Rettevejledning til

Eksamen på Økonomistudiet 2010-I

Makro A, 2. årsprøve

Efterårssemestret 2009

(Tre-timers prøve uden hjælpemidler, lommeregner tilladt)

Målbeskrivelse:

Faget videreudvikler langsigtsdelen af Økonomiske Principper 2, Makro.

I Makro A opstilles og analyseres alternative formelle modeller til forståelse af de langsigtede, trendmæssige tendenser i de vigtigste makroøkonomiske variable, såsom aggregeret indkomst og forbrug (per capita), indkomstfordeling, realløn og realrente, nettofordringsposition overfor udlandet, teknologisk niveau og produktivitet samt ledighed. I sammenhæng hermed præsenteres empirisk materiale under anvendelse af simple statistiske metoder.

Faget bygger op til Makro B ved at beskrive det forankringspunkt, økonomiens fluktuationer foregår omkring. Det bygger også op til Makro C ved at omfatte de mest fundamentale versioner af de langsigtsmodeller, som også indgår i Makro C.

De studerende skal lære de vigtigste såkaldte stiliserede empiriske fakta om økonomisk vækst og strukturel ledighed at kende, og de skal kende til og forstå den række af økonomisk teoretiske modeller, som i kurset inddrages til forklaring af disse fakta og til forståelse af økonomiens trendmæssige udvikling i det hele taget.

En vigtig kundskab, der begyndende skal erhverves i dette kursus, er selvstændig opstilling og analyse af formelle, makroøkonomiske modeller, som af type er som kendt fra faget, men som kan være variationer heraf. Der vil typisk være tale om modeller, som er formulerede som, eller er tæt på at være formulerede som, egentlige generelle ligevægtsmodeller. En del af denne kundskab består i en verbal formidling af en forståelse af modellernes egenskaber.

En anden vigtig kundskab er at kunne koble teori og empiri, så empirisk materiale kan tilvejebringes og analyseres på en måde, der er afklarende i forhold til teorien. Igen er verbal formidling af de konklusioner, der kan drages ud af samspillet mellem teori og empiri, en vigtig del af den beskrevne færdighed.

De typer af modeller, der skal kunne analyseres, omfatter modeller for lukkede såvel som for åbne økonomier, statiske såvel som dynamiske modeller, dynamiske modeller med såvel diskret tid som kontinuert tid. Modellerne skal både kunne analyseres generelt og ved numerisk simulation (sidstnævnte dog kun af ikke-stokastiske dynamiske modeller i diskret tid).

De studerende skal opnå færdigheder i at foretage økonomiske analyser i de typer af modeller, faget beskæftiger sig med, herunder analyser af strukturelle, økonomisk politiske indgreb og formidle analysens indsigter.

Topkarakteren 12 opnås, når de beskrevne færdigheder mestres til en sådan fuldkommenhed, at den studerende er blevet i stand til selvstændigt at analysere nye (fx økonomisk politiske) problemstillinger ved egen opstilling og analyse af varianter af de fra kurset kendte modeller under inddragelse og analyse af relevant empiri og afgive absolut fyldestgørende verbal forklaring af de opnåede analyseresultater.

Opgave 1. Steady state i den basale Solow-model og tværlandeempiri

1.1. De eksogene variable mog parametre er: Totalfaktorproduktiviteten, B, outputelasticiteten mht. kapital, α, hvor elasticiteten mht. arbejdsinput er $1-\alpha$, bruttoopsparingsraten (bruttoopsparing i forhold til samlet BNP), s, som i den lukkede økonomi er lig med bruttoinvesteringsraten, nedslidningsraten, δ samt vækstraten i arbejdsstyrken, n. Hertil kommer startværdierne K_0 og L_0 for tilstandsvariablene kapital, K_t, og arbejdsinput, L_t, som dog ikke er af betydning i det følgende.

Indkomst per arbejder på langt sigt (i modellens steday state) kaldet y^* er:

$$y^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Man skal ikke kunne huske denne formel, men man skal kunne redegøre for de retninger, de eksogene påvirker den langsigtede indkomst pr. arbejder i, og gennem hvilke mekanismer. Fx betyder større investeringsrate s mere kapitalakkumulation og dermed mere kapital pr. arbejder i steady state og derfor mere output pr. arbejder. Tilsvarende betyder større vækstrate i arbejdsstyrken mere "udtynding" af den akkumulerede kapital og dermed mindre kapital pr. arbejder i steady state, ligesom mere nedslidning naturligt fører til mindre kapital og indkomst pr. arbejder. Elasticiteten i y^* mht. eksempelvis s er $\alpha/(1-\alpha)$. Højere TFP giver mere output pr. arbejder med en elasticirtet, der er større end én. Den umiddelbare én-til-én-effekt forstærkes af øget kapitalakkumulation.

1.2 Ved at tage den naturlige logaritme på begge sider ovenfor fås:

$$\ln y^* = \frac{1}{1-\alpha} \ln B + \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\ln s - \ln (n+\delta) \right].$$

Koefficienen $\alpha/(1-\alpha)$ er positiv og for en realistisk værdi af α (omkring 1/3) vil den være omkring 1/2. Estimationen passer godt med dette ved signifikant at pege på en positiv værdi, men den er dog signifikant for stor (1,52 mod 1/2). Forudsigelsesgraden er ganske høj med en R^2 på 0,64.

Estimationen passer således umiddelbart godt med modellen med et problem omkring størrelsesordenen af den estimerede koefficient. En god besvarelse kan pege på eksempelvis (endogenitets-) problemerne omkring mulighederne for modsat kausalitet eller såkaldt spurious correlation.

1.3 Hvis humankapital inddrages som kendt fra pensums kapitel 6 med en egen investeringsrate ligesom for fysisk kapital, vil en stigning i investeringsraten for *fysisk* kapital (vores s) give mere indkomst (pr. arbejder) via mekanismen forklaret ovenfor. Den større indkomst vil, da investreing i humankapital er en given andel af BNP, også give mere humankapital pr. arbedjer, hvilket vil forstærke effekten på indkomst pr. arbedjer på langt sigt. Effekten fra s til y^* kan således ved at inddrage humankapital komme i bedre overensstemmelse med den viste empiri.

Opgave 2. Variabel kapitaludnyttelsesgrad i en Solowmodel

2.1 Fra ligning (1) fås ved at dividere på begge sider med L_t, at

$$y_t = \beta^\alpha k_t^\alpha.$$

Fra ligning (2) fås $K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$, og ved at dividere på begge sider med L_{t+1} [$= (1+n)L_t$ fra (3)] fås

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[sy_t + (1-\delta)\,k_t\right].$$

Når heri indsættes $y_t = \beta^\alpha k_t^\alpha$ fås det ønskede

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[s\beta^\alpha k_t^\alpha + (1-\delta)\,k_t\right].$$

For konvergens til en entydig steday state-værdi k^* er det nok at godtgøre:

1) For $k_t = 0$, bliver $k_{t+1} = 0$. Dette fremgår umiddelbart.

2) Overalt er k_{t+1} som funktion af k_t strengt voksende. Dette fremgår umiddelbart.

3) Hældningen

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{s\alpha\beta^\alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)}{1+n}$$

aftager monotont fra plus uendelig til $(1-\delta)\,/\,(1+n) < 1$, som k_t går fra nul til uendelig. (Her bruges, at n er antaget større end nul).

2.2 Dynamikken kan omskrives til

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}\left[s\beta^\alpha k_t^\alpha - (n+\delta)\,k_t\right],$$

så $k_{t+1} = k_t = k$ betyder

$$s\beta^\alpha k^\alpha = (n+\delta)\,k \Leftrightarrow$$

$$k = \beta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv k^*.$$

Fra $y_t = \beta^\alpha k_t^\alpha$ fås så

$$\begin{aligned} y^* &= \beta^\alpha\left[\beta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^\alpha \\ &= \beta^{\alpha+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &= \beta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

så alt i alt fås som ønsket

$$y^* = \left(\frac{\beta s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Her indgår β præcis ligesom s, hvilket ikke er overraskende, idet s virker igenem at skabe mere kapital, og den skabte kapital netop anvendes proportionalt med β.

Hvis to lande, *rig* og *fattig*, har hver sit β, hhv. β^{rig} og β^{fattig}, men ellers har samme parametre, følger det af formlen ovenfor, at

$$\frac{y^{*\text{rig}}}{y^{*\text{fattig}}} = \left(\frac{\beta^{\text{rig}}}{\beta^{\text{fattig}}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Forskellene alene i kapitaludnyttelsesgrader kan altså forklare en faktor $\left(\beta^{\text{rig}}/\beta^{\text{fattig}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ i indkomstforskel på langt sigt. Med $\beta^{\text{rig}}/\beta^{\text{fattig}} = 2$ og $\alpha = 1/3$, er denne faktor $\sqrt{2}$, dvs. omkring 1,4. Det rige land skulle altså være 40 pct. rigere end det fattige som følge af forskelle i udnyttelsesgraden for kapital. Dette er en betydelig forskel, omend indkomstforskellene mellem rige og fattige lande er mange gange større. Forskelle i kapitaludnyttelsesgrader synes dog at kunne bidrage med en betragtelig forklaringsgrad.

2.3 De anførte førsteordensbetingelser (9)-(11) følger umiddelbart af at differentiere det i (8) anførte Π_t mht. hhv. L_t, K_t og β_t og sætte lig med nul. Man skal blot følge almindelige differentiationsregler.

Ligning (11) er en almindelig marginalbetingelse og siger, at i et profitmax skal omsætningstigningen (som følge af stærkere kapitaludnyttelse) ved at øge β_t lidt være lig med omkostningsstigningen (som følge af større nedslidning). Var fx den første størst, kunne profitten øges ved at øge kapitaludnyttelsesgraden.

Ved at gange på begge sider af hhv. (9), (10) og (11) med hhv. L_t, K_t og β_t og anvende produktionsfunktioonen (6), fås uniddelbart (12), (13) og (14).

2.4 Ligning (12) siger mere eller mindre direkte, at lønandelen $w_t L_t / Y_t$ er $1 - \alpha$, som det plejer at være. Idet jo bruttolejesatsen for kapital r_t er lig med $\rho_t + d\beta_t^{\phi}$, siger (13) lige så direkte, at kapitalindkomstandelen *brutto*, $r_t K_t / Y_t$, er lig med α, som det også plejer at være. Der bedes ikke om mere på dette punkt, men en virkelig god besvarelse ser, at i denne model er *netto*kapitalindkomstandelen $\rho_t K_t / Y_t$ også fast (hvad den ikke er i en traditionel Solowmodel). Følgende i [] forlanges altså ikke, men kan evt. udmærke en meget god besvarelse:

[Fra (13) haves: $\rho_t K_t = \alpha Y_t - d\beta_t^{\phi} K_t$. Fra (14) haves: $d\beta_t^{\phi} K_t = \alpha Y_t / \phi$. Når den anden indsættes i den første fås $\rho_t K_t = \alpha Y_t - \alpha Y_t / \phi = \alpha Y_t (1 - 1/\phi)$, eller

$$\frac{\rho_t K_t}{Y_t} = \alpha \frac{\phi - 1}{\phi}.]$$

Såvel (13) som (14) har jo αY_t på højresiden. Venstresiderne må så også være ens, hvilket som ønsket direkte fører til

$$(\phi - 1)\, d\beta_t^{\phi} = \rho_t.$$

Hvis β_t isoleres heri fås

$$\beta_t = \left(\frac{\rho_t}{(\phi - 1)\, d}\right)^{\frac{1}{\phi}}.$$

Den optimale kapitaludnyttelsesgrad afhænger således positivt af realrenten ρ_t. En højere realrente betyder, at kapital bliver dyrere at anvende, hvorfor det bliver optimalt at økonomisere mere med kapitalen og kompensere herfor med en højere udnyttelsesgrad.

I opgavens ligning (15), som er gentaget ovenfor, er $d\beta_t^\phi$ jo lig med δ_t, så man kunne også skrive

$$(\phi - 1)\,\delta_t = \rho_t.$$

Oplysningen om samme størrelsesorden for δ_t og ρ_t peger så på et ϕ omkring 2.

2.5 Fra ligning (14) fås for den optimale kapitaludnyttelsesgrad, at

$$\beta_t = \left(\frac{\alpha}{\phi d}\frac{Y_t}{K_t}\right)^{\frac{1}{\phi}}.$$

Når dette indsættes på pladsen for β_t i produktionsfunktionen (6) fås

$$\begin{aligned}
Y_t &= \left[\left(\frac{\alpha}{\phi d}\frac{Y_t}{K_t}\right)^{\frac{1}{\phi}} K_t\right]^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{\alpha}{\phi d}\right)^{\frac{\alpha}{\phi}} Y_t^{\frac{\alpha}{\phi}} K_t^{(1-\frac{1}{\phi})\alpha} L_t^{1-\alpha} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$Y_t^{1-\frac{\alpha}{\phi}} = \left(\frac{\alpha}{\phi d}\right)^{\frac{\alpha}{\phi}} K_t^{\alpha\frac{\phi-1}{\phi}} L_t^{1-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$Y_t = \left(\frac{\alpha}{\phi d}\right)^{\frac{\alpha}{\phi-\alpha}} K_t^{\alpha\frac{\phi-1}{\phi-\alpha}} L_t^{(1-\alpha)\frac{\phi}{\phi-\alpha}}.$$

Hver af eksponenterne på K_t og L_t er tydeligvis positiv, og for eksponentsummen bemærkes

$$\alpha\frac{\phi-1}{\phi-\alpha} + (1-\alpha)\frac{\phi}{\phi-\alpha} = \frac{\alpha(\phi-1)+(1-\alpha)\phi}{\phi-\alpha} = \frac{\phi-\alpha}{\phi-\alpha} = 1.$$

Hermed er opgaveteksten (16) samt $0 < \gamma < 1$ godtgjort.

2.6 Ligning (19) følger direkte af ligning (14), når man tager hensyn til, at $d\beta_t^\phi$ fra (14) netop er lig med δ_t, som oven i købet anført i (14).

Fra (16) haves naturligvis $y_t = Bk_t^\gamma$.

I ligning (17) indsættes først den værdi for δ_t, man har fra (19):

$$K_{t+1} = sY_t - \left(\frac{\alpha}{\phi}\frac{Y_t}{K_t}\right)K_t + K_t = sY_t - \frac{\alpha}{\phi}Y_t + K_t = \left(s - \frac{\alpha}{\phi}\right)Y_t + K_t.$$

Når heri divideres på begge sider med L_{t+1} osv. fås

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= \frac{1}{1+n}\left[\left(s-\frac{\alpha}{\phi}\right)y_t + k_t\right] \\
&= \frac{1}{1+n}\left[\left(s-\frac{\alpha}{\phi}\right)Bk_t^\gamma + k_t\right].
\end{aligned}$$

Når k_t trækkes fra på begge sider fås som ønsket

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}\left[\left(s-\frac{\alpha}{\phi}\right)Bk_t^\gamma - nk_t\right]$$

Det bemærkes, at antagelsen $s > \frac{\alpha}{\phi}\frac{n+d}{d}$ indebærer $s > \frac{\alpha}{\phi}$.

2.7 Steady state-værdier for k_t og y_t følger (som de plejer) ved at sætte venstre og dermed højre side i (20) lig med nul,

$$k^* = B^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\frac{s - \frac{\alpha}{\phi}}{n} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

$$y^* = B^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\frac{s - \frac{\alpha}{\phi}}{n} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

Dermed gælder i steady state, at $y^*/k^* = Y_t^*/K_t^* = \left(\frac{s-\frac{\alpha}{\phi}}{n} \right)^{-1}$. Fra (19) gælder derfor

$$\delta^* = \frac{\alpha}{\phi} \frac{n}{s - \frac{\alpha}{\phi}}.$$

I udtrykket for y^* ovenfor skal man indsætte værdierne for B og γ fra (16). Enkle omskrivninger fører herefter frem til opgavetekstens (21).

Endelig gælder jo fra (7), at $\beta_t = (\delta_t/d)^{1/\phi}$. Når det fundne δ^* indsættes heri fås

$$\beta^* = \left(\frac{\alpha}{\phi d} \frac{n}{s - \frac{\alpha}{\phi}} \right)^{\frac{1}{\phi}}.$$

Antagelsen $s > \frac{\alpha}{\phi} \frac{n+d}{d}$ sikrer $0 < \beta^* < 1$, hvorfor også $0 < \delta^* < 1$.

2.8 Når der tages naturlig logaritme på begge sider af (21) og derefter differentieres mht. s fås,

$$\frac{1}{y^*} \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\phi - 1}{\phi} \frac{1}{s - \frac{\alpha}{\phi}}.$$

Ved at gange på begge sider med s fås den elasticitet ε, der spørges efter,

$$\varepsilon = \frac{s}{y^*} \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\phi - 1}{\phi} \frac{s}{s - \frac{\alpha}{\phi}}.$$

I forhold til den tilsvarende, almindelige elasticitet fra Solowmodellen, $\frac{\alpha}{1-\alpha}$, trækker faktoren $\frac{\phi-1}{\phi}$ nedad, mens $\frac{s}{s-\frac{\alpha}{\phi}}$ trækker opad. Første effekt kommer af, at med en større opsparingskvote s fås alt andet lige på langt sigt en lavere naturlig rente ρ^*, og som vist ovenfor trækker dette mod en lavere kapitaludnyttelsesgrad og dermed *alene fra denne mindre udnyttelsesgrad* en mindre effekt (end i Solow-modellen) af en stigning i s. Den anden effekt skyldes, at den mindre kapitaludnyttelsesgrad betyder mindre nedslidning, hvilket *isoleret set* giver anledning til en større stigning i kapital pr. arbedjer på langt sigt (end i Solow-modellen) som følge af den øgede opsparingsrate.

Med plausible værdier, $\alpha = 1/3$, $\phi = 2$ og $s = 0,2$, fås et ε omkring 1,5. Dette er i næsten fornærmende god overensstemmelse med den estimation af elasticiteten, der præsenteredes i **1.2**. Endogen kapitaludnyttelsesgrad kan altså tilsyneladende bidrage til en bedre overensstemmelse mellem teori og empiri.

Estimationen i 1.2 er dog ikke foretaget på grundlag af nærværende model. Estimeredes en relation afledt af (21) på tværlandeempiri med antagne værdier $\alpha = 1/3$ og $\phi = 2$, kunne man fx løbe ind i det problem, at for en del lande i ville $s^i - \alpha/\phi$ være negativ ...