Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2018 V-1A rx ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik A

Mandag den 19. februar 2018

Opgave 1. Uegentlige integraler.

Lad tallet $a \in \mathbf{R}$ være valgt, og betragt en kontinuert funktion $f : [a, \infty[\to [0, \infty[$.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at det uegentlige integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

er konvergent med værdien V.

Løsning. For ethvert $t \geq a$ eksisterer integralet

$$I(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

Hvis $I(t) \to V \in \mathbf{R}$ for $t \to \infty$, siger vi, at det uegentlige integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

er konvergent med værdien V.

(2) Undersøg om følgende uegentlige integraler

$$\int_e^\infty \frac{1}{x \ln x}\,dx \;\text{ og }\; \int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$$

er konvergente, og angiv i bekræftende fald værdien.

Løsning. For $t \geq e$ finder vi, at

$$\int_e^t \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int_e^t \frac{1}{\ln x}\, d(\ln x) = [\ln(\ln x)]_e^t = \ln(\ln t) \to \infty$$

for $t \to \infty$. Dette første uegentlige integral er derfor ikke konvergent.

For $t \geq e$ finder vi dernæst, at

$$\int_e^t \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = \int_e^t \frac{1}{(\ln x)^2}\, d(\ln x) = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^t = -\frac{1}{\ln t} + 1 \to 1$$

for $t \to \infty$. Dette andet uegentlige integral er derfor konvergent med værdien $V = 1$.

(3) Lad $\lambda \neq 0$. Vis, at det uegentlige integral

$$\int_1^\infty e^{-\lambda^2 x} dx$$

er konvergent, og bestem værdien $V(\lambda)$.

Bestem desuden grænseværdierne

$$\lim_{\lambda \to \infty} V(\lambda) \text{ og } \lim_{\lambda \to 0} V(\lambda).$$

Løsning. For $t \geq 1$ finder vi, at

$$\int_1^t e^{-\lambda^2 x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda^2 x}\right]_1^t = \frac{1}{\lambda^2}\left(e^{-\lambda^2} - e^{-\lambda^2 t}\right) \to \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda^2}$$

for $t \to \infty$. Dette viser, at dette uegentlige integral er konvergent med værdien $V(\lambda) = \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda^2}$.

Vi ser heraf, at $V(\lambda) \to 0$ for $\lambda \to \infty$ og $V(\lambda) \to \infty$ for $\lambda \to 0$.

Opgave 2.

(1) Udregn følgende ubestemte integraler

$$\int (5 + \sin x)^7 \cos x\, dx \text{ og } \int \frac{(\ln x)^4}{x}\, dx.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\int (5+\sin x)^7 \cos x \, dx = \int (5+\sin x)^7 d(5+\sin x) \, dx = \frac{1}{8}(5+\sin x)^8 + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Desuden finder vi, at

$$\int \frac{(\ln x)^4}{x} \, dx = \int (\ln x)^4 \, d(\ln x) = \frac{1}{5}(\ln x)^5 + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

(2) Lad $a > 0$. Løs ligningen

$$\int_1^a \frac{(\ln x)^4}{x} \, dx = 5 \ln a$$

med hensyn til $a > 0$.

Løsning. Vi finder, at

$$\int_1^a \frac{(\ln x)^4}{x} \, dx = 5 \ln a \Leftrightarrow \frac{1}{5}(\ln a)^5 = 5 \ln a \Leftrightarrow$$

$$\ln a = 0 \vee \ln a = \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow a = 1 \vee a = e^{-\sqrt{5}} \vee a = e^{\sqrt{5}}.$$

Opgave 3. Lad $x > -1$. Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ln(1+x))^n.$$

(1) Bestem mængden

$$C = \{x > -1 \mid \sum_{n=0}^{\infty} (\ln(1+x))^n \text{ er konvergent}\}.$$

Løsning. Vi finder, at

$$-1 < \ln(x+1) < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x+1 < e \Leftrightarrow e^{-1} - 1 < x < e - 1.$$

(2) Bestem en forskrift for sumfunktionen

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\ln(1+x))^n, \qquad \forall\, x \in C.$$

Løsning. Vi finder straks, at

$$s(x) = \frac{1}{1 - \ln(1+x)}.$$

(3) Bestem den afledede funktion $s'(x)$ og elasticiteten $s^{\epsilon}(x)$ for $x \in C$.

Løsning. Man ser, at

$$s'(x) = -\frac{1}{(1-\ln(1+x))^2} \cdot \left(-\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)(1-\ln(1+x))^2}.$$

Desuden får vi, at

$$s^{\epsilon} = x\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{x}{(1+x)(1-\ln(1+x))}.$$

(4) Bestem værdimængden for sumfunktionen s.

Løsning. Det er klart, at sumfunktionen $s = s(x)$ er voksende på C. Vi ser, at $s(x) \to \infty$ for $x \to (e-1)-$ og $s(x) \to \frac{1}{2}$ for $x \to (e^{-1}-1)+$. Dette viser, at værdimængden er $R(s) =]\frac{1}{2}, \infty[$.