KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2010 S-1A rx Ret

REEKSAMEN I MATEMATIK A

Tirsdag den 17. august 2010

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. Differensligninger af første orden.

Vi betragter differensligningen

$$(*) \qquad x_{t+1} = ax_t + b,$$

hvor $t \in \mathbf{N}_0$. Tallene a og b er reelle konstanter.

(1) Løs differensligningen $(*)$, hvis $a = 0$.

LØSNING: Vi ser umiddelbart, at

$$x_t = \begin{cases} x_0, & \text{hvis } t = 0 \\ b, & \text{hvis } t \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(2) Løs differensligningen $(*)$, hvis $a = 1$.

LØSNING: Vi ser, at

$$x_{t+1} = x_t + b.$$

Så får vi, at $x_1 = x_0 + b, x_2 = x_1 + b = x_0 + 2b$, hvoraf man (ved at fortsætte på tilsvarende måde) opnår, at $x_t = x_0 + tb$. Vi har derfor, at

$$x_t = \begin{cases} x_0, & \text{hvis } t = 0 \\ x_0 + bt, & \text{hvis } t \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(3) Løs differensligningen $(*)$, hvis $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

LØSNING: Vi finder, at $x_1 = ax_0 + b$,

$$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2 x_0 + (a + 1)b,$$

og ved at fortsætte på tilsvarende måde opnår man, at

$$x_t = a^t x_0 + (a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a + 1)b = a^t x_0 + \frac{1 - a^t}{1 - a} b =$$

$$a^t\Big(x_0 - \frac{b}{1-a}\Big) + \frac{b}{1-a}.$$

Vi har derfor, at

$$x_t = \begin{cases} x_0, & \text{hvis } t = 0 \\ a^t\Big(x_0 - \frac{b}{1-a}\Big) + \frac{b}{1-a}, & \text{hvis } t \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(4) Løs differensligningen

$$x_{t+1} = \frac{1}{7}x_t + 2,$$

idet $x_0 = \frac{8}{3}$. Bestem desuden grænseværdien

$$\lim_{t\to\infty} x_t.$$

LØSNING: I dette tilfælde er $a = \frac{1}{7}$ og $b = 2$. Vi får så, at

$$x_t = \begin{cases} \frac{8}{3}, & \text{hvis } t = 0 \\ \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{7}\Big)^t + \frac{7}{3}, & \text{hvis } t \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Heraf får vi, at

$$\lim_{t\to\infty} x_t = \lim_{t\to\infty}\Big(\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{7}\Big)^t + \frac{7}{3}\Big) = \frac{7}{3}.$$

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^4) + x^2 + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Vis desuden, at $(0,0)$ er et stationært punkt for funktionen f.

LØSNING: Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^4} + 2x \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3}{1+x^2+y^4} + 2y.$$

Det er klart, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

så $(0,0)$ er et stationært punkt for funktionen f.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Vis, dernæst, at punktet $(0,0)$ er et minimumspunkt for funktionen f.

LØSNING: Vi finder, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(1+x^2+y^4) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2+y^4)^2} + 2 = \frac{2-2x^2+2y^4}{(1+x^2+y^4)^2} + 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{8xy^3}{(1+x^2+y^4)^2}$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{12y^2(1+x^2+y^4) - 4y^3 \cdot 4y^3}{(1+x^2+y^4)^2} + 2 =$$

$$\frac{12y^2 + 12x^2y^2 - 4y^6}{(1+x^2+y^4)^2} + 2.$$

Heraf får vi, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = A = 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = B = 0$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = C = 2.$$

Dette viser, at $A = 4 > 0$, og at $AC - B^2 = 8 > 0$, og dermed er punktet $(0,0)$ et minimumspunkt for funktionen f.

(3) Vis, at

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) \geq 0.$$

Bestem dernæst værdimængden for funktionen f.

LØSNING: Da $1 + x^2 + y^4 \geq 1$, er $\ln(1+x^2+y^4) \geq 0$. Heraf får vi straks, at

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) \geq 0.$$

Da $f(0,0)=0$, og da

$$f(x,0) = \ln(1+x^2) + x^2 \to \infty \ \text{ for } \ x \to \infty,$$

ser vi, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [0, \infty[$.

Opgave 3. For ethvert $u \geq e$ betragter vi funktionen $I = I(u)$ defineret ved

$$\forall\, u \geq e : I(u) = \int_e^u \Big(\frac{1}{x(\ln x)^2}\Big)\, dx.$$

(1) Bestem en forskrift for funktionen $I = I(u)$.

LØSNING: Vi finder, at

$$\forall\, u \geq e : I(u) = \int_e^u \Big(\frac{1}{x(\ln x)^2}\Big)\, dx = \int_e^u \frac{1}{(\ln x)^2}\, d(\ln x) =$$

$$\Big[-\frac{1}{\ln x}\Big]_e^u = 1 - \frac{1}{\ln u}.$$

(2) Vis, at det uegentlige integral

$$\int_e^\infty \Big(\frac{1}{x(\ln x)^2}\Big)\, dx$$

er konvergent, og bestem dets værdi.

LØSNING: Vi ser, at

$$\lim_{u\to\infty} \int_e^u \Big(\frac{1}{x(\ln x)^2}\Big)\, dx = 1,$$

hvilket viser, at det uegentlige integral

$$\int_e^\infty \Big(\frac{1}{x(\ln x)^2}\Big)\, dx$$

er konvergent med værdien 1.

(3) Løs ligningen $I(u) = \frac{1}{2}$.

LØSNING: Vi får, at

$$I(u) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\ln u} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln u = 2 \Leftrightarrow u = e^2.$$