Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2018 V-1B ex ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 9. januar 2018

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ s & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi ser, at

$$\det A(s) = 2s - s^2 - 1 = -s^2 + 2s - 1 = -(s^2 - 2s + 1) = -(s-1)^2,$$

og denne determinant er lig med nul, når og kun når $s = 1$. Matricen $A(s)$ er derfor regulær, når og kun når $s \neq 1$.

(2) Vis, at matricen $A(s)$ er positiv semidefinit, når og kun når $s = 1$.

Løsning. Matricen $A(s)$ har følgende hovedunderdeternimanter: Af første orden $\Delta_1 = 1, 2, 1$, af anden orden $\Delta_2 = 2 - s^2, 1, 0$, og af tredje orden $\Delta_2 = \det A(s) = -(s-1)^2$. Da $2 - s^2 \geq 0$, netop når $-\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2}$, ser vi, at alle disse hovedunderdeterminanter er ikke-negative, når og kun når $s = 1$.

(3) Vis, at matricen $A(s)$ er indefinit for ethvert $s \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Løsning. Ved atter at se på alle hovedunderdeterminanterne fremkommer resultatet umiddelbart.

(4) Bestem egenværdierne for matricen $A(1)$. (Her er $s = 1$.)

Løsning. Vi ser, at

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Så det karakteristiske polynomium er

$$P(t) = \det(A(1) - tE) = -t^3 + 4t^2 - 2t = -t(t^2 - 4t + 2).$$

Heraf ser vi, at de karakteristiske rødder (og dermed egenværdierne for matricen $A(1)$) er 0 og $2 \pm \sqrt{2}$.

(5) Udregn matricen $B = A(1)A(1) = ((A(1))^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(6) Bestem egenværdierne for matricen B, og angiv deres egenværdimultipliciteter.

Løsning. Egenværdierne for matricen B er kvadraterne på egenværdierne for matricen $A(1)$, så de er altså 0 og $6 \pm 4\sqrt{2}$. De har alle egenværdimultipliciteten 1.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = \frac{x + y}{e^x}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{e^x - xe^x - ye^x}{e^{2x}} = \frac{1-x-y}{e^x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{e^x}.$$

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Der er ingen stationære punkter, thi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{e^x} \neq 0$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$.

(3) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Da $f(0,y) = y$, ser vi, at funktionen f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

(4) Udregn størrelsen

$$S(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

for ethvert punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, og vis derved, at $S(x,y) = -f(x,y)$.

Løsning. Det ses umiddelbart, at

$$S(x,y) = -\frac{x+y}{e^x} = -f(x,y).$$

(5) Bestem de partielle elasticiteter $f_x^\epsilon(x,y)$ og $f_y^\epsilon(x,y)$ i ethvert punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, hvor $x + y \neq 0$.

Løsning. Vi finder, at

$$f_x^\epsilon(x,y) = \frac{x - x^2 - xy}{x+y} \text{ og } f_y^\epsilon(x,y) = \frac{y}{x+y}.$$

Opgave 3. For ethvert $t > 0$ betragter vi differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + (\ln t + 1)x = e^{t - t\ln t}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Idet $p(t) = \ln t + 1$, er $P(t) = t\ln t - t + t = t\ln t$. Da får vi, at

$$x = Ce^{-t\ln t} + e^{-t\ln t}\int e^{t\ln t}\cdot e^{t-t\ln t}dt = Ce^{-t\ln t} + e^{-t\ln t}\int e^{t}dt =$$

$$Ce^{-t\ln t} + e^{-t\ln t}e^{t} = e^{-t\ln t}(C + e^{t}) = (C + e^{t})t^{-t}, \text{ hvor } C \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(1) = 5e$ er opfyldt.

Løsning. Vi ser umiddelbart, at $C = 4e$, så

$$\tilde{x}(t) = e^{-t\ln t}(4e + e^{t}) = (4e + e^{t})t^{-t}.$$

(3) Bestem en forskrift for funktionen $\tilde{x}(e^{-s})$, hvor $s \in \mathbf{R}$, og bestem grænseværdien

$$\lim_{s\to\infty} \tilde{x}(e^{-s}).$$

Løsning. Vi ser, at

$$\tilde{x}(e^{-s}) = e^{se^{-s}}\left(4e + e^{e^{-s}}\right).$$

Der følger nu, at

$$\lim_{s\to\infty} \tilde{x}(e^{-s}) = 4e + 1.$$

Opgave 4. Betragt den hyperplan H_0 i vektorrummet $\mathbf{R}^4$, som er givet ved ligningen

$$H_0: \; x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0,$$

idet $\mathbf{R}^4$ er forsynet med det sædvanlige indre produkt (prikproduktet), og underrummet

$$U = \text{span}\{(1,0,1,2),(0,1,0,1)\}.$$

(1) Begrund, at hyperplanen H_0 er et underrum af $\mathbf{R}^4$, og bestem tre vektorer v_1, v_2 og v_3, så

$$H_0 = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

Løsning. Hyperplanen H_0 er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$, thi $\underline{0} \in H_0$. Desuden ser vi, at $x_1 = -2x_2 + x_3 - 3x_4$, så

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(-2, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(-3, 0, 0, 1).$$

Dette viser, at

$$H_0 = \operatorname{span}\{(-2, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-3, 0, 0, 1)\}.$$

(2) Bestem fællesmængden $M = H_0 \cap U$, og godtgør, at M er et underrum af $\mathbf{R}^4$.

Løsning. Det er klart, at fællesmængden $M = H_0 \cap U$ er et underrum af $\mathbf{R}^4$.

Idet

$$U = \{y(1, 0, 1, 2) + z(0, 1, 0, 1) \mid y, z \in \mathbf{R}\},$$

kan vi bestemme M ved at løse det lineære ligningssystem, som har totalmatricen

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 2y + z \end{array}\right).$$

Reduceres totalmatricen T til echelonmatrix, får vi, at

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 2y + z \\ 0 & 0 & 0 & 6y + 5z \end{array}\right).$$

Der er nu løsninger, hvis og kun hvis $6y + 5z = 0$. Vi ser da, at $z = -\frac{6}{5}y$, så

$$M = \left\{\left(y, -\frac{6}{5}y, y, \frac{4}{5}y\right)\right\} = \operatorname{span}\left\{\left(1, -\frac{6}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)\right\}.$$

(3) Bestem mængden

$$M^\perp = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid \forall\, z \in M : x \perp z\},$$

og godtgør, at mængden $M^\perp$ er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

Mængden $M^\perp$ kaldes det ortogonale komplement til M.

Løsning. Lad $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M^\perp$. Vi ser da, at

$$x_1 - \frac{6}{5}x_2 + x_3 + \frac{4}{5}x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{6}{5}x_2 - x_3 - \frac{4}{5}x_4.$$

Heraf finder vi, at

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{6}{5}x_2 - x_3 - \frac{4}{5}x_4, x_2, x_3, x_4\right) =$$

$$x_2\left(\frac{6}{5}, 1, 0, 0\right) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4\left(-\frac{4}{5}, 0, 0, 1\right).$$

Dette viser, at

$$M^\perp = \operatorname{span}\left\{\left(\frac{6}{5}, 1, 0, 0\right), (-1, 0, 1, 0), \left(-\frac{4}{5}, 0, 0, 1\right)\right\},$$

hvoraf det også fremgår, at $M^\perp$ er et underrum.