Eksamen på Økonomistudiet vinter 2019-20

Matematik A

7. februar 2020

(3-timers prøve uden hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 3 sider incl. denne forside.
Til dette eksamenssæt hører 0 bilag.

Syg under eksamen:

Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du

- kontakte en eksamensvagt for at få hjælp til registreringen i systemet som syg og til at aflevere blankt
- forlade eksamen
- kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest 5 dage efter eksamensdagen.

Pas på, du ikke begår eksamenssnyd!

Det er eksamenssnyd, hvis du under prøven

- Bruger hjælpemidler, der ikke er tilladt
- Kommunikerer med andre eller på anden måde modtager hjælp fra andre
- Kopierer andres tekster uden at sætte citationstegn eller kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen tekst
- Bruger andres idéer eller tanker uden at kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen idé eller dine egne tanker
- Eller hvis du på anden måde overtræder de regler, der gælder for prøven

Du kan læse mere om reglerne for eksamenssnyd på Din Uddannelsesside og i Rammestudieordningens afs. 4.12.

Opgave 1

Betragt funktionen f af to variable, der er givet ved forskriften

$$f(x,y) = 4\ln(xy) - 2x^2 - 2y \quad \text{for alle } x > 0 \text{ og } y > 0.$$

f er altså defineret på mængden $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ og } y > 0\}$.

(a) Bestem $f_1'(x,y)$ og $f_2'(x,y)$.

(b) f har ét kritisk punkt. Bestem dette.

(c) Bestem alle anden-ordens partielle afledede for f.

(d) Vis, at det kritiske punkt fra (b) er et globalt maksimumspunkt for f.

(e) Betragt ligningen

$$f(x,y) = -9\,.$$

Vis, at punktet $(2, \frac{1}{2})$ er en løsning til denne ligning.
I en omegn af $(2, \frac{1}{2})$ definerer ligningen y som en implicit given funktion $y = g(x)$ af x. Bestem $g'(2)$, altså differentialkvotienten y' i punktet $(2, \frac{1}{2})$.

Opgave 2

Lad f og g være differentiable funktioner af én variabel defineret på hele $\mathbb{R}$.
Antag, at $g(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Betragt funktionen $\frac{f}{g}$ givet ved

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Opskriv formlen for differentialkvotienten $(\frac{f}{g})'(x)$ (*kvotientreglen*).

(b) Vis, at funktionen $\frac{f}{g}$ er voksende på $\mathbb{R}$ hvis og kun hvis

$$f'(x)g(x) \geq f(x)g'(x) \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

(c) Vis, at funktionen $h(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ er voksende på $\mathbb{R}$.

(d) Betragt funktionen k givet ved

$$k(x) = \frac{x}{e^x} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bestem Taylor-polynomiet af anden orden for k omkring punktet $x = 0$.

(e) Betragt igen funktionen k fra (d). Udregn det ubestemte integral

$$\int k(x)\,dx\,.$$

Opgave 3

Betragt følgende optimeringsproblem med én bibetingelse:

$$\max_{x,y} \; 2x + y \quad \text{under bibetingelsen} \quad x^2 + y^2 = 20\,.$$

(a) Opskriv Lagrangefunktionen $\mathcal{L}(x, y)$ for dette problem, og opstil de tre førsteordensbetingelser.

(b) Bestem de to løsninger til førsteordensbetingelserne.

(c) Brug ekstremværdisætningen (*The Extreme Value Theorem*) til at redegøre for, at der findes en løsning til optimeringsproblemet.

Bestem den entydige løsning til problemet og den tilhørende maksimumsværdi.