Rette vejledning til: Eksamen på Økonomistudiet sommer 2018

Makroøkonomi I

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

4. juni 2018

Dette eksamenssæt består af 7 sider (inkl. forside).

OBS: Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangsvej, skal du kontakte et tilsyn, blive registreret som syg hos denne. Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen. Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Opgave 1: R&D og vækst

Betragt en lukket økonomi, der er baseret på R&D-drevet teknologisk udvikling, hvor produktionen af teknologi/viden er givet ved:

$$A_{t+1} - A_t = \rho s_R Y_t,\ \ \rho > 0 \text{ og } 0 < s_R < 1, \tag{1}$$

hvor s_R er andelen af den samlede produktion (Y_t), der bruges på forskning. Den samlede produktion i økonomien er beskrevet ved en standard Cobb-Douglas produktionsfunktion:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

hvor K_t er fysisk kapital og L er arbejdsstyrken, der antages konstant over tid.

1.1

Vis at vækstraten i teknologi/viden er givet ved:

$$\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} s_R L. \tag{3}$$

Redefør kort for om denne model er i stand til at udvise balanceret vækst (under standard antagelser vedr. kapitalakkumulation – som i pensums kapitel 5 fx).

Svar1: omskriv produktionsfunktionen og indsæt i ligning (1):

$$\begin{aligned}
Y_t &= \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t L \Rightarrow \\
A_{t+1} - A_t &= \rho s_R \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t L \Leftrightarrow \\
\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} &= \rho s_R \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L
\end{aligned}$$

Svar2: Denne model er i stand til udvise balanceret vækst. Hvorfor? Hvis modellen konvergerer i kapital pr. effektiv arbejder – hvilket den vil gøre under standard antagelser – vil:

$$\frac{K_t}{Y_t} = \frac{K_t}{K_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha}} = \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{1-\alpha} = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$$

også blive konstant hvilket betyder, at vækstraten i teknologi bliver konstant:

$$g_t = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho \left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha} s_R L,$$

hvilket også vil være vækstraten i kapital pr. arbejder og BNP pr. arbejder. Herefter vil man kun vise, at lønindkomst som andel af BNP og reallejesatsen vil være konstante, hvilket følger CD-produktionsfunktionen.

1.2

Sammenlign denne model med R&D-modellen fra pensums kapitel 9, hvor produktionen af teknologi var givet ved:

$$A_{t+1} - A_t = \rho A_t^{\phi} L_{At}^{\lambda},\ \rho > 0,\ 0 < \phi \leq 1,\ 0 < \lambda \leq 1. \tag{4}$$

Hvad er der antaget om marginal produktet til eksisterende teknologi i produktionen af ny teknologi i R&D modellen givet ved ligningerne (1)-(3)?

Svar1: R&D modellen i denne opgave minder om modellen i kapitel 9, hvis det antages at $\phi = \lambda = 1$, og befolkningsvæksten (n) er nul. Dog vil vækstraten i indeværende model være påvirket af kapital-output forholdet (K_t/Y_t), og der vil derfor være "feedback" fra kapitalakkumulation til vækstraten i teknologi, hvilket betyder at g_t kun er konstant på den balanceret vækststi (i modsætning til kapitel 9 modellen med $\phi = \lambda = 1$ og $n = 0$).

Svar2: Da denne model svarer til en situation hvor $\phi = 1$, er der antaget konstant marginal produkt til eksisterende teknologi i produktionen af ny teknologi; dvs. det bliver *ikke* sværere (eller nemmere) at finde på nye teknologier (givet de teknologier, der allerede er opfundet).

1.3

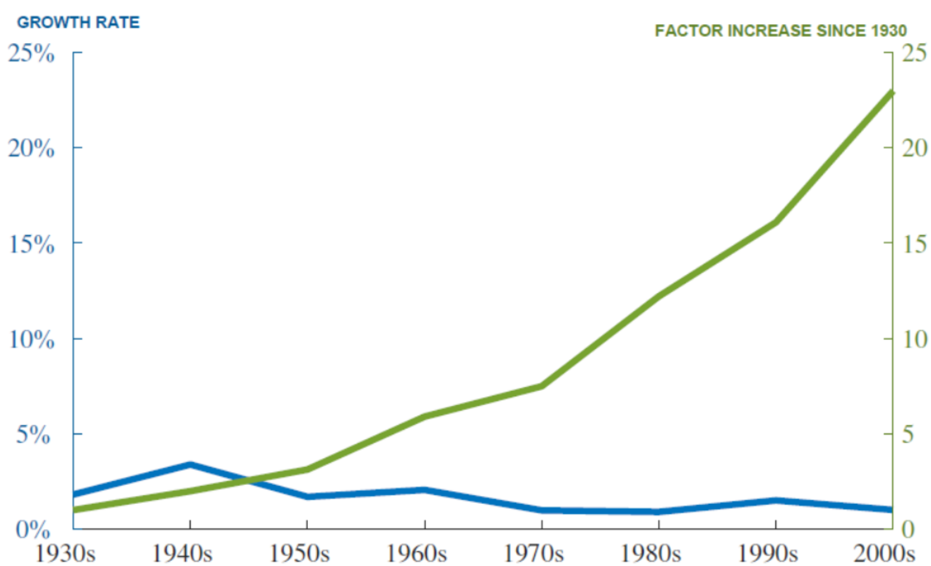
Den blå kurve i Figur 1 (næste side) viser udviklingen for vækstraten i total faktor produktivitet (dvs. et mål for teknologisk vækst) i USA fra 1930erne til 2000erne. For den samme tidsperiode, viser den grønne kurve stigningen i resurser til R&D-sektoren (dvs. omkring år 2000 bruges ca. 23 så mange gange resurser på R&D-sektoren sammenlignet med 1930erne). Diskuter om den R&D-baseret model givet ved ligningerne (1)-(3) er forenelig med data for USA (som givet i Figur 1).

Svar: Umiddelbart er data *ikke* konsistent med modellen i denne opgave. Hvis man fx antager, at USA er på den balanceret vækststi, så skulle vækstraten være stigende for en stigende mængde resurser til R&D-sektor:

$$g = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho \left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha} * \underbrace{s_R L}_{\text{res. til R\&D-sektor}}.$$

Data er derimod konsistent med en R&D model som i kapitel 9, hvor det bliver sværere at finde på nye teknologier givet eksisterende teknologier; dvs. $\phi < 1$. I sådan en model skal der være befolkningsvækst (og dermed vækst i antal forskere) for, at der er konstant positiv vækst på den balanceret vækststi. På den anden side, viser Figur 1 kun aggregerede data, og i virkelighedens verden kan der være andre "kræfter" på spil, der reducerer det stigende vækstbidrag fra R&D-sektoren, hvilket vil sige, at det er svært *definitivt* at afvise modellen i denne opgave på baggrund af Figur 1.

Figur 1:
TFP-vækst og resurser til R&D-sektoren i USA, 1930-2000



Opgave 2: En Solowmodel med migration

I denne opgave skal du betragte en Solowmodel med migration. Ligningerne (5)-(8) udgør – i udgangspunktet – modellen:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{\beta} X_t^{\kappa},\ \alpha, \beta, \kappa \geq 0,\ \alpha + \beta + \kappa = 1 \text{ og } A > 0, \tag{5}$$

$$L_{t+1} = L_t + M_t,\ L_0, M_0 \text{ givet}, \tag{6}$$

$$K_{t+1} = S_t + (1 - \delta)K_t + \lambda M_t,\ 0 \leq \delta \leq 1,\ \lambda > 0 \text{ og } K_0 \text{ givet}. \tag{7}$$

$$S_t = sY_t,\ 0 < s < 1. \tag{8}$$

Ligning (5) angiver en Cobb-Douglas produktionsfunktion, der beskriver den samlede produktion i økonomien (Y_t) som funktion af total faktor produktivitet (A), fysisk kapital (K_t), den samlede arbejdsstyrke/befolkningen (L_t) og land (X). Ligning (6) bestemmer, hvordan arbejdsstyrken vokser over tid, hvor M_t er netto-immigration i periode t; dvs. hvis $M_t > 0$ ($M_t < 0$) er antallet af immigranter større (mindre) end antallet af emigranter. Netto-immigrationsraten er defineret som $m_t \equiv M_t/L_t$. Ligning (7) beskriver, hvorledes fysisk kapital udvikler sig over tid, hvor S_t er den samlede opsparing, δ er nedslidningsraten og λ er mængden af fysisk kapital hver immigrant (emigrant) medbringer (tager med sig) til (fra) økonomien. Den samlede opsparing (S_t) er en andel (s) af den samlede produktion; jvf. ligning (8).

Den repræsentative virksomhed maksimerer profitten og der eksisterer faktormarkeder – under fuldkommen konkurrence – for ydelserne fra fysisk kapital, arbejdskraft og land. Indfødte og immigranter er perfekte substitutter i produktionen af goder (jvf. ligning 5). Der anvendes definitionerne: $y_t \equiv Y_t/L_t$, $k_t \equiv K_t/L_t$, $m_t \equiv M_t/L_t$, og $x_t = X/L_t$

2.1

Opstil den repræsentative virksomheds profitmaksimeringsproblem. Find reallønnen (w_t) og reallejesatsen (r_t).

Svar:

Virksomhedens profit-max problem er givet ved:

$$\max_{K_t L_t X} \pi = AK_t^{\alpha} L_t^{\beta} X_t^{\kappa} - r_t K_t - w_t L_t - v_t X,$$

hvor v_t er prisen på land. Reallejesatsen findes ved:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial K_t} &= 0 \\
\frac{\partial \pi}{\partial K_t} &= A\alpha K^{\alpha-1} L_t^{\beta} X_t^{\kappa} - r_t = 0 \Rightarrow \\
r_t &= A\alpha K^{\alpha-1} L_t^{\beta} X_t^{\kappa} \Leftrightarrow \\
r_t &= A\alpha K^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha-\kappa} X_t^{\kappa} \Leftrightarrow \\
r_t &= A\alpha k^{\alpha-1} x_t^{\kappa},
\end{aligned}$$

herefter findes reallønnen ved:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial L_t} &= 0 \\
\frac{\partial \pi}{\partial L_t} &= A\beta K^{\alpha} L_t^{\beta-1} X_t^{\kappa} - w_t = 0 \Rightarrow \\
w_t &= A\beta K^{\alpha} L_t^{-\alpha-\kappa} X_t^{\kappa} \Leftrightarrow \\
w_t &= A\beta k_t^{\alpha} x_t^{\kappa}
\end{aligned}$$

I delspørgsmålene 2.2-2.4 skal du antage, at økonomien er lukket for kapital eksport/import, men åben over for migration. Du skal samtidig antage at $\kappa = 0$, hvilket betyder at land (X) ikke indgår som en produktionsfaktor. Hvis ikke andet er angivet, er netto-immigrationsraten (m) antaget eksogen, tidsinvariant og positiv.

2.2

Vis at transitionsligning for kapital pr. arbejder kan skrives som:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+m}\left(sAk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t + \lambda m\right). \tag{9}$$

Under hvilken betingelse udviser modellen konvergens i kapital pr. arbejder?

Svar1: Find transitionsligning for kapital pr. arbejder: start med ligning (7) og divider med L_{t+1} på begge sider

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{S_t + (1-\delta)K_t + \lambda M_t}{L_{t+1}},$$

omskriv ligning (6) til $L_{t+1} = (1 + \frac{M_t}{L_t})L_t = (1+m)L_t$ og indsæt

$$\begin{aligned}
\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} &= \frac{sAK_t^{\alpha}{L_t}^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t + \lambda M_t}{(1+m)L_t} \Leftrightarrow \\
k_{t+1} &= \frac{1}{1+m}\left(sAk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t + \lambda m\right)
\end{aligned}$$

Svar2: Følgende betingelser er tilstrækkelige for konvergens (dvs. en global stabil steady state):

1. Transitionsligningen går igennem (0,0)

2. $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} > 0$

3. a) $\lim_{k\to 0} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} > 1$ og b) $\lim_{k\to\infty} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} < 1$

Nu tjekkes disse:

1. hvis $k_t = 0 \rightarrow k_{t+1} = \frac{\lambda m.}{1+m}$ Derfor hvis vi vil være *helt* sikre på konvergens, skal det antages at $\lambda m \geq 0$, hvilket betyder at transitionsligning vil starte ovenfor 45-graderslinien i fasediagrammet.

2. $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{\alpha sAk_t^{\alpha-1} + (1-\delta)}{1+m} > 0$

3. a) $\lim_{k\to 0} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} \rightarrow \infty$ og $\lim_{k\to\infty} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{1-\delta}{1+m} < 1 \Rightarrow 0 < m + \delta$

2.3

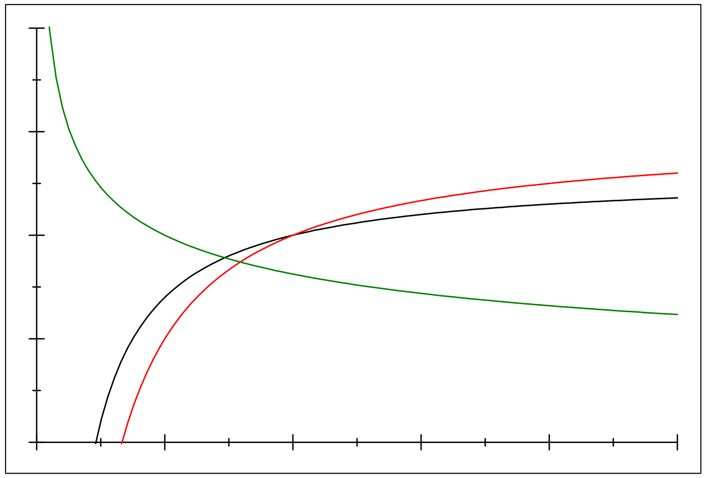
Illustrer ved brug af det modificerede Solowdiagram, hvorledes en stigning i netto-immigrationsraten (m) påvirker kapital pr. arbejder (k_t) og dermed BNP pr. arbejder (y_t). Redegør for at hvis

$\lambda < k_t$ ($\lambda > k_t$), så har en stigning i m en negativ (positiv) effekt på kapital pr. arbejder. Forklar hvorfor.

Svar: Først findes den modificerede Solowligning ud fra (7):

$$\begin{aligned}
k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+m}\left(sAk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t + \lambda m\right) - k_t \\
k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+m}\left(sAk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t + \lambda m - (1+m)\,k_t\right) \\
k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+m}\left(sAk_t^{\alpha} - \delta k_t + \lambda m - mk_t\right) \\
k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+m}\left(sAk_t^{\alpha} - (\delta + m)k_t + \lambda m\right) \\
k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+m}\left(sAk_t^{\alpha} - (\delta + \left(1 - \frac{\lambda}{k_t}\right) m)k_t\right) \\
\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t}(1+m) &= sAk_t^{\alpha-1} - \delta - \left(1 - \frac{\lambda}{k_t}\right) m
\end{aligned}$$

Ud af 1.aksen i Solowdiagrammet har vi de 2 kurver $sk_t^{\alpha-1}$ og $\delta + \left(1 - \frac{\lambda}{k_t}\right) m$. I figuren nedenfor er $sk_t^{\alpha-1}$ skitseret med grøn, og $\delta + \left(1 - \frac{\lambda}{k_t}\right) m$ med henholdsvist sort og rød for to forskellige netto-immigrationsrater: den sorte kurve er tegnet for en lavere netto-immigrationsrate ift. den rød kurve. De skærer præcis i værdien for λ. Dette betyder, at hvis $k_1^* < \lambda$, så vil en stigning i netto-immigrationsraten have en positiv effekt på kapital pr. arbejder (og der med BNP pr. arbejder). Dette er tilfældet i Figuren nedenfor (hvis $k_1^* > \lambda$ er situationen omvendt). Intuitionen bag den positive effekt er som følger: $k_1^* < \lambda$ betyder at hver immigrant bringer mere kapital med dem end kapital pr. arbejder i økonomien, hvilket dermed vil øge kapital pr. arbejder i økonomien. Man kan sige, at de mere end kompenserer for den udtynding det medfører at have et ekstra hoved i økonomien. I virkeligheden vil det nok være mest realistisk med $\lambda < k_t$, hvilket betyder (i følge modellens logik) at immigranter har en negative effekt på niveauet af BNP pr. arbejder (i SS).



2.4

I dette spørgmål skal du antage, at m afhænger positivt af kapital pr. arbejder på følgende måde:

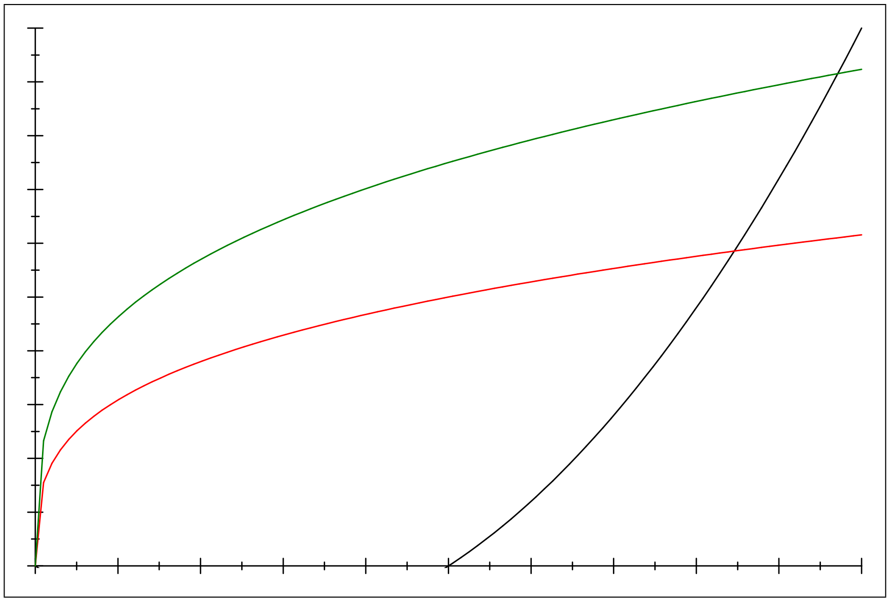
$$m(k_t) = \begin{cases} \gamma k_t, & if \quad k_t < \hat{k} \\ \bar{m}, & if \quad k_t \geq \hat{k}. \end{cases} \tag{10}$$

Sådan en sammenhæng kan begrundes med, at immigranter finder det mere attraktivt at flytte til en økonomi med en højere levestandard. Under antagelse af, at økonomien oprindeligt er i en steady state ($k_1^* < \hat{k}$), vis ved brug af Solowdiagrammet (eller det modificerede Solowdiagram), hvordan en stigning i total faktor produktivitet påvirker k_t. Sammenlign evt. dine resultater med en Solowmodel uden migration (svarende til pensums kapitel 3).

Svar: Hvis vi fx tager udgangspunkt i Solowligningen, hvor (10) indsættes (og $k_t < \hat{k}$):

$$\begin{aligned} k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+m}\left(sAk_t^{\alpha} - (\delta + \left(1 - \frac{\lambda}{k_t}\right)\gamma k_t)k_t\right) \\ k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+m}\left(sAk_t^{\alpha} - ([\delta - \lambda\gamma]\, k_t + \gamma k_t^2)\right), \end{aligned}$$

hvilket vil sige at kurverne sAk_t^{α} og $[\delta - \lambda\gamma]\, k_t + \gamma k_t^2$ skal skitseres i Solowdiagrammet. Dette er gjort nedenfor (hvor det er antaget $\lambda\gamma > \delta$). SS er hvor de to kurver krydser hinanden. Den grønne kurve angiver sAk_t^{α} for et højere niveau af A. For en given ændring i A vil effekten på k være mindre i denne model (ift. fx kap 3), da en stigning i A vil øge netto-immigrationsraten, og i denne økonomi (med ligning 10) virker dette som en dæmper på kapitalakkumulation.



I delspørgsmålene 2.5-2.7 skal du antage, at økonomien er åben for kapital import/eksport (dvs. perfekt kapitalmobilitet). Du skal også antage at $\delta = 0$ og $\kappa > 0$ (dvs. nu indgår land som en produktionsfaktor). Verdensmarkedsrenten er givet ved $\bar{r}$. Fremfor for at antage, at migration er eksogen (eller givet via en postuleret funktion som ligning 10), er der nu fri migration til/fra den indenlandske økonomi. Omkostningerne for en migrant ved at flytte til den indenlandske økonomi er givet ved:

$$\text{omk } = \eta \left(\omega + m_t\right) \bar{w}, \, \eta > 0 \text{ og } 0 < \omega < 1, \tag{11}$$

hvor $\bar{w}$ er reallønnen i verden og η og ω er eksogen parametre. Det vil sige at omkostningerne er stigende i netto-immigrationsraten (m_t), hvilket kan motiveres med, at det bliver sværere at finde job, bolig mv., når antallet af immigranter stiger ift. den indfødte befolkningsstørrelse. De økonomiske fordele ved at flytte til den indenlandske økonomi er givet ved reallønnen i landet (w_t).

2.5

Som følge af antagelsen om perfekt kapitalmobilitet vil der ske ækvalisering af realrenterne ($\bar{r} = r$). Vis at kapital pr. arbejder kan skrives som:

$$k_t^* = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{A}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}. \tag{12}$$

Svar: Fra 2.1 vides det at $r_t = Ak_t^{\alpha-1}x_t^{\kappa}$. Brug nu at $\bar{r} = r$:[1]

$$\begin{aligned}
A\alpha k_t^{\alpha-1}x_t^{\kappa} &= r_t = \bar{r} \\
\left(\frac{\alpha A}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}} &= \\
k^* &= \left(\frac{\alpha A}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}} \\
k_t^* &= \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{A}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

Bemærk i den oprindelige eksamensopgave manglede $\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$ i ligning (12); denne fejl går igen i ligning (13)

2.6

Antagelsen om fri migration til/fra den indenlandske økonomi betyder, at omkostninger og fordele ved at flytte bliver ækvaliseret i ligevægt (dvs. $\eta\left(\omega + m_t\right)\bar{w} = w_t$). Vis nu at netto-immigrationsraten vil været givet:

$$m_t = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \beta}{\eta\bar{w}\bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}} - \omega. \tag{13}$$

Med vægt på den økonomiske intuition, forklar/diskuter hvordan total faktor produktivitet (A), reallønnen i verden ($\bar{w}$) og befolkningsstørrelsen (L_t) påvirker netto-immigrationsraten for den indenlandske økonomi.

[1] Bemærk nu hvor $\delta = 0$ er reallejesatsen lig med realrenten.

Svar1: reallønnen fra opg. 2.1 indsættes i $\eta\left(\omega+m_t\right)\bar{w}=w_t$ og lign. (12) indsættes:

$$\begin{aligned}
\eta\left(\omega+m_t\right)\times\bar{w} &= w_t=A\beta k_t^{\alpha}x_t^{\kappa} \\
\eta\left(\omega+m_t\right)\times\bar{w} &= A\beta\left(\left(\frac{\alpha A}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}x_t^{\kappa}\Leftrightarrow \\
\eta\left(\omega+m_t\right)\times\bar{w} &= A\beta\left(\frac{\alpha A}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}x_t^{\frac{\kappa(1-\alpha)+\kappa\alpha}{1-\alpha}}\Leftrightarrow \\
\eta\left(\omega+m_t\right)\times\bar{w} &= A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\beta\bar{r}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}\Leftrightarrow \\
m_t &= \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\eta\bar{w}\bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\beta\left(\frac{X}{L_t}\right)^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}-\omega
\end{aligned}$$

Svar2: A øger netto-immigrationsraten, da det gør det mere attraktivt at søge mod den indenlandske økonomi eftersom reallønnen stiger. En stigning i $\bar{w}$ øger (alternativ)-omkostningerne ved at søge mod den indenlandske økonomi og virker dermed til at reducere m. En større befolkning (L_t) vil – alt andet lige – reducere m, da det vil øge "presset" på land og dermed reducere produktivitet og reallønnen. Bemærk at dette sidste resultat kun gør sig gældende hvis $\kappa>0$ og der dermed er DRS til K_t og L_t.

2.7

Skitser vha. relevante diagrammer, hvordan den indenlandske befolkning udvikler sig over tid. Hvad bliver netto-immigrationsraten i steady state? Og hvordan påvirker en stigning i A BNP pr. arbejder i steady state?

Svar1:

Indsæt netto-immigrationsraten fra ligning (13) i befolkningsudviklingen ($L_{t+1}=(1+m_t)L_t$):

$$\begin{aligned}
L_{t+1} &= (1+\frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}}\beta}{\eta\bar{w}\bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\left(\frac{X}{L_t}\right)^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}-\omega)L_t \\
L_{t+1} &= (1-\omega)L_t+\frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}}\beta X^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}}{\eta\bar{w}\bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}L_t^{1-\frac{\kappa}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

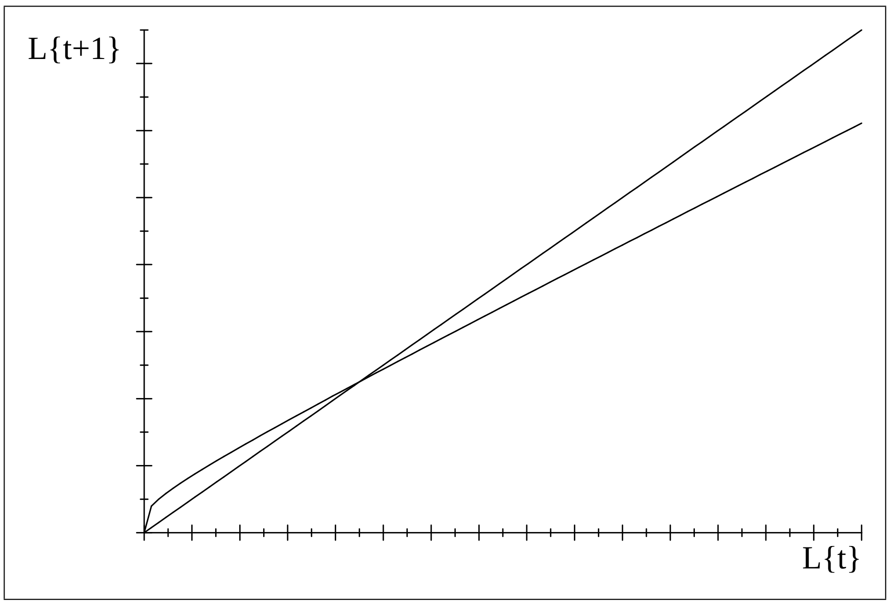
Dette er ikke-linær differensligning i L (af 1.orden). Vi kan nu undersøge, hvordan denne ser ud i et fasediagram.

1) $L_t = 0 \Rightarrow L_{t+1} = 0$

2) $\frac{\partial L_{t+1}}{\partial L_t} = 1 - \omega + \frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}} \beta X^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}}{\eta \bar{w} \bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} (1 - \frac{\kappa}{1-\alpha}) L_t^{-\frac{\kappa}{1-\alpha}} > 0$, (med sikkerhed såfremt $\frac{\kappa}{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \kappa + \alpha < 1$, hvilken er opfyldt hvis $\beta > 0$)

3) $\lim_{L \to 0} \frac{\partial L_{t+1}}{\partial L_t} \to \infty$ og $\lim_{L \to \infty} \frac{\partial L_{t+1}}{\partial L_t} = 1 - \omega < 1$.

Det betyder vi har en transitionsligning der ser ud på følgende måde:



Svar2: Kort fortalt er grunden til der er konvergens til en konstant steady-state befolkningstørrelse tilstedeværelse af land i modellen og at omkostninger ved immigration til landet er stigende i m_t. Fx hvis befolkningen er meget stor $L_0 > L^*$ vil realønnen være lille og dette vil gør det mindre attraktivt at komme til landet. Derfor reduceres netto-immigrationsraten og befolkningen falder.

Svar3: Først findes steady-state befolkningsstørrelsen:

$$
\begin{aligned}
L &= (1-\omega)L + \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \beta X^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}}{\eta \bar{w} \bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} L^{1-\frac{\kappa}{1-\alpha}} \\
\omega L &= \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \beta X^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}}{\eta \bar{w} \bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} L^{1-\frac{\kappa}{1-\alpha}} \\
L &= \left(\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \beta}{\eta \bar{w} \bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \omega} \right)^{\frac{1-\alpha}{\kappa}} X
\end{aligned}
$$

Denne indsættes herefter i lign. (13):

$$
\begin{aligned}
m_t &= \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \beta}{\eta \bar{w} \bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}} - \omega. \\
m &= \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-\alpha)}{\eta \bar{w} \bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \left(\frac{X}{\left(\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-\alpha)}{\eta \bar{w} \bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \omega} \right)^{\frac{1-\alpha}{\kappa}} X} \right)^{\frac{\kappa}{1-\alpha}} - \omega \\
m &= 1 - \omega
\end{aligned}
$$

Svar4: BNP pr. arbejder er givet ved $y_t = Ak_t^{\alpha} x^{\kappa}$. Ligning (12) indsættes i denne sammen med udtrykke for steady state befolkningsstørrelsen

$$
\begin{aligned}
y_t &= Ak^{\alpha}x^{\kappa} \\
y_t &= A\left(\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{A}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}(x_t)^{\kappa} \\
y_t &= A\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{A}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}x_t^{\frac{\kappa\alpha+(1-\alpha)\kappa}{1-\alpha}} \\
y_t &= A\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{A}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}} \\
y_t &= A\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{A}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\left(\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\beta}{\eta\bar{w}\bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\omega}\right)^{\frac{1-\alpha}{\kappa}}\right)^{-\frac{\kappa}{1-\alpha}} \\
y_t &= A\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{A}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{\eta\bar{w}\bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\omega}{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\beta}\right) \\
y_t &= A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{\eta\bar{w}\bar{r}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\omega}{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\beta}\right) \\
y_t &= \left(\frac{\eta\bar{w}\omega}{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

Det ses at i SS er der ingen effekt på BNP pr. arbejder af en stigning i A, hvilket skyldes, at produktivitetsfremgangen forsvinder som følge af mere immigration og DRS til K og L.