Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 S-1B rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 20. august 2013

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ betragter vi den symmetriske 3×3 matrix

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} u & v & 1 \\ v & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten $\det\Big(A(u, v)\Big)$ for vilkårlige $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, og bestem de $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, for hvilke matricen $A(u, v)$ er regulær.

Løsning. Ved fx at anvende Sarrus' regel finder vi, at $\det\Big(A(u, v)\Big) = -u$, så matricen $A(u, v)$ er regulær, netop når $u \neq 0$.

(2) Bestem egenværdierne for matricen $A(0, v)$.

(Her er $u = 0$.)

Løsning. Matricen $A(0, v)$ har det karakteristiske polynomium

$$P_v(t) = \det\Big(A(0, v) - tE\Big) = \det\begin{pmatrix} -t & v & 1 \\ v & -t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} =$$

$$(-t)^3 + t + v^2 t = -t^3 + t(1 + v^2) = t\Big(-t^2 + (1 + v^2)\Big),$$

og vi ser, at de karakteristiske rødder, og dermed egenværdierne for $A(0, v)$ er

$$t_1 = 0,\ t_2 = -\sqrt{1 + v^2} \text{ og } t_3 = \sqrt{1 + v^2}.$$

(3) Vis, at matricen $A(0, v)$ er indefinit for ethvert $v \in \mathbf{R}$.

Løsning. Da matricen $A(0, v)$ har både en negativ og en positiv egenværdi for ethvert $v \in \mathbf{R}$, er den indefinit.

(4) Bestem egenværdierne for matricen $A(u, 0)$.
(Her er $v = 0$.)

Løsning. Matricen $A(u, 0)$ har det karakteristiske polynomium

$$P_u(t) = \det\Big(A(u,0) - tE\Big) = \det\begin{pmatrix} u-t & 0 & 1 \\ 0 & u-t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} =$$

$$(u-t)^2(-t) - (u-t) = (u-t)\Big((u-t)(-t) - 1\Big) =$$

$$(u-t)\Big(t^2 - ut - 1\Big),$$

og vi ser, at de karakteristiske rødder, og dermed egenværdierne for $A(u, 0)$, er

$$t_1 = u \text{ og } t_{2,3} = \frac{u \pm \sqrt{u^2+4}}{2},$$

så

$$t_1 = u,\ t_2 = \frac{u + \sqrt{u^2+4}}{2} \text{ og } t_3 = \frac{u - \sqrt{u^2+4}}{2}.$$

(5) Vis, at matricen $A(u, 0)$ er indefinit for ethvert $u \in \mathbf{R}$.

Løsning. Da matricen $A(u, 0)$ har både en negativ og en positiv egenværdi for ethvert $u \in \mathbf{R}$, er den indefinit.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in D : f(x, y) = \ln x + e^y + xy.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} + y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^y + x.$$

(2) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

Løsning. Da $x > 0$, er $e^y + x > 0$, hvilket viser det ønskede.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$. Vis, desuden, at $H(x,y)$ er indefinit for ethvert $(x,y) \in D$.

Løsning. Vi får, at

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 1 \\ 1 & e^y \end{pmatrix},$$

som er en symmetrisk 2×2 matrix, og vi ser da umiddelbart, at $H(x,y)$ er indefinit for ethvert $(x,y) \in D$, thi $\det H(x,y) < 0$.

Vi betragter mængden

$$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le 1\}.$$

(4) Begrund, at funktionen $g : K \to \mathbf{R}$, som er defineret ved betingelsen

$$\forall (x,y) \in K : g(x,y) = f(x,y),$$

har både et globalt maksimum og et globalt minimum på mængden K.

Løsning. Mængden K er både afsluttet og begrænset, så K er kompakt. Desuden er funktionen g kontinuert. Fra ekstremværdisætningen ved vi så, at g har både et globalt maksimum og et globalt minimum på K.

(5) Bestem de globale ekstremumspunkter for funktionen g på mængden K, og bestem de tilhørende funktionsværdier.

Løsning. Det er klart, at g ikke har nogen stationære punkter, så de globale ekstremer for g forekommer på randen af den kompakte mængde K. Vi opdeler derfor randen af K i fire rette linjestykker, som vi kalder I, II, III og IV.

Stykket I: $1 \leq x \leq 2$ og $y = 0$. Da er $g(x,0) = \ln x + 1$, som er voksende på stykket I. Vi får, at $g(1,0) = 1$ og $g(2,0) = \ln 2 + 1$.

Stykket II: $x = 2$ og $0 \leq y \leq 1$. Da er $g(2,y) = \ln 2 + e^y + 2y$, som er voksende på stykket II. Vi får, at $g(2,1) = \ln 2 + e + 2$.

Stykket III: $1 \leq x \leq 2$ og $y = 1$. Da er $g(x,1) = \ln x + e + x$, og vi ser desuden, at

$$g'_x(x,1) = \frac{1}{x} + 1 > 0,$$

så $g(x,1)$ er voksende på stykket III. Vi får, at $g(1,1) = e + 1$.

Stykket IV: $x = 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Vi ser straks, at da er $g(1,y) = e^y + y$, som er voksende på stykket IV.

Dette viser, at g har globalt minimum i $(1,0)$, og at $g(1,0) = 1$. Desuden ser vi, at g har globalt maksimum i punktet $(2,1)$, og at $g(2,1) = \ln 2 + e + 2$.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = 3t^2\big(x^2 - 1\big).$$

(1) Vis, at

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} : \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big).$$

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{x+1-x-(-1)}{(x-1)(x+1)}\Big) = \frac{1}{x^2-1}.$$

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Først bemærker vi, at $x^2 - 1 = 0$ er ensbetydende med, at $x = \pm 1$. Differentialligningen $(*)$ har derfor de to konstante løsninger

$$x = x(t) = -1 \text{ og } x = x(t) = 1,$$

hvor $t \in \mathbf{R}$.

Lad os herefter antage, at $x \neq \pm 1$. Vi får da, at

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2\Big(x^2 - 1\Big) \Leftrightarrow \frac{dx}{x^2 - 1} = 3t^2 dt \Leftrightarrow$$

$$\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big)dx = 6t^2 dt \Leftrightarrow \int \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big)dx = \int 6t^2 dt \Leftrightarrow$$

$$\ln|x-1| - \ln|x+1| = 2t^3 + c \Leftrightarrow \ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big| = 2t^3 + c \Leftrightarrow$$

$$\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big| = e^c e^{2t^3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = Ke^{2t^3} \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = xKe^{2t^3} + Ke^{2t^3} \Leftrightarrow x(1 - Ke^{2t^3}) = 1 + Ke^{2t^3} \Leftrightarrow x = \frac{1 + Ke^{2t^3}}{1 - Ke^{2t^3}},$$

hvor $c \in \mathbf{R}, K \neq 0$ og $1 - Ke^{2t^3} \neq 0$.

Hvis $K < 0$, er løsningen $x = x(t)$ defineret på hele $\mathbf{R}$.
Hvis $K > 0$, ser vi, at

$$1 - Ke^{2t^3} = 0 \Leftrightarrow e^{2t^3} = \frac{1}{K} \Leftrightarrow t^3 = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1}{K}\Big) \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\ln\sqrt{\frac{1}{K}}}.$$

I dette tilfælde er der to maksimale løsninger, hvor den ene er defineret på intervallet

$$\Big]-\infty, \sqrt[3]{\ln\sqrt{\frac{1}{K}}}\Big[,$$

og den anden er defineret på intervallet

$$\Big]\sqrt[3]{\ln\sqrt{\frac{1}{K}}}, \infty\Big[.$$

Opgave 4. Lad $n \in \mathbf{N} \setminus \{1,2,3\}$, og betragt mængden

$$U = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

og funktionen $P : U \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, i \in U : P(i) = a\Big(\frac{1}{10}\Big)^i,$$

hvor $a > 0$ er en konstant.

(1) Bestem $a > 0$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U.

Løsning. Det er klart, at $P(i) > 0$ for ethvert $i = 1, 2, \dots, n$, og for ethvert $a > 0$. Desuden ser vi, at

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = a \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{10}\Big)^i = \frac{a}{10}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = a\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{9},$$

hvoraf man ser, at P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U, netop når

$$a = \frac{9}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}.$$

(2) Bestem sandsynligheden $P(\{1,2,3\})$.

Løsning. Vi får, at

$$P(\{1,2,3\}) = \frac{9}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}\Big(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}\Big) = \frac{9}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}\,\frac{111}{1000} =$$

$$\frac{999}{1000 - 10^{3-n}}.$$

(3) Bestem sandsynligheden $P(\{4, 5, \dots, n\})$.

Løsning. Vi får straks, at

$$P(\{4,5,\dots,n\}) = 1 - P(\{1,2,3\}) = 1 - \frac{9}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}\,\frac{111}{1000} =$$

$$1 - \frac{999}{1000 - 10^{3-n}}.$$

(4) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1,2,3\}) \text{ og } \lim_{n\to\infty} P(\{4,5,\ldots,n\}).$$

Løsning. Vi finder umiddelbart, at

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1,2,3\}) = \frac{999}{1000} \text{ og } \lim_{n\to\infty} P(\{4,5,\ldots,n\}) = \frac{1}{1000}.$$