Eksamen på Økonomistudiet vinter 2018-2019

Rettevejledning til eksamen i Makroøkonomi I

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

10. januar 2019

Opgave 1: Konvergens

1.1

Forklar hypoteserne omkring *ubetinget konvergens* og *betinget konvergens*, der er beskrevet i pensumbogens kapitel 2, og hvilke implikationer de hver især har for fattigdom på tværs af lande.

Svar:

Ubetinget konvergens: på lang sigt konvergerer BNP pr. arbejder (eller indbygger) til samme vækststi for alle lande, således at alle lande konvergerer mod det samme indkomst niveau, ubetinget af evt. forskelle i strukturelle karakteristika, såsom opsparingsrater og befolkningsvækst. Dette betyder, at initiale forskelle i indkomst på tværs af lande (dvs. fattigdom) automatisk forsvinder på lang sigt.

Betinget konvergens: BNP pr. arbejder (eller indbygger) konvergerer til en lande-specifik vækststi, der er betinget af landets strukturelle karakteristika. Dette betyder, at kun hvis lande er ens i strukturelle karakteristika, vil initiale indkomstforskelle forsvinde på lang sigt, hvilket betyder at fattigdom - forstået som "markante" indkomstforskelle på tværs af lande i verden - *ikke* nødvendigvis forsvinder automatisk på lang sigt.

1.2

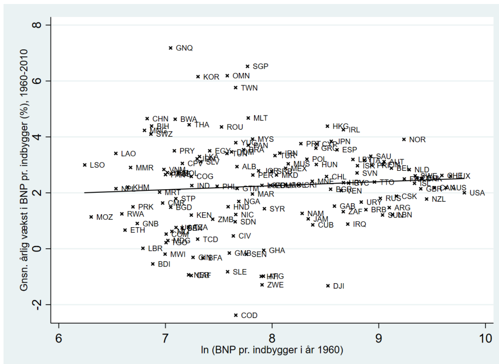
Figur 1 nedenfor angiver den simple relation mellem den gennemsnitlige årlige vækstrate i BNP pr. indbygger fra 1960 til 2010 og logaritmen til BNP pr. indbygger i 1960 for 147 lande. Figur 2 (også nedenfor) angiver den samme type simple relation for de samme lande, men for perioden 2000 til 2010. De rette tendenslinjer i figurerne fremkommer ved at estimere følgende ligninger vha. "ordinary least squares (OLS)":

$$\frac{\ln y^i_{2010} - \ln y^i_{1960}}{50} = \beta_1 - \beta_2 \ln y^i_{1960} + \varepsilon^i_{1960}, \tag{1}$$

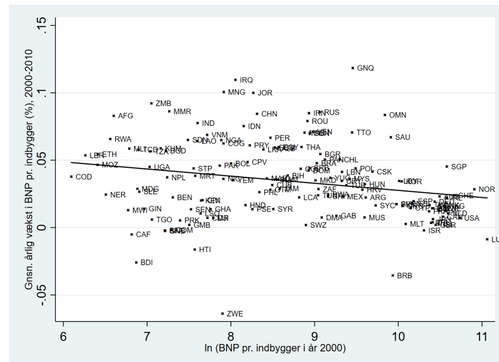
$$\frac{\ln y^i_{2010} - \ln y^i_{2000}}{10} = \beta_3 - \beta_4 \ln y^i_{2000} + \varepsilon^i_{2000,} \tag{2}$$

hvor y^i angiver BNP pr. indbygger for land i i år = 1960, 2000 eller 2010. Her findes der bl.a. følgende resultater: $\hat{\beta}_2 = -0,001$ med et 95%-konfidensinterval = $[-0,003; 0,001]$ og

$\hat{\beta}_4 = 0,005$ med et 95%-konfidensinterval $= [0,002; 0,008]$. Diskukter hvad disse resultater betyder for hypotesen omkring *ubetinget konvergens.*



Figur 1



Figur 2

Svar:

Figur 1 fortæller os, at der ikke er nogen ubetinget sammenhæng mellem initial indkomstniveau og efterfølgende vækst (målt over perioden 1960-2010). Dette ses også ved β_2 er lille og ikke signifikant forskellige fra nul (95% konfidensintervallet indeholder værdien nul). Denne type evidens understøtter ikke hypotesen omkring ubetinget konvergens. På den anden side er Figur 1 heller ikke nok til at konkludere, at der er betinget konvergens. Dog ved vi fra pensumbogen kapitel 2, at der generelt set er stærk evidens for betinget konvergens over denne periode.

Figur 2 fortæller os der er en (svag) negative og statistisk signifikant sammenhæng mellem initial indkomstniveau og efterfølgende vækst målt over perioden 2000 til 2010. Dette kan ses ved β_4 og dens konfidensinterval. I princippet understøtter denne type evidens hypotesen omkring ubetinget konvergens. Det kan dog diskuteres om perioden er lang nok ($\sim$10 år) til at konkludere dette, eftersom resultatet formenligt er følsom overfor mere kortsigtede konjunkturbevægelser (såsom finanskrisen).

1.3

Givet et "fattigt" land i tidspunkt $t = 0$ har et niveau af BNP pr. indbygger, der svarer til 10% af BNP pr. indbygger i et "rigt" land ($y^{poor}/y^{rich} = 0,1$), hvor mange år (t) tager det før det fattige land har 90% af BNP pr. indbygger i det rige land ($y^{poor}/y^{rich} = 0,9$), hvis det bruges at

$\beta_4 = 0,005$. Kommenter på dit svar i relation til hvor "kraftfuldt" det ubetingede-konvergens resultat i Figure 2 er.

Svar:

Fra 1.2 har vi fx at sammenhængen mellem årlig vækst over en periode ($t = 0$ til t) og det initial indkomst niveau er givet ved

$$\begin{aligned} \frac{\ln y_t - \ln y_0}{t} &= \beta_3 - \beta_4 \ln y_0 \Leftrightarrow \\ \ln y_t &= \ln y_0 + t\beta_3 - t\beta_4 \ln y_0 \Leftrightarrow \\ \ln y_t &= t\beta_3 + (1 - t\beta_4) \ln y_0. \end{aligned}$$

Dette er niveauet af BNP pr. indbygger i år t givet initial niveauet af BNP pr. indbygger i år $t = 0$. Vi vil nu gerne have, at det fattige land har 90% af indkomsten i det rige lande på et hypotetisk tidspunkt t; dvs. $\ln y_t^{poor} - \ln y_t^{rich} = 0,9$ og vi ved at den initiale indkomst forskel er $\ln y_0^{poor} - \ln y_0^{rich} = 0,1$. Derfor trækkes ovenstående ligning for det rige land fra dette fattige land:

$$\ln y_t^{poor} - \ln y_t^{rich} = (1 - t\beta_4)\left(\ln y_0^{poor} - \ln y_0^{rich}\right)$$

Nu kan vi indsætte værdier og isolere t ud af dette udtryk:

$$\begin{aligned} \ln 0,9 &= (1 - t\beta_4) \ln 0,1 \Leftrightarrow \\ t &= \frac{\frac{\ln 0,9}{\ln 0,1} - 1}{-\beta_4} \end{aligned}$$

Hvis $\beta_4 = 0,005$ fås det at $t = 190,85$ år. Dvs. selvom om Figur 2 skulle være udtryk for rigtig støtte til ubetinget konvergens, så er det under alle omstændigheder meget langsom (=svag) ubetinget konvergens.

Opgave 2: Humankapital og R&D

Følgende vækstmodel gælder for en lukket økonomi:

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} (A_t L_{Yt})^{1-\alpha-\varphi},\ 0 < \alpha, \varphi < 1,\ \alpha + \varphi < 1 \tag{3}$$

$$K_{t+1} - K_t = s_K Y_t - \delta K_t,\ 0 < \delta < 1,\ 0 < s_K < 1,\ K_0 > 0 \text{ givet} \tag{4}$$

$$H_{t+1} - H_t = s_H Y_t - \delta H_t,\ 0 < \delta < 1, 0 < s_H < 1,\ H_0 > 0 \text{ givet} \tag{5}$$

$$A_{t+1} - A_t = \rho A_t^{\phi} L_{At}^{\lambda}, \rho > 0, \phi > 0, 0 \leq \lambda < 1, \tag{6}$$

$$L_{At} = s_R L_t, 0 < s_R < 1 \tag{7}$$

$$L_t = L_{At} + L_{Yt}, \tag{8}$$

$$L_{t+1} = (1+n) L_t,\ n > 0. \tag{9}$$

Ligning (3) angiver en Cobb-Douglas produktionsfunktion, der beskriver den samlede produktion (Y_t) som funktion af fysisk kapital (K_t), human kapital ($H_t \equiv h_t L_{Yt}$), produktionsarbejdere (L_{Yt}) og vidensniveauet (A_t), der bestemmer arbejdernes produktivitet. Ligningerne (4) and (5) beskriver, hvorledes fysisk kapital og human kapital udvikler sig over tid, hvor s_K (s_H) er opsparingsraten i fysisk (human) kapital og δ er nedslidningsraten. Ligning (6) angiver udviklingen i vidensniveauet, hvor A_t er udtryk for vidensbeholdningen på tidspunkt t og L_{At} er antal forskere. Den samlede befolkning er L_t, hvor andelen s_R er forskere og andelen $1 - s_R$ er produktionsarbejdere (jvf. ligningerne (7) og (8)), og befolkningen udvikler sig over tid i følge ligning (9).

Det antages, at den repræsentative virksomhed maksimerer profitten; der eksisterer faktormarkeder for fysisk kapital og arbejdskraft, men ikke noget særskilt marked for humankapital, og den offentlige sektor finansierer (indirekte) forskningssektoren. Hvis ikke andet er angivet, anvendes der følgende definitioner for pr. produktionsarbejdervariable og pr. effektiv produktionsarbejdervariable:

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_{Yt}}; k_t \equiv \frac{K_t}{L_{Yt}}; h_t \equiv \frac{H_t}{L_{Yt}}, \tag{10}$$

$$\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}; \tilde{k}_t \equiv \frac{k_t}{A_t}; \tilde{h}_t \equiv \frac{h_t}{A_t}. \tag{11}$$

2.1

De approksimative vækstrater i y_t, k_t, og h_t er defineret som henholdsvis $g_t^y \equiv \ln y_{t+1} - \ln y_t$, $g_t^k \equiv \ln k_{t+1} - \ln k_t$ og $g_t^h \equiv \ln h_{t+1} - \ln h_t$. Vis at den approksimative vækstrate i BNP pr. produktionsarbejder kan skrives som:

$$g_t^y = \alpha g_t^k + \varphi g_t^h + (1 - \alpha - \varphi)\,\hat{g}_t, \tag{12}$$

hvor $\hat{g}_t \equiv \ln A_{t+1} - \ln A_t$. Find vækstraten i BNP pr. produktionsarbejder (g_t^y) i det tilfælde, at y_t, k_t, og h_t vokser med samme hastighed.

Svar:

Start med at omkrive produktionsfunktionen til pr. produktionsarbejder og tag ln:

$$\begin{aligned}
y_t &= \frac{Y_t}{L_{Yt}} = \left(\frac{K_t}{L_{Yt}}\right)^{\alpha} \left(\frac{h_t L_{Yt}}{L_{Yt}}\right)^{\varphi} \left(A_t \frac{L_{Yt}}{L_{Yt}}\right)^{1-\alpha-\varphi} \Rightarrow \\
y_t &= k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi} \Leftrightarrow \\
\ln y_t &= \alpha \ln k_t + \varphi \ln h_t + (1-\alpha)\ln(1-s_R) + (1-\alpha-\varphi)\ln A_t.
\end{aligned}$$

Udnyt nu definitionerne af de approksimative vækstrater

$$\begin{aligned}
g_t^y &\equiv \ln y_{t+1} - \ln y_t = \alpha\left(\ln k_{t+1} - \ln k_t\right) + \varphi\left(\ln h_{t+1} - \ln h_t\right) + (1-\alpha-\varphi)\left(\ln A_{t+1} - \ln A_t\right) \Rightarrow \\
g_t^y &= \alpha g_t^k + \varphi g_t^h + (1-\alpha-\varphi)\,\hat{g}_t.
\end{aligned}$$

Hvis $g_t^y = g_t^k = g_t^h \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
g_t^y &= \alpha g_t^y + \varphi g_t^y + (1-\alpha-\varphi)\,\hat{g}_t \Leftrightarrow \\
g_t^y - \alpha g_t^y - \varphi g_t^y &= (1-\alpha-\varphi)\,\hat{g}_t \\
g_t^y &= \hat{g}_t
\end{aligned}$$

2.2

I dette delspørgsmål skal du antage, at antallet af forskere er konstant over tid (dvs. $L_{At} = L_A$) og kun betragte ligning (6). Hvordan udvikler vidensniveauet sig over tid for forskellige værdier af parameteren ϕ? Forklar hvorfor pensumbogens kapitel 9 *altid* antager $\phi \leq 1$. Hvilke argumenter taler for (og imod), at ϕ er tæt på 1 i produktionen af ny viden?

Svar:

Omskriv ligning (6) til:

$$g_t \equiv \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho A_t^{\phi-1} L_A^{\lambda}$$

1. $\phi > 1$: vækstraten i vidensniveauet (g_t) er stigende i A_t, hvilket betyder eksponentiel udvikling i $\ln A_t$. Altså vækstraten vil være stigende over tid. Det er ikke ønskeligt set ud fra et empirisk synspunkt, hvilket er grunden til at pensumbogen antager $\phi \leq 1$.

2. $\phi = 1$: vækstraten er konstant (givet antagelsen $L_{At} = L_A$), hvilket betyder lineær stigende udvikling i $\ln A_t$. Denne antagelse definerer den endogene model i pensumbogens kapitel 9. Det bemærkes at hvis befolkningen ikke er konstant, men fx følger ligning (9), vil dette betyde stigende vækst over tid.

3. $\phi < 1$: vækstraten er faldende (givet antagelsen $L_{At} = L_A$), hvilket betyder aftagende udvikling i $\ln A_t$. Denne antagelse definerer den semi-endogene model i pensumbogens kapitel 9. Det bemærkes at hvis befolkningen er konstant over tid, vil dette betyder nul vækst på lang sigt og derfor skal vi "bruge" befolkningsvækst i den semi-endogen model, såfremt vi gerne vil have positiv vækst på lang sigt.

- Nye idéer 'bygger' på gamle idéer:

  1. "Standing on shoulders" ($\Rightarrow \phi \uparrow$): fx det er MEGET nemmere at lave regressions-analyse efter computerens opfindelse.

  2. "Fishing out" ($\Rightarrow \phi \downarrow$): de nemme idéer bliver fundet først, så jo flere man "fisker op" desto sværre bliver det at opfinde nye.

2.3

Vis at modellen indebærer følgende transitionsligning for den eksakte vækstrate i vidensniveauet:

$$g_{t+1} = (1 + g_t)^{\phi-1}(1 + n)^{\lambda} g_t. \tag{13}$$

Find steady-state værdien for vækstraten ($g_{se} = g_{t+1} = g_t$) og forklar hvorfor denne kun eksisterer hvis $\phi < 1$. Under antagelsen $\phi < 1$, illustrer hvordan g_t udvikler sig over tid for $g_0 > g_{se}$ i et fasediagram.

Svar:

Udled transitionsligning for vækstraten vidensniveauet:

$$\begin{aligned}
\frac{g_{t+1}}{g_t} &= \frac{\rho A_{t+1}^{\phi-1} L_{At+1}^{\lambda}}{\rho A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda}} \Leftrightarrow \\
\frac{g_{t+1}}{g_t} &= \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{L_{At+1}}{L_{At}}\right)^{\lambda} \Leftrightarrow \\
g_{t+1} &= (1 + g_t)^{\phi-1} (1 + n)^{\lambda} g_t
\end{aligned}$$

Steady-state findes:

$$\begin{aligned}
1 &= (1 + g_{se})^{\phi-1} (1 + n)^{\lambda} \Leftrightarrow \\
(1 + g_{se})^{1-\phi} &= (1 + n)^{\lambda} \Leftrightarrow \\
g_{se} &= (1 + n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1
\end{aligned}$$

Hvis $\phi = 1$ og antal vidensarbejdere vokser over tid (som den gør i udgangspunktet i denne model), vil vækstraten i viden være stigende i vidensniveauet (=eksplosiv vækst) og en steady-state for vækstraten findes dermed ikke.

Herefter kan man illustrerer hvordan vækstraten udvikler sig over tid vha. trappeiteration oppefra (ift. steady-state) i det sædvanlige fasediagram med g_t ud ad 1. aksen og g_{t+1} op ad 2. aksen og 45-graders linjen hvor $g_t = g_{t+1}$. Transitionsligningen givet i ligning (13) er konkav stigende i dette diagram og steady-state er unik og global stabil.

2.4

Vis at transitionsligningerne for fysisk kapital pr. effektiv produktionsarbejder og human kapital pr. effektiv produktionsarbejder kan skrives som henholdsvis:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right), \tag{14}$$

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}\left(s_H \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right). \tag{15}$$

Hvordan påvirker andelen af befolkningen, som arbejder i R&D-sektor human kapital pr. effektiv produktionsarbejder? Begrund dit svar.

Svar:

I den vejledende besvarelse vises kun hvordan (14) udledes (udligningen af 15 foregår på samme måde). Omskriv ligning (4) til pr. effektiv produktionsarbejder:

$$\begin{aligned}
\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{Yt+1}} &= \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}\left(s_K \frac{Y_t}{A_t L_{Yt}} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_t L_{Yt}}\right) \Leftrightarrow \\
\tilde{k}_{t+1} &= \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}\left(s_K \tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t\right)
\end{aligned}$$

indsæt pr. effektiv produktionsarbejder produktionensfunktionen

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right)$$

Da vi arbejder med variable skaleret med antal produktionsarbejdere har s_R ingen påvirkning på $\tilde{h}_t$ ($\tilde{y}_t$ eller $\tilde{k}_t$). Den matematiske grund til dette er, at produktionsfunktionen i ligning (3) udviser konstant skalaafkast.

2.5

I dette delspørgsmål skal du starte med at analysere grafisk (i et fasediagram), hvordan kapital pr. effektiv produktionsarbejder ($\tilde{k}_t$) og human kapital pr. effektiv produktionsarbejder ($\tilde{h}_t$) udvikler sig over tid fra $t = 0$. Udover de angivne parametre restriktioner ved ligningerne (3)-(9), skal du antage $\phi < 1$, $g_0 < g_{se}$, $\tilde{h}_0 < \tilde{h}^*$ og $\tilde{k}_0 < \tilde{k}^*$ i din analyse. Vis herefter at BNP pr. produktionsarbejder i steady state kan skrives som:

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s_K}{n + g_{se} + \delta + ng_{se}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\varphi-\alpha}} \left(\frac{s_H}{n + g_{se} + \delta + ng_{se}}\right)^{\frac{\varphi}{1-\varphi-\alpha}}, \tag{16}$$

Svar:

Her skal analyseres et system af tre differensligninger givet ved ligningerne (13)-(15). Sådanne systemer kan normalt ikke skitseres i 2D, men eftersom ligning (13) ikke afhænger af $\tilde{h}$ og $\tilde{k}$ kan denne analyseres for sig selv (som det også blev gjort i delspørgsmål 2.3). Herefter kan man analysere ligningerne (14) og (15) i et fasediagram ala pensumbogens kapitel 6, men hvor de 2 såkaldte null-clines forskydes indad så længe $g_t < g_{se}$. En grov skitse er gengivet nedenfor.

Find SS værdien for BNP. pr effektiv produktionsarbejder. Start med ligning (14):

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t &= \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t - (1+n)(1+g_t)\tilde{k}_t\right) \\
\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t &= \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (\delta + g_t + n + ng_t)\,\tilde{k}_t\right) \\
SS &: s_K \tilde{k}^{\alpha} \tilde{h}^{\varphi} = (\delta + g_{se} + n + ng_{se})\,\tilde{k} \Leftrightarrow \\
\frac{s_K(1-s_R)^{1-\alpha}}{\delta + g_{se} + n + ng_{se}} \tilde{h}^{\varphi} &= \tilde{k}^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

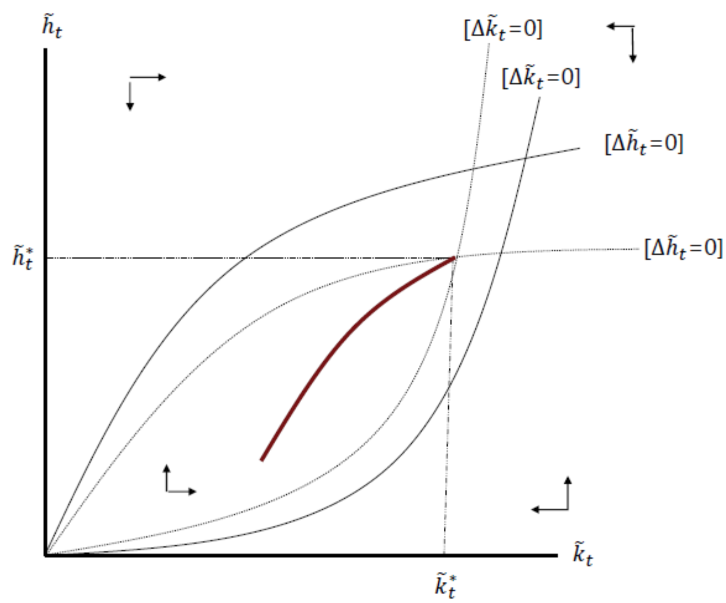
Herefter gøres det samme med ligning (15):

$$\begin{aligned}
SS &: \frac{s_H}{\delta + g_{se} + n + ng_{se}} \tilde{k}^{\alpha} = \tilde{h}^{1-\varphi} \\
\left(\frac{s_H}{\delta + g_{se} + n + ng_{se}} \tilde{k}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\varphi}} &= \tilde{h}
\end{aligned}$$

denne indsættes nu ovenfor:

$$
\begin{aligned}
\frac{s_K}{\delta + g_{se} + n + ng_{se}} \left(\frac{s_H}{\delta + g_{se} + n + ng_{se}} \tilde{k}^{\alpha} \right)^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} &= \tilde{k}^{1-\alpha} \\
\frac{s_K^{1-\alpha}}{\delta + g_{se} + n + ng_{se}} \left(\frac{s_H^{1-\alpha}}{\delta + g_{se} + n + ng_{se}} \right)^{\frac{\phi}{1-\varphi}} \tilde{k}^{\alpha \frac{\varphi}{1-\varphi}} &= \tilde{k}^{1-\alpha} \\
\left(\frac{1}{\delta + g_{se} + n + ng_{se}} \right)^{1+\frac{\varphi}{1-\varphi}} s_H^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} s_K &= \tilde{k}^{\frac{(1-\alpha)(1-\varphi)-\alpha\varphi}{1-\varphi}} \\
\left(\frac{1}{\delta + g_{se} + n + ng_{se}} \right)^{\frac{1}{1-\varphi}} s_H^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} s_K &= \tilde{k}^{\frac{1-\varphi-\alpha}{1-\varphi}} \\
\left(\frac{s_H^{\varphi} s_K^{1-\varphi}}{\delta + g_{se} + n + ng_{se}} \right)^{\frac{1}{1-\varphi-\alpha}} &= \tilde{k}
\end{aligned}
$$

Herefter findes $\tilde{h}$ og begge indsættes i $\tilde{y}^* = \left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha} \left(\tilde{h}^*\right)^{\varphi}$



2.6

Forsæt med antagelsen $\phi < 1$ og udled først steady-state vækstbanen for *BNP pr. indbygger* ($\hat{y}_t^* \equiv Y_t/L_t$). Diskuter herefter hvordan andelen af forskere påvirker den langsigtede levestandard i økonomien. Er det altid ønskværdigt med flere forskere, når ϕ stiger i værdi?

Svar:

Først bemærkes det at steady-state vækstbanen for *BNP pr. indbygger* ønskes udledt. Vi skal derfor starte med at finde ud af hvordan BNP pr. indbygger hænger sammen med BNP pr. produktionsarbejder. Vi ved at $\hat{y}_t^* L_t = Y_t$ og $y_t^* L_{Yt} = Y_t$, hvilket kombineres nu:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t^* L_t &= y_t^* L_{Yt} \\
\hat{y}_t^* &= y_t^* \frac{L_{Yt}}{L_t} \\
\hat{y}_t^* &= y_t^* (1 - s_R)
\end{aligned}$$

og vi ved at $\tilde{y}^* A_t \equiv y_t^*$, hvilket også kan indsættes:

$$\hat{y}_t^* = \tilde{y}^* A_t (1 - s_R)$$

Nu findes A_t i SS-vækstbanen. Start med:

$$\begin{aligned}
g_{se} &= \rho A_t^{\phi - 1} (s_R L_t)^\lambda \Leftrightarrow \\
A_t &= \left(\frac{\rho}{g_{se}} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} L_t^{\frac{\lambda}{1-\phi}}
\end{aligned}$$

Indsæt nu $L_t = (1+n)^t L_0$:

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_{Rt}^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \left((1+n)^t L_0 \right)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

nu kan det udnyttes at $g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1 \Leftrightarrow (1+n) = (1+g_{se})^{\frac{1-\phi}{\lambda}}$:

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

og indsæt denne i $\hat{y}_t^* = \tilde{y}^* A_t (1 - s_R)$:

$$\hat{y}_t^* = \tilde{y}^* (1 - s_R) \left(\frac{\rho}{g_{se}} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}},$$

hvilket er SS-vækstbanen for BNP pr. indbygger, hvor $\tilde{y}^*$ er givet i ligning (16)

- Effekten af øge s_R? 2 effekter:

  1. Fra $(1-s_R)$: negativ, skyldes at der er færre arbejdere i produktionssektoren.
  2. Fra $s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$: positiv, skyldes at der flere arbejdere i R&D-sektor $\Rightarrow$ vidensniveauet øges.

Vi kan derfor finde en Golden Rule for s_R. Dette gøres nemt ved at tage ln til vækstbanen og differentiere mht. s_R og sæt denne lig med nul:

$$\begin{aligned}
\ln \hat{y}_t^* &= \ln \tilde{y}^* + \ln(1-s_R) + \ln\left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} + \frac{\lambda}{1-\phi}\ln s_R + \ln\left(1+g_{se}\right)^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \Rightarrow \\
\frac{\partial \ln \hat{y}_t^*}{\partial s_R} &= -\frac{1}{1-s_R} + \frac{\lambda}{1-\phi}\frac{1}{s_R} = 0 \Rightarrow \\
\frac{1}{1-s_R} &= \frac{\lambda}{1-\phi}\frac{1}{s_R} \Leftrightarrow \\
s_R &= (1-s_R)\frac{\lambda}{1-\phi} \Leftrightarrow \\
\left(\frac{1-\phi+\lambda}{1-\phi}\right) s_R &= \frac{\lambda}{1-\phi} \Leftrightarrow \\
s_R &= \frac{\lambda}{1-\phi+\lambda}
\end{aligned}$$

Det ses at forskningsandelen er stigende i ϕ, hvilket betyder, at det altid er ønskværdigt med flere forskere i økonomien, når ϕ stiger i værdi. Det skyldes at "standing-on-shoulder effekten" er stærkere for et højere ϕ.

2.7

Beskriv hvilke forudsigelser de semi-endogene og endogene vækstmodeller, der er beskrevet i pensumbogens kapitler 8 og 9, giver i sammenhængen mellem befolkningsudvikling og økonomisk vækst. Diskuter om der findes empirisk evidens, der understøtter disse forudsigelser, og hvilke indsigter disse modeller i øvrigt giver os i forståelsen af langsigtet økonomisk vækst.

Svar:
Som det også kan ses fra svaret til 2.6, så forudsiger de semi-endogene modeller følgende:

- Højere befolkningsniveau ($L_0 \uparrow$) $\Rightarrow$ højere indkomstniveau (i SS)

- Højere befolkningsvækst ($n \uparrow$) $\Rightarrow$ mere vækst i indkomsten (i SS)

De endogene modeller forudsiger følgende:

- Højere befolkningsniveau ($L_0 \uparrow$) $\Rightarrow$ mere vækst i indkomsten (i SS)
- Højere befolkningsvækst ($n \uparrow$) $\Rightarrow$ eksplosiv vækst. Dette forekommer meget urealistisk og vi antager derfor $n = 0$ i de endogene modeller

Det er svært at finde evidens for disse forudsigelser i tvær-lande empirien. Dette betyder dog ikke nødvendigvis, at vi har modelleret fx forskningssektoren forkert i kapitel 9, men at viden kan flyde frit på tværs af landegrænser og modellen forudsigelser kommer derfor aldrig til at manifestere sig i forskelle i økonomisk vækst og velstand på tværs af lande. Hvis man betragter verden som helhed, er der noget der tyder på støtte til "Højere befolkningsniveau ($L_0 \uparrow$) $\Rightarrow$ mere vækst i indkomsten (i SS)" før år 1900 og "Højere befolkningsvækst ($n \uparrow$) $\Rightarrow$ mere vækst i indkomsten (i SS)" efter år 1900.