1 Tre Korte Spørgsmål

(a) Er det sandt at efterspørgslen efter et Giffengode altid falder når forbrugerens indkomst stiger? Diskutér spørgsmålet i relation til Slutsky-ligningen.

Svar: Sandt. Egenpris Slutsky-ligningen er

$$\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)}{\partial p_i}}_{\text{substitutionseffekt}} \underbrace{-\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}{\partial I} x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}_{\text{indkomsteffekt}}$$

hvor $h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)$ er Hicks-efterspørgslen ved prisvektoren $\boldsymbol{p}$ og nytten $u^\star \equiv u(\boldsymbol{x}^\star(\boldsymbol{p}, I))$. For et Giffen-gode gælder det at efterspørgslen er stigende i prisen, $\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},I)}{\partial p_i} > 0$. Da substitutionseffekten altid er negativ, kan den samlede effekt kun være positiv, hvis indkomsteffekten er positiv (og numerisk større end substitutionseffekten). Det kræver $\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},I)}{\partial I} < 0$.

(b) Betragt lotterierne $G_A = (0.5 \circ 4, 0.5 \circ 16)$ og $G_B = (1 \circ 9.5)$, og en forbruger der har præferencer, som kan repræsenteres ved en von Neumann–Morgenstern nyttefunktion med Bernoullli-nyttefunktion $u(x) = \sqrt{x}$ over penge. Hvilket af lotteriene foretrækker forbrugeren? Forklar kort hvorfor.

Svar: Forbrugeren fortrækker G_B, da det giver den højeste nytte

$$U(G_A) = 0.5\sqrt{4} + 0.5\sqrt{16} = 0.5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 4 = 3 < U(G_B) = \sqrt{9.5}$$

Forklaringen er, at forbrugeren er risiko-avers, da $\sqrt{x}$ er en konkav funktion. Den forventede værdi af G_A er 10, mens den forventede værdi af G_B er 9.5. Forbrugeren foretrækker G_B på trods af den lavere forventede værdi, fordi G_B er risikofrit modsat G_A.

(c) Forklar forskellen på »kompenserende variation« (»compensating variation«, CV) og »ækvivalerende variation« (»equivalent variation«, EV) for en prisstigning.

Svar:

i. *Kompenserende variation* angiver, hvor meget forbrugeren skal have mere i indkomst ifbm. en prisstigning for at have et uændret nytteniveau.

ii. *Ækvivalerende variation* angiver, hvor meget forbrugeren skal trækkes i indkomst før at få det samme nyttetab som prisstigningen medfører.

2 Forbrugerteori

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = 8\sqrt{x_1} + x_2.$$

Forbrugsmulighedsområdet er $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Prisen på vare 1 er p_1, prisen på vare 2 er p_2, og forbrugerens indkomst er I. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, I > 0$. Priser og indkomst måles i kr.

(a) Bestem hvilke af varerne som er essentielle for forbrugeren

Svar:

$$|MRS(x_1, x_2)| = \left| -\frac{MU_1}{MU_2} \right| = \left| -\frac{4x_1^{-\frac{1}{2}}}{1} \right| = \frac{4}{x_1^{\frac{1}{2}}}$$

x_1 er essentiel da

$$\lim_{x_1 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \infty, \, \forall x_2 > 0$$

x_2 er *ikke* essentiel da

$$\lim_{x_2 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \frac{4}{x_1^{\frac{1}{2}}} > 0, \, \forall x_1 > 0$$

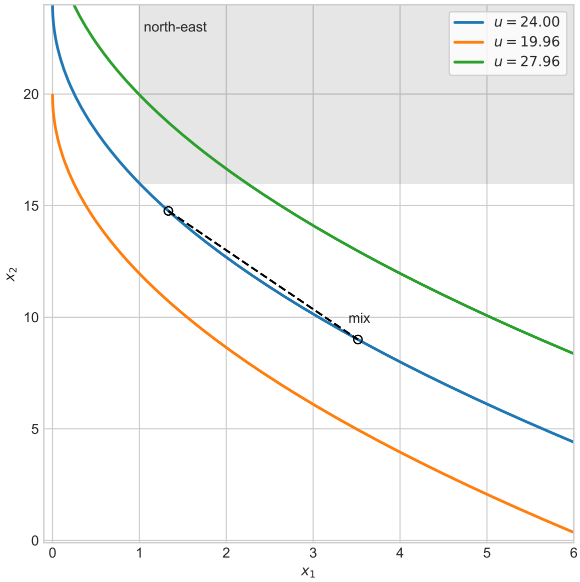
(b) Tegn indifferenskurverne og forklar om forbrugerens præferencer er monotone og/eller strengt konvekse

Svar: $u_0 = 8\sqrt{x_1} + x_2 \Leftrightarrow x_2 = u_0 - 8\sqrt{x_1}$

- *Monotone:* Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde
- *Strengt konvekse:* Lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i det indre af den øvre konturmængde

Se Figur 1.

Figure 1: Indifferenskurver



(c) Løs forbrugerens nyttemaksimeringsproblem vha. Lagrange. Lav en grafisk illustration af løsningen.

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1, x_2} \; 8\sqrt{x_1} + x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

Bemærk at vi kan skrive $=$ i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone jf. spørgsmål (b), og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 8\sqrt{x_1} + x_2 + \lambda[I - p_1 x_1 - p_2 x_2]$$

Hvorfra *førsteordensbetingelserne* (FOCs) kan beregnes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 4x_1^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow 4x_1^{-\frac{1}{2}} = \lambda p_1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow 1 = \lambda p_2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \tag{3}$$

Vi deler nu (1) med (2) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned} 4x_1^{-\frac{1}{2}} &= \frac{p_1\lambda}{p_2\lambda} \Leftrightarrow \\ x_1^\star &= \left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Vi indsætter nu (4) i (3) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned} p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2 + p_2x_2 &= I \Leftrightarrow \\ x_2^\star &= \frac{I - p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2}{p_2} \end{aligned} \tag{5}$$

Bemærk, at vi kun har en indre løsning hvis

$$x_2^\star > 0 \Leftrightarrow \frac{I - p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2}{p_2} > 0 \Leftrightarrow I > p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2 \tag{6}$$

Det kan bemærkes, at løsningen er et globalt maksimum, da præferencerne er strengt konvekse jf. spørgsmål (b).

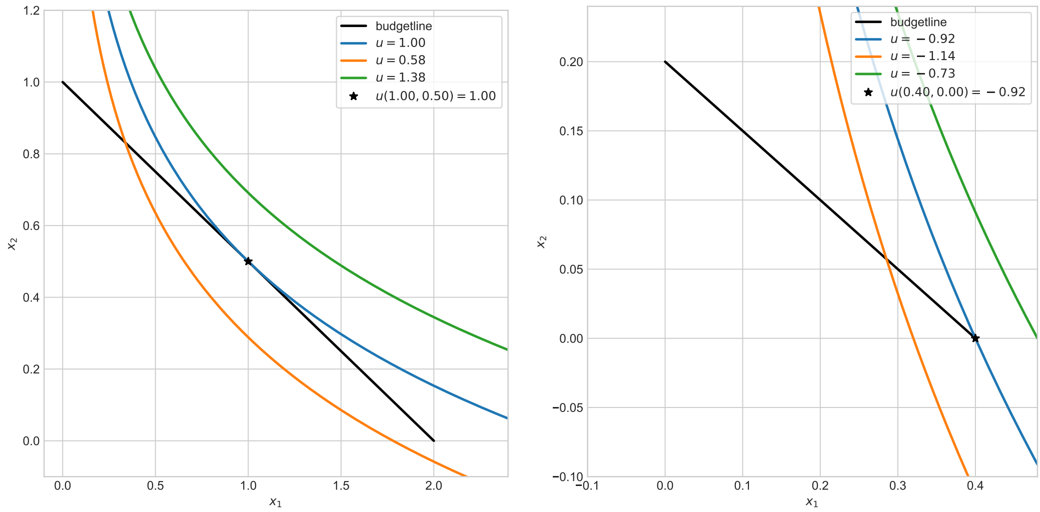
Løsningen er derfor

$$\boldsymbol{x}^\star(p_1,p_2,I) = \begin{cases} \left(\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2, \frac{I-p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2}{p_2}\right) & \text{hvis } I > p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2 \\ \left(\frac{I}{p_1}, 0\right) & \text{hvis } I \leq p_1\left(\frac{4p_2}{p_1}\right)^2 \end{cases} \tag{7}$$

Se Figur 2.

Figure 2: Løsning

(a) Indre løsning (b) Randløsning



(d) Beregn efterspørgslen og nytten ved hhv.

i. priserne $p_1 = 4$ og $p_2 = 1$ og indkomsten $I = 20$

ii. priserne $p_1 = 2$ og $p_2 = 1$ og indkomsten $I = 17$

Svar: I det første tilfælde

$$\boldsymbol{x}^\star(4, 1, 20) = (1, 16)$$
$$u(\boldsymbol{x}^\star(4, 1, 20)) = 8\sqrt{1} + 16 = 24$$

I det andet tilfælde

$$\boldsymbol{x}^\star(2, 1, 18) = (4, 9)$$
$$u(\boldsymbol{x}^\star(2, 1, 18)) = 8\sqrt{4} + 9 = 25$$

Antag, at forbrugeren handler i en butik, som tilbyder en mængderabat. Prisen på vare 1 er i udgangspunktet 4, men efter 1.5 enheder falder prisen til 2. Prisen på vare 2 er altid 1. Forbrugeren har en indkomst på 20.

(e) Opskriv et matematisk udtryk for forbrugerens budgetmængde og illustrér den grafisk

Svar: Generelt set har vi

$$C(p_1^A, p_1^B, p_2, I, k) = \left\{ x_1, x_2 \geq 0 \,|\, \begin{cases} p_1^A x_1 + p_2 x_2 \leq I & \textbf{hvis } x_1 \leq k \\ p_1^B x_1 + (p_1^A - p_1^B)k + x_2 \leq I & \textbf{hvis } x_1 > k \end{cases} \right\}$$

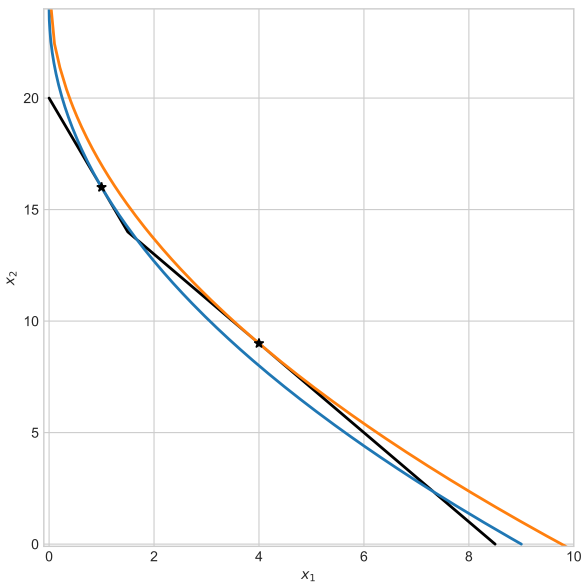
hvor p_1^A er prisen før rabatten, p_1^B er prisen efter rabatten, p_2 er prisen på vare 2, og k er niveauet hvorefter rabatten træder i kraft.

I det konkrete tilfælde fås:

$$C(4,2,1,I,1.5) = \left\{ x_1, x_2 \geq 0 \,|\, \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 20 & \text{hvis } x_1 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 17 & \text{hvis } x_1 > 1 \end{cases} \right\}$$

Se Figur 3.

Figure 3: Budgetlinje (og løsning) med mængderabat



(f) Diskutér hvad forbrugerens efterspørgsel er og om han køber nok til at tage mængderabatten i brug

Svar: Forbrugerens efterspørgsel er $\boldsymbol{x}^\star = (5,9)$. Det er valget som giver den højeste nytte af følgende 3 muligheder:

i. Hvis forbrugeren ikke gør brug af mængderabatten har vi $x_1 \leq 1.5$ og løsningen til hans problem er det samme som i det første tilfælde i (d), dvs. nytten er 24.

ii. Hvis forbrugeren gør brug af mængderabatten har vi $x_1 > 1.5$ og løsningen til hans problem er det samme som i det andet tilfælde i (d), dvs. nytten er 25.

iii. Hvis forbrugeren vælger at forbruge akkurat i knækket er nytten $8\sqrt{1.5} + 14 \approx 23.8$.

Se Figur 3 for en illustration af løsningen.

3 Produktion

Betragt en virksomhed der producerer et output ved hjælp af to inputs, arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$x = f(\ell, k) = \ell^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{4}},$$

hvor x er mængden af output, ℓ er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital. Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogent givne. Virksomheden har faste omkostninger givet ved $FC \geq 0$.

Det kan vises, at den betingede faktorefterspørgsel, som løser virksomhedens omkostningsminimeringsproblem, er givet ved

$$\begin{aligned} \ell_b^\star(x, w, r) &= \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{w}} x^2 \\ k_b^\star(x, w, r) &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}} x^2 \end{aligned}$$

Virksomhedens omkostningsfunktion er derfor givet ved

$$\begin{aligned} C(x, w, r) &= w\ell_b^\star(x, w, r) + rk_b^\star(x, w, r) + FC \\ &= 2\sqrt{wr}x^2 + FC \end{aligned}$$

(a) Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem indirekte ved at bruge omkostningsfunktionen

Svar: Vi opstiller nu virksomhedens optimeringsproblem som funktion af udbuddet

$$\Pi(p, w, r) = \max_x px - C(x, w, r)$$

Fra hvilken vi beregner *førsteordensbetingelsen* (FOC)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(px - C(x, w, r))}{\partial x} &= 0 \Leftrightarrow \\ p - MC(x, w, r) &= 0 \Leftrightarrow \\ p &= MC(x, w, r) \Leftrightarrow \\ p &= 4\sqrt{wr}x \Leftrightarrow \\ x &= \frac{p}{4\sqrt{wr}} \end{aligned} \tag{8}$$

Profitten er

$$\begin{aligned}\Pi(p,w,r) &= px - C(x,w,r)\\ &= \frac{p^2}{4\sqrt{wr}} - 2\sqrt{wr}\frac{p^2}{16wr} - FC\\ &= \frac{p^2}{4\sqrt{wr}} - \frac{p^2}{8\sqrt{wr}} - FC\\ &= \frac{p^2}{8\sqrt{wr}} - FC\end{aligned}$$

Proffitten er *positiv,* hvis de faste omkostninger ikke er for store

$$\frac{p^2}{8\sqrt{wr}} - FC > 0 \Leftrightarrow FC < \frac{p^2}{8\sqrt{wr}}$$

Hvis profitten er positiv, har vi fundet et *maksimum*, fordi at *andenordensbetingelsen* (SOC) altid overholdt da

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(px - C(x,w,r))}{\partial x^2} &= \frac{\partial(p - MC(x,w,r))}{\partial x}\\ &= -\frac{\partial MC(x,w,r)}{\partial x}\\ &= -4\sqrt{wr} < 0\end{aligned}$$

Antag, at de faste omkostninger er $FC = 100$.

(b) Find virksomhedens udbud og efterspørgsel efter arbejdskraft og kapital ved prissystemerne $(p,w,r) = (80,2,2)$ og $(p,w,r) = (80,4,1)$.

Svar: Udbud og faktorefterspørgslerne ved $(p,w,r) = (80,2,2)$ er

$$\begin{aligned}x^\star(80,2,2) &= \frac{80}{4\cdot\sqrt{4}} = 10\\ k_b^\star(10,2,2) &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}}x^2 = 100\\ \ell_b^\star(10,2,2) &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}}x^2 = 100\\ C(10,2,2,2) &= 2\cdot 100 + 2\cdot 100 = 400\end{aligned}$$

mens de ved $(p,w,r) = (80,4,1)$ er

$$
\begin{aligned}
x^{\star}(82,4,1) &= \frac{80}{4 \cdot \sqrt{4}} = 10 \\
k_b^{\star}(10,4,1) &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}} x^2 = 200 \\
\ell_b^{\star}(10,4,1) &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}} x^2 = 50 \\
C(10,2,4,1) &= 4 \cdot 100 + 1 \cdot 100 = 400
\end{aligned}
$$

Profitten er positiv i begge tilfælde

$$
\begin{aligned}
\Pi(80,2,2) = 80 \cdot 10 - 400 - 100 = 300 > 0 \\
\Pi(80,4,2) = 80 \cdot 10 - 400 - 100 = 300 > 0
\end{aligned}
$$

(c) Forklar kort hvilken rolle substitutionselasticiteten for virksomhedens produktionsfunktion spiller for dine resultater i spørgsmål (b)

Svar: Substitutionselasticiteten beskriver, hvor let det er for virksomheden at substituere mellem de to produktionsfaktorer. Vi ser, at det optimale udbud er uændret, men at faktorefterspørgslen ændrer sig sådan, at efterspørgslen efter den relativt dyrere faktor er mindre. For Cobb-Douglas er substitutionselasticiteten én, hvilket forklarer, at en fordobling af lønnen samtidig med en halvering af lejeprisen på kapital ikke ændrer på omkostningsfunktionen, og derfor ikke det valgte udbud.

4 Generel Ligevægt: Produktionsøkonomi

Betragt en produktionsøkonomi med to aktører, én virksomhed og én forbruger, og to forbrugsgoder, fritid f målt i timer og en generisk forbrugsvare x. Antag, at der eksisterer en produktionsteknologi med produktionsfunktionen

$$y = g(\ell) = \ell^a,\ a > 0$$

hvor ℓ input af arbejdskraft og y er output af den generiske forbrugsvare.

Antag, at der er fuldkommen konkurrence på både arbejdsmarkedet og varemarkedet. Lad prisen på forbrugsvaren være givet ved p, lønnen givet ved w, og virksomhedens profit givet ved Π.

Forbrugeren ejer virksomheden, har initialbeholdning af tid på $L > 0$, intet af forbrugsvaren, og maksimerer nyttefunktionen

$$u(L - \ell, x) = u(f, x) = fx^b,\ b > 0$$

Det kan vises, at forbrugerens efterspørgsel ved eksogen indkomst I er givet ved

$$\begin{aligned} f^\star(w, p, I) &= \frac{1}{w(1+b)} I \\ x^\star(w, p, I) &= \frac{b}{p(1+b)} I \end{aligned}$$

(a) Hvor mange timer arbejder forbrugeren i den Pareto-optimale tilstand når $ab = 1$?

Svar: Definér

$$h(\ell) \equiv (L - \ell)\left(\ell^a\right)^b = L\ell^{ab} - \ell^{ab+1} = L\ell - \ell^2$$

Mængden af arbejdskraft i den Pareto-optimale tilstand kan findes ved at løse samfundsplanlægningsproblemet

$$U = \max_{\ell \in [0, L]} h(\ell)$$

Førsteordensbetingelsen (FOC) giver

$$L - 2\ell = 0 \Leftrightarrow \ell^{PO} = \frac{L}{2}$$

Vi kan *udelukke randløsningerne* $\ell = 0$ og $\ell = L$, da

$$h(0) = h(L) = 0 < h\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{4} = \frac{L^2}{4} > 0$$

Vi har fundet et maksimum da *andenordensbetingelsen* (SOC) altid er overholdt da

$$\frac{\partial^2 h(\ell)}{\partial \ell^2} = \frac{\partial(L-2\ell)}{\partial \ell} = -2 < 0$$

(b) Løs virksomhedens omkostningsminimeringsproblem givet w

Svar: Den betingede arbejdskraftefterspørgsel er givet ved

$$\left(\ell_b^\star(y)\right)^a = y \Leftrightarrow \ell_b^\star(y) = y^{\frac{1}{a}}$$

Virksomhedens omkostningsfunktion er derfor:

$$C(y,w) = w\ell_b^\star(y) = wy^{\frac{1}{a}}$$

Antag at $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ og $L = 8$.

(c) Hvor mange timer arbejder forbrugeren i den Pareto-optimale tilstand?

Svar: Da $ab = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ fås

$$\ell^{PO} = \frac{L}{2} = 4$$

(d) Find Walras-ligevægten (priser og allokering) med $p = 1$ som numeraire

Svar: Virksomhedens profitmaksimeringsproblem er

$$\Pi(p,w) = \max_y py - wy^2$$

Førsteordensbetingelsen (FOC) er:

$$p - 2wy = 0 \Leftrightarrow y^\star(p,w) = \frac{p}{2w}$$

Arbejdskraftefterspørgslen er derfor

$$\ell^\star(p,w) = \left(\frac{p}{2w}\right)^2$$

Profiten er altid *positiv* da

$$\Pi = py - wy^2 = \frac{p^2}{2w} - \frac{p^2}{4w} = \frac{p^2}{4w} > 0$$

Vi har fundet et *maksimum* fordi at anden ordensbetingelsen (SOC) altid overholdt da

$$\frac{\partial(py - wy^2)}{\partial y^2} = -2w < 0$$

Lønnen, w, i ligevægt findes ved ved at *cleare varemarkedet*:

$$\begin{aligned}
x^\star(p,w) &= y^\star(p,w) \\
\frac{2}{3}\left(wL + \frac{1}{4w}\right) &= \frac{1}{2w} \\
wL + \frac{1}{4w} &= \frac{3}{4w} \\
4w^2L + 1 = 3 &\Leftrightarrow \\
w = \sqrt{\frac{1}{2L}} &= \sqrt{\frac{1}{2L}} = \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{9}$$

Walras-ligevægtsprisvektoren er derfor $(p,w) = (1, \frac{1}{4})$ og ligevægtsallokeringen er beskrevet ved:

i. Arbejdskraft: $\ell^\star = \left(\frac{1}{2\frac{1}{4}}\right)^2 = 2^2 = 4$

ii. Produktion: $y^\star = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

iii. Profit: $py^\star - w\ell^\star = 1 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

iv. Fritid: $f^\star = \frac{1}{w(1+b)} I = \frac{1}{\frac{1}{4}(1+2)}[\frac{1}{4} \cdot 8 + 1] = 4 = L - \ell^\star$

v. Forbrug: $x^\star = \frac{b}{p(1+b)} I = \frac{2}{(1+2)}[\frac{1}{4} \cdot 8 + 1] = 2 = y^\star$

Antag i stedet at $a = 2$ og $b = \frac{1}{2}$, men stadig $L = 8$.

(e) Diskutér hvad der sker med den Pareto-optimale tilstand og Walras-ligevægten under de nye antagelser

Svar:

i. Den Pareto-optimale tilstand ændrer sig ikke. Forbrugerens marginalnytte af forbrugsvaren er nu aftagende,

$$MU_2 = bfx^{b-1} = \begin{cases} 2fx & \text{hvis } b = 2 \\ \frac{1}{2}fx^{-\frac{1}{2}} & \text{hvis } b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

men det opvejes, af at produktionsteknologien har stigende skalaafkast.

ii. Der er ikke længere nogen Walras-ligevægt, da virksomhedens produktionsfunktion får stigende skalaafkast, og derfor faldende marginal omkostninger. Det bliver derfor optimalt for virksomheden at producerer uendeligt meget til alle priser

$$C(y, w) = wy^{\frac{1}{2}}$$

$$MC(y, w) = w\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{y\to\infty}[py - C(y, w)] = \lim_{y\to\infty}\int_0^\infty [p - MC(y, w)] = \infty$$