Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2017 S-1A ex ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik A

Tirsdag den 13. juni 2017

Opgave 1. Integration ved substitution.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent, ikke-tomt interval, og lad $f, g : I \to \mathbf{R}$ være to kontinuerte funktioner. Lad $F : I \to \mathbf{R}$ være en stamfunktion til funktionen f, og antag, at funktionen g er differentiabel på hele intervallet I, og at den afledede funktion g' er kontinuert.

(1) Vis, at formlen

$$\int (f \circ g)(x) g'(x)\, dx = F(g(x)) + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

er opfyldt.

Løsning. Vi ser, at

$$\int (f \circ g)(x) g'(x)\, dx = \int f(g(x)) d(g(x)) = F(g(x)) + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

hvoraf resultatet aflæses.

(2) Udregn følgende ubestemte integraler

$$\int (x^2 + 2x - 3)^5 \cdot (2x + 2)\, dx, \int \frac{21x^2 + 4x}{7x^3 + 2x^2 + 9}\, dx \text{ og } \int x \ln(x^2 + 1)\, dx.$$

Løsning. Vi ser, at

$$\int (x^2 + 2x - 3)^5 \cdot (2x + 2)\, dx = \int (x^2 + 2x - 3)^5\, d(x^2 + 2x - 3) =$$

$$\frac{1}{6}(x^2 + 2x - 3)^6 + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

$$\int \frac{21x^2+4x}{7x^3+2x^2+9}\,dx = \int \frac{1}{7x^3+2x^2+9}\,d(7x^3+2x^2+9) =$$

$$\ln|7x^3+2x^2+9| + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

og

$$\int x\ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \ln(x^2+1)\,d(x^2+1) =$$

$$\frac{1}{2}\Big((x^2+1)\ln(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R}.$$

(3) Idet $a > 0$ skal man løse ligningen

$$\int_0^a \frac{4x}{x^2+1}\,dx = \int_0^a \frac{2x+6x^5}{1+x^2+x^6}\,dx$$

med hensyn til a.

Løsning. Vi finder, at

$$\int_0^a \frac{4x}{x^2+1}\,dx = 2\int_0^a \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) = 2\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^a =$$

$$2\ln(a^2+1) = \ln(a^2+1)^2 = \ln(a^4+2a^2+1),$$

og at

$$\int_0^a \frac{2x+6x^5}{1+x^2+x^6}\,dx = \int_0^a \frac{d(1+x^2+x^6)}{1+x^2+x^6} = \Big[\ln(1+x^2+x^6)\Big]_0^a =$$

$$\ln(1+a^2+a^6).$$

Herefter får vi, at

$$\ln(a^4+2a^2+1) = \ln(1+a^2+a^6) \Leftrightarrow a^4+2a^2+1 = 1+a^2+a^6 \Leftrightarrow$$

$$a^6-a^4-a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2(a^4-a^2-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a^4-a^2-1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = 0 \vee a^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Da $a > 0$, ser vi, at $a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^4 + x^2 - y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder straks, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2+1) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

(2) Bestem det eneste stationære punkt for funktionen f.

Løsning. Det er oplagt, at $(0,0)$ er det eneste stationære punkt.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2+2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ så } f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at $f''(0,0)$ er indefinit, så $(0,0)$ er et sadelpunkt for f.

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Idet $f(x,0) = x^4 + x^2$ og $f(0,y) = -y^2$, er det klart, at f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

(6) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for funktionen f gennem punktet $(1,2,f(1,2))$.

Løsning. Vi ser, at $f(1,2) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 6$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -4$. Den søgte ligning er derfor

$$z = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2) = 6x - 4y.$$

Opgave 3. Vi betragter ligningen

$$(\S) \qquad F(x,y) = e^{xy} + e^x + y^2 - x - 3 = 0.$$

(1) Vis, at punktet $(x,y) = (0,1)$ er en løsning til (§).

Løsning. Dette fremgår ved at indsætte $(0,1)$ i ligningen.

(2) Vis, at ligningen (§) definerer den variable y implicit som en funktion $y = y(x)$ i en omegn af punktet $(0,1)$, og bestem $y'(0)$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + e^x - 1 \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 2y,$$

så

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,1) = 1 \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2.$$

Da $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) \neq 0$ er påstanden opfyldt, og vi ser, at

$$y'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = -\frac{1}{2}.$$

(3) Godtgør, at den implicit givne funktion $y = y(x)$ er aftagende i en omegn $U(0)$ af $x = 0$.

Løsning. Det er oplagt, at der eksisterer en omegn $U(0)$ af $x = 0$, hvor $y'(x)$ er kontinuert og negativ, og heraf fremgår det, at $y = y(x)$ er aftagende på $U(0)$.

Vi betragter funktionen $z = z(x) = (y(x))^2$, som er defineret på omegnen $U(0)$.

(4) Bestem differentialkvotienten $z'(0)$.

Løsning. Vi ser, at $z'(x) = 2y(x)y'(x)$, så $z'(0) = -1$.