Eksamen i Matematik A, 3. januar 2020
Rettevejledning

Alle referencer er til lærebogen i kurset:
Sydsæter, Hammond, Strøm og Carvajal: "Essential Mathematics for Economic Analysis". Fifth edition. Pearson, 2016.

Opgave 1

(a) Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable.
Gør rede for definitionen af de første-ordens partielle afledede

$$f_1'(x,y) \quad \text{og} \quad f_2'(x,y)\,.$$

Løsning: Se afsnit 11.2, s.411-414. En god besvarelse kræver, at den formelle definition vha. grænseværdi nævnes.

I resten af opgaven betragtes funktionen f givet ved

$$f(x,y) = 2x(1+y^2) + x^2 \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Bestem $f_1'(x,y)$ og $f_2'(x,y)$.

Løsning: Ved at differentiere mht. henholdsvis x og y fås:

$$\begin{aligned} f_1'(x,y) &= 2 + 2y^2 + 2x \quad \text{og} \\ f_2'(x,y) &= 4xy\,. \end{aligned}$$

(c) Vis, at punktet $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ er et kritisk punkt for f.
Vis, at der ikke findes andre kritiske punkter.

Løsning: Ved at indsætte i udtrykkene fra (b) fås, at $f_1'(-1,0) = f_2'(-1,0) = 0$. Altså er $(-1,0)$ et kritisk punkt.
Af betingelsen $f_2'(x,y) = 0$ fås umiddelbart (vha. nulreglen), at $x = 0$ eller $y = 0$. Hvis $y = 0$ fås af betingelsen $f_1'(x,y) = 0$, at $x = -1$. Hvis $x = 0$ kan betingelsen $f_1'(x,y) = 0$ ikke være opfyldt. Altså er $(-1,0)$ det eneste kritiske punkt.

(d) Bestem alle anden-ordens partielle afledede for f.
Opstil Hessematricen (*the Hessian matrix*) $f''(x, y)$.

Løsning: Ved differentiation af de første-ordens partielle afledede fra (b) fås:

$$\begin{aligned} f''_{11}(x, y) &= 2\,, \\ f''_{12}(x, y) &= f''_{21}(x, y) = 4y\,, \\ f''_{22}(x, y) &= 4x\,. \end{aligned}$$

Hessematricen (se s.432) bliver således:

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix}\,.$$

(e) Afgør, om $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt (*saddle point*) for f.

Løsning: Med notationen fra Theorem 13.3.1 (s.505-6) er $A = f''_{11}(-1, 0) = 2$, $B = f''_{12}(-1, 0) = 0$ og $C = f''_{22}(-1, 0) = -4$. Da $AC - B^2 = -8 < 0$ følger det af sætningen, at $(-1, 0)$ er et saddelpunkt.

(f) Bestem værdimængden for f.
Hint: Kig fx. på funktionsværdierne på linien $y = x$.

Løsning: På linien $y = x$ er funktionsværdierne givet ved $f(x, x) = 2x^3 + x^2 + 2x$. Dette er et tredjegradspolynomium i x med positiv koefficient foran tredjegradsleddet. Altså vil $f(x, x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$ og $f(x, x) \to \infty$ for $x \to \infty$. Da $f(x, x)$ er en kontinuert funktion af x, følger det heraf, at den antager alle reelle værdier (formelt bruges her The Intermediate Value Theorem (Theorem 7.10.1, s. 266), det kræves dog ikke, at der henvises til denne sætning). Værdimængden for f er altså $R_f = \mathbb{R}$.

Opgave 2

(a) Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_1^4 (2x - 3\sqrt{x})\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 xe^{-x+1}\,dx\,.$$

Løsning: Det første integral kan udregnes vha. kendte stamfunktioner:

$$\begin{aligned} \int_1^4 (2x - 3\sqrt{x})\,dx &= \int_1^4 2x\,dx - \int_1^4 3x^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= [x^2]_1^4 - [2x^{\frac{3}{2}}]_1^4 = (16 - 1) - (16 - 2) = 1\,. \end{aligned}$$

Det andet integral kan udregnes vha. partiel integration (afsnit 9.5):

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-x+1}\,dx &= [x(-e^{-x+1})]_0^1 - \int_0^1 1\cdot(-e^{-x+1})\,dx \\ &= (-1-0) - [e^{-x+1}]_0^1 = -1-(1-e) = e-2\,.\end{aligned}$$

(b) Udregn det ubestemte integral

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx \quad (\text{hvor } x > 0).$$

Løsning: Integralet kan udregnes vha. integration ved substitution (afsnit 9.6). Med substitutionen $u = \ln(x)$ fås $du = \frac{1}{x}dx$ og derfor:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + C\,,$$

hvor C er en arbitrær konstant.
(Det er også muligt at udregne integralet vha. partiel integration. Se example 9.5.2(a), s. 345)

(c) Betragt det uegentlige integral (*improper integral*)

$$\int_0^\infty 6x^2 e^{-(x^3-1)}\,dx\,.$$

Vis, at dette integral konvergerer, og bestem dets værdi.

Løsning: Lad $b > 0$. Vha. integration ved substitution med $u = x^3 - 1$ og dermed $du = 3x^2dx$ fås:

$$\int_0^b 6x^2 e^{-(x^3-1)}\,dx = \int_{-1}^{b^3-1} 2e^{-u}\,du = [-2e^{-u}]_{-1}^{b^3-1} = -2e^{-b^3+1} + 2e\,.$$

Når $b \to \infty$ vil $e^{-b^3+1} \to 0$. Heraf følger (se afsnit 9.7), at det uegentlige integral konvergerer med værdi

$$\int_0^\infty 6x^2 e^{-(x^3-1)}\,dx = 2e\,.$$

Opgave 3

(a) Betragt funktionen

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$.

Løsning: Ved differentiation fås (brug kædereglen og kvotientreglen):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{og} \\ f''(x) &= \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\,. \end{aligned}$$

(b) Bestem grænseværdierne

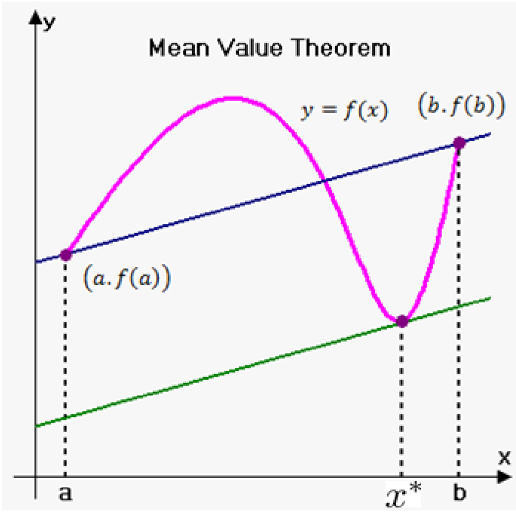
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad \text{og} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,.$$

Løsning: Se afsnit 7.12. Begge grænseværdier er ubestemte former (*indeterminate forms*) af typen "$\frac{0}{0}$". Ved brug af L'Hôpitals regel (Theorem 7.12.1, s.275) og udtrykket for $f'(x)$ fra (a) fås:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0 \quad \text{og} \\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1\,. \end{aligned}$$

(c) Opskriv Middelværdisætningen (*The Mean Value Theorem*).
Forklar indholdet i sætningen. Lav gerne en figur til at støtte din forklaring.

Løsning: Se afsnit 8.4, s.297-299. Selve sætningen er Theorem 8.4.2, s.298.
Lad funktionen $f(x)$ opfylde betingelserne. Så udtrykker sætningen, at der findes en x-værdi x^* mellem a og b, så tangenthældningen for grafen til f i punktet $(x^*, f(x^*))$ er lig hældningen af den rette linie gennem punkterne $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. Altså er tangenten til grafen for f i $(x^*, f(x^*))$ parallel med linien gennem $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. Dette er illustreret i figuren nedenfor (det er ikke et krav, at der er en figur, men en god figur kan bidrage til en klar besvarelse af spørgsmålet).



(d) Lad $g(x)$ være en differentiabel funktion defineret på $\mathbb{R}$.
Antag $g(0) = 0$, og at der findes et $b > 0$, så $g(b) = b$.
Vis, at der findes et $x^* > 0$, så $g'(x^*) = 1$.

Løsning: Da g er differentiabel på $\mathbb{R}$, er den specielt kontinuert på $[0, b]$ og differentiabel på $(0, b)$. Derfor kan vi anvende Middelværdisætningen på g på intervallet $[0, b]$. Heraf fås, at der et findes et $x^* \in (0, b)$, så

$$g'(x^*) = \frac{g(b) - g(0)}{b - 0} = \frac{b - 0}{b - 0} = \frac{b}{b} = 1\,.$$

Altså har vi det ønskede.