Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2017 S-1A rx ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik A

Torsdag den 17. august 2017

Opgave 1. Integration.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent, ikke-tomt interval, og lad $f, g : I \to \mathbf{R}$ være to kontinuerte funktioner.

(1) Vis, at formlerne

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

og

$$\int (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbf{R}$$

er opfyldt.

Løsning. Formlerne eftervises ved at differentiere på begge sider af lighedstegnet og derpå udnytte, at $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ og $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

(2) Udregn følgende ubestemte integraler

$$\int \left(x^2 + 7x^3 - \frac{2x}{1+x^2}\right) dx, \int \frac{5}{1+x^2}\,dx \text{ og } \int \frac{18x^2}{1+x^6}\,dx.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\int \left(x^2 + 7x^3 - \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 - \ln(1+x^2) + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

$$\int \frac{5}{1+x^2}\,dx = 5\text{Arctan}(x) + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R}$$

og

$$\int \frac{18x^2}{1+x^6}\,dx = 6\text{Arctan}(x^3) + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R}.$$

Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 3x^2, & \text{for } x \geq 0 \\ e^{-x}, & \text{for } x < 0 \end{cases}.$$

(3) Udregn integralet

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx.$$

Løsning. Ved at benytte indskudsreglen får vi, at

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx + \int_{0}^{2} (1 + 3x^2)\, dx =$$

$$\Big[- e^{-x} \Big]_{-2}^{0} + \Big[x + x^3 \Big]_{0}^{2} = -1 + e^2 + 10 = e^2 + 9.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^3 + x^2 - y + y^2 + xy.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi får, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2x + y \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1 + 2y + x.$$

(2) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

Løsning. Hvis $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, er $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$, og hvis også $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, finder vi, at

$$3x^2 + 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 3x + 1 = 0,$$

og da denne andengradsligning har diskriminanten $d = 9 - 24 = -15$, har den ingen reelle løsninger. Altså har funktionen f ingen stationære punkter.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Da $f(x,0) = x^3 + x^2$, er værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

Vi betragter mængden

$$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le 1\}.$$

(5) Godtgør, at restriktionen af funktionen f til mængden K har både en størsteværdi og en mindsteværdi på K, og bestem disse værdier.

Løsning. Mængden K er kompakt, og da funktionen f er kontinuert, har restriktionen af f til K både en størsteværdi og en mindsteværdi på K, jvf. ekstremværdisætning. Disse ekstremer ved vi i dette tilfælde skal findes på randen for K. Denne rand opdeles i fire stykker, I, II, III og IV. Vi ser da, at

$I: 0 \le x \le 1$ og $y = 0$. Da er $f(x,0) = x^3 + x^2$, som er voksende på I. Vi ser også, at $f(0,0) = 0$ og $f(1,0) = 2$.

$II: x = 1$ og $0 \le y \le 1$. Da er $f(1,y) = 2 - y + y^2 + y = y^2 + 2$, som er voksende på II. Vi ser også, at $f(1,1) = 3$.

$III: 0 \le x \le 1$ og $y = 1$. Da er $f(x,1) = x^3 + x^2 + x$, som er voksende på III. Vi ser også, at $f(0,1) = 0$.

$IV: x = 0$ og $0 \le y \le 1$. Da er $f(0,y) = -y + y^2$. Vi ser også, at $f'(0,y) = -1 + 2y$, som har det stationære punkt $y = \frac{1}{2}$. Desuden ser vi, at $f''(y) = 2$, så der er et minimum i $y = \frac{1}{2}$. Vi får, at $f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

Vi har derfor, at restriktionen af f til K har globalt maksimum i $(1,1)$ med værdien 3 og globalt minimum i $(0, \frac{1}{2})$ med værdien $-\frac{1}{4}$.

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2xn}.$$

(1) Bestem mængden C af de $x \in \mathbf{R}$, hvor den uendelige række (§) er konvergent.

Løsning. Idet $0 < e^{-2x} < 1$ er ensbetydende med, at $x > 0$, ser vi, at $C = \mathbf{R}_+$.

(2) Bestem en forskrift for sumfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2xn}, \qquad \forall x \in C.$$

Løsning. Vi får straks, at

$$f(x) = e^{-2x} \frac{1}{1 - e^{-2x}} = \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1}{e^{2x} - 1}.$$

(3) Bestem den afledede funktion $f'(x)$ og elasticiteten $f^{\epsilon}(x)$ for et vilkårligt $x \in C$.

Løsning. Vi får umiddelbart, at

$$f'(x) = -\frac{2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} \;\text{ og }\; f^{\epsilon}(x) = -\frac{2xe^{2x}}{e^{2x} - 1}.$$

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Det er klart, at funktionen f er aftagende på mængden $C = \mathbf{R}_+$, og vi ser, at

$$f(x) \to 0 \;\text{ for }\; x \to \infty \;\text{ og }\; f(x) \to \infty \;\text{ for }\; x \to 0+.$$

Dette viser, at f har værdimængden $R(f) =]0, \infty[$.