Skriftlig eksamen i Matematik A. Sommeren 2015

Fredag den 7. august 2015

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 S-1A rx

Skriftlig eksamen i Matematik A

Fredag den 7. august 2015

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Uegentlige integraler.

Lad $a \in \mathbf{R}$ være et fast valgt tal. Vi betragter et interval $[a, \infty[\subset \mathbf{R}$ og en kontinuert funktion $f : [a, \infty[\to \mathbf{R}$.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at det uegentlige integral

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

er konvergent med værdien V.

(2) Undersøg, om de uegentlige integraler

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \;\text{ og }\; \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

er konvergente, og angiv i bekræftende fald værdien.

(3) Vis, at de uegentlige integraler

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx \;\text{ og }\; \int_0^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$$

er konvergente, og bestem deres værdier.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x + xy + x^2y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at punktet $(0, -1)$ er et stationært punkt for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Afgør, om det stationære punkt $(0, -1)$ er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Opgave 3. For ethvert $a > 0$ betragter vi den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{a + x^2} \right)^n .$$

(1) Godtgør, at den uendelige række er konvergent for ethvert $x \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, hvor udsagnet

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{a + x^2} \right)^n$$

er opfyldt. (Funktionen f er sumfunktionen for den givne uendelige række.)

(3) Bestem den afledede funktion f', og bestem derefter monotoniintervallerne for f.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

(5) Bestem elasticiteten f^{ϵ} for funktionen f.