Matematik A, 9. august 2019: Rettevejledning

Opgave 1. Ekstremumsbestemmelse for funktioner af flere reelle variable.

Lad $z = f(x,y)$ være en C^2 −funktion defineret på en åben delmængde D af $\mathbb{R}^2$ (dvs. at alle de fire partielle afledede af anden orden eksisterer og er kontinuerte i D).

1) Opskriv udtrykket for Hessematricen $H(x,y)$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

   Løsning:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Antag nu, at punktet $(x_0, y_0) \in D$ er et stationært punkt for funktionen f.

2) Opskriv ved hjælp af de afledede af anden orden en tilstrækkelig betingelse for, at (x_0, y_0) er henholdsvis et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for f.

   Løsning:

   Med $H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ gælder:

   Hvis $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$, er (x_0, y_0) et minimumspunkt.

   Hvis $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$, er (x_0, y_0) et maksimumspunkt.

   Hvis $AC - B^2 < 0$, er (x_0, y_0) et sadelpunkt.

Lad nu funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$f(x,y) = xe^{-x} - 2y^2 + 8y - 8.$$

3) Vis, at punktet (1,2) er det eneste stationære punkt for f, og at punktet er et maksimumspunkt.

   Løsning:

   $f'_x(x,y) = 1e^{-x} + x(-1)e^{-x} = (1-x)e^{-x}$ og $f'_y(x,y) = -4y + 8$.

   $f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

   $f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 2.$

Det eneste stationære punkt for f er derfor $(1,2)$, som det skulle vises.

For at vise, at $(1,2)$ er et maksimumspunkt, findes de afledede af anden orden:

$\mathrm{f}''_{\mathrm{xx}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} + (1-x)(-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} = (x-2)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$

$\mathrm{f}''_{yy}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = -4$

$\mathrm{f}''_{\mathrm{xy}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{f}''_{\mathrm{yx}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$

For $(1,2)$ fås derfor $A = -\mathrm{e}^{-1}$, $B = 0$ og $C = -4$.

Da $A < 0\ og\ AC - B^2 = 4\mathrm{e}^{-1} > 0$, er $(1,2)$ et maksimumspunkt, som det skulle vises.

4) Begrund, at f ikke har noget globalt minimumspunkt.
Løsning:

Et eventuelt globalt minimumspunkt for f må være et stationært punkt for f. Da f kun har ét stationært punkt, og det er et (endda globalt) maksimumspunkt for f, kan f ikke have et globalt minimumspunkt.

Man kan også vise påstanden ved at konstatere, at
$f(0,y) = -2y^2 + 8y - 8 \to -\infty$ for $y \to \infty$.

Opgave 2

Lad funktionen $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$f(x) = 4\ln(x) + (x-1)^2 - 3.$$

1) Vis, at Taylorpolynomiet P_2 af 2. orden for f ud fra punktet 1 er givet ved

$$P_2(x) = -x^2 + 6x - 8.$$

Løsning:

Vi skal finde $f(1)$, $f'(1)$ og $f''(1)$:

$f(1) = 4\ln(1) + (1-1)^2 - 3 = -3.$

$f'(x) = \frac{4}{x} + 2(x-1)$, så $f'(1) = 4.$

$f''(x) = -\frac{4}{x^2} + 2$, så $f''(1) = -2.$

Heraf fås

$$P_2(x) = -3 + 4(x-1) + \frac{-2}{2}(x-1)^2$$

$= -3 + 4x - 4 - (x^2 + 1 - 2x) = -x^2 + 6x - 8$, som det skulle vises.

2) Bestem

$$\lim_{x \to 2} \frac{P_2(x)}{3x - 6} \quad \text{og} \quad \lim_{x \to 3} \frac{P_2(x)}{3x - 6}$$

Løsning:

$\lim_{x \to 2} \frac{P_2(x)}{3x - 6}$:

Både tæller og nævner er 0, når $x = 2$. Derfor differentierer vi tæller og nævner hver for sig og får ved hjælp af L'Hopitals regel:

$$\lim_{x \to 2} \frac{P_2(x)}{3x - 6} = \frac{P_2'(2)}{3} = \frac{-2 \cdot 2 + 6}{3} = \frac{2}{3}$$

$\lim_{x \to 3} \frac{P_2(x)}{3x - 6}$:

Her går tælleren mod 1 og nævneren mod 3, når x går mod 3, så det fås umiddelbart, at

$$\lim_{x \to 3} \frac{P_2(x)}{3x - 6} = \frac{1}{3}$$

Opgave 3

For ethvert $x \in \mathbb{R}$ betragtes den uendelige række

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-2x + 3)^n$$

1) Vis, at $(*)$ er konvergent, hvis og kun hvis $x \in \,]1,2[$.

Løsning:

For fast $x \in \mathbb{R}$ er $(*)$ en kvotientrække med kvotienten $q = -2x + 3$.

Kravet for konvergens er, at $|q| < 1$, dvs.

$-1 < -2x + 3 < 1 \Leftrightarrow -4 < -2x < -2 \Leftrightarrow 4 > 2x > 2 \Leftrightarrow 1 < x < 2$, som ønsket.

2) Find en forskrift for sumfunktionen $f\,:\,]1,2[\,\to\mathbb{R}$, der er givet ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x+3)^n$$

Løsning:

Første led i rækken er $(-2x+3)^0 = 1$, så sumformlen giver umiddelbart, at forskriften er

$$f(x) = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-(-2x+3)} = \frac{1}{2x-2}\ , x \in]1,2[.$$

3) Vis, at f er monotont aftagende på $]1,2[$, og find værdimængden $R(f)$.

Løsning:

$$f'(x) = \frac{-2}{(2x-2)^2}$$

Da tælleren er negativ og nævneren er positiv på grund af den lige eksponent, er $f'(x) < 0$ for alle $x \in]1,2[$. Derfor er f er monotont aftagende på $]1,2[$.

Nævneren $2x-2 \to 0_+$ for $x \to 1_+$ og da tælleren i f er konstant 1, vil

$f(x) \to \infty$ for $x \to 1_+$.

$f(x) \to \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2}$ for $x \to 2_-$.

Derfor er $R(f) = \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$.

4) Find en forskrift for elasticiteten $El\, f(x)$ for enhver værdi af $x \in]1,2[$.

Løsning:

$$El\, f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{\frac{-2}{(2x-2)^2}}{\frac{1}{2x-2}} = -2x \cdot \frac{1}{2x-2} = \frac{-x}{x-1} = \frac{x}{1-x}$$