KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2012 S-1A ex ret

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A

Fredag den 8. juni 2012

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. Partielle afledede. Lad $A \subseteq \mathbf{R}^2$ være en åben mængde, og lad $(x_0, y_0) \in A$ være et fast valgt punkt. Betragt en funktion $f : A \to \mathbf{R}$.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f har de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

i punktet (x_0, y_0), og forklar i den forbindelse, hvordan man finder disse partielle afledede.

Løsning. Vi definerer funktionerne g_x og g_y ved

$$g_x(x) = f(x, y_0) \text{ og } g_y(y) = f(x_0, y),$$

hvor $(x, y) \in A$.

Hvis g_x er differentiabel i x_0 og g_y er differentiabel i y_0 med de afledede $g'_x(x_0)$ og $g'_y(y_0)$, hvor

$$g'_x(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g_x(x) - g_x(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

og

$$g'_y(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g_y(y) - g_y(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

så siger vi, at funktionen f har de partielle afledede

$$g'_x(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ og } g'_y(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

i punktet $(x_0, y_0) \in A$.

(2) Betragt funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = 3x^2 + xy^2 + \sin(xy).$$

Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ \text{ og } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

for denne funktion i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x + y^2 + y\cos(xy) \ \text{ og } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + x\cos(xy).$$

(3) Betragt funktionen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$g(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{for } x > 0 \ \text{ og } \ y > 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}.$$

Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \ \text{ og } \ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0).$$

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{g(x,0) - g(0,0)}{x - 0} = 0, \ \text{ og at } \ \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y - 0} = 0,$$

så

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 \ \text{ og } \ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0.$$

(4) Betragt funktionen $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : h(x) = g(x, x^2).$$

Vis, at funktionen h er differentiabel i ethvert punkt $x \in \mathbf{R}$, og bestem $f'(x)$.

Løsning. Vi ser, at funktionen h er givet ved

$$h(x) = g(x, x^2) = \begin{cases} x^3, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{for } x \leq 0 \end{cases}.$$

Idet

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x^3}{x} = x^2, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{for } x < 0 \end{cases} \to 0 \quad \text{for } \ x \to 0,$$

finder vi, at

$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{for } x \leq 0 \end{cases}.$$

Opgave 2. Udregn følgende ubestemte integraler:

(1)

$$\int \frac{x^5}{2 + x^6}\, dx.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\int \frac{x^5}{2 + x^6}\, dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{2 + x^6}\, d(2 + x^6) = \frac{1}{6} \ln(2 + x^6) + k, \quad k \in \mathbf{R}.$$

(2)

$$\int \frac{x^n}{7 + x^{n+1}}\, dx, \ \text{ hvor } \ n \in \mathbf{N}.$$

Løsning. Vi får, at

$$\int \frac{x^n}{7 + x^{n+1}}\, dx = \frac{1}{n+1} \int \frac{1}{7 + x^{n+1}}\, d(7 + x^{n+1}) =$$

$$\frac{1}{n+1} \ln(7 + x^{n+1}) + k, \quad k \in \mathbf{R}, \ \text{ hvor } \ n \in \mathbf{N}.$$

(3)

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx.$$

Løsning. Vi ser, at

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx = \int \frac{1}{1 + e^x}\, d(1 + e^x) = \ln(1 + e^x) + k, \quad k \in \mathbf{R}.$$

Opgave 3. Betragt den uendelige række

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^n}.$$

(1) Bestem mængden

$$K = \{x \in \mathbf{R} \mid (*) \text{ er konvergent}\}.$$

Løsning. Den uendelige række $(*)$ er en kvotientrække (en geometrisk række), og den er konvergent, hvis og kun hvis kvotienten

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < 1.$$

Dette er opfyldt for $x \neq 0$, så $K = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

(2) Bestem en forskrift for funktionen $f : K \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, x \in K : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^n}.$$

Løsning. Vi finder straks, at

$$\forall\, x \in K : f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-1}.$$

(3) Vis, at

$$\forall\, x \in K : f(-x) = f(x).$$

Løsning. Vi opnår, at for $x \in K$ gælder det, at

$$f(-x) = \frac{\sqrt{1+(-x)^2}}{\sqrt{1+(-x)^2}-1} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-1} = f(x).$$

(4) Vis, at

$$f\Big(\frac{1}{p}\Big) \to \infty \ \text{ for } \ p \to \infty.$$

Løsning. Man får, at

$$f\Big(\frac{1}{p}\Big) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}-1} \to \infty \ \text{ for } \ p \to \infty.$$