Eksamen på Økonomistudiet sommer 2019

Matematik B

8. juni 2019

(3-timers prøve med skriftlige hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 3 sider incl. denne forside.
Til dette eksamenssæt hører 0 bilag.

Syg under eksamen:

Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du

- kontakte en eksamensvagt for at få hjælp til registreringen i systemet som syg og til at aflevere blankt
- forlade eksamen
- kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest 5 dage efter eksamensdagen.

Pas på, du ikke begår eksamenssnyd!

Det er eksamenssnyd, hvis du under prøven

- Bruger hjælpemidler, der ikke er tilladt
- Kommunikerer med andre eller på anden måde modtager hjælp fra andre
- Kopierer andres tekster uden at sætte citationstegn eller kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen tekst
- Bruger andres idéer eller tanker uden at kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen idé eller dine egne tanker
- Eller hvis du på anden måde overtræder de regler, der gælder for prøven

Du kan læse mere om reglerne for eksamenssnyd på Din Uddannelsesside og i Rammestudieordningens afs. 4.12.

Opgave 1

Betragt følgende matricer:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

(a) Udregn matrixproduktet BA.

(b) Vis, at A er regulær (invertibel).

(c) Bestem den inverse matrix A^{-1}.

(d) Vis, at $\lambda = 2$ er en egenværdi for B, og bestem alle øvrige egenværdier for B.

(e) Bestem egenrummet hørende til egenværdien $\lambda = 2$ for B.

Opgave 2

Lad funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = 3xy^2 \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lad K_1 og K_2 være følgende kompakte delmængder af $\mathbb{R}^2$:

$$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2 \text{ og } 0 \le y \le 2\} ,$$

$$K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2 \text{ og } 0 \le y \le x\} .$$

(a) Udregn integralet

$$\int_{K_1} f(x,y)\, d(x,y) .$$

(b) Udregn integralet

$$\int_{K_2} f(x,y)\, d(x,y) .$$

Opgave 3

(a) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 6 \\ x_2 + 4x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

(b) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_2 - 2x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

(c) Betragt følgende delmængde af vektorrummet $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -x_1 + 4x_2\}\,.$$

Vis, at U er et underrum af $\mathbb{R}^3$.
Bestem to vektorer u og v, så

$$U = \operatorname{span}\{u, v\}\,.$$

Opgave 4

Lad $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ og betragt funktionen $f : S \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = (x + y)^2 - 4\ln(x) - 4y \quad \text{for alle } (x, y) \in S.$$

(a) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for f i ethvert punkt $(x, y) \in S$.
Vis, at f er strengt konveks.

(b) Bestem alle globale minimumspunkter og den globale minimumsværdi for f.

(c) Lad funktionerne $g, h : S \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$g(x, y) = \sqrt{f(x, y)} \quad \text{og} \quad h(x, y) = -f(x, y) + e^{-f(x,y)} \quad \text{for alle } (x, y) \in S\,.$$

Afgør, om g er kvasikonveks. Begrund dit svar.
Afgør, om h er kvasikonkav. Begrund dit svar.