Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2018 S-1A ex ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik A

Tirsdag den 12. juni 2018

Opgave 1. Homogene funktioner.

Lad $C \subseteq \mathbf{R}^n$ være en kegle, hvilket betyder, at betingelsen

$$\forall\, t > 0 \,\forall\, x \in C : tx \in C$$

er opfyldt.

(1) Lad C_1 og C_2 være kegler i vektorrummet $\mathbf{R}^n$. Vis, at da er fællesmængden $C = C_1 \cap C_2$ også en kegle i $\mathbf{R}^n$.

Løsning. Hvis $C = \emptyset$, er sagen klar.

Vi antager nu, at $C \neq \emptyset$ og vælger $x \in C$. Da har vi, at $x \in C_1$ og $x \in C_2$. For ethvert $t > 0$ gælder det da, at $tx \in C_1$ og $tx \in C_2$, fordi C_1 og C_2 er kegler. Heraf fremgår det, at $tx \in C$, og dermed har vi vist, at fællesmængden C er en kegle.

(2) Lad $f : C \to \mathbf{R}$ være en funktion. Forklar, hvad det vil sige, at f er homogen af grad k.

Løsning. Funktionen $f : C \to \mathbf{R}$ er homogen af grad k, dersom betingelsen

$$\forall\, t > 0 \,\forall\, x \in C : f(tx) = t^k f(x)$$

er opfyldt.

(3) Afgør, om følgende funktioner, der alle er defineret på $\mathbf{R}^2$, er homogene eller ej, og angiv i bekræftende fald homogenitetsgraden.

$$f_1(x, y) = 3x^2y + y^3,\ f_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},\ f_3(x, y) = x^{\frac{7}{3}} + yx^{\frac{4}{3}}.$$

Løsning. Funktionen f_1 er homogen af grad $k = 3$, funktionen f_2 er ikke homogen, og funktionen f_3 er homogen af grad $k = \frac{7}{3}$.

(4) Lad $C \subseteq \mathbf{R}^n$ være en kegle, og lad $f, g : C \to \mathbf{R}$ være homogene funktioner af graden henholdsvis k og l.

Vis, at funktionen $fg : C \to \mathbf{R}$ er homogen, og angiv homogenitetsgraden for denne funktion.

Løsning. For $x \in C$ og $t > 0$ finder vi, at

$$fg(tx) = f(tx)g(tx) = t^k f(x) t^l g(x) = t^{k+l} f(x)g(x) = t^{k+l}(fg)(x).$$

Dette viser, at funktionen fg er homogen af graden kl.

Opgave 2.

(1) Udregn følgende integraler

$$\int 2(x^2+1)^4 x\,dx, \int e^{\sin y} \cos y\,dy$$

og for $t > 0$ tillige integralet

$$\int \left(te^{t^2} + \ln t\right) dt.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\int 2(x^2+1)^4 x\,dx = \int (x^2+1)^4\,d(x^2+1) = \frac{1}{5}(x^2+1)^5 + k,$$

og

$$\int e^{\sin y} \cos y\,dy = \int e^{\sin y} d(\sin y) = e^{\sin y} + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Desuden finder vi, at

$$\int \left(te^{t^2} + \ln t\right) dt = \frac{1}{2}\int e^{t^2} d(t^2) + \int \ln t\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + t\ln t - t + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

(2) Udregn integralet

$$\int_1^{e^2} \ln t \, dt.$$

Løsning. Vi får, at

$$\int_1^{e^2} \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^{e^2} = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

(3) For $a \in \mathbf{R}$ skal man løse ligningen

$$\int_0^a \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 9x^2 \, dx.$$

Løsning. Vi udregner følgende:

$$\int_0^a \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \int_0^a \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = [\ln(1+x^2)]_0^a = \ln(1+a^2),$$

og

$$\int_0^1 9x^2 \, dx = [3x^3]_0^1 = 3.$$

Dette giver os så, at

$$\int_0^a \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 9x^2 \, dx \Leftrightarrow \ln(1+a^2) = 3 \Leftrightarrow a^2 = e^3 - 1 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{e^3 - 1}.$$

Opgave 3. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^2 + x - y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 1 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 1.$$

(2) Vis, at punktet $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ er det eneste stationære punkt for funktionen f, og afgør, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Det er klart, at punktet $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ er det eneste stationære punkt for funktionen f. Vi finder straks, at denne funktion har Hesse-matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

og heraf fremgår det, at det stationære punkt er et - endda globalt - minimumspunkt for funktionen f.

(3) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, og da $f(x, 0) = x^2 + x \to \infty$ for $x \to \infty$, har funktionen f værdimængden $R(f) = [-\frac{1}{2}, \infty[$.