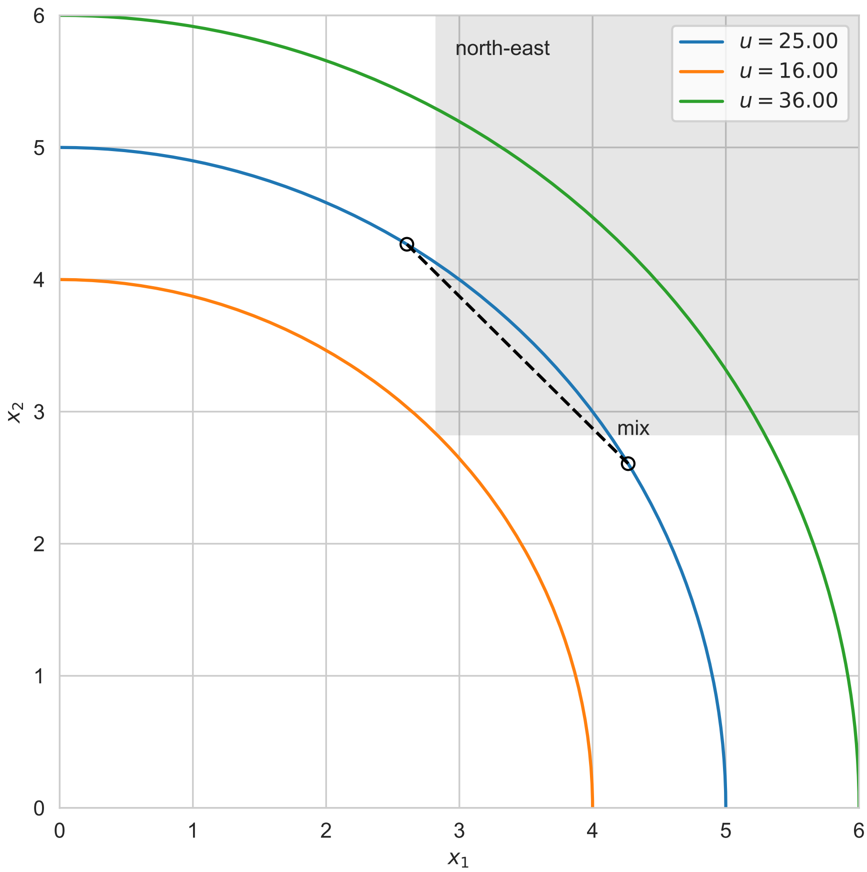
1 Tre Korte Spørgsmål

(a) Tegn indifferenskurverne for en præferencerelation som er monoton, men ikke konveks.

Svar: Se Figur 1.

Figure 1: Indifferenskurver



- *Monoton:* Alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde. Overholdt.
- *Konveks:* Lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i den øvre konturmængde. Ikke overholdt.

(b) Lad G være et lotteri der giver X kr. med sandsynlighed π og ellers giver Y kr. med sandsynlighed $1 - \pi$,

$$G = (\pi \circ X, (1 - \pi) \circ Y).$$

Antag, at investoren har von Neumann–Morgenstern præferencer med en Bernoullli nyttefunktion $u(x)$ over penge. Forklar kort begreberne forventet værdi, forventet nytte, sikkerhedsækvivalent og risikopræmie.

Svar:

i. Forventet værdi: $E[G] = \pi X + (1 - \pi)Y$

ii. Forventet nytte: $U[G] = \pi u(X) + (1 - \pi)u(Y)$

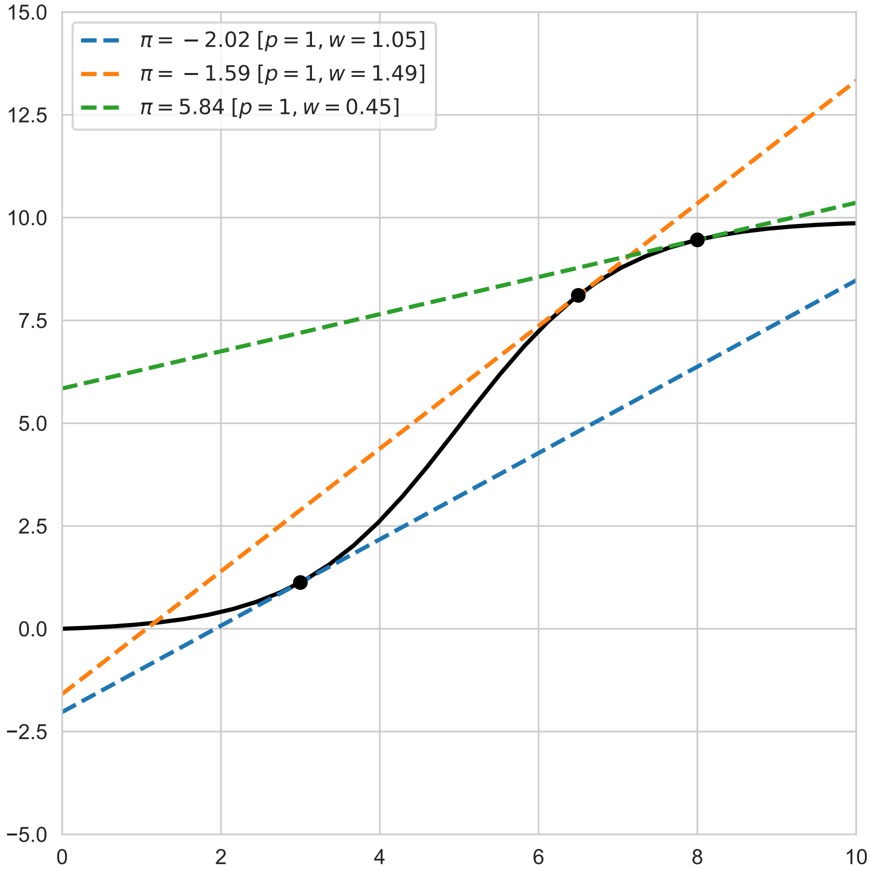
iii. Sikkerhedsækvivalent: $u(C(G)) = U(G) \Leftrightarrow C(G) = u^{-1}(U(G))$

iv. Risikopræmie: $RP(G) = E(G) - C(G)$

(c) Betragt en virksomhed der producerer et output, $y = f(\ell)$, udelukkende ved hjælp af arbejdskraft, ℓ. Antag, at der er perfekt konkurrence både på arbejdsmarkedet (hvor lønnen er w) og på virksomhedens outputmarked (hvor prisen er p). Illustrér grafisk en situation, hvor førsteordensbetingelsen er overholdt, men profitten er negativ. Hvilken antagelse på $f(\ell)$ sikrer, at førsteordensbetingelsen er både nødvendig og tilstrækkelig?

Svar: Se Figur 2. Førsteordensbetingelsen er overholdt i alle tre punkter, men profitten er negativ i to af dem. Førsteordensbetingelsen er både nødvendig og tilstrækkelig, hvis f er strengt konkav.

Figure 2: Produktionsfunktion



2 Forbrugerteori

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2).$$

Forbrugsmulighedsområdet er $(x_1, x_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$. Priser måles i kr. Forbrugerens initialbeholdning er $(e_1, e_2) = (10, 0)$.

(a) Forklar hvorfor at forbrugerens efterspørgsel må være givet ved

$$\begin{aligned} x_1^\star(p_1, p_2, e_1, e_2) &= \frac{1}{2}\frac{p_1e_1 + p_2e_2}{p_1} \\ x_2^\star(p_1, p_2, e_1, e_2) &= \frac{1}{2}\frac{p_1e_1 + p_2e_2}{p_2} \end{aligned}$$

givet at forbrugere med nyttefunktion $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ har efterspørgsel

$$\begin{aligned} x_1^\star(p_1, p_2, e_1, e_2) &= \frac{a}{a+b}\frac{p_1e_1 + p_2e_2}{p_1} \\ x_2^\star(p_1, p_2, e_1, e_2) &= \frac{a}{a+b}\frac{p_1e_1 + p_2e_2}{p_2} \end{aligned}$$

I udgangspunktet er priserne $p_1 = p_2 = 1$.
Prisen på vare 1 stiger nu til $p_1' = 2$.

(b) Find den samlede effekt af prisstigningen på forbrugerens efterspørgsel
Svar: Vi indsætter nu $(e_1, e_2) = (10, 0)$ og $p_1 = p_2 = 1$ for at beregne det optimale forbrug under de oprindelige priser

$$\begin{aligned} x_1^\star &= \frac{1}{2}\frac{1 \cdot 10 + 1 \cdot 0}{1} = 5 \\ x_2^\star &= \frac{1}{2}\frac{1 \cdot 10 + 1 \cdot 0}{1} = 5 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $A = (5, 5)$.

Vi indsætter nu $(e_1, e_2) = (10, 0)$, $p_1 = 2$ og $p_2 = 1$ for at beregne det optimale forbrug under de nye priser

$$\begin{aligned} x_1^\star &= \frac{1}{2}\frac{2 \cdot 10 + 1 \cdot 0}{2} = 5 \\ x_2^\star &= \frac{1}{2}\frac{2 \cdot 10 + 1 \cdot 0}{1} = 10 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $C_2 = (5, 10)$.

Vi kan herfra umiddelbart beregne den samlede effekt af prisstigningen som $C_2 - A$

$$\text{Samlet effekt: } C_2 - A : (5,10) - (5,5) \quad = \quad (0,5)$$

(c) Find den Hicks-kompenserede efterspørgselsfunktion
Svar: Udgiftsminimeringsproblemet opstilles:

$$\min_{x_1,x_2} \; p_1x_1 + p_2x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad \ln(x_1) + \ln(x_2) = u \tag{1}$$

Vi kan nu opskrive Lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda[u - \ln(x_1) - \ln(x_2)] \tag{2}$$

Hvorfra førsteordensbetingelserne for et indre optimum kan beregnes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda\frac{1}{x_1} = 0 \Leftrightarrow p_1x_1 = \lambda \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \lambda\frac{1}{x_2} = 0 \Leftrightarrow p_2x_2 = \lambda \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u - \ln(x_1) - \ln(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 = e^u \tag{5}$$

Vi deler nu (3) med (4)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda} &= \frac{p_1x_1}{p_2x_2} \Leftrightarrow \\ x_2 &= \frac{p_1}{p_2}x_1 \end{aligned} \tag{6}$$

Vi indsætter nu (6) i (5) og udleder x_1

$$\begin{aligned} x_1\frac{p_1}{p_2}x_1 &= e^u \Leftrightarrow \\ \frac{p_1}{p_2}x_1^2 &= e^u \Leftrightarrow \\ x_1 &= \sqrt{\frac{p_2}{p_1}e^u} \equiv h_1^\star(p_1, p_2, u) \end{aligned} \tag{7}$$

Vi indsætter nu (7) i (6) og udleder x_2

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{p_1}{p_2}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}e^u} \\ &= \sqrt{\frac{p_1}{p_2}e^u} \equiv h_2^\star(p_1, p_2, u) \end{aligned} \tag{8}$$

(d) Beregn substitutions- og indkomsteffekterne (både ren indkomsteffekt og formueeffekt) for prisændringen analyseret i spørgsmål (b)

Svar: Vi beregner nu nytten af det initiale forbrug

$$u^\star = u(5,5) = \ln(5) + \ln(5) = \ln(25)$$

Vi indsætter nu nye priser og oprindelig nytte ($p_1 = 2, p_2 = 1, u^* = \ln 25$) i henholdsvis (7) og (8) og beregner det kompenserede forbrug (Hicks-forbruget)

$$\begin{aligned} h_1^\star(5,1,25) &= \sqrt{\frac{1}{2}e^{\ln(25)}} = \sqrt{\frac{25}{2}} \approx 3.54 \\ h_2^\star(5,1,25) &= \sqrt{2e^{\ln(25)}} = \sqrt{50} \approx 7.07 \end{aligned}$$

Vi kalder dette forbrugsbundt $B = (3.54, 7.07)$.

Vi kan nu beregne substitutionseffekten af $B - A$ og indkomsteffekten som $C_2 - B$

$$\begin{aligned} \text{substitutionseffekt: } B - A : \left(\sqrt{\frac{25}{2}}, \sqrt{50}\right) - (5,5) &\approx (-1.46, 2.07) \\ \text{samlet indkomsteffekt: } C_2 - B : (5,10) - \left(\sqrt{\frac{25}{2}}, \sqrt{50})\right) &\approx (1.46, 2.93) \end{aligned}$$

Vi beregner nu hvilket forbrug forbrugeren havde valgt under de nye priser, såfremt værdien af hans initialbeholdning ikke havde ændret sig (fra 10):

$$\begin{aligned} x_1^\star &= \frac{1}{2}\frac{10}{2} = \frac{5}{2} \\ x_2^\star &= \frac{1}{2}\frac{10}{1} = 5 \end{aligned}$$

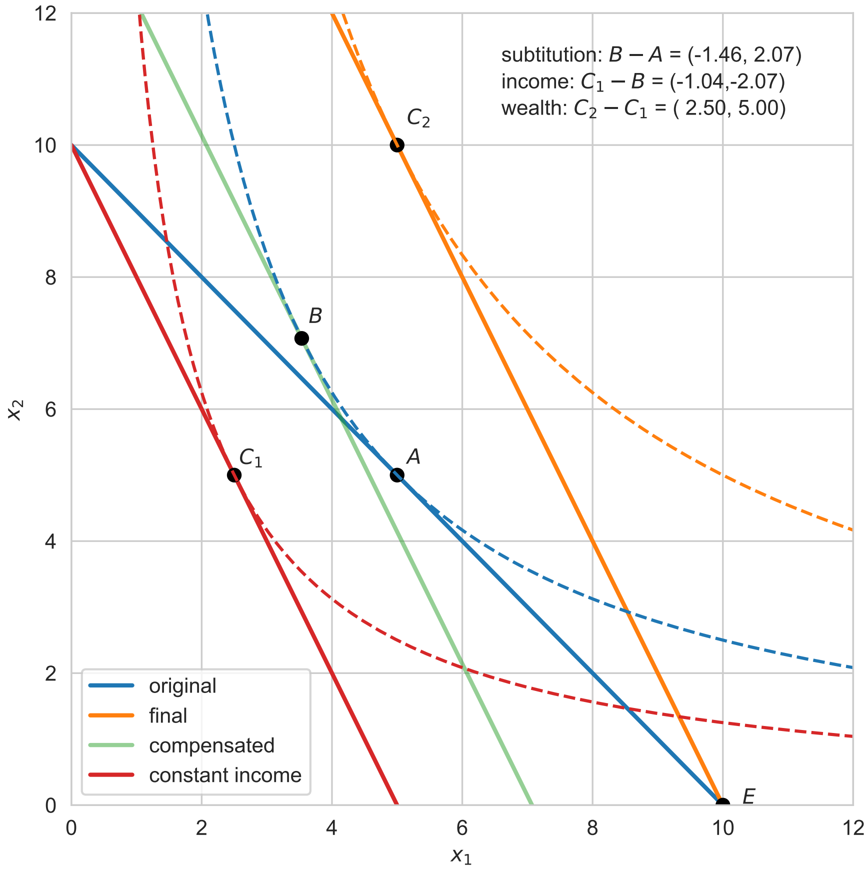
Vi kalder dette forbrugsbundt $C_1 = (\frac{5}{2}, 5)$.

Vi kan nu dele indkomsteffekten op i henholdsvis ren indkomsteffekt $C_1 - B$ og formueeffekt som $C_2 - C_1$ grundet prisstigningen

$$\begin{aligned} \text{ren indkomsteffekt: } C_1 - B : \left(\frac{5}{2}, 5\right) - \left(\sqrt{\frac{25}{2}}, \sqrt{50}\right) &\approx (-1.04, -2.07) \\ \text{formueeffekt: } C_2 - C_1 : (5,10) - \left(\frac{5}{2}, 5\right) &= (2.5, 5) \end{aligned}$$

(e) Lav en grafisk illustration af dine resultater
Svar: Se Figur 3.

Figure 3: Slutsky



3 Produktion og Partiel Ligevægt

Antag, at alle virksomheder på et marked har en produktionsteknologi, der er beskrevet ved produktionsfunktionen $f(\ell, k) = (\min\{3\ell, k\})^{\frac{1}{3}}$. Prisen på arbejdskraft er $w = 3$, prisen på kapital er $r = 1$, og hver virksomhed har tilbagevendende faste omkostninger på 500. Det oplyses yderligere, at markedet er karakteriseret ved fuldkommen konkurrence.

(a) Udled den langsigtede omkostningsfunktion for hver virksomhed

Svar: Minimeringsproblemet opstilles.

$$\min_{\ell,k} \; w\ell + rk + FC \quad \text{u.b.b.} \quad (\min\{3\ell, k\})^{\frac{1}{3}} = x \tag{9}$$

Det er oplagt omkostningsminimerende at sætte $k = 3\ell$. Dette indsættes nu i bibetingelsen, hvormed fås den omkostningsminimerende efterspørgsel efter kapital ved produktion af x

$$\begin{aligned} (\min\{k, k\})^{\frac{1}{3}} &= x \Leftrightarrow \\ k^{\frac{1}{3}} &= x \Leftrightarrow \\ k &= x^3 \Leftrightarrow \end{aligned} \tag{10}$$

Vi indsætter nu (10) i $k = 3\ell$ og udleder den omkostningsminimerende efterspørgsel efter arbejdskraft ved produktion af x

$$\begin{aligned} 3\ell &= x^3 \Leftrightarrow \\ \ell &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Vi kan nu udlede den langsigtede omkostningsfunktion

$$C(x) = w\frac{x^3}{3} + rx^3 + FC$$

For de givne omkosningsniveuaer fås dermed

$$C(x) = x^3 + x^3 + 500 = 2x^3 + 500$$

(b) Hvor meget producerer hver virksomhed i langsigtsligevægten?

Svar:

Grundet fuldkommen konkurrence vil al profit blive konkurreneret væk og alle virksomheder producerer i minimum af $AC(x)$.

Den gennemsnitlige omkostningsfunktion på langt sigt er givet ved

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x^3 + 500}{x} = 2x^2 + \frac{500}{x}$$

Hver virksomheder producerer derfor

$$\frac{\partial AC(x)}{\partial x} = 4x - \frac{500}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{500}{x^3} \Leftrightarrow \underline{x} = 5$$

Vi tjekker, at dette punkt rent faktisk er et minimum

$$\frac{\partial^2 AC(x)}{\partial x^2} = 4 + \frac{1000}{x^3} > 0$$

(c) Hvad er den langsigtede ligevægtspris på output?

Svar: Da markedet er karakteriseret ved fuldkommen konkurrence må det gælde at $p = AC(\underline{x})$. Vi kan derfor beregne markedsprisen fra

$$\begin{aligned} p &= AC(5) \Leftrightarrow \\ p &= 2 \cdot 5^2 + \frac{500}{5} \Leftrightarrow \\ p &= 150 \end{aligned}$$

Antag, at markedsefterspørgslen er givet ved

$$D^M(p) = \begin{cases} 2000 - 10p & \text{hvis } p \leq 200 \\ 0 & \text{hvis } p > 200. \end{cases}$$

(d) Hvor mange virksomheder er der på markedet i langsigtsligevægten?

Svar: Ved at indsætte markedsprisen i markedsefterspørgslen kan vi umiddelbart beregne den efterspurgte mængde.

$$D^M(150) = 2000 - 10 \cdot 150 = 500$$

I ligevægt er udbud naturligvis lig efterspørgsel og ved at benytte at hver enkelt virksomhed stadig producerer 5, kan antallet af virksomheder nu beregnes

$$J = \frac{D^M(150)}{\underline{x}} = \frac{500}{5} = 100$$

(e) Hvad er henholdsvis forbrugeroverskuddet og producentoverskuddet på langt sigt?

Svar: Forbrugeroverskuddet er

$$\begin{aligned}
CS^{SR} &= \int_{p^{SR}}^{\infty} D^M(p)dp \\
&= \int_{p^{SR}}^{200} D^M(p)dp \\
&= \frac{1}{2}(200-150)\cdot 500 = 12500
\end{aligned}$$

Producentoverskuddet er nul, da virksomhedens profit er nul

$$\Pi = p\underline{x} - AC(\underline{x})\underline{x} = [p - AC(\underline{x})]\underline{x} = 0 \cdot \underline{x} = 0$$

4 Generel Ligevægt: Bytteøkonomi

Betragt en bytteøkonomi med to varer hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionerne:

$$u^A(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

og

$$u^B(x_1, x_2) = 4\ln(x_1) + x_2$$

Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Der er privat ejendomsret i økonomien. A's initialbeholdning er (e_1^A, e_2^A), mens B's initialbeholdning er (e_1^B, e_2^B). Der findes markeder for begge varer med fuldkommen konkurrence. Priserne er givet ved $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$.

Ved eksogen indkomst kan forbruger A's og B's efterspørgselsfunktioner vises at være givet ved

$$\boldsymbol{x}^{A\star}(p_1, p_2, I) = \left(\frac{1}{2}\frac{I}{p_1}, \frac{1}{2}\frac{I}{p_2}\right)$$

og

$$\boldsymbol{x}^{B\star}(p_1, p_2, I) = \left(\frac{4p_2}{p_1}, \frac{I - 4p_2}{p_2}\right)$$

(a) Definér begrebet Walras-ligevægt for en bytteøkonomi

Svar: I en bytteøkonomi med privat ejendomsret og to goder er en Walras-ligevægt karakteriseret ved en prissystem, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$, og en tilstand $(\boldsymbol{x}^{A\star}, \boldsymbol{x}^{B\star}) = ((x_1^{A\star}, x_2^{A\star}), (x_1^{B\star}, x_2^{B\star}))$, hvor

i. *Udbud = efterspørgsel* for begge varer

$$\begin{aligned} x_1^{A\star}\left(p_1, p_2, e_1^A, e_2^A\right) + x_1^{B\star}\left(p_1, p_2, e_1^B, e_2^B\right) &= \overline{e}_1 = e_1^A + e_1^B \\ x_2^{A\star}\left(p_1, p_2, e_1^A, e_2^A\right) + x_2^{B\star}\left(p_1, p_2, e_1^B, e_2^B\right) &= \overline{e}_2 = e_2^A + e_2^B \end{aligned}$$

ii. $x_1^{A\star}$,$x_2^{A\star}$,$x_1^{B\star}$ og $x_2^{B\star}$ er de *optimale efterspørgselsfunktioner* givet priserne

Antag videre, at A's initialbeholdning er $(2, 12)$, mens B's initialbeholdning er $(4, 2)$.

(b) Find Walras-ligevægten for denne specifikke bytteøkonomi med $p_2 = 1$ som numeraire, dvs. find ligevægtspriserne og ligevægtsallokeringen

Svar: Indkomsterne bliver

$$I^A = 2p_1 + 12$$
$$I^B = 4p_1 + 2$$

Det nyttemaksimerende forbrug af x_2 for de to forbrugere bliver dermed

$$\begin{aligned} x_2^{A*}\left(p_1, 1, e_1^A, e_2^A\right) &= \frac{1}{2}\left[2p_1 + 12\right] = p_1 + 6 \\ x_2^{B*}\left(p_1, 1, e_1^B, e_2^B\right) &= \left[4p_1 + 2 - 4\right] = 4p_1 - 2 \end{aligned}$$

Vi clear markedet for x_2

$$\begin{aligned} x_2^{A\star}(p_1, 1, 2, 12) + x_2^{B\star}(p_1, 1, 4, 2) &= 12 + 2 \\ p_1 + 6 + 4p_1 - 2 &= 14 \\ 5p_1 &= 10 \\ p_1 &= 2 \end{aligned}$$

Bemærk, at Walras' lov sikrer disse priser også clearer markedet for x_1. Ligevægtspriserne er derfor $(p_1, p_2) = (2, 1)$, mens ligevægtsallokeringen er

$$\begin{aligned} x_1^{A\star}(2, 1, 2, 12) &= 4 \\ x_2^{A\star}(2, 1, 2, 12) &= 8 \\ x_1^{B\star}(2, 1, 4, 2) &= 2 \\ x_1^{B\star}(2, 1, 4, 2) &= 6 \end{aligned}$$

som vi umiddelbart ser er en mulig tilstand.

(c) Forklar hvad 1. velfærdsteorem betyder

Svar: Første velfærdsteorem siger, at i en økonomi, hvor alle forbrugere har monotont voksende præferencer, vil en økonomisk tilstand hørende til en Walras-ligevægt (generel markedsligevægt under perfekt konkurrence, dvs. alle forbrugere har nyttemaksimeret, alle virksomheder profitmaksimeret, og der er balance mellem forbrug og produktion) være efficient/Pareto-optimal.

(d) Opstil en samfundsplanlæggers problem når hun skal maksimere B's nytte, mens hun sikrer at A får nytte $\underline{u}^A$. Diskutér sammenhængen mellem samfundsplanlæggerens problem og kontraktkurven.

Svar: Vi opstiller nu samfundsplanlæggerens problem

$$\begin{aligned} U(\underline{u}^A) &= \max_{x_1^B, x_2^B} 4\ln(x_1^B) + x_2^B \\ &\text{u.b.b.} \\ x_1^A x_2^A &= \underline{u}^A \\ x_1^A + x_1^B &= e_1^A + e_1^B = \overline{e}_1 \\ x_2^A + x_2^B &= e_1^A + e_1^B = \overline{e}_2 \end{aligned}$$

Skriv løsningen som en funktion af $\underline{u}^A$ som $x_1^{B\bullet}(\underline{u}^A)$ og $x_2^{B\bullet}(\underline{u}^A)$.
Vi har, at A's nytte ligger i intervallet

$$[0, u^A(\overline{e}_1, \overline{e}_2)] = [0, u^A(6, 14)] = [0, 84].$$

Kontraktkurven er givet ved

$$\left\{(x_1^A, x_2^A) \,|\, \exists \underline{u}^A \in [0, 84], x_1^A - \overline{e}_1 = x_1^{B\bullet}(\underline{u}^A), x_2^A - \overline{e}_2 = x_2^{B\bullet}(\underline{u}^A)\right\}$$

En mere løs beskrivelse af kontraktkurven accepteres også.