Eksamen på Økonomistudiet. Vinteren 2011

MATEMATIK B

1. årsprøve

Tirsdag den 22. februar 2011

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes cas-værktøjer)

Vi henleder din opmærksomhed på, at du skal besvare eksamensopgaven på det sprog, som du har tilmeldt dig ved eksamenstilmeldingen. Har du tilmeldt dig fagets engelske titel, skal du besvare det engelske opgavesæt på engelsk. Har du tilmeldt dig fagets danske titel eller den engelske titel med "eksamen på dansk" i parentes, skal du besvare det danske opgavesæt på dansk.

Er du i tvivl om, hvad du har tilmeldt dig, fremgår det af printet med din tilmelding fra de studerendes selvbetjening.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 V-1B rx

EKSAMEN I MATEMATIK B

Tirsdag den 22. februar 2011

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. I vektorrummet $\mathbf{R}^4$, der er forsynet med det sædvanlige indre produkt (prikproduktet), betragter vi vektoren $v = (1, 2, -1, 1)$ og den hyperplan H, der har v som normalvektor, og som går gennem punktet $P_0 = (0, 3, 5, 2)$. Desuden betragter vi den hyperplan H_0, der har v som normalvektor, og som går gennem begyndelsespunktet (origo) $O = (0, 0, 0, 0)$.

(1) Bestem en ligning for hyperplanen H, og vis, at H ikke er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

(2) Bestem en ligning for hyperplanen H_0, og vis, at H_0 er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

(3) Bestem vektorer a, b og c, så

$$H_0 = \operatorname{span}\{a, b, c\}.$$

(4) Vi betragter underrummet

$$U = \operatorname{span}\{(2, 1, 1, 1), (-1, 2, 1, -1)\}.$$

Bestem mængden $M = H_0 \cap U$, og vis, at M er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 - xy + y^2.$$

For ethvert $v > 0$ betragter vi desuden mængden

$$A(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \,\land\, 0 \leq y \leq v\}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette stationære punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør dernæst, om det stationære punkt er et maksimums- et minimums- eller et sadelpunkt for f. Bestem desuden funktionsværdien i det stationære punkt.

(4) Vis, at funktionen f er strengt konveks, og bestem dernæst dens værdimængde $R(f)$.

(5) Bestem for ethvert $v > 0$ værdien $I(v)$ af integralet

$$\int_{A(v)} f(x, y)\, d(x, y).$$

(6) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \Big(\frac{I(v)}{\sin v}\Big).$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + 4\Big(\sin(2t)\Big)x = 3t^2 e^{2\cos(2t)}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^3}{32}$ er opfyldt.

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}\Big(\frac{\pi}{4}\Big).$$

(4) Bestem elasiticteten

$$\text{El}\tilde{x}\Big(\frac{\pi}{4}\Big).$$

Opgave 4. Vi betragter den symmetriske 3×3 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

og den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : K(x) = (x_1, x_2, x_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(1) Vis, at matricen A er positiv definit.

(2) Vis, at den kvadratiske form K er positiv definit, og bestem dens værdimængde $R(K)$.

Vi betragter den kvadratiske form $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_2) = K(x_1, x_2, -x_1).$$

(3) Bestem en forskrift for den kvadratiske form L, og bestem dernæst den til L hørende symmetriske 2×2 matrix B. Vis, også, at B er positiv definit.

Vi betragter matricen

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(4) Vis, at matricen Q er ortogonal.

(5) Vis, at matricen $C = QBQ^t$ er symmetrisk, og bestem dens egenværdier.