Matematik A, 21. januar 2019: Rettevejledning

Opgave 1: Uendelige rækker

(a) Lad (a_n) være en følge af reelle tal. Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

Redegør for definitionen af, at denne række er konvergent med sum s.

Brug denne definition til at vise, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

ikke er konvergent.

Løsning: For den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ defineres afsnitsfølgen (s_k) ved (MII1, 9.5.3)

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \quad \text{for alle } k \in \mathbb{N}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ siges at være konvergent med sum s, hvis afsnitsfølgen konvergerer mod s, altså hvis $s_k \to s$ for $k \to \infty$ (MII1, 9.5.4).

For den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ er afsnitsfølgen (s_k) givet ved

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{hvis } k \text{ er ulige,} \\ 0 & \text{hvis } k \text{ er lige.} \end{cases}$$

s_k nærmer sig oplagt ikke en bestemt værdi s når $k \to \infty$ (følgen springer mellem værdierne -1 og 0). Altså er afsnitsfølgen ikke konvergent, og dermed er den uendelige række ikke konvergent.

(b) Bestem summen af den konvergente række

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{5})^n .$$

Løsning: Ved anvendelse af hovedresultatet for kvotientrækker/geometriske rækker (MII1, 9.6.1) fås

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{5})^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3} .$$

(c) Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{(x-1)n} ,$$

hvor x er et reelt tal.

Bestem de værdier af x, for hvilke denne række er konvergent.

Løsning: Da $2^{(x-1)n} = (2^{(x-1)})^n$ er den uendelige række en kvotientrække/geometrisk række med $q = 2^{x-1}$ (og $a = 1$). Ved anvendelse af hovedresultatet for kvotientrækker/geometriske rækker (MII1, 9.6.1) fås, at rækken er konvergent netop hvis $2^{x-1} < 1$, hvilket er ækvivalent med $x < 1$.

Opgave 2

Betragt funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = 2e^{-x^2-y^2} + x^2 + y^2 .$$

(a) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt (x, y).

Løsning: Ved differentiation mht. henholdsvis x og y fås

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2(-2x)e^{-x^2-y^2} + 2x = 2x(1-2e^{-x^2-y^2}) \quad \text{og} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2(-2y)e^{-x^2-y^2} + 2y = 2y(1-2e^{-x^2-y^2}) . \end{aligned}$$

(b) Vis, at $(0,0)$ er et stationært punkt for f.

Løsning: Ved at indsætte $x = y = 0$ i de partielle afledede fra (a) ses det umiddelbart, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,.$$

(c) Bestem Hessematricen (andenordensmatricen) $H(x,y)$ for f i et vilkårligt punkt (x,y).

Afgør om $(0,0)$ er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et saddelpunkt. Begrund dit svar.

Løsning: Ved differentiation af de partielle afledede fra spørgsmål (a) fås

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (8x^2-4)e^{-x^2-y^2}+2 & 8xye^{-x^2-y^2} \\ 8xye^{-x^2-y^2} & (8y^2-4)e^{-x^2-y^2}+2 \end{pmatrix}.$$

Ved at sætte $(x,y) = (0,0)$ fås så

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Med notationen fra MII3, 3.2.2 er $A = -2 < 0$ og $AC - B^2 = 4 > 0$ og derfor er $(0,0)$ er et maksimumspunkt.

(d) Bestem alle stationære punkter for f.

Løsning: For at finde alle stationære punkter, skal vi finde alle løsninger $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ til ligningerne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0\,.$$

Ved anvendelse af udtrykkene for de partielle afledede fra spørgsmål (a) fås, at (a,b) er et stationært punkt netop hvis

$$a = b = 0 \quad \text{eller} \quad 1 - 2e^{-a^2-b^2} = 0\,.$$

Sidstnævnte ligning er ækvivalent med $a^2 + b^2 = \ln(2)$.
Altså består mængden af stationære punkter af $(0,0)$ samt alle (a,b) med $a^2 + b^2 = \ln(2)$. De sidstnævnte punkter er præcis punkterne på cirklen med centrum $(0,0)$ og radius $\sqrt{\ln(2)}$.

Opgave 3

(a) Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_1^3 (x^2 - \frac{1}{x^2})\, dx \quad \text{og} \quad \int_0^2 xe^{x+3}\, dx\,.$$

Løsning: Det første integral kan udregnes vha. kendte stamfunktioner:

$$\int_1^3 (x^2 - \frac{1}{x^2})\, dx \;=\; [\frac{1}{3}x^3 + x^{-1}]_1^3 = 8\,.$$

Det andet integral kan udregnes vha. partiel integration (MII2, 13.5.6):

$$\int_0^2 xe^{x+3}\, dx = [xe^{x+3}]_0^2 - \int_0^2 e^{x+3}\, dx \;= 2e^5 - [e^{x+3}]_0^2 = e^5 + e^3\,.$$

(b) Afgør om det uegentlige integral

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+2}\, dx$$

er konvergent (kan tillægges en værdi) eller divergent. Begrund dit svar.

Løsning: For ethvert $t > 0$ fås vha. integration ved substitution (MII2, 13.5.9):

$$\int_0^t \frac{x}{x^2+2}\, dx = [\frac{1}{2}\ln(x^2+2)]_0^t = \frac{1}{2}(\ln(t^2+2) - \ln(2))\,.$$

Da $\ln(t^2+2) \to \infty$ når $t \to \infty$, følger det, at

$$\int_0^t \frac{x}{x^2+2}\, dx \to \infty \quad \text{når} \quad t \to \infty\,.$$

Altså er det uegentlige integral $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+2}\, dx$ divergent (MII2, 14.1.1).

(c) Betragt funktionen f defineret ved

$$f(x) = x^2 \ln(x^2) \quad \text{for alle } x > 0.$$

Udregn det ubestemte integral

$$\int f(x)\, dx\,.$$

Hint: Kan løses ved anvendelse af partiel integration.

Løsning: Ved anvendelse af partiel integration for ubestemte integraler (MII2, 13.2.1) fås

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln(x^2)\, dx &= (\frac{1}{3}x^3)\ln(x^2) - \int (\frac{1}{3}x^3)\frac{2x}{x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln(x^2) - \frac{2}{3}\int x^2\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln(x^2) - \frac{2}{9}x^3 + c \\ &= \frac{1}{3}x^3(\ln(x^2) - \frac{2}{3}) + c\,,\end{aligned}$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er en arbitrær konstant.
Idet $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ for alle $x > 0$, kan resultatet fx. også skrives

$$\int x^2 \ln(x^2)\, dx = \frac{2}{3}x^3(\ln(x) - \frac{1}{3}) + c\,.$$