

Eksamen på Økonomistudiet sommer 2020-R

Sandsynlighedsteori og statistik

2. årsprøve

13. august 2020

(3½ timers eksamen med hjælpemidler)

Besvarelsen uploades på Digital Eksamen som én pdf.fil (inkl. bilag) navngivet udelukkende med eksamensnummeret, f.eks. 12.pdf eller 127.pdf

Dette eksamenssæt består af 5 sider incl denne forside

Denne eksamen er ændret fra at foregå på Peter Bangsvej til at foregå som en hjemmeeksamen med hjælpemidler.

Læs grundigt teksten i boksen nedenfor, så du undgår at komme i problemer med mistanke om eksamenssnyd.

Pas på at du ikke begår eksamenssnyd!

Det er fx eksamenssnyd, hvis du ...

- Kopierer andres tekster uden at sætte citationstegn eller kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen tekst. Det gælder også tekst fra gamle rettevejledninger
- Stiller din opgave til rådighed for andre under eksamen
- Kommunikerer med andre om opgaven under eksamen
- Bruger andres idéer eller tanker uden at kildehenvise, så det ser ud om det er din egen idé eller dine tanker
- Genbruger dele af en opgave, som du tidligere har indleveret og fået en bestå karakter for uden at sætte citationstegn eller kildehenvise (selvplagiering)

Du kan læse mere om reglerne for eksamenssnyd på Din Uddannelsesside og i Rammestudieordningens afs. 4.12.

Eksamenssnyd sanktioneres altid med en advarsel og bortvisning fra prøven. I de fleste tilfælde bliver den studerende også bortvist fra universitetet i et semester.

Opgaven består af tre delopgaver, som alle skal besvares. De tre opgaver kan regnes uafhængigt af hinanden.

Opgave 1 og 2 indgår tilsammen med samme vægt som opgave 3.

Opgave 1

Den international organisation OHW har vurderet, at sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt person fra land A har COVID-19 er 0,004. Tilsvarende er det vurderet, at sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt person fra land B har COVID-19 er 0,002. OHW udvælger tilfældigt 1.000 personer fra hvert af de to lande.

OHW antager at antallet af personer, der har COVID-19 blandt de 1.000 udtrukne kan beskrives med en binomialfordeling.

.

1) Giv en vurdering af den model OHW anvender.

Brug nu OHW's model.

.

2) Hvad er sandsynligheden for, at der er præcis 5 personer, der bliver testet positiv for COVID-19 i land A?

.

3) Det er indrapporteret, at et land har 5 tilfælde af COVID-19, hvad er sandsynligheden for at det indrapporterede land er A?

Opgave 2

1. Lad (Y, X) være bivariat Normalfordelte

med $E(X) = E(Y) = 1$ og $V(X) = V(Y) = 1$ samt $COV(X, Y) = 0, 2$.

1. Udregn $P(X < 0)$

.

2. Angiv den betingede fordeling af Y givet $X=0$

.

Lad $Z_1 = 2Y + X$ og $Z_2 = Y + 3X$. Dette kan også skrives som

.

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$$

.

3. Hvad er middelværdierne af Z_1 og Z_2 ?

.

4. Hvad er varianserne for Z_1 og Z_2 ?

.

5. Hvad er fordelingen af (Z_1, Z_2) ?

.

6. Hvad er korrelationskoefficienten mellem Z_1 og Z_2 ?

Opgave 3

En undersøgelse blandt 19 forsøgspersoner har målt sammenhængen mellem kondition og daglig motion.

I det følgende er X udtryk for personens daglige motion, mens Y er udtryk for personens kondi.

Nedenstående tabel viser et uddrag af målingerne.

person nr.	kondi (y)	motion (x)
1	11,25	6,90
2	8,40	5,65
3	9,80	6,53
19	11,20	6,65

Der er opstillet følgende model

$$Y_i \sim N(\beta X_i; 1, 6^2) \quad i=1, \dots, 19 \text{ uafhængige}$$

så $E(Y_i) = \beta X_i$ og $V(Y) = 1, 6^2 = 2, 56$

Vi betragter X 'er som givne størrelser.

.

tæthedsfunktionen er dermed

.

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1,16} \exp\left(-\frac{(y-\beta x_i)^2}{1,6^2}\right)$$

.

Det kan oplyses at:

$$\sum_{i=1}^{19} y_i x_i = 1203,2 \text{ og } \sum_{i=1}^{19} x_i^2 = 743,0$$

1) Opskriv likelihoodfunktionen $L(\beta)$.

.

2) Angiv log-likelihoodfunktionen og score-funktionen

.

$$3) \text{ Vis at } \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{19} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{19} x_i^2}$$

.

4) Angiv hesse-matricen.

.

Det oplyses endvidere at:

$$\sum_{i=1}^{19} y_i^2 = 1.994,4 \text{ og at } \sum_{i=1}^{19} (y_i - \hat{\beta}x_i)^2 = 46,2$$

.

5) Test hypotesen at $\beta = 0$ mod $\beta \neq 0$ med et likelihood-ratio test.

.

6) Kommenter resultatet af testen.

.

7) Test hypotesen at $\beta = 1,0$ mod $\beta \neq 1,0$ med et wald test.

.

8) Angiv et 95% appr. konfidensinterval for β .

.

9) Kommenter dette interval og sammenlign med svarene i 5) og 6)