Eksamen på Økonomistudiet sommer 2019

Matematik B

29. august 2019

(3-timers prøve med skriftlige hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 3 sider incl. denne forside.
Til dette eksamenssæt hører 0 bilag.

Syg under eksamen:

Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du

- kontakte en eksamensvagt for at få hjælp til registreringen i systemet som syg og til at aflevere blankt
- forlade eksamen
- kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest 5 dage efter eksamensdagen.

Pas på, du ikke begår eksamenssnyd!

Det er eksamenssnyd, hvis du under prøven

- Bruger hjælpemidler, der ikke er tilladt
- Kommunikerer med andre eller på anden måde modtager hjælp fra andre
- Kopierer andres tekster uden at sætte citationstegn eller kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen tekst
- Bruger andres idéer eller tanker uden at kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen idé eller dine egne tanker
- Eller hvis du på anden måde overtræder de regler, der gælder for prøven

Du kan læse mere om reglerne for eksamenssnyd på Din Uddannelsesside og i Rammestudieordningens afs. 4.12.

Opgave 1

Betragt følgende matricer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Udregn determinanten af matricen A.

(b) Opskriv den til B transponerede matrix B^t, og bestem matrixproduktet $B^t A$.

(c) Udregn determinanten af matrixproduktet $B^t A$, altså $\det(B^t A)$.

(d) Vis, at $\lambda = 1$ er en egenværdi for B, og bestem alle øvrige egenværdier for B.

(e) Bestem egenrummet hørende til egenværdien $\lambda = 1$ for B.

Opgave 2

Betragt følgende differentialligning:

$$\frac{dx}{dt} = -6t^2x^2 .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen, altså alle maksimale løsninger.

(b) Bestem den maksimale løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, der opfylder betingelsen

$$\tilde{x}(1) = \frac{1}{4} .$$

Opgave 3

Betragt følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

(a) Opskriv den udvidede koefficientmatrix (totalmatricen) for ligningssystemet.
Omdan denne matrix til en echelonmatrix ved anvendelse af rækkeoperationer.

(b) Bestem alle løsninger til ligningssystemet.

(c) Betragt mængden af alle løsninger $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ til ligningssystemet. Er denne mængde et underrum af vektorrummet $\mathbb{R}^4$? Begrund dit svar.

Opgave 4

Lad $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \text{ og } y > 0\}$ og betragt funktionerne $f, g : S \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \quad \text{for alle } (x, y) \in S$$

og

$$g(x, y) = xy \quad \text{for alle } (x, y) \in S.$$

(a) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for f i ethvert punkt $(x, y) \in S$.
Vis, at f er konkav.

(b) Afgør, om g er kvasikonkav. Begrund dit svar.

(c) Afgør, om g er konkav. Afgør også, om g er konveks. Begrund dine svar.