Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 V-1A rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Tirsdag den 19. februar 2013

Rettevejledning

Opgave 1. Optimeringsteori. Lad $D \subseteq \mathbf{R}^2$ være en ikke-tom, åben mængde, og lad $f : D \to \mathbf{R}$ være en differentiabel funktion af to variable, hvor alle de partielle afledede af 2. orden er kontinuerte på mængden D.

(1) Forklar, hvad det betyder, at et punkt $(a, b) \in D$ er et stationært punkt for f.

Løsning. Punktet $(a, b) \in D$ er et stationært punkt for funktionen f, dersom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

(2) Lad $(a, b) \in D$ være et stationært punkt for funktionen f.

Forklar, hvordan man ved hjælp af de partielle afledede af 2. orden kan afgøre, om punktet (a, b) er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Lad

$$f''(a, b) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

være Hessematricen for funktionen f i det stationære punkt (a, b). Da har man følgende muligheder:

Hvis $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$, er (a, b) er minimumspunkt for f.

Hvis $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$, er (a, b) er maksimumspunkt for f.

Hvis $AC - B^2 < 0$, er (a, b) et sadelpunkt for f.

Hvis $AC - B^2 = 0$, har man ingen afgørelse vedrørende (a, b).

(3) Betragt funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = (2x+y)^2 + x^4.$$

Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 4y + 4x^3 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 2y.$$

(4) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Hvis (x,y) er et stationært punkt for funktionen f, må man kræve, at $y = -2x$. Heraf følger det umiddelbart, at f kun har det ene stationære punkt $(0,0)$.

(5) Afgør, om det stationære punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Vi finder, at f har Hessematricen

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 8+12x^2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \text{ så } f''(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

og vi ser, at det $f''(0,0) = 0$. Vi har altså ingen afgørelse ved at benytte Hessematricen i punktet $(0,0)$.

Men vi ser, at $f(0,0) = 0$, og at

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) \geq 0,$$

hvilket viser, at $(0,0)$ er et (endda globalt) minimumspunkt for funktionen f.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + xy + \ln(y).$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{1}{y}.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Hvis (x, y) er et stationært punkt, må vi kræve, at $y = -2x$, hvor $x < 0$. Da er $x^2 = \frac{1}{2}$, og vi får, at $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$. Vi får så, at f har det ene stationære punkt $(x, y) = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{2}\right)$.

(3) Afgør, om det stationære punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Vi finder, at f har Hessematricen

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}, \text{ så } f''(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vi bemærker, at det $f''(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{2}) = -2$, så det stationære punkt er et sadelpunkt for f.

(4) Vi betragter nu funktionen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : g(s) = f(e^s, e^s).$$

Vis, at funktionen g er voksende, og at den er strengt konveks.

Løsning. Vi ser, at $g(s) = 2e^{2s} + s$, så $g'(s) = 4e^{2s} + 1 > 0$ og $g''(s) = 8e^{2s} > 0$. Heraf aflæses det ønskede.

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{6}{2+x^2}\Big)^n.$$

(1) Bestem mængden

$$K = \{x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{6}{2+x^2}\Big)^n \text{ er konvergent}\}.$$

Løsning. Den uendelige række er konvergent, hvis og kun hvis

$$\frac{6}{2+x^2} < 1 \Leftrightarrow 4 < x^2 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2,$$

så

$$K =]-\infty, -2[\cup]2, \infty[.$$

(2) Bestem en forskrift for funktionen $f : K \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{6}{2+x^2}\Big)^n.$$

Løsning. For $x \in K$ får vi, at

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{6}{2+x^2}} = \frac{2+x^2}{x^2-4}.$$

(3) Bestem den afledede funktion f' af f, og bestem monotoniintervallerne for f.

Løsning. Vi finder, at

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(2+x^2)}{(x^2-4)^2} = -\frac{12x}{(x^2-4)^2}.$$

Heraf får man nu, at $f'(x) > 0$, når $x < -2$, og at $f'(x) < 0$, når $x > 2$. Vi har derfor, at f er voksende for $x < -2$ og aftagende for $x > 2$.

(4) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \ \text{ og } \ \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Løsning. Vi ser, at

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \ \text{ og } \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

Vi ser også, at

$$\lim_{x\to-2-} f(x) = \infty \ \text{ og } \ \lim_{x\to 2+} f(x) = \infty,$$

så funktionen f har værdimængden $R(f) =]1, \infty[$.