Skriftlig eksamen i Matematik A. Vinteren 2013 - 2014

Tirsdag den 18. februar 2014

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 V-1A rx

Skriftlig eksamen i Matematik A

Tirsdag den 18. februar 2014

---

2 sider med 3 opgaver.
Løsningstid: 2 timer.
Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Homogene funktioner.

Lad $C \subseteq \mathbf{R}^2$ være en ikke-tom mængde. Vi siger, at C er en kegle, dersom betingelsen

$$\forall (x, y) \in C \; \forall t > 0 : (tx, ty) \in C$$

er opfyldt.

(1) Vis, at mængden

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y \geq 0\}$$

er en kegle, mens mængden

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 1\}$$

ikke er en kegle.

Lad $C \subseteq \mathbf{R}^2$ være en kegle, og lad $f : C \to \mathbf{R}$ være en given funktion.

(2) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er homogen af grad $k \in \mathbf{R}$.

Vi betragter nu keglen

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

og funktionerne $f_1, f_2 : C \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskrifterne

$$\forall (x, y) \in C : f_1(x, y) = \frac{3xy^2 + x^2y}{x^4 + xy^3 + y^4} \wedge f_2(x, y) = \sqrt{x^2y^6 + x^4 - x^3y}.$$

(3) Vis, at funktionerne f_1 og f_2 er homogene, og bestem deres homogenitetsgrader.

(4) Antag, at en funktion f, som er defineret på en kegle C i $\mathbf{R}^2$ er positiv, i.e.

$$\forall\,(x, y) \in C : f(x, y) > 0,$$

og antag endvidere, at f er homogen af grad k.

Vis, at funktionen $g : C \to \mathbf{R}$, som er defineret ved betingelsen

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R} : g(x, y) = \Big(f(x, y)\Big)^j,$$

er homogen af grad jk.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = xy^2 + x^2y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har præcis et stationært punkt, og bestem dette punkt. Vis desuden, at det stationære punkt er et sadelpunkt for f.

(3) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

Opgave 3.

(1) Udregn det ubestemte integral

$$\int \Big(x^2 + x\Big)e^x dx.$$

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, der er givet ved betingelsen

$$\forall\, a \in \mathbf{R} : f(a) = \int_0^a \Big(x^2 + x\Big)e^x dx.$$

(3) Bestem Taylorpolynomiet P_2 af anden orden for funktionen f ud fra punktet $a_0 = 0$.