Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2019 V-1B rx ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik B

Torsdag den 14. februar 2019

Opgave 1. For ethvert $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & s \\ 1 & 3 & 1 \\ s & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten $\det A(s)$ for matricen $A(s)$, og bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi finder, at $\det A(s) = -3s^2 + 2s + 8$, og denne determinant er nul, når og kun når

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{-6} = \frac{-2 \pm 10}{-6}, \quad \text{så} \quad s = 2 \vee s = -\frac{4}{3}.$$

Altså er $A(s)$ regulær, hvis og kun hvis $s \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{4}{3}, 2\}$.

(2) Bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er positiv definit.

Løsning. Matricen $A(s)$ er positiv definit, dersom alle de ledende hovedunderdeterminanter er positive, altså må vi kræve, at $D_1 = 2, D_2 = 5$ og $D_3 = \det A(s)$ alle er positive.

Vi ser, at dette er opfyldt, netop når $s \in] -\frac{4}{3}, 2[$.

(3) Godtgør, at matricen $A(s)$ ikke er negativ definit eller negativ semidefinit for noget tal $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Da $D_1 = 2 > 0$, er påstanden opfyldt.

(4) For hvilke $s \in \mathbf{R}$ er matricen $A(s)$ indefinit.

Løsning.
Matricen $A(s)$ er indefinit, når og kun når $s < -\frac{4}{3} \vee s > 2$.

(5) Bestem egenværdierne og de tilhørende egenrum for matricen $A(2)$.

Løsning. Vi har, at

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

og vi ser, at det karakteristiske polynomium for $A(2)$ er

$$P(t) = \det(A(2) - tE) = t(-t^2 + 7t - 10),$$

hvoraf vi finder, at de karakteristiske rødder, og dermed egenværdierne for $A(2)$, er $0, 2$ og 5.

Endvidere finder vi, at egenrummene er

$V(0) = N(A(2)) = \text{span}\{(-1, 0, 1)\}$, $V(2) = N(A(2) - 2E) = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$

og

$$V(5) = N(A(2) - 5E) = \text{span}\{(1, 1, 1)\}.$$

(6) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^{-1} A(2) Q.$$

Løsning. Vi finder umiddelbart, at

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ og } Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

samt den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) = xy + \frac{1}{xy}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Løsning. Vi får, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \frac{y}{x^2y^2} = \frac{x^2y^2-1}{x^2y} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{x}{x^2y^2} = \frac{x^2y^2-1}{xy^2}.$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Hvis $(x,y) \in D$ er et stationært punkt for f, skal det gælde, at $x^2y^2 = 1$, så $y = \frac{1}{x}$. De stationære punkter for f er altså punkterne $(x,y) = (x, \frac{1}{x})$, hvor $x > 0$.

(3) Vis, at alle de stationære punkter er globale minimumspunkter for funktionen f, og bestem værdimængde for f.

Vink: Lad (x_0, y_0) være et vilkårligt stationært punkt for f. Udregn $f(x_0, y_0)$, og vis dernæst, at udsagnet

$$\forall\,(x,y) \in D : f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0$$

er opfyldt.

Løsning. Vi finder straks, at $f(x, \frac{1}{x}) = 2$, og endvidere finder vi, at

$$f(x,y) - 2 = \frac{x^2y^2+1}{xy} - 2 = \frac{x^2y^2-2xy+1}{xy} = \frac{(xy-1)^2}{xy} \geq 0.$$

Heraf fremgår påstanden.

(4) Godtgør, at funktionen f ikke er homogen af nogen grad.

Løsning. Forskriftens første led har graden 2, og andet led har graden -2, så funktionen f er ikke homogen.

(5) Bestem niveaumængden

$$P^2 = \{(x,y) \in D \mid f(x,y) \leq 2\},$$

og godtgør dernæst, at funktionen f ikke er kvasikonveks.

Løsning. Vi ser, at

$$P^2 = \left\{(x, y) \in D \mid y = \frac{1}{x}\right\},$$

og denne mængde er ikke konveks. Dette viser, at funktionen f ikke er kvasikonveks.

Opgave 3. For ethvert $a > 0$ betragter vi differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \left(\frac{2t}{a+t^2}\right)x = \frac{e^t}{a+t^2}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Idet $p(t) = \frac{2t}{a+t^2}$ er $P(t) = \ln(a+t^2)$, og dermed får vi, at

$$x = Ce^{-\ln(a+t^2)} + e^{-\ln(a+t^2)} \int e^{\ln(a+t^2)} \frac{e^t}{a+t^2}\, dt =$$

$$\frac{C}{a+t^2} + \frac{1}{a+t^2} \int e^t\, dt = \frac{C+e^t}{a+t^2},$$

hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = \frac{2}{a}$ er opfyldt.

Løsning. Vi ser, at $C = 1$, så $\tilde{x} = \tilde{x}(t) = \frac{1+e^t}{a+t^2}$.

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0),$$

og vis, at enhver maksimal løsning $x = x(t)$ er voksende i en omegn af punktet $t = 0$.

Løsning. Ved at benytte differentialligningen $(*)$ finder vi, at

$$\frac{dx}{dt}(0) = \frac{1}{a} > 0,$$

og pga. kontinuiteten af $\frac{dx}{dt}$ får vi så, at enhver maksimal løsning til $(*)$ er voksende i en vis omegn af $t = 0$.

Opgave 4. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ med forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2y + y^3.$$

(1) Vis, at funktionen f er homogen, og anfør homogenitetsgraden.

Løsning. Vi ser straks, at funktionen f er homogen af grad 3.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi får, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2 + 2xy \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + x^2 + 3y^2.$$

(3) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(1,1)$.

Løsning. Idet $f(1,1) = 4$ og $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 6$, ser vi, at

$$z = 4 + 6(x-1) + 6(y-1) = 6x + 6y - 8.$$

(4) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, og vis, at f hverken er konkav eller konveks.

Løsning. Vi får, at

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x + 6y \end{pmatrix}.$$

Heraf finder vi, at

$$\det f''(x,y) = (6x+2y)(2x+6y) - (2x+2y)^2 = 12x^2 + 40xy + 12y^2 - (2x+2y)^2,$$

så $\det f''(1,-1) = -16$. Dette viser påstanden.