Eksamen på Økonomistudiet sommer 2020-R

Matematik B

1. årsprøve

21. august 2020

(3 timers eksamen med hjælpemidler)

Besvarelsen uploades på Digital Eksamen som én pdf.fil (inkl. bilag) navngivet udelukkende med eksamensnummeret, f.eks. 12.pdf eller 127.pdf

Dette eksamenssæt består af 3 sider incl denne forside.

Denne eksamen er ændret fra at foregå på Peter Bangsvej til at foregå som en hjemmeeksamen med hjælpemidler.
Læs grundigt teksten i boksen nedenfor, så du undgår at komme i problemer med mistanke om eksamenssnyd.

Pas på at du ikke begår eksamenssnyd!

Det er fx eksamenssnyd, hvis du …

- Kopierer andres tekster uden at sætte citationstegn eller kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen tekst. Det gælder også tekst fra gamle rettevejledninger
- Stiller din opgave til rådighed for andre under eksamen
- Kommunikerer med andre om opgaven under eksamen
- Bruger andres idéer eller tanker uden at kildehenvise, så det ser ud om det er din egen idé eller dine tanker
- Genbruger dele af en opgave, som du tidligere har indleveret og fået en bestå karakter for uden at sætte citationstegn eller kildehenvise (selvplagiering)

Du kan læse mere om reglerne for eksamenssnyd på Din Uddannelsesside og i Rammestudieordningens afs. 4.12.

Eksamenssnyd sanktioneres altid med en advarsel og bortvisning fra prøven. I de fleste tilfælde bliver den studerende også bortvist fra universitetet i et semester.

Bemærk: Der lægges ved bedømmelsen af de enkelte spørgsmål vægt på, at den studerende præsenterer en fyldestgørende besvarelse med klare forklaringer og eventuelle mellemregninger, der ikke er baseret på brug af matematiske IT-værktøjer. Det er således ikke tilstrækkeligt bare at angive et facit.

Opgave 1

Betragt følgende matrix, hvor a er et reelt tal:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestem alle værdier af a, for hvilke $\mathbf{A}$ er invertibel.

(b) Lad $a = 2$. Betragt det lineære ligningssystem

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Vis, at den entydige løsning til dette system er $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Lad $a = 0$. Vis, at $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 6$ er egenværdier for $\mathbf{A}$.

(d) Lad igen $a = 0$. Bestem alle egenvektorer for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_1 = 2$.

Vis, at $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en af disse egenvektorer.

(e) Bestem alle værdier af a, for hvilke $\mathbf{A}$ er positiv semidefinit.

Opgave 2

Lad funktionen $f(x,y)$ være givet ved:

$$f(x,y) = x^2 + xy + by^2 \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

hvor b er en konstant.

(a) Bestem alle værdier af b, for hvilke $f(x,y)$ er konveks.

(b) Lad R være følgende rektangel i $\mathbb{R}^2$:

$$R = [-1,0] \times [0,3] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 0 \text{ og } 0 \leq y \leq 3\}\,.$$

Vis, at

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = 9b - \frac{5}{4}\,.$$

(c) Betragt funktionerne givet ved:

$$g(x,y) = e^{x^2+xy+y^2} \quad \text{og} \quad h(x,y) = e^{-x^2-xy-y^2} \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vis, at $g(x,y)$ er konveks, og at $h(x,y)$ er kvasikonkav.

Opgave 3

Betragt følgende differentialligning af første orden:

$$\dot{x} = \frac{2t}{t^2+2}(x+1)\,.$$

(a) Gør rede for, at differentialligningen både er separabel og lineær.
Vis, at funktionen $x(t) = \frac{1}{2}t^2$ (hvor $t \in \mathbb{R}$) er en løsning.

(b) Brug løsningsformlen for lineære differentialligninger af første orden (ofte kaldet "Panserformlen") til at bestemme den generelle løsning til differentialligningen.