Reeksamen på Økonomistudiet sommer 2017

Makroøkonomi I

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

16. august

Dette eksamenssæt består af 7 sider (inkl. forside).

OBS: Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangsvej, skal du kontakte et tilsyn, blive registreret som syg hos denne. Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen. Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Opgave 1:

1.1

Forklar hvorfor der i de endogene og semi-endogene vækstmodeller (fra pensumkapitalerne 8 og 9) indgår såkaldte skalaeffekter. Med udgangspunkt i Figur 1, diskutér om skalaeffekter er rimelige ud fra et empirisk synspunkt.

Svar:

1)

Der indgår skalaeffekter i kapitel 8 fordi eksternaliteten afhænger af det samelede kapitalapparat $A_t = K_t^{\phi} = (k_t L_t)^{\phi}$, dvs. nu større befolkning nu mere learning-by-doing. På samme måde i kapitel 9 afhænger videns udviklingen af det samlede antal forskere, og da det samlede antal forskere er en konstant andel af befolkning (pr. antagelse), så har vi også skalaeffekter i denne model.

2)

Det er svært at begrunde skalaeffekter på basis af tværlande empiri, forstået på den måde, at der på tværs af lande ikke ser ud til at være en positiv sammenhæng ml. befolkningsstørrelse og væksten i BNP pr. arbejder. Dette ser vi også ud af Figur 1: lande som Singapore og Irland haft højere vækstrater end USA og Kina over perioden 1940-2000, fx.

En mulig grund til vi ikke ser skalaeffekter i tvær-land empirien kan være, at modellen betragter en lukket økonomi. Dvs., når vi tester modellen med virkeligheden, så antager vi, at videns spredning stopper ved landegrænsen (USA har kun glæde af ideer fra USA osv.). Så derfor er det altså meget muligt, at "virkeligheden" rummer skalaeffekter (det tyder forskningen på!), men pga. international vidensdeling vil dette ikke materialiserer sig i forskellige vækstrater på tværs af lande.

1.2

Balanceret vækst er en række historiske observationer relateret til udviklingen i økonomiske data (fx BNP pr. capita) over en meget lang tidshorisont på tværs af nogle lande. Forklar specifikt, hvad begrebet balanceret vækst indeholder. Diskuter med udgangspunkt i Figur 2 (og i relation til pensumbogens kapitel 2) om det er tilstræbelsesværdigt at få teoretiske vækstmodeller til at udvise balanceret vækst.

Svar:

1)

1. BNP pr. arbejder (eller capita), kapital pr. arbejder, forbrug pr. arbejder og reallønnen vokser alle med en og samme konstante vækstrate,

2. Arbejdsstyrken (eller befolkningen) vokser med en konstant rate, BNP, samlet forbrug og mængden af kapital vokser med fælles rate,

3. Reallejsesatsen og kapital-output forholdet er konstante.

2)

For BNP pr. capita i Frankrig, ser der ud til at være et brud i vækstraten efter WW2 (dette ses ved, at hældningen - givet ved den stiplede linje - bliver stejlere i Figur 2), hvilket ikke ligefrem er konsistent med ideen, at BNP pr. capita vokser med samme konstante rater på lang sigt. På den anden side, kan man finde lande som fx USA eller UK (jvf. kapitel 2), hvor man ikke finder sådanne markante brud i vækstraten. Så man kan sige, at hvis der ikke findes for mange eksempler som Frankrig, så er balanceret vækstbegrebet måske udemærket til at disciplinere teoretiske modeller med.

1.3

Figur 3 viser udviklingen i (log) BNP pr. capita fra år 1000 frem til i dag for forskellige regioner i verden. Den viser bl.a., at omkring den Industrielle Revolution sker der et brud i vækstraten for BNP pr. capita. Diskutér den Generelle Solowmodels (dvs. modellen i pensumbogens kapitel 5) evne til at forklare udviklingen BNP pr. capita som illustreret i Figur 3.

Svar:

Her kan man komme ind på, at Solowmodellen bygger på balanceret-vækst begrebet (jvf. spm 1.2), der bygger på observationer i data startende fra omkring den Industrielle Revolution (herfra er der for nogle lande [fx USA], der oplever konstant positiv vækst i BNP pr. capita). Det betyder, at Solowmodellen ikke er egnet til at forstå den samlede udviklingen i levestandard (=BNP pr. capita) fra år 1000 til i dag. Modellen kan ikke lige umiddelbart forklare, hvorfor der er en lang periode uden vækst, efterfulgt af en periode med mere eller mindre konstant vækst. Altså hvorfor der finder en sådan ændring sted. Man kan selvfølgelig sige, at det er lige præcis omkring den Industrielle Revolution at g går fra at være nul til positiv, men en sådan forklaring er hverken særlig appellerende eller indsigtsfuld.

Opgave 2:

Ligningerne (1)-(9) udgør en Solowmodel for en *lille* åben økonomi med frie kapitalbevægelser og endogen videns/teknologisk-udvikling:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_Y)^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

$$V_{t+1} = V_t + S_t,\ V_0 \text{ givet} \tag{2}$$

$$S_t = sY_t^n,\ 0 < s < 1 \tag{3}$$

$$Y_t^n = Y_t + \bar{r}F_t \tag{4}$$

$$g_t^A = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \bar{A}_t^{\mu} A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda},\ 0 < \lambda, \mu, \phi < 1,\ A_0 \text{ givet}, \tag{5}$$

$$\bar{A}_{t+1} = (1 + g^W)\bar{A}_t,\ \bar{A}_0 \text{ givet}, \tag{6}$$

$$L_{Yt} + L_{At} = L_t, \tag{7}$$

$$L_{At} = s_R L_t,\ 0 < s_R < 1, \tag{8}$$

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t,\ n > -1,\ L_0 \text{ givet}. \tag{9}$$

Ligning (1) beskriver BNP som funktion af kapital (K_t), produktionsarbejdere (L_{Yt}) og vidensniveauet (A_t), der bestemmer arbejdernes produktivitet. Ligning (2) angiver, hvorledes formuen (V_t) udvikler sig over tid. Formuen er pr. definition lig med det indenlandske kapitalapparat (K_t), samt nettofordringer på udlandet (F_t); dvs. $V_t \equiv K_t + F_t$. Den samlede opsparing i indlandet (S_t) antages at være en konstant andel ($0 < s < 1$) af nationalindkomsten (Y_t^n), jvf. ligning (3). Ligning (4) fortæller, at nationalindkomsten er lig med summen af BNP (Y_t) og rentebetalingerne fra nettofordringerne på udlandet ($\bar{r}F_t$), hvor $\bar{r}$ er den internationale realrente. Ligning (5) angiver udviklingen i (indenlandsk) vidensniveau, hvor $\bar{A}_t$ er udtryk for det *internationale* vidensniveau og L_{At} er antal (indenlandske) forskere. Parameteren μ kan fx fortolkes som graden, hvori landet er integreret i international vidensdeling. Ligningen (6) beskriver udviklingen i det internationale vidensniveau. Den samlede befolkning i indlandet er L_t, hvor andelen s_R er forskere og andelen $1 - s_R$ er produktionsarbejdere (jvf. ligningerne 7 og 8), og befolkningen udvikler sig over tid i følge ligning (9). Befolkningen antages ydermere fuldstændige immobile (dvs. ingen migration). Det antages, at den repræsentative virksomhed maksimerer profitten; der eksisterer faktormarkeder for fysisk kapital og arbejdskraft, og den offentlige sektor finansierer (indirekte) forskningssektoren. Der anvendes følgende definitionerne for variablene i pr. effektiv befolkningsenheder:

$$\tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t},\ \tilde{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t},\ \tilde{v}_t \equiv \frac{V_t}{A_t L_t},\ \tilde{y}_t^n \equiv \frac{Y_t^n}{A_t L_t}$$

2.1

Opstil den repræsentatives virksomheds profi tmaksimeringsproblem og find den inverse faktorefterspørgsel efter henholdsvist kapital og produktionsarbejdere.

Svar:

Virksomheds profitmaksimeringsproblem:

$$\max_{K,L_Y} \pi = K_t^{\alpha}(A_t L_{Yt})^{1-\alpha} - r_t K_t - w_t L_{Yt}.$$

Realrenten og reallønnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial K_t} &= \alpha K_t^{\alpha-1}(A_t L_{Yt})^{1-\alpha} - r_t = 0 \Rightarrow \\
r_t &= \alpha K_t^{\alpha-1}(A_t L_{Yt})^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\
r_t &= \alpha K_t^{\alpha-1}(A_t(1-s_R)L_t)^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\
r_t &= \alpha \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1}(1-s_R)^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\
r_t &= \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1}(1-s_R)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial L_Y} &= (1-\alpha) K_t^{\alpha} (A_t L_{Yt})^{-\alpha} A_t - w_t = 0 \Rightarrow \\
w_t &= (1-\alpha) K_t^{\alpha} (A_t(1-s_R)L_t)^{-\alpha} A_t \Leftrightarrow \\
w_t &= (1-\alpha) \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} (1-s_R)^{-\alpha} A_t \Leftrightarrow \\
w_t &= (1-\alpha) \tilde{k}_t^{\alpha} (1-s_R)^{-\alpha} A_t
\end{aligned}$$

2.2

Pga. antagelsen om frie kapitalbevægelser, vil den indenlandske realrente til alle tidspunkter være lig med den internationale realrente ($\bar{r} = r_t$). Vis at BNP pr. effektiv befolkning og realllønnen (til en produktionsarbejer) er givet ved:

$$
\begin{aligned}
\tilde{y} &= \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-s_R), && (10)\\
w_t &= (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t. && (11)
\end{aligned}
$$

Svar:

Fra spm 2.1 ved vi at $r_t = \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1}(1-s_R)^{1-\alpha} \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\bar{r} &= \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1}(1-s_R)^{1-\alpha} \Leftrightarrow\\
\tilde{k}_t &= \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-s_R) \Leftrightarrow\\
\tilde{k} &= \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-s_R),
\end{aligned}
$$

denne indsættes i pr.-effektiv befolknings-produktionsfunktionen:

$$
\begin{aligned}
\frac{Y_t}{A_t L_t} &= \left(\frac{K_t^\alpha}{A_t L_t}\right)^\alpha \left(\frac{A_t(1-s_R)L}{A_t L_t}\right)^{1-\alpha} \Leftrightarrow\\
\tilde{y}_t &= \tilde{k}_t^\alpha (1-s_R)^{1-\alpha} \Rightarrow\\
\tilde{y}_t &= \left(\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-s_R)\right)^\alpha (1-s_R)^{1-\alpha} \Leftrightarrow\\
\tilde{y} &= \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-s_R),
\end{aligned}
$$

og i udtrykket for realllønnen:

$$
\begin{aligned}
w_t &= (1-\alpha)\left(\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-s_R)\right)^\alpha (1-s_R)^{-\alpha} A_t \Leftrightarrow\\
w_t &= (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t
\end{aligned}
$$

2.3

Vis at modellen indebærer følgende transitionsligning for vækstraten i det nationale vidensniveau:

$$g_{t+1}^{A} = \left(1+g^{W}\right)^{\mu}(1+n)^{\lambda}\frac{g_t^A}{\left(1+g_t^A\right)^{1-\phi}}. \tag{12}$$

Vis herefter vha. relevante diagrammer, hvorledes g_t^A (for $g_0^A < g^{A^*}$) udvikler sig over tid under antagelsen, at vækstraten *altid* konvergerer mod sin steady-state værdi ($g_{t+1}^A = g_t^A = g^{A*} > 0$).

Svar:

1)

Udfra ligning (5) er vækstraten i det nationale vidensniveau givet ved:

$$g_t^A = \frac{A_{t+1}-A_t}{A_t} = \bar{A}_t^{\mu} A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda}.$$

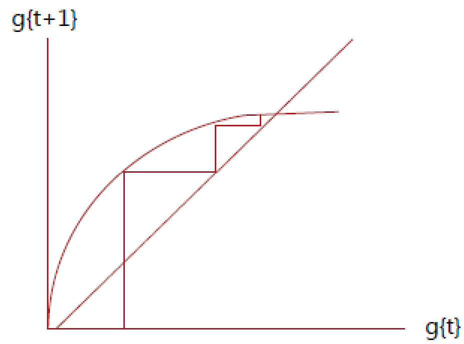
Skriv denne ligning op for t + 1 og dividér med g_t^A:

$$\begin{aligned}
\frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \frac{\bar{A}_{t+1}^{\mu} A_{t+1}^{\phi-1} L_{At+1}^{\lambda}}{\bar{A}_t^{\mu} A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda}} = \left(\frac{\bar{A}_{t+1}}{\bar{A}_t}\right)^{\mu}\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1}\left(\frac{L_{At+1}}{L_{At}}\right)^{\lambda} \Leftrightarrow \\
\frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \left(\frac{\bar{A}_{t+1}}{\bar{A}_t}\right)^{\mu}\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1}\left(\frac{L_{At+1}}{L_{At}}\right)^{\lambda} \Leftrightarrow \\
g_{t+1}^A &= \left(1+g^W\right)^{\mu}\left(1+g_t^A\right)^{\phi-1}(1+n)^{\lambda} g_t^A,
\end{aligned}$$

hvor sidste skridt bruger ligningerne (6)-(9).

2)

Dette kan fx skiteres vha det sædvanlige fasediagram:



2.4

Vis at steady-state vækstraten er givet ved:

$$g^{A*} = \left(1 + g^{W}\right)^{\frac{\mu}{1-\phi}} (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1. \tag{13}$$

Udled under hvilken betingelse, at det indenlandske vidensniveau (i steady state) vokser hurtigere end det internationale vidensniveau. Diskutér om sådan en betingelse er rimelig ift. modellens antagelser.

Svar:

1)

Steady-state værdien af vækstraten kan findes ved at droppe tidindekset i ligning (12) og løse for $g_{t+1}^A = g_t^A = g^{A*}$:

$$\begin{aligned} g^{A*} &= \left(1+g^W\right)^{\mu} (1+n)^{\lambda} \frac{g^{A*}}{(1+g^{A*})^{1-\phi}} \Leftrightarrow \\ g^{A*} &= \left(1+g^W\right)^{\frac{\mu}{1-\phi}} (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1. \end{aligned}$$

2)

Det indenlandske vidensniveau vokser hurtigere end det udenlandske, hvis:

$$\begin{aligned}
1+g^W &< 1+g^{A*} \\
\left(1+g^W\right) &< \left(1+g^W\right)^{\frac{\mu}{1-\phi}}(1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \\
\left(1+g^W\right)^{1-\frac{\mu}{1-\phi}} &< (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \\
\left(1+g^W\right)^{\frac{1-\phi-\mu}{1-\phi}} &< (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \\
\left(1+g^W\right)^{1-\phi-\mu} &< (1+n)^{\lambda} \\
\left(1+g^W\right)^{\frac{1-\phi-\mu}{\lambda}} &< 1+n \\
\left(1+g^W\right)^{\frac{1-\phi-\mu}{\lambda}}-1 &< n.
\end{aligned}$$

3)

Dette er på lang sigt **ikke** en rimelig betingelse set i relation til antagelsen om, at den indenlandske økonomi er lille ift. verden: hvis $g^{A*} > g^W$ vil den indenlandske økonomi på sigt komme til at "dominere" verden økonomisk.

2.5

Vis at udviklingen i formuen pr. effektiv befolkning kan skrives som:

$$\tilde{v}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t^A)}\left(\left(1+s\bar{r}\right)\tilde{v}_t + s(1-s_R)\left(1-\alpha\right)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right). \tag{14}$$

Under antagelserne $s\bar{r} < n + g_t^A + ng_t^A$ og $g_0^A < g^{A*}$, skitsér i et fasediagram, hvorledes formuen pr. effektiv befolkning udvikler sig. Diskutér til sidst om antagelsen $s\bar{r} < n+g_t^A+ng_t^A$ er rimelig.

Svar:

1)

Start med ligningerne (2) og (3):

$$
\begin{aligned}
V_{t+1} &= V_t + S_t, \Rightarrow \\
V_{t+1} &= V_t + sY_t^n,
\end{aligned}
$$

omskriv denne til pr. effektiv befolkning enheder vha. ligning (9) og $A_{t+1} = (1 + g_t^A)A_t$:

$$
\begin{aligned}
\frac{V_{t+1}}{L_{t+1}A_{t+1}} &= \frac{V_t}{L_{t+1}A_{t+1}} + \frac{sY_t^n}{L_{t+1}A_{t+1}} \Leftrightarrow \\
\tilde{v}_{t+1} &= \frac{1}{(1+n)(1+g_t^A)} \left(\tilde{v}_t + s\tilde{y}_t^n\right).
\end{aligned}
$$

Fra ligning (4) har vi $Y_t^n = Y_t + \bar{r}F_t = w_t L_{Yt} + \bar{r}K_t + \bar{r}F_t = w_t L_{Yt} + \bar{r}V_t \Rightarrow$

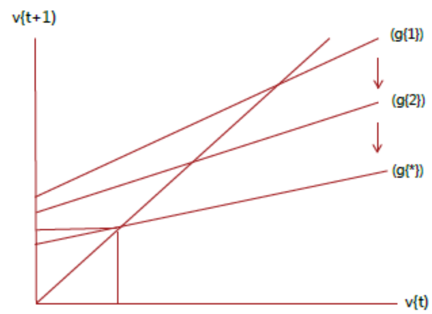
$$
\begin{aligned}
\frac{Y_t^n}{A_t L_t} &= \frac{w_t L_{Yt}}{A_t L_t} + \bar{r}\frac{V_t}{A_t L_t} \Leftrightarrow \\
\tilde{y}_t^n &= \frac{w_t}{A_t}(1 - s_R) + \bar{r}\tilde{v}_t.
\end{aligned}
$$

Dette indsættes overfor sammen med udtrykke for reallønnen i spm 2.2:

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}_{t+1} &= \frac{1}{(1+n)(1+g_t^A)} \left(\tilde{v}_t + s\left[\frac{w_t}{A_t}(1 - s_R) + \bar{r}\tilde{v}_t\right]\right) \Leftrightarrow \\
\tilde{v}_{t+1} &= \frac{1}{(1+n)(1+g_t^A)} \left(\tilde{v}_t + s\left[(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \bar{r}\tilde{v}_t\right]\right) \Leftrightarrow \\
\tilde{v}_{t+1} &= \frac{1}{(1+n)(1+g_t^A)} \left(\left(1 + s\bar{r}\right)\tilde{v}_t + s\left(1-\alpha\right)\left(1 - s_R\right)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)
\end{aligned}
$$

2)

Det vigtige er, at den studerende indser, at hældning + skæring bliver mindre som g_t^A stiger mod dens SS værdi (kun når $g_t^A = g_{t+1}^A = g^{A*}$, stopper denne bevægelse). Dette er forsøgt tegnet her:



3)

Man kan sige, at i en lukket økonomi er $r_c^* = \alpha \frac{n+g+ng}{s}$. Verden er samlet set en lukket økonomi, derfor er $\bar{r} = \frac{\bar{n}+g^W+\bar{n}g^W}{\bar{s}}$ (hvor $\bar{n}$ og $\bar{s}$ er landegennemsnitlige værdier), hvilket kan indsættes i vores "stabilitetsbetingelse":

$$\begin{aligned} \bar{r} &< \frac{n+g^{A*}+ng^{A*}}{s} \Rightarrow \\ \alpha \frac{\bar{n}+g^W+\bar{n}g^W}{\bar{s}} &< \frac{n+g^{A*}+ng^{A*}}{s}, \end{aligned}$$

hvis den indenlandske økonomi er helt "gennemsnitlig" (dvs. $\bar{n} = n$, $\bar{s} = s$, og $g^W = g^{A*}$), så svarer dette altså til $\alpha < 1$, hvilket pr. definition holder.

2.6

Vis at steady-state vækststien for national indkomsten pr. befolkning ($y_t^{n*} = \tilde{y}^{n*} A_t$) kan skrives som:

$$\begin{aligned} \ln y_t^{n*} \approx \; & \ln\left((1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R) + \bar{r}\tilde{v}^*\right) - \frac{1}{1-\phi}\ln g^{A*} + \\ & \frac{1}{1-\phi}\left(\mu \ln \bar{A}_0 + \lambda \ln s_R + \lambda \ln L_0\right) + \\ & \frac{1}{1-\phi}\left(\mu g^W + \lambda n\right) t. \end{aligned} \tag{15}$$

Vis og forklar (med vægt på intuition), hvordan denne steady-state vækststi påvirkes af en stigning i befolkningsvækstraten (n). Find til sidst det optimale niveau for s_R.

Svar:

1)

Fra ligning (5) har vi i SS (dvs. $g_{t+1}^A = g_t^A = g^{A*}$):

$$
\begin{aligned}
g^{A*} &= \bar{A}_t^{\mu} A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda} \Leftrightarrow \\
A_t^{1-\phi} &= \frac{1}{g^{A*}} \bar{A}_t^{\mu} L_{At}^{\lambda} \Leftrightarrow \\
A_t &= \left(\frac{1}{g^{A*}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \bar{A}_t^{\frac{\mu}{1-\phi}} L_{At}^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \Leftrightarrow \\
A_t &= \left(\frac{1}{g^{A*}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \bar{A}_t^{\frac{\mu}{1-\phi}} L_{At}^{\frac{\lambda}{1-\phi}}. \\
A_t &= \left(\frac{1}{g^{A*}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \bar{A}_t^{\frac{\mu}{1-\phi}} (s_R L_t)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}
\end{aligned}
$$

Indsæt nu løsningerne til: $\bar{A}_{t+1} = (1+g^W)\bar{A}_t$ og $L_{t+1} = (1+n)L_t$

$$
\begin{aligned}
A_t &= \left(\frac{1}{g^{A*}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \left((1+g^W)^t \bar{A}_0\right)^{\frac{\mu}{1-\phi}} \left(s_R(1+n)^t L_0\right)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \Leftrightarrow \\
A_t &= \left(\frac{1}{g^{A*}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \bar{A}_0^{\frac{\mu}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g^W)^{\frac{\mu}{1-\phi}t} (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}t}.
\end{aligned}
$$

Steady-state vækststien for national indkomsten pr. befolkning er givet ved:

$$
y_t^{n*} = \tilde{y}^{n*} A_t
$$

og herefter indsættes $\tilde{y}^{n^*} = \frac{w_t}{A_t}(1-s_R) + \bar{r}\tilde{v}^*$ og $w_t = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t$:

$$
\begin{aligned}
y_t^{n*} &= \left(\frac{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t}{A_t}(1-s_R) + \bar{r}\tilde{v}^*\right) A_t \Leftrightarrow \\
y_t^{n*} &= \left((1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-s_R) + \bar{r}\tilde{v}^*\right) A_t,
\end{aligned}
$$

nu indsættes udtrykket for A_t :

$$
\begin{aligned}
y_t^{n*} &= \left((1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R)+\bar{r}\tilde{v}^*\right)\left(\frac{1}{g^{A*}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \\
&\quad \bar{A}_0^{\frac{\mu}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g^W)^{\frac{\mu}{1-\phi}t} (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}t} \\
&\Leftrightarrow \\
\ln y_t^{n*} &= \ln\left((1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R)+\bar{r}\tilde{v}^*\right) - \frac{1}{1-\phi}\ln g^{A*} + \\
&\quad \frac{1}{1-\phi}\left(\mu \ln \bar{A}_0 + \lambda \ln s_R + \lambda \ln L_0\right) + \\
&\quad \frac{1}{1-\phi}\left(\mu \ln(1+g^W) + \lambda \ln(1+n)\right) t \\
&\Leftrightarrow \\
\ln y_t^{n*} &\approx \ln\left((1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R)+\bar{r}\tilde{v}^*\right) - \frac{1}{1-\phi}\ln g^{A*} + \\
&\quad \frac{1}{1-\phi}\left(\mu \ln \bar{A}_0 + \lambda \ln s_R + \lambda \ln L_0\right) + \\
&\quad \frac{1}{1-\phi}\left(\mu g^W + \lambda n\right) t
\end{aligned}
$$

2)

Her skal vi finde "golden rule" for s_R, dvs. det niveau af s_R, der maksimerer forbruget pr. befolkning, hvilket er det samme niveau, som maksimerer national indkomsten pr. befolkning. Men først findes:

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}_{t+1} &= \tilde{v}_t = \tilde{v}^* \\
\tilde{v}^* &= \frac{s(1-s_R)w^*}{g^{A*}+n+ng^{A*}-s\bar{r}},
\end{aligned}
$$

hvilket indsættes i ligning (15):

$$
\begin{aligned}
\ln y_t^{n*} &\approx \ln\left((1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R)+\bar{r}\frac{sw^*(1-s_R)}{g^{A*}+n+ng^{A*}-s\bar{r}}\right) - \\
&\quad \frac{1}{1-\phi}\ln g^{A*} + \frac{1}{1-\phi}\left(\mu \ln \bar{A}_0 + \lambda \ln s_R + \lambda \ln L_0\right) + \\
&\quad \frac{1}{1-\phi}\left(\mu g^W + \lambda n\right) t.
\end{aligned}
$$

Herefter findes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln y_t^{n*}}{\partial s_R} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\partial \ln y_t^{n*}}{\partial s_R} &= -\frac{1}{1-s_R} + \frac{\lambda}{1-\phi}\frac{1}{s_R} = 0 \Rightarrow \\
s_R\left(1-\phi\right) &= \lambda\left(1-s_R\right) \Leftrightarrow \\
s_R &= \frac{\lambda}{1-\phi-\lambda},
\end{aligned}$$

hvilket iøvrigt er den samme golden rule som i kapitel 9, hvor vi havde en lukket økonomi.

3)

Hvis $n \uparrow$ øges hældningen (dvs. vækstraten stiger). Dette skyldes, at når n stiger, så vil der komme (konstant) flere forskere til forskningssektoren og dermed mere videns vækst. Skæringen med 2. aksen vil samtidig reduceres (det ses igennem $\bar{r}\tilde{v}^*$ og$\frac{1}{1-\phi}\ln g^{A*}$ fra ligning 15). Dette skyldes øget udtynding, da væksten i viden nu er steget.

2.7

Antag nu, at ligning (5) erstattes med:

$$g_t^A = \bar{A}_t^{\mu} A_t^{\phi-1}\left(s_w w_t\right)^{\lambda},\ 0 < \lambda, \mu, \phi < 1,\ A_0 \text{ givet.} \tag{16}$$

Det vil sige, at forskningssektoren nu er afhængig af (bl.a.), hvor mange resurser (som an andel, $0 < s_w < 1$, af reallønnen, w_t), der tilføres sektoren og ikke antal forskere (som sådan), hvilket betyder vi antager at $s_R = 0$. Find transitionsligning for vækstraten i det nationale vidensniveau og forklar hvordan denne udvikler sig over tid. Diskutér forskelle/ligheder mellem denne model og modellen givet ved ligningerne (1)-(9).

Svar:

1)

Ligesom i 2.3 har vi:

$$\frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} = \frac{\bar{A}_{t+1}^{\mu} A_{t+1}^{\phi-1} \left(s_w w_{t+1}\right)^{\lambda}}{\bar{A}_t^{\mu} A_t^{\phi-1} \left(s_w w_t\right)^{\lambda}} = \left(\frac{\bar{A}_{t+1}}{\bar{A}_t}\right)^{\mu} \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\lambda},$$

reallønnen er stadig givet ved $w_t = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t$, så dette indsættes:

$$\begin{aligned}
\frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \left(\frac{\bar{A}_{t+1}}{\bar{A}_t}\right)^{\mu} \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_{t+1}}{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t}\right)^{\lambda} \Leftrightarrow \\
\frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \left(\frac{\bar{A}_{t+1}}{\bar{A}_t}\right)^{\mu} \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\lambda} \Leftrightarrow \\
\frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \left(1+g^W\right)^{\mu} \left(1+g_t^A\right)^{\lambda+\phi-1} \Leftrightarrow \\
g_{t+1}^A &= \left(1+g^W\right)^{\mu} \left(1+g_t^A\right)^{\lambda+\phi-1} g_t^A.
\end{aligned}$$

Der findes en global stabil SS (dvs. konvergens) $g^{A*} > 0$, hvis:

1) Går igennem (0,0)

2) Positiv hældning for alle $g_t^A > 0$

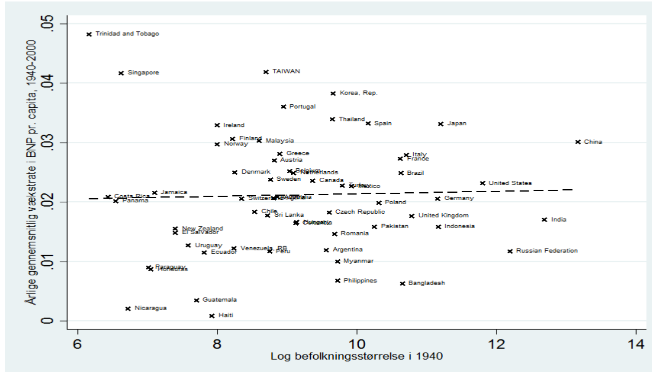
3a) $\lim_{g^A \to 0} \frac{\partial g_{t+1}^A}{\partial g_t^A} > 1$ og 3b) $\lim_{g^A \to \infty} \frac{\partial g_{t+1}^A}{\partial g_t^A} < 1$

1) holder og det kan vises, at hvis $g^W > 0$ og $\lambda + \phi < 1$, så holder 2), 3a) og 3b).

2)

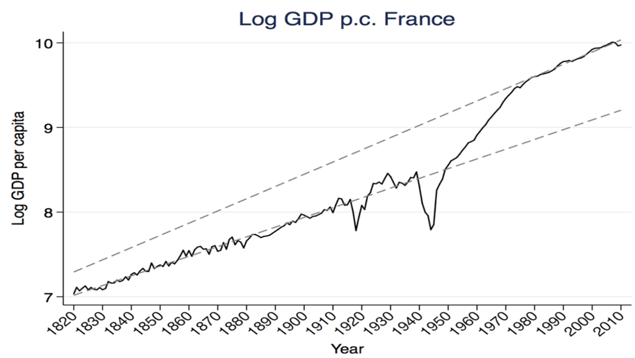
Her kan man komme ind på flere ting, men den vigtigste forskel på de to modeller er, at modellen i spm 2.7 **ikke** har skalaeffekter (dvs. $\frac{\partial \ln g_t^A}{\partial n} = 0$ og $\frac{\partial \ln y_n^*}{\partial L_0} = 0$). Det skyldes at resurser, der tilføres forskningssektoren i 2.7 er i pr. arbejder enheder (dvs. en andel af lønnen pr. arbejder, $s_w w_t$). Hvis vi alternativt fx havde i (15) $s_w w_t L_t$, så havde der været skalaeffekter tilstede.

Figur 1:



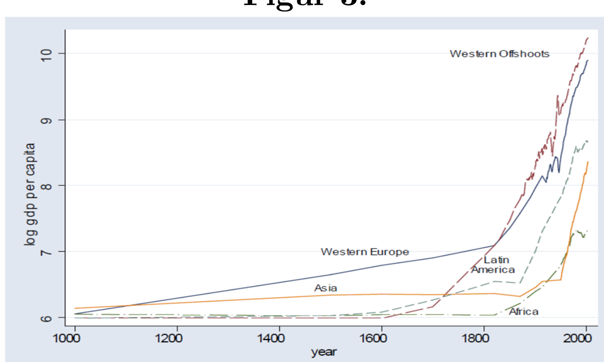
Noter: Denne figur viser sammenhængen mellem den årlige gennemsnitlige vækstrate i BNP pr. capita (over perioden 1940-2000), og (log) befolkningsstørrelse i 1940. Den stiplede linje er den bedste rette linje (OLS). Observationerne er lande.

Figur 2:



Noter: Denne figur viser udviklingen i (log) BNP pr. capita fra år 1820 til 2010 for Frankrig.

Figur 3:



Noter: Denne figur viser udviklingen i (log) BNP pr. capita fra år 1000 til 2000 for forskellige regioner i verden, fx: Vesteuropa, Asien, Vestlige offshoots (dvs. USA, Canada, osv.).