Eksamen på Økonomistudiet. Vinteren 2011

MATEMATIK A

1. årsprøve

Mandag den 21. februar 2011

(2 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Vi henleder din opmærksomhed på, at du skal besvare eksamensopgaven på det sprog, som du har tilmeldit dig ved eksamenstilmeldingen. Har du tilmeldt dig fagets engelske titel, skal du besvare det engelske opgavesæt på engelsk. Har du tilmeldt dig fagets danske titel eller den engelske titel med "eksamen på dansk" i parentes, skal du besvare det danske opgavesæt på dansk.

Er du i tvivl om, hvad du har tilmeldt dig, fremgår det af printet med din tilmelding fra de studerendes selvbetjening.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 V-1A rx

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A

Mandag den 21. februar 2011

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Integration ved substitution. Lad f være en kontinuert funktion, som er defineret på et åbent interval I, og lad endvidere J være et åbent interval, og lad $g : J \to I$ være en differentiabel funktion, der har kontinuert afledet g'. Lad F betegne en stamfunktion til funktionen f.

(1) Vis, at

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

(2) Udregn de ubestemte integraler

(a) $$\int (3x^2 + 7x + 9)^4\,(6x + 7)\,dx,$$

(b) $$\int \frac{1}{t(\ln(t))^5}\,dt$$

og

(c) $$\int e^s\Big(\sin(e^s) + 1\Big)\,ds.$$

(3) Udregn det bestemte integral

$$\int_0^2 9x^2 e^{x^3}\,dx\,.$$

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R} \wedge y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in D : f(x, y) = x^2 - \frac{y^4}{4} + \ln(y).$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$, og afgør, om det stationære punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for f.

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

Opgave 3. I økonomisk teori betragter man den såkaldte CES-funktion (CES = Constant Elasticity of Production) $Q = Q(K,L)$, som er givet ved forskriften

$$Q = Q(K,L) = F\Big(aK^r + (1-a)L^r\Big)^{\frac{1}{r}},$$

hvor $K > 0$ betegner investeret kapital, og $L > 0$ betegner udført arbejde. Desuden er F, a og r givne positive, reelle konstanter, hvor $0 < a < 1$.

(1) Vis, at funktionen Q er homogen og bestem homogenitetsgraden.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial Q}{\partial K}(K,L) \text{ og } \frac{\partial Q}{\partial L}(K,L).$$

(3) Udregn de partielle elasticiteter $\mathrm{El}_K Q$ og $\mathrm{El}_L Q$.

(4) Bestem $\mathrm{El}_K Q + \mathrm{El}_L Q$.