Eksamen på Økonomistudiet. Vinteren 2011

MATEMATIK B

1. årsprøve

Mandag den 3. januar 2011

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes nogen andre elektroniske hjælpemidler)

Vi henleder din opmærksomhed på, at du skal besvare eksamensopgaven på det sprog, som du har tilmeldt dig ved eksamenstilmeldingen. Har du tilmeldt dig fagets engelske titel, skal du besvare det engelske opgavesæt på engelsk. Har du tilmeldt dig fagets danske titel eller den engelske titel med "eksamen på dansk" i parentes, skal du besvare det danske opgavesæt på dansk.

Er du i tvivl om, hvad du har tilmeldt dig, fremgår det af printet med din tilmelding fra de studerendes selvbetjening.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 V-1B ex

EKSAMEN I MATEMATIK B

Mandag den 3. januar 2011

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert tal $p \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(p) = \begin{pmatrix} p & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 2p \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem determinanten $\det(A(p))$ for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er regulær.

(2) Matricen $A(1)$ er regulær. Bestem den inverse matrix $A(1)^{-1}$ til $A(1)$.

(3) Bestem egenværdierne for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er henholdsvis positiv definit, positiv semidefinit eller indefinit.

(5) Bestem egenværdierne og egenrummene for matricen $A(0)$.

(6) Udregn matricen $A(0)^2 = A(0)A(0)$. Vis dernæst, at

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : A(0)^k = A(0).$$

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = e^x + e^y - e^{2x} - e^{2y}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette stationære punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør dernæst, om det stationære punkt er et maksimums- et minimums- eller et sadelpunkt for f. Bestem desuden funktionsværdien i det stationære punkt.

(4) Bestem dernæst mængderne

$$P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid H(x, y) \text{ er positiv definit}\}$$

og

$$N = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid H(x, y) \text{ er negativ definit}\}.$$

(5) Betragt funktionen $g : N \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\, (x, y) \in N : g(x, y) = f(x, y).$$

Vis, at funktionen g er strengt konkav, og bestem dernæst værdimængden for g.

(6) Betragt funktionen $h : P \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\, (x, y) \in P : h(x, y) = f(x, y).$$

Vis, at funktionen h er strengt konveks.

(7) Betragt funktionen $\psi : P \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\, (x, y) \in P : \psi(x, y) = (h(x, y))^3.$$

Vis, at funktionen ψ er kvasikonveks.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + (3t^2 + 4t^3)x = 3t^2 e^{-t^4}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 1$ er opfyldt.

(3) Bestem differentialkvotienterne

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} \text{ og } \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}$$

af første og anden orden for løsningen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$.

(4) Bestem Taylorpolynomiet af anden orden for funktionen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ ud fra punktet $t_0 = 1$.

Opgave 4. Vi betragter mængden

$$U(n) = \{1, 2, 3, \ldots, n\},$$

hvor det naturlige tal $n \geq 4$. Desuden betragter vi for ethvert $a \in \mathbf{R}_+$ funktionen $P : U(n) \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, i \in U(n) : P(i) = a\Big(\frac{1}{3}\Big)^i.$$

(1) Bestem tallet $a \in \mathbf{R}_+$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden $U(n)$.

(2) Bestem sandsynligheden $P(\{1, 2, 3\})$ udtrykt ved tallet n.

(3) Bestem sandsynligheden $P(\{4, 5, \ldots, n\})$ udtrykt ved tallet n.

(4) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1, 2, 3\}) \text{ og } \lim_{n\to\infty} P(\{4, 5, \ldots, n\}).$$