~~EM~~ 2014S - 2LM løsninger ①

Opg 1

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, og da dim er det største antal lineært uafh. vektorer der kan udtages, er $n \geq 3$.

Da $u_4, u_5 \in \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$ er u_1, u_2, u_3 åbenbart en basis for U, hvorfor $\dim(U) = 3$.
I basen u_1, u_2, u_3 er $u_4 = (1,1,0)$ og $u_5 = (1,1,1)$. Da $u_1 = (1,0,0)$ ses det let at u_1, u_4, u_5 er lineært uafhængige.
Da er u_1, u_4, u_5 åbenbart 3 lin. uafh. vektorer i U, og da $\dim(U) = 3$ udgør de en basis, dvs $\text{span}\{u_1, u_4, u_5\} = U$.

2. Vi skal bestemme $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ så

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_4 + \alpha_3 u_5 \iff$$

$$u_2 + u_3 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 (u_1 + u_2) + \alpha_3 (u_1 + u_2 + u_3) \iff$$

$$u_2 + u_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) u_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) u_2 + \alpha_3 u_2 \iff$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad \wedge \quad \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad \wedge \quad \alpha_3 = 1 \iff$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \underline{\underline{(-1, 0, 1)}}$$, som er koordinaterne

3. Da $L u_1 = u_2 + u_3 = -u_1 + u_5$ (fra 2)) er

$$L \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ i basen u_1, u_4, u_5.

$N(L)$ findes ved at løse $Lx = \underline{0}$
Echolonformen for matricen L er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dvs $x_3 = t$, frivariabel
$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -t$
samt $x_1 = 0$

Dvs $N(L)$ kan skrives

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

i basen bestemt ved u_1, u_4, u_5.
Dette er alle vektorer af formen

$$v = 0u_1 - tu_4 + tu_5 = t(u_5 - u_4), \quad t \in \mathbb{R}$$

om man vil. Dette er smart, idet $u_5 - u_4 = u_3$
så $N(L) = \text{span}\{u_3\}$, men $(*)$ er fyldestgørende.

4. Da $N(L) = \text{span}\{u_3\}$ er $Lu_3 = \underline{0}$.
(Ellers: $Lu_3 = L(u_5 - u_4) = Lu_5 - Lu_4 = u_1 - u_1 = \underline{0}$)

Opg 2

1. $\det(A_s - \lambda E) = ((1-\lambda)^2 - 9)(s-\lambda) = 0$

Heraf fås, at $\underline{s = \lambda}$ eller $\underline{\lambda = 4}$ eller $\underline{\lambda = -2}$.
Hvis alle egenværdierne skal være forskellige skal $\underline{s \neq 4}$ og $\underline{s \neq -2}$, dvs $s \in \mathbb{R} \setminus \{4, -2\}$.

2. Da A_s er sym. med tre forskellige egenværdier, er alle egenvektorerne ortogonale. Det ses umiddelbart at egenrummet V_s er givet ved

$$V_s = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

V_4:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

idet $\underline{s-4 \neq 0}$. Så er

$$V_4 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Da $V_{-2} \perp V_4$ og $V_{-2} \perp V_s$ fås

$$V_{-2} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Da A_s er symmetrisk ved vi fra spektralsætningen at

$$D = Q^T A Q$$

hvor $D = \text{diag}[4, -2, s]$ og Q er en ortogonal matrix med de normerede egenvektorer som søjler, i tilsvarende rækkefølge som egenværdierne i D. Endvidere er $Q^T = Q^{-1}$ da Q er ortogonal.

Heraf fås at $A = QDQ^T$, og $f(A)$ er da defineret som

$$f(A) = Q\, f(D)\, Q^T, \text{ hvor}$$

$$f(D) = \text{diag}[f(4), f(-2), f(s)], \text{ hvor}$$

f er defineret på $\sigma(A) = \{4, -2, s\}$.

Her er så

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og}$$

$$f(D) = \begin{bmatrix} f(4) & 0 & 0 \\ 0 & f(-2) & 0 \\ 0 & 0 & f(s) \end{bmatrix}$$

Vi får

$$f(D)\,Q^T = \begin{bmatrix} f(4)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & f(4)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ f(-2)\,\frac{1}{\sqrt{2}} & f(-2)\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & f(s) \end{bmatrix}$$

så

$$f(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(4)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & f(4)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ f(-2)\frac{1}{\sqrt{2}} & f(-2)\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & f(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(f(4)+f(-2)) & \frac{1}{2}(f(4)-f(-2)) & 0 \\ \frac{1}{2}(f(4)-f(-2)) & \frac{1}{2}(f(4)+f(-2)) & 0 \\ 0 & 0 & f(5) \end{bmatrix}$$

4. $\det f(A_s) = \det(Q f(D) Q^T) = \cancel{\det(Q)\det}$

$= \det(Q)\det(f(D))\det(Q^T)$

$= \det(f(D)) = \cancel{f(\ldots)} \underline{f(4)f(-2)f(5)}$

idet $\det(Q)\det(Q^T) = \det(QQ^T) = \det E = 1.$

Opg 3

1. $\int \cos(x)\sin(2x)(\sin(3x))\,dx =$

$$\int \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{8}\int (e^{i6x}+e^{-i6x}) + (e^{i4x}+e^{-i4x}) - (e^{i2x}+e^{-i2x}) - 2\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \cos(6x) + \cos(4x) - \cos(2x) - 2 \; dx$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\sin(6x) + \frac{1}{4}\sin(4x) - \frac{1}{2}\sin(2x) - 2x\right) + k$$

$$= -\frac{1}{24}\sin(6x) - \frac{1}{16}\sin(4x) + \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + k$$

2.

Skriv $z = x + iy$. Da er $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

Så skal

$$x^2 - y^2 = -4 \quad \text{og} \quad 2xy = -4.$$

Da hverken x eller y er 0, fås $y = -\frac{2}{x}$

som indsættes:

$$x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -4 \iff$$

$$x^4 + 4x^2 - 4 = 0$$

Heraf fås $x^2 = -2 + 2\sqrt{2}$ (da x er reel)

hvorfor $x = \pm\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}$

Løsningerne er så

$$z_1 = \sqrt{-2 + 2\sqrt{2}} + i\left(\frac{-2}{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}\right)$$

$$z_2 = -\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}} + i\left(\frac{-2}{-\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}\right)$$

Dette kan skrives pænere hvis man vil.

Opg 4

1. f er veldefineret for $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$.

Dette er ækvivalent med

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 < 1 \iff$$

$$x^2 < (x-1)^2 \iff$$

$$x^2 < x^2 - 2x + 1 \iff$$

$$\underline{x < \tfrac{1}{2}}$$

f er veldefineret for $\underline{\underline{x < \frac{1}{2}}}$.

2. For $x < \frac{1}{2}$ ved vi at

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x-1-x} = \underline{1-x}$$

Da er $f(x) = 1 - x$, $x \in \left]-\infty; \tfrac{1}{2}\right[$

3. Da f er åbenlyst monotont aftagende er f injektiv

4. Da $f(x) \to \frac{1}{2}$ for $x \to \frac{1}{2}^-$, og ~~og~~ $f(x) \to \infty$ for $x \to -\infty$, fås, idet f er <u>kontinuert</u> at

$$Vm(f) = \left]\tfrac{1}{2}, \infty\right[.$$

5. For $\underline{y > \frac{1}{2}}$ fås $1 - x = y \iff$

$$\underline{\underline{x = 1 - y}}$$