Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2013

MATEMATIK B

1. årsprøve

Tirsdag den 11. juni 2013

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes nogen form for elektroniske hjælpemidler)

Opgavesættet består foruden af denne forside af 2 sider med opgaver.

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 S-1B ex

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 11. juni 2013

---

2 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi de symmetriske 3×3 matricer

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } B(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn matrixprodukterne $A(s)B(s)$ og $B(s)A(s)$. Er $A(s)B(s) = B(s)A(s)$?

(2) Bestem egenværdierne for matricen $A(s)$ for et vilkårligt $s \in \mathbf{R}$.

(3) Vis, at matricen $A(s)$ er indefinit for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem egenværdierne og egenrummene for matricen $A(5)$.
(Her er $s = 5$.)

(5) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^{-1}A(5)Q.$$

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2y^3 + \frac{y}{1 + x^2}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

(3) Bestem værdimængden for funktionen f.

Vi betragter mængden

$$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}.$$

(4) Udregn integralet

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, d(x,y).$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(\cos\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)x = \cos(t)e^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\sin(t)}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 5$ er opfyldt.

(3) Udregn differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0).$$

Opgave 4. Den jødisk-ungarske matematiker Alfred Haar (1885 - 1933) indførte i begyndelsen af det 20. århundrede de såkaldte Haar-matricer. En af disse er 2×2 matricen

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn matricerne $H^2 = HH, H^3 = HH^2$ og $H^4 = HH^3$.

(2) Vis, at matricen H er regulær, og bestem den inverse matrix H^{-1}.

(3) Vis, at matricen H er indefinit.