Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2018 S-1A rx ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik A

Onsdag den 15. august 2018

Opgave 1. Partielle afledede.

Lad $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ være en åben mængde, og lad $f : \Omega \to \mathbf{R}$ være en given funktion. Lad endvidere punktet $(a, b) \in \Omega$ være fast valgt.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

eksisterer.

Løsning. Vi betragter de to funktioner $g(x) = f(x, b)$ og $h(y) = f(a, y)$. Hvis g er differentiabel i punktet a med differentialkvotienten $g'(a)$, er

$$g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b),$$

og hvis h er differentiabel i punktet b med differentialkvotienten $h'(b)$, er

$$h'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

(2) Bestem de partielle afledede efter x og y for følgende funktioner, der alle er defineret på $\mathbf{R}^2$:

$$f_1(x, y) = x^3 + \sin y,\ f_2(x, y) = xy^2 + \ln(1 + y^2),\ f_3(x, y) = e^{xy} + 3y.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 3x^2 \text{ og } \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \cos y,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y^2 \;\text{ og }\; \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2xy + \frac{2y}{1+y^2}$$

samt

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} \;\text{ og }\; \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 3.$$

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

i punktet $(0,0)$ for den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, der har forskriften

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 & \text{for } x > 0 \text{ og } y > 0 \\ x + y^2 & \text{ellers} \end{cases}.$$

Er funktionen f differentiabel i punktet $(0,0)$?

Løsning. Idet

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1$$

og

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \frac{y^2}{y} = y \to 0 \;\text{ for }\; y \to 0,$$

ser vi, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Funktionen f er imidlertid ikke differentiabel i punktet $(0,0)$, thi f er ikke kontinuert i $(0,0)$.

Opgave 2. For $x > 0$ betragter vi den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} \right)^n.$$

(1) Bestem mængden

$$C = \left\{ x \in \mathbf{R}_+ \mid \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} \right)^n \text{ er konvergent} \right\}.$$

Løsning. For $x > 0$ finder vi, at

$$\frac{1}{\sqrt{2x}} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x,$$

så $C =]\frac{1}{2}, \infty[$.

(2) Bestem en forskrift for sumfunktionen $f : C \to \mathbf{R}$, idet udtrykket

$$\forall\, x \in C : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^n$$

er gældende.

Løsning. Vi får, at

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x} - 1}.$$

(3) Bestem den afledede f' og elasticiteten f^{ϵ} for sumfunktionen f.

Løsning. Vi ser, at

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x} - 1) - \sqrt{2x}\,\frac{1}{\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x} - 1)^2} = -\frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x} - 1)^2}.$$

Endvidere finder vi, at

$$f^{\epsilon}(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x} - 1)^2}\,\frac{\sqrt{2x} - 1}{\sqrt{2x}} = \frac{x}{2x(1 - \sqrt{2x})} =$$

$$\frac{1}{2(1 - \sqrt{2x})}.$$

Opgave 3. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = e^{xy} + x^2 + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} + 2x \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + 2y.$$

(2) Vis, at punktet $(0, 0)$ er et stationært punkt for funktionen f, og bestem Hessematricen $H(x, y)$ for f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Det er oplagt, at $(0, 0)$ er et stationært punkt for funktionen f. Desuden finder vi, at

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} + 2 & e^{xy} + xye^{xy} \\ e^{xy} + xye^{xy} & x^2e^{xy} + 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Afgør, om det stationære punkt $(0, 0)$ er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Idet

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

ser vi, at punktet $(0, 0)$ er et minimumspunkt for funktionen f.

(4) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(0, 1, f(0, 1))$.

Løsning. Vi har, at tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(0, 1, f(0, 1))$ er givet ved

$$z = f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1),$$

så

$$z = 2 + x + 2(y - 1) = x + 2y.$$