Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 S-1A ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Mandag den 10. juni 2013

Rettevejledning

Opgave 1. Partielle afledede.

Lad $D \subseteq \mathbf{R}^2$ være en åben, ikke-tom mængde, og lad $f : D \to \mathbf{R}$ være en funktion af de to variable x og y, så $(x, y) \in D$.

Lad $(a, b) \in D$ være et fast valgt punkt.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

for f efter x resp. y eksisterer i punktet (a, b), og forklar endvidere, hvordan disse partielle afledede bestemmes.

Løsning. Vi betragter funktionerne g og h, som er defineret ved

$$g(x) = f(x, b), \quad \forall\, (x, b) \in D \text{ og } h(y) = f(a, y), \quad \forall\, (a, y) \in D.$$

Hvis funktionen g er differentiabel i $x = a$, eksisterer den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ af f efter x i punktet (a, b), og man har, at

$$g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).$$

Analogt gælder det, at hvis funktionen h er differentiabel i $y = b$, da eksisterer den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ af f efter y i punktet (a, b), og man har, at

$$h'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2 + x^3y + y^2 - e^{xy}\Big) \text{ og } \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2 + x^3y + y^2 - e^{xy}\Big)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2 + x^3y + y^2 - e^{xy}\Big) = 2x + 3x^2y - ye^{xy}$$

og

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2 + x^3y + y^2 - e^{xy}\Big) = x^3 + 2y - xe^{xy}.$$

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x-y}{1+x^2+y^2}\Big) \text{ og } \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x-y}{1+x^2+y^2}\Big)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x-y}{1+x^2+y^2}\Big) = \frac{1\cdot(1+x^2+y^2) - 2x(x-y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1-x^2+y^2+2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

og

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x-y}{1+x^2+y^2}\Big) = \frac{(-1)\cdot(1+x^2+y^2) - 2y(x-y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-1-x^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

(4) Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{for } x \geq 0 \\ 2x + y^2, & \text{for } x < 0 \end{cases}.$$

Afgør, om de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

eksisterer, og bestem dem, hvis de findes.

Løsning. For $x \neq 0$ finder vi, at

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \begin{cases} \frac{x^2}{x} = x, & \text{for } x > 0 \\ \frac{2x}{x} = 2, & \text{for } x < 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0 & \text{for } x \to 0+ \\ 2 & \text{for } x \to 0- \end{cases}.$$

Altså har funktionen f ikke nogen partielt afledet efter x i punktet $(0,0)$.

Endvidere finder vi for $y \neq 0$, at

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{y^2}{y} = y \to 0 \text{ for } y \to 0.$$

Dette viser, at f er partielt differentiabel efter y i $(0,0)$, og at

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in D : f(x,y) = \ln(x) - 2\sqrt{x} + y^2 - \frac{1}{3}y^3.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1} - x^{-\frac{1}{2}} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - y^2.$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1} - x^{-\frac{1}{2}} = 0$$

giver, at $x = \sqrt{x}$, hvoraf vi får, at $x = 1$.

Endvidere ser vi, at

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - y^2 = y(2-y) = 0$$

giver, at $y = 0$ eller $y = 2$.

Funktionen f har derfor de stationære punkter $(x, y) = (1, 0)$ og $(x, y) = (1, 2)$.

(3) Afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Vi ser, at funktionen f har Hessematricen

$$H(x, y) = f''(x, y) = \begin{pmatrix} -x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 2 - 2y \end{pmatrix},$$

så

$$H(1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } H(1, 2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Heraf ser vi, at $(1, 0)$ er et sadelpunkt, og $(1, 2)$ er et maksimumspunkt for funktionen f.

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\ln(2x)\right)^n,$$

hvor $x > 0$.

(1) Bestem mængden

$$K = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid \sum_{n=0}^{\infty} \left(\ln(2x)\right)^n \text{ er konvergent}\}.$$

Løsning. Den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\ln(2x)\right)^n,$$

hvor $x > 0$, er en geometrisk række, og den er konvergent, når og kun når

$$|\ln(2x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < \ln(2x) < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < 2x < e \Leftrightarrow \frac{1}{2e} < x < \frac{e}{2},$$

hvoraf man får, at

$$K = \left]\frac{1}{2e}, \frac{e}{2}\right[.$$

(2) Lad $f : K \to \mathbf{R}$ være sumfunktionen for den givne uendelige række, så

$$\forall\, x \in K : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\ln(2x)\Big)^n.$$

Bestem en forskrift for f.

Løsning. Vi ser straks, at

$$\forall\, x \in K : f(x) = \frac{1}{1 - \ln(2x)}.$$

(3) Bestem differentialkvotienten $f' : K \to \mathbf{R}$ for funktionen f.

Løsning. Vi finder, at

$$f'(x) = -\frac{1}{\Big(1 - \ln(2x)\Big)^2} \cdot \Big(-\frac{1}{2x} \cdot 2\Big) = \frac{1}{x\Big(1 - \ln(2x)\Big)^2}.$$

(4) Vis, at funktionen f er voksende på mængden K.

Løsning. Funktionen f er voksende på intervallet K, thi

$$\forall x \in K : f'(x) > 0.$$