Rettevejledning til
Eksamen på Økonomistudiet, vinter 2015-2016
Reeksamen
Makro I
2. årsprøve
15. februar, 2016

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Overordnet om opgaven:

At nå frem til gode og fyldestgørende svar på *alle* delspørgsmål må anses for ganske krævende, så den højest mulige karakter skal evt. kunne opnås med mindre end som så.

Opgave 1: Investeringsrate og økonomisk vækst på langt sigt

1.1 I Solow-vækstmodeller med eksogen teknologisk udvikling er den langsigtede (steady state-) vækstrate i BNP per arbejder *uafhængig* af investeringsraten i fysisk kapital, s. Den langsigtede vækstrate i BNP per arbejder er i den slags modeller grundlæggende bestemt af den eksogene vækstrate i teknologien: I (de fra pensum kendte) modeller uden naturressourcer er steady state-vækstraten i BNP per arbejder simpelt hen lig med vækstraten i den arbejdsudvidende produktivitetsvariabel kaldet A_t. I modellerne med naturressourcer afhænger den tillige af eksempelvis vækstraten i befolkningen/arbejdsstyrken.

En stigning i s vil altså ikke indebære en ændret økonomisk vækstrate på langt sigt, men *vil* afføde en *midlertidigt* højere vækst i BNP per arbejder i en tilpasningsperiode, som evt. kan være langvarig, fx pågå over adskillige årtier, frem mod en ny steady state. Der vil *ikke* være en midlertidig ekstra vækst i teknologien, hvis vækstrate jo netop er eksogen.

1.2 For vækstmodeller med endogen teknologisk udvikling baseret på produktive eksternaliteter sondres mellem tilfældet med semi-endogen vækst og fuld (streng/ægte) endogen vækst. Om man er i det ene eller andet tilfælde afhænger af størrelsen af den parameter, som måler styrken af den grundlæggende produktionseksternalitet.

Under semiendogen vækst er den langsigtede (steady state-) vækstrate i BNP per arbejder igen *uafhængig* af investeringsraten i fysisk kapital, s. Grundlæggende er den langsigtede (steady state-) vækstrate i såvel BNP per arbejder som teknologien bestemt af vækstraten i befolkningen/arbejdsstyrken (samt tekniske parameter) således, at der er positiv økonomisk vækst, netop hvis der er positiv befolkningsvækst. Men der gælder også, at en stigning i s vil afføde en *midlertidigt* højere vækst i såvel BNP per arbejder som i teknologi-variablen A_t i en evt. længere tilpasningsperiode frem mod ny steady state.

Under fuld/streng/ægte endogen vækst er der en strengt positiv sammenhæng mellem på den ene side s og på den anden den langsigtede vækstrate i såvel BNP per arbejder som teknologien.

1.3 I begge figurer kan konstateres en ganske tæt positiv sammenhæng (selv uden formelle signifikansforhold).

Den positive sammenhæng i øverste figur taler *umiddelbart* mest til fordel for den fuldt endogene vækstmodel. Man kan imidlertid ikke udelukke, at den positive sammenhæng er udtryk for en transitorisk ekstra vækst: Hvis lande med relativt høje gennemsnitlige investeringsrater over den betragtede periode typisk også har oplevet *stigninger* i samme rate, hvilket meget vel kan være tilfældet, så vil disse lande både ifølge både modeller for eksogen vækst og modeller for semi-endogen vækst skulle opleve en midlertidig periode med højere transitorisk vækst i BNP per arbejder. Det kunne være dette, den positive sammehæng i øverste figur var udtryk for.

Den systematisk positive sammenhæng i den nederste figur kan, i det omfang den er et retvisende udtryk for sammenhængen mellem teknologisk udvikling og investeringsrate, derimod *ikke* fortolkes som transitorisk vækst fra modeller med eksogen teknologisk udvikling, netop fordi den teknologiske vækstrate her er eksogen.

Figuren er mest - og i ganske nydelig - overensstemmelse med modeller for fuldt endogen vækst, der netop giver en langsigtet positiv sammenhæng mellem vækstrate i teknologi og investeringsrate. Igen kan man dog ikke udelukke, at sammenhængen er udtryk for transitorisk ekstra vækst fra en semi-endogen vækstmodel som følge af stigninger i investeringsraterne.

Kritisk kan man fremhæve kausalitetsforhold i relation til figurerne samt diskutere, hvor godt et traditionelt vækstregnskab er til at identificere den underliggende teknologiske udvikling.

Opgave 2: Endogen vækst som følge af høj grad af substituerbarhed mellem kapital og arbejdskraft?

Modellen gentaget:

$$Y_t = \left(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad 0<\alpha<1, \quad \sigma>0, \quad \sigma\neq 1 \tag{1}$$

$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta) K_t, \quad 0<s<1, \quad 0<\delta<1 \tag{2}$$

$$L_{t+1} = (1+n) L_t, \quad n \geq 0 \tag{3}$$

2.1 Når man skal danne det marginale substitutionsforhold 'arbejdskraft for kapital', $\mathrm{MRS}(K_t, L_t)$, som er lig med grænseproduktet for kapital, $\mathrm{MP}_K(K_t, L_t)$, divideret med grænseproduktet for arbejdskraft, $\mathrm{MP}_L(K_t, L_t)$, vil 'den ydre funktion differentieret mht. den indre' forekomme i begge grænseprodukter og dermed i både tæller og nævner og gå ud. Dette kan udnyttes fra start

$$\mathrm{MRS}(K_t, L_t) = \frac{MP_K(K_t, L_t)}{MP_L(K_t, L_t)} = \frac{\alpha \frac{\sigma-1}{\sigma} K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1}}{(1-\alpha)\frac{\sigma-1}{\sigma} L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{4}$$

Profitmaksimering kræver $\mathrm{MP}_K(K_t, L_t) = r_t$ og $\mathrm{MP}_L(K_t, L_t) = w_t$ og dermed $\mathrm{MRS}(K_t, L_t) = r_t/w_t$. Derfor fra (4)

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{r_t}{w_t} \Leftrightarrow$$

$$\frac{K_t}{L_t} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\sigma}\left(\frac{r_t}{w_t}\right)^{-\sigma} \tag{5}$$

Parameteren σ måler altså, i hvor høj grad virksomheden forskyder inputsammensætningen væk fra den relativt dyrere og imod den relativt billigere faktor ved en ændring i faktorprisforholdet. Dette må være mere, jo nemmere faktorerne rent teknisk kan erstatte hinanden. Dermed bliver σ et mål for graden af substuituerbarhed ('the ease of substituition'), kaldet substitutionselasticiteten.

2.2 Når man skal danne lønandelen, skal man bruge $w_t = \mathrm{MP}_L(K_t, L_t)$, og igen går en hel masse ud i tæller og nævner

$$\begin{aligned}
\frac{w_t L_t}{Y_t} &= \frac{\frac{\sigma}{\sigma-1}\left(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1}(1-\alpha)\frac{\sigma-1}{\sigma}L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1}L_t}{\left(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}} \\
&= \frac{(1-\alpha)L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha} \qquad (6)
\end{aligned}$$

For $\sigma > 1$ betyder større k_t, at lønandelen falder, og for k_t gående mod uendelig, går lønandelen mod nul. For $\sigma < 1$ betyder større k_t, at lønandelen stiger, og for k_t gående mod uendelig, går lønandelen mod 1.

Det er flot, hvis en intuitiv forklaring gives: Når k_t stiger, kommer kapital i mere rigeligt udbud i forhold til arbejdskraft, og samtidig stiger også K/Y-forholdet, $z_t \equiv K_t/Y_t = k_t/y_t$ (pga. diminishing returns til k_t i produktionen af y_t). Rigeligheden af kapital får (brutto-) realrenten r_t til at falde, hvilket skaber efterspørgsel for den megen kapital, men samtidig stiger K_t/Y_t, så der er påvirkninger i to modsatte retninger af (brutto-) kapitalandelen $r_t K_t/Y_t$. Intuitivt vil prisen på kapitel, r_t, falde mindre som følge af kapitalrigeligheden, jo lettere kapital kan substituere for arbejdskraft. Så når $\sigma > 1$, falder r_t relativt mindre end K_t/Y_t stiger, hvorfor kapitalandelen stiger, og lønandelen falder.

2.3 Man skal dividere på begge side af (1) med L_t

$$y_t = \frac{\left(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{L_t} = \left(\frac{\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \Leftrightarrow$$

$$y_t = \left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{$*$}$$

Ved at dividere på begge sider af (2) med L_{t+1} fås

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(sy_t + (1-\delta) k_t\right)$$

og ved heri at indsætte udtrykket for y_t fra $(*)$ fås

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[s\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + (1-\delta) k_t\right] \tag{7}$$

2.4 Ved at trække k_t fra på begge sider af (7) fås

$$\begin{aligned} k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+n}\left[s\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + (1-\delta) k_t - (1+n) k_t\right] \\ &= \frac{1}{1+n}\left[s\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (n+\delta) k_t\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Betingelsen $k_{t+1} = k_t = k$ er da ensbetydende med

$$s\left(\alpha k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = (n+\delta) k \Leftrightarrow$$

$$s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(\alpha k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right) = (n+\delta)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \Leftrightarrow$$

$$\alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = (n+\delta)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \Leftrightarrow$$

$$k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left[(n+\delta)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right] = (1-\alpha) s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

Hvis

$$\alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} < (n+\delta)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{10}$$

er den firkantede parantes $\neq 0$ og strengt positiv, så ved at dividere med den på begge sider og derefter opløfte til $\frac{\sigma}{\sigma-1}$ fås

$$k = \left(\frac{(1-\alpha) s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+\delta)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \equiv k^* > 0 \tag{9}$$

Som nævnt i opgaveteksten: Når $\sigma > 1$, er (10) ensbetydende med

$$s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} < n + \delta \tag{10'}$$

2.5 Ved at differentiere (7) mht. k_t fås

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{s\frac{\sigma}{\sigma-1}\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1-\alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1}\alpha\frac{\sigma-1}{\sigma}k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1}+(1-\delta)}{1+n}$$

$$= \frac{\alpha s\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1-\alpha\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}k_t^{-\frac{1}{\sigma}}+(1-\delta)}{1+n}$$

$$= \frac{\alpha s\left(k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left[\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1-\alpha\right]\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}+1-\delta}{1+n} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{\alpha s\left[\alpha+(1-\alpha)\,k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}}+1-\delta}{1+n} \tag{11}$$

Egenskaber for transitionskurven:

1) At den er overalt strengt voksende følger ved inspektion af (7) eller af, at hældningen i (11) er strengt positiv.

2) For $\sigma > 1$ ses af (7), at for k_t gående imod nul, går k_{t+1} imod

$$\frac{s(1-\alpha)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{1+n} > 0$$

3) Når k_t vokser, så aftager $k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ (for $\sigma > 1$), som indgår i hældningen ovenfor, og så aftager også $\left[\alpha+(1-\alpha)\,k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}}$ (for $\sigma > 1$), hvorfor hele hældningen aftager. (Det gør den også, hvis $\sigma < 1$).

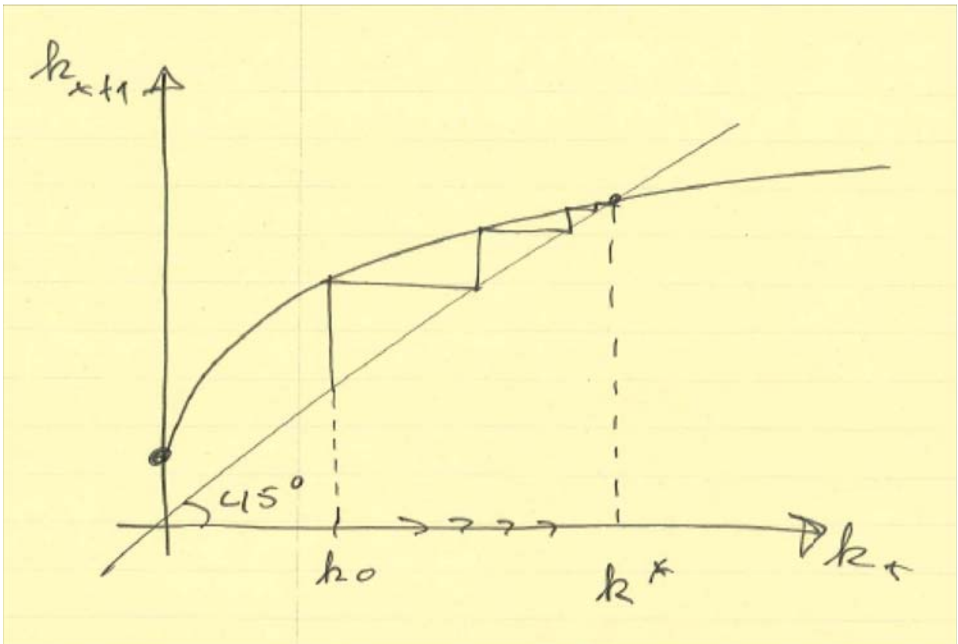
4) For k_t gående imod nul, går $k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ imod uendelig, og det gør hele hældningen da også (for $\sigma > 1$). For k_t gående imod uendelig, går $k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ imod nul (for $\sigma > 1$), og da går hele hældningen imod

$$\frac{\alpha s\alpha^{\frac{1}{\sigma-1}}+1-\delta}{1+n} = \frac{s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}+(1-\delta)}{1+n} \tag{12}$$

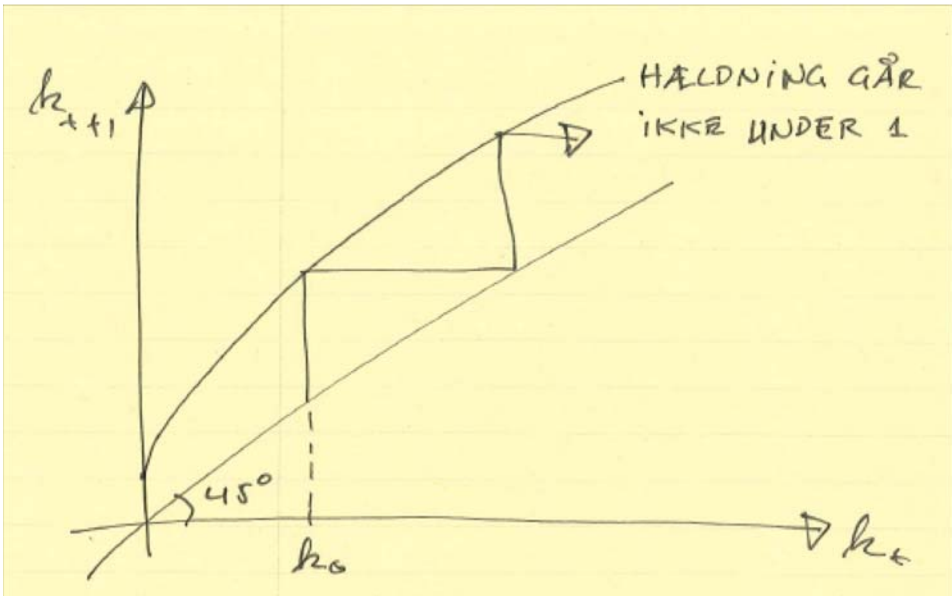
Denne grænseværdi er strengt mindre end 1, hvis og kun hvis

$$s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}+1-\delta < 1+n \Leftrightarrow s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} < n+\delta$$

hvilket netop er (10'). Figuren skal se nogenlunde sådan her ud

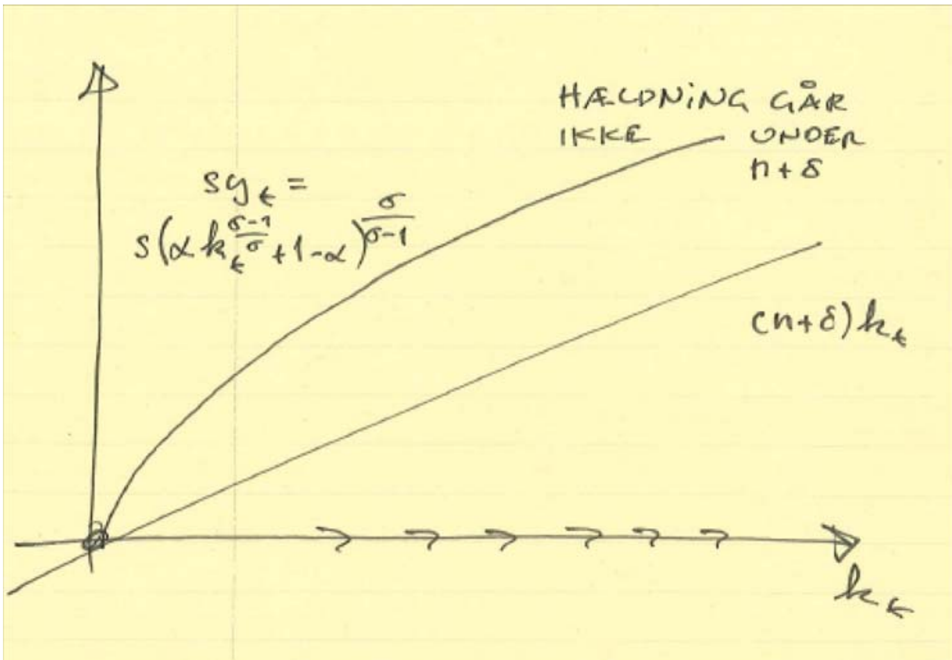


2.6 Af egenskaberne 1) - 4) etableret ovenfor, er det kun den anden halvdel af 4), der afhænger på (10) og (10'). Når disse *ikke* er opfyldte, men tværtimod $s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} > n + \delta$, så vil transitionskurvens hældning gå imod en grænseværdi *større* end 1, når k_t går imod uendelig. Transitionsdiagrammet vil da se sådan her ud



hvorfor k_t må gå imod uendelig på langt sigt (for t gående imod uendelig). Det må y_t da også pga. den positive sammenhæng mellem k_t og y_t i $(*)$.

Solow-diagrammet skal se sådan her ud



Ved at differentiere $sy_t = s\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$ mht. k_t (svarende til en del af differentiationen frem til (11) ovenfor)

$$\frac{\partial(sy_t)}{\partial k_t} = \alpha s\left[\alpha + (1-\alpha)k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

ses, at den ekstra opsparing per mand, der genereres af en ekstra enhed kapital per mand, ganske vist er aftagende i k_t, så der *er* diminishing returns, men for k_t gående imod uendelig, går den ikke imod nul, men imod $s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$, som så her er antaget større end $n+\delta$. Derfor går den ekstra opsparing per mand, sy_t, ikke under investeringsbehovet per mand for at fastholde k_t, selv når k_t går imod uendelig, som Solowdiagrammet illustrerer, hvorfor k_t og dermed y_t kan vokse i det uendelige. Den sædvanlige vækstbremse, diminishing returns, er ikke stærk nok her. Den evige vækst skyldes altså dybest set 'for lidt diminishing returns'.

2.7 Ved at dividere på begge sider af Solow-ligningen (8) med k_t fås vækstraten

$$\begin{aligned}\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} &= \frac{1}{1+n}\left[s\left(\left[\frac{1}{k_t}\right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left[\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1-\alpha\right]\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (n+\delta)\right] \\ &= \frac{1}{1+n}\left[s\left(\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{1}{k_t}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (n+\delta)\right] \qquad (**)\end{aligned}$$

Det ses, at

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} \to \frac{1}{1+n}\left[s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (n+\delta)\right] \equiv g$$

for k_t gående imod uendelig, når $\sigma > 1$; g er strengt større end nul netop pga. antagelsen $s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} > n + \delta$. For vækstraten i y_t kan man fx bruge, at fra $(*)$ er

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{\left(\alpha k_{t+1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}} = \left[\frac{\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha}{\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

For k_t gående imod uendelig, vil også $k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ gå imod uendelig (for $\sigma > 1$), og da $\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ går imod en endelig værdi (som netop vist), så må

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} \to \left[\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \frac{k_{t+1}}{k_t}$$

dvs, y_t går imod at have samme vækstrate som k_t, dvs g.

For σ gående imod 1 (men $\sigma > 1$), bliver (10) og (10') ensbetydende med $\alpha < 1$, som jo er opfyldt. Derfor er (10) og (10') opfylte for alle $\sigma > 1$ tilstrækkelig tæt på 1. For σ gående imod uendelig bliver betingelsen $s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} > n + \delta$ ensbetydende med $\alpha > (n+\delta)/s$, så hvis sidstnævnte er opfyldt, er førstnævnte det også for alle tilstrækkeligt store $\sigma > 0$. Så, under antagelse af $\alpha > (n+\delta)/s$, så haves for σ stor nok en evig, endogen økonomisk vækst i henhold til denne model.

2.8 Man kan *ikke* have en tilsvarende endogen, evig vækst for $\sigma < 1$. En sådan evig vækst ville jo indebære $k_t \to \infty$. Af vækstrateformlen $(**)$ ovenfor, som også gælder for $\sigma < 1$, kan man se, at for k_t gående imod uendelig, ville vækstraten i k_t gå imod

$$-\frac{n+\delta}{1+n} < 0$$

(negativ under den plausible og her gjorte antagelse $n + \delta > 0$), i modstrid med, at k_t går imod uendelig.

For at vurdere, om den fundne endogene vækst kunne være en plausibel fortolkning af de sidste 200 års økonomiske vækst i den vestlige verden, kan man vende tilbage til spørgsmål 2.2. I nærværende model med $\sigma > 1$, ville en sådan evig vækst indebære, at lønandelen skulle gå imod nul. Om dette er muligt i en fjern fremtid er ikke til at sige, men det er i modstrid med erfaringerne fra de sidste mange års økonomiske vækst, hvor lønandelen har ligget relativt konstant over meget lange stræk.

[For teorihistorisk interesserede: Muligheden for evig vækst (uden eksogen teknologisk udvikling) som følge af meget høj substituerbarhed mellem kapital og arbedskraft diskuteres i Solows berømte artikel fra 1956].