Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 V-1B ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 8. januar 2013

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ betragter vi den symmetriske 3×3 matrix

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(u, v)$, og bestem de talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, så matricen $A(u, v)$ er regulær.

Løsning. Vi finder ved fx at benytte Sarrus' regel, at $\det\Big(A(u, v)\Big) = (2u - 1)v$, så

$$\det\Big(A(u, v)\Big) = 0 \Leftrightarrow (2u - 1)v = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} \vee v = 0,$$

Imidlertid er matricen $A(u, v)$ regulær, netop når dens determinant

$$\det\Big(A(u, v)\Big) \neq 0.$$

Dette er således ensbetydende med, at udsagnet

$$u \neq \frac{1}{2} \wedge v \neq 0$$

er opfyldt, og vi har derfor, at

$$\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid A(u, v) \text{ er regulær}\} = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u \neq \frac{1}{2} \wedge v \neq 0\}.$$

(2) Udregn de ledende hovedunderdeterminanter for matricen $A(u, v)$, og bestem de talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, så matricen $A(u, v)$ er positiv definit.

Løsning. De ledende hovedunderdeterminanter for matricen $A(u,v)$ er $D_1 = u, D_2 = 2u-1$ og $D_3 = \det\big(A(u,v)\big) = (2u-1)v$.

Vi ser nu, at $A(u,v)$ er positiv definit, hvis og kun hvis alle de ledende hovedunderdeterminanter er positive. Dette betyder, at

$$u > 0 \,\wedge\, u > \frac{1}{2} \,\wedge\, v > 0 \Leftrightarrow u > \frac{1}{2} \,\wedge\, v > 0.$$

(3) Vis, at matricen $A(u,v)$ ikke er negativ definit for noget talpar $(u,v) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Hvis matricen $A(u,v)$ skulle være negativ definit, måtte vi kræve, at $D_1 < 0, D_2 > 0$ og $D_3 < 0$. Altså måtte vi kræve, at $u < 0$, og at $u > \frac{1}{2}$. Men dette er umuligt, så $A(u,v)$ er ikke negativ definit for noget talpar $(u,v) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Bestem egenværdierne for matricen $A(u,v)$. (De vil afhænge af parametrene u og v.)

Løsning. Vi udregner først det karakteristiske polynomium $P(t) = \det\big(A(u,v) - tE\big)$ for $t \in \mathbf{R}$. Vi ser da, at

$$P(t) = \det\begin{pmatrix} u-t & 1 & 0 \\ 1 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & v-t \end{pmatrix} = \big((u-t)(2-t)-1\big)(v-t) =$$

$$(v-t)\big(t^2 - (u+2)t + (2u-1)\big).$$

Idet

$$t^2 - (u+2)t + (2u-1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{u+2 \pm \sqrt{(u+2)^2 - 4(2u-1)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{u+2 \pm \sqrt{(u^2-4u+4)+4}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{u+2 \pm \sqrt{(u-2)^2+4}}{2},$$

ser vi, at de karakteristiske rødder (i. e. rødderne i P), som også er egenværdierne for $A(u,v)$, er

$$t = v \,\vee\, t = \frac{u+2 \pm \sqrt{(u-2)^2+4}}{2}.$$

(5) Bestem egenværdierne for matricen $A(2,5)$.

Løsning. Ved at sætte $u = 2$ og $v = 5$ får vi, at matricen $A(2,5)$ har egenværdiene 1, 3 og 5.

(6) Bestem egenrummene for matricen $A(2,5)$.

Løsning. Vi finder, at

$$V(1) = N\Big(A(2,5) - E\Big) = \operatorname{span}\{(-1,1,0)\},$$

at

$$V(3) = N\Big(A(2,5) - 3E\Big) = \operatorname{span}\{(1,1,0)\},$$

og at

$$V(5) = N\Big(A(2,5) - 5E\Big) = \operatorname{span}\{(0,0,1)\}.$$

(7) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^{-1}AQ.$$

Løsning. Vi finder, at

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ og at } D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x,y) \in D : f(x,y) = 2x^2 - \sqrt{x} - \sqrt{y} + y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 4x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \text{ og}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}} + 1 = -\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} + 1.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Vi får, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

giver, at $(x,y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, hvilket viser det ønskede.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Vis dernæst, at funktionen f er strengt konveks overalt på definitionsmængden D.

Løsning. Vi får straks, at funktionen f har Hessematricen

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Da $H(x,y)$ er en diagonalmatrix med to positive diagonalelementer, er $H(x,y)$ positiv definit overalt på D, og så er f en strengt konveks funktion på D.

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for f.

Løsning. Da f er strengt konveks, er det stationære punkt et globalt minimumspunkt for f. Vi finder, at $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -\frac{5}{8}$. Desuden ser vi, at

$$f(x,1) = 2x^2 - \sqrt{x} \to \infty \text{ for } x \to \infty.$$

Dette viser, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [-\frac{5}{8}, \infty[$.

(5) Betragt funktionen $g : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in D : g(x,y) = e^{f(x,y)}.$$

Vis, at funktionen g er konveks.

Løsning. Da funktionen f er (strengt) konveks, og da eksponentialfunktionen er en voksende konveks funktion, er den sammensatte funktion $g = \exp \circ f$ konveks.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + 6\cos(2t)x = 4t^3 e^{t^4 - 3\sin(2t)}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser, at

$$\int 6\cos(2t)\,dt = 3\sin(2t) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Herefter ser vi, at

$$x = Ce^{-3\sin(2t)} + e^{-3\sin(2t)} \int e^{3\sin(2t)} e^{-3\sin(2t)+t^4} 4t^3\,dt =$$

$$Ce^{-3\sin(2t)} + e^{-3\sin(2t)} \int e^{t^4}\,d(t^4) = Ce^{-3\sin(2t)} + e^{-3\sin(2t)} e^{t^4} =$$

$$e^{-3\sin(2t)}\Big(C + e^{t^4}\Big).$$

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 1066$ er opfyldt.

Løsning. Vi får, at betingelsen $\tilde{x}(0) = 1066$ giver, at $C + 1 = 1066$, så $C = 1065$. Da er

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = e^{-3\sin(2t)}\Big(1065 + e^{t^4}\Big).$$

(3) Udregn differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0).$$

Løsning. Ved at benytte den givne differentialligning og betingelse ovenfor, får vi, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0) = -6 \cdot 1066 = -6396.$$

Opgave 4. I vektorrummet $\mathbf{R}^4$, som er forsynet med det sædvanlige indre produkt (prikproduktet), betragter vi vektorerne

$$a = (1, 2, -1, 3) \text{ og } b = (0, 2, 2, 8).$$

(1) Bestem afstanden $d(a, b) = \|a - b\|$.

Løsning. Da $a - b = (1, 0, -3 - 5)$ får vi straks, at

$$d(a, b) = \|a - b\| = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}.$$

(2) Bestem mængden

$$M = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid a \cdot x = 0 \wedge b \cdot x = 0\}.$$

Løsning. Vi ser, at

$$a \cdot x = 0 \wedge b \cdot x = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \wedge 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3s + 5t, -s - 4t, s, t), \quad \text{hvor} \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

Dette viser, at

$$M = \{x = (3s + 5t, -s - 4t, s, t) \in \mathbf{R}^4 \mid s, t \in \mathbf{R}\}.$$

(3) Vis, at mængden M er et underrum i vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

Løsning. Vi bemærker, at

$$M = \operatorname{span}\{(3, -1, 1, 0), (5, -4, 0, 1)\},$$

og heraf fremgår det, at mængden M er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.