Eksamen på økonomistudiet 2010-I

Operationsanalyse

Valgfag

25. januar 2010

4 timers prøve med hjælpemidler

Rettevejledning

OPGAVE 1: Lineær programmeringsopgave

Spørgsmål 1

Vi skal begrunde følgende model:
Minimize z = 5 x1 + 6 x2 + 8 x3 + 6 x4 + 4 x5 + 5 x6
1 x1 + 1 x2 + 1 x3 + 1 x4 + 1 x5 + 1 x6 >= 50
0.6 x1 + 0.5 x2 + 0.4 x3 + 0.4 x4 + 0.5 x5 + 0.2 x6 >= 25
0.1 x1 + 0.5 x2 + 0.1 x3 + 0.5 x4 + 0.3 x5 + 0.1 x6 >= 15
1 x1 + 1 x2 + 1 x3 - 1 x4 - 1 x5 - 1 x6 >= 0

(som kan løses via http://www.tutor-homework.com/Simplex_Tableau_Homework_Help.html)

Restriktion (1) sikrer at baren mindst vejer de krævede 50 gram. (2) sikrer at baren indeholder mindst 25 gram kulhydrat og (3) sikrer at den mindst indeholder 15 gram kostfibre. Restriktion (4) sikrer at 1 x1 + 1 x2 + 1 x3 >= 1 x4 + 1 x5 + 1 x6, dvs. at mindst halvdelen af vægten af baren stammer fra "velsmagende" ingredienser. Objektfuktionen angiver den samlede omkostning for produktion af baren.
Det kan endvidere anføres at Winstons forudsætninger om additivitet, proportionaltet, divisibilitet og forudsigelighed godt kan antages at være opfyldt.

Spørgsmål 2

Det aflæses af tableauet at x1, x2 og x5 er i basis med værdierne hhv. 12½, 12½ og 25 (gram). Baren vejer de krævede 50 gram og indeholder de krævede 15 gram kostfibre hvilket kan ses af at e1 og e3 er ude af basis – der er altså ikke excess på de restriktioner. Det er der derimod i restriktionen for kulhydrat (e2) der har 1.25 gram excess. Dvs. baren må indeholde 26.25 gram kylhydrat. Baren koster 237.5 øre = 2,375 kr fra producere per styk.

Spørgsmål 3

Baren vejer 50 gram og koster 237,5 øre at producere. Den gennemsnitlige omkostning er altså 237,5/50 eller 4,75 øre/gram. Den marginale omkostning kan ses som skyggeomkostninger til restriktion 1. Denne kan er tableauets nederste række ses at være 4. Det ville altså være 4 øre dyrere per gram som minimumsvægten blev hævet. Det ses at de to tal ikke er ens og at en gennemsnitsbetragtning er noget andet end en marginalbetragtning.
Hvis vægtkravet øges marginalt er det alene kravet til vægten der øges – kravet til kulhydrat og kostfibre øges ikke. Kravet til "velsmagenhed" er dog fortsat relevant. For gennemsnitsomkostningen ses på det samlede problem og der er er alle restriktioner relevante (dog ikke kravet til kostfiberindhold, viser det sig).

Spørgsmål 4 (dual model)

Den duale model kan f.eks. findes ud fra de noter der er omdelt til undervisningen:

Maximize w = 50 y1 + 25 y2 + 15 y3 + 0 y4
1 y1 + 0.6 y2 + 0.1 y3 + 1 y4 <= 5
1 y1 + 0.5 y2 + 0.5 y3 + 1 y4 <= 6
1 y1 + 0.4 y2 + 0.1 y3 + 1 y4 <= 8
1 y1 + 0.4 y2 + 0.5 y3 – 1 y4 <= 6
1 y1 + 0.5 y2 + 0.3 y3 – 1 y4 <= 4
1 y1 + 0.2 y2 + 0.1 y3 – 1 y4 <= 5
y1 ≥ 0, y2 ≥ 0, y3 ≥ 0, y4 ≥ 0

Den optimale løsning kan aflæses som de duale variable til det primale problem og hedder y1=4, y2=0, y3=2.5 og y4=0.75. Den optimale objektfunktionsværdi er 237.5, ligesom for den primale model.

Spørgsmål 5

Det vides ikke om den nye ingrediens er "velsmagende" så derfor regner vi foreløbigt med at den hverken er velsmagende eller ej. Men vi konstaterer samtidig at den reducerede omkostning for velsmagende restriktionen er positiv således at velsmagenhed faktisk har en indflydelse.

Skyggeomkostningerne for vægt er 4, for kulhydrat er 0 og for kostfiber er 2.5. Samlet bidrager hver gram ny ingrediens med 1 gram til vægten, 0.3 gram til kulhydrat og 0.4 gram til kostfibre. Dette giver en samlet værdi på 4*1 + 0*0.3 + 2.5*0.4 = 5. Dette svarer præcis til prisen for den nye ingrediens så vi er altså indifferente mht. at medtage den nye ingrediens. Dog kun under forudsætning af at den hverken er velsmagende eller ej. Velsmagenhed har en positiv skyggeværdi på 0.75 øre/gram mens mangel på velsmagenhed har en negativ skyggeværdi på 0.75. Samlet vil det derfor, marginalt, koste os 0.75 øre per gram af den nye ingrediens vi tilsætter hvis denne ikke er velsmagende, mens den, hvis den er velsmagende, vil sænke omkostningerne marginalt med 0.75 øre per gram der tilsættes.

OPGAVE 2: Lagermodeller

<u>Spørgsmål 1</u>

Vi har en lagermodel med stokastisk efterspørgsel, backorders og lead-time>0.
Vi har h=10, K=1000, L=1/26, c_b=20 og D ~ N(10000; 2000^2).

q* = sqrt(2*K*E(D)/h) = sqrt(2*1000*10000/10)=1414
P{x>=r*}=h*q* / (c_b * E(D)) = (10*1414)/(20*10000) = 0,0707
dvs. r* = E(X) + σ_X Φ^{-1}(1-0,0707) = 10000/26 + 2000/sqrt(26)) * 1,47 = 961,4

(da σ_X < q* er approksimationen ok)

<u>Spørgsmål 2</u>

SLM1:
NL((r*-E(X))/σ_X)=q**(1-SLM1)/ σ_X
dvs. NL((961,4-384,62)/392,23) = 1414 (1-SLM1)/392,25
dvs. NL(1,47) * 392,25/1414 = 1 – SLM1
dvs. 1 – 0,03137 * 392,25/1414 = SLM1
dvs 0,991 = SLM1 = 99,1% af kunderne får deres hjelm med det samme.

SLM2:
SLM2 = P{X>r*} * E(D)/q* = 0,0707 * 10000/1414=0,50, dvs. i gennemsnit en gang hvert andet år.

OPGAVE 3: MCNFP opgave

<u>Spørgsmål 1</u>

Det udspændende træ identificeres som kanterne (1,2), (1,4) og (1,3).
Disse giver mulighed for beregning af de duale variable:
y1 = 0
y2 = y1-c12 = 0 – 6 = -6
y3 = y1-c13 = 0 – 4 = -4
y4 = y1-c14 = 0 – 6 = -6
Derefter udregnes de reducerede omkostninger for ikke-basis variablene:
r23 = y2 – y3 – c23 = -6 - -4 – 1 = -3 (løsningen er ikke optimal da r23 < 0)
r24 = y2 – y4 – c24 = -6 - -6 – 2 = -2 (løsningen er ikke optimal da r24 < 0)
r34 = y3 – y4 – c34 = -4 - -6 – 1 = 1 (OK)

Løsningen ses at være ikke-optimal. Som ny basisvariabel vælges kanten (2,3) der har den mest negative reducerede omkostning. Sammen med kanterne (1,2) og (1,3) danner de en kreds. Orienteringen i kredsen laves i modsat retningen af kanten (2,3):

$0 <= x12 = 6 - \theta <= 7$
$0 <= x13 = 2 + \theta <= 5$
$0 <= x23 = 2 - \theta <= 2$

Det ses at θ kan vokse til 2 før en grænse nås. De nye kantstrømninger bliver dermed x12=4, x13=4 og x23=0. Iterationen har altså ikke skiftet basisvariable. Men kanten (2,3) er går fra at være ude af basis på sin øvre grænseværdi til at være ude af basis på sin nedre grænseværdi. Omkostningsændringen er $r23 * \theta = -3 * 2 = -6$.

OPGAVE 4: Blandet heltalsprogrammeringsopgave

Spørgsmål 1

Modellen udvides med binære indikatorvariable, y1 – y6, og restriktionerne x(i) <= y(i).
Vi kan sikre at modellen højest indrager 3 forskellige ingredienser ved at kræve at summen af y'erne højest er 3 og vi kan sikre at ingrediens 2 og 4 ikke anvendes samtidig ved at bruge restriktionen y2 + y4 <= 2. Samlet bliver modellen derved:

Minimize z = 5 x1 + 6 x2 + 8 x3 + 6 x4 + 4 x5 + 5 x6
1 x1 + 1 x2 + 1 x3 + 1 x4 + 1 x5 + 1 x6 >= 50
0.6 x1 + 0.5 x2 + 0.4 x3 + 0.4 x4 + 0.5 x5 + 0.2 x6 >= 25
0.1 x1 + 0.5 x2 + 0.1 x3 + 0.5 x4 + 0.3 x5 + 0.1 x6 >= 15
1 x1 + 1 x2 + 1 x3 - 1 x4 - 1 x5 - 1 x6 >= 0
x1 <= M y1
x2 <= M y2
x3 <= M y3
x4 <= M y4
x5 <= M y5
x6 <= M y6
y1 + y2 + y3 + y4 + y5 + y6 <= 3
y2 + y4 <= 2
x(i) >= 0 og y(i) binære, i = 1, 2, ..., 6

Spørgsmål 2

Relaksation er i jargonnen at se bort fra, så heltalsrelaksation er at se bort fra heltalskravene. Ideen med dette kan være at problemet derved bliver lettere at løse til optimalitet – i eksemplet fra spg. 1 haves et LP problem hvis der relakseres på heltalskravene (dvs y(i) binære erstattes med 0 <= y(i) <= 1)

Den optimale løsning til det heltalsrelakserede problem er mindst ligeså god som den optimale løsning til det oprindelige problem; man har jo blot fjernet nogle restriktioner. Den angiver dermed en nedre grænse (ved minimering) for hvor god en heltalsløsning der kan eksistere. Hvis man andetsteds fra kender en heltalsløsning (en upper bound) der er bedre end den heltalsrelakserede værdi, så ved man derfor at der ikke kan eksistere en bedre heltalsløsning i det problem der blev relakseret på. Problemet kræver dermed ikke yderligere undersøgelse. I Branch and Bound udnyttes dette til at beskære søgetræet.