Skriftlig eksamen i Matematik B. Sommeren 2015

Tirsdag den 18. august 2015

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 S-1B rx

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 18. august 2015

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter 2×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Bestem matricen $B = AA^T$, hvor A^T er den til A transponerede matrix. Godtgør dernæst, at B er positiv definit.

(2) Bestem nulrummet

$$N(A) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = \underline{0}\}.$$

(3) Bestem nulrummet

$$N(A^T) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid A^T x = \underline{0}\}.$$

(4) Bestem mængden

$$N(A)^\perp = \{y \in \mathbf{R}^3 \mid y \perp N(A)\} = \{y \in \mathbf{R}^3 \mid \forall\, x \in N(A) : x \cdot y = 0\},$$

og godtgør dernæst, at $N(A)^\perp$ er et underrum af $\mathbf{R}^3$.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = \frac{x^2}{1 + 4y^2}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ \text{og} \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Afgør, om de stationære punkter er maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkter for funktionen f.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

(5) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1, 1, f(1,1)\big)$.

(6) Udregn dobbeltintegralet

$$I(v) = \int_0^v \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x,y)\, dy \right) dx$$

for et vilkårligt $v \in \mathbf{R}$.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningerne

$$(\S) \ \frac{dx}{dt} + 3t^2 x = 2te^{-t^3} \quad \text{og} \quad (\S\S) \ \frac{dy}{dt} = e^{t^3} x.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen (§).

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen (§§).

Opgave 4. Vi betragter mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \land y > 0\}$$

og den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^4 + \ln x - \ln y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

(2) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

(3) Bestem mængden

$$P = \{(x,y) \in D \mid f''(x,y) \text{ er positiv definit}\},$$

og godtgør, at P er konveks.

(4) Definer funktionen $\phi : P \to \mathbf{R}$ ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in P : \phi(x,y) = \exp\Big(f(x,y)\Big).$$

Vis, at ϕ er kvasikonveks. Er ϕ konveks?