Rettevejledning til
Eksamen på Økonomistudiet, vinter 2014-2015
Makro A
2. årsprøve
22. december, 2014
(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

At nå godt igennem alle 11 delspørgsmål i dette opgavesæt er ganske krævende og kan kun forventes af et fåtal af studerende.

Det betyder, at der er grundlag for at differentiere besvarelserne også i toppen. Det betyder også at en god karakter - eksempelvis 10 - skal kunne opnås, uden at den studerende er kommet hele vejen igennem.

Det skal dog også bemærkes, at opgave 1 og delspørgsmålene 2.1-2.6 i opgave 2 kun trækker på viden og beregningsmetoder, som er standardstof fra pensum.

Opgave 1: Balanceret vækst og kapital-output-forholdet på langt sigt

1.1 De øvrige definitionsmæssige krav for balanceret vækst er (i lærebogens ret vidtgående definition af begrebet): BNP per arbejder, kapital per arbejder (kapitalintensiteten), forbrug per arbejder samt realløn vokser alle med en og samme konstante vækstrate (g), arbejdsstyrken vokser med en konstant rate (n), BNP, samlet forbrug og mængden af kapital vokser med fælles rate ($g + n$), og afkastgraden på kapital er konstant. Konstans af kapital/output-forholdet følger naturligvis af kravet om, at BNP og kapitalmængden vokser med samme rate.

Begrebet balanceret vækst bruges teoretisk som en slags konsistenstjek på vækstmodeller: De skal gerne udvise balanceret vækst på langt (evt. meget langt) sigt for grundlæggende at være i overensstemmelse med empirien.

1.2 Hvis man betragter det sådan, at der grundlæggende er to aggregerede inputs, arbejdskraft L_t og kapital K_t (begge i bred forstand), i produktionen af aggregeret output (BNP), Y_t, så er indkomstandelene for hhv. arbejdskraft og kapital (brutto), $w_t L_t / Y_t$ og $r_t K_t / Y_t$, hvor w_t er reallønnen og r_t er afkastgraden (reallejesatsen) for kapital. Relativt konstante indkomstandele funderes typisk ved en relativt konstant *løn*andel, plus det forhold, at indkomstandelene skal summe til 1. Så vil også kapitalandelen $r_t K_t / Y_t$ være relativt konstant. Lægges hertil, at realrenter målt som nominal rente minus faktisk inflation over lange stræk ikke har trend hverken opad eller nedad, dvs. er relativt konstante på rigtig langt sigt, og at afkastgrader på kapital må have nær sammenhæng med realrenter, så følger det, at forholdet K_t / Y_t må være relativt konstant.

Kritisk kan man nævne, at argumentet bygger på adskillige antagelser og observationer, som kan disikuteres, nemlig: 1) At lønandele faktisk er ret konstante på længere sigt (hvilket nogle betvivler), 2) at kapitalens andel er 1 minus lønandelen, hvilket ikke er totalt oplagt, da der også er andre inputs såsom naturressourcer, og 3) at mål for realrenter er relativt konstante på langt sigt, hvilket kan diskuteres, da tidsserier for realtenter synes at udvise ret lange sving.

Hertil kan man lægge, at hvis kapital/output-forholdet virkelig har tendens til konstans på langt sigt, så bør man også kunne se dette i direkte mål. Fra lærebogen har de studerende kendskab til, at den engelske økonom Angus Maddison har opstillet direkte mål, som for USA faktisk viser et ret konstant kapital/output-forhold på langt sigt, men for en del andre (herunder europæiske) lande viser, at samme forhold kan have en stigende tendens over ganske lange perioder.

1.3 Dette peger naturligt frem mod det empiriske materiale vist i figuren. Der er ikke nogen entydigt korrekt måde at kommentere dette på, så det er op til de studerendes "modenhed" at sige noget fornuftigt, fx:

For USA synes materialet på det helt lange sigt ikke at modsige en tendens til konstant kapital/output-forhold, idet dette henover den betragtede 140-årige periode både starter og slutter på et niveau på godt 400%. Dykket i midten (frem til efter anden verdenskrig) kan forstås som en afvigelse forårsaget af verdenskrigene og krisen i 30'erne.

For Europa (dvs. de tre medtagne europæiske lande) synes der først frem til starten af 1900-tallet at være et ganske konstant forhold på knap 700%, herefter et voldsomt dyk frem til efter anden verdenskrig og endelig en lang fase frem til i dag med et jævnt stigende kapital/output-forhold. Man kan ikke udelukke, at forholdet også for Europa er på vej tilbage til et niveau, der var normalt frem til første verdenskrig. Det er netop en af Thomas Piketty's pointer.

Generelt kan materialet derfor godt ses som ikke afkræftende en tendens til konstant kapital/output-forhold på langt sigt, men det skal så med, at der er tale om et rigtig langt sigt, hvor kapital/output-forholdet kan have aftagende eller stigende tendens over ganske lange perioder på adskillige årtier.

Opgave 2: "Kapitalen i det 21. århundrede"

Modellen gentaget fra opgaveteksten:

$$Y_t = K_t^{\alpha} \left(A_t L_t\right)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

$$K_{t+1} - K_t = sY_t - \delta K_t, \quad 0 < s < 1, \quad 0 < \delta < 1 \tag{2}$$

$$L_{t+1} = \left(1+n\right) L_t, \quad n > 0 \tag{3}$$

$$A_{t+1} = \left(1+g\right) A_t, \quad g > 0 \tag{4}$$

2.1 Med de angivne forudsætninger er faktoraflønningerne givet ved grænseprodukterne, dvs.

$$w_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = \left(1-\alpha\right) K_t^{\alpha} \left(A_t L_t\right)^{-\alpha} A_t = \left(1-\alpha\right) \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} A_t \tag{5}$$

$$r_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha K_t^{\alpha-1} \left(A_t L_t\right)^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1} \tag{6}$$

Indkomstandelene beregnes som

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1-\alpha) K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{-\alpha} A_t L_t}{K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha}} = 1-\alpha \tag{7}$$

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \frac{\alpha K_t^{\alpha-1} (A_t L_t)^{1-\alpha} K_t}{K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha}} = \alpha \tag{8}$$

For vurdering af parameteren α lægges ofte til grund, at lønandelen anses for at ligge relativt relativt konstant omkring 2/3 svarende til α omkring 1/3.

2.2 Fra (1) haves:

$$\tilde{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha}}{(A_t L_t)^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha}} = \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} = \tilde{k}_t^{\alpha} \tag{9}$$

Ved at skrive (2) som $K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$ og dividere på begge sider med $A_{t+1}L_{t+1} = (1+n)(1+g)A_t L_t$ fås

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t\right]$$

og ved heri at indsætte udtrykket for $\tilde{y}_t$ fås transitionsligningen

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right] \tag{10}$$

som ønsket. Ved at trække $\tilde{k}_t$ fra på begge sider fås Solow-ligningen

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t &= \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t - (1+n)(1+g)\tilde{k}_t\right] \\ &= \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{k}_t^{\alpha} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t\right] \end{aligned} \tag{11}$$

2.3 Der skal etableres tilstrækkelige egenskaber ved transitionskurven for konvergens, eksempelvis:

1. Den passerer igennem (0,0). Fremgår umiddelbart af (10)
2. Er overalt voksende. Fremgår umiddelbart af (10)
3. Har entydig strengt positiv skæring med $45°-$linjen. Fremgår ved at sætte den firkantede parantes i Solow-ligningen (11) lig med nul:

$$s\tilde{k}_t^{\alpha} = (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t \Leftrightarrow$$

$$\tilde{k}_t = \tilde{k}^* \equiv \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{12}$$

hvor det er vigtigt, at det følger af parameterrestriktionerne, at $n+g+\delta+ng > 0$.

4. Har en overalt aftagende hældning. Fremgår af

$$\frac{\partial \tilde{k}_{t+1}}{\partial \tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left[s\alpha\tilde{k}_t^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]$$

hvor eksponenten $\alpha - 1$ er negativ.

Konvergens af $\tilde{k}_t$ til $\tilde{k}^*$ følger nu af trappeiteration i transitionsdiagranmmet. Dette skal illustreres (standardfigur, vises ikke her).

Steady state-værdien af $\tilde{y}_t$ følger ved at indsætte $\tilde{k}^*$ i udtrykket for $\tilde{y}_t$:

$$\tilde{y}^* = \left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha} = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{13}$$

For kapital/output-forholdet følger steady state-værdien af

$$z^* = \frac{\tilde{k}^*}{\tilde{y}^*} = \frac{\left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} = \frac{s}{n+g+\delta+ng}$$

En bruttoinvesteringsrate s på 20-30% kan være rimelig, og en samlet værdi af $n+g+\delta$ på 5-10% kan også være rimelig - begge dele på årsbasis og efter vestlige standarder. Dette peger på et plausibelt langsigtet kapital/output-forhold i området 2-6 (200-600%). [Evalueringen behøver ikke være netop sådan, bare den er fornuftig. En kvik besvarelse relaterer evt. sin evaluering til figuren fra opgave 1 og vurderer, om den fundne plausible størrelsesorden synes at være nogenlunde i overensstemmesle med empirien].

2.4 Ved at bruge udtryk ovenfor fås

$$z_t = \frac{\tilde{k}_t}{\tilde{y}_t} = \frac{\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t^{\alpha}} = \tilde{k}_t^{1-\alpha} \tag{15}$$

Tilpasningen i $\tilde{k}_t$ skal illustreres i Solow-diagrammet (standardfigur, vises ikke her). Det ses, at $\tilde{k}_t$ konvergerer monotont opad mod $\tilde{k}^*$, dvs. kapital per effektiv arbejder er voksende i hele tilpasningsforløbet. Det gælder ifølge ligning (15) så også for kapital/output-forholdet. Det fremgår af ligning (5), at reallønnen også er voksende i hele forløbet, idet både $\tilde{k}_t$ og A_t vokser. Det fremgår i øvrigt af (6), at reallejesatsen r_t og dermed realrenten $r_t - \delta$ aftager i hele forløbet. Indkomstandelene ligger ifølge (7) og (8) fast i hele tilpasningsforløbet, specielt ligger lønandelen fast på $1-\alpha$.

Det beskrevne forløb, hvor kapital/output-forholdet, efter at begivenheder har givet anledning til et kapitaltab, vokser jævnt frem mod en ny steady state er i fin overensstemmelse med Piketty's teser. Det forhold, at lønandelen i hele tilpasningsforløbet er konstant, er naturligvis ikke i overensstemmelee med Piketty's idé om, at lønandelen i den tilpasningsfase, hvor kapital/output-forholdet stiger, har en aftagende tendens. [Dette vendes der tilbage til i spørgsmålene 2.7 og 2.8].

2.5 Modellens konvergensrate udtrykker, hvor stor en andel af den tilbageværende afstand til steady state (målt ved forskellen mellem $\tilde{k}_t$ og $\tilde{k}^*$ eller mellem $\tilde{y}_t$ og $\tilde{y}^*$ eller mellem z_t og z^*), der tilbagelægges over 1 periode. Med det angivne udtryk for modellens konvergensrate, $(1-\alpha)(n+g+\delta)$, kunne en rimelig evaluering på årsbasis være $\frac{2}{3}\cdot 7,5\% = 5\%$ svarende til $\alpha \approx \frac{1}{3}$, og $n+g+\delta \approx 7,5\%$. Hvis ca. 5% af afstanden til steady state lukkes på 1 år, må $5 \cdot 10\% = 50\%$ være et *overkantsskøn* for, hvor meget der lukkes over et tiår (pga. rentes rente-effekten). Modellen samt plausible parameteværdier peger altså på, at det sagtens kan tage mere end et årti at tilbagelægge halvdelen af afstanden til steady state. Konvergens til steady state kan således vurderes at være en proces, der forløber så langsomt, at det reelt tager adskillige årtier før den nærmer sig at være tilendebragt.

Fra pensum er det kendt, at empiriske resultater peger på, at konvergens forløber betydeligt langsommere end den modelbaserede årlige konvergensrate på omkring 5% peger på. Konvergensrater på årsbasis omkring 1-2% kan således være empirisk plausible. Dette peger naturligvis blot på, at tilpasningsprocessen mod en ny steady state realistisk set forløber endnu langsommere.

Samlet set peger dette på, at Piketty's forståelse af det stigende kapital/output-forhold over adskillige årtier efter anden verdenskrig som en tilpasningsproces mod steady state sagtens kan være rigtig, og man kan derfor ikke udelukke, at dette forhold er på vej op mod et niveau som kendt eksempelvis fra slutningen af 1800-tallet.

Fra opgaveteksten gentages

$$K_{t+1} - K_t = s'Y_t, \quad 0 < s' < 1 \tag{2'}$$

2.6 Man behøver ikke at udføre nogen ny formel analyse for at besvare dette spørgsmål. Den nye model fremkommer jo fra den gamle blot ved at skrive s' i stedet for s og sætte $\delta = 0$. Fra (11) ovenfor må Solowligningen derfor være

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left[s'\tilde{k}_t^{\alpha} - (n+g+ng)\,\tilde{k}_t\right] \tag{16}$$

og fra (12)-(14) må steady state-værdierne af $\tilde{k}_t$, $\tilde{y}_t$ og z_t være

$$\tilde{k}^{*\prime} \equiv \left(\frac{s'}{n+g+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{17}$$

$$\tilde{y}^{*\prime} = \left(\frac{s'}{n+g+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{18}$$

$$z^{*\prime} = \frac{s'}{n+g+ng} \tag{19}$$

Betingelsen $n+g+ng>0$, som er opfyldt med de gjorte antagelser, sikrer igen monoton konvergens af $\tilde{k}_t$ mod $\tilde{k}^{*\prime}$. Da der fortsat gælder $z_t = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$, vil z_t kvalitativt udvikle sig over tid på samme måde som i den først betragtede model. Mht. *tilpasningsprocessen mod steady state* er der derfor ikke nogen kvalitativ forskel mellem de to modeller.

For begge de to modeller gælder endvidere, at *steady state*-værdien af kapital-output-forholdet, dvs. hhv. z^* og $z^{*\prime}$, bliver større, hvis $n+g$ skifter til en lavere værdi (man kan her tillade sig at se bort fra den under plausibele parameterværdier ganske lille faktor ng). For $n+g$ gående mod nul, vil z^* gå mod s/δ, mens $z^{*\prime}$ vil gå mod uendelig.

I relation til Pikettys idéer er forskellen, at en meget lav værdi (tæt på nul) for $n+g$ i den oprindelige model vil føre til en høj, men dog begrænset steady state-værdi for kapital/output-forholdet, mens den i den alternative formulering vil føre til en særdeles høj (i princippet ubegrænset) steady state-værdi for kapital/output-forholdet. For Piketty's idé om, at der kan være meget høje værdier af kapital/output-forholdet på vej i fremtiden som et resultat af en aftagende tendens i $n+g$, er den alternative formulering således mest understøttende; man kan dog ikke sige, den er nødvendig herfor.

Fra opgaveteksten gentages

$$Y_t = \left(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad 0<\alpha<1,\ \sigma>0, \neq 1 \tag{1'}$$

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} \tag{CES1}$$

$$z_t = \left(\alpha + (1-\alpha)\tilde{k}_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{CES2}$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\left[\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t\right) \tag{CES3}$$

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{(1-\alpha)\, s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{CES4}$$

$$z^* = \frac{s}{n+g+\delta+ng} \tag{CES5}$$

2.7 Man kan svare på dette spørgsmål ved at bruge de anførte formler og egenskaber, herunder at $\tilde{k}_t$ konvergerer monotont mod $\tilde{k}^*$ angivet i (CES4). I ligning (CES2) gælder, at hvis $\sigma < 1$, så er begge eksponenterne positive, og da vil en voksende værdi af $\tilde{k}_t$ betyde, at også z_t vokser. Hvis $\sigma > 1$, så er begge eksponenterne negative, og da vil en voksende værdi af $\tilde{k}_t$ igen betyde, at også z_t vokser. Konklusionen om, at en (større) destruktion af kapital vil blive efterfulgt af en (længere) tilpasningsfase med et voksende kapital/output-forhold holder altså igen, hvad enten σ er mindre end eller større end 1.

Der er imidlertid en vigtig forskel mht. hvordan lønandelen opfører sig i tilpasningsfasen. Det fremgår af (CES1), at hvis $\sigma < 1$ (eksponenten negativ), så vil lønandelen være *voksende* i en fase, hvor $\tilde{k}_t$ vokser, mens hvis $\sigma > 1$, vil lønandelen være aftagende i en fase, hvor $\tilde{k}_t$ vokser. Det er altså netop hvis $\sigma > 1$, at modellen giver den tilpasning i lønandelen, som er i overensstemmelse med Piketty's teser.

Lønandelen i steady state findes ved at indsætte $\tilde{k}^*$ for $\tilde{k}_t$ i (CES1)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{w_t L_t}{Y_t}\right)^* &= \frac{1-\alpha}{\alpha \left[\left(\frac{(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} \\
&= \frac{1-\alpha}{\frac{\alpha(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left((n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}} \\
&= \frac{(1-\alpha)\left((n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)}{(1-\alpha)\left((n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)} \\
&= 1 - \alpha \cdot \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\
&= 1 - \alpha \cdot (z^*)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}
\end{aligned}$$

Hvis $n+g$ skifter nedad, ses det umiddelbart af (CES5), at z^* vokser helt i overensstemmelse med Piketty's idé. Et højere z^* betyder en lavere steady state-lønandel, hvis og kun hvis $\sigma > 1$.

Piketty's idéer om, at kapital/outputforholdet vil være voksende både som et tilpasningsfænomen efter en større kapitaldestruktion og som et "steady state-fænomen" som følge af aftagende $n+g$ finder altså *ubetinget* støtte i modellen med en mere generel substitutionselasticitet, mens idéen om, at lønandelen vil være aftagende både som tilpasnings- og steady state-fænomen finder støtte *betinget af*, at substitutionselasticiteten er større end 1. Om dette er tilfældet er et emprisk spørgsmål, og de studerende kan ikke forventes at have en viden om dette.

2.8 Beregningerne i dette spørgsmål er indviklede og selv en særdeles god besvarelse behøver ikke tilnærmelsesvis komme igennem dem alle. Den rigtigt gode besvarelse kan skille sig ud blot ved at *indikere* vejen frem. For lønandelen bruges igen $w_t = \partial Y_t / \partial L_t$ osv.

$$\begin{aligned}
\frac{w_t L_t}{Y_t} &= \frac{\frac{\sigma}{\sigma-1}\left(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1}(1-\alpha)\frac{\sigma-1}{\sigma}(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} A_t L_t}{\left(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}} \\
&= \frac{(1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} = \frac{1-\alpha}{\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} \qquad \text{(CES1)}
\end{aligned}$$

For kapital/output-forholdet kan det være enkelt først at beregne output/kapital-forholdet

$$\begin{aligned}
\frac{Y_t}{K_t} &= \frac{\left(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{K_t} = \left(\frac{\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left(\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \Rightarrow \\
z_t &= \left(\frac{Y_t}{K_t}\right)^{-1} = \left(\alpha + (1-\alpha)\tilde{k}_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \qquad \text{(CES2)}
\end{aligned}$$

For Solowligningen beregnes først

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_t &\equiv \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{\left(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left(A_t L_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{A_t L_t} \\
&= \left(\frac{\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\left(A_t L_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\left(A_t L_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left[\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}
\end{aligned}$$

Dernæst fra at omskrive ligning (2) til $K_{t+1} = sY_t + (1-\delta) K_t$ og dividere på begge sider med $A_{t+1}L_{t+1} = (1+n)(1+g) A_t L_t$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{t+1} &= \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t\right) \\
&= \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\left[\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right)
\end{aligned}$$

Dette er transitionsligningen. Ved at trække $\tilde{k}_t$ fra på begge sider fås

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\left[\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t\right) \tag{CES3}$$

Steady state findes ved at sætte parantesen heri lig med nul

$$\begin{aligned}
s\left[\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} &= (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t \Leftrightarrow \\
s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left[\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\right] &= (n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \Leftrightarrow \\
s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}(1-\alpha) &= \left[(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]\tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \Leftrightarrow \\
\tilde{k}_t = \tilde{k}^* &\equiv \left(\frac{(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \qquad \text{(CES4)}
\end{aligned}$$

Når denne værdi sættes ind i (CES2) fås

$$
\begin{aligned}
z^* &= \left(\alpha + (1-\alpha)\left[\left(\frac{(1-\alpha)\, s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\right]^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left(\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{(1-\alpha)\, s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{-1}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left(\alpha + \frac{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left(\frac{\alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left(\frac{n+g+\delta+ng}{s}\right)^{-1} = \frac{s}{n+g+\delta+ng} \qquad \text{(CES5)}
\end{aligned}
$$