Rettevejledning til

Eksamen på Økonomistudiet, vinter 2012-2013

Reeksamen

Makro A

2. årsprøve

19. januar , 2013

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Opgave 1: Indførelse af fri kapitalbevægelighed

1.1 Land 1 med relativt høj opsparingstilbøjelighed vil på langt sigt danne et højere K/L-forhold (kapitalintensitet), fordi kapital kommer af opsparing/investering. I den basale Solowmodel for en lukket økonomi er den langsigede kapitalintensitet (i standard notation og under de anførte antagelser) således:

$$\left(\frac{K}{L}\right)^{*} = k^{*} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Et relativt højt K/L-forhold giver med en standard produktionsfunktion en relativt høj gennemsnitsproduktivitet (Y/L), et relativt lille grænseprodukt for kapital og et relativt stort for arbejdskraft. Derfor bliver produktion og indkomst per arbejder samt reallønnen relativt høj i Land 1, mens realrenten bliver relativt lav i Land 1.

1.2 Ved åbning for kapitalbevægelser vi kapitalen strømme mod den højeste forrentning, dvs. fra Land 1 til Land 2. Derved vil K/L-forholdet falde i Land 1, hvilket giver lavere indenlandsk skabt produktion og indkomst per arbejder og lavere realløn, men højere indenlandsk realrente. Omvendt i Land 2. Omfordelingen af kapital vil forløbe i en grad, så grænseprodukterne for kapital og dermed de indenlandske realrenter bliver udjævnede mellem landene (evt. op til forskelle i landerisiko).

1.3 Svaret er ja. Den indkomst, som indvånerne i et land tjener per mand (til forskel fra den indenlandske skabte indkomst per mand) kan stige i begge lande. Denne "free lunch" hidrører fra, at kapitalen i udgangspunktet ikke er optimalt fordelt mellem landene. Når grænseproduktet for kapital er mindre i et land end i et andet, kan samlet produktion og indkomst forøges alene ved at omfordele kapital fra landet med lavt grænseprodukt til landet med højt. Dette er netop, hvad der sker. Kilden til generelt højere indkomster er altså den initiale misallokation af kapital med forskellige grænseprodukter.

Opgave 2: En Solow-model med en produktiv eksternalitet udgående fra produktion per arbejder

2.1 Virksomhederne efterspørger kapital og arbejdskraft op til det punkt, hvor det relevante grænseprodukt *for givet* A_t er lig med faktorprisen, idet den enkelte virksomhed netop tager A_t for givet. Når markederne clearer må reallejesatsen for kapital, r_t, hhv. reallønnen, w_t, derfor blive:

$$r_t = \alpha K_t^{\alpha-1} \left(A_t L_t\right)^{1-\alpha}$$
$$w_t = (1-\alpha) K_t^{\alpha} \left(A_t L_t\right)^{-\alpha} A_t$$

Herfra fås så:

$$r_t K_t = \alpha K_t^{\alpha} \left(A_t L_t\right)^{1-\alpha} = \alpha Y_t$$
$$w_t L_t = (1-\alpha) K_t^{\alpha} \left(A_t L_t\right)^{1-\alpha} = (1-\alpha) Y_t$$

hvor det blev brugt, at der kun er den ene repræsentative vriksomhed. Indkomstandelen bliver så hhv.:

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \alpha \quad \text{og} \quad \frac{w_t L_t}{Y_t} = 1-\alpha$$

Med $1-\alpha \approx 2/3$, må $\alpha \approx 1/3$.

I henhold til (2) antages den produktive "learning by doing"-eksternalitet at udgå fra produktion snarere end kapital og fra produktion per mand snarere end fra produktion som sådan. "Doing" består altså her i at omgås med produktion snarere end med kapital (som i hovedvarianten i pensum), og "learning"-effekten kommer af, hvor meget produktion hver mand præsterer snarere end produktionen i alt. På begge punkter er det ikke ganske klart, hvad den mest relevante antagelse er, eftersom learning by doing-effekten i sig selv blot er funderet i plausibilitet. Formuleringen her kan derfor godt forsvares.

2.2 Indsættes udtrykket for A_t fra ligning (2) på pladsen for A_t i ligning (1) fås:

$$\begin{aligned} Y_t &= K_t^{\alpha} \left(\left[\frac{Y_t}{L_t} \right]^{\phi} L_t \right)^{1-\alpha} \\ &= K_t^{\alpha} Y_t^{\phi(1-\alpha)} L_t^{(1-\phi)(1-\alpha)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$Y_t^{1-\phi(1-\alpha)} = K_t^{\alpha} L_t^{(1-\phi)(1-\alpha)} \Leftrightarrow$$
$$Y_t = K_t^{\frac{\alpha}{1-\phi(1-\alpha)}} L_t^{\frac{(1-\phi)(1-\alpha)}{1-\phi(1-\alpha)}}$$

Det ses, at summen af eksponenterne er:

$$\frac{\alpha}{1-\phi(1-\alpha)} + \frac{(1-\phi)(1-\alpha)}{1-\phi(1-\alpha)} = \frac{\alpha + 1 - \alpha - \phi + \alpha\phi}{1-\phi(1-\alpha)} = \frac{1-\phi(1-\alpha)}{1-\phi(1-\alpha)} = 1$$

Dermed er:

$$Y_t = K_t^{\nu} L_t^{1-\nu}, \quad \nu \equiv \frac{\alpha}{1-\phi(1-\alpha)} \tag{5}$$

At $\nu > 0$ følger af at såvel ϕ som $1-\alpha$ ligger strengt mellem nul og en. Endvidere: $\nu < 1 \Leftrightarrow \alpha < 1-\phi(1-\alpha) \Leftrightarrow \phi(1-\alpha) < 1-\alpha \Leftrightarrow \phi < 1$, som er antaget (i denne del af opgaven).

Den aggregerede produktionsfunktion har altså konstant skalaafkast (eksponentsum = 1) på trods af, at den enkelte virksomheds produktionsfunktion også har dette, og der faktisk er en positiv, produktiv eksternalitet. Årsagen er, at den produktive eksternalitet udgår fra produktion *per arbejder*. Antag at inputs af både kapital og arbejdskraft fordobles. Fra produktionsfunktionen på virksomhedsniveau giver dette netop en fordobling af produktionen, men da såvel produktion som arbejdsinput dermed er fordoblet, er produktion per mand på virksomhedsniveau uændret. Men så er det Y_t/L_t, hvorfra eksternaliteten udgår, netop uændret, så der kommer ikke nogen ekstra effekt på aggregeret niveau.

2.3 Modellen kogt ned til ligningerne (3), (4) og (5) er ækvivalent med en helt sædvanlig basal Solowmodel, altså uden tekniske fremskridt. Analysen forløber standardagtigt. Fra (5) er:

$$y_t = k_t^{\nu}$$

Der divideres på begge sider af (3) med L_{t+1}, på højresiden i formen $(1+n)L_t$:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= \frac{1}{1+n}\left[s y_t + (1-\delta) k_t\right] \\ &= \frac{1}{1+n}\left[s k_t^{\nu} + (1-\delta) k_t\right] \qquad (6) \end{aligned}$$

2.4 Tilstrækkelige (ikke nødvendige!) egenskaber ved transitions-kurven/ligningen (6), altså k_{t+1} som funktion af k_t, for konvergens af k_t til entydigt $k^* > 0$ fra vilkårligt initialt $k_0 > 0$ er:

1) Passerer gennem (0,0). Dette ses ved indsættelse.

2) Er overalt voksende. Ses direkte ved inspektion af (6), idet større k_t entydigt trækker højresiden op.

3) Har overalt aftagende (positiv) hældning. Dette ses, idet $\nu < 1$, ved:

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{s\nu k_t^{\nu-1} + (1-\delta)}{1+n}$$

(NB: For aftagende hældning bruges her $\nu < 1$ og dermed $\phi < 1$).

4) Samme hældning er større end en for tilstrækkeligt små værdier af k_t, idet hældningen går mod uendelig for k_t gående mod nul (igen bruges $\nu < 1$), og den er mindre en 1, for k_t tilstrækkeligt stor, idet hældningen går mod $(1-\delta)/(1+n)$ for k_t gående mod uendelig (bruger igen $\nu < 1$), og der er antaget $0 < \delta < 1$ og $n + \delta > 0$ ($(1-\delta)/(1+n) < 1 \Leftrightarrow 1-\delta < 1+n \Leftrightarrow n+\delta > 0$).

En figur med 45°-linje og transitionskurve godtgør ved "trappeiteration" konvergens mod entydigt konvergenspunkt $k^* > 0$.

Man kan finde k^* som stationær værdi i ligning (6), altså som et k der løser:

$$k = \frac{1}{1+n}\left[sk^\nu + (1-\delta)k\right] \Leftrightarrow$$

$$(1+n)k = sk^\nu + (1-\delta)k \Leftrightarrow$$

$$(n+\delta)k = sk^\nu$$

$$k^{1-\nu} = \frac{s}{n+\delta} \Leftrightarrow$$

$$k = k^* \equiv \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}$$

Da $y_t = k_t^\nu$ for alle t, og $k_t \to k^*$, må $y_t \to$

$$y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\nu}{1-\nu}} > 0$$

Fra definitionen af ν findes:

$$\frac{\nu}{1-\nu} = \frac{\frac{\alpha}{1-\phi(1-\alpha)}}{1-\frac{\alpha}{1-\phi(1-\alpha)}} = \frac{\alpha}{1-\phi(1-\alpha)-\alpha} = \frac{\alpha}{(1-\phi)(1-\alpha)}$$

Dermed:

$$y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{(1-\phi)(1-\alpha)}} > 0 \tag{7}$$

[I stedet for 3) og 4) ovenfor kan man først etablere den entydige skæring med 45°-linjen ved simpelt hen at finde k^* som ovenfor og derefter etablere, at transitionskurvens hældning i nul er større end 1 (som ovenfor) eller at hældningen i k^* er indre end 1].

2.5 Eftersom BNP per arbejder konvergerer mod en konstant værdi, er der på langt sigt ingen væst i BNP per arbeder, y_t, eller i det teknologiske niveau, A_t. Der er altså i denne model (med $\phi < 1$), hverken semi-endogen, endogen eller for den sag skyld eksogen vækst. Årsagen er, at den aggregerede produktionsfunktionen har konstant og altså ikke stigende skalaafkast til K_t og L_t, og heller ikke (når $\phi < 1$) har konstant skalaafkast til den reproducerbare faktor K_t alene.

2.6 Fra ligning (7) følger:

$$\ln y^* = \frac{\alpha}{(1-\phi)(1-\alpha)} [\ln s - \ln (n+\delta)]$$

og dermed:

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} \frac{s}{y^*} = \frac{\alpha}{(1-\phi)(1-\alpha)}$$

som altså er elasticiteten i y^* mht. s. Jo større ϕ er, jo større er denne elasticitet. Dette skyldes, at en større investeringsrate s ad de sædvanlige kanaler kendt fra Solow-modeller (mere kapital per arbejder) giver en større produktion per arbejder, men dette har nu en ekstra positiv effekt på "teknologien", A_t, og løfter derfor samlet set produktion per arbejder mere.

I almindelige Solow-modeller er den tilsvarende elasticitet $\alpha/(1-\alpha)$, svarende til $\phi = 0$ her. I såvel denne model med en produktiv eksternalitet som i de traditionelle Solow-modeller er lønandelen $1-\alpha$. En plausibel værdi for α er således i begge modeller omkring 1/3. Elasticiteten er dermed systematisk større i dene model end i traditionelle Solowmodeller. I sidstenævnte må elasticiteten vurderes til at være omkring $\frac{1}{2}$. På basis af tværlandempiri estimeres denne elasticitet typisk til at være betydeligt større end $\frac{1}{2}$. Dette kan nærværende model altså bidrage til at forklare.

[Selv om den resulterende model er ækvivalent med en basal Sololwmodel, har antagelsen om den produktive eksternalitet altså betydning, også i tilfældet $\phi < 1$].

2.7 For $\phi = 1$ gælder udledningen af ligning (5) og (6) fra spørgsmålene 2.2 og 2.3 fortsat, blot bliver $\nu = 1$. Med $\phi = \nu = 1$ fås $y_t = k_t^{\nu} = k_t$, $A_t = y_t$ (fra (2)) og fra (6):

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= \frac{1}{1+n} [s k_t + (1-\delta) k_t] \\ &= \frac{1+s-\delta}{1+n} k_t \end{aligned}$$

Bemærk at koefficienten er større end 1, da der er antaget $n+\delta < s$. Transitionsdiagrammet vil således vise, at k_t vokser for evigt uden at konvergere mod et stationært niveau. Ved at trække k_t fra og efterfølgende dividere med k_t på begge sider fås:

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{s-(n+\delta)}{1+n} > 0$$

Fortegnet følger af antagelsen $n + \delta < s$. Vækstraten i kapital per arbejder, k_t, er altså konstant:

$$g_e \equiv \frac{s-(n+\delta)}{1+n} > 0 \tag{8}$$

Da $y_t = A_t = k_t$, er dette også den konstante vækstrate i indkomst per arbejder og teknologi.

Der er altså ægte endogen vækst, og da vækstraten ikke vokser med initialværdien, L_0, for arbejdsstyrken er der heller ikke den traditionelle og stærkt uplausible skalaaffekt. Til gengæld er input af arbejdskraft nu (uplausibelt) blevet helt uproduktivt i den aggregerede produktionsfunktion, som er $Y_t = K_t$.

Indsætter man naivt nogle plausible værdier på årsbasis, fx $s = 0,2, n = 0$, $\delta = 0,075$ giver ligning (8) en konstant og varig årlig vækstrate i BNP per arbejder på 0,125, eller 12,5 %. Dette er empirisk set helt i skoven. Det er dog ikke noget problem for modellen, men et rent normaliseringsfænomen. Der burde i fx ligning (2) (kunne også være ligning (1)) have været en normaliseringskonstant, D, så (2) havde været:

$$A_t = D\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)^{\phi}$$

Denne konstant ville så have arbejdet sig med ind i pendanten til (8), så denne ligning for passende valg af D ville give en plausibel værdi af g_e.

2.8 En væsentlig forudsigelse fra modellen, altså ligning (8) samt $y_t = A_t = k_t$ osv., er, at vækstraten ikke blot i BNP per arbejder, y_t, men også i teknologiniveauet (eller TFP), A_t, er større, jo større investeringsraten s er. Sammenhængen mellem s og vækstraten i A_t testes netop i figur 1, og den positive sammenhæng bekræftes. Da figuren har A_t og ikke y_t op ad andenaksen, kan sammenhængen ikke blot ses som udtryk for traditionel konvergens baseret på kapitalakkumulation.