Rettevejledning til eksamen på Økonomistudiet 2011-I

Økonometri A

2. årsprøve

januar

(3-times prøve med hjælpemidler)

Kompetence Beskrivelse:
Målet er at de studerende efter at have gennemført faget Økonometri A kan:

- Forstå de vigtigste sandsynlighedsteoretiske begreber som: sandsynlighed, simultane-, marginale- og betingede sandsynligheder, fordeling, tæthedsfunktion, uafhængighed, middelværdi, varians og kovarians samt at selvstændigt kunne anvende disse begreber på konkrete problemstillinger
- Kende resultatet fra den centrale grænseværdi sætning
- Kende og genkende de mest anvendte diskrete og kontinuerte fordelinger som: Bernoulli, Binomial, Poisson, multinomial, hypergeometrisk, geometrisk, lige-, normal-, Chi-i-anden-, eksponential, gamma-, t-, F-fordeling samt at selvstændigt kunne arbejde med disse fordelinger i konkrete problemstillinger
- Forstå de vigtigste statistiske begreber som: tilfældige udvælgelse, likelihood funtionen, sufficiens, stikprøvefunktion, egenskaber ved stikprøvefunktionen, estimation heruden maksimum likelihood og moment estimation, konsistens, konfidensinterval, hypoteseprøvning, teststørrelser, hypoteser, testsandsynlighed, signifikansniveau og type I og II fejl
- Være i stand til selvstændigt at gennemføre en simpel statistisk analyse, som involverer estimation, inferens og hypoteseprøvning, f.eks. sammenligning af middelværdien i to populationer og statistisk analyse af en kontingenstabel.
- Kunne anvende software til databehandling, herunder indlæsning og udskrivning af data, sortering, udvalg og kombination af flere datasæt.
- Forstå og anvende grundlæggende principper i programmering, herunder do-løkker, if-then-else sætninger og opsamling af data i et array.
- Beskrive resultatet af egne analyser og overvejelser i et klart og tydeligt sprog

1 Spørgsmål 1

1. X er binomial fordelt, $X \sim Bin\left(100, 0.05\right)$
2. $\Pr\left(X \leq 2\right) = \sum_{k=0}^{2} \begin{pmatrix} 100 \\ k \end{pmatrix} 0.05^k \cdot 0.95^{100-k} = 0.95^{100} + 100 \cdot 0.05 \cdot 0.95^{99} + 4950 \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^{98} = 0.0059205 + 0.031161 + 0.081182 = 0.11826$
3.
   (a) Y er negativ binomial fordelt

   (b)

$$\begin{aligned} E\left(Y|p = 0.02\right) &= \frac{r}{p} = \frac{10}{0.02} = 500 \\ E\left(Y|p = 0.05\right) &= \frac{r}{p} = \frac{10}{0.05} = 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\left(Y|p = 0.02\right) &= \frac{r\left(1-p\right)}{p^2} = \frac{10 \cdot \left(1 - 0.02\right)}{0.02^2} = 24500 \\ Var\left(Y|p = 0.05\right) &= \frac{r\left(1-p\right)}{p^2} = \frac{10 \cdot \left(1 - 0.05\right)}{0.05^2} = 3800 \end{aligned}$$

Hvis sandsynligheden er større for "succes" er skal vi forvente at bruge færre forsøg, før vi opnår det specificerede antal "succeser". Med hensyn til variansen er den langt større i det tilfælde, hvor vi har en lille sandsynlighed. På grund af uafhængigheden mellem de enkelte Bernoulli eksperimenter, vil man nogle gange være "heldig" og få de 10 "succeser" hurtigt, mens man i andre tilfælde som følge af den lave sandsynlighed skal afvikle mange forsøg på at få det specificerede antal af succeser.

2 Spørgsmål 2

1. Ventetiden er eksponential fordelt. Den forventede ventetid i måneder er $\frac{1}{0{,}15} \approx 6.67$ måneder.
2. $\Pr\left(W > 120\right) = \Pr\left(\frac{W-130}{\sqrt{40}} > \frac{120-130}{\sqrt{40}}\right) = \Pr\left(Z > -\frac{10}{\sqrt{40}}\right) = \Pr\left(Z > -1.58113883\right) = 1 - \Pr\left(Z \leq -1.58113883\right) = 1 - 0.0570 = 0.943$.

   $\lambda_B = 0.15 \cdot 0.943 \approx 0.14145$.
3.

$$\Pr\left(T_A > 12\right) = 1 - \Pr\left(T_A \leq 12\right) = 1 - \left(1 - \exp\left(-0.15 \cdot 12\right)\right) = 0.165298888$$

$$\Pr\left(T_B > 12\right) = 1 - \Pr\left(T_B \leq 12\right) = 1 - \left(1 - \exp\left(-0.15 \cdot 0.943 \cdot 12\right)\right) = 0.183159119$$

Andelen af arbejdere, der aktiveres efter 12 måneder, som er type A arbejdere

$$\Pr\left(\text{type } A \mid T > 12\right) = \frac{80 \cdot 0.165298888}{80 \cdot 0.165298888 + 20 \cdot 0.183159119} \approx 0.7831$$

3 Spørgsmål 3

I en periode i starten af dette århundrede er der i alt observeret 499 ændringer i kursen for EURO fra en noteringsdag til den næste. Data betegnes $(X_1, X_2, ...X_n)$, hvor $n = 499$.

1. En konsistent estimator for p er $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i<0)}{n}$. Det er en konsistent estimator, da $E(\hat{p}) \to p$ og $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \to 0$ når $n \to \infty$.

2. $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i<0)}{n} = \frac{229}{499} \approx 0.4589$.
   Da vi har en stor stikprøve kan vi skrive 95 pct. konfidensintervallet som

   $$\hat{p} \pm k \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} = \frac{229}{499} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{229}{499} \cdot \left(1 - \frac{229}{499}\right)}{499}} = \begin{cases} 0.4152 \\ 0.5026 \end{cases}$$

   Konfidensintervallet er dermed $[0.4152; 0.5026]$.

3. Da vi har en stor stikprøve kan vi benytte Z-testet, der er givet ved

   $$Z = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{(1-p_0)\,p_0/n}} = \frac{\frac{229}{499} - 0.5}{\sqrt{(1-0.5)\,0.5/499}} = -1.8354$$

   Da vi tester enkeltsidet er p-værdien givet ved $\Phi(-1.8354) = 0.0329$. Vi kan dermed forkaste, at $p = 0.5$.

4. De forventede sandsynligheder vs. de observerede sandsynligheder:

	Observeret	Forventet
begge negative	$\frac{46}{248} \approx 0.1855$	0.25
en positiv, en negativ	$\frac{134}{248} \approx 0.5403$	0.50
begge positive	$\frac{68}{248} \approx 0.2742$	0.25

5.

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{j=1}^{4} \frac{\left(Y_j - n\pi_j\right)^2}{n\pi_j} \\ &= \frac{(46 - 248 \cdot 0.25)^2}{248 \cdot 0.25} + \frac{(134 - 248 \cdot 0.50)^2}{248 \cdot 0.50} + \frac{(68 - 248 \cdot 0.25)^2}{248 \cdot 0.25} \\ &= 4.129 + 0.80645 + 0.58065 \\ &= 5.5161 \end{aligned}$$

   Tester vi på 5 pct.s niveau er den kritiske værdi $\chi^2_{0.95}(3-1) = 5.99$. Vi kan derfor ikke afvise, at $p = \frac{1}{2}$.

6. Hvis ændringerne er uafhængige, skal det forventede antal og det observerede antal være tæt på at være ens, og vi kan bruge χ^2 testet. Et krav for at bruge χ^2 testet er, at det forventede cell antal er større end 5 og at vi har en stor stikprøve. Vi kan beregne det forventede antal som $\frac{rækkesum \cdot søjlesum}{totalsum}$, dvs.

$\frac{134 \cdot 136}{248} = 73.484$	$\frac{114 \cdot 136}{248} = 62.516$	136
$\frac{134 \cdot 112}{248} = 60.516$	$\frac{114 \cdot 112}{248} = 51.484$	112
134	114	248

Benyttes dette fås en χ^2 teststørrelse på

$$\chi^2 = \frac{(68 - 73.484)^2}{73.484} + \frac{(68 - 62.516)^2}{62.516} + \frac{(66 - 60.516)^2}{60.516} + \frac{(46 - 51.484)^2}{51.484} = 1.9714$$

Tester vi på 5 pct.s niveau er den kritiske værdi $\chi^2_{0.95}(1) = 3.84$. Vi kan derfor ikke afvise, at fortegnet for den anden ændring er uafhængig af fortegnet af den første ændring.