Skriftlig eksamen i Matematik B. Vinteren 2013 - 2014

Onsdag den 19. februar 2014

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 V-1B rx

Skriftlig eksamen i Matematik B

Onsdag den 19. februar 2014

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert tal $a \in \mathbf{R}$ betragter vi ligningssystemet

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} .$$

(1) Løs ligningssystemet $(*)$ for ethvert $a \in \mathbf{R}$.

For enhver vektor $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$ betragter vi ligningssystemet

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = b_2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases} .$$

(2) Vis, at ligningssystemet $(**)$ har præcis en løsning for enhver vektor $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$.

For ethvert tal $c \in \mathbf{R}$ betragter vi ligningssystemet

$$(***) \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = c \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} .$$

(3) Løs ligningssystemet $(***)$ for ethvert $c \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = \ln(2 + x^2 + y^4).$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for f.

(5) Vis, at funktionen f er kvasikonveks.

(6) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1, 1, f(1,1)\big)$.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(6t^2 + 2t + 1\Big)x = \Big(2t+1\Big)e^{-2t^3}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 1756$ er opfyldt.

(3) Udregn differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0).$$

Opgave 4. En kvadratisk matrix A kaldes antisymmetrisk (eller skævsymmetrisk), hvis $A^T = -A$, hvor A^T betegner den til A transponerede matrix.

(1) Lad $s \in \mathbf{R}$, og betragt 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & s^2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2s+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem $s \in \mathbf{R}$, så matricen $A(s)$ er antisymmetrisk.

(2) Vis, at $\det A = 0$ for enhver antisymmetrisk $n \times n$ matrix A, hvis n er et ulige naturligt tal.

(3) Lad A være en vilkårlig antisymmetrisk matrix. Hvad ved vi da om diagonalelementerne?

(4) Lad atter A være en vilkårlig antisymmetrisk matrix, og betragt matricen $B = AA = A^2$.

Vis, at B er symmetrisk, altså at $B^T = B$.