KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 V-1A rx ret

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A

Mandag den 21. februar 2011

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. Integration ved substitution. Lad f være en kontinuert funktion, som er defineret på et åbent interval I, og lad endvidere J være et åbent interval, og lad $g : J \to I$ være en differentiabel funktion, der har kontinuert afledet $g^{'}$. Lad F betegne en stamfunktion til funktionen f.

(1) Vis, at

$$\int f(g(x))g^{'}(x)\,dx = F(g(x)) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi ser, at differentialet af funktionen g er $d(g(x)) = g^{'}(x)\,dx$, så

$$\int f(g(x))g^{'}(x)\,dx = \int f(g(x))\,d(g(x)) = F(g(x)) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$. Bemærk, at i det andet integral er den integrationsvariable $u = g(x)$.

(2) Udregn de ubestemte integraler

(a)
$$\int (3x^2 + 7x + 9)^4\,(6x + 7)\,dx,$$

(b)
$$\int \frac{1}{t(\ln(t))^5}\,dt$$

og

(c)
$$\int e^s\Big(\sin(e^s) + 1\Big)\,ds.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\int (3x^2 + 7x + 9)^4\,(6x + 7)\,dx = \int (3x^2 + 7x + 9)^4\,d(3x^2 + 7x + 9) =$$

$$(a) \qquad \frac{(3x^2+7x+9)^5}{5} + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Desuden får vi, at

$$(b) \qquad \int \frac{1}{t(\ln(t))^5}\,dt = \int \frac{1}{(\ln(t))^5}\,d(\ln t) = -\frac{1}{(4\ln(t))^4} + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Endelig finder vi, at

$$\int e^s\Big(\sin(e^s)+1\Big)\,ds = \int e^s \sin\,ds + \int e^s\,ds =$$

$$(c) \qquad \int \sin(e^s)\,d(e^s) + \int e^s\,ds = -\cos(e^s) + e^s + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

(3) Udregn det bestemte integral

$$\int_0^2 9x^2 e^{x^3}\,dx\,.$$

Løsning. Vi får, at

$$\int_0^2 9x^2 e^{x^3}\,dx = \int_0^2 3e^{x^3}\,d(x^3) = \Big[3e^{x^3}\Big]_0^2 = 3e^8 - 3.$$

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R} \wedge y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in D : f(x,y) = x^2 - \frac{y^4}{4} + \ln(y).$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -y^3 + \frac{1}{y}.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Idet $(x, y) \in D$, finder vi, at

$$2x = 0 \,\wedge\, -y^3 + \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \,\wedge\, y = 1,$$

hvilket viser, at funktionen f netop har det ene stationære punkt $(x, y) = (0, 1)$.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\,, \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \;\text{ og }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$, og afgør, om det stationære punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2\,, \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \;\text{ og }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -3y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

Endvidere finder vi, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) = 2\,, \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 1) = 0\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1) = 0 \;\text{ og }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -4.$$

Dette viser, at det stationære punkt $(x, y) = (0, 1)$ er et sadelpunkt for funktionen f.

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

Løsning. Idet

$$f(x, 1) = x^2 - \frac{1}{4} \to \infty \;\text{ for }\; x \to \infty$$

og

$$f(0, y) = -\frac{y^4}{4} + \ln(y) \to -\infty \;\text{ for }\; y \to 0+,$$

ser vi, at funktionen f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

Opgave 3. I økonomisk teori betragter man den såkaldte CES-funktion (CES = Constant Elasticity of Production) $Q = Q(K, L)$, som er givet ved forskriften

$$Q = Q(K, L) = F\Big(aK^r + (1-a)L^r\Big)^{\frac{1}{r}},$$

hvor $K > 0$ betegner investeret kapital, og $L > 0$ betegner udført arbejde. Desuden er F, a og r givne positive, reelle konstanter, hvor $0 < a < 1$.

(1) Vis, at funktionen Q er homogen og bestem homogenitetsgraden.

Løsning. Lad $t > 0$. Vi får da, at

$$Q(tK, tL) = F\Big(a(tK)^r + (1-a)(tL)^r\Big)^{\frac{1}{r}} = F\Big(t^r(aK^r + (1-a)L^r)\Big)^{\frac{1}{r}} =$$

$$tF\Big(aK^r + (1-a)L^r\Big)^{\frac{1}{r}} = tQ(K, L),$$

hvilket viser, at funktionen $Q = Q(K, L)$ er homogen af grad $k = 1$.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L) \text{ og } \frac{\partial Q}{\partial L}(K, L).$$

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L) = F\frac{1}{r}\Big(aK^r + (1-a)L^r\Big)^{\frac{1}{r}-1} raK^{r-1} =$$

$$aF\Big(aK^r + (1-a)L^r\Big)^{\frac{1}{r}-1} K^{r-1},$$

og at

$$\frac{\partial Q}{\partial L}(K, L) = F\frac{1}{r}\Big(aK^r + (1-a)L^r\Big)^{\frac{1}{r}-1} r(1-a)L^{r-1} =$$

$$(1-a)F\Big(aK^r + (1-a)tL^r\Big)^{\frac{1}{r}-1} L^{r-1}.$$

(3) Udregn de partielle elasticiteter $\mathrm{El}_K Q$ og $\mathrm{El}_L Q$.

Løsning. Vi finder, at

$$\mathrm{El}_K Q = K\frac{\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L)}{Q(K, L)} = K\frac{aF\Big(aK^r + (1-a)L^r\Big)^{\frac{1}{r}-1} K^{r-1}}{F\Big(aK^r + (1-a)L^r\Big)^{\frac{1}{r}}} =$$

$$\frac{aK^r}{aK^r + (1-a)L^r}\,,$$

og at

$$\mathrm{El}_L Q = L\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}(K,L)}{Q(K,L)} = L\frac{(1-a)F\Big(aK^r + (1-a)L^r\Big)^{\frac{1}{r}-1}L^{r-1}}{F\Big(aK^r + (1-a)L^r\Big)^{\frac{1}{r}}} =$$

$$\frac{(1-a)L^r}{aK^r + (1-a)L^r}\,.$$

(4) Bestem $\mathrm{El}_K Q + \mathrm{El}_L Q$.

Løsning. Vi ser straks, at

$$\mathrm{El}_K Q + \mathrm{El}_L Q = \frac{aK^r}{aK^r + (1-a)L^r} + \frac{(1-a)L^r}{aK^r + (1-a)L^r} = 1.$$