Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 S-1A ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Onsdag den 15. juni 2016

Rettevejledning

Opgave 1. Partielle afledede.

Lad $D \subseteq \mathbf{R}^2$ være en ikke-tom, åben mængde, og betragt en funktion $f : D \to \mathbf{R}$.

(1) Hvorledes definerer man de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

efter x og y i et punkt $(a,b) \in D$?

Løsning. Vi definerer funktionerne $g(x) = f(x,b)$ og $h(y) = f(a,y)$. Hvis g er differentiabel i $x = a$, og h er differentiabel i $y = b$, eksisterer de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

efter x og y i et punkt $(a,b) \in D$, og man har, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = h'(b).$$

(2) Find de partielle afledede efter x og y i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ for funktionerne

$$f_1(x,y) = x^3+7x^2-xy,\ f_2(x,y) = e^x+e^y+e^{xy},\ f_3(x,y) = \cos x+\sin(xy).$$

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 14x - y \text{ og } \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -x,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = e^x + ye^{xy} \;\text{ og }\; \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = e^y + xe^{xy}$$

og

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = -\sin x + y\cos(xy) \;\text{ og }\; \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy).$$

Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = \operatorname{Arctan}(xy).$$

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

efter x og y i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, og godtgør, at udsagnet

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

er opfyldt.

Løsning. Vi udregner, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+(xy)^2} \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+(xy)^2}.$$

Endvidere får vi nu, at

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy}{1+(xy)^2} - \frac{yx}{1+(xy)^2} = 0.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = 3x^2 + y^2 - xy.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Sættes begge de partielle afledede lig med 0, får vi, at $(x, y) = (0, 0)$ er den eneste løsning.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi får, at

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Da $A = 6 > 0$ og $AC - B^2 = 11 > 0$, er det stationære punkt et minimumspunkt for funktionen f.

(5) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1, 1, f(1, 1)\big)$.

Løsning. Vi ser, at $f(1, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 5$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1$, så den pågældende tangentplan har ligningen

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) =$$

$$3 + 5(x - 1) + (y - 1) = 5x + y - 3.$$

(6) Godtgør, at $(1, 1)$ er en løsning til ligningen $f(x, y) = 3$. Vis dernæst, at der findes en omegn $U(0)$ af $x = 1$, så den variable y er givet implicit

som en funktion $y = y(x)$ i denne omegn. Bestem desuden differentialkvotienten $y'(1)$.

Løsning. Det er umiddelbart let at indse, at $f((1,1) = 3$. Endvidere følger den næste påstand af følgende udregning

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)} = -5.$$

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^4}{1+x^4} \right)^n .$$

(1) Bestem mængden

$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid (\S) \text{ er konvergent}\}.$$

Løsning. Idet $0 \leq \frac{x^4}{1+x^4} < 1$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$, gælder det, at $C = \mathbf{R}$.

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : C \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, x \in C : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^4}{1+x^4} \right)^n .$$

Dette er rækkens sumfunktion.

Løsning. Vi ser umiddelbart, at

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^4}{1+x^4}} = 1 + x^4.$$

(3) Bestem den afledede funktion f' og elasticiteten f^{ϵ} for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at $f'(x) = 4x^3$ og $f^{\epsilon}(x) = x\frac{4x^3}{1+x^4} = \frac{4x^4}{1+x^4}$.