Lineære Modeller Sommer 2015 (1)

Løsninger 2015S-21M

Opg 1

1) $Lx = \bar{0}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - R_2 \\ \\ R_3 - 2R_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$N(L)$: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s,t \in \mathbb{R}$.

$x_3 = s$
$x_4 = t$
$x_2 = -s$
$x_1 = -t$

Da $N(L) \neq \{\bar{0}\}$ er L ej injektiv.

2) Fra 1) ses, at

$$R(L) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

hvor altså $(1,0,0), (1,1,2)$ er en basis.
Da $\dim R(L) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ er L ikke surjektiv.

3) $Lx = y$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & y_3 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 - R_2 \\ \\ R_3 - 2R_2 \end{matrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & y_1 - y_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - 2y_2 \end{array}\right]$$

Her er så $x_3 = s$, $x_4 = t$ igen de frie variable.
Vi ser, at åbenbart må $y_3 - 2y_2 = 0$ for at $y \in R(L)$ (Så ligningen har en løsning).

Så fås løsninger:

$$x_2 + x_3 = y_2 \rightarrow x_2 = -s + y_2$$
$$x_1 + x_4 = y_1 - y_2 \rightarrow x_1 = -t + y_1 - y_2$$

dvs

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{N(L)}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

(Bemærk at

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 2y_2 \end{bmatrix},$$

hvoraf vi ser igen at $y_3 = 2y_2$ for at $y \in R(L)$.)

Opg 2

1) Da $v_1 \perp v_3$ og $v_2 \perp v_3$ p.g.a. $A^T = A$ ses at ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $(-1,1,2)$ er en mulig ~~og~~ v_3.

2) $f(A) = Q f(D) Q^T$, hvor

$$f(D) = \mathrm{diag}[f(a), f(b), f(c)]$$ og

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & +1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Så fås

$$f(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{6}f(c) & \frac{1}{2}f(a) - \frac{1}{3}f(b) - \frac{1}{6}f(c) & \frac{1}{3}f(b) - \frac{1}{3}f(c) \\ \frac{1}{2}f(a) - \frac{1}{3}f(b) - \frac{1}{6}f(c) & \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{6}f(c) & -\frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c) \\ \frac{1}{3}f(b) - \frac{1}{3}f(c) & -\frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c) & \frac{1}{3}f(b) + \frac{2}{3}f(c) \end{bmatrix}$$

3) $$\det(f(A)) = \det(Q f(D) Q^T) = \det(f(D)) = f(a)f(b)f(c).$$

4) $g(A) = Q g(D) Q^T$ så, da $QQ^T = E$ fås

$$\underline{f(A)g(A)} = Q f(D) Q^T Q g(D) Q^T = Q f(D) g(D) Q^T$$
$$= Q g(D) f(D) Q^T = Q g(D) Q^T Q f(D) Q^T$$
$$= \underline{g(A) f(A)}.$$

5) $e^{f(A)g(A)} = Q e^{f(D)g(D)} Q^T$, så

$\det(e^{f(A)g(A)}) = e^{f(a)g(a)} \cdot e^{f(b)g(b)} \cdot e^{f(c)g(c)}$ og

da v_1 er egenvektor for A, med egenværdi a, er v_1 egenvektor for $e^{f(A)g(A)}$, med egenværdi $e^{f(a)g(a)}$. Da fås

$$e^{f(A)g(A)} v_1 = e^{f(a)g(a)} v_1 = \underline{\underline{(e^{f(a)g(a)}, e^{f(a)g(a)}, 0)}}.$$

Opg 3

1) $$\int \sin^3(2x)\,dx = \int \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right)^3 dx =$$

$$-\frac{1}{8i}\int (e^{i6x} - e^{-i6x}) - 3(e^{i2x} - e^{-i2x})\,dx =$$

$$-\frac{1}{4}\int \sin(6x) - 3\sin(2x)\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\cos(6x) - \frac{3}{2}\cos(2x)\right) + k =$$

$$\frac{1}{24}\cos(6x) - \frac{3}{8}\cos(2x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2) $z^4 - 4z^2 + 5 = 0$. Så er

$$z^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i.$$

Vi løser så $\underline{z^2 = 2+i}$ og $\underline{z^2 = 2-i}$.

Med $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ fås

$$z^2 = 2 + i \iff x^2 - y^2 + i2xy = 2 + i$$

hvorfor $x^2 - y^2 = 2$ og $2xy = 1$

Da er $y = \frac{1}{2x}$ og $x^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 2$

hvorfor

$$4x^4 - 1 = 8x^2$$

$$4x^4 - 8x^2 - 1 = 0 \text{. Så er}$$

$$u = x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 16}}{4} = 2 (\pm) \sqrt{5},$$

da $u = x^2 > 0$ er

$$x^2 = 2 + \sqrt{5} \quad \text{hvorfor}$$

$$x = \pm\sqrt{(2 + \sqrt{5})} \text{. Da } y = \frac{1}{2x}$$

fås

$$z = x + iy = \pm\left(\sqrt{2 + \sqrt{5}} + i\frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{5}}}\right)$$

Den anden ligning $z^2 = 2 - i$ løses så.

Vi ser, at $\overline{2 + i} = 2 - i$, så de to næste løsninger er blot de komplekst konjugerede af dem vi lige fandt:

$$z = x - iy = \pm\left(\sqrt{2 + \sqrt{5}} - i\frac{1}{2\sqrt{(2 + \sqrt{5})}}\right)$$

(Alternativt løses ligningen som ovenfor)

Dette er de fire løsninger.

Opg 4

1) Veldef. for $\left|e^{x^3-3x^2}\right| < 1$, dvs

$$x^3-3x^2<0 .$$

Da $x^3-3x^2 = x^2(x-3) = 0$ for $x=0 \vee x=3$ er $x^2(x-3)<0$ for
$x \in]-\infty,0] \cup]0,3[\; = M$.

2) For $\underline{x \in M}$ er

$$f(x) = \frac{1}{1-e^{x^3-3x}} .$$

3) f har monotoniforhold som $g(x)=e^{x^3-3x^2}$.

Da $g'(x) = e^{x^3-3x^2}\cdot(3x^2-6x) = 0$ for
$3x^2-6x=0 \wedge \underline{x\in M}$, dvs $x=2$
($x=0$ ligger ikke i M), har vi

x		0		2	
f'	$+$		$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$	lok min	$\nearrow$

f er voksende i $]-\infty,0[$ og i $[2,3[$
f er aftagende i $]0,2]$
f har lok min i $x=2$ og da $x=2$ er et indre punkt i M, er f ikke injektiv.

4) Vi ser, at:

1) $f(2) = \frac{1}{1-e^{-4}} > 1$

2) $f(x) \to 1$ for $x \to -\infty$
(idet $e^{x^3-3x^2} \to 0$ for $x \to -\infty$)

3) $f(x) \to \infty$ for $x \to 0$

4) $f(x) \to \infty$ for $x \to 3^-$

Heraf ses, at $\underline{\underline{Vm(f) =]1, \infty[}}$