2015 V – ILM . Vejledende løsning.

Bemærk at løsningen er <u>bevidst</u> <u>kortfattet</u>.

Opg 1

1) Det er klart at $\dim(U) = 3$, idet u_1, u_2, u_3 er en basis. u_1, u_4, u_5, som ligger i U, udgør altså en basis hvis blot de er lineært uafhængige.
I basen u_1, u_2, u_3 er $u_1 = (1,0,0)$, $u_4 = (1,-1,0)$ $u_5 = (1,1,-1)$. Disse er oplagt lineært uafh.
- hvilket ses ved Gauss-elimination.

2) Vi skal bestemme $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ hvor

(*) $\alpha u_1 + \beta u_4 + \gamma u_5 = u_3 + u_4 \quad (= v)$

I basen ~~u_1, u_4, u_5~~ u_1, u_2, u_3 er

$$v = (0,0,1) + (1,-1,0) = (1,-1,1).$$

Totalmatricen for (*) er da

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Da er $v = (\alpha, \beta, \gamma) = \underline{\underline{(2, 0, -1)}}$.

3)
$$L u_1 = u_1 + u_2 = (1,1,0) \quad \text{i basen } u_1, u_2, u_3.$$
$$L u_2 = L(u_1 + u_2) - L u_1 = u_3 - u_2 - (u_1 + u_2) = -u_1 - 2u_2 + u_3$$
$$= (-1, -2, 1)$$
$$L u_3 = u_3 - u_2 = (0, -1, 1).$$

Da er $L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ m.h.t. basen u_1, u_2, u_3.

4) Vi løser $Lx = \bar{0}$.

Da $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ses at $x_3 = t$, $x_2 = -t$, $x = -t$ så

$$N(L) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da $\dim N(L) = 1$ er $\dim R(L) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$.

Alternativt er $rg(L) = 2 = \dim R(L)$,

eller $R(L) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ som har

dimension 2.

Opgave 2

1) Da A er sym er egenrum hørende til forsk. egenværdier ortogonale, dvs

$$(1, -2, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ og } (1, 0, -1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$$

Det ses let at $\underline{(1, 1, 1)}$ er en mulig egenvektor.

2) Iflg. spektralsætningen er $D = Q^T A Q$

hvor $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

hvor $Q^{-1} = Q^T$, da Q er ortogonal.

Dermed er $A = Q D Q^T$

som dermed kan beregnes – se 3)

3) Vi har at $f(A) = Q f(D) Q^T$, hvor

$f(D) = \begin{bmatrix} f(1) & 0 & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(3) \end{bmatrix}$. Ved at vælge $f(\lambda) = \lambda$, fås $f(A) = A$.

Derfor beregnes $f(A)$ først.

$$f(A) = Q \begin{bmatrix} f(1) & 0 & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}f(1) + \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{3}f(3) & -\frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(3) & \frac{1}{6}f(1) - \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{3}f(3) \\ -\frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(3) & \frac{2}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(3) & -\frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(3) \\ \frac{1}{6}f(1) - \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{3}f(3) & -\frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(3) & \frac{1}{6}f(1) + \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{3}f(3) \end{bmatrix}$$

Så fås

$$A = \begin{bmatrix} \frac{13}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{13}{6} \end{bmatrix}$$

4) $\det(f(A)) = \det(Qf(D)Q^T) = \det f(D)$
$= \underline{f(1) \cdot f(2) \cdot f(3)}$

5) Hvis $f(\lambda) = 1/\lambda$ er

$$Af(A) = QDQ^TQf(D)Q^T = QDf(D)Q^T$$
$$= QEQ^T = E$$

Altså er $f(A) = A^{-1}$.

Så fås $f(A)x = b \Leftrightarrow$
$A^{-1}x = b \Leftrightarrow$
$x = Ab$

Men $b = (1, 0 -1)$ er egenvektor hørende til egenværdien 2, så $Ab = 2b$.

Så er $x = 2(1, 0, -1) = \underline{(2, 0, -2)}$.

Opg 3

1) $\int \cos^2(x)\sin^2(3x)\,dx =$

$$\int \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)^2 dx =$$

$$-\frac{1}{16}\int \left(e^{i2x}+e^{-i2x}+2\right)\left(e^{i6x}+e^{-i6x}-2\right) dx =$$

$$-\frac{1}{16}\int \left(e^{i8x}+e^{-i8x}\right)+2\left(e^{i6x}+e^{-i6x}\right)+\left(e^{i4x}+e^{-i4x}\right)$$
$$-2\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)-4 \quad dx$$

$$= -\frac{1}{8}\int \cos(8x)+2\cos(6x)+\cos(4x)-2\cos(2x)-2\;dx$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\sin(8x)+\frac{2}{6}\sin(6x)+\frac{1}{4}\sin(4x)-\sin(2x)-2x\right)+k$$

$$= -\frac{1}{64}\sin(8x)-\frac{1}{24}\sin(6x)-\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{8}\sin(2x)+\frac{1}{4}x+k.$$

2) $z = x+iy$, så
$(x+iy)^2 = -8+i8$. Så fås $x^2-y^2=-8$ og
$2xy = 8$
Så er $x \neq 0$ og $y \neq 0$, så med
$y = \frac{4}{x}$ fås $x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = -8$, dvs.

$$x^4 - 16 = -8x^2 \iff x^4+8x^2-16=0$$

Så er, med $0 < u = x^2$: $u = \dfrac{-8+\sqrt{128}}{2}$,
så $x^2 = \sqrt{32}-4$, så $x = \pm\sqrt{\sqrt{32}-4}$

Da $y = \frac{4}{x}$ fås

$$Z = \pm \left(\sqrt{\sqrt{32} - 4} + \frac{4}{\sqrt{\sqrt{32}-4}} \right).$$

(Da $\sqrt{32} - 4 = 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1)$ kan det skrives lidt pænere hvis man vil.)

Opg 4

1) f er veldefineret for $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 1$.

Dette er ækvivalent med $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} < 1 \iff$

$$x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x + 1 \iff$$
$$0 < 4x \iff$$
$$0 < x$$

f er veldefineret for $\underline{x > 0}$.

2) Så er

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{x+1}{(x+1)-(x-1)} = \underline{\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}}$$

for $\underline{x > 0}$.

3) Da $f'(x) = \frac{1}{2} > 0$ er f monotont voksende for $x > 0$ og dermed injektiv.

4) $\cancel{\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} = y \iff x = 2y - 1}$

4) $f(x) \to \frac{1}{2}^+$ for $x \to 0^+$ og

$f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$. Dermed er

$Vm(f) = \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$, idet f er kontinuert.

5) For $y > \frac{1}{2}$ fås oplagt:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = y \iff x = 2y - 1$$

Bemærk at $x > 0$ for $y > \frac{1}{2}$ som forventet.