KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2012 S-1B ex ret

EKSAMEN I MATEMATIK B

Mandag den 11. juni 2012

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ s & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten $\det\Big(A(s)\Big)$, og godtgør dernæst, at matricen $A(s)$ er regulær for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi finder, at $\det\Big(A(s)\Big) = -1$, hvoraf det fremgår, at matricen $A(s)$ er regulær for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den inverse matrix $\Big(A(s)\Big)^{-1}$ til $A(s)$ for et vilkårligt $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Ved at anvende rækkeoperationer og reducere blokmatricen $\Big(A(s)|E\Big)$ til echelonmatricen $\Big(E|\Big(A(s)\Big)^{-1}\Big)$ opnår man, at

$$\Big(A(s)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s \\ 0 & 0 & 1 \\ -s & 1 & s^2 \end{pmatrix}.$$

(3) Udregn det karakteristiske polynomium $P_{A(s)}$ for et vilkårligt $s \in \mathbf{R}$, og godtgør dernæst, at

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : P_{A(s)} = P_{A(-s)}.$$

Løsning. Vi finder, at

$$P_{A(s)}(t) = \det\Big(A(s) - tE\Big) = (1-t)t^2 + s^2 t - (1-t) =$$

$$t^2-t^3+s^2t-1+t = -t^3+t^2+(1+s^2)t-1 = -t^3+t^2+\Big(1+(-s)^2\Big)t-1 = \det\Big(A(-s)-tE\Big) = P_{A(-s)}.$$

(4) Bestem egenværdierne for matricen $A(0)$.

Løsning. Vi ser, at

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

og at

$$P_{A(0)}(t) = \det\Big(A(s)-tE\Big) = -t^3+t^2+t-1.$$

Vi ser straks, at $t = 1$ er rod i $P_{A(0)}(t)$, og ved polynomiers division opnår vi, at

$$P_{A(0)}(t) = (t-1)(t^2-1),$$

så rødderne i $P_{A(0)}(t)$, og dermed egenværdierne for $A(0)$ er $t_1 = 1$ (med multiplicitet 2) og $t_2 = -1$ (med multiplicitet 1).

(5) Bestem egenrummene for matricen $A(0)$.

Løsning. Vi ser, at

$$V(1) = N\Big(A(0)-E\Big) = \mathrm{span}\{(1,0,0),(0,1,1)\}$$

er egenrummet for egenværdien 1, og at

$$V(-1) = N\Big(A(0)-(-1)E\Big) = N\Big(A(0)+E\Big) = \mathrm{span}\{(0,-1,1)\}$$

er egenrummet for egenværdien -1.

(6) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^{-1}A(0)Q.$$

Løsning. På baggrund af ovenstående resultater ser vi, at

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ og at } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in D : f(x, y) = \ln(x) + \frac{y}{x} - \frac{1}{2}y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} - y.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Hvis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0,$$

får vi, at $x = y$, og at $x^2 = 1$, så funktionen f har netop det ene stationære punkt $(x, y) = (1, 1)$, idet $x > 0$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$, og afgør dernæst om det fundne stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Vi får, at

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} + \frac{2y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} & -1 \end{pmatrix}, \text{ så } H(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

og da det$\big(H(1, 1)\big) = -2$, er det stationære punkt $(1, 1)$ et sadelpunkt for funktionen f.

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

Løsning. Idet $f(x,0) = \ln(x)$, ser vi straks, at værdimængden for f er $R(f) = \mathbf{R}$.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(1 + 3t^2\Big)x = 6t^2 e^{-t}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Idet

$$\int (1 + 3t^2)\, dt = t + t^3 + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

får vi, at

$$x = Ce^{-(t+t^3)} + e^{-(t+t^3)} \int e^{(t+t^3)} 6t^2 e^{-t} dt =$$

$$Ce^{-(t+t^3)} + e^{-(t+t^3)} \int 2e^{t^3} d(t^3) = Ce^{-(t+t^3)} + 2e^{-(t+t^3)} e^{t^3} =$$

$$Ce^{-(t+t^3)} + 2e^{-t}, \text{ hvor } C \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 5$.

Løsning. Idet $\tilde{x}(0) = 5$, får vi, at $C = 3$, så

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = 3e^{-(t+t^3)} + 2e^{-t}.$$

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0).$$

Løsning. Ved at benytte differentialligningen $(*)$ og betingelsen $\tilde{x}(0) = 5$, får man, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0) = -5.$$

Opgave 4. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som givet ved

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^3 y + 2y^4 - 5x^4.$$

(1) Vis, at funktionen f er homogen, og bestem homogenitetsgraden.

Løsning. For ethvert $t > 0$ får vi, at

$$f(tx, ty) = (tx)^3(ty) + 2(ty)^4 - 5(tx)^4 = t^4\big(f(x, y)\big),$$

hvilket viser, at funktionen f er homogen af grad $k = 4$.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y - 20x^3 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + 8y^3.$$

(3) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Hvis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0,$$

får vi, at $x^2(3y - 20x) = 0$, så $x = 0$ eller $x = \frac{3}{20}y$, og $x^3 = -8y^3$, så $x = -2y$. Man får så, at den eneste løsning er punktet $(x, y) = (0, 0)$.

(4) Vis, at det stationære punkt er et sadelpunkt for funktionen f. Bestem desuden værdimængden $R(f)$ for f.

Løsning. Vi ser, at $f(0, y) = 2y^4$, og at $f(x, 0) = -5x^4$. Heraf fremgår det, at det stationære punkt $(0, 0)$ er et sadelpunkt for funktionen f, og at f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

(5) Vis, at de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f er homogene funktioner, og bestem deres homogenitetsgrad.

Løsning. Det er klart, at de partielle afledede af første orden begge er homogene funktioner af grad 3, jvf. Eulers sætning.