Eksamen på Økonomistudiet. Vinteren 2011

MATEMATIK A

1. årsprøve

Mandag den 17. januar 2011

(2 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Vi henleder din opmærksomhed på, at du skal besvare eksamensopgaven på det sprog, som du har tilmeldt dig ved eksamenstilmeldingen. Har du tilmeldt dig fagets engelske titel, skal du besvare det engelske opgavesæt på engelsk. Har du tilmeldt dig fagets danske titel eller den engelske titel med "eksamen på dansk" i parentes, skal du besvare det danske opgavesæt på dansk.

Er du i tvivl om, hvad du har tilmeldt dig, fremgår det af printet med din tilmelding fra de studerendes selvbetjening.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 V-1A ex

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A

Mandag den 17. januar 2011

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Partiel integration. Lad I være et åbent interval og lad $f, g : I \to \mathbf{R}$ være to differentiable funktioner, der har kontinuerte afledede henholdsvis f' og g'. Lad endvidere F og G betegne stamfunktioner til henholdsvis f og g.

(1) Vis, at

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx,$$

og at

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx.$$

(2) Udregn det ubestemte integral

$$\int 3x^2 \ln(x)\,dx\,.$$

(3) Udregn det ubestemte integral

$$\int 4xe^{2x}\,dx\,.$$

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3 + 2y^4.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for f.

Opgave 3. For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{5+e^x}\Big)^n. \tag{§}$$

(1) Vis, at den uendelige række er konvergent overalt på mængden $\mathbf{R}$, altså at

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{5+e^x}\Big)^n < \infty.$$

(2) Bestem en forskrift for funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{5+e^x}\Big)^n.$$

(3) Løs ligningen $f(x) = \frac{1}{5}$.

(4) Bestem den afledede funktion f' af f, og vis, at f er aftagende.

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.