Eksamen på Økonomistudiet vinteren 2017-18
Sandsynlighedsteori og Statistik
2. årsprøve
6. januar, 2018
(3-timers prøve med hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 4 sider (forsiden inklusiv).

OBS: Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangsvej, skal du kontakte et tilsyn, blive registreret som syg hos denne. Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen. Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Opgaven består af tre delopgaver, som alle skal besvares. De tre opgaver kan regnes uafhængigt af hinanden. Opgave 1 og 2 indgår tilsammen med samme vægt som opgave 3.

Opgave 1

I denne opgave undersøges det forventede afkast på en "call option". Antag, at vi har et aktiv, som i dag har en pris på 100, men hvor der er usikkerhed om prisen på aktivet om et år. Vi antager, at prisen på aktivet om et år kan beskrives ved en kontinuert stokastisk variabel X. Vi antager, at X er ligefordelt på intervallet $[90; 120]$. Vi definerer indtjeningen som $Z = X - 100$.

1. Udregn sandsynligheden for at prisen falder, og køberen herved taber penge, $P(X < 100) = P(Z < 0)$.

2. Udregn den forventede indtjening $E(Z)$.

3. Udregn den forventede indtjening givet at indtjeningen er positiv, dvs. $E(Z|Z > 0)$.

Det er nu muligt at købe en "call option", som sikrer, at man har ret til at købe aktivet til den faste pris 100 (men man er ikke er forpligtet til at købe). Med denne "call option" kan man sikre sig mod negativ indtjening, idet man kun vil købe, hvis prisen overstiger 100. Indtjeningen, når man har en call option, er givet ved

$$Y = \max(0, Z).$$

4. Udregn den forventede indtjening når man har en "call option", $E(Y)$. Hvis prisen på en call option er 3, er det så en god ide at købe en call option? Begrund dit svar.

Opgave 2

Lad X være en stokastisk variabel der angiver om økonomien er i en krise $(X=1)$ eller ej $(X=0)$, med $P(X=0)=2/3$.

1. Find $E(X)$.

2. Under en krise gælder der at sandsynligheden for stort tab på investeringer er større end hvis der ikke er krise. Det kan formaliseres ved at indføre endnu en stokastisk variabel Y med $Y=1$ svarende til stort tab, og $Y=0$ svarende til lille tab. De to variable X og Y er ikke uafhængige, men vi kan angive:

$$\begin{aligned} P(Y=1|X=1) &= 2/3 \\ P(Y=1|X=0) &= 1/3 \end{aligned}$$

   Find $E(Y)$.

3. Find $E(Y|X=1)$.

4. Find $E(XY)$.

Opgave 3

En producent af mobiltelefoner vil undersøge *time-to-failure*, dvs. tiden til første registrerede fejl på deres telefon. Den observerede tid til første fejl (målt i måneder) for n undersøgte telefoner betegnes $\{y_i\}_{i=1}^n$. Observationerne antages at være realisationer af stokastiske variable, $\{Y_i\}_{i=1}^n$, hvor

$$Y_i \in \mathbb{Y} = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}. \tag{1}$$

Fra tidligere undersøgelser ved producenten, at *time-to-failure* kan antages at være approksimativt Weibull fordelt,

$$Y_i \overset{d}{=} \text{Weibull}(\lambda), \quad \lambda > 0, \tag{2}$$

som er karakteriseret ved tæthedsfunktionen

$$f_{Y_i}(y \mid \lambda) = 2\lambda y \exp\left(-\lambda y^2\right), \quad y \geq 0. \tag{3}$$

Det antages tillige at Y_i og Y_j er uafhængige for alle $i \neq j$.

1. Vis, at fordelingsfunktionen for Weibull-fordelingen er givet ved

$$F_{Y_i}(y \mid \lambda) = 1 - \exp(-\lambda y^2). \tag{4}$$

2. Opskriv likelihood-bidraget, $\ell(\lambda \mid Y_i)$, for den valgte model.

   Opskriv også likelihood funktionen, $L(\lambda \mid Y_1, ..., Y_n)$, og den tilsvarende log-likelihood funktion, $\log L(\lambda \mid Y_1, ..., Y_n)$. Angiv de antagelser du anvender undervejs.

3. Udled maksimum-likelihood estimatoren, $\hat{\lambda}(Y_1, ..., Y_n)$.

4. I en konkret undersøgelse har man undersøgt $n = 100$ mobiltelefoner. På baggrund af observationerne $\{y_i\}_{i=1}^{100}$ finder man at $\sum_{i=1}^{100} y_i = 674.4$ og $\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 6153.4$. Brug dette til at finde maximum likelihood estimatet, $\hat{\lambda}(y_1, ..., y_n)$.

5. Find bidraget til Hessematricen fra observation i, dvs.

$$H_i(\lambda_0) = \left. \frac{\partial^2 \log \ell\left(\lambda \mid Y_i\right)}{\partial\lambda\partial\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0},$$

   hvor λ_0 angiver den sande værdi af parameteren.

   Brug dette til at finde standardfejlen på estimatoren, $\mathsf{se}(\hat{\lambda}_n)$.

6. Det oplyses nu, at $\hat{\lambda}(y_1, ..., y_n) = 0.01625$ og $\mathsf{se}(\hat{\lambda}) = 0.001625$.

   Virksomheden er interesseret i *time-to-failure* for et *normalt* apparat, defineret som medianen af tiden til første fejl. Find *time-to-failure* for et normalt apparat når det oplyses at medianen i Weibull fordelingen er givet som $\sqrt{\log(2)/\lambda}$.

7. Test hypotesen om at *time-to-failure* for et normalt produkt, altså medianen, er 8 måneder.

8. Udregn sandsynligheden for at *time-to-failure* for et produkt er større end 10 måneder, sådan at produktet holder mindst 10 måneder før den første fejl rapporteres.