Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2011

MATEMATIK B

1. årsprøve

Tirsdag den 23. august 2011

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes nogen form for elektroniske hjælpemidler)

Vi henleder din opmærksomhed på, at du skal besvare eksamensopgaven på det sprog, som du har tilmeldt dig ved eksamenstilmeldingen. Har du tilmeldt dig fagets engelske titel, skal du besvare det engelske opgavesæt på engelsk. Har du tilmeldt dig fagets danske titel eller den engelske titel med "eksamen på dansk" i parentes, skal du besvare det danske opgavesæt på dansk.

Er du i tvivl om, hvad du har tilmeldt dig, fremgår det af printet med din tilmelding fra de studerendes selvbetjening.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 S-1B rx

EKSAMEN I MATEMATIK B

Tirsdag den 23. august 2011

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert tal $v \in \mathbf{R}$ betragter vi 2×3 matricen

$$A(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn matricen $B(v) = A(v)A(v)^t$ for et vilkårligt $v \in \mathbf{R}$. Superscripten t betyder transponering.

(2) Vis, at matricen $B(v)$ er regulær for ethvert $v \in \mathbf{R}$.

(3) Vis, at matricen $B(v)$ er positiv definit for ethvert $v \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem egenværdierne for matricen $B(0)$.

(5) Bestem egenrummene for matricen $B(0)$.

(6) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^{-1}B(0)Q.$$

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^4 + 2x^3 + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør dernæst for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

(4) Bestem mængden

$$P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid H(x, y) \text{ er positiv definit}\}.$$

(5) Vi betragter funktionen $g : P \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, (x, y) \in P : g(x, y) = f(x, y).$$

Vis, at funktionen g er strengt konveks.

(6) Vi betragter mængden

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Godtgør, at mængden K er kompakt, og begrund, at funktionen f har både en største og en mindste værdi på K. Bestem disse ekstremumsværdier og de tilhørende punkter i K, hvor ekstremumsværdierne antages.

Opgave 3. For $n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$ betragter vi mængden

$$U = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}.$$

Desuden betragter vi funktionen $P : U \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$P(i) = a \cdot 2^i,$$

hvor $a > 0$, og $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

(1) Bestem konstanten $a > 0$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U.

(2) Bestem sandsynlighederne $P(\{1, 2, 3\})$ og $P(\{4, 5, \ldots, n\})$.

(3) Løs uligheden $P(\{1, 2, 3\}) < P(\{4, 5, \ldots, n\})$.

(4) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{n \to \infty} P(\{1, 2, 3\}) \ \text{ og } \ \lim_{n \to \infty} P(\{4, 5, \ldots, n\}).$$

Opgave 4. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som givet ved

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = 6x^2y + 3y^2.$$

For ethvert $v > 0$ betragter vi desuden mængden

$$A(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq v \,\wedge\, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(1) Bestem for ethvert $v > 0$ integralet

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x, y)\, d(x, y).$$

(2) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \left(\frac{I(v)}{3v\cos(2v)} \right).$$

(3) Løs ligningen $f(x, y) = 0$.

(4) Løs ligningen $f(x, 1) = 15$.