Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 V-1B rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Torsdag den 19. februar 2015

Rettevejledning

Opgave 1. Vi betragter 2×3 matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem nulrummet

$$N(B) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Løsning. Nulrummet for matricen B er

$$N(B) = \text{span}\{(-1, 0, 1)\}.$$

(2) Bestem 2×2 matricen $A = BB^T$, hvor B^T er den til B transponerede matrix, og vis, at A er positiv definit.

Løsning. Vi ser, at

$$A = BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

De ledende hovedunderdeterminanter for A er $D_1 = 6$ og $D_2 = 72$, hvoraf det fremgår, at A er positiv definit.

(3) Bestem en forskrift for den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, der er givet ved den symmetriske matrix A. Godtgør, at K er strengt konveks, og bestem værdimængden $R(K)$ for K.

Løsning. Vi får, at $K(x,y) = 6x^2 + 12xy + 18y^2$. Da Hessematricen for K er $K'' = 2A$, og da A er positiv definit, er K strengt konveks. Da $K(\underline{0}) = 0$, og da

$$K(x,0) \to \infty \text{ for } x \to \pm\infty,$$

er værdimængden $R(K)$ for K lig med $[0, \infty[$.

(4) Godtgør, at den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = \exp\big(K(x,y)\big),$$

er kvasikonveks.

Løsning. Dette er klart, da K er strengt konveks, og da eksponentialfunktionen exp er voksende.

(5) Bestem 3×3 matricen $C = B^T B$, og vis, at C er positiv semidefinit.

Løsning. Vi ser, at

$$C = B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 2 \\ 10 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Hovedunderdeterminanterne af første orden for C er 10, 4 og 10, af anden orden 36, 36 og 0 og af tredje orden 0. Dette viser, at matricen C er positiv semidefinit.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > -1\}$$

og den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,(x,y) \in D : f(x,y) = x^2 + 4xy + \ln(y+1).$$

Desuden betragter vi den funktion $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,(s,t) \in \mathbf{R}^2 : g(s,t) = \int_s^t \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x + \frac{1}{y+1}$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at $2x = -4y$, så

$$\frac{1}{y+1} = 8y \Leftrightarrow 8y^2 + 8y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Vi finder nu, at

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} > -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}-2}{4} > -1 \Leftrightarrow \sqrt{6} + 2 > 0,$$

så løsningen $y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}$ kan bruges. Desuden finder vi, at

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{6} < 2,$$

hvilket viser, at løsningen $y = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ ikke kan bruges.

Funktionen f har derfor det ene stationære punkt $\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Løsning. Funktionen f har Hessematricen

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -\frac{1}{(y+1)^2} \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums-, eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Det er klart, at Hessematricen $f''(x, y)$ er indefinit overalt på mængden D, thi dens determinant er negativ, så det fundne stationære punkt er et sadelpunkt for f.

(5) Bestem $g(s, t)$ ved at udregne det givne dobbeltintegtal, og bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \text{ og } \frac{\partial g}{\partial y}(s, t)$$

af første orden for funktionen g i et vilkårligt punkt $(s, t) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$g(s, t) = \int_s^t \Big(\int_0^1 \big(x^2 + 4xy + \ln(y+1) \big)\, dy \Big)\, dx =$$

$$\int_s^t \Big[x^2 y + 2xy^2 + (y+1)\ln(y+1) - (y+1) \Big]_0^1 dx =$$

$$\int_s^t \big(x^2 + 2x + 2\ln 2 - 1 \big)\, dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + (2\ln 2 - 1)x \Big]_s^t =$$

$$\frac{1}{3}t^3 + t^2 + (2\ln 2 - 1)t - \frac{1}{3}s^3 - s^2 - (2\ln 2 - 1)s.$$

Da finder vi, at

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) = t^2 + 2t + 2\ln 2 - 1 \text{ og } \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) = -s^2 - 2s - 2\ln 2 + 1.$$

(6) Bestem Hessematricen $g''(s, t)$ for funktionen g i et vilkårligt punkt $(s, t) \in \mathbf{R}^2$.

Vi finder, at

$$g''(s, t) = \begin{pmatrix} 2t + 2 & 0 \\ 0 & -2s - 2 \end{pmatrix}.$$

(7) Bestem mængden

$$P = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid g''(s, t) \text{ er positiv definit}\}.$$

Løsning. Hvis $g''(s, t)$ skal være positiv definit, må vi kræve, at $t > -1$ og $s < -1$.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\cos t}{5 + \sin t}\right) x = 1$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser, at

$$\int \left(\frac{\cos t}{5 + \sin t}\right) dt = \int \left(\frac{1}{5 + \sin t}\right) d(5 + \sin t) = \ln(5 + \sin t) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Ved at benytte "panserformlen" får vi herefter, at

$$x = Ce^{-\ln(5+\sin t)} + e^{-\ln(5+\sin t)} \int e^{\ln(5+\sin t)} dt =$$

$$\frac{C}{\ln(5 + \sin t)} + \frac{1}{\ln(5 + \sin t)} \int (5 + \sin t)\, dt =$$

$$\frac{C + 5t - \cos t}{5 + \sin t}, \quad \text{hvor } C \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem den maksimale løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 10$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at $\frac{C-1}{5} = 10$, så $C = 51$. Da er

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = \frac{51 + 5t - \cos t}{5 + \sin t}.$$

Opgave 4. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$$

og den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, (x, y) \in D : f(x, y) = x^2 y + \ln x.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + \frac{1}{x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

(2) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Vi har, at $f(x, 0) = \ln x$. Da værdimængden for ln er $\mathbf{R}$, er værdimængden for f også $\mathbf{R}$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$, og godtgør, at $f''(x, y)$ er indefinit og regulær overalt på mængden D.

Løsning. Funktionen f har Hessematricen

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2y - \frac{1}{x^2} & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $x > 0$, ser vi, at $\det f''(x, y) = -4x^2 < 0$ overalt på mængden D. Dette viser, at $f''(x, y)$ er indefint og regulær overalt på mængden D.