Matematik B august 2020: Rettevejledning

Bemærk: Der lægges ved bedømmelsen af de enkelte spørgsmål vægt på, at den studerende præsenterer en fyldestgørende besvarelse med klare forklaringer og eventuelle mellemregninger, der ikke er baseret på brug af matematiske IT-værktøjer. Det er således ikke tilstrækkeligt bare at angive et facit.
(Ovenstående tekst er angivet i selve eksamenssættet, og de studerende var gjort bekendt med den på forhånd.)

I nedenstående løsningsforslag refereres gentagne gange til resultater fra EMEA og FMEA, som er de to pensumbøger i kurset (se kurser.ku.dk for detaljer). Sådanne referencer kræves dog <u>ikke</u> i eksamensbesvarelserne.

Opgave 1

Betragt følgende matrix, hvor a er et reelt tal:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem alle værdier af a, for hvilke $\mathbf{A}$ er invertibel.

Vi udregner determinanten af $\mathbf{A}$ ved udvikling efter første række:

$$|\mathbf{A}| = 4\begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 4(8-a^2) + 2(0-4) = 24 - 4a^2 = 4(6-a^2)\,.$$

Heraf ses, at $|\mathbf{A}| \neq 0$ netop hvis $a^2 \neq 6$, hvilket er ækvivalent med $a \neq \pm\sqrt{6}$. Altså er $\mathbf{A}$ invertibel for alle $a \neq \pm\sqrt{6}$ (EMEA Thm 16.7.1, s.651).

(b) Lad $a = 2$. Betragt det lineære ligningssystem

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vis, at den entydige løsning til dette system er $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ifølge (a) er $|\mathbf{A}| \neq 0$ for $a = 2$, så ligningssystemet har en entydig løsning (EMEA Thm 16.8.1, s.654). Ved indsætning ses, at denne entydige løsning er den angivne:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Lad $a = 0$. Vis, at $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 6$ er egenværdier for $\mathbf{A}$.

Det karakteristiske polynomium er:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((4-\lambda)^2 - 4).$$

Ved indsætning ses, at $p(2) = 0$ og $p(6) = 0$. Altså er $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 6$ rødder i det karakteristiske polynomium og dermed egenværdier for $\mathbf{A}$ (FMEA afsnit 1.5, s.21-22).

(d) Lad igen $a = 0$. Bestem alle egenvektorer for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien $\lambda_1 = 2$. Vis, at $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en af disse egenvektorer.

Vi finder egenvektorerne som de ikke-trivielle løsninger til det homogene ligningssystem $(\mathbf{A} - \mathbf{2I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Koefficientmatricen

$$\mathbf{A} - \mathbf{2I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

bringes nemt på reduceret echelon form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf ses, at $x_2 = s$ og $x_3 = t$ er frie variable, og at $x_1 = -x_3 = -t$. Altså kan egenvektorerne skrives

$$\begin{pmatrix} -t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvor $s, t \in \mathbb{R}$, men ikke begge må være nul.

Ved at sætte $s = 5$ og $t = -1$ ses, at $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en af egenvektorerne hørende til $\lambda_1 = 2$. Alternativt kan man ved direkte udregning vise, at $\mathbf{Ax} = 2\mathbf{x}$.

(e) Bestem alle værdier af a, for hvilke $\mathbf{A}$ er positiv semidefinit.

Vi bemærker først, at $\mathbf{A}$ er symmetrisk. Dernæst udregnes hovedunderdeterminanterne (principal minors) for $\mathbf{A}$ (se FMEA afsnit 1.7 s.31-33 for definition og notation). Hovedunderdeterminanterne af orden 1 er:

$$D_1 = \Delta_1^{(1)} = 4, \quad \Delta_1^{(2)} = 2, \quad \Delta_1^{(3)} = 4\,.$$

Hovedunderdeterminanterne af orden 2 er:

$$D_2 = \Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad \Delta_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 8 - a^2\,.$$

Hovedunderdeterminanten af orden 3 er:

$$D_3 = \Delta_3 = |\mathbf{A}| = 4(6 - a^2)\,.$$

$\mathbf{A}$ (og den tilhørende kvadratiske form) er positiv semidefinit, hvis og kun hvis alle hovedunderdeterminanter er større end eller lig med nul (FMEA Thm 1.7.1(b), s.32). Dette er tilfældet netop hvis $8 - a^2 \geq 0$ og $6 - a^2 \geq 0$, altså netop hvis $-\sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{6}$.

Opgave 2

Lad funktionen $f(x, y)$ være givet ved:

$$f(x, y) = x^2 + xy + by^2 \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

hvor b er en konstant.

(a) Bestem alle værdier af b, for hvilke $f(x, y)$ er konveks.

Ved differentiation fås følgende partielle afledede af første orden:

$$f_1'(x, y) = 2x + y \quad \text{og} \quad f_2'(x, y) = x + 2by\,.$$

Videre fås så følgende partielle afledede af anden orden:

$$f_{11}''(x, y) = 2\,, \quad f_{22}''(x, y) = 2b \quad \text{og} \quad f_{12}''(x, y) = f_{21}''(x, y) = 1\,.$$

Heraf fås:

$$f''_{11}(x,y)f''_{22}(x,y) - (f''_{12}(x,y))^2 = 2(2b) - 1^2 = 4b - 1\,.$$

Ifølge FMEA Thm 2.3.1(a) (s.56) (eller Thm 2.3.3(a), s.58) gælder således, at f er konveks hvis og hvis kun hvis $2b \geq 0$ og $4b - 1 \geq 0$ (f er defineret på hele $\mathbb{R}^2$, som oplagt er åben og konveks). Dette er ækvivalent med $b \geq \frac{1}{4}$.

(b) Lad R være følgende rektangel i $\mathbb{R}^2$:

$$R = [-1, 0] \times [0, 3] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 0 \text{ og } 0 \leq y \leq 3\}\,.$$

Vis, at

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = 9b - \frac{5}{4}\,.$$

Vi bestemmer integralet ved først at integrere mht y (det indre integral) og dernæst mht x:

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0}\Big(\int_0^3 (x^2 + xy + by^2)\,dy\Big)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} \big[x^2y + x(\frac{1}{2}y^2) + b(\frac{1}{3}y^3)\big]_{y=0}^{y=3}\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (3x^2 + \frac{9}{2}x + 9b)\,dx \\
&= \big[x^3 + \frac{9}{4}x^2 + 9bx\big]_{-1}^{0} = 0 - (-1 + \frac{9}{4} - 9b) = 9b - \frac{5}{4}\,.
\end{aligned}$$

Integrationsrækkefølgen er ligegyldig (FMEA Thm 4.4.1, s.168), så man kan også integrere først mht x.

(c) Betragt funktionerne givet ved:

$$g(x,y) = e^{x^2+xy+y^2} \quad \text{og} \quad h(x,y) = e^{-x^2-xy-y^2} \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vis, at $g(x,y)$ er konveks, og at $h(x,y)$ er kvasikonkav.

Funktionen $G(u) = e^u$ er voksende og konveks, da $G'(u) = G''(u) = e^u > 0$. For $b = 1$ har vi fra (a), at $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ er konveks. Derfor er $g(x,y) = G(f(x,y))$ konveks (FMEA Thm 2.3.5(b), s.59).

For $b = 1$ er $-f(x,y) = -x^2 - xy - y^2$ konkav (da $f(x,y)$ er konveks) og dermed specielt kvasikonkav. Da $G(u) = e^u$ er voksende, er $h(x,y) = G(-f(x,y))$ således kvasikonkav (FMEA Thm 2.5.2(a), s.70).

Opgave 3

Betragt følgende differentialligning af første orden:

$$\dot{x} = \frac{2t}{t^2+2}(x+1)\,.$$

(a) Gør rede for, at differentialligningen både er separabel og lineær.
Vis, at funktionen $x(t) = \frac{1}{2}t^2$ (hvor $t \in \mathbb{R}$) er en løsning.

Ligningen er separabel, da højresiden er et produkt af en funktion af t, $f(t) = \frac{2t}{t^2+2}$, og en funktion af x, $g(x) = x + 1$.
At ligningen er lineær ser man ved at omskrive til $\dot{x} - \frac{2t}{t^2+2}x = \frac{2t}{t^2+2}$. Således har vi med notationen fra FMEA afsnit 5.4, at $a(t) = -\frac{2t}{t^2+2}$ og $b(t) = \frac{2t}{t^2+2}$.
At $x(t) = \frac{1}{2}t^2$ er en løsning ses ved differentiation og indsætning.

Venstreside: $\quad \dot{x} = t\,.$

Højreside: $$\frac{2t}{t^2+2}(x+1) = \frac{2t}{t^2+2}(\frac{1}{2}t^2+1) = \frac{t(t^2+2)}{t^2+2} = t\,.$$

(b) Brug løsningsformlen for lineære differentialligninger af første orden (ofte kaldet "Panserformlen") til at bestemme den generelle løsning til differentialligningen.

Løsningsformlen for den generelle løsning kan skrives (FMEA afsnit 5.4, s.203, "Panserformlen"):

$$x(t) = Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)}\int b(t)e^{A(t)}\,dt\,,$$

hvor $A(t)$ er en stamfunktion til $a(t)$, og C er en arbitrær konstant.
En stamfunktion til $a(t) = -\frac{2t}{t^2+2}$ er $A(t) = -\ln(t^2+2)$ (det ses ved differentiation, stamfunktionen kan evt findes ved at bestemme $\int \frac{2t}{t^2+2}\,dt$ ved substitution). Så har vi

$$e^{-A(t)} = e^{\ln(t^2+2)} = t^2+2 \quad \text{og} \quad e^{A(t)} = e^{-\ln(t^2+2)} = (e^{\ln(t^2+2)})^{-1} = \frac{1}{t^2+2}\,.$$

Så fås af løsningsformlen:

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(t)e^{A(t)}\, dt \\
&= C(t^2+2) + (t^2+2) \int (\frac{2t}{t^2+2} \cdot \frac{1}{t^2+2})\, dt \\
&= C(t^2+2) + (t^2+2) \int \frac{2t}{(t^2+2)^2}\, dt \\
&= C(t^2+2) + (t^2+2) \int \frac{1}{u^2}\, du \qquad \text{(substitution: } u = t^2+2,\ du = 2t\,dt) \\
&= C(t^2+2) + (t^2+2)(-\frac{1}{u}) \qquad \text{(integrationskonstanten kan udelades)} \\
&= C(t^2+2) + (t^2+2)(-\frac{1}{t^2+2}) \\
&= C(t^2+2) - 1\,,
\end{aligned}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$ og C er en arbitrær konstant.