

Eksamen på Økonomistudiet. Vinteren 2012 - 2013

MATEMATIK A

1. årsprøve

Torsdag den 3. januar 2013

(2 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 V-1A ex

Skriftlig eksamen i Matematik A

Torsdag den 3. januar 2013

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Stamfunktioner. Lad de reelle funktioner f og F være defineret på et åbent interval $I \subseteq \mathbf{R}$.

- (1) Forklar, hvad det vil sige, at F er en stamfunktion til f .
- (2) Forklar, hvad man forstår ved det ubestemte integral

$$\int f(x) dx.$$

- (3) Er det korrekt, at

$$\int \left(\frac{1}{x} - x \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) - 2xe^{x^2} \right) dx = \ln(x) + \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) - e^{x^2} + k$$

for $x > 0$, og hvor $k \in \mathbf{R}$?

- (4) Udregn de ubestemte integraler

$$\int x^2 e^{2x^3} dx \quad \text{og} \quad \int \cos(x) \sin^5(x) dx.$$

- (5) Udregn det ubestemte integral

$$\int x^2 \ln(x) dx,$$

hvor $x > 0$.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = e^{x^2+xy+y},$$

og funktionen $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x, y) = x^2 + xy + y.$$

- (1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

- (2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

- (3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial g}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial g}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

- (4) Vis, at funktionen g har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Vis endvidere, at dette punkt er et sadelpunkt for funktionen g .

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cos(x) \right)^n.$$

- (1) Vis, at den uendelige række $(*)$ er konvergent for ethvert $x \in \mathbf{R}$.

- (2) Bestem en forskrift for funktionen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cos(x) \right)^n.$$

- (3) Bestem den afledede funktion f' af f .

- (4) Bestem elasticiteten $\text{El}f(x)$ for f i et vilkårligt punkt $x \in \mathbf{R}$.