Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 V-1A ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Mandag den 6. januar 2014

Rettevejledning

Opgave 1. Tangentplaner.

Lad $D \subseteq \mathbf{R}^2$ være en åben, ikke-tom mængde, og lad $f : D \to \mathbf{R}$ være en differentiabel funktion af de to variable x og y, så $(x, y) \in D$.

(1) Opskriv formlen for ligningen for tangentplanen til grafen for funktionen f gennem punktet $\big(a, b, f(a, b)\big)$, hvor $(a, b) \in D$.

Løsning. Vi finder, at

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\big(x-a\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\big(y-b\big).$$

I resten af denne opgave betragter vi den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + 2x + y.$$

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y^2 + 2 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy + 1.$$

(3) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(0,0,f(0,0)\big)$.

Løsning. Man får, at

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 2x + y.$$

(4) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1,-1,f(1,-1)\big)$.

Løsning. Man får, at

$$z = f(1,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)\big(x-1\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)\big(y+1\big) =$$

$$5 + 7(x-1) - 5(y+1) = 7x - 5y - 7.$$

(5) Bestem alle de partielle afledede af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Funktionen f har Hessematricen

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}.$$

(6) Vis, at den funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : g(x) = f(x,x),$$

ikke har nogen stationære punkter, og at den er voksende overalt på mængden $\mathbf{R}$.

Løsning. Først finder vi, at $g(x) = f(x,x) = 3x^3 + x^2 + 3x$, så $g'(x) = 9x^2 + 2x + 3$.

Idet andengradspolynomiet $g'(x) = 9x^2 + 2x + 3$ har diskriminanten $d = 4 - 108 = -104$, ser vi, at $g'(x) > 0$ for alle $x \in \mathbf{R}$.

Heraf fremgår påstanden umiddelbart.

Opgave 2.

(1) Udregn de ubestemte integraler

$$\int \left(3x^2+7x-1\right)^5 (6x+7)\,dx, \quad \int \frac{8x^7}{2\sqrt{2+x^8}}\,dx \quad \text{og} \quad \int \frac{8x}{1+x^2}\,dx.$$

Løsning. Vi får, at

$$\int \left(3x^2+7x-1\right)^5 (6x+7)\,dx = \int \left(3x^2+7x-1\right)^5 d\left(3x^2+7x-1\right) =$$

$$\frac{1}{6}(3x^2+7x-1\Big)^6 + k, \quad \text{hvor } \ k \in \mathbf{R},$$

$$\int \frac{8x^7}{2\sqrt{2+x^8}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{2+x^8}} d\left(2+x^8\right) = \sqrt{2+x^8}+k, \quad \text{hvor } \ k \in \mathbf{R},$$

og

$$\int \frac{8x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{4}{1+x^2} d\left(1+x^2\right) = 4\ln\left(1+x^2\right)+k, \quad \text{hvor } \ k \in \mathbf{R}.$$

(2) Lad $a \in \mathbf{R}_+$ være vilkårligt valgt. Udregn det bestemte integral

$$\int_0^a \frac{8x}{1+x^2}\,dx.$$

Løsning. Vi finder straks, at

$$\int_0^a \frac{8x}{1+x^2}\,dx = \left[4\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^a = 4\ln\left(1+a^2\right).$$

(3) Løs ligningen

$$\int_0^a \frac{8x}{1+x^2}\,dx = 8\ln\left(2a\right).$$

med hensyn til $a > 0$.

Løsning. Vi får, at

$$\int_0^a \frac{8x}{1+x^2}\,dx = 8\ln\left(2a\right) \Leftrightarrow 4\ln\left(1+a^2\right) = 8\ln\left(2a\right) \Leftrightarrow$$

$$1+a^2 = 4a^2 \Leftrightarrow 3a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

thi $a > 0$.

Opgave 3. Vi betragter ligningen

$$(\S) \qquad e^{2x+y^2} + 2x - 3y = 1.$$

(1) Vis, at punktet $(x, y) = (0, 0)$ er en løsning til ligningen (§).

Løsning. Dette indses ved at indsætte punktet $(x, y) = (0, 0)$ i ligningen (§).

I en omegn U af punktet $(0, 0)$ er den variable y givet implicit som en funktion $y = y(x)$ af den variable x.

(2) Bestem differentialkvotienten $y'(0)$.

Løsning. Vi indfører funktionen

$$F(x, y) = e^{2x+y^2} + 2x - 3y - 1$$

og får så, at

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = F'_x(x, y) = 2e^{2x+y^2} + 2 \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = F'_y(x, y) = 2ye^{2x+y^2} - 3.$$

Herefter får vi, at

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0, 0)}{F'_y(0, 0)} = -\Big(\frac{4}{-3}\Big) = \frac{4}{3}.$$

For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi herefter ligningen

$$(\S\S) \qquad e^{2x+y^2} + ax - 3y = 1.$$

(3) Vis, at punktet $(x, y) = (0, 0)$ er en løsning til ligningen (§§).

Løsning. Dette indses ved at indsætte punktet $(x, y) = (0, 0)$ i ligningen (§§).

I en omegn U_a af punktet $(0, 0)$ er den variable y givet implicit som en funktion $y = y(x)$ af den variable x.

(4) Bestem differentialkvotienten $y'(0)$.

Løsning. Vi indfører funktionen

$$F(x,y) = e^{2x+y^2} + ax - 3y - 1$$

og får så, at

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = F'_x(x,y) = 2e^{2x+y^2} + a \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = F'_y(x,y) = 2ye^{2x+y^2} - 3.$$

Herefter får vi, at

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0,0)}{F'_y(0,0)} = -\Big(\frac{2+a}{-3}\Big) = \frac{2+a}{3}.$$

(5) Bestem $a \in \mathbf{R}$, så $y'(0) = 0$.

Løsning. Vi ser, at $y'(0) = 0$, netop når $a = -2$.