Rettevejledning til
Eksamen på Økonomistudiet, vinter 2016-2017
Makro I
2. årsprøve
6. januar, 2017

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Overordnet om opgaven:

At levere gode og fyldestgørende svar på *alle* delspørgsmål må anses for at være ganske krævende, hvorfor den højest mulige karakter evt. skal kunne opnås med mindre end det.

Opgave 1: Kapitalopbygning og fordeling

1.1 Hvis kapital per effektiv arbejder (i pensums notation, $\tilde{k}_t \equiv K_t/(A_t L_t)$) først befinder sig i steady state langsigtsligevægt ($\tilde{k}_t = \tilde{k}^* > 0$), og der derefter indtræffer en stor engangsdestruktion af kapital K_t, men ikke en tilsvarende destruktion af teknologi A_t eller arbejdskraft L_t, vil det naturligvis føre kapital per effektiv arbejder langt under sin hidtidige værdi lig med ligevægtsværdien. Når de underliggende strukturelle forhold ikke er ændrede, vil selve langsigtsværdien imidletid være uændret, og derfor starter en proces, hvor kapital per effektiv arbejder begynder at stige fra sit lavere udgangspunkt tilbage op mod den samme, gamle langsigtsværdi.

Det, der føder processen, er, at så længe der er mindre kapital per effektiv arbejder end i langsigtsligevægten, vil investeringbehovet per effektiv arbejder for at fastholde $\tilde{k}_t$ ($\approx (n+g+\delta)\tilde{k}_t$) være mindre end den faktiske investering per effektiv arbejder ($= s\tilde{k}_t^{\alpha}$, når der betragtes en Cobb-Douglas (CD) produktionsfunktion, $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$), hvorfor $\tilde{k}_t$ stiger. I lansigtsligevægten er de to netop lig med hinanden, og $\tilde{k}_t$ ligger derfor fast. Når K_t og dermed $\tilde{k}_t$ falder, vil $(n+g+\delta)\tilde{k}_t$ falde proportionalt med $\tilde{k}_t$, mens $s\tilde{k}_t^{\alpha}$ falder *mindre end* proportionalt med $\tilde{k}_t$ pga. diminishing returns til kapital i produktionen ($\alpha < 1$), som sikrer, at når kapitalen er relativt knap, har den et relativt højt grænseprodukt.

1.2 I den proces hvor kapital per effektiv arbejder stiger, vil også kapital/output-forholdet ($z_t = K_t/Y_t$) stige. Med en CD produktionsfunktion består der det simple forhold mellem $\tilde{k}_t$ og z_t, at $z_t = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$ (idet $K_t/Y_t = K_t/(K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}) = (K_t/(A_t L_t))^{1-\alpha}$). Så når $\tilde{k}_t$ stiger, så stiger også z_t, dog mindre end proportionalt med z_t (for $0 < \alpha < 1$): Den gradvise opbygning af kapital bidrager til højere output, men output kan ikke følge proportionalt med kapital, igen pga. diminishing returns til kapital.

Fra pensum vides præcist, at stigningen i K/Y-forholdet ikke nødvendigvis indebærer, at den funktionelle indkomstfordeling påvirkes i en bestemt retning, for med Cobb-Douglas produktiosnfunktionen er kapitalens og arbejdskraftens indkomstandele konstante, hhv. $r_t K_t/Y_t = \alpha$ og $w_t L_t/Y_t = 1 - \alpha$, hele vejen. Når K_t/Y_t stiger, falder afkastraten r_t på kapital altså helt tilsvarende, så hele $r_t K_t/Y_t$ er uændret.

[Det følgende kender de studerende til fra opgaveregning i semesteret, men det kan ikke generelt forventes]. Når der bygges kapital op, er det naturligt, at afkastgraden på kapital falder, igen pga. diminishing returns: Større kapitalrigelighed giver mindre grænseprodukt. Substitutionsmulighederne er afgørende for med hvor meget. Jo lettere kapital substituerer for effektivt arbejdsinput, jo mindre behøver prisen på kapital at falde, for at de profitmaksimrende virksomheder vil absorbere den større mængde kapital.

Så relativt nem substitution giver relativt lille fald i r_t. CD poduktionsfunktionen med en substitutionselasticitet på 1 er netop grænsetilfældet, hvor r_t falder lige så mange procent, som K_t/Y_t stiger. Med nemmere substitution, dvs. substitutionselasticitet større end 1, vil r_t falde mindre, og r_tK_t/Y_t vil stige og omvendt.

1.3 [Her er der frit slag til at overveje og fyre nogle ting af, man har kendskab til fra undervisningen i Makro I og i øvrigt]. Både Europa og Japan oplevede stor destruktion af kapital op til efter anden verdenskrig via verdenskrigene og krisen i 30erne. Dette må forventes i perioden fra omkring 1950 at have givet anledning til en “naturlig” genopbygning af kapital, hvor både kapital per effektiv arbejder og kapital/output-forholdet er steget, hvilket igen må forventes at have givet anledning til en økonomisk vækstrate større end den “naturlige” langsigtede vækstrate. Om det også må forventes at have skubbet den funktionelle indkomstfordeling i en bestemt retning afhænger som nævnt af komplicerede substitutionsegenskaber ved produktionsfunktionen, altså af hvor let faktorerne substituerer for hinanden. Thomas Piketty mener, at substitutionen foregår let, hvorfor kapitalopbygning må forventes at gå hånd i hånd med større kapitalandel, hvilket han også mener kan dokumenteres empirisk.

Opgave 2: En Solow-model med fossile brændsler og klimaeksternalitet

Modellen gentaget fra opgaven:

$$Y_t = D_t \cdot K_t^{\alpha} \left(A_t L_t\right)^{\beta} E_t^{\varepsilon}, \quad \alpha, \beta, \varepsilon > 0, \quad \alpha + \beta + \varepsilon = 1 \tag{1}$$

$$D_t = 1 \tag{2}$$

$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta) K_t, \quad 0 < \delta < 1 \tag{3}$$

$$L_{t+1} = (1+n) L_t, \quad n \geq 0 \tag{4}$$

$$A_{t+1} = (1+g) A_t, \quad g \geq 0 \tag{5}$$

$$R_{t+1} = R_t - E_t \tag{6}$$

$$E_t = s_E R_t, \quad 0 < s_E < \delta \tag{7}$$

Anvendte definitioner også angivet i opgaven, $y_t \equiv Y_t/L_t$, $k_t \equiv K_t/L_t$, $e_t \equiv E_t/L_t$, $z_t \equiv K_t/Y_t = k_t/y_t$, $g_t^y \equiv \ln y_t - \ln y_{t-1}$ og $g_t^k \equiv \ln k_t - \ln k_{t-1}$.

2.1 Ved at indsætte (7) i (6) fås $R_{t+1} = R_t - s_E R_t = (1 - s_E)R_t$. Heraf følger, at $(R_{t+1} - R_t)/R_t = -s_E$, hvilklet direkte viser, at vækstraten i R_t er $-s_E$. Når man sætter

$D_t = 1$ ind i (1) og dividerer på begge sider med L_t fås

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^{\alpha}\left(A_t L_t\right)^{\beta} E_t^{\varepsilon}}{L_t} = \frac{K_t^{\alpha}\left(A_t L_t\right)^{\beta} E_t^{\varepsilon}}{L_t^{\alpha} L_t^{\beta} L_t^{\varepsilon}} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}\left(\frac{A_t L_t}{L_t}\right)^{\beta}\left(\frac{E_t}{L_t}\right)^{\varepsilon}$$

hvor det blev brugt, at $\alpha + \beta + \varepsilon = 1$. Med de anførte definitioner står netop her

$$y_t = k_t^{\alpha} A_t^{\beta} e_t^{\varepsilon} \tag{8}$$

Ved at tage den naturlige logaritme på begge sider i (8) fås

$$\ln y_t = \alpha \ln k_t + \beta \ln A_t + \varepsilon \ln e_t$$

og ved at skrive denne op også for periode $t-1$ og efterfølgende trække fra fås

$$\ln y_t - \ln y_{t-1} = \alpha\left(\ln k_t - \ln k_{t-1}\right) + \beta\left(\ln A_t - \ln A_{t-1}\right) + \varepsilon\left(\ln e_t - \ln e_{t-1}\right)$$

Her gælder fra definitioner samt (7)

$$\begin{aligned}
\ln e_t - \ln e_{t-1} &= \ln \frac{E_t}{L_t} - \ln \frac{E_{t-1}}{L_{t-1}} = \ln s_E R_t - \ln s_E R_{t-1} + \ln L_{t-1} - \ln L_t \\
&= \left(\ln R_t - \ln R_{t-1}\right) - \left(\ln L_t - \ln L_{t-1}\right) \\
&\approx -s_E - n
\end{aligned}$$

hvor det i sidste linje blev brugt, at de eksakte vækstrater i hhv. R_t og L_t er $-s_E$ og n, det sidste fra (4). Ved at indsætte ovenfor for $\ln e_t - \ln e_{t-1}$ og også indsætte, at fra (5) er $\ln A_t - \ln A_{t-1} \approx g$ samt bruge definitionerne af g_t^y og g_t^k fås netop

$$g_t^y \approx \alpha g_t^k + \beta g - \varepsilon n - \varepsilon s_E \tag{9}$$

2.2 Når $z_t = k_t / y_t$ er konstant, må der gælde $z_t = z_{t-1}$, og dermed $\ln z_t = \ln z_{t-1}$, eller $\ln k_t - \ln k_{t-1} = \ln y_t - \ln y_{t-1}$, eller $g_t^y = g_t^k$. Ved at erstatte g_t^k med g_t^y i (9) fås

$$(1-\alpha)\, g_t^y \approx \beta g - \varepsilon n - \varepsilon s_E$$

og ved her at bruge $1 - \alpha = \beta + \varepsilon$ fås netop

$$g_t^y \approx \frac{\beta}{\beta+\varepsilon} g - \frac{\varepsilon}{\beta+\varepsilon} n - \frac{\varepsilon}{\beta+\varepsilon} s_E \equiv g^y \tag{10}$$

Med de angivne plausible parameterværdier fås

$$\begin{aligned}
g^y &= 0,75g - 0,25 \cdot 0,01 - 0,25 \cdot 0,005 \\
&= 0,75g - 0,0025 - 0,00125 \\
&= 0,75g - 0,00375
\end{aligned}$$

I forhold til en standard (kapitel 5-) Solowmodel uden udtømmelige naturressourcer (hvor $g_t^y = g$), opstår følgende "vækstfradrag": Effekten af g nedsættes til 3/4 kraft, og dertil kommer et fradrag på små 0,4 pct. på årsbasis. Intuitionen bag disse fradrag er, at de voksende faktorer, effektivt arbejdsinput og mest sandsynligt også kapital, presser på den begrænsede og aftagende mængde af naturressourcer, hvorved diminishing returns til de voksende faktorer sætter sig igennem.

På trods af fradragene ses, at en teknologisk vækstrate g som blot overstiger 0,5 pct. på årsbasis er nok til at frembringe langsigtet strengt positiv vækst i indkomst per arbejder. For $g = 0,024$ fås en langsigtet vækstrate i BNP per arbedjer på knap 1,5 pct., hvilket er en pæn høj vækst. Fra vækstregnskab over lange perioder vil man typisk finde estimerede værdier af det, der her er g, på langt over 0,5 pct. om året, og gerne op til omkring 2-2$\frac{1}{2}$ pct. på årsbasis. Fra disse numeriske øvelser peger modellen, *som den står* således overvejende på langsigtet vækst*optimisme*.

2.3 I vores model vil $R_t \to 0$ på langt sigt, og det indebærer, at også energiinput $E_t \to 0$, og dermed $e_t \to 0$. Da energiinput er essentielt i produktionen, ville dette for givne værdier af de øvrige inputs betyde $Y_t \to 0$, og $y_t \to 0$, jf. (8). Når der alligevel kan være strengt positiv vækst i y_t på langt sigt (under plausible parameterværdier), skyldes det, at $A_t \to \infty$ (for $g > 0$), og dermed også $A_t L_t \to \infty$, og også $k_t \to \infty$ på langt sigt. De stadigt voksende mængder af teknologi og kapital per arbedjer kan altså kompensere/substituere for den mod nul svindende mængde af ressource per arbejder. Dette hænger på den præcise grad af substituerbarhed mellem faktorerne, som er antaget med Cobb-Douglas (CD) produktionsfunktionen (1), og vækstoptimismen hænger således på denne specifikation.

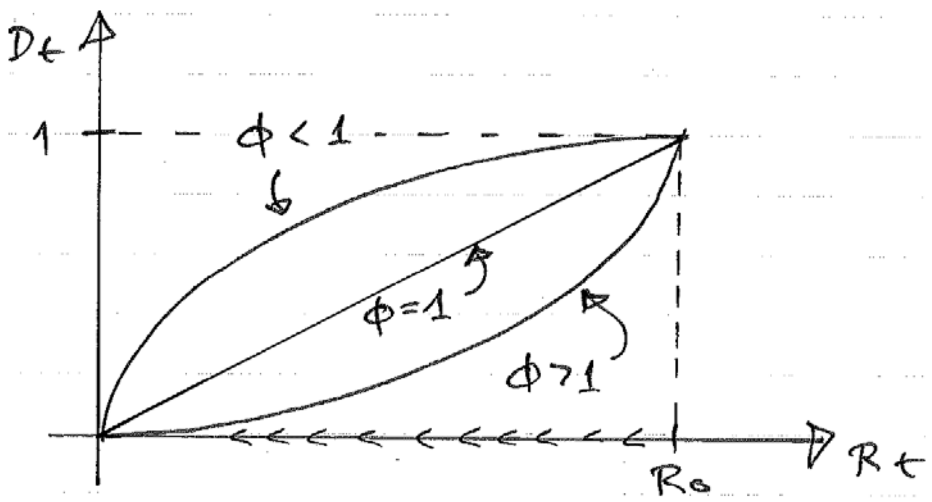
Fra opgaver i tilknytning til pensum har de studerende kendskab til, at substitutionselasticiteten mellem par af inputs for en CD produktionsfunktion netop er 1, men kan være enten mindre end, lig med eller større end 1 for mere generelle såkaldte CES produktionsfunktioner. Det vil kun pynte at lufte dette kendskab. Intuitivt vil en grad af substituerbarhed mindst lige så stor som med en CD produktionsfunktion indebære vækst-optimisme. Om dette så er en realistisk grad, er en større og kritisk diskussion, som de studerende ikke kan forventes at have kendskab til. I fortsættelsen lægges CD specifikationen til grund. [Der er en pointe i at lægge sig fast på et tilfælde med vækstoptimisme ud fra et rent ressourceknaphedssynspunkt og undersøge, hvordan klimaeksternaliteten herudfra påvirker de langsigtede vækstudsigter].

Alternativ antagelse om D_t gentaget fra opgaveteksten

$$D_t = \left(\frac{R_t}{R_0}\right)^{\phi}, \quad \phi > 0, \quad 0 \le R_t \le R_0 \tag{2'}$$

hvor det nu som anført antages, at $(1 - s_E)^{\frac{\varepsilon+\phi}{\beta+\varepsilon}} > (1 - \delta)$.

2.4 Figuren med D_t som funktion af R_t for $0 \le R_t \le R_0$ skal se således ud



Figur 1

Bemærk, at efterhånden som olien bruges, bevæger man sig i figuren fra R_0 mod venstre. En plausibel antagelse om stigende ekstern grænseomkostning ved udledning peger derfor ifølge figuren på, at $\phi < 1$ er mest plusibelt. Dette betyder, at hvis specifikationen i (2') i øvrigt accepteres, så er $\phi = 1$ en øvre grænse for den styrke, det kan være rimeligt at tillægge klimaeksternaliteten.

2.5 Der skal nu blot gennemføres operationer for den nye model parallelt til 2.1 og 2.2 ovenfor. Per arbejder-produktionsfunktionen bliver

$$y_t = \left(\frac{R_t}{R_0}\right)^{\phi} \cdot k_t^{\alpha} A_t^{\beta} e_t^{\varepsilon}$$

hvorfra

$$\ln y_t = -\phi \ln R_0 + \phi \ln R_t + \alpha \ln k_t + \beta \ln A_t + \varepsilon \ln e_t$$

og da

$$\ln y_t - \ln y_{t-1} = \phi\left(\ln R_t - \ln R_{t-1}\right) + \alpha\left(\ln k_t - \ln k_{t-1}\right) + \beta\left(\ln A_t - \ln A_{t-1}\right) + \varepsilon\left(\ln e_t - \ln e_{t-1}\right)$$

Her gælder $\ln R_t - \ln R_{t-1} \approx -s_E$ og uændret som ovenfor $\ln e_t - \ln e_{t-1} \approx -s_E - n$, hvorfor

$$\begin{aligned} g_t^y &\approx -\phi s_E + \alpha g_t^k + \beta g - \varepsilon s_E - \varepsilon n \\ &= \alpha g_t^k + \beta g - \varepsilon n - (\phi + \varepsilon) s_E \end{aligned}$$

Med $g_t^y = g_t^k$ og $1 - \alpha = \beta + \varepsilon$ haves så

$$g_t^y \approx \frac{\beta}{\beta + \varepsilon} g - \frac{\varepsilon}{\beta + \varepsilon} n - \frac{\varepsilon + \phi}{\beta + \varepsilon} s_E \equiv g^y \tag{11}$$

Det nye i forhold til (10) er, at koefficienten til s_E nu er $-\frac{\varepsilon+\phi}{\beta+\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{\beta+\varepsilon} - \frac{\phi}{\beta+\varepsilon}$ mod før bare $-\frac{\varepsilon}{\beta+\varepsilon}$. Dette er en direkte følge af eksternaliteten, hverved olie forbrugt påvirker produktionen negativt. For en numerisk evaluering kan man igen indsætte de plausible parameterværdier ovenfor

$$\begin{aligned} g^y &= 0,75g - 0,0025 - 0,00125 - \frac{\phi}{0,8} 0,005 \\ &= 0,75g - 0,00375 - \phi \cdot 0,00625 \end{aligned}$$

Det nye er det sidste led, for hvilket en øvre evaluering (for $\phi = 1$) er et fradrag på godt 0,6 pct.-point på årsbasis. Dette er et betydeligt vækstfradrag, men altså også en øvre evaluering. For eksempelvis $\phi = \frac{1}{2}$ fås, at det nye fradrag er godt 0,3 pct.-pont, og et g på blot 1 pct. er nok til at skabe positiv økonomisk vækst. For den øvre evaluering er de to sidst led tilsammen -1 pct.-point på årsbasis, så eksempelvis $g = 2$ pct. per år vil give en langsigtet økonomisk vækst på $\frac{1}{2}$ pct. om året, hvilket man måske nok historisk set kan betragte som lavt, men som ikke desto mindre er en betydelig positiv vækst.

Konklusionen synes altså at være, at selv om klimaeksternaliteten som her formuleret kan give anledning til et ganske betydeligt langsigtet vækstfradrag, så støtter modellen igen overvejende langsigtet vækstoptimisme. De antagne substitutionsmuligheder via CD-funktionen (1) og klimaeksternalitens præcise form (2') er naturligvis afgørende for denne konklusion. Men med de gjorte antagelser i øvrigt er det altså igen en mulighed, at mere teknologi og kapital på langt sigt kan kompensere/substituere for ikke blot den rene knaphedseffekt af olieressourcens udtømning, men også for den negative eksterne produktionspåvirkning af al hidtil udledt klimagas. [Som det vil fremgå nedenfor, er den antagne "ikke-katastrofiske" form (2') af klimaeksternaliteten afgørende for denne konklusion].

2.6 Dette og det næste spørgsmål er relativt tekniske, men operationernes type er velkendte fra pensum. For kapital/output-forholdet fås

$$z_t = \frac{k_t}{y_t} = \frac{k_t}{\left(\frac{R_t}{R_0}\right)^{\phi} k_t^{\alpha} (A_t)^{\beta} e_t^{\varepsilon}} = \left(\frac{R_t}{R_0}\right)^{-\phi} k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} e_t^{-\varepsilon}$$

Så

$$z_{t+1} = \left(\frac{R_{t+1}}{R_0}\right)^{-\phi} k_{t+1}^{1-\alpha} A_{t+1}^{-\beta} e_{t+1}^{-\varepsilon}$$

Ved her at bruge $R_{t+1} = (1 - s_E)R_t$ (gentaget) samt $K_{t+1} = sY_t + (1 - \delta) K_t$ osv. fås

$$z_{t+1} = \left(\frac{(1 - s_E) R_t}{R_0}\right)^{-\phi} \left(\frac{sY_t + (1 - \delta) K_t}{(1 + n) L_t}\right)^{1-\alpha} (1 + g)^{-\beta} A_t^{-\beta} \left(\frac{s_E (1 - s_E) R_t}{(1 + n) L_t}\right)^{-\varepsilon}$$

Ved at samle og bruge $1 - \alpha - \varepsilon = \beta$ osv. fås

$$z_{t+1} = (1 - s_E)^{-\phi-\varepsilon} [(1 + n) (1 + g)]^{-\beta} \left(\frac{R_t}{R_0}\right)^{-\phi} [sy_t + (1 - \delta) k_t]^{1-\alpha} A_t^{-\beta} e_t^{-\varepsilon}$$

Man ser, at z_t begynder at opstå ude til højre. Derfor: Ved inde i i den anden firkantede parantes at sætte k_t udenfor parantes og rykke lidt rundt på rækkefølgen fås

$$z_{t+1} = (1 - s_E)^{-\phi-\varepsilon} [(1 + n) (1 + g)]^{-\beta} \left[s\frac{y_t}{k_t} + (1 - \delta)\right]^{1-\alpha} \underbrace{\left(\frac{R_t}{R_0}\right)^{-\phi} k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} e_t^{-\varepsilon}}_{=z_t}$$

Nu er z_t opstået ude til højre og ved også at bruge $y_t/k_t = 1/z_t$ fås

$$z_{t+1} = (1 - s_E)^{-\phi-\varepsilon} [(1 + n) (1 + g)]^{-\beta} \left[\frac{s}{z_t} + (1 - \delta)\right]^{1-\alpha} z_t$$

Her sættes endelig $1/z_t$ udenfor parantes inde i den anden firkantede parantes, dvs. man bruger $\left[\frac{s}{z_t} + (1 - \delta)\right]^{1-\alpha} = \left[(s + (1 - \delta) z_t) \frac{1}{z_t}\right]^{1-\alpha} = [s + (1 - \delta) z_t]^{1-\alpha} z_t^{\alpha-1}$, hvilket fører til

$$z_{t+1} = \left(\frac{1}{1 - s_E}\right)^{\varepsilon+\phi} \left(\frac{1}{(1 + n) (1 + g)}\right)^{\beta} (s + (1 - \delta) z_t)^{1-\alpha} z_t^{\alpha} \qquad (12)$$

2.7 Inspektion af (12) viser direkte, at transitionskurven, dvs. grafen for z_{t+1} som funktion af z_t, opfylder: 1) Den passerer igennem $(0, 0)$, og 2) den er overalt strengt voksende. At der også gælder: 3) Der er en entydig, strengt positiv skæring med 45°-linjen, indses ved at løse for en evt. steady state værdi $z_t = z_{t+1} = z > 0$ for dynamikken (12)

$$z = \left(\frac{1}{1 - s_E}\right)^{\varepsilon+\phi} \left(\frac{1}{(1 + n) (1 + g)}\right)^{\beta} (s + (1 - \delta) z)^{1-\alpha} z^{\alpha}$$

Ved at dividere på begge sider med z^{α} og efterfølgende opløfte på begge sider til potensen $\frac{1}{1-\alpha}$ og endelig bruge $1-\alpha=\beta+\varepsilon$ fås

$$z=\left(\frac{1}{1-s_E}\right)^{\frac{\varepsilon+\phi}{\beta+\varepsilon}}\left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\varepsilon}}(s+(1-\delta)z)$$

For at isolere z findes først

$$z\left[1-\left(\frac{1}{1-s_E}\right)^{\frac{\varepsilon+\phi}{\beta+\varepsilon}}\left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\varepsilon}}(1-\delta)\right]=\left(\frac{1}{1-s_E}\right)^{\frac{\varepsilon+\phi}{\beta+\varepsilon}}\left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\varepsilon}}s$$

Ved at gange igennem med $(1-s_E)^{\frac{\varepsilon+\phi}{\beta+\varepsilon}}[(1+n)(1+g)]^{\frac{\beta}{\beta+\varepsilon}}$ fås

$$z\left[(1-s_E)^{\frac{\varepsilon+\phi}{\beta+\varepsilon}}[(1+n)(1+g)]^{\frac{\beta}{\beta+\varepsilon}}-(1-\delta)\right]=s$$

og når z isoleres heri

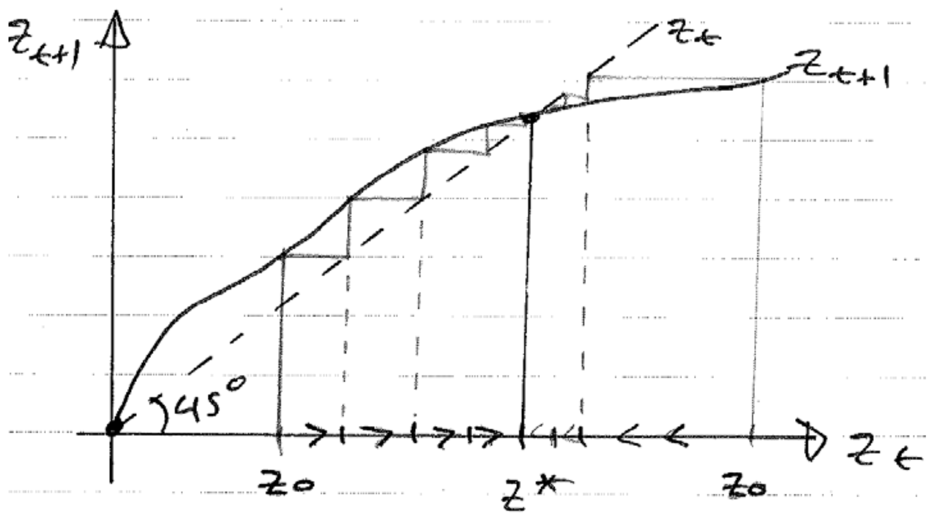
$$z=z^{*}\equiv\frac{s}{(1-s_E)^{\frac{\varepsilon+\phi}{\beta+\varepsilon}}[(1+n)(1+g)]^{\frac{\beta}{\beta+\varepsilon}}-(1-\delta)}>0 \tag{13}$$

Fortegnet følger af antagelserne $n\geq 0$, $g\geq 0$ samt $(1-s_E)^{\frac{\varepsilon+\phi}{\beta+\varepsilon}}>(1-\delta)$.

Endelig findes transitionskurvens hældning, idet vi for for nemheds skyld definerer $J\equiv\left(\frac{1}{1-s_E}\right)^{\varepsilon+\phi}\left(\frac{1}{(1+n)(1+g)}\right)^{\beta}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_{t+1}}{\partial z_t} &= J\left[(1-\alpha)(s+(1-\delta)z_t)^{-\alpha}(1-\delta)z_t^{\alpha}+\alpha(s+(1-\delta)z_t)^{1-\alpha}z_t^{\alpha-1}\right]\\ &= J(s+(1-\delta)z_t)^{-\alpha}z_t^{\alpha-1}\left[(1-\alpha)(1-\delta)z_t+\alpha(s+(1-\delta)z_t)\right]\\ &= J(s+(1-\delta)z_t)^{-\alpha}z_t^{\alpha-1}\left[(1-\delta)z_t+\alpha s\right]\end{aligned}$$

Heraf ses: 4) Hældningen på transitionskurven går imod uendelig for z_t gående imod nul. Egenskaberne 1) til 4) medfører, at transitionsdiagrammet principielt ser ud som følger



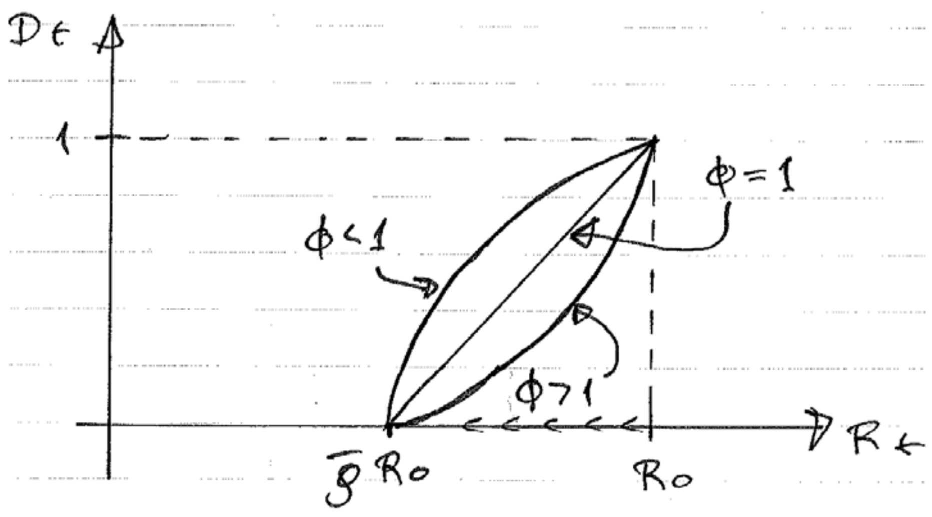
Figur 2

hvilket er tilstrækkeligt (men ikke nødvendigt) for konvergens mod z^* fra en vilkårlig intialværdi $z_0 > 0$ som indikeret i diagrammet ved trappeiteration.

2.8 Ny alternativ antagelse om D_t gentaget fra opgaveteksten

$$D_t = \left(\frac{\frac{R_t}{R_0} - \bar{\rho}}{1 - \bar{\rho}} \right)^{\phi}, \quad 0 < \bar{\rho} < 1, \quad \phi > 0, \quad \bar{\rho} R_0 \leq R_t \leq R_0 \tag{2''}$$

Skitse af D_t som funktion af R_t ser ud som følger



Figur 3

En plausibel antagelse om voksende ekstern grænseomkostning betyder igen, at $\phi < 1$ forekommer mest rimeligt.

Den dybere forskel mellem formuleringerne (2') og (2") er, at i henhold til (2') indtræder klimaproblemerne gradvist og "blødt" i den forstand, at det først er er for $R_t \to 0$, at $D_t \to 0$, mens der i henhold til (2") er en "hård kant" i betydningen, at $D_t \to 0$ allerede for $R_t \to \bar{\rho} R_0 > 0$, altså at skadevirkningen er total før end bogstavelig talt al olien er brugt.

Det er klart og kræver ingen formel analyse, at med de antagelser, der er gjort i modellen, hvor man hver periode bruger en strengt positiv andel s_E af den tilbageværende mængde olie (hvilket kan fortolkes som et "business as usual" eller "nul yderligere indsats"-forløb), så vil man på et tidspunkt inden for endelig tid nå det punkt, hvor $R_t = \bar{\rho} R_0$ og dermed $D_t = 0$. Netop fordi dette punkt nås inden for endelig tid, vil hverken A_t eller k_t kunne "nå" at gå imod uendelig som kompensation for $D_t \to 0$. Derfor ophører al produktion og vækst (senest) fra det tidspunkt, hvor $R_t = \bar{\rho} R_0$. Med antagelsen (2'), er det først for $t \to \infty$, at $D_t \to 0$, og derfor kan A_t og k_t "nå" at gå imod uendelig.

Det er et vigtigt og ikke fuldt afklaret element i hele klimadiskussionen, om klimaeksternaliteten har en "blød" karakter som eksemplificeret ved (2') eller en "katastrofisk" karakter som eksemplificeret ved (2"). Opgaven her illustrerer, at dette kan være helt afgørende for, om inddragelse af klimaaspektet fører til et perspektiv med (fortsat) vækstoptimisme eller til et katastrofalt perspektiv, når det i øvrigt antages, at verden bare kører videre med hidtidig afbrænding af fossile brændsler. Det katastrofiske tilfælde giver naturligvis et meget strækt argument for, at verden må finde på metoder til at undgå et sådant business as usual-forløb.

Nogle af de forskere, der hælder til (2"), mener samtidig, at det er, når verden har brugt ca. halvdelen af de nuværende mængder af fossile brændsler, at den helt store klimakatastrofe vil indtræffe. Dette svarer til $\bar{\rho} = \frac{1}{2}$ i (2"). Hvis man yderligere lægger til grund, at $s_E = 0,005$ er plausibelt for et busines as usual-forløb, kan man spørge, hvor mange år der går, før verden står i den store katastrofe, hvis der ikke gøres en indsats for at nedbringe s_E? Dette indtræffer senest for det t, hvor $R_t = \bar{\rho} R_0$. Med konsatnt s_E er $R_t = (1 - s_E)^t R_0$. Når dette indsættes fås $(1 - s_E)^t R_0 = \bar{\rho} R_0$, eller $(1 - s_E)^t = \bar{\rho}$, eller $t \ln(1 - s_E) = \ln \bar{\rho}$. Under anvendelse af approksimationen $\ln(1 - s_E) \approx -s_E$ giver dette

$$t \approx -\frac{\ln \bar{\rho}}{s_E}$$

Med $\bar{\rho} = \frac{1}{2}$, er $\ln \bar{\rho} = -\ln 2 \approx -0,7$, så med $s_E = 0,005$ på årsbasis, fås $t \approx 140$ år. Uden forstærket klimaindsats er der efter det katastrofiske synspunkt højst 140 år tilbage for Jorden, som vi kender den ...