Skriftlig eksamen i Matematik A. Sommeren 2014

Fredag den 8. august 2014

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 S-1A rx

Skriftlig eksamen i Matematik A

Fredag den 8. august 2014

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Differentiation.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et ikke-tomt, åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er differentiabel i et punkt $a \in I$, og forklar dernæst, hvad man forstår ved differentialkvotienten $f'(a)$.

(2) Betragt den funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{for } x \leq 0 \end{cases}.$$

Vis, at funktionen f er differentiabel overalt på $\mathbf{R}$, og bestem den afledede funktion f'.

(3) Afgør, om funktionen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$g(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{for } x \neq 0 \\ 0, & \text{for } x = 0 \end{cases},$$

er differentiabel i punktet $x = 0$.

(4) Differentier funktionen $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : h(x) = \frac{x^2 + 2}{1 + x^2}.$$

(5) Bestem monotoniintervallerne, evt. ekstremumspunkter og værdimængden for funktionen h.

Opgave 2.

(1) Udregn de ubestemte integraler

$$\int (x^2 - 1)e^x \, dx \quad \text{og} \quad \int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} \, dx.$$

(2) Udregn det bestemte integral

$$I(a) = \int_0^a \frac{\cos x}{e^{\sin x}} \, dx$$

for et vilkårligt $a \in \mathbf{R}$.

(3) Bestem grænseværdien

$$\lim_{a \to 0} \left(\frac{I(a)}{1 - e^a} \right).$$

Opgave 3. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + (x - y)^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

Vi betragter mængden

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \, \wedge \, 0 \leq y \leq x\}.$$

(4) Begrund, at restriktionen af funktionen f til mængden K har både et globalt maksimum og et globalt minimum på K.

Bestem desuden disse globale ekstremumspunkter og deres tilhørende globale ekstremumsværdier.