Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 S-1A ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Tirsdag den 9. juni 2015

Rettevejledning

Opgave 1. Partielle afledede. Lad $D \subseteq \mathbf{R}^2$ være en åben, ikke-tom mængde, og lad $f : D \to \mathbf{R}$ være en funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f har de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

efter henholdsvis x og y i punktet $(a,b) \in D$.

Løsning. Vi betragter de to funktioner g og h, som er defineret ved forskrifterne

$$g(x) = f(x,b) \text{ og } h(y) = f(a,y).$$

Hvis g er differentiabel i $x = a$ med differentialkvotienten $g'(a)$, og hvis h er differentiabel i $y = b$ med differentialkvotienten $h'(b)$, eksisterer de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ for f efter henholdsvis x og y i punktet (a,b), og man har, at

$$g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \text{ og } h'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

(2) Betragt funktionen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : g(x,y) = x^2y + \cos(xy) - \ln(1 + x^2 + y^4) + e^x.$$

Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy - y\sin(xy) - \frac{2x}{1+x^2+y^4} + e^x,\ \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 - x\sin(xy) - \frac{4y^3}{1+x^2+y^4}.$$

(3) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for funktionen g i punktet $\big(0, 1, g(0, 1)\big)$.

Løsning. Idet $g(0, 1) = 2 - \ln 2$, $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 1) = 1$ og $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 1) = -2$, er tangentplanens ligning givet ved

$$z = 2 - \ln 2 + x - 2(y - 1) = x - 2y + 4 - \ln 2.$$

(4) Vi betragter den funktion $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : h(s) = g(s, s).$$

Bestem den afledede $h'(s)$ i et vilkårligt punkt $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi ser, at $h(s) = g(s, s) = s^3 + \cos(s^2) - \ln(1 + s^2 + s^4) + e^s$, så

$$h'(s) = 3s^2 - 2s\sin(s^2) - \frac{2s + 4s^2}{1 + s^2 + s^4} + e^s.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^3y + x^2 - \frac{y^4}{4}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + 2x = x(3xy + 2) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 - y^3.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Hvis begge de partielle afledede er 0, er $x = y$, og heraf ser man, at $(0,0)$ er det eneste stationære punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy+2 & 3x^2 \\ 3x^2 & -3y^2 \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Idet $f(x,0) = x^2$ og $f(0,y) = -\frac{y^4}{4}$, er det klart, at det stationære punkt $(0,0)$ er et sadelpunkt for funktionen f.

Opgave 3. Vi betragter den rationale funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = \frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2x + 1}{1 + x^2}.$$

(1) Vis, at ligningen

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = (x^3 + 1) + \frac{2x}{1 + x^2}.$$

er opfyldt.

Løsning. Resultatet fremgår ved polynomiers division.

(2) Bestem værdimængden for f.

Løsning. Vi ser, at $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $f(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$. Dette viser, at f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

(3) Udregn de ubestemte integraler

$$\int f(x)\,dx \quad \text{og} \quad \int f(-x)\,dx.$$

Løsning. Vi ser, at

$$\int \Big(x^3 + 1 + \frac{2x}{1+x^2}\Big)\,dx = \frac{x^4}{4} + x + \int \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) =$$

$$\frac{x^4}{4} + x + \ln(1+x^2) + k, \quad \text{hvor} \quad k \in \mathbf{R}.$$

Desuden har vi, at

$$\int f(-x)\,dx = -\int f(-x)\,d(-x) = -\frac{x^4}{4} + x - \ln(1+x^2) + k, \quad \text{hvor} \quad k \in \mathbf{R}.$$