Eksamen i Matematik A, 17. august 2020
Rettevejledning

Alle referencer er til lærebogen i kurset: Sydsæter, Hammond, Strøm og Carvajal: "Essential Mathematics for Economic Analysis". Fifth edition. Pearson, 2016.

Opgave 1

Betragt funktionerne f og g givet ved

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 8 \text{ for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$g(x,y) = x^2 - 2y^2 + 2xy \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

1) Bestem $f_1'(x,y)$, $f_2'(x,y)$, $f_{11}''(x,y)$, $f_{12}''(x,y)$, $f_{21}''(x,y)$ og $f_{22}''(x,y)$ og opstil Hessematricen $f''(x,y)$.

   Løsning:

   $$f_1'(x,y) = 2x + 2y - 2\,,\ f_2'(x,y) = 2x - 4y - 2$$

   Ved differentiation af disse første-ordens afledede mht. x og y fås så:

   $$f_{11}''(x,y) = 2\,, f_{12}''(x,y) = f_{21}''(x,y) = 2,\ f_{22}''(x,y) = -4$$

   og hermed gælder for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

   $$f''(x,y) = \begin{pmatrix} f_{11}''(x,y) & f_{12}''(x,y) \\ f_{21}''(x,y) & f_{22}''(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2) Vis, at funktionen f har det kritiske punkt $(x,y) = (1,0)$, og at f ikke har andre kritiske punkter.

   Løsning:

   Vi skal løse de to ligninger med to ubekendte

   $f_1'(x,y) = 2x + 2y - 2 = 0$ og $f_2'(x,y) = 2x - 4y - 2 = 0$.

   Ved subtraktion af den anden ligning fra den første fås $6y = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Heraf fås af de to ligninger, at $x = 1$.

$(x, y) = (1,0)$ er derfor det eneste kritiske punkt for f.

3) Afgør, om $(x, y) = (1,0)$ er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt for f.

Løsning:

Vi anvender sætning 13.3.1:

$$A = f''_{11}(1,0) = 2, B = f''_{12}(1,0) = 2, C = f''_{22}(1,0) = -4$$

Hermed er $AC - B^2 = -12 < 0$, så $(x, y) = (1,0)$ er et saddelpunkt for f.

4) Bestem værdimængden for f.

Løsning:

$f(x, 0) = x^2 - 2x + 8 \to \infty$ for $x \to \infty$.

$f(0, y) = -2y^2 - 2y + 8 \to -\infty$ for $y \to \infty$.

Da f antager vilkårligt store positive og vilkårligt store negative værdier, og f er en kontinuert funktion, er værdimængden

$$R_f = \mathbb{R}.$$

5) Betragt nu ligningen

$$f(x, y) = 5 \quad (*)$$

Vis, at punktet $(x, y) = (1,1)$ er en løsning til $(*)$

Løsning:

$f(1,1) = 1^2 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 8 = 5$,

som ønsket.

6) I en omegn af punktet $(1,1)$ definerer $(*)$ den variable y som en implicit givet funktion $y = h(x)$ af x. Bestem y' i punktet $(1,1)$, dvs. bestem $h'(1)$.

Løsning:

Den hurtigste metode er at bruge formlen (12.3.2) s. 453, der direkte giver det ønskede:

$$y' = h'(1) = -\frac{f_1'(1,1)}{f_2'(1,1)} = -\frac{2+2-2}{2-4-2} = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$$

7) Vis, at funktionen g er homogen, og find homogenitetsgraden k.

Løsning:

For alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ og $t > 0$ er

$$g(tx, ty) = (tx)^2 - 2(ty)^2 + 2txty = t^2x^2 - 2t^2y^2 + 2t^2xy$$
$$= t^2(x^2 - 2y^2 + 2xy) = t^2 g(x, y).$$

Det viser, at g er homogen med homogenitetsgraden $k = 2$.

Opgave 2

1) Vis, at

$$\lim_{x\to 1} \frac{-4x^2 + 3x + \ln(x) + 1}{e^x - x + 1 - e} = \frac{4}{1-e}$$

Løsning:

Ved indsætning af $x = 1$ i tæller og nævner fås

$$\lim_{x\to 1} \frac{-4x^2 + 3x + \ln(x) + 1}{e^x - x + 1 - e} = \frac{-4+3+0+1}{e-1+1-e} = \frac{"0"}{0}$$

Derfor bruger vi L'Hôpitals regel og differentierer tæller og nævner hver for sig:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-4x^2 + 3x + \ln(x) + 1}{e^x - x + 1 - e} = \lim_{x\to 1} \frac{-8x + 3 + {}^1\!/_x}{e^x - 1}$$
$$= \frac{-8 + 3 + {}^1\!/_1}{e^1 - 1} = \frac{-4}{e-1} = \frac{4}{1-e}$$

2) Vis, at

$$\lim_{x\to 1} \frac{-4x^2+3x+\ln(x)+1}{e^x-x+2-e} = 0$$

Løsning:

Her skal L'Hôpitals regel IKKE bruges.

Ved indsætning af $x=1$ i tæller og nævner fås

$$\lim_{x\to 1} \frac{-4x^2+3x+\ln(x)+1}{e^x-x+2-e} = \frac{-4+3+0+1}{e^1-1+2-e} = \frac{0}{1} = 0$$

Opgave 3

1) Vis, at

$$\int (5x^4e^{-3x} - 3x^5e^{-3x} + 8x^3 - 8x)\,dx$$

$= x^5e^{-3x} + 2x^4 - 4x^2 + C$, hvor C er en arbitrær konstant.

Løsning:

Ved differentiation af udtrykket $x^5e^{-3x} + 2x^4 - 4x^2$ fås

$$5x^4e^{-3x} + x^5(-3)e^{-3x} + 2\cdot 4x^3 - 4\cdot 2x$$
$$= 5x^4e^{-3x} - 3x^5e^{-3x} + 8x^3 - 8x$$

Det viser, at $x^5e^{-3x} + 2x^4 - 4x^2$ er en stamfunktion til

$5x^4e^{-3x} - 3x^5e^{-3x} + 8x^3 - 8x$.

Derfor er det ubestemte integral netop $x^5e^{-3x} + 2x^4 - 4x^2$ tillagt en arbitrær konstant, som det skulle vises.

2) Udregn ved brug af integration ved substitution det ubestemte integral

$$\int 9xe^{3x^2}\,dx$$

Løsning:

Ved substitutionen $u = 3x^2$ fås

$$du = 6xdx$$

Dermed er

$$\int 9xe^{3x^2}\,dx = \int \frac{3}{2} \cdot e^{3x^2} \cdot 6x\,dx = \frac{3}{2}\int e^u\,du$$

$= \frac{3}{2}e^u + C = \frac{3}{2}e^{3x^2} + C$, hvor C er en arbitrær konstant.

3) Udregn ved brug af partiel integration det ubestemte integral

$$\int 9xe^{3x}\,dx$$

Løsning:

Ved partiel integration fås:

$$\int 9xe^{3x}\,dx = 9x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int 9 \cdot \frac{1}{3}e^{3x}\,dx = 3xe^{3x} - \int 3e^{3x}\,dx$$

$$= 3xe^{3x} - 3 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + C = (3x-1)e^{3x} + C,$$

hvor C er en arbitrær konstant.

Rettevejledning slut