Skriftlig eksamen i Matematik B. Vinteren 2014 - 2015

Torsdag den 19. februar 2015

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 V-1B rx

Skriftlig eksamen i Matematik B

Torsdag den 19. februar 2015

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter 2×3 matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem nulrummet

$$N(B) = \Big\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}.$$

(2) Bestem 2×2 matricen $A = BB^T$, hvor B^T er den til B transponerede matrix, og vis, at A er positiv definit.

(3) Bestem en forskrift for den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, der er givet ved den symmetriske matrix A. Godtgør, at K er strengt konveks, og bestem værdimængden $R(K)$ for K.

(4) Godtgør, at den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = \exp\Big(K(x, y)\Big),$$

er kvasikonveks.

(5) Bestem 3×3 matricen $C = B^T B$, og vis, at C er positiv semidefinit.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > -1\}$$

og den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) = x^2 + 4xy + \ln(y + 1).$$

Desuden betragter vi den funktion $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall (s, t) \in \mathbf{R}^2 : g(s, t) = \int_s^t \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dy \Big)\, dx.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

(4) Afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums-, eller et sadelpunkt for f.

(5) Bestem $g(s, t)$ ved at udregne det givne dobbeltintegral, og bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \text{ og } \frac{\partial g}{\partial t}(s, t)$$

af første orden for funktionen g i et vilkårligt punkt $(s, t) \in \mathbf{R}^2$.

(6) Bestem Hessematricen $g''(s, t)$ for funktionen g i et vilkårligt punkt $(s, t) \in \mathbf{R}^2$.

(7) Bestem mængden

$$P = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid g''(s, t) \text{ er positiv definit}\}.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(\frac{\cos t}{5 + \sin t} \Big) x = 1$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den maksimale løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 10$ er opfyldt.

Opgave 4. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$$

og den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,(x, y) \in D : f(x, y) = x^2 y + \ln x.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \ \text{ og } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

(2) Bestem værdimængden for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$, og godtgør, at $f''(x, y)$ er indefinit og regulær overalt på mængden D.