KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 V-1B rx ret

EKSAMEN I MATEMATIK B

Tirsdag den 22. februar 2011

Rettevejledning

Opgave 1. I vektorrummet $\mathbf{R}^4$, der er forsynet med det sædvanlige indre produkt (prikproduktet), betragter vi vektoren $v = (1, 2, -1, 1)$ og den hyperplan H, der har v som normalvektor, og som går gennem punktet $P_0 = (0, 3, 5, 2)$. Desuden betragter vi den hyperplan H_0, der har v som normalvektor, og som går gennem begyndelsespunktet (origo) $O = (0, 0, 0, 0)$.

(1) Bestem en ligning for hyperplanen H, og vis, at H ikke er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

Løsning. Vi ser, at hyperplanen H er givet ved følgende:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in H \Leftrightarrow (x_1 - 0) + 2(x_2 - 3) - (x_3 - 5) + (x_4 - 2) = 0,$$

hvoraf vi finder, at

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

er en ligning for H. Da $\underline{0} \notin H$, er hyperplanen H ikke et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

(2) Bestem en ligning for hyperplanen H_0, og vis, at H_0 er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

Løsning. Vi ser, at hyperplanen H_0 er givet ved følgende:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in H_0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Da $\underline{0} \in H_0$, er hyperplanen H_0 et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

(3) Bestem vektorer a, b og c, så

$$H_0 = \text{span}\{a, b, c\}.$$

Løsning. Da

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4,$$

får vi, at

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in H_0 \Leftrightarrow$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(-2, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1).$$

Dette viser, at

$$H_0 = \operatorname{span}\{a, b, c\},$$

hvor $a = (-2, 1, 0, 0)$, $b = (1, 0, 1, 0)$ og $c = (-1, 0, 0, 1)$.

(4) Vi betragter underrummet

$$U = \operatorname{span}\{(2, 1, 1, 1), (-1, 2, 1, -1)\}.$$

Bestem mængden $M = H_0 \cap U$, og vis, at M er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

Løsning. Lad $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M = H_0 \cap U$. Der findes da to reelle tal y og z, således at

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(-2, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1) =$$
$$y(2, 1, 1, 1) + z(-1, 2, 1, -1) = (2y - z, y + 2z, y + z, y - z).$$

Vi opstiller nu matricen

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2y - z \\ 1 & 0 & 0 & y + 2z \\ 0 & 1 & 0 & y + z \\ 0 & 0 & 1 & y - z \end{pmatrix},$$

og når vi reducerer denne matrix til en echelonmatrix, får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y + 2z \\ 0 & 1 & 0 & y + z \\ 0 & 0 & 1 & y - z \\ 0 & 0 & 0 & 4y + z \end{pmatrix},$$

Vi må nu kræve, at $z = -4y$, og dermed finder vi, at

$$x = y(2, 1, 1, 1) - 4y(-1, 2, 1, -1) = y(6, -7, -3, 5).$$

Dette viser, at

$$M = H_0 \cap U = \operatorname{span}\{(6, -7, -3, 5)\}.$$

Det er klart, at mængden M er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 - xy + y^2.$$

For ethvert $v > 0$ betragter vi desuden mængden

$$A(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \,\wedge\, 0 \leq y \leq v\}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x + 2y.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette stationære punkt.

Løsning. Det er klart, at funktionen f har det ene stationære punkt $(x, y) = (0, 0)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør dernæst, om det stationære punkt er et maksimums- et minimums- eller et sadelpunkt for f. Bestem desuden funktionsværdien i det stationære punkt.

Løsning. Vi finder, at

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

for ethvert $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Da denne matrix er positiv definit (den har de ledende hovedunderdeterminanter 2 og 3), er det stationære punkt et minimumspunkt for funktionen f. Vi ser også, at $f(0, 0) = 0$.

(4) Vis, at funktionen f er strengt konveks, og bestem dernæst dens værdimængde $R(f)$.

Løsning. Da Hessematricen er positiv definit overalt på $\mathbf{R}^2$, er funktionen f strengt konveks, og det stationære punkt er derfor et globalt minimumspunkt for f. Desuden finder vi, at

$$f(x, 0) = x^2 \to \infty \text{ for } x \to \infty.$$

Heraf får vi, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [0, \infty[$.

(5) Bestem for ethvert $v > 0$ værdien $I(v)$ af integralet

$$\int_{A(v)} f(x,y)\, d(x,y).$$

Løsning. Vi finder, at $I(v) =$

$$\int_0^1 \Big(\int_0^v \big(x^2 - xy + y^2\big)\, dy\Big) dx = \int_0^1 \Big[x^2 y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3\Big]_0^v dx =$$

$$\int_0^1 \Big(x^2 v - \frac{1}{2}xv^2 + \frac{1}{3}v^3\Big)\, dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 v - \frac{1}{4}x^2v^2 + \frac{1}{3}v^3 x\Big]_0^1 =$$

$$\frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{3}v.$$

(6) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \Big(\frac{I(v)}{\sin v}\Big).$$

Løsning. Ved at anvende L'Hôpitals regel får vi, at

$$\lim_{v\to 0}\Big(\frac{I(v)}{\sin v}\Big) = \lim_{v\to 0}\Big(\frac{\frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{3}v}{\sin v}\Big) =$$

$$\lim_{v\to 0}\Big(\frac{v^2 - \frac{1}{2}v + \frac{1}{3}}{\cos v}\Big) = \frac{1}{3}.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + 4\big(\sin(2t)\big)x = 3t^2 e^{2\cos(2t)}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Idet

$$\int 4\big(\sin(2t)\big)\, dt = -2\cos(2t) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$, ser vi, at differentialligningen $(*)$ har den fuldstændige løsning

$$x = x(t) = Ce^{2\cos(2t)} + e^{2\cos(2t)} \int e^{-2\cos(2t)} e^{2\cos(2t)} 3t^2\, dt =$$

$$Ce^{2\cos(2t)} + e^{2\cos(2t)} t^3 = e^{2\cos(2t)}(C + t^3),$$

hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^3}{32}$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at

$$\tilde{x}(\frac{\pi}{4}) = C + \frac{\pi^3}{64} = \frac{\pi^3}{32}$$

medfører, at $C = \frac{\pi^3}{64}$. Derfor er

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = e^{2\cos(2t)}\Big(\frac{\pi^3}{64} + t^3\Big).$$

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}\Big(\frac{\pi}{4}\Big).$$

Løsning. Vi ser (ved at benytte den givne differentialligning $(*)$), at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}\Big(\frac{\pi}{4}\Big) + 4\frac{\pi^3}{64} = \frac{3\pi^2}{16},$$

så

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{3\pi^2}{16} - \frac{\pi^3}{16} = \frac{\pi^2(3-\pi)}{16}.$$

(4) Bestem elasiticteten

$$\mathrm{El}\tilde{x}\Big(\frac{\pi}{4}\Big).$$

Løsning. Vi ser, at

$$\mathrm{El}\tilde{x}\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{4}\frac{\frac{d\tilde{x}}{dt}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)}{\tilde{x}(\frac{\pi}{4})} = \frac{3-\pi}{2}.$$

Opgave 4. Vi betragter den symmetriske 3×3 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

og den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : K(x) = (x_1, x_2, x_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(1) Vis, at matricen A er positiv definit.

Løsning. Matricen A har de ledende hovedunderdeterminanter $D_1 = 1, D_2 = 1$ og $D_3 = 2$, hvoraf det fremgår, at A er positiv definit.

(2) Vis, at den kvadratiske form K er positiv definit, og bestem dens værdimængde $R(K)$.

Løsning. Vi ser, at

$$\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : K(x) = K(x_1, x_2, x_3) =$$

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Når matricen A er positiv defint, så er den tilhørende kvadratiske form K også positiv definit, og dermed er K en strengt konveks funktion. Da $K(0, 0, 0) = 0$ og da

$$K(x_1, 0, 0) \to \infty \text{ for } x_1 \to \infty,$$

har K værdimængden $R(K) = [0, \infty[$.

Vi betragter den kvadratiske form $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_2) = K(x_1, x_2, -x_1).$$

(3) Bestem en forskrift for den kvadratiske form L, og bestem dernæst den til L hørende symmetriske 2×2 matrix B. Vis, også, at B er positiv definit.

Løsning. Vi finder, at

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_2) = K(x_1, x_2, -x_1) =$$

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2.$$

Heraf fremgår det, at den til L hørende symmetriske 2×2 matrix B er

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

og da B er en diagonalmatrix, er det klart, at B er positiv definit.

Vi betragter matricen

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(4) Vis, at matricen Q er ortogonal.

Løsning. Da søjlerne i matricen Q er ortogonale enhedsvektorer, er Q en ortogonal matrix.

(5) Vis, at matricen $C = QBQ^t$ er symmetrisk, og bestem dens egenværdier.

Løsning. Vi ser, at $C^t = Q^{tt}B^tQ^t = QBQ^t = C$, så matricen C er symmetrisk. Ved at benytte spektralsætningen får vi, at C har egenværdien 2 med egenværdimultipliciteten 2.