KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2010 S-1B ex Ret

EKSAMEN I MATEMATIK B

Mandag den 7. juni 2010

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. For ethvert tal $p \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem determinanten $\det(A(p))$ for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er regulær.

LØSNING: Vi ser, at matricen $A(p)$ har determinanten $\det(A(p)) = 2p - p = p$, og da en kvadratisk matrix er regulær, når og kun når dens determinant er forskellig fra nul, ser vi, at matricen $A(p)$ er regulær, netop når $p \neq 0$.

(2) Matricen $A(1)$ er regulær. Bestem den inverse matrix $A(1)^{-1}$ til $A(1)$.

LØSNING: Vi ser, at

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da matricen $A(1)$ er regulær, danner vi blokmatricen $C = (A(1)|E)$ og reducerer denne matrix til echelonmatrix. Vi får da, at denne echelonmatrix er $F = (E|A(1)^{-1})$, hvor

$$A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Bestem egenværdierne for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$.

LØSNING: Det karakteristiske polynomium $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ for matricen $A(p)$ er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P(t) = \det(A(p) - tE) = (1-t)(2-t)(p-t) - (p-t) =$$

$$\Big((1-t)(2-t)-1\Big)(p-t) = \Big(t^2-3t+1\Big)(p-t).$$

De karakteristiske rødder (altså rødderne i P og dermed egenværdierne for $A(p)$) bliver så

$$t_1 = \frac{1}{2}\Big(3-\sqrt{5}\Big),\ t_2 = \frac{1}{2}\Big(3+\sqrt{5}\Big) \text{ og } t = p.$$

(4) Bestem de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er henholdsvis positiv definit, positiv semidefinit eller indefinit.

LØSNING: Vi ser, at egenværdierne t_1 og t_2 begge er positive. Vi får derfor følgende resultater:

$$A(p) \text{ er positiv definit } \Leftrightarrow p > 0,$$

$$A(p) \text{ er positiv semidefinit } \Leftrightarrow p \geq 0$$

og

$$A(p) \text{ er indefinit } \Leftrightarrow p < 0.$$

(5) Betragt den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, hvis tilhørende symmetriske matrix er 3×3 matricen $A(1)$.

Bestem en forskrift for den kvadratiske form K.

Betragt dernæst den kvadratiske form $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\,(x_1, x_3) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_3) = K\Big(\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{4}x_1, x_3\Big).$$

Bestem en forskrift for den kvadratiske form L, bestem den til L hørende symmetriske 2×2 matrix B, og godtgør, at B er positiv definit.

LØSNING: Vi ser umiddelbart, at

$$\forall\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2.$$

Heraf får vi så, at

$$\forall\,(x_1, x_3) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_3) = K\Big(\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{4}x_1, x_3\Big) =$$

$$\frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{8}x_1^2 + x_3^2 - \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{8}x_1^2 + x_3^2.$$

Det fremgår umiddelbart heraf, at den til den kvadratiske form L hørende symmetriske 2×2 matrix er

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og da B er en diagonalmatrix med positive diagonalelementer, ser vi straks, at B er positiv definit.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \,\land\, y \in \mathbf{R}\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in D : f(x, y) = x^2 + y^4 + 2\sqrt{x}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

LØSNING: Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3.$$

(2) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

LØSNING: Det er klart, at

$$\forall\, x > 0 : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2x + x^{-1/2} > 0,$$

hvilket viser, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$, og bestem dernæst mængden

$$P = \{(x, y) \in D \mid H(x, y) \text{ er positiv definit}\}.$$

LØSNING: Vi finder, at

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}x^{-3/2} & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Heraf finder vi så, at

$$P = \{(x, y) \in D \mid H(x, y) \text{ er positiv definit}\} =$$

$$\{(x, y) \in D \mid 2 - \frac{1}{2}x^{-3/2} > 0 \,\land\, 12y^2 > 0\} =$$

$$\{(x, y) \in D \mid x > \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \,\land\, y \neq 0\}.$$

(4) Vis, at mængden P ikke er konveks.

LØSNING: Vi ser, at punkterne $(1,1)$ og $(1,-1)$ begge ligger i mængden P. Men midtpunktetet $(1,0)$ på det linjestykke, der forbinder punktet $(1,1)$ med $(1,-1)$, ligger ikke i P. Derfor er mængden P ikke konveks.

(5) Bestem mængden

$$S = \{(x,y) \in D \mid H(x,y) \text{ er positiv semidefinit}\},$$

og vis, at S er en konveks mængde.

LØSNING: Vi ser, at

$$S = \{(x,y) \in D \mid H(x,y) \text{ er positiv semidefinit}\} =$$

$$\{(x,y) \in D \mid 2 - \frac{1}{2}x^{-3/2} \geq 0 \wedge 12y^2 \geq 0\} =$$

$$\{(x,y) \in D \mid x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \wedge y \in \mathbf{R}\}.$$

Det er klart, at mængden S er konveks.

(6) Betragt funktionen $g : S \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall (x,y) \in S : g(x,y) = \exp(f(x,y)).$$

Vis, at funktionen g er kvasikonveks. Er g konveks?

LØSNING: Det er klart, at funktionen $\phi : S \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall (x,y) \in S : \phi(x,y) = f(x,y),$$

er konveks, og da eksponentialfunktionen er voksende, er funktionen g åbenbart kvasikonveks. Da eksponentialfunktionen tillige er (endda strengt) konveks, er g er konveks funktion.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = x - 5.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

LØSNING: Vi ser, at

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = x - 5 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} - x = -5.$$

Ved at benytte "Panserformlen" følger så, at

$$x = Ce^t + e^t \int e^{-t}(-5)\, dt = Ce^t + 5,$$

hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 10$ er opfyldt.

LØSNING: Vi ser umiddelbart, at betingelsen $\tilde{x}(0) = 10$ giver, at $C = 5$. Så er

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = 5e^t + 5 = 5(e^t + 1).$$

(3) Bestem differentialkvotienterne

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} \text{ og } \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}$$

af første og anden orden for løsningen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$.

LØSNING: Vi ser, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = 5e^t \text{ og } \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = 5e^t.$$

(4) Bestem Taylorpolynomiet af tredje orden for funktionen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ ud fra punktet $t_0 = 0$.

LØSNING: Det er klart, at

$$\frac{d^3\tilde{x}}{dt^3} = 5e^t,$$

og vi får så, at Taylorpolynomiet $P_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ af tredje orden ud fra punktet $t_0 = 0$ er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : \tilde{x}(0) + \frac{d\tilde{x}}{dt}(0)t + \frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}(0)t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\tilde{x}}{dt^3}(0)t^3 =$$

$$10 + 5t + \frac{5}{2}t^2 + \frac{5}{6}t^3.$$

Opgave 4. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som givet ved

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = (x+2y)^2.$$

For ethvert $v > 0$ betragter vi desuden mængden

$$A(v) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq v\}.$$

(1) Løs ligningen $f(x,y) = 0$.

LØSNING: Vi finder, at

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x.$$

(2) Bestem værdimængden for funktionen f.

Det er klart, at

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) \geq 0,$$

og da fx

$$f(x,0) = x^2 \to \infty \text{ for } x \to \infty,$$

får vi, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [0, \infty[$.

(3) Bestem for ethvert $v > 0$ integralet

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x,y)\, d(x,y).$$

LØSNING: Vi ser, at

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^1 \Big(\int_0^v \big(x^2 + 4xy + 4y^2\big)\, dy \Big)\, dx =$$

$$\int_0^1 \Big[x^2 y + 2xy^2 + \frac{4}{3}y^3\Big]_0^v\, dx = \int_0^1 \big(x^2 v + 2xv^2 + \frac{4}{3}v^3\big)\, dx =$$

$$\Big[\frac{1}{3}x^3 v + x^2 v^2 + \frac{4}{3}xv^3\Big]_0^1 = \frac{4}{3}v^3 + v^2 + \frac{1}{3}v.$$

(4) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \Big(\frac{I(v)}{\sin(\frac{v}{9})} \Big).$$

LØSNING: Ved at benytte L'Hôpitals regel får vi, at

$$\lim_{v \to 0+} \Big(\frac{I(v)}{\sin(\frac{v}{9})} \Big) = \lim_{v \to 0+} \Big(\frac{4v^2 + 2v + \frac{1}{3}}{\frac{1}{9}\cos(\frac{1}{9}v)} \Big) = 3.$$