Eksamen på Økonomistudiet vinter 2019-20

Matematik A

3. januar 2020

(3-timers prøve uden hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 3 sider incl. denne forside.
Til dette eksamenssæt hører 0 bilag.

Syg under eksamen:

Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du

- kontakte en eksamensvagt for at få hjælp til registreringen i systemet som syg og til at aflevere blankt
- forlade eksamen
- kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest 5 dage efter eksamensdagen.

Pas på, du ikke begår eksamenssnyd!

Det er eksamenssnyd, hvis du under prøven

- Bruger hjælpemidler, der ikke er tilladt
- Kommunikerer med andre eller på anden måde modtager hjælp fra andre
- Kopierer andres tekster uden at sætte citationstegn eller kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen tekst
- Bruger andres idéer eller tanker uden at kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen idé eller dine egne tanker
- Eller hvis du på anden måde overtræder de regler, der gælder for prøven

Du kan læse mere om reglerne for eksamenssnyd på Din Uddannelsesside og i Rammestudieordningens afs. 4.12.

Opgave 1

(a) Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable.
Gør rede for definitionen af de første-ordens partielle afledede

$$f_1'(x, y) \quad \text{og} \quad f_2'(x, y)\,.$$

I resten af opgaven betragtes funktionen f givet ved

$$f(x, y) = 2x(1 + y^2) + x^2 \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Bestem $f_1'(x, y)$ og $f_2'(x, y)$.

(c) Vis, at punktet $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ er et kritisk punkt for f.
Vis, at der ikke findes andre kritiske punkter.

(d) Bestem alle anden-ordens partielle afledede for f.
Opstil Hessematricen (*the Hessian matrix*) $f''(x, y)$.

(e) Afgør, om $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt (*saddle point*) for f.

(f) Bestem værdimængden for f.
Hint: Kig fx. på funktionsværdierne på linien $y = x$.

Opgave 2

(a) Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_1^4 (2x - 3\sqrt{x})\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 xe^{-x+1}\,dx\,.$$

(b) Udregn det ubestemte integral

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx \quad (\text{hvor } x > 0).$$

(c) Betragt det uegentlige integral (*improper integral*)

$$\int_0^\infty 6x^2 e^{-(x^3-1)}\,dx\,.$$

Vis, at dette integral konvergerer, og bestem dets værdi.

Opgave 3

(a) Betragt funktionen

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$.

(b) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \quad \text{og} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}.$$

(c) Opskriv Middelværdisætningen (*The Mean Value Theorem*).
Forklar indholdet i sætningen. Lav gerne en figur til at støtte din forklaring.

(d) Lad $g(x)$ være en differentiabel funktion defineret på $\mathbb{R}$.
Antag $g(0) = 0$, og at der findes et $b > 0$, så $g(b) = b$.
Vis, at der findes et $x^* > 0$, så $g'(x^*) = 1$.