Københavns Universitet. Økonomisk Institut

**1. årsprøve 2016 S-1A rx ret**

## Skriftlig eksamen i Matematik A

**Torsdag den 18. august 2016**

**Rettevejledning**

---

**Opgave 1. Integration ved substitution.**

(1) Forklar, hvorledes man udregner et ubestemt integral af formen

$$\int f\Big(g(x)\Big)g'(x)\,dx,$$

hvor $f$ er en kontinuert funktion, og $g$ er en $C^1$-funktion på et åbent interval $I \subseteq \mathbf{R}$.

**Løsning.** Lad $F : I \to \mathbf{R}$ være en stamfunktion til funktionen $f$. Vi har da, at

$$\int f\Big(g(x)\Big)g'(x)\,dx = \int f\Big(g(x)\Big)\,d\Big(g(x)\Big) = F\Big(g(x)\Big) + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R}.$$

Vi bemærker, at sættes $g(x) = u$, har man, at $du = g'(x)\,dx$.

(2) Udregn følgende ubestemte integraler:

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx,\ \int e^{\sin x}\cos x\,dx,\ \int \frac{2x}{2+x^2}\,dx$$

og

$$\int \frac{x^{n-1}}{2+x^n}\,dx, \quad \text{hvor} \quad n \in \mathbf{N} \text{ og } 2 + x^n \neq 0.$$

**Løsning.** Vi ser, at

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx = \int 2\ln x\,d(\ln x) = (\ln x)^2 + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

$$\int e^{\sin x} \cos x\, dx = \int e^{\sin x}\, d(\sin x) = e^{\sin x} + k, \quad \text{hvor} \;\; k \in \mathbf{R},$$

$$\int \frac{2x}{2+x^2}\, dx = \int \frac{1}{2+x^2}\, d(2+x^2) = \ln(2+x^2) + k, \quad \text{hvor} \;\; k \in \mathbf{R}.$$

Vi skal herefter se på det ubestemte integral

$$\int \frac{x^{n-1}}{2+x^n}\, dx, \quad \text{hvor} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Hvis $n = 1$, får vi, at

$$\int \frac{1}{2+x}\, dx = \ln|2+x| + k, \quad \text{hvor} \;\; k \in \mathbf{R}.$$

For $n > 1$ får vi, at

$$\int \frac{x^{n-1}}{2+x^n}\, dx = \frac{1}{n} \int \frac{1}{2+x^n}\, d(2+x^n) = \frac{\ln|2+x^n|}{n} + k, \quad \text{hvor} \;\; k \in \mathbf{R}.$$

(3) Vis, at det for ethvert $a \in \mathbf{R}$ gælder, at

$$2 \int_0^a e^{x^2} x\, dx = \int_0^{a^2} e^x\, dx.$$

**Løsning.** Vi finder, at

$$\int_0^a e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^a e^{x^2}\, d(x^2) = \frac{1}{2} \Big[ e^{x^2} \Big]_0^a = \frac{1}{2} e^{a^2} - \frac{1}{2}$$

og

$$\int_0^{a^2} e^x\, dx = \Big[ e^x \Big]_0^{a^2} = e^{a^2} - 1,$$

hvoraf det ønskede resultat straks aflæses.

**Opgave 2.** Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = 3x + xy + x^2 + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \;\; \text{og} \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 + y + 2x \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y.$$

(2) Vis, at funktionen $f$ har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

**Løsning.** Sættes begge de partielle afledede lig med nul, ser vi, at $x = -2y$, så $3 - 3y = 0$. Vi får heraf, at funktionen $f$ netop har det ene stationære punkt $(x, y) = (-2, 1)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Funktionen $f$ har Hessematricen

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen $f$.

**Løsning.** Da $f''_{xx}(x, y) = 2$, og $\det H(x, y) = 3$, ser vi, at Hessematricen $H(-2, 1)$ er positiv definit, og dermed er det stationære punkt et minimumspunkt for funktionen $f$. Desuden ser vi, at $f(-2, 1) = -3$.

(5) Bestem værdimængden for funktionen $f$.

**Løsning.** Det er klart, at $f(x, 0) = 3x + x^2 \to \infty$ for $x \to \infty$. Desuden er det klart, at det stationære punkt er et globalt minimumspunkt for $f$, og heraf finder vi, at værdimængden er $R(f) = [-3, \infty[$.

(6) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for $f$ gennem punktet $\big(1, 1, f(1, 1)\big)$.

**Løsning.** Vi ser, at $f(1,1) = 6, \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 6$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3$. Den søgte tangentplan har derfor ligningen

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) =$$

$$6 + 6(x-1) + 3(y-1) = 6x + 3y - 3.$$

**Opgave 3.** Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2y + y^3 - xy^2.$$

(1) Vis, at funktionen $f$ er homogen, og angiv homogenitetsgraden.

**Løsning.** Lad $t > 0$ være vilkårligt valgt. Vi har da, at

$$f(tx,ty) = (tx)^2(ty) + (ty)^3 - (tx)(ty)^2 = t^3(x^2y + y^3 - xy^2) = t^3 f(x,y),$$

så $f$ er homogen af grad $k = 3$.

(2) Er funktionen $f$ homotetisk?

**Løsning.** Ja, thi enhver homogen funktion er også homotetisk.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Vi får, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - y^2 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2xy.$$

(4) Godtgør, at $(1,1)$ er en løsning til ligningen $f(x,y) = 1$. Vis dernæst, at der findes en omegn $U(0)$ af $x = 1$, så den variable $y$ er givet implicit som en funktion $y = y(x)$ i denne omegn. Bestem desuden differentialkvotienten $y'(1)$.

**Løsning.** Da $f(1,1) = 1$, er den første påstand straks opfyldt. Desuden får vi, at $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$. Nu får vi straks den anden påstand og indser, at

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)} = -\frac{1}{2}.$$

(5) Vis, at der findes en omegn $U(1)$ af $x = 1$, hvor funktionen $y = y(x)$ er aftagende.

**Løsning.** Funktionen $y' = y'(x)$ eksisterer og er kontinuert i en omegn af $x = 1$. Dette er klart, jvf. ovenstående. Vi ser også, at denne omegn kan vælges, så $y'(x) < 0$ i hele denne omegn, og dermed er påstanden vist.