Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2018 V-1B ex ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik B

Lørdag den 9. juni 2018

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 2 & s & 1 \\ s & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi finder, at $\det A(s) = 4 - 1 - 2s^2 = 3 - 2s^2$. Så er $\det A(s) = 0$, når og kun når $s = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Matricen $A(s)$ er derfor regulær, når og kun når $s \in \mathbf{R} \setminus \{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\}$.

(2) Bestem de $s \in \mathbf{R}$ for hvilke, matricen $A(s)$ er positiv definit.

Vis desuden, at matricen $A(s)$ ikke er negativ definit for noget $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. De ledende hovedunderdeterminanter for matricen $A(s)$ er $D_1 = 2, D_2 = 2 - s^2$ og $D_3 = 3 - 2s^2$. Matricen $A(s)$ er positiv definit, hvis og kun hvis alle de ledende hovedunderdeterminanter er positive, hvilket betyder, at betingelsen

$$-\sqrt{2} < s < \sqrt{2} \wedge -\sqrt{\frac{3}{2}} < s < \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{3}{2}} < s < \sqrt{\frac{3}{2}}$$

skal være opfyldt.

Da $D_1 = 2$, ser vi, at $A(s)$ ikke kan være negativ definit.

(3) Bestem de $s \in \mathbf{R}$ for hvilke, matricen $A(s)$ er positiv semidefinit.

Vis tillige, at matricen $A(s)$ ikke er negativ semidefinit for noget $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Hovedunderdeterminanterne for $A(s)$ er $\Delta_1 = 2, 1, 2$ (af første orden),$\Delta_2 = 2 - s^2, 3, 2$ (af anden orden) og $\Delta_3 = 3 - 2s^2$ (af tredje orden). Matricen $A(s)$ er positiv semidefinit, hvis og kun hvis alle disse hovedunderdeterminanter er ikke-negative, så svaret er

$$-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq s \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Da $\Delta_1 = 2, 1, 2$ kan $A(s)$ ikke være negativ semidefinit.

(4) Bestem de $s \in \mathbf{R}$ for hvilke, matricen $A(s)$ er indefinit.

Løsning. På baggrund af det ovenstående får vi, at $A(s)$ er indefinit, når og kun når

$$s < -\sqrt{\frac{3}{2}} \ \vee \ s > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

(5) Bestem egenværdierne og de tilhørende egenrum for matricen $A(0)$. Her er $s = 0$.

Løsning. Matricen

$$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium

$$P(t) = \det(A(0) - tE) = (2-t)^2(1-t) - (1-t) = ((2-t)^2 - 1)(1-t).$$

De karaktetistiske rødder er derfor $t_1 = 1$ og $t_2 = 3$. De tilhørende egenrum er

$$V(1) = \operatorname{span}\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\} \ \text{ og } \ V(3) = \operatorname{span}\{(1, 0, 1)\}.$$

(6) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så ligningen

$$D = Q^{-1}A(0)Q$$

er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ \text{ og } \ Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + x^2y^2 + 2y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2xy^2 = 2x(1+y^2) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y+4y = 2y(x^2+2).$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Det eneste stationære punkt er $(0,0)$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser straks, at

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1+y^2) & 4xy \\ 4xy & 2x^2+4 \end{pmatrix}.$$

(4) Vis, at funktionen f ikke er konveks.

Løsning. Vi ser på matricen

$$f''(x,1) = \begin{pmatrix} 4 & 4x \\ 4x & 2x^2+4 \end{pmatrix},$$

og vi bestemmer determinanten, som er $\det f''(x,1) = -8x^2 + 16 = -8(x^2-2)$. Vi ser nu, at denne determinant er negativ, når $x^2 > 2$, og så kan funktionen f ikke være konveks.

For ethvert $v \in \mathbf{R}$ betragter vi den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq v \wedge 0 \leq y \leq 1\}.$$

(5) Udregn integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x,y)\, d(x,y).$$

Løsning. Vi får, at

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^v \Big(\int_0^1 (x^2 + x^2y^2 + 2y^2)\, dy \Big)\, dx =$$

$$\int_0^v \left[x^2 y + \frac{1}{3}x^2y^3 + \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1 dx = \int_0^v \left(x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} \right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x \right]_0^v = \frac{4}{9}v^3 + \frac{2}{3}v.$$

(6) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0} \frac{I(v)}{e^v - 1}.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\lim_{v \to 0} \frac{I(v)}{e^v - 1} = \lim_{v \to 0} \frac{\frac{4}{9}v^3 + \frac{2}{3}v}{e^v - 1} = \lim_{v \to 0} \frac{\frac{4}{3}v^2 + \frac{2}{3}}{e^v} = \frac{2}{3},$$

hvor vi har benyttet L'Hôpitals regel.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = 2te^{t^2}x^3.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser først, at $x = 0$ er en konstant løsning, der er defineret på hele $\mathbf{R}$.

Hvis $x \neq 0$, finder vi, at

$$x^{-3}dx = 2e^{t^2}t\, dt \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^{-2} = \int e^{t^2}dt \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^{-2} = e^{t^2} + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$. Vi sætter nu $C = -2k$, så

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{C - 2e^{t^2}}}.$$

Vi må nu kræve, at $C - 2e^{t^2} > 0$ og dermed, at $e^{t^2} < \frac{C}{2}$.
Hvis $C \leq 0$, er der ingen løsning. Hvis $C > 0$, får vi, at $t^2 < \ln\frac{C}{2}$, og dermed gælder det, at

$$-\sqrt{\ln\frac{C}{2}} < t < \sqrt{\ln\frac{C}{2}}.$$

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = \frac{1}{2}$ er opfyldt.

Løsning. Idet $\tilde{x}(0) = \frac{1}{2}$, ser vi, at $\sqrt{\frac{1}{C-2}} = \frac{1}{2}$, så $C = 6$. Da er

$$\tilde{x}(t) = \sqrt{\frac{1}{6 - 2e^{t^2}}}, \text{ hvor } -\sqrt{\ln 3} < t < \sqrt{\ln 3}.$$

Opgave 4. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = \frac{x^2}{1 + y^2}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + y^2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2yx^2}{(1 + y^2)^2}.$$

(2) Bestem de stationære punkter og værdimængden for funktionen f.

Løsning. De stationære punkter er $(x, y) = (0, t)$, hvor $t \in \mathbf{R}$. Idet $f(0, t) = 0$, og $f(x, 0) = x^2 \to \infty$ for $x \to \infty$, er værdimængden $R(f) = [0, \infty[$.

Vi betragter den kompakte mængde

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \land \ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(3) Godtgør, at restriktionen af funktionen f til den kompakte mængde K har både en størsteværdi og en mindsteværdi på K, og bestem disse værdier.

Løsning. Vi laver en randundersøgelse. Først sætter vi

$I : 0 \leq x \leq 1$ og $y = 0$. Da er $f(x, 0) = x^2$ voksende på I, og vi ser, at $f(0, 0) = 0$ og $f(1, 0) = 1$.

$II : x = 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Da er $f(1, y) = \frac{1}{1+y^2}$ aftagende på stykket II og $f(1, 1) = \frac{1}{2}$.

$III : y = 1$ og $0 \leq x \leq 1$. Vi får, at $f(x, 1) = \frac{1}{2}x^2$, som er voeksende på III. Desuden ser vi, at $f(0, 1) = 1$.

$IV : 0 \leq x \leq 1$ og $x = 0$. Vi ser, at $f(0, y) = 0$.

Der er således minimum i punkterne $(0, y)$ med $f(0, y) = 0$. Der er maksimum i $(1, 0)$ med $f(1, 0) = 1$.

Vi betragter ligningen $f(x, y) = \frac{1}{5}$, og vi bemærker, at punktet $(x_0, y_0) = (1, 2)$ er en løsning til denne ligning.

(4) Vis, at i en omegn $U(1)$ af $x_0 = 1$ er den variable y givet implicit som en funktion $y = y(x)$ af den variable x, og bestem differentialkvotienten $y'(1)$.

Løsning. Vi finder, at

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = \frac{2x}{1 + y^2} \, \frac{(1 + y^2)^2}{2yx^2} = \frac{1 + y^2}{xy},$$

så

$$y'(1) = \frac{5}{2}.$$