Skriftlig eksamen i Matematik B. Vinteren 2015 - 2016

Tirsdag den 12. januar 2016

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 V-1B ex

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 12. januar 2016

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & s \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

(2) Udregn for ethvert $s \in \mathbf{R}$ matricen $A(s)^2 = A(s)A(s)$.

(3) Vis, at matricen $A(0)^2$ er positiv semidefinit.

(4) Udregn det karakteristiske polynomium $P(t) = \det\big(A(s) - tE\big)$ for matricen $A(s)$.

(5) Bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ har egenværdien $t = 1$. (Der er to sådanne værdier for s).

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^2 + x^4 + y^4.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Vis dernæst, at f er strengt konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

For ethvert $a > 0$ betragter vi den funktion $g_a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g_a(x, y) = \ln(x^2 + x^4 + y^2 + y^4 + a).$$

(5) Vis, at funktionen g_a er kvasikonveks for ethvert $a > 0$.

(6) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for funktioen f gennem punktet $\big(1, 1, f(1, 1)\big)$.

Vi betragter den kompakte mængde

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \;\wedge\; 0 \leq y \leq 1\}.$$

(7) Godtgør, at funktionen f har en største- og en mindsteværdi på K, og bestem disse værdier.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + (e^t - 2)x = 9e^{-e^t + 5t}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 4e^{-1}$ er opfyldt.

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0),$$

og godtgør, at der findes et åbent interval $U(0)$ omkring 0, hvorpå løsningen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ er voksende.

Opgave 4. For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n.$$

(1) Bestem mængden

$$C = \Big\{ x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n \text{ er konvergent} \Big\}.$$

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : C \to \mathbf{R}$, som er givet ved udtrykket

$$\forall\, x \in C : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n.$$

Denne funktion er rækkens sumfunktion.

(3) Vis, at funktionen f er en løsning til differentialligningen

$$(\S\S) \qquad \frac{dy}{dx} = -2y^2,$$

og bestem dernæst den fuldstændige løsning til differentialligningen (§§).