Eksamen på Økonomistudiet vinter 2019-20

Matematik B

7. januar 2020

(3-timers prøve med skriftlige hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 4 sider incl. denne forside.

Til dette eksamenssæt hører 0 bilag.

Syg under eksamen:

Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du

- kontakte en eksamensvagt for at få hjælp til registreringen i systemet som syg og til at aflevere blankt
- forlade eksamen
- kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest 5 dage efter eksamensdagen.

Pas på, du ikke begår eksamenssnyd!

Det er eksamenssnyd, hvis du under prøven

- Bruger hjælpemidler, der ikke er tilladt
- Kommunikerer med andre eller på anden måde modtager hjælp fra andre
- Kopierer andres tekster uden at sætte citationstegn eller kildehenvise, så det ser ud som om, det er din egen tekst
- Bruger andres idéer eller tanker uden at kildehenvise, så det ser ud som om, det er din egen idé eller dine egne tanker
- Eller hvis du på anden måde overtræder de regler, der gælder for prøven

Du kan læse mere om reglerne for eksamenssnyd på Din Uddannelsesside og i Rammestudieordningens afs. 4.12.

Opgave 1

Betragt matricerne A og B givet ved

A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ og B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Udregn matrixprodukterne AB og BA.

2) Vis, at matricen AB ikke er regulær og ikke er symmetrisk.

3) Vis, at matricen BA er regulær og bestem den inverse matrix $(BA)^{-1}$.

4) Vis, at matricen BA har egenværdierne $2 + \sqrt{7}$ og $2 - \sqrt{7}$.

5) Vis, at matrixproduktet $B^T B$ ikke er en regulær matrix. Her betegner B^T den til B transponerede matrix.

6) Vis, at $\lambda = 0$ er en egenværdi for $B^T B$.

7) Bestem egenrummet hørende til egenværdien $\lambda = 0$ for $B^T B$.

Opgave 2

Lad funktionerne $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved forskrifterne

$$f(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 4xy + 1$$

og

$$g(x,y) = 2y \cdot \exp(x^3)$$

Lad desuden mængderne K_1 og K_2 være givet ved

$$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$

og

$$K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge 0 \leq y \leq 3x\}$$

1) Udregn integralet

$$\int_{K_1} f(x,y)\, d(x,y)$$

2) Udregn integralet

$$\int_{K_2} g(x,y)\, d(x,y)$$

Vink til 2) : Integrér først med hensyn til y.

Opgave 3

Betragt differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} + (\sin(t))\,x = \sin(t).$$

1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.

2) Find den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen, hvor betingelsen $\tilde{x}(\pi) = 8$ er opfyldt.

Opgave 4

Lad funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}y^4 + 2x^2 + y^2 - xy + 7.$$

1) Bestem de partielle afledede $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ samt Hessematricen $H(x,y)$ for f i ethvert punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Vis, at f er en strengt konveks funktion.

3) Vis, at punktet $(0,0)$ er et stationært punkt for f.

4) Find værdimængden for f.

Opgavesættet slut