Rettevejledning til
Eksamen på Økonomistudiet, vinter 2015-2016
Makro I
2. årsprøve
17. december, 2015
(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Overordnet om opgaven:

I opgave 1 kan man vælge at anføre og støtte sig til nogle formelle sammenhænge, jf. nedenfor, men en fuldt verbal besvarelse er OK.

I opgave 2 er de krævede formelle udledninger relativt enkle. Udfordringerne ligger mere i fortolkningerne.

At nå frem til gode og fyldestgørende svar på *alle* delspørgsmål må anses for ganske krævende, så den højest mulige karakter skal evt. kunne opnås med mindre end som så.

Opgave 1: Hvor kommer væksten fra i henhold til Solowmodellen og i henhold til vækstregnskab?

Fra opgaven gentages $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$ samt $A_{t+1} = (1+g)A_t$.

1.1 De resterende elementer, som skal bruges her, er en antagelse om, at opsparing/investering (brutto) udgør en bestemt, eksogen andel s af produktion/indkomst, $S_t = sY_t$, kapitalakkumulationsligningen der siger, at investering netto for nedslidning skaber ny kapital, $K_{t+1} - K_t = sY_t - \delta K_t$, hvor δ er den eksogene nedslidningsrate, samt en antagelse om, at arbejdsstyrken vokser med en bestemt, eksogen rate n, dvs. $L_{t+1} = (1+n)L_t$. Hertil er der faktoraflønningsligningerne, som ikke direkte har betydning her, men som siger, at hver faktors pris er lig med dens grænseprodukt ved de tilstedeværende faktormængder, K_t og L_t.

1.2 Stabilitetsbetingelsen i modellen er $n + g + \delta + ng > 0$. Under denne konvergerer $K_t/(A_t L_t) \equiv k_t/A_t$ og $Y_t/(A_t L_t) \equiv y_t/A_t$ mod konstante, strengt positive steady state-værdier. Når økonomien er *i* steady state, må k_t derfor vokse med samme rate som A_t, dvs med rate g; ellers kunne k_t/A_t ikke være konstant. Det samme gælder for y_t. Dvs., at den gennemsnitlige vækstrate i såvel kapital per arbejder som indkomst per arbejder over en periode fra t til T, hvor økonomien er i steady state, er g. Der kan derfor være strengt positiv vækst i BNP per arbejder på langt sigt, hvis og kun hvis g er strengt positiv.

1.3 Fra produktionsfunktionen er $y_t = k_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}$. Hvis denne skrives op for hhv. periode T og t, der tages naturlig logaritme på begge sider, og de to ligninger trækkes fra hinanden og divideres med $T - t$ fås for de approksimative vækstrater

$$g^y \equiv \frac{\ln y_T - \ln y_t}{T-t} = \alpha \frac{\ln k_T - \ln k_t}{T-t} + (1-\alpha)\frac{\ln A_T - \ln A_t}{T-t} \equiv \alpha g^k + (1-\alpha)\, g^A$$

Når økonomien er i steady state, er g^y, g^k og g^A alle approksimativt lig med g (fra spørgsmål 1.2). Vækstregnskabsøvelsen siger derfor, at vækstraten g i BNP per arbejder splitter sig op i et bidrag αg hidrørende fra mere kapital per arbejder (kapitalintensivering) og et bidrag $(1-\alpha)g$ fra teknologiudvikling. Fra spørgsmål 1.2 følger, at den egentlige kilde til langsigtet vækst i BNP per arbejder entydigt er teknologisk udviking, for uden en sådan ($g = 0$), *er* der ingen langsigtet vækst i BNP per arbejder. Men *når* der er teknologsik udvikling ($g > 0$), så vil den økonomiske vækst produktionsteknisk fremtræde som hidrørende fra en blanding af kapitalintensivering og teknologisk udvikling.

Opgave 2: Harrods vækstmodel og endogen vækst

Modellen gentaget

$$Y_t = BK_t \tag{1}$$

$$S_t = sY_t \tag{2}$$

$$I_t = S_t \tag{3}$$

$$K_{t+1} - K_t = I_t \tag{4}$$

$$L_{t+1} = (1+n) L_t \tag{5}$$

2.1 Hvis man i ligning (6)

$$Y_t = B \left(K_t^d\right)^\alpha \left(A_t L_t^d\right)^{1-\alpha} \tag{6}$$

indsætter $K_t^d = K_t$ og $L_t^d = L_t$ samt

$$A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\phi \tag{7}$$

får man

$$Y_t = BK_t^\alpha \left(\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\phi L_t\right)^{1-\alpha} = BK_t^\alpha \left(K_t^\phi L_t^{1-\phi}\right)^{1-\alpha} = BK_t^\alpha K_t^{(1-\alpha)\phi} L_t^{(1-\alpha)(1-\phi)} \Leftrightarrow$$

$$Y_t = BK_t^{\alpha+\phi(1-\alpha)} L_t^{(1-\alpha)(1-\phi)} \tag{8}$$

Hvis man heri indsætter $\phi = 1$, får man $Y_t = BK_t$, altså ligning (1).

2.2 De antagne substitutionsmuligheder og den antagne prisfleksibilitet er vigtige faktorer bag (8): I periode t er de *udbudte* (tilstedeværende) mængder af kapital og arbejdskraft givne (prædeterminerede), hhv. K_t og L_t. Hvis de *efterspurgte* (anvendte) mængder i perioden, hhv. K_t^d og L_t^d, skulle afvige herfra, kunne man tænke sig, at det ville sætte prisjusteringer i gang. Hvis fx $K_t > K_t^d$ og $L_t = L_t^d$, kunne man forestille sig, at prisen på kapital (kapitallejesatsen) ville falde i forhold til prisen på arbejdskraft (reallønnen). Derved ville kapital blive billigere, og fordi kapital i henhold til (6) kan substituere for arbejdskraft, ville virsksomhedernes profitmaksimering få dem til at tage mere kapital ind. Dette kunne pågå indtil *både* $K_t = K_t^d$ *og* $L_t = L_t^d$.

2.3 Fra (1)-(4) fås successivt

$$K_{t+1} - K_t = I_t = S_t = sY_t = sBK_t \tag{*}$$

Ved at dividere på begge sider med K_t fås

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = sB$$

Vækstraten i K_t er altså konstant, sB. Da $Y_t = BK_t$, må Y_t vokse med samme rate som K_t, og da $I_t = sY_t$, må I_t vokse med samme rate som Y_t. Dvs. at K_t, Y_t og I_t alle vokser med rate

$$g_Y^* = sB \tag{9}$$

Fra (*) er

$$K_{t+1} = sBK_t + K_t$$

Ved at dividere på begge sider med $L_{t+1} = (1+n)L_t$ fås

$$k_{t+1} = \frac{sBk_t + k_t}{1+n}$$

og så ved at trække k_t fra på begge sider

$$k_{t+1} - k_t = \frac{sBk_t + k_t}{1+n} - k_t = \frac{sBk_t - nk_t}{1+n}$$

og endelig ved at dividere med k_t på begge sider

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{sB - n}{1+n}$$

Da $y_t = Bk_t$ og $i_t = sy_t$, vokser både y_t og i_t med samme rate som k_t, dvs. k_t, y_t og i_t alle vokser med fælles rate

$$g_y^* = \frac{sB - n}{1+n} \tag{10}$$

[Denne måde at udlede (10) på er bedst kendt fra faget, men det er selvfølgelig mere elegant at bruge det allerede fundne i (9) ved: Da $Y_t = y_t L_t$, er $Y_{t+1}/Y_t = (y_{t+1}/y_t)\,(L_{t+1}/L_t)$. Dvs., $1+g_Y^* = \left(1+g_y^*\right)(1+n)$ og dermed $g_y^* = (1+g_Y^*)\,/\,(1+n)-1 = (g_Y^* - n)\,/\,(1+n) = (sB-n)\,/\,(1+n)$].

2.4 Man kan fx nævne:

Der er tale om en *positiv* teori, der siger, hvad vækstraten *forventes* at blive. Det er i sig selv godt, at der overhovedet fremkommer en endogent bestemt vækstrate i A_t og y_t, altså at der overhovedet er en slags forklaring af økonomisk vækst og ikke bare en antagelse om samme (som i modeller for eksogen vækst). Man kan naturligvis diskutere, om den centrale vækstmekanisme (produktionseksternaliteter) forekommer plausibel.

Den positive sammenhæng mellem g_y^* og s samt den negative sammenhæng mellem g_y^* og n er ikke uplausible på baggrund af en hel del tværlandeempiri; det er også positivt.

Der er ikke nogen uplausibel skalaeffekt (fx eksploderende vækst i y_t og A_t for $n > 0$); det er også positivt.

Sidstnævnte egenskab hænger på formuleringen (7) af eksternaliteten som udgående fra K_t/L_t, fremfor fx fra K_t alene. Dette betyder for $\phi = 1$, at arbejdskraft er helt uproduktiv på makroplan; det er ikke plausibelt.

Modellen har ikke indkomstkonvergens, altså gradvis konvergens af vækstraten i y_t mod langsigtsraten g_y^*, idet vækstraten i y_t *hele tiden* er g_y^*; dette er mindre plausibelt set i lyset af tværlandeempiri.

Tilfældet $\phi = 1$ er en knivsæg, men det er ikke helt så kritisk, som det først kan se ud, idet det kan ses som en approksimation af ϕ mindre end, men tæt på 1, altså: Den studerede vækstproces kan ses som en approksimation af en meget langstrakt semi-endogen vækstproces.

Gentaget fra opgaven:

$$Y_t = \min\left(BK_t^d, A_t L_t^d\right) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} Y_t &= BK_t^d \quad \text{og} \qquad (12) \\ Y_t &= A_t L_t^d \qquad (13) \end{aligned}$$

2.5 Rent formelt er der ikke meget nyt. Af (12), $Y_t = BK_t^d$, og *kravet* om $K_t^d = K_t$, følger jo $Y_t = BK_t$, altså igen ligning (1). Da sammenhængene (2)-(5) fortsat antages, studerer vi altså igen hele systemet (1)-(5). Dette giver selvfølgelig de samme vækstrater som før, så K_t, Y_t og I_t må hele tiden vokse med vækstraten $g_Y^* = sB$, og k_t, y_t og i_t må hele tiden vokser med vækstraten $g_y^* = (sB - n) / (1 + n)$.

Selv om vækstraterne matematisk er de samme, er der en vigtig fortolkningsforskel. Ovenfor i 2.3 var der tale om en *positiv* teori for hvad vækstraten *forventes* at blive, mens der her er tale om en *normativ* teori for, hvad den *skal være* for, at et bestemt krav, her konstant fuld kapacitetsudnyttelse, er opfyldt.

[Oplysende parantes: Harrod var optaget af, at investeringer *både* er en del af efterspørgslen *og* skaber ny kapacitet. For at få brugt al kapaciteten kræves tilstrækkelig stor efterspørgsel, hvilket kan kræve tilstrækkeligt store investeringer, men da disse samtidig skaber endnu mere kapacitet, kan man spørge, om man overhovedes kan have et forløb, hvor faktisk produktion - som begrænset af den samlede efterspørgsel - kan følge med produktionskapiciteten. Med produktionsfunktionen (11) er Harrods svar: Ja, men kun hvis vækstraten i Y_t netop er er $g_Y^* = sB$].

2.6 Af (13), $Y_t = A_t L_t^d$, og *kravet* om $L_t^d = L_t$ følger $Y_t = A_t L_t$. Når det antages, at $L_{t+1} = (1+n)L_t$ og $A_{t+1} = (1+g)A_t$, fås

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t}\frac{L_{t+1}}{L_t} = (1+n)(1+g)$$

og dermed

$$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} - 1 = (1+n)(1+g) - 1 \equiv g_Y^n$$

som skulle vises. Fra $Y_t = A_t L_t$ fås videre, at $y_t \equiv Y_t/L_t = A_t$, så for fuld beskæftigelse må y_t vokse med samme rate som A_t, dvs. med rate $g_y^n = g$. [Harrod kaldte disse vækstrater for "naturlige", defor toptegn n].

I den af Harrod betragtede økonomi er der ikke noget, der trækker i retning af $g_Y^* = g_Y^n$ og $g_y^* = g_y^n$. Hvis man eksempelvis antog, at $g_Y^* < g_Y^n$, så ville der langs et forløb med konstant fuld udnyttelse af kapitalaparatet (hvor vækstraten jo er g_Y^*) opstå mere og mere ledig arbejdskraft (fordi vækstraten ikke ville være oppe på det for fuld beskæftigelse krævede niveau, g_Y^n). Man kunne godt forestille sig, at dette ville gøre arbejdskraften stadig billigere (relativt til kapital), men da virksomhedene ikke kan substituere arbejdskraft ind til erstatning for kapital, og kapitalen hele tiden netop er fuldt udnyttet i det betragtede forløb, er der intet, der korrigerer forløbet. Det var netop centralt i besvarelsen af spørgsmål 2.4, at pristilpasninger *og substitutionsmuligheder* medførte, at der hele tiden kunne gælde *både* $K_t = K_t^d$ *og* $L_t = L_t^d$.

Fra opgaven igen

$$\bar{Y}_t \equiv BK_t \tag{14}$$

samt $\Delta\bar{Y}_t \equiv \bar{Y}_{t+1} - \bar{Y}_t$, $\Delta Y_t \equiv Y_{t+1} - Y_t$ og $\Delta I_t \equiv I_{t+1} - I_t$.

2.7 Fra (14) er $\Delta\bar{Y}_t \equiv \bar{Y}_{t+1} - \bar{Y}_t = BK_{t+1} - BK_t = B(K_{t+1} - K_t)$ og derfor fra (4)

$$\Delta\bar{Y}_t = BI_t \tag{15}$$

Denne fortæller, at det er *niveauet for investeringerne* (netto), der er afgørende for *ændringen i produktionskapaciteten.*

Fra (2) og (3) er $Y_t = I_t/s$, hvilket skal ses som den produktion, der er efterspørgsel efter, når investeringerne er I_t,og forbrugsadfærden er giver ved s. Der følger $\Delta Y_t \equiv Y_{t+1} - Y_t = I_{t+1}/s - I_t/s$ og dermed

$$\Delta Y_t = \frac{\Delta I_t}{s} \tag{16}$$

Denne fortæller, at det er *ændringen i investeringerne*, der er afgørende for, hvilken *ændring i produktionen*, der er efterspørgselsdækning for.

Med antagelse af $\Delta Y_t = \Delta \bar{Y}_t$, haves så $\Delta I_t/s = BI_t$ og dermed $\Delta I_t/I_t = sB$, og da $Y_t = I_t/s$, vil $\Delta Y_t/Y_t = \Delta I_t/I_t = sB \equiv g_Y^*$.

Det er selvfølgelig ikke overraskende, at et *krav* om, at produktionskapacitet og faktisk produktion skal udvikle sig parallelt, altså $Y_t = \bar{Y}_t$ og dermed $\Delta Y_t = \Delta \bar{Y}_t$, fører til netop det krav til væksrraten, som vi også fandt i spørgsmål 2.5. Det er jo det samme krav om fuld kapacitetsudnyttelse, blot lidt omformuleret.

Her får vi imidlertid yderligere

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta \bar{Y}_t} = \frac{\Delta I_t}{I_t}\frac{1}{sB}$$

og dermed

$$\Delta Y_t > \Delta \bar{Y}_t \text{ hvis og kun hvis } \frac{\Delta I_t}{I_t} > sB \equiv g_Y^* \quad \text{og} \tag{17}$$

$$\Delta Y_t < \Delta \bar{Y}_t \text{ hvis og kun hvis } \frac{\Delta I_t}{I_t} < sB \equiv g_Y^* \tag{18}$$

Altså: Hvis vækstraten i investeringerne er større end sB, så vokser produktionen mere end produktionskapaciteten, dvs. der bliver mindre ledig kapacitet. Dette afspejler, at det er tælleren i $\Delta I_t/I_t$, altså ΔI_t, der afgør stigningen i produktionen, mens det er nævneren, altså I_t, der afgør stigningen i produktionskapaciteten. Omvendt gælder (af samme grund), at hvis vækstraten i investeringerne er mindre end sB, så vokser produktionen mindre end produktionskapaciteten, dvs. der bliver mere ledig kapacitet.

2.8 Antag at produktionen aktuelt vokser langsommere end produktionskapaciteten, altså $\Delta Y_t < \Delta \bar{Y}_t$, så der opstår mere og mere ledig kapacitet. Ifølge analysen ovenfor er dette kun muligt, hvis aktuelt $\Delta I_t/I_t < sB$, altså ved en "lav" investeringsvækst under sB. Harrods meget naturlige tankegang, at når der bliver mere og mere ledig kapacitet, så vil virksomhederne reagere med en adfærd, der giver en *lavere* vækstrate i investeringerne, fører så til, at $\Delta I_t/I_t$ kommer endnu længere under sB, så der fortsat og i endnu højere grad bliver tale om, at produktionen Y_t vokser langsommere end kapaciteten $\bar{Y}_t$. Det skal så give endnu lavere $\Delta I_t/I_t$ osv.

Hvis omvendt $\Delta Y_t > \Delta \bar{Y}_t$, så der bliver mindre og mindre ledig kapacitet, må aktuelt $\Delta I_t/I_t > sB$. Virksomhederne reagerer "naturligt" med en adfærd, der sætter $\Delta I_t/I_t$ yderligere op, hvorved der i endnu højere tempo vil ske reduktioner i den ledige kapacitet osv.

Harrod udviklede således et *ustabilitetsprincip*, ifølge hvilket vækstraten $g_Y^* = sB$ får en *knivsægsegenskab*: Vækst over knivsæggen er selvforstærkende i opadgående retning og fører imod overophedning og mangel på arbejdskraft. (Når der ikke længere er arbejdskraft nok til at “føde” den accelererende vækst, må der naturligvis ske noget nyt; dette beretter nærværende historie ikke noget om). Vækst under knivsæggen er selvfortærkende nedad og fører mod stadig mere arbejdsløshed.

Dette er en slags vækstudgave af en Keynesiansk tankegang og kan eksempelvis kalde på efterspørgselsregulerende stabiliseringspolitik for at forhindre en negativ spiral.

Analysen bygger (som også tidligere nævnt) på manglende substitutionsmuligheder, hvilket kan trækkes frem som en kritik.

[Harrod var ikke blind for substitutionsmuligheder, men regnede med, at substitution var en så tidskrævende foranstaltning, at de her beskrevne processer ville nå at sætte sig igennem, inden de ville blive “overhalet” af substitutionsprocesser].