**KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT**

**1. ÅRSPRØVE 2012 S-1A rx ret**

**SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A**

**Fredag den 10. august 2012**

**RETTEVEJLEDNING**

---

**Opgave 1. Elasticiteter.** Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en differentiabel funktion.

(1) Antag, at $f(x_0) \neq 0$ for et bestemt tal $x_0 \in I$. Forklar, hvad det vil sige, at funktionen $f$ har elasticiteten $\text{El}f(x_0)$ i punktet $x_0$.

**Løsning.** Lad $\Delta x$ være en tilvækst i den variable $x$ ud fra punktet $x_0$, og lad $\Delta f$ være en tilhørende funktionstilvækst. Man opstiller da størrelsen

$$S(\Delta x) = \frac{\frac{\Delta f}{f(x_0)}}{\frac{\Delta x}{x_0}}$$

og ser, om denne størrelse har en grænseværdi for $\Delta x$ gående mod 0. Hvis dette er tilfældet, kaldes denne grænseværdi elasticiteten for funktionen $f$ i punktet $x_0$ og betegnes med $\text{El}f(x_0)$, og man ser, at

$$\text{El}f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} S(\Delta x) = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0}.$$

(2) Vis, at hvis $f$ og $g$ er to differentiable funktioner på intervallet $I$, hvor elasticiteterne $\text{El}f(x_0)$ og $\text{El}g(x_0)$ eksisterer, så findes elasticiteterne $\text{El}(fg)(x_0)$ og $\text{El}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$, og man har, at

$$\text{El}(fg)(x_0) = \text{El}f(x_0) + \text{El}g(x_0), \text{ og at } \text{El}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \text{El}f(x_0) - \text{El}g(x_0).$$

**Løsning.** Idet vi har, at

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ og } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2},$$

får vi, at

$$x\frac{(fg)'(x)}{(fg)(x)} = x\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = x\frac{f'(x)}{f(x)} + x\frac{g'(x)}{g(x)},$$

hvoraf det fremgår, at

$$\mathrm{El}(fg)(x_0) = \mathrm{El}f(x_0) + \mathrm{El}g(x_0).$$

Dernæst ser vi, at

$$x\frac{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)}{\left(\frac{f}{g}\right)(x)} = x\frac{\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}{\frac{f(x)}{g(x)}} = x\frac{f'(x)}{f(x)} - x\frac{g'(x)}{g(x)},$$

hvoraf det fremgår, at

$$\mathrm{El}\Big(\frac{f}{g}\Big)(x_0) = \mathrm{El}f(x_0) - \mathrm{El}g(x_0).$$

(3) Bestem elasticiteten af følgende funktioner i et vilkårligt punkt $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = x^7e^{2x} \text{ og } g(x) = \frac{e^{3x}}{1+x^4}.$$

**Løsning.** Vi finder, at

$$\mathrm{El}f(x) = x\frac{7x^6e^{2x}+2x^7e^{2x}}{x^7e^{2x}} = 7+2x,$$

og at

$$\mathrm{El}g(x) = x\frac{\frac{3e^{3x}(1+x^4)-4x^3e^{3x}}{(1+x^4)^2}}{\frac{e^{3x}}{1+x^4}} = 3x - \frac{4x^4}{1+x^4}.$$

**Opgave 2.** Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften:

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2y - y + x.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

for denne funktion i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 1 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 1.$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen $f$.

**Løsning.** Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 1 = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 1 = 0,$$

medfører, at $(x, y) = (1, -\frac{1}{2})$ og $(x, y) = (-1, \frac{1}{2})$.

(3) Afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen $f$.

**Løsning.** Hessematricen $H(x, y)$ for denne funktion er

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf fremgår det, at

$$H(1, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ og at } H(-1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Begge disse matricer har determinanten $-4$, så de stationære punkter er sadelpunkter for funktionen $f$.

(4) Begrund, at funktionen $f$ har både en største og en mindste værdi på mængden

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\},$$

og find disse værdier.

**Løsning.** Mængden $K$ er kompakt, og funktionen $f$ er kontinuert, så af ekstremværdisætningen får vi, at $f$ antager både en største og en mindste værdi på mængden $K$.

Da funktionen $f$ ikke har nogen ekstremumspunkter på $\mathbf{R}^2$, vil den største og den mindste værdi for $f$ på $K$ blive antaget på randen af denne mængde. Vi opdeler randen i de fire stykker $I, II, III$ og $IV$, og vi får så følgende udregninger:

$I$: $0 \leq x \leq 1, y = 0$, så $f(x, 0) = x$, som vokser. $f(0, 0) = 0$ og $f(1, 0) = 1$.

$II$: $x = 1, 0 \leq y \leq 1$, så $f(1, y) = 1$ på hele stykket $II$.

$III$: $0 \leq x \leq 1, y = 1$, så $f(x, 1) = x^2 + x - 1$, og $f'(x, 1) = 2x + 1$, som er positiv på stykket $III$. $f(1, 1) = 1$ og $f(0, 1) = -1$.

$IV$: $x = 0, 0 \leq y \leq 1$, så $f(0, y) = -y$, som aftager.

Vi ser nu, at størsteværdien er 1 og mindsteværdien er $-1$.

**Opgave 3.** Betragt funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2y^3 + 6xy^4.$$

(1) Vis, at funktionen $f$ er homogen og angiv homogenitetsgraden.

**Løsning.** For $t > 0$ ser vi, at

$$f(tx, ty) = (tx)^2(ty)^3 + 6(tx)(ty)^4 = t^5\Big(x^2y^3 + 6xy^4\Big) = t^5 f(x, y),$$

hvilket viser, at $f$ er homogen af grad $k = 5$.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

for denne funktion i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + 6y^4 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + 24xy^3.$$

(3) Godtgør, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)y = kf(x,y),$$

hvor $k$ er homogenitetsgraden for funktionen $f$.

**Løsning.** Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)y = 2x^2y^3 + 6xy^4 + 3x^2y^3 + 24xy^4 =$$

$$5x^2y^3 + 30xy^4 = 5\Big(x^2y^3 + 6xy^4\Big) = 5f(x,y).$$