Eksamen i Matematik A, 7. februar 2020
Rettevejledning

Alle referencer er til lærebogen i kurset:
Sydsæter, Hammond, Strøm og Carvajal: "Essential Mathematics for Economic Analysis". Fifth edition. Pearson, 2016.

Opgave 1

Betragt funktionen f af to variable, der er givet ved forskriften

$$f(x, y) = 4\ln(xy) - 2x^2 - 2y \quad \text{for alle } x > 0 \text{ og } y > 0.$$

f er altså defineret på mængden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ og } y > 0\}$.

(a) Bestem $f_1'(x, y)$ og $f_2'(x, y)$.

Løsning: Ved at differentiere mht. henholdsvis x og y fås (kædereglen anvendes ved differentiation af det første led):

$$\begin{aligned} f_1'(x, y) &= 4y\frac{1}{xy} - 4x = \frac{4}{x} - 4x \quad \text{og} \\ f_2'(x, y) &= 4x\frac{1}{xy} - 2 = \frac{4}{y} - 2\,. \end{aligned}$$

(b) f har ét kritisk punkt. Bestem dette.

Løsning: De kritiske punkter for f er løsningerne til ligningerne $f_1'(x, y) = 0$ og $f_2'(x, y) = 0$. Idet vi bruger resultatet fra (a), ser vi, at ligningerne er:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} - 4x &= 0 \quad \text{og} \\ \frac{4}{y} - 2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Første ligning giver $x^2 = 1$ og anden ligning giver $y = 2$. Da et kritisk punkt naturligvis skal ligge i f's definitionsmængde, ser vi således, at det eneste kritiske punkt er $(x, y) = (1, 2)$.

(c) Bestem alle anden-ordens partielle afledede for f.

Løsning: Ved differentiation af de første-ordens partielle afledede fra (a) fås:

$$\begin{aligned} f''_{11}(x,y) &= -4x^{-2}-4\,, \\ f''_{12}(x,y) &= f''_{21}(x,y)=0\,, \\ f''_{22}(x,y) &= -4y^{-2}\,. \end{aligned}$$

(d) Vis, at det kritiske punkt fra (b) er et globalt maksimumspunkt for f.

Løsning: Vi kan bruge de tilstrækkelige betingelser for globalt maksimumspunkt i Theorem 13.2.1(a), s.500. For alle $x>0$ og $y>0$ gælder:

$$f''_{11}(x,y) = -4x^{-2}-4<0\,, \quad f''_{22}(x,y) = -4y^{-2}<0 \quad \text{og}$$
$$f''_{11}(x,y)f''_{22}(x,y)-(f''_{12}(x,y))^2 = 16(x^{-2}+1)y^{-2}>0\,.$$

Definitionsmængden $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0 \text{ og } y>0\}$ er konveks (alle punkter på liniestykket mellem to punkter med positive koordinater har positive koordinater). Så følger af sætningen, at det kritiske punkt $(1,2)$ er et globalt maksimumspunkt for f.

(e) Betragt ligningen

$$f(x,y) = -9\,.$$

Vis, at punktet $(2,\frac{1}{2})$ er en løsning til denne ligning.
I en omegn af $(2,\frac{1}{2})$ definerer ligningen y som en implicit given funktion $y=g(x)$ af x. Bestem $g'(2)$, altså differentialkvotienten y' i punktet $(2,\frac{1}{2})$.

Løsning: Ved at sætte ind i forskriften for f fås:

$$f(2,\frac{1}{2}) = 4\ln(1)-2\cdot 2^2-2\cdot\frac{1}{2} = 0-8-1=-9\,.$$

Af formlen for differentialkvotienten for en implicit given funktion i (12.3.2), s.453 fås:

$$g'(2)=y'=-\frac{f'_1(2,\frac{1}{2})}{f'_2(2,\frac{1}{2})} = -\frac{-6}{6}=1\,.$$

Alternativt kan man bruge implicit differentiation som i afsnit 7.1.

Opgave 2

Lad f og g være differentiable funktioner af én variabel defineret på hele $\mathbb{R}$.
Antag, at $g(x)\neq 0$ for alle $x\in\mathbb{R}$.

(a) Betragt funktionen $\frac{f}{g}$ givet ved

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Opskriv formlen for differentialkvotienten $(\frac{f}{g})'(x)$ (*kvotientreglen*).

Løsning: Kvotientreglen (se (6.7.3), s. 195):

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\,.$$

(b) Vis, at funktionen $\frac{f}{g}$ er voksende på $\mathbb{R}$ hvis og kun hvis

$$f'(x)g(x) \geq f(x)g'(x) \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Løsning: Funktionen $\frac{f}{g}$ er voksende på $\mathbb{R}$ hvis og kun hvis $(\frac{f}{g})'(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ (se fx. (6.3.1), s.177). Det ses af kvotientreglen fra (a), at dette er tilfældet hvis og kun hvis

$$f'(x)g(x) \geq f(x)g'(x) \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

(c) Vis, at funktionen $h(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ er voksende på $\mathbb{R}$.

Løsning: Af (b) følger, at h er voksende netop hvis $e^x(x^2+1) \geq e^x(2x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Dette er ækvivalent med $x^2 + 1 \geq 2x$ for alle x, hvilket er sandt, da $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$.

(d) Betragt funktionen k givet ved

$$k(x) = \frac{x}{e^x} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bestem Taylor-polynomiet af anden orden for k omkring punktet $x = 0$.

Løsning: Taylor-polynomiet af anden orden for k omkring punktet $x = 0$ er (se afsnit 7.5):

$$p_2(x) = k(0) + k'(0)x + \frac{1}{2}k''(0)x^2\,.$$

Kvotientreglen giver $k'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ og videre $k''(x) = \frac{x-2}{e^x}$. Heraf fås $k'(0) = 1$ og $k''(0) = -2$. Altså får vi:

$$p_2(x) = 0 + 1x + \frac{1}{2}(-2)x^2 = x - x^2\,.$$

(e) Betragt igen funktionen k fra (d). Udregn det ubestemte integral

$$\int k(x)\,dx\,.$$

Integralet kan udregnes vha. partiel integration (afsnit 9.5):

$$\begin{aligned}\int k(x)\,dx &= \int xe^{-x}\,dx \\ &= x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C \\ &= -(1+x)e^{-x} + C\,,\end{aligned}$$

hvor C er en arbitrær konstant.

Opgave 3

Betragt følgende optimeringsproblem med én bibetingelse:

$$\max_{x,y}\ 2x+y \quad \text{under bibetingelsen} \quad x^2+y^2=20\,.$$

(a) Opskriv Lagrangefunktionen $\mathcal{L}(x,y)$ for dette problem, og opstil de tre førsteordensbetingelser.

Løsning: (Se afsnit 14.1). Lagrangefunktionen er

$$\mathcal{L}(x,y) \;=\; 2x+y-\lambda(x^2+y^2-20)\,.$$

Førsteordensbetingelserne er:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1'(x,y) = 2-\lambda\cdot 2x &= 0 \\ \mathcal{L}_2'(x,y) = 1-\lambda\cdot 2y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 20\end{aligned}$$

(b) Bestem de to løsninger til førsteordensbetingelserne.

Løsning: Ved løsning af de tre ligninger med tre ubekendte fås følgende to løsninger:

$$\begin{aligned}(x,y,\lambda) &= (4,2,\tfrac{1}{4}) \quad \text{og} \\ (x,y,\lambda) &= (-4,-2,-\tfrac{1}{4})\,.\end{aligned}$$

Ligningerne kan fx. løses ved at bruge de første to ligninger til at få $x=2y$ og så indsætte dette i den sidste ligning og løse for y (giver $y=2$ eller $y=-2$). For hver y-værdi får vi så umiddelbart den tilhørende x-værdi (da $x=2y$) og til sidst den tilhørende λ-værdi ved fx. at bruge den første ligning.

(c) Brug ekstremværdisætningen (*The Extreme Value Theorem*) til at redegøre for, at der findes en løsning til optimeringsproblemet.

Bestem den entydige løsning til problemet.

Løsning: Optimeringsproblemet består i at maksimere en kontinuert funktion af to variable på cirklen med centrum i $(0,0)$ og radius $\sqrt{20}$, som er en kompakt (afsluttet og begrænset) mængde. Det følger derfor umiddelbart af ekstremværdisætningen (Theorem 13.5.1, s.518), at der findes en løsning

Enhver løsning vil opfylde førsteordensbetingelserne, så af (b) følger, at der kun er to løsningskandidater. Da $2 \cdot 4 + 2 = 10$ og $2(-4) + (-2) = -10$ får vi, at den eneste løsning er $x = 4$ og $y = 2$ (med tilhørende $\lambda = \frac{1}{4}$), og at den tilhørende maksimumsværdi er 10. $x = -4$ og $y = -2$ er løsning til det tilsvarende minimeringsproblem (men det er ikke en del af spørgsmålet).