Skriftlig eksamen i Matematik A. Vinteren 2014 - 2015

Mandag den 5. januar 2015

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 V-1A ex

Skriftlig eksamen i Matematik A

Mandag den 5. januar 2015

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Differentialregning.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent, ikke-tomt interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er differentiabel i punktet $a \in I$ med differentialkvotienten

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a).$$

(2) Hvis funktionerne $f, g : I \to \mathbf{R}$ begge er differentiable i punktet a med differentialkvotienterne $f'(a)$ og $g'(a)$, skal man vise, at funktionen $f + g : I \to \mathbf{R}$ er differentiabel i a, og at

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(3) Betragt den funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} - 1, & \text{for } x \geq 0 \\ 2x, & \text{for } x < 0 \end{cases}.$$

Vis, at f er differentiabel overalt på $\mathbf{R}$, og bestem en forskrift for den afledede funktion $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(4) Differentier funktionerne

$$f_1(x) = 2x^2 + \cos(3x),\ f_2(x) = \frac{2}{1+x^2} \text{ og } f_3(x) = e^x + \ln(2 + x^2).$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^4 + x^2 + 2y^2 - y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Opgave 3. For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n.$$

(1) Bestem mængden

$$K = \Big\{ x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \text{ er konvergent} \Big\}.$$

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : K \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall x \in K : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n.$$

(3) Bestem en forskrift for den afledede funktion f', og bestem monotoniintervallerne for f.

(4) Bestem værdimængden for f.