Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 V-1B rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Onsdag den 19. februar 2014

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert tal $a \in \mathbf{R}$ betragter vi ligningssystemet

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}.$$

(1) Løs ligningssystemet $(*)$ for ethvert $a \in \mathbf{R}$.

Løsning. Ligningssystemet $(*)$ har totalmatricen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

som omformes til echelonmatricen

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8-5a}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4a-5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2a-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Heraf får vi, at $x_1 = \frac{8-5a}{2}, x_2 = \frac{4a-5}{4}$ og $x_3 = \frac{2a-1}{4}$.

For enhver vektor $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$ betragter vi ligningssystemet

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = b_2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases}.$$

(2) Vis, at ligningssystemet $(**)$ har præcis en løsning for enhver vektor $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$.

Løsning. Ligningssystemet $(**)$ har den samme koefficientmatrix som ligningssystemet $(*)$, og fra løsningen ovenfor har vi, at denne koefficientmatrix er regulær. Dette viser så, at ligningssystemet $(**)$ har præcis en løsning for enhver vektor $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$.

For ethvert tal $c \in \mathbf{R}$ betragter vi ligningssystemet

$$(***) \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = c \; . \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

(3) Løs ligningssystemet $(***)$ for ethvert $c \in \mathbf{R}$.

Løsning. Ligningssystemet $(***)$ har totalmatricen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & c \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

som omformes til matricen

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & c-2 \end{pmatrix}.$$

Dette viser, at ligningssystemet $(***)$ ikke har nogen løsninger, hvis $c \neq 2$. Hvis $c = 2$, finder vi, at $x_1 = 4 - 4t, x_2 = -1 + t$ og $x_3 = t$, hvor $t \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = \ln(2 + x^2 + y^4).$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{2 + x^2 + y^4} \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{4y^3}{2 + x^2 + y^4}.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Det entydigt bestemte stationære punkt er $(0, 0)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi får, at

$$H(x, y) = f''(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4-2x^2+2y^4}{(2+x^2+y^4)^2} & -\frac{8xy^3}{(2+x^2+y^4)^2} \\ -\frac{8xy^3}{(2+x^2+y^4)^2} & \frac{24y^2+12x^2y^2-4y^6}{(2+x^2+y^4)^2} \end{pmatrix}.$$

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for f.

Løsning. Da funktionen ln er voksende, og da $2 + x^2 + y^4 \geq 2$, og da vi endvidere har, at $2 + x^2 + y^4 = 2$, når og kun når $(x, y) = (0, 0)$, ser vi, at f har globalt minimum i det stationære punkt $(0, 0)$ med den globale minimumsværdi $f(0, 0) = \ln 2$.

Vi bemærker også, at

$$f(x, 0) = \ln(2 + x^2) \to \infty \text{ for } x \to \pm\infty.$$

Disse resultater viser, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [\ln 2, \infty[$.

(5) Vis, at funktionen f er kvasikonveks.

Løsning. Vi betragter funktionen $i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : i(x, y) = 2 + x^2 + y^4,$$

og vi bemærker, at

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ og } \frac{\partial i}{\partial y}(x, y) = 4y^3,$$

så denne funktion har Hessematricen

$$i''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Det er klart, at Hessematricen $i''(x, y)$ er positiv semidefinit overalt på mængden $\mathbf{R}^2$, og dermed er i en konveks funktion. Da logaritmefunktionen ln er voksende, er funktionen $f = \ln \circ\, i$ åbenbart kvasikonveks.

(6) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1, 1, f(1, 1)\big)$.

Løsning. Vi ser, at $f(1, 1) = \ln 4$, og at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1.$$

Heraf finder vi, at den omhandlede tangentplan har ligningen

$$z = \ln 4 + \frac{1}{2}(x - 1) + (y - 1) = \frac{1}{2}x + y + \ln 4 - \frac{3}{2}.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(6t^2 + 2t + 1\Big)x = \Big(2t + 1\Big)e^{-2t^3}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Idet

$$\int (6t^2 + 2t + 1)\, dt = 2t^3 + t^2 + t + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

får vi (ved at anvende panserformlen), at

$$x = Ce^{-(2t^3+t^2+t)} + e^{-(2t^3+t^2+t)} \int e^{2t^3+t^2+t} e^{-2t^3} (2t + 1)\, dt =$$

$$Ce^{-(2t^3+t^2+t)} + e^{-(2t^3+t^2+t)} \int e^{t^2+t}\, d(t^2+t) = Ce^{-(2t^3+t^2+t)} + e^{-(2t^3+t^2+t)} e^{t^2+t} =$$

$$Ce^{-(2t^3+t^2+t)} + e^{-(2t^3)}, \text{ hvor } C \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 1756$ er opfyldt.

Løsning. Vi ser straks, at $C = 1755$, så

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = 1755e^{-(2t^3+t^2+t)} + e^{-(2t^3)}.$$

(3) Udregn differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0).$$

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0) + 1756 = 1, \quad \text{så} \quad \frac{d\tilde{x}}{dt}(0) = -1755.$$

Opgave 4. En kvadratisk matrix A kaldes antisymmetrisk (eller skævsymmetrisk), hvis $A^T = -A$, hvor A^T betegner den til A transponerede matrix.

(1) Lad $s \in \mathbf{R}$, og betragt 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & s^2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2s+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem $s \in \mathbf{R}$, så matricen $A(s)$ er antisymmetrisk.

Løsning. Vi ser, at matricen $A(s)$ er antisymmetrisk, hvis og kun hvis

$$s^2 = -2s - 1 \Leftrightarrow s^2 + 2s + 1 = 0 \Leftrightarrow (s+1)^2 = 0 \Leftrightarrow s = -1.$$

(2) Vis, at $\det A = 0$ for enhver antisymmetrisk $n \times n$ matrix A, hvis n er et ulige naturligt tal.

Løsning. Vi ved, at $\det A^T = \det A$. Desuden ved vi, at $\det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A$.

Hvis n er ulige, får vi derfor, at $\det A = -\det A$, hvoraf man ser, at $\det A = 0$.

(3) Lad A være en vilkårlig antisymmetrisk matrix. Hvad ved vi da om diagonalelementerne?

Løsning. Diagonalelementerne er alle 0.

(4) Lad atter A være en vilkårlig antisymmetrisk matrix, og betragt matricen $B = AA = A^2$.

Vis, at B er symmetrisk, altså at $B^T = B$.

Løsning. Vi finder, at

$$B^T = (AA)^T = A^T A^T = (-A)(-A) = AA = B,$$

hvoraf påstanden fremgår.