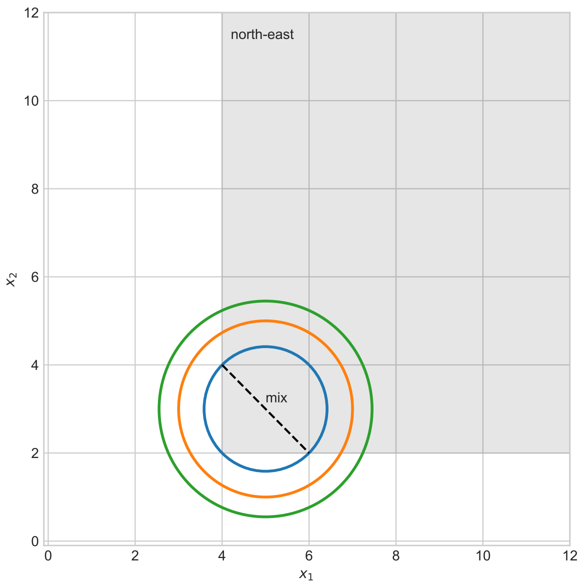
1 Tre Korte Spørgsmål

(a) Tegn indifferenskurverne for en præferencerelation som er strengt konveks, men ikke er monoton.

Svar: Se Figur 1.

Figure 1: Indifferenskurver



- *Ikke-monoton:* Nogle punkter nord-øst for et punkt på en indifferenskurve ligger uden for den øvre konturmængde. Præferencerne er derfor ikke monotone.
- *Strengt konveks:* Alle lineære kombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i det indre af den øvre kontourmængde.

(b) Betragt en prisstigning for en forbruger, der i udgangspunktet har en strengt positiv initialbeholdning af alle varer, og forbruger en strengt positiv mængde af alle varer. Hvad er forskellen på den rene indkomsteffekt og formueeffekten af prisstigningen?

Svar: Egenpris Slutsky-ligningen med endogen indkomst er

$$\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial h_i^\star(\boldsymbol{p},u^\star)}{\partial p_i}}_{\text{substitutionseffekt}} \underbrace{-\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},I)}{\partial I} x_i^\star(\boldsymbol{p},I)}_{\text{ren indkomsteffekt}} + \underbrace{\frac{\partial x_i^\star(\boldsymbol{p},I)}{\partial I} e_i}_{\text{formueeffekt}}$$

hvor $h_i^\star(\boldsymbol{p}, u^\star)$ er Hicks-efterspørgslen ved prisvektoren $\boldsymbol{p}$ og nytten $u^\star \equiv u(\boldsymbol{x}^\star(\boldsymbol{p}, I))$ hvor $I = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}$.

i. Den rene indkomsteffekt fremkommer fordi at forbrugerens eksisterende forbrugsbundt bliver dyrere ved en prisstigning (lavere realindkomst). For *normale* [*inferiøre*] goder er den *negativ* [*positiv*].

ii. Formueeffekten fremkommer fordi forbrugerens endogene indkomst stiger. Den har det modsatte fortegn af indkomsteffekten.

iii. Formueeffekten dominerer den rene indkomsteffekt hvis forbrugeren er *nettosælger*, $e_i > x_i^\star(\boldsymbol{p}, I)$. Hvis forbrugeren er *nettokøber*, $x_i^\star(\boldsymbol{p}, I) > e_i$, dominerer indkomsteffekten.

(c) Betragt et marked med perfekt konkurrence, hvor alle virksomheder har gennemsnitsomkostninger givet ved $AC(x) = x^2 - 2x + 10$, hvor x er produktionsniveauet. Hvad er prisen i langsigtsligevægten?

Svar: I langsigtsligevægten er al profit konkurreret væk og

$$p = AC(\underline{x})$$

hvor

$$\underline{x} = \min_x AC(x)$$

Fra *førsteordensbetingelsen* (FOC) fås

$$\frac{\partial AC(x)}{\partial x} = 2x - 2 \Leftrightarrow \underline{x} = 1 \Rightarrow p = AC(1) = 9$$

Vi har fundet et maksimum, da *andenordensbetingelse* (SOC) altid er overholdt

$$\frac{\partial^2 AC(x)}{\partial x^2} = 2 > 0$$

2 Forbrugerteori

Betragt en forbruger med nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2\}$$

Forbrugsmulighedsområdet er $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Vi antager som sædvanligt $p_1, p_2, I > 0$. Priser og indkomst måles i kr.

(a) Find Marshall-efterspørgselsfunktionen
Svar: Vi har oplagt $2x_1 = x_2$, da forbrugeren ellers har udgifter til varer, som ikke bidrager til hendes nytte. Da præferencerne er monotone ved vi, at budgetbetingelsen er overholdt med ligehedstegn. Heraf fås

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 &= I \Leftrightarrow \\ p_1x_1 + p_2 2x_1 &= I \Leftrightarrow \\ x_1^\star(p_1, p_2, I) &= \frac{I}{p_1 + 2p_2} \end{aligned}$$

Fra $2x_1 = x_2$ fås videre

$$x_2^\star(p_1, p_2, I) = \frac{2I}{p_1 + 2p_2} = \frac{I}{\frac{1}{2}p_1 + p_2}$$

(b) Find Hicks-efterspørgselsfunktionen og udgiftsfunktionen
Svar: Vi skal løse

$$E(p_1, p_2, u) = \min_{h_1, h_2} p_1h_1 + p_2h_2 \text{ u.b.b. } \min\{2h_1, h_2\} = u$$

Af bibetingelsen følger

$$\begin{aligned} 2h_1 \geq u \Leftrightarrow h_1 \geq \frac{u}{2} \Rightarrow h_1^\star(u) &= \frac{u}{2} \\ h_2 \geq u \Rightarrow h_2^\star(u) &= u \end{aligned}$$

hvor de svage ulighedstegn bliver til lighedstegn, da begge priser er strengt positive.

Udgiftsfunktionen er

$$\begin{aligned} E(p_1, p_2, u) &= p_1h_1^\star(u) + p_2h_2^\star(u) \\ &= p_1\frac{u}{2} + p_2u \\ &= \left(\frac{p_1}{2} + p_2\right)u \end{aligned}$$

Antag, at $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ og $I = 12$.

(c) Hvad er den »ækvivalerende variation« (»equivalent variation«, EV) for en afgift på $\tau = 2$ så prisen inkl. afgiften er $p_1' = p_1 + \tau$?

Svar: Efterspørgslen og nytten i de nye priser er:

$$\begin{aligned} x_1'^{\star}(4,1,12) &= \frac{12}{4+2\cdot 1} = 2 \\ x_2'^{\star}(4,1,12) &= \frac{2\cdot 12}{4+2\cdot 1} = 4 \\ u' \equiv u(x_1'^{\star}, x_2'^{\star}) &= \min\{2\cdot 2, 4\} = 4 \end{aligned}$$

EV angiver det indkomsttab, der giver det samme nyttetab som afgiftsstigningen

$$EV = I - E(p_1, p_2, u') = 12 - \left(\frac{2}{2} + 1\right) 4 = 4$$

(d) Hvad er hhv. skatteprovenuet og dødvægtstabet ved at indføre afgiften? Giv en kort forklaring på dine resultater

Svar: Skatteprovenuet ved afgiften er

$$T = \tau \cdot x_1'^{\star}(4,1,12) = 2 \cdot 2 = 4$$

Dødvægtstabet er 0 da

$$D = EV - T = 4 - 4 = 0$$

Dødvægtstabet 0, fordi at forbrugerens præferencer er perfekte komplementer, og at forbrugeren derfor ikke substituerer væk fra den afgiftspålagte vare.

(e) Forklar om dine resultater i spørgsmål (d) ville ændre sig, hvis forbrugerens nyttefunktion var

$$g(x_1, x_2) = \left(e^{\min\{4x_1, 2x_2\}}\right)^2 - 8$$

Svar: Nej, der er tale om en række af montone transformationer,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= t_4(t_3(t_2(t_1(u(x_1, x_2))))) \\ t_1(u) &= 2u \\ t_2(u) &= e^u \\ t_3(u) &= u^2 \\ t_4(u) &= u - 8 \end{aligned}$$

hvorfor forbrugeradfærden er uændret.

3 Produktion

Betragt en virksomhed der producerer et output ved hjælp af to inputs, arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$x = f(\ell, k) = \ell^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{4}},$$

hvor x er mængden af output, ℓ er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital. Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogent givne.

(a) Vis at $f(\ell, k)$ har faldende skalaafkast

Svar: $f(\lambda\ell, \lambda k) = \lambda^{\frac{2}{4}} f(\ell, k) < \lambda f(\ell, k)$.

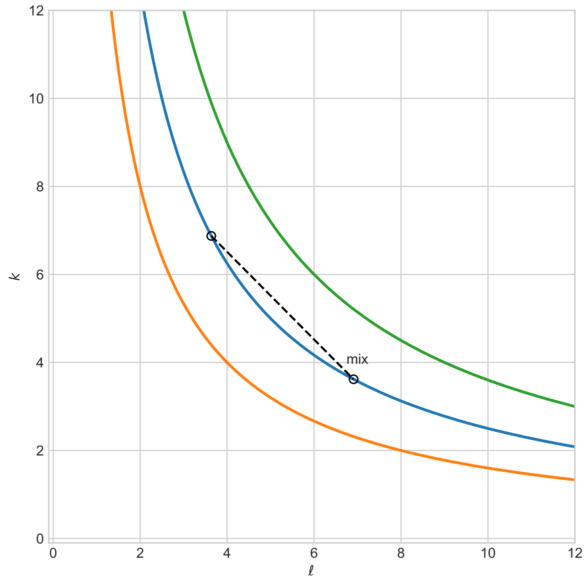
(b) Tegn isokvanterne for $f(\ell, k)$ og forklar om de øvre kontourmængder er strengt konvekse eller ej.

Svar: Hver isokvantkurve er givet ved

$$x_0 = \ell^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow k = \frac{x_0^4}{\ell}$$

Det ses af Figur 2, at de øvre kontourmængder er strengt konvekse. Alle lineære kombinationer af to punkter på en isokvant ligger i det indre af den øvre kontourmængde.

Figure 2: Isokvanter



(c) Det kan vises at $f(\ell, k)$ er strengt konkav. Argumentér for dette.

Svar: Det følger af, at f har faldende skalaafkast $\frac{2}{4} \in (0,1)$, spgm. a, og at de øvre kontourmængder er strengt konvekse, spgm. (b).

(d) Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem og find dens udbudskurve.

Svar: Maksimeringsproblemet opstilles

$$\Pi(p,w,r) = \max_{\ell,k,x} px - w\ell - rk \quad \text{u.b.b.} \quad \ell^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{4}} = x$$

Vi kan substitutere produktionsfunktionen ind så

$$\Pi(p,w,r) = \max_{\ell,k} p\ell^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{4}} - w\ell - rk$$

Vi kan nu udlede *førsteordensbetingelserne* (FOCs)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial l} &= \frac{1}{4} p\ell^{-\frac{3}{4}} k^{\frac{1}{4}} - w = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} p\ell^{-\frac{3}{4}} k^{\frac{1}{4}} = w && (1) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k} &= \frac{1}{4} p\ell^{\frac{1}{4}} k^{-\frac{3}{4}} - r = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} p\ell^{\frac{1}{4}} k^{-\frac{3}{4}} = r && (2) \end{aligned}$$

Vi deler nu (1) med (2) således, at vi kan udtrykke k som en funktion af ℓ

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4} p\ell^{-\frac{3}{4}} k^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4} p\ell^{\frac{1}{4}} k^{-\frac{3}{4}}} &= \frac{w}{r} \Leftrightarrow \\ \frac{k}{\ell} &= \frac{w}{r} \Leftrightarrow \\ k &= \frac{w}{r}\ell && (3) \end{aligned}$$

Vi indsætter nu (3) i (1) og udleder den profitmaksimerende efterspørgsel efter ℓ

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} p\ell^{-\frac{3}{4}} k^{\frac{1}{4}} &= w \Leftrightarrow \\ \frac{1}{4} p\ell^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{w}{r}\ell\right)^{\frac{1}{4}} &= w \Leftrightarrow \\ \frac{1}{4} p\ell^{-\frac{2}{4}} \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{4}} &= w \Leftrightarrow \\ \frac{1}{4^4} p^4 \ell^{-2} \frac{w}{r} &= w^4 \Leftrightarrow \\ \ell^2 &= \frac{p^4}{256 r w^3} \Leftrightarrow \\ \ell^\star(w,r,p) &= \frac{p^2}{16 w \sqrt{wr}} && (4) \end{aligned}$$

Vi indsætter nu (4) i (3) og udleder efterspørgslen efter k

$$\begin{aligned} k &= \frac{w}{r}\frac{p^2}{16w\sqrt{wr}} \\ &= \frac{w}{r}\frac{p^2}{16w\sqrt{wr}} \\ k^\star(w,r,p) &= \frac{p^2}{16r\sqrt{wr}} \qquad (5) \end{aligned}$$

Udbudskurven er derfor

$$\begin{aligned} x^\star(w,r,p) &= \left(\frac{p^2}{16w\sqrt{wr}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{p^2}{16r\sqrt{wr}}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{(wr)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{p^2}{16\sqrt{wr}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{(wr)^{\frac{1}{4}}}\frac{p}{4(wr)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{p}{4\sqrt{wr}} \end{aligned}$$

Profitten er altid *positiv* da

$$\begin{aligned} \Pi &= p\frac{p}{4\sqrt{wr}} - w\frac{p^2}{16w\sqrt{wr}} - r\frac{p^2}{16r\sqrt{wr}} \\ &= \frac{4p^2}{16\sqrt{wr}} - \frac{2p^2}{16\sqrt{wr}} \\ &= \frac{2p^2}{16\sqrt{wr}} > 0 \end{aligned}$$

Det er sikkert, at vi har fundet et global maksimum, da f er strengt konkav.

Antag, at virksomheden på kort sigt er låst fast til en bestemt mængde kapital, $\bar{k}$.

(e) Find virkomhedens udbudskurve på kort sigt

Svar: Den betingede faktorefterspørgsel på kort sigt er

$$\ell_b^{SR}(x,\bar{k}) = \frac{x^4}{\bar{k}}$$

Omkostningsfunktionen på kort sigt er derfor

$$C^{SR}(x,w,\overline{k}) = w\ell_b(x) = w\frac{x^4}{\overline{k}}$$

Virksomheden maksimerer sit dækningsbidrag

$$\pi(p,w,\overline{k}) = \max_x px - C^{SR}(x,w,\overline{k})$$

Førstordensbetingelsen (FOC) er

$$p - 4w\frac{x^3}{\overline{k}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^{\star SR}(p,w,\overline{k}) = \left(\frac{p\overline{k}}{4w}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Vi ser, at gennemsnitsomkostningerne er

$$AC^{SR}(x,w) = \frac{C(x,w)}{x} = w\frac{x^3}{\overline{k}}$$

Vi ser, at marginalomkostningerne er

$$MC(x,w) = \frac{\partial C(x,w)}{\partial x} = 4w\frac{x^3}{\overline{k}}$$

Vi er sikre på, at løsningen til førsteordentingelsen er et maksimum da:

i. MC altid er stigende, da $\frac{\partial MC(x,w)}{\partial x} = 12w\frac{x^2}{\overline{k}} > 0$

ii. $MC > AC$ for all x

4 Generel Ligevægt: Bytteøkonomi

Betragt en bytteøkonomi med to varer hvor to forbrugere, A og B, har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionerne

$$u^A(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a},\ a \in (0,1)$$

og

$$u^B(x_1, x_2) = x_1^b x_2^{1-b},\ b \in (0,1)$$

Begge varer kan forbruges i kontinuerte, ikke-negative mængder. Der er privat ejendomsret i økonomien. A's initialbeholdning er $(K_1, 0)$, mens B's initialbeholdning er $(0, K_2)$. Der findes markeder for begge varer med fuldkommen konkurrence. Priserne er givet ved $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$.

Ved eksogen indkomst I kan forbruger A's og B's efterspørgselsfunktioner vises at være givet ved

$$\boldsymbol{x}^{A\star}(p_1, p_2, I) = \left(a\frac{I}{p_1}, (1-a)\frac{I}{p_2}\right)$$

og

$$\boldsymbol{x}^{B\star}(p_1, p_2, I) = \left(b\frac{I}{p_1}, (1-b)\frac{I}{p_2}\right)$$

(a) Find Walras-ligevægten (priser og allokering), hvor $p_2 = 1$ er numeraire

Svar: Indkomsterne er

$$\begin{aligned} I^A &= p_1 K_1 \\ I^B &= K_2 \end{aligned}$$

Vi clearer markedet for vare x_1

$$\begin{aligned} \left(x_1^{A\star}(p_1, p_2, I) - K_1\right) + \left(x_1^{B\star}(p_1, p_2, I) - 0\right) &= 0 \Leftrightarrow \\ aK_1 - K_1 + b\frac{K_2}{p_1} &= 0 \Leftrightarrow \\ p_1 &= \frac{b}{1-a}\frac{K_2}{K_1} \end{aligned}$$

Ligevægtsallokeringen er givet ved

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{A\star}(p_1, p_2, I) &= \left(a\frac{p_1 K_1}{p_1}, (1-a)\frac{p_1 K_1}{1}\right) \\ &= (aK_1, bK_2) \end{aligned}$$

og

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{B\star}(p_1, p_2, I) &= \left(b\frac{K_2}{p_1}, (1-b)\frac{K_2}{1}\right) \\
&= ((1-a)K_1, (1-b)K_2)
\end{aligned}
$$

(b) Find et udtryk for forbruger A's nytte i Walras-ligevægten. Afhænger forbruger A's nytte positivt eller negativt af b? Giv en kort forklaring.

Svar:

$$u^A = u(\boldsymbol{x}^{A\star}(p_1, p_2, I)) = (aK_1)^a (bK_2)^{1-a}$$

Der er en positiv sammenhæng,

$$\frac{\partial u^A}{\partial b} = (1-a)(aK_1)^a K_2^{1-a} b^{-a} > 0$$

Når b stiger, stiger forbruger B's efterspørgsel efter vare 1, og han er derfor villig til at betale en højere pris. Da forbruger A er den eneste udbyder af vare 1 øger det hans indkomst og derfor hans nytte.

Antag, at der yderligere er en tredje forbruger med nyttefunktionen

$$u^C(x_1, x_2) = x_1^c x_2^{1-c},\ c \in (0,1)$$

og initial beholdning $(Q, 0)$. Ved eksogen indkomst I kan forbruger C's efterspørgselsfunktion vises at være givet ved

$$\boldsymbol{x}^{C\star}(p_1, p_2, I) \quad = \quad \left(c\frac{I}{p_1}, (1-c)\frac{I}{p_2}\right)$$

(c) Find Walras-ligevægtsprisvektoren, hvor $p_2 = 1$ er numeraire

Svar:

$$
\begin{aligned}
\left(x_1^{A\star}(p_1, p_2, I) - K_1\right) + \left(x_1^{B\star}(p_1, p_2, I) - 0\right) + \left(x_1^{C\star}(p_1, p_2, I) - Q\right) = 0 \Leftrightarrow \\
aK_1 - K_1 + b\frac{K_2}{p_1} + cQ - Q = 0
\end{aligned}
$$

Ved at løse for p_1 fås

$$p_1 = \frac{bK_2}{(1-a)K_1 + (1-c)Q}$$

(d) Afhænger forbruger A's nytte positivt eller negativt af Q? Giv en kort forklaring.

Svar: Forbruger A's efterspørgsel er:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{A\star}(p_1, p_2, I) &= \left(a\frac{p_1 K_1}{p_1}, (1-a)\frac{p_1 K_1}{1}\right) \\ &= \left(aK_1, \frac{(1-a)K_1 bK_2}{(1-a)\,K_1 + (1-c)\,Q}\right)\end{aligned}$$

Vi ser at forbruger A's forbrug af vare 2 er faldende i Q, mens hans forbrug af vare 1 er upåvirket. Derfor er hans nytte faldende i Q. Forklaringen er at når Q stiger, stiger udbuddet af vare 1, og derfor falder prisen. Det reducerer forbruger A's indkomst og derfor hans forbrug og nytte.