Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2010

MATEMATIK B

1. årsprøve

Mandag den 16. august 2010

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes cas-værktøjer)

Vi henleder din opmærksomhed på, at du skal besvare eksamensopgaven på det sprog, som du har tilmeldit dig ved eksamenstilmeldingen. Har du tilmeldt dig fagets engelske titel, skal du besvare det engelske opgavesæt på engelsk. Har du tilmeldt dig fagets danske titel eller den engelske titel med "eksamen på dansk" i parentes, skal du besvare det danske opgavesæt på dansk.

Er du i tvivl om, hvad du har tilmeldt dig, fremgår det af printet med din tilmelding fra de studerendes selvbetjening.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2010 S-1B rx

REEKSAMEN I MATEMATIK B

Mandag den 16. august 2010

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert tal $p \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(p) = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & p \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem determinanten $\det(A(p))$ for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er regulær.

(2) Matricen $A(1)$ er regulær. Bestem den inverse matrix $A(1)^{-1}$ til $A(1)$.

(3) Bestem egenværdierne for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er positiv definit.

(5) Betragt den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, hvis tilhørende symmetriske matrix er 3×3 matricen $A(2)$.

Bestem en forskrift for den kvadratiske form K.

Betragt dernæst den kvadratiske form $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_2) = K(x_1, -x_2, x_2).$$

Bestem en forskrift for den kvadratiske form L, bestem den til L hørende symmetriske 2×2 matrix B, og godtgør, at B er indefinit.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} + x^2 + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, og vis, at funktionen f er konveks.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

(5) Betragt funktionen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : g(x,y) = x - \frac{1}{2}y.$$

Vis, at funktionen f har et betinget minimum under bibetingelsen

$$g(x,y) = 0,$$

og bestem dette betingede minimumspunkt.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(\frac{4t^3}{1+t^4}\Big)x = 21t^2.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(1) = 3$ er opfyldt.

(3) Betragt funktionen $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : y(s) = \tilde{x}(e^s).$$

Bestem grænseværdien

$$\lim_{s \to -\infty} y(s).$$

Opgave 4. For ethvert $n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, 3\}$ betragter vi mængden

$$U_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\},$$

og for ethvert $a > 0$ betragter vi desuden funktionen $P : U_n \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, i \in U_n : P(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i e^a.$$

(1) Bestem $a > 0$, udtrykt ved $n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, 3\}$, således at funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U_n.

(2) Bestem sandsynligheden $P(\{1, 2, 3\})$, udtrykt ved $n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, 3\}$, og bestem dernæst grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1, 2, 3\}).$$

(3) Bestem grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} a.$$