Eksamen på Økonomistudiet sommeren 2017
Sandsynlighedsteori og Statistik
2. årsprøve
21. august, 2017
(3-timers prøve med hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 5 sider (forsiden inklusiv).

Opgaven består af tre delopgaver, som alle skal besvares. De tre opgaver kan regnes uafhængigt af hinanden. Opgave 1 og 2 indgår tilsammen med samme vægt som opgave 3.

Opgave 1

X og Y er uafhængige stokastiske variable fordelt på 0 og 1.
P(X=0)=0,3; P(X=1)=0,7 og P(Y=0)=0,4; P(X=1)=0,6.

1. Angiv den simultane fordeling for (X,Y).

   Lad nu $Z_1 = X + Y$ og $Z_2 = X - Y$

2. Udregn den betingede middelværdi og den betingede varians af X givet $Z_1 = 1$, dvs. udregn $E(X|Z_1 = 1)$ og $V(X|Z_1 = 1)$.

3. Udregn middelværdi og varians af Z_1 og Z_2.

4. Er Z_1 og Z_2 uafhængige? Begrund svaret.

Opgave 2

Forretning A's månedlige omsætning i 1.000 kr. kan beskrives med en normalfordeling med middelværdi 50 og en spredning (standard afvigelse) på 5.

Tilsvarende kan den månedlige omsætning hos konkurrenten B beskrives med en normalfordeling der har middelværdi 52 og også en spredning på 5.

De to forretninger er konkurrenter og deres korrelationskoefficient er på -0,5.

Så vi har at $X \sim N(50, 5^2)$ $\quad Y \sim N(52, 5^2)$. Hvor X og Y repræsenterer omsætningen hos henholdsvis A og B. korrelationskoefficienten $\rho = -0,5$

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) * V(Y)}} = -0,5.$$

1. Angiv et symmetrisk interval omkring 50, hvor omsætningen fra forretning A med 95% vil ligge.

   Lad Z=X+Y

2. Angiv fordelingen for Z.

3. Udregn P(Z>110).

   I de sidste 12 måneder er det registreret at antallet af måneder hvor det samlede salg overstiger 110 er 5.

4. Hvad er sandsynligheden for at dette indtræffer. Begrund dine udregninger.

Opgave 3

Blandt gæster i det københavnske natteliv, har der igennem længere tid været en diskussion om, hvor man hurtigst kunne praje en taxa fra.

Diskussionen går på, om der er forskel på punkt A og B mht. den tid det tager at vente på, at en fri taxa ankommer.

Man beslutter derfor, at foretage en række målinger af ventetiden i min. til den næste frie taxa ankommer.

punkt	antal målinger	sum af ventetider	gns af ventetider
A	15	17,91	1,19
B	17	7,36	0,43

Der opstilles følgende model:
X_i = Ventetid til næste frie taxa ved punkt A. i=1,2,.......15.
Y_i = Ventetid til næste frie taxa ved punkt B. i=1,2,.......17.
Alle målinger antages at være uafhængige.
X_i er $eksp(\lambda_1)$ og Y_i er $eksp(\lambda_2)$
dvs. at tætheden for X er f(x)=$\lambda_1 \exp(-\lambda_1 x)$ og tæthed for Y er g(y)=$\lambda_2 \exp(-\lambda_2 y)$

1. Angiv middelværdierne for X og Y

2. Opskriv likelihood funktionen $L(\lambda_1, \lambda_2)$ og vis at log-likelihood funktionen $log[L(\lambda_1, \lambda_2)]$ bliver

   $15\ln(\lambda_1) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{15} X_i + 17\ln(\lambda_2) - \lambda_2 \sum_{i=1}^{17} Y_i$

   Angiv scorefunktionerne og Hesse-matricen.

   Udregn MLE (maksimumlikelihood estimaterne) for λ_1 og λ_2

3. Udregn et konfidensinterval for λ_1.

4. Det antages nu at $\lambda_1 = \lambda_2$ .Den fælles parameter kaldes λ

   Opskriv likelihood funktionen $L(\lambda)$ samt log-likelihood funktionen $log[L(\lambda)]$.

   Udregn MLE for λ som kaldes $\widehat{\lambda}$

5. Angiv den approksimative fordeling for $\widehat{\lambda}$

6. Test $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = (\lambda)$ mod $H_A : H_0^C$.

   Ved brug af et likelihood ratio test.

7. Giv en samlet konklusion.