1 Tre Korte Spørgsmål

(a) Forklar hvad det betyder, at en præferencerelation $\succeq$ er rationel. Giv et eksempel på en ikke rationel præferencerelation, og forklar hvorfor at den ikke er rationel.

Svar: Præferencerelationen $\succeq$ er rationel for forbrugsmulighedsområdet X, hvis den er:

i. Fuldstændig, dvs. $\forall A, B \in X : A \succeq B \vee B \succeq A$

ii. Transitiv, dvs. $\forall A, B, C \in X : A \succeq B \wedge B \succeq C \Rightarrow A \succeq C$

Ét eksempel på en ikke rationel præferencerelation i en verden med kun pærer og bananer er: »A foretrækkes svagt fremfor B, hvis A både indholder mindst lige så mange pærer som B og mindst lige så mange bananer som B«. Denne præferencerelation er ikke fuldstændig, da vi ikke altid har enten $A \succeq B$ eller $B \succeq A$.

(b) Betragt produktionsfunktionen $f(\ell, k) = \min\{\alpha\ell, \alpha k\}^\gamma$, $\alpha > 0$. For hvilke γ udviser produktionsfunktionen faldende skalaafkast?

Svar: Vi har

$$f(\lambda\ell, \lambda k) = \min\{\lambda\alpha\ell, \lambda\alpha k\}^\gamma = (\lambda \min\{\alpha\ell, \alpha k\})^\gamma = \lambda^\gamma f(\ell, k)$$

Produktionsfunktionen udviser faldende skalaafkast for $\gamma \in (0, 1)$ fordi

$$\forall \lambda > 1, \gamma \in (0, 1) : \; f(\lambda\ell, \lambda k) = \lambda^\gamma f(\ell, k) < \lambda f(\ell, k)$$

(c) Opskriv Slutsky-ligningen for ændringen i en forbrugers efterspørgsel efter vare i ved en marginal prisstigning på vare i. Antag, at indkomsten er eksogen. Forklar kort den økonomiske betydning af hvert enkelt led i ligningen.

Svar: Egenpris Slutsky-ligningen er

$$\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)}{\partial p_i}}_{\text{substitutionseffekt}} \underbrace{- \frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}{\partial I} x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)}_{\text{indkomsteffekt}}$$

hvor $h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)$ er Hicks-efterspørgslen ved prisvektoren $\boldsymbol{p}$ og nytten $u^\star \equiv u(\boldsymbol{x}^\star(\boldsymbol{p}, I))$.

i. Substitutionseffekt: Efterspørgselsændringen grundet ændret relativ pris, men fasthold nytteniveau.

ii. Indkomsteffekt: Efterspørgselsændring grundet ændret købekraft (ændret realindkomst).

2 Forbrugerteori

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + 2x_2.$$

Forbrugsmulighedsområdet er $(x_1, x_2) \in (0, \infty) \times [0, \infty)$. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, I > 0$. Priser og indkomst måles i kr.

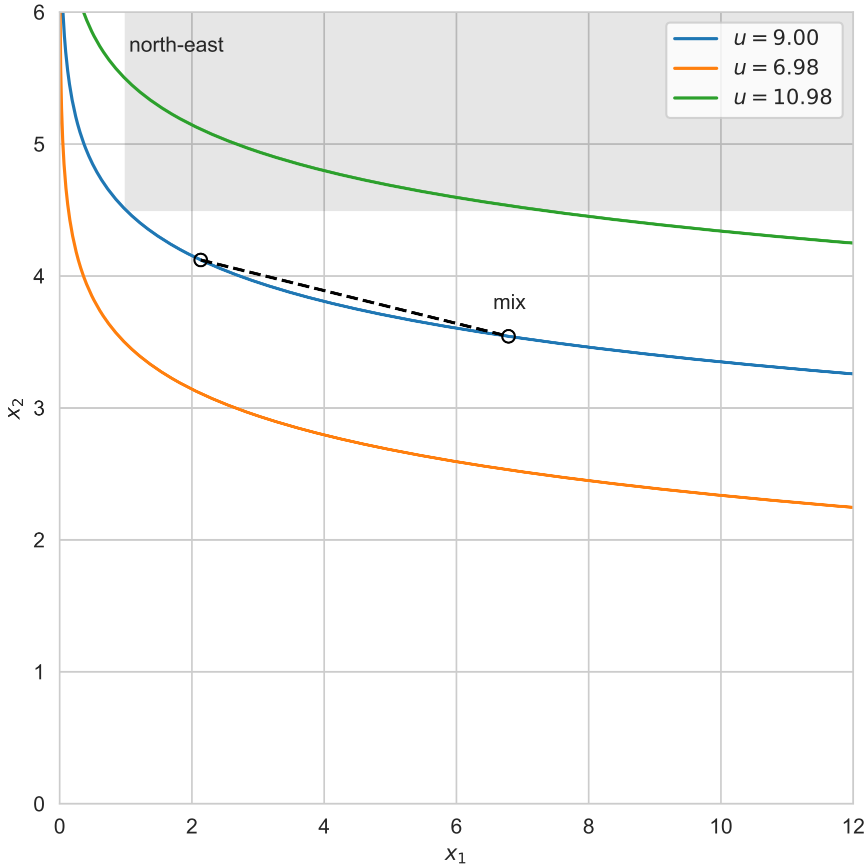
(a) Tegn indifferenskurverne og forklar om forbrugerens præferencer er monotone og/eller strengt konvekse

Svar: $u_0 = \ln x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{u_0 - \ln x_1}{2}$

- *Monotone:* Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde
- *Strengt konvekse:* Lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i det indre af den øvre konturmængde

Se Figur 1.

Figure 1: Indifferenskurver



(b) Bestem hvilke af varerne som er essentielle for forbrugeren

Svar:

$$|MRS(x_1, x_2)| = \left| -\frac{MU_1}{MU_2} \right| = \left| -\frac{\frac{1}{x_1}}{2} \right| = \frac{1}{2x_1}$$

x_1 er essentiel da

$$\lim_{x_1 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| = \infty, \, \forall x_2 > 0$$

x_2 er *ikke* essentiel da

$$\lim_{x_2 \to 0} |MRS(x_1, x_2)| > 0, \, \forall x_1 > 0$$

(c) Løs forbrugerens nyttemaksimeringsproblem vha. Lagrange.
Lav en grafisk illustration af løsningen.

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\max_{x_1,x_2} \ln x_1 + 2x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

Bemærk at vi kan skrive = i bibetingelsen, fordi præferencerne er monotone, og at vi i første omgang ser bort fra kravet om $(x_1, x_2) \in (0, \infty) \times [0, \infty)$. Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \ln x_1 + 2x_2 + \lambda[I - p_1x_1 - p_2x_2]$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne (FOC) kan beregnes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \lambda p_1 && (1)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= 2 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow 2 = \lambda p_2 && (2)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = I && (3)
\end{aligned}$$

Vi deler nu (1) med (2) og udleder det optimale forbrug af x_1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x_1} &= \frac{p_1\lambda}{p_2\lambda} \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2} &= \frac{p_1}{p_2}x_1 \Leftrightarrow \\
x_1^\star &= \frac{p_2}{2p_1} && (4)
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu (4) i (3) og udleder det optimale forbrug af x_2

$$\begin{aligned}
p_1\left(\frac{p_2}{2p_1}\right) + p_2x_2 &= I \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2}p_2 + p_2x_2 &= I \Leftrightarrow \\
x_2^\star &= \frac{I - \frac{1}{2}p_2}{p_2} && (5)
\end{aligned}$$

Bemærk, at vi kun har en indre løsning hvis

$$x_2^\star > 0 \Leftrightarrow \frac{I - \frac{1}{2}p_2}{p_2} > 0 \Leftrightarrow I > \frac{1}{2}p_2 \qquad (6)$$

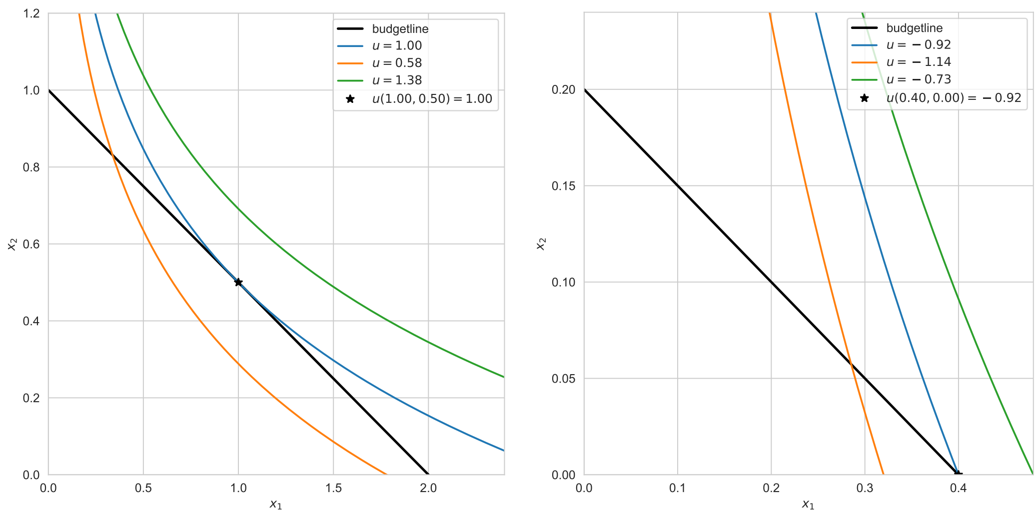
Løsningen er derfor

$$\boldsymbol{x}^{\star}(p_1, p_2, I) = \begin{cases} \left(\frac{p_2}{2p_1}, \frac{I-\frac{1}{2}p_2}{p_2}\right) & \text{hvis } I > \frac{1}{2}p_2 \\ \left(\frac{I}{p_1}, 0\right) & \text{hvis } I \leq \frac{1}{2}p_2 \end{cases} \tag{7}$$

Se Figur 2.

Figure 2: Løsning

(a) Indre løsning (b) Randløsning



(d) Opstil forbrugerens udgiftsminimeringsproblem givet nytte u

Svar:

$$E(p_1, p_2, u) = \max_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \text{ u.b.b. } u(x_1, x_2) \geq u$$

Det kan vises, at forbrugerens Hicks-kompenserede efterspørgselsfunktion er

$$\boldsymbol{h}^{\star}(p_1, p_2, u) = (h_1^{\star}(p_1, p_2, u), h_2^{\star}(p_1, p_2, u)) = \left(\frac{p_2}{2p_1}, \frac{u - \ln\left(\frac{p_2}{2p_1}\right)}{2}\right).$$

Antag, at priserne i udgangspunktet er $p_1 = \frac{1}{2}$ og $p_2 = 1$ og indkomsten er $I = 10$. Regeringen forslår nu en afgiftsstigning, som vil forøge prisen på den første vare med 1 kr. til $p_1' = \frac{3}{2}$.

(e) Hvor meget ekstra skal forbrugeren mindst have i indkomst for at være stillet lige så godt efter afgiftsstigningen som før?

Svar:

i. Marshall efterspørgslen ved de *gamle* priser er $(x_1^\star, x_2^\star) = (1, 9.5)$ og giver nytte $u^\star = \ln(1) + 2 \cdot 9.5 = 19$

ii. Hicks efterspørgslen ved de *nye* priser og det gamle nytteniveau er

$$\begin{aligned}(h_1^\star, h_2^\star) = \boldsymbol{h}^\star(p_1', p_2, u^\star) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{19 - \ln\left(\frac{1}{2\frac{3}{2}}\right)}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{19 + \ln(3)}{2}\right) \\ &\approx \left(\frac{1}{3}, 10.05\right)\end{aligned}$$

og medfører en udgift på

$$E(p_1', p_2, u^\star) = p_1' h_1^\star + p_2 h_2^\star \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{19 + \ln(3)}{2} \approx 10.55$$

iii. Forbrugerens påkrævede kompensation er derfor

$$CV = E(p_1', p_2, u^\star) - I \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{19 + \ln(3)}{2} - 10 = \frac{\ln(3)}{2} \approx 0.55$$

3 Produktion

Betragt en virksomhed der producerer et output ved hjælp af to inputs, arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$x = f(\ell, k) = \sqrt{\min\{2\ell, k\}},$$

hvor x er mængden af output, ℓ er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital. Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogent givne.

(a) Opstil virksomhedens omkostningsminimeringsproblem

Svar:

$$C(x, w, r) = \min_{\ell,k} w\ell + rk \text{ u.b.b. } f(\ell, k) = x$$

(b) Løs virksomhedens omkostningsminimeringsproblem

Svar: Vi har oplagt at $k = 2\ell$, da virksomheden ellers køber input som ikke øger output. Videre får vi, at for at producere x kræves $2\ell = k = x^2$. Heraf følger

$$\begin{aligned} l_b^\star(x, w, r) &= \frac{1}{2}x^2 \\ k_b^\star(x, w, r) &= x^2 \\ C(x, w, r) &= w\frac{1}{2}x^2 + rx^2 = \left(\frac{1}{2}w + r\right)x^2 \end{aligned}$$

(c) Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem indirekte ved at bruge omkostningsfunktionen

Svar: Virksomhedens profitmaksimeringsproblem bliver

$$\Pi = \max_x px - C(x, w, r) = \max_x px - \left(\frac{1}{2}w + r\right)x^2$$

Det giver førsteordensbetingelsen

$$p - \frac{\partial C(x, w, r)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow p = 2\left(\frac{1}{2}w + r\right)x \Leftrightarrow x^\star(p, w, r) = \frac{p}{w + 2r}$$

med

$$l(x, w, r) = l_b(x^\star, w, r) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{w + 2r}\right)^2$$

$$k(x, w, r) = k_b(x^\star, w, r) = \left(\frac{p}{w + 2r}\right)^2$$

Bemærk, at profitten er positiv da

$$\Pi = px^\star - \left(\frac{1}{2}w + r\right)(x^\star)^2 = \frac{p^2}{w+2r} - \frac{\frac{1}{2}p^2}{w+2r} = \frac{\frac{1}{2}p^2}{w+2r} > 0$$

Bemærk yderligere, at vi har fundet et maksimum da andenordens-betingelsen er opfyldt

$$\frac{\partial^2[px - C(x,w,r)]}{\partial x^2} = -(w+2r) < 0$$

4 Generel Ligevægt: Produktionsøkonomi

Betragt en produktionsøkonomi med to aktører, én virksomhed og én forbruger, og to forbrugsgoder, fritid f og en generisk forbrugsvare x. Antag, at der eksisterer en produktionsteknologi,

$$y = g(\ell) = \begin{cases} 0 & \ell < 2 \\ \ell - 2 & \ell \geq 2, \end{cases}$$

hvor ℓ input ef arbejdskraft og y er output af den generiske forbrugsvare. Forbrugeren ejer virksomheden, har initialbeholdning $(L, e) \in \mathbb{R}^2_+$, og maksimerer nyttefunktionen

$$u(L - \ell, x) = u(f, x) = \sqrt{f} + \frac{1}{2}x.$$

Antag, at der er fuldkommen konkurrence på både arbejdsmarkedet og varemarkedet.

Lad prisen på forbrugsvaren være givet ved p, lønnen givet ved w, og virksomhedens profit givet ved Π.

Antag at $L = 9$ og $e = 0$.

(a) Hvad er forbrugerens nytte, hvis han ikke havde adgang til nogen produktionsteknologi?

Svar: $u(L, 0) = u(9, 0) = \sqrt{9} = 3$

(b) Find den Pareto optimale allokering

Svar: Planlægningsproblemet er

$$U = \max_{\ell \in [2,L]} u(L - \ell, \ell - 2) = \max_{\ell \in [2,L]} \sqrt{9 - \ell} + \frac{1}{2}(\ell - 2)$$

så FOC bliver

$$-\frac{1}{2\sqrt{9 - \ell}} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \ell^{PO} = 8 \Rightarrow U = \sqrt{9 - 8} + \frac{1}{2}(8 - 2) = 4$$

Randløsningerne giver nytte

$$u(0, 9 - 2) = \sqrt{0} + \frac{1}{2} \cdot 7 = 3.5$$
$$u(9, 0) = \sqrt{9} + \frac{1}{2} \cdot 0 = 3$$

Dvs. at den Pareto optimale allokering er

$$(\ell^{PO}, y^{PO}, f^{PO}, x^{PO}) = (8, 6, 1, 6)$$

(c) Find virksomhedens omkostningsfunktion givet w

Svar: Virksomhedens omkostningsfunktion er

$$C(x, w) = wl_b^\star(x) = w\,(x + 2)$$

(d) Kan den Pareto optimale allokering implementeres som en Walras-ligevægt?

Svar: Nej. Virksomhedens profit er givet ved

$$\Pi = px - C(x, w) = px - w\,(x + 2) = (p - w)x - 2w$$

Hvis $p \leq w$ er profitten negativ, så virksomheden vil ikke producere noget. Hvis $p > w$ vil virksomheden producerer uendeligt meget.

(e) Diskutér dine resultater i forhold til 2. velfærdsteorem

Svar: 2. velfærdsteorem siger, at enhver Pareto optimal allokering kan implementeres som en Walras-ligevægt, hvis forbrugerens præferencer er strengt konvekse og virksomhedens produktionsfunktion er strengt konkav. Disse betingelser er ikke opfyldt i denne opgave, da produktionsfunktionen ikke er konkav.