Skriftlig eksamen i Matematik A. Vinteren 2013 - 2014

Mandag den 6. januar 2014

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 V-1A ex

Skriftlig eksamen i Matematik A

Mandag den 6. januar 2014

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Tangentplaner.

Lad $D \subseteq \mathbf{R}^2$ være en åben, ikke-tom mængde, og lad $f : D \to \mathbf{R}$ være en differentiabel funktion af de to variable x og y, så $(x, y) \in D$.

(1) Opskriv formlen for ligningen for tangentplanen til grafen for funktionen f gennem punktet $\big(a, b, f(a, b)\big)$, hvor $(a, b) \in D$.

I resten af denne opgave betragter vi den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + 3xy^2 + 2x + y.$$

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(3) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(0, 0, f(0, 0)\big)$.

(4) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1, -1, f(1, -1)\big)$.

(5) Bestem alle de partielle afledede af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(6) Vis, at den funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : g(x) = f(x, x),$$

ikke har nogen stationære punkter, og at den er voksende overalt på mængden $\mathbf{R}$.

Opgave 2.

(1) Udregn de ubestemte integraler

$$\int \left(3x^2 + 7x - 1\right)^5 (6x + 7)\, dx, \ \int \frac{8x^7}{2\sqrt{2 + x^8}}\, dx \ \text{ og } \ \int \frac{8x}{1 + x^2}\, dx.$$

(2) Lad $a \in \mathbf{R}_+$ være vilkårligt valgt. Udregn det bestemte integral

$$\int_0^a \frac{8x}{1 + x^2}\, dx.$$

(3) Løs ligningen

$$\int_0^a \frac{8x}{1 + x^2}\, dx = 8 \ln \left(2a\right).$$

med hensyn til $a > 0$.

Opgave 3. Vi betragter ligningen

(§) $$e^{2x+y^2} + 2x - 3y = 1.$$

(1) Vis, at punktet $(x, y) = (0, 0)$ er en løsning til ligningen (§).

I en omegn U af punktet $(0, 0)$ er den variable y givet implicit som en funktion $y = y(x)$ af den variable x.

(2) Bestem differentialkvotienten $y'(0)$.

For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi herefter ligningen

(§§) $$e^{2x+y^2} + ax - 3y = 1.$$

(3) Vis, at punktet $(x, y) = (0, 0)$ er en løsning til ligningen (§§).

I en omegn U_a af punktet $(0, 0)$ er den variable y givet implicit som en funktion $y = y(x)$ af den variable x.

(4) Bestem differentialkvotienten $y'(0)$.

(5) Bestem $a \in \mathbf{R}$, så $y'(0) = 0$.