Eksamen på Økonomistudiet vinter 2019-20

Matematik B

10. februar 2020

(3-timers prøve med skriftlige hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 4 sider incl. denne forside.

Til dette eksamenssæt hører 0 bilag.

Syg under eksamen:

Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du

- kontakte en eksamensvagt for at få hjælp til registreringen i systemet som syg og til at aflevere blankt
- forlade eksamen
- kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest 5 dage efter eksamensdagen.

Pas på, du ikke begår eksamenssnyd!

Det er eksamenssnyd, hvis du under prøven

- Bruger hjælpemidler, der ikke er tilladt
- Kommunikerer med andre eller på anden måde modtager hjælp fra andre
- Kopierer andres tekster uden at sætte citationstegn eller kildehenvise, så det ser ud som om, det er din egen tekst
- Bruger andres idéer eller tanker uden at kildehenvise, så det ser ud som om, det er din egen idé eller dine egne tanker
- Eller hvis du på anden måde overtræder de regler, der gælder for prøven

Du kan læse mere om reglerne for eksamenssnyd på Din Uddannelsesside og i Rammestudieordningens afs. 4.12.

Opgave 1

Betragt den symmetriske matrix A givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Vis, at A er en regulær matrix.

2) Bestem en forskrift for den til matricen A hørende kvadratiske form $K: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

3) Bestem det karakteristiske polynomium for matricen A.

4) Vis, at matricen A har egenværdierne -2, 2 og 4.

5) Bestem egenrummet hørende til egenværdien 4 for matricen A.

6) Afgør, om matricen A er positiv definit, negativ definit, indefinit eller ingen af delene.

Opgave 2

1) Bestem alle løsninger til det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 - & x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ 0x_1 + & 2x_2 + & 6x_3 & = & -4 \\ -2x_1 + & 4x_2 + & 2x_3 & = & -8 \end{array}$$

2) Vis, at følgende lineære ligningssystem ikke har nogen løsning:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 - & x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ 0x_1 + & 2x_2 + & 6x_3 & = & -4 \\ -2x_1 + & 4x_2 + & 2x_3 & = & -7 \end{array}$$

(Opgave 2 fortsat)

3) Vis, at følgende lineære ligningssystem har netop én løsning, og find den:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 - & x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ 0x_1 + & 2x_2 + & 6x_3 & = & -4 \\ -2x_1 + & 4x_2 + & x_3 & = & -7 \end{array}$$

Opgave 3

Betragt for $t > 0$ differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} + \left(\frac{1}{t} - 1\right) x = 4e^t$$

1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.

2) Find den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen, hvor betingelsen $\tilde{x}(1) = 5e$ er opfyldt.

Opgave 4

Lad funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$f(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 4xy + 4x + 4y - 15.$$

1) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for f i ethvert punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Vis, at f er en strengt konkav funktion.

3) Vis, at f har netop ét stationært punkt, og find det.

(Opgave 4 fortsat)

4) Find værdimængden for f.

Opgavesættet slut