KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2010 S-1A ex

EKSAMEN I MATEMATIK A

Fredag den 18. juni 2010

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1.

Optimeringsproblemer for funktioner af flere reelle variable.

Lad $z = f(x, y)$ være en C^2-funktion (dvs., at alle de partielle afledede af anden orden for f er kontinuerte). Vi antager, at funktionen f er defineret på en åben delmængde D af $\mathbf{R}^2$.

(1) Vis, at hvis funktionen f har et ekstremum i punktet (x_0, y_0), så er (x_0, y_0) et stationært punkt for f. Altså gælder det, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

LØSNING: Da punktet $(x_0, y_0) \in D$ er et ekstremumspunkt for funktionen f, er x_0 et ekstremumspunkt for funktionen $g(x) = f(x, y_0)$, og y_0 er et ekstremumspunkt for funktionen $h(y) = f(x_0, y)$. Da disse to funktioner åbenbart begge er differentiable med de afledede

$$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) \text{ og } \frac{dh}{dy}(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y),$$

får vi, at

$$\frac{dg}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ og } \frac{dh}{dy}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

hvilket netop var, hvad vi skulle vise.

(2) Lad (x_0, y_0) være et stationært punkt for funktionen f. Opskriv en betingelse for, at (x_0, y_0) er henholdsvis et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for f.

LØSNING. Lad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = C,$$

og lad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = B.$$

Vi har så,

at punktet (x_0, y_0) er et minimumspunkt, hvis $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$,

at punktet (x_0, y_0) er et maksimumspunkt, hvis $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$,

og at (x_0, y_0) er et sadelpunkt, hvis $AC - B^2 < 0$.

Hvis $AC - B^2 = 0$, har vi ingen afgørelse, og man må så foretage en alternativ undersøgelse af funktionen f i en omegn af det stationære punkt (x_0, y_0).

(3) Betragt funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^6 + y^2.$$

Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Vis, dernæst, at $(0, 0)$ er et stationært punkt for f, og afgør om dette punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for f.

LØSNING: Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y^2 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + 6y^5 + 2y.$$

Vi finder straks, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

så punktet $(0, 0)$ er et stationært punkt for funktionen f. Da

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, y) = A = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = C = 2,$$

og da

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = B = 0,$$

får vi, at $A = 2 > 0$, og at $AC - B^2 = 4 > 0$, hvilket viser, at punktet $(0, 0)$ er et minimumspunkt for funktionen f.

Opgave 2. For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{5xn}.$$

(1) Bestem mængden

$$K = \{x \in \mathbf{R} \mid (*) \text{ er konvergent}\} = \{x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} e^{5xn} < \infty\}.$$

LØSNING: Den uendelige række $(*)$ er en kvotientrække med kvotienten $q = e^{5x}$. En kvotientrække er konvergent, hvis og kun hvis $|q| < 1$. I dette tilfælde får vi så, at $(*)$ er konvergent, hvis og kun hvis

$$e^{5x} < 1 \Leftrightarrow 5x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Vi har dermed vist, at $K = \mathbf{R}_-$.

(2) Bestem en forskrift for funktionen $f : K \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, x \in K : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{5xn}.$$

LØSNING: Vi finder, at

$$\forall\, x \in K : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{5xn} = \frac{e^{5x}}{1 - e^{5x}}.$$

(3) Bestem den afledede f' af funktionen f, og vis, at f er voksende på hele mængden K.

LØSNING: Vi ser, at

$$f'(x) = \frac{5e^{5x}(1 - e^{5x}) - e^{5x}(-5e^{5x})}{(1 - e^{5x})^2} = \frac{5e^{5x}}{(1 - e^{5x})^2} > 0$$

for ethvert $x \in \mathbf{R}_-$. Dette viser, at funktionen f er voksende.

(4) Bestem elasticiteten $\mathrm{El} f(x)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $x \in K$.

LØSNING: Vi ser, at

$$\mathrm{El} f(x) = x \frac{5e^{5x}}{(1 - e^{5x})^2} \frac{1 - e^{5x}}{e^{5x}} = \frac{5x}{1 - e^{5x}}.$$

Opgave 3. For ethvert $u \geq 1$ betragter vi funktionen $I = I(u)$ defineret ved

$$\forall\, u \geq 1 : I(u) = \int_1^u \Big(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2}\Big)\, dt.$$

(1) Bestem en forskrift for funktionen $I = I(u)$.

LØSNING: Vi finder, at

$$\forall\, u \geq 1 : I(u) = \int_1^u \Big(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2}\Big)\, dt = \Big[-\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} \Big]_1^u =$$

$$-\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2u^2} - \frac{1}{u}.$$

(2) Vis, at det uegentlige integral

$$\int_1^\infty \Big(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2}\Big)\, dt$$

er konvergent, og bestem dets værdi.

LØSNING: Vi ser, at

$$\lim_{u\to\infty} I(u) = \lim_{u\to\infty} \Big(\frac{3}{2} - \frac{1}{2u^2} - \frac{1}{u}\Big) = \frac{3}{2}.$$

Dette viser, at det uegentlige integral

$$\int_1^\infty \Big(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2}\Big)\, dt$$

er konvergent med værdien $\frac{3}{2}$.

(3) Bestem værdimængden $R(I)$ for funktionen $I = I(u)$, hvor $u \geq 1$.

LØSNING: Det er klart, at funktionen $I = I(u)$ er voksende, og at $I(1) = 0$. Da endvidere

$$\int_1^\infty \Big(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2}\Big)\, dt = \frac{3}{2},$$

har vi, at funktionen $I = I(u)$ har værdimængden $R(I) = [0, \frac{3}{2}[$.