Vejledende besvarelse - eksamen, Makro A, Forår 2013
21. juni, 2013
Tre timer uden hjælpemidler

Opgave 1

Spørgsmål 1

Ligningen for $\tilde{k}^*$:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s_K^{1-\alpha} s_H^{\varphi}}{n+g+\delta+ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}, \; 0 < \alpha, \varphi < 1, \; \alpha + \varphi = 1 \tag{1}$$

Eksponenten på s_H er $\varphi / (1-\alpha-\varphi)$, som er positiv givet restriktionerne på α og φ. Dermed har s_H en positiv påvirkning på $\tilde{k}^*$. Intuitionen er at større opsparing i humankapital øger produktiviteten. Dette øger indkomst per capita og dermed også opsparingen i fysisk kapital hvorfor $\tilde{k}^*$ øges.

Spørgsmål 2

Ligningen for g^y:

$$g^y = \frac{\beta}{1-\alpha} g - \frac{\kappa}{1-\alpha} n, \; 0 < \alpha, \beta, \kappa < 1, \; \alpha + \beta + \kappa = 1, \tag{2}$$

Koefficienten på n er $-\frac{\kappa}{1-\alpha} < 0$ dvs. n påvirker g^y negativt. Større befolkning og en fast mængde land betyder mindre produktion per capita da der er aftagende marginalprodukt til arbejdskraft. Da land er en konstant og dermed ikke-reproducérbar inputfaktor (i modsætning til kapital) vil større befolkningen også betyde mindre produktion per mand i steady state. Dermed betyder større vækst i befolkningen mindre vækst i BNP per capita i steady state. Den dygtige studerende vil desuden bemærke at jo større κ er desto mere vigtigt er land i produktionen og desto kraftigere er den negative påvirkning af n på g^y.

Spørgsmål 3

Solowbetingelsen:

$$a'(w_i) w_i = a(w_i), \tag{3}$$

Effektiviteten for arbejder i:

$$a(w_i) = (w_i - V)^{\eta}, \; 0 < \eta < 1, \tag{4}$$

Først findes $a'(w)$:

$$a'(w_i) = \eta (w_i - V)^{\eta - 1}$$

Dette indsættes sammen med (4) i (3):

$$\eta (w_i - V)^{\eta-1} w_i = (w_i - V)^{\eta} \iff$$

$$\eta w_i = w_i - V \iff w_i = \frac{V}{1-\eta}.$$

Det ses at større V betyder større w_i. Intuitionen er som følger: Større outside option mindsker arbejder i's effektivitet. For at undgå at effektiviteten falder vil virksomheden sætte en højere løn. Dette kan f.eks. fortolkes i en shirking-ramme. Her vil arbejderen vælge at "shirke" mere og arbejde mindre hårdt fordi omkostningen ved at blive fyret mindskes. Virksomheden sætter lønnen op for at øge den relative omkostning til at blive fyret, og dermed mindske arbejderens lyst til at "shirke".

Opgave 2

Modellens ligninger:

$$Y_t = K_t^{\alpha}\left(A_t L_{Yt}\right)^{1-\alpha},\ 0<\alpha<1 \tag{5}$$

$$A_{t+1} - A_t = \rho A_t^{\phi}\left(\frac{L_{At}}{L_t}\right)^{\lambda},\ 0<\phi\leq 1,\ 0<\lambda<1,\ \rho>0,\ A_0>0 \tag{6}$$

$$L_{At} + L_{Yt} = L_t \tag{7}$$

$$L_{At} = s_R L_t,\ 0<s_R<1 \tag{8}$$

$$L_{t+1} = (1+n)\,L_t,\ n>-1\ , L_0>0 \tag{9}$$

$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)\,K_t,\ 0<s,\ \delta<1,\ K_0>0 \tag{10}$$

Spørgsmål 1

Indsæt (8) i (6) hvilket giver:

$$A_{t+1} - A_t = \rho A_t^{\phi}\left(\frac{s_R L_t}{L_t}\right)^{\lambda} = \rho A_t^{\phi} s_R^{\lambda} \tag{11}$$

Større s_R giver en større ændring i det teknologiske niveau, da flere forskere per capita øger antallet af idéer der implementeres i produktionen. Da vi har antaget at $\phi>0$ giver større A_t større $A_{t+1}-A_t$. Her er tale om en såkaldt standing-on-shoulders-effekt, som skyldes at en række teknologier (eksempelvis algebra eller computeren) øger produktiviteten i forskningssektoren.

Spørgsmål 2

Indsæt $\phi = 1$ og divider med A_t på begge sider af (11):

$$\frac{A_{t+1}-A_t}{A_t} = \rho s_R^{\lambda}. \tag{12}$$

Spørgsmål 3

Det følger af (7) og (8) at $L_{Yt} = (1-s_R)\,L_t$. Indsæt dette i (5) og divider med $A_t L_t$:

$$\frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{K_t^{\alpha}\left(A_t\left(1-s_R\right)L_t\right)^{1-\alpha}}{A_t L_t} \iff$$

$$\tilde{y}_t = (1 - s_R)^{1-\alpha}\, \tilde{k}_t^{\alpha} \tag{13}$$

$\tilde{y}_t$ afhænger negativt af s_R. Intuitionen er at en større andel af arbejdere i forskningssektoren betyder færre arbejdere i produktionssektoren hvorfor $\tilde{y}_t$ falder.

Spørgsmål 4

Transitionsligningen udledes i tre trin:

1. Dividér (10) med $A_{t+1}L_{t+1}$:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{sY_t + (1-\delta)\,K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

2. Jf. definitionen i spm 2 gælder det at $A_{t+1} = A_t\,(1+g_e)$. Indsæt dette og (9):

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{sY_t + (1-\delta)\,K_t}{(1+n)\,(1+g_e)\,A_tL_t} = \frac{s\tilde{y}_t + (1-\delta)\,\tilde{k}_t}{(1+n)\,(1+g_e)}$$

3. Indsæt (13):

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)\,(1+g_e)}\left(s\,(1-s_R)^{1-\alpha}\,\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\,\tilde{k}_t\right). \tag{14}$$

Spørgsmål 5

Indsæt $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$ og isolér:

$$\tilde{k}^* = \frac{1}{(1+n)\,(1+g_e)}\left(s\,(1-s_R)^{1-\alpha}\left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha} + (1-\delta)\,\tilde{k}^*\right) \iff$$

$$\tilde{k}^*\,(1+n)\,(1+g_e) = s\,(1-s_R)^{1-\alpha}\left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha} + (1-\delta)\,\tilde{k}^* \iff$$

$$\left(\tilde{k}^*\right)^{1-\alpha}(g_e + n + \delta + ng_e) = s\,(1-s_R)^{1-\alpha} \iff$$

$$\tilde{k}^* = (1-s_R)\left(\frac{s}{g_e + n + \delta + ng_e}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Den sædvanlige transitionskurve tegnes og konvergens illustreres vha. trappeiteration fra venstre og højre side af $\tilde{k}^*$ - se også "figur til spm 5" som er vedlagt denne.rettevejledning.

Den dygtige studerende vil vise matematisk at transitionskurven har sin sædvanlige form. F.eks. ved at vise at følgende tre betingelser er opfyldt: 1. Transitionskurven går gennem $(0,0)$. Dette ses ved at indsætte $\tilde{k}_t = 0$ i (14). 2. Den skærer 45^o-linien i ét punkt der er strengt positivt. Dette følger af ovenstående ligning for $\tilde{k}^*$. 3. Den rammer steady state oppefra. Dette følger f.eks. af at undersøge hældningen: Først differentieres (14) mht. $\tilde{k}_t$:

$$\frac{\partial\tilde{k}_{t+1}}{\partial\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+n)\,(1+g_e)}\left(s\,(1-s_R)^{1-\alpha}\,\alpha\tilde{k}_t^{\alpha-1} + (1-\delta)\right).$$

Det ses at når $\tilde{k}_t \to 0$ går $\partial\tilde{k}_{t+1}/\partial\tilde{k}_t$ mod $\frac{1-\delta}{(1+n)(1+g_e)} < 1 \iff 1-\delta < (1+n)\,(1+g_e) \iff g_e + n + \delta + ng_e > 0$, hvilket netop er stabilitetsbetingelsen.

Spørgsmål 6

En stigning i n forskyder transitionskurven nedad således at der kommer konvergens mod et nyt og lavere niveau for $\tilde{k}^*$- se også "Figur til spm 6" vedlagt denne rettevejledning. Intuitionen er at højere befolkningsvækst betyder større udtynding af kapitalapparatet. Derfor er udtynding og nedslidning større end opsparing og $\tilde{k}_t$ falder. Når $\tilde{k}_t$ falder, aftager nedslidning og udtynding lineært. Opsparing falder også, men mindre end lineært eftersom marginalproduktet mht. $\tilde{k}_t$ stiger. Over tid vil faldet i $\tilde{k}_t$ således aftage og der er konvergens mod en steady state hvor opsparing er lig nedslidning og udtynding.

$\tilde{k}_t$ falder for første gang i periode 2. $\tilde{k}_1$ er forudbestemt fra periode 1, hvor stigningen i n ikke er indtruffet endnu, dvs. $\tilde{k}_t$ er uændret fra periode 0 til periode 1.

Spørgsmål 7

Per definition er kapital per mand i steady state givet ved $k_t^* = A_t\tilde{k}^*$. Da $\tilde{k}^*$ er konstant må k_t^* vokse med samme vækstrate som A_t, dvs. g_e. Ved at bruge (13) ses det at steady state-niveauet for $\tilde{y}_t$, $\tilde{y}^* = (1-s_R)^{1-\alpha}\left(\tilde{k}^*\right)^\alpha$ også er konstant. Dermed må $y_t^* = A_t\tilde{y}^*$ også vokse med g_e.

I den endogene vækstmodel fra kapitel 9 vil en stigning i antallet af personer i forskningssektoren øge produktionen af viden og dermed den teknologiske vækst. Der er altså en skalaeffekt som indebærer at økonomier med større befolkninger har større vækst. I denne opgave afhænger væksten af andelen af folk i forskningssektoren L_{At}/L_t og ikke den absolutte befolkning, dvs. der er ingen skalaeffekt. Som nævnt i den indledende tekst til opgaven skyldes dette at det antages at det bliver sværere for idéer at diffundere ud i befolkningen når befolkningen er større. Eksempelvis er diffusion af teknologi fra Nordkina til Sydkina vanskeligere end diffusion fra Nordjylland til Sønderjylland.

Spørgsmål 8

En større andel af forskere øger steady state-vækstraten g_e, jævnfør (12). Som nævnt i spm 3 betyder højere s_R færre arbejdere i produktionssektoren og dermed lavere produktion per capita. Dette er en niveaueffekt. Når $t \to \infty$ vil vækstеffekten dominere niveaueffekten, dvs. på den lange bane vil BNP per capita altid øges når s_R stiger. Den dygtige studerende vil bemærke at hvis der sker en stigning i s_R vil denne effekt slå igennem samme år som s_R stiger. Effekten på det teknologi slår derimod først igennem året efter. På den helt korte bane er effekten af at øge s_R.på BNP per capita således altid negativ.

Spørgsmål 9

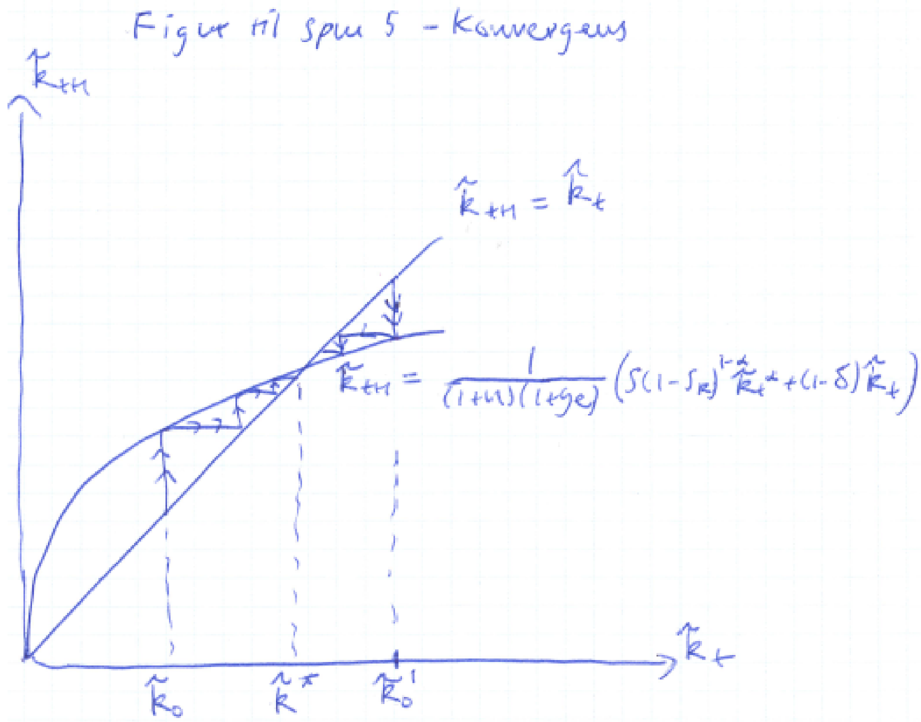
Dividér (12) med A_t for at finde væksten i det semi-endogene tilfælde hvor $0 < \phi < 1$:

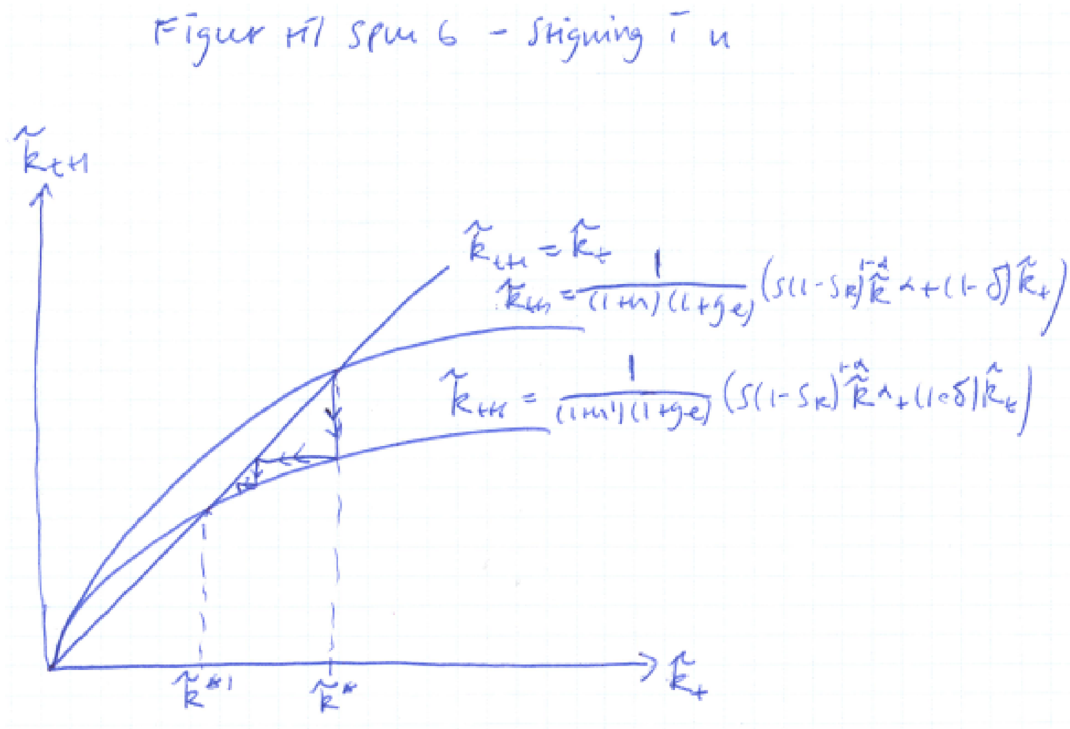
$$\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho A_t^{\phi-1} s_R^\lambda.$$

Det ses at $(A_{t+1} - A_t)/A_t \to 0$ for $t \to \infty$ hvis det gælder at $A_t \to \infty$ for $t \to \infty$. For at vise at dette gælder tager vi udgangspunkt i (11), hvoraf det for det første ses at $A_{t+1} - A_t > 0$ altid holder. Yderligere ses det at det aldrig vil gælde at $A_{t+1} - A_t \to 0$ når $t \to \infty$, da dette ville kræve at $A_t \to 0$ og dermed at $A_{t+1} - A_t < 0$. Da ændringen i A_t er strengt positiv og ikke går mod nul må $A_t \to \infty$ når $t \to \infty$.

Intuitionen er at når ϕ er lille dominerer fishing out-effekten standing on shoulders-effekten. Fishing out-effekten indtræffer fordi det bliver sværere at finde på nye opfindelser når beholdningen af eksisterende opfindelser er stor, da de letteste idéer findes først. Dermed vil væksten i A_t aftage efterhånden som A_t vokser. Standing on shoulders effekten er forklaret i svaret til spørgsmål 2.1.

Figurer


Figur til spm 5 - Konvergens
k̃ₜ₊₁ = k̃ₜ
k̃ₜ
k̃₀
k̃*
k̃₀'


Figur til spm 6 - Stigning i n
k̃ₜ₊₁ = k̃ₜ
k̃ₜ
k̃*'
k̃*