R(I)$ for funktionen $I = I(u)$, hvor $u \geq 1$.