Reeksamen på Økonomistudiet sommer 2018

Makroøkonomi I

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

21. august 2018

Dette eksamenssæt består af 7 sider (inkl. forside).

OBS: Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangsvej, skal du kontakte et tilsyn, blive registreret som syg hos denne. Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen. Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Opgave 1: Solowmodellen med åbne kapitalmarkeder

1.1

Både i den åbne Solow model (dvs. pensumbogens kapitel 4) og i den basale Solow model (dvs. pensumbogens kapitel 3) vil steady-state BNP pr. arbejder stige med $1/(1-\alpha)\%$ som følge af 1% stigning i total faktor produktivitet (dvs. B). Forklar forskellen mellem de to modeller i tilpasningen mod den nye steady state (efter en stigning i B).

Svar:

Kapitel 4: Pga. åbne kapitalmarkeder vil tilpasningen i kapital pr. arbejder (og dermed BNP pr. arbejder) ske med det samme; når B øges vil $r_t > \bar{r}$, hvilket vil medføre "kapital inflow", således at $r_t = \bar{r}$. I kapitel 5 vil $B \uparrow$ øge opsparingen (s_t) pga. højere indkomst, hvilket øger k_{t+1}, som øger s_{t+1} osv. Derfor er forskellen mellem de to modeller tilpasningshastigheden.

1.2

Transitionsligningen for velstand pr. arbejder (i pensumbogens kapitel 4) er givet ved:

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(sw^* + [1+s\bar{r}]\, v_t\right), \tag{1}$$

hvor n er befolkningsvækst, s er opsparingsraten, w^* er reallønnen og $\bar{r}$ er den international realrente. Find steady state for velstand pr. arbejder (dvs. $v_{t+1} = v_t = v^*$). Under hvilke betingelse er v^* stabil? Er det rimeligt at antage, at en sådan betingelse er opfyldt?

Svar:

Først findes v^*:

$$\begin{aligned} v^* &= \frac{1}{1+n}\left(sw^* + [1+s\bar{r}]\, v^*\right) \Leftrightarrow \\ (1+n)\, v^* - (1+s\bar{r})\, v^* &= sw^* \Leftrightarrow \\ v^* &= \frac{s}{n-s\bar{r}} w^*. \end{aligned}$$

Ligning er (1) er en 1. ordens linær differensligning. v^* er dermed stabil når:

$$\begin{aligned} \frac{1+s\bar{r}}{1+n} &< 1 \Leftrightarrow \\ s\bar{r} &< n. \end{aligned}$$

I bogen fremføres et argument om, at hvis den lille åbne økonomi strukturelt minder om den gennemsnitlige økonomi i verden, så er denne betingelse det samme som at skrive $\alpha < 1$. Man kan derfor godt sige, at det faktisk er rimeligt nok, hvis betingelsen er opfyldt. Endvidere kan man sige, at hvis der er teknologisk vækst i modellen vil der være endnu mere sandsynligt at betingelsen er opfyldt.

1.3

I følge den åbne Solowmodel vil levestandarden været øget eller uændret ved at åbne op for internationale kapitalmarkeder. Forklar med ord hvilke "teoretiske mekanismer", der er på spil (jvf. pensumbogens kapitel 4), når en økonomi åbner op. Diskuter de fordelingsmæssige implikationer ved, at en økonomi går fra at være lukket til åben.

Svar1:

Man antager at økonomien starter med at være lukket (og dermed ligesom kapitel 3) og så tænker man over, hvad der sker når vi åbner op (dvs. går over til kapitel 4). Hvis situation er sådan, at den oprindelige lukkede realrenten er større end den international realrente (dvs. $r_c^* > \bar{r}$) vil økonomien "opleve" to følgende effekter: Da der vil ske kapital outflow bliver økonomien

1) netto-kreditor og får indkomst via rentebetalinger. Dette øger nationalindkomsten pr. arbejder,

2) og "mister" kapital i den indenlandske produktion, hvilket reducerer produktiviteten og dermed national indkomsten pr. arbejder.

Hvis $r_c^* < \bar{r}$ vil det være omvendt. og hvis $r_c^* = \bar{r}$ vil der ikke ske noget. Dermed at det ex-ante uklart, hvad åbenhed fører til! Det kan dog vises matematiske, at åbenhed altid øger nationalindkomsten pr. arbejder. Dette skyldes, at lukkede kapitalmarkeder forhindrer priserne på at låne (altså renterne) i at blive ækvivalerede (og ved fravær af markedsfejl, eksternaliteter mv. er markedets allokering altid mest effektiv).

Svar2:

Selvom man (i gennemsnit) vil opleve en stigning i levestandarden ved at åbne op, så er det ikke nødvendigvis alle grupper i økonomien, der vil opleve dette. Fx hvis $r_c^* < \bar{r}$ vil realrente stige, men reallønnen samtidig falder, hvilket betyder, at kapitalejerne vinder, mens arbejderne taber. Kapitalejerne vinder dog mere end arbejderne taber, så de kan potentielt kompensere arbejderne (via et skattesystem fx).

Opgave 2: Vækst fra R&D og international vidensdeling

Ligningerne (2)-(6) udgør en Solowmodel, der er lukket for internationale kapital bevægelser, men åben over for international vidensdeling:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

$$K_{t+1} = S_t,\ K_0 \text{ givet}, \tag{3}$$

$$S_t = s_Y Y_t,\ 0 < s_Y < 1, \tag{4}$$

$$A_{t+1} - A_t = \rho \bar{A}_t^{\mu} \left(s_R Y_t\right)^{1-\mu},\ 0 < s_R, \mu < 1,\ \rho > 0 \text{ og } A_0 \text{ givet}, \tag{5}$$

$$\bar{A}_{t+1} = (1 + g^W)\bar{A}_t,\ \bar{A}_0 \text{ givet}, \tag{6}$$

Ligning (2) beskriver BNP som funktion af kapital (K_t), arbejdere (L) og produktivitet, der er givet ved det nationale vidensniveau (A_t). Ligning (3) er bevægelsesligningen for kapital, hvor S_t er den samlede opsparing (for at simplificere modellen antages der 100% nedslidning af kapital i hver periode; dvs. $\delta = 1$). I følge ligning (4) er den samlede opsparing (S_t) en andel (s_Y) af den samlede produktion (Y_t). Ligning (5) angiver udviklingen i det nationale vidensniveau, hvor $\bar{A}_t$ er udtryk for vidensniveauet på den *internationale* forskningsfront, og $s_R Y_t$ er resurser, der bruges på national vidensudvikling. Parameteren μ kan fortolkes som graden, hvori landet er integreret i international vidensdeling. Ligningen (6) beskriver udviklingen i det internationale vidensniveau. Det antages at befolkningen er konstant over tid (L) og $s_Y + s_R < 1$, således at $C_t = (1 - s_R - s_Y)Y_t > 0$. Der anvendes følgende definitioner:

$$\tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t},\ \tilde{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t},\ z_t \equiv \frac{K_t}{Y_t}.$$

2.1

Vis ved brug af produktionsfunktionen – givet ved ligning (2) – at kapital-output forholdet kan skrives som:

$$z_t = \tilde{k}_t^{1-\alpha} \tag{7}$$

Svar:

$$z_t = \frac{K_t}{Y_t} = \frac{K_t}{K_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha}} = \left(\frac{K}{A_t L}\right)^{1-\alpha} = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$$

2.2

Vis at vækstraten i det nationale vidensniveau er givet ved følgende udtryk:

$$g_t^A \equiv \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho \left(\frac{\bar{A}_t}{A_t}\right)^{\mu} \left(s_R z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L\right)^{1-\mu}. \tag{8}$$

Svar:

Først omskrives produktionsfunktionen:

$$\begin{aligned}
\frac{Y_t}{Y_t^{\alpha}} &= \frac{K_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha}}{Y_t^{\alpha}} \Leftrightarrow \\
Y_t^{1-\alpha} &= \left(\frac{K}{Y_t}\right)^{\alpha} (A_t L)^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\
Y_t &= z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t L.
\end{aligned}$$

Denne indsættes i ligning (5):

$$\begin{aligned}
A_{t+1} - A_t &= \rho \bar{A}_t^{\mu} \left(s_R z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t L\right)^{1-\mu} \Leftrightarrow \\
g_t^A &= \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho \left(\frac{\bar{A}_t^{\mu}}{A_t}\right)^{\mu} \left(s_R z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L\right)^{1-\mu}
\end{aligned}$$

2.3

Med fokus på forholdet mellem det internationale og nationale vidensniveau ($\bar{A}_t/A_t$), beskriv først hvad ligning (8) fortæller os om landets produktivitetsvækst (antag $\bar{A}_t > A_t\ \forall t$). Herefter vurder om denne model indeholder en såkaldt "skalaeffekt".

Svar:

Der vil være et positiv vækstbidrag, hvis den nationale vidensniveau ligger under det international niveau. Dette kan indses direkte ved at kigge på ligning (8) eller man kan tage ln:

$$\ln g_t^A = \ln \rho + \mu \left(\ln \bar{A}_t - \ln A_t\right) + (1-\mu) \ln s_R z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L,$$

dvs. sålænge $\bar{A}_t > A_t$ er andet led på højresiden positivt. Man kan fx tolke dette som "catching up" med verden.

Denne model indeholder en skalaeffekt, da L indgår i ligning (8); dvs. g_t^A er stigende i befolkningsstørrelsen.

2.4

Vis at modellen indebærer følgende transitionsligning for vækstraten i det nationale vidensniveau:

$$g_{t+1}^{A}=\left(1+g^{W}\right)^{\mu}\left(\frac{z_{t+1}}{z_{t}}\right)^{\frac{\alpha(1-\mu)}{1-\alpha}}\left(1+g_{t}^{A}\right)^{-\mu}g_{t}^{A}. \tag{9}$$

Hvad bliver steady-state vækstraten ($g_{t+1}^{A}=g_{t}^{A}=g^{A*}$), hvis $z_{t+1}=z_{t}$?

Svar1:

Udled transitionsligning for vækstraten i det nationale vidensniveau:

$$\begin{aligned}
\frac{g_{t+1}^{A}}{g_{t}^{A}} &= \frac{\rho\left(\frac{\bar{A}_{t+1}}{A_{t+1}}\right)^{\mu}\left(s_{R}z_{t+1}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L\right)^{1-\mu}}{\rho\left(\frac{\bar{A}_{t}}{A_{t}}\right)^{\mu}\left(s_{R}z_{t}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L\right)^{1-\mu}} \Leftrightarrow \\
\frac{g_{t+1}^{A}}{g_{t}^{A}} &= \frac{\left(\frac{\bar{A}_{t+1}}{\bar{A}_{t}}\right)^{\mu}\left(\frac{z_{t+1}}{z_{t}}\right)^{\frac{\alpha(1-\mu)}{1-\alpha}}}{\left(\frac{A_{t+1}}{A_{t}}\right)^{\mu}} \Leftrightarrow \\
g_{t+1}^{A} &= \left(1+g^{W}\right)^{\mu}\left(\frac{z_{t+1}}{z_{t}}\right)^{\frac{\alpha(1-\mu)}{1-\alpha}}\left(1+g_{t}^{A}\right)^{-\mu}g_{t}^{A}
\end{aligned}$$

Svar2:

Find SS, hvis $z_{t+1}=z_{t}\Rightarrow$ SS er defineret som $g_{t}^{A}=g_{t+1}^{A}=g^{A*}$. Brug dette i ligning (9), hvor $z_{t+1}=z_{t}$:

$$\begin{aligned}
g^{A*} &= \left(1+g^{W}\right)^{\mu}\left(1+g^{A*}\right)^{-\mu}g^{A*} \Leftrightarrow \\
1 &= \left(1+g^{W}\right)^{\mu}\left(1+g^{A*}\right)^{-\mu} \Leftrightarrow \\
g^{A*} &= g^{W}
\end{aligned}$$

Dvs. på den balanceret vækststi er vækstraten den samme som i den omkringliggende verden.

2.5

Nu skal du vise, at man vha. ligningerne (2)-(4) og $A_{t+1} = (1+g_t^A)A_t$ kan finde frem til følgende transitionsligning for kapital-output forholdet:

$$z_{t+1} = \left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{1-\alpha} z_t^{\alpha}. \tag{10}$$

Svar1:

Start med kapital-output forholdet i periode $t+1$, hvor produktionsfunktionen indsættes:

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= \frac{K_{t+1}}{K_{t+1}^{\alpha}(A_{t+1}L)^{1-\alpha}} \Leftrightarrow \\ z_{t+1} &= \frac{K_{t+1}^{1-\alpha}}{(A_{t+1}L)^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Brug nu ligningerne (3) og (4) i tælleren:

$$z_{t+1} = \frac{s_Y^{1-\alpha}Y_t^{1-\alpha}}{(A_{t+1}L)^{1-\alpha}}.$$

Indsæt nu at $A_{t+1} = (1+g_t^A)A_t$ og omskriv:

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= \frac{s_Y^{1-\alpha}Y_t^{1-\alpha}}{(1+g_t^A)^{1-\alpha}(A_tL)^{1-\alpha}} \Leftrightarrow \\ z_{t+1} &= \frac{s_Y^{1-\alpha}Y_t^{1-\alpha}}{(1+g_t^A)^{1-\alpha}(A_tL)^{1-\alpha}}\frac{K_t^{\alpha}}{K_t^{\alpha}} \Leftrightarrow \\ z_{t+1} &= \frac{s_Y^{1-\alpha}Y_t\left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\alpha}}{(1+g_t^A)^{1-\alpha}Y_t} \\ z_{t+1} &= \left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{1-\alpha} z_t^{\alpha} \end{aligned}$$

2.6

Med udgangspunkt i ligning (9), vis at udvilkingen i vækstraten i det nationale vidensniveau kan skrives som:

$$g_{t+1}^{A}=\left(1+g^{W}\right)^{\mu}\left(\frac{s_{Y}}{1+g_{t}^{A}}\right)^{\alpha(1-\mu)} z_{t}^{-\alpha(1-\mu)}\left(1+g_{t}^{A}\right)^{-\mu} g_{t}^{A}. \tag{11}$$

Skitser vha. relevante diagrammer, hvordan modellen samlet set udvikler sig over tid fra initial værdierne g_0^A og z_0. (*Hint: Den samlede model er beskrevet ved et system af differensligninger i* g_t^A *og* z_t*, givet ved ligningerne 10 og 11. Du kan derfor bruge en løsningsmetode, der minder om metoden fra pensumbogens kapitel 6, og skitser udvikling i modellen i et fasediagram med to differensligninger. Det kan evt. bemærkes, at steady-state vækstraten i vidensniveauet findes, når* $g_{t+1}^A/g_t^A = 1$ *og steady-state kapital-output forholdet findes når* $z_{t+1}/z_t = 1$).

Svar1:

Indsæt ligning (10) i ligning (9) og ryk rundt:

$$\begin{aligned}
g_{t+1}^{A} &= \left(1+g^{W}\right)^{\mu}\left(\frac{\left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{1-\alpha} z_t^{\alpha}}{z_t}\right)^{\frac{\alpha(1-\mu)}{1-\alpha}}\left(1+g_t^A\right)^{-\mu} g_t^A \\
g_{t+1}^{A} &= \left(1+g^{W}\right)^{\mu}\left(\frac{\left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{1-\alpha}}{z_t^{1-\alpha}}\right)^{\frac{\alpha(1-\mu)}{1-\alpha}}\left(1+g_t^A\right)^{-\mu} g_t^A \Leftrightarrow \\
g_{t+1}^{A} &= \left(1+g^{W}\right)^{\mu}\left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{\alpha(1-\mu)} z_t^{-\alpha(1-\mu)}\left(1+g_t^A\right)^{-\mu} g_t^A
\end{aligned}$$

Svar2:

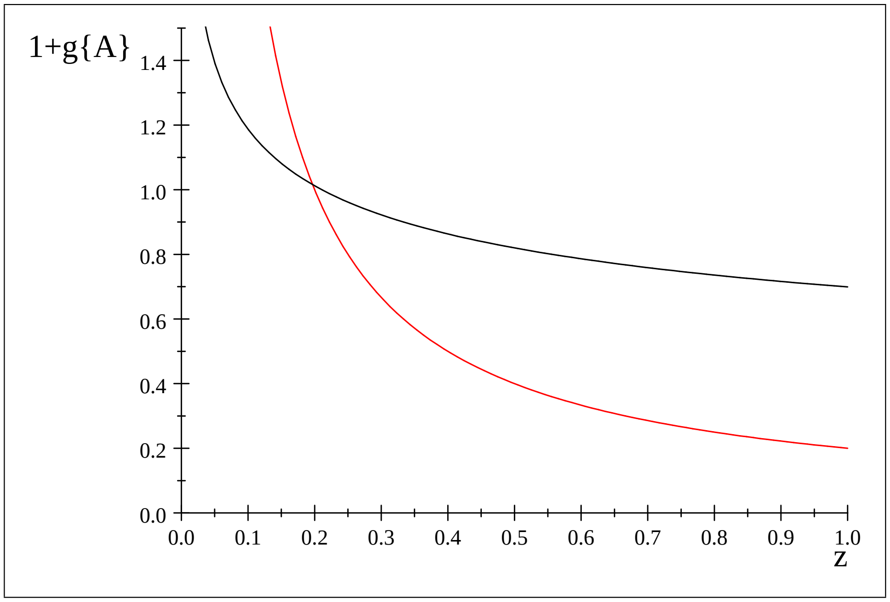
For at analysere den samlede dynamik i modellen, skal man indtegne de såkaldte "null-clines" i et g_t^A, z_t-diagram. Fra ligning (11) bemærkes det, at der ikke er ændringer i vækstraten over tid når:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} = \left(1+g^W\right)^{\mu}\left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{\alpha(1-\mu)} z_t^{-\alpha(1-\mu)}\left(1+g_t^A\right)^{-\mu} \Rightarrow \\
\left(1+g_t^A\right)^{\mu} &= \left(1+g^W\right)^{\mu}\left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{\alpha(1-\mu)} z_t^{-\alpha(1-\mu)} \Leftrightarrow \\
\left(1+g_t^A\right) &= \left(1+g^W\right)\left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{\frac{\alpha(1-\mu)}{\mu}} z_t^{-\frac{\alpha(1-\mu)}{\mu}} \Leftrightarrow \\
\left(1+g_t^A\right)^{1+\frac{\alpha(1-\mu)}{\mu}} &= \left(1+g^W\right)\left(\frac{s_Y}{z_t}\right)^{\frac{\alpha(1-\mu)}{\mu}} \Leftrightarrow \\
\left(1+g_t^A\right)^{\frac{\mu+\alpha(1-\mu)}{\mu}} &= \left(1+g^W\right)\left(\frac{s_Y}{z_t}\right)^{\frac{\alpha(1-\mu)}{\mu}} \\
1+g_t^A &= \left(1+g^W\right)^{\frac{\mu}{\mu+\alpha(1-\mu)}}\left(\frac{s_Y}{z_t}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\frac{\mu}{1-\mu}}}
\end{aligned}
$$

Dvs. denne ligning angiver kombinationer af $1+g_t^A$ og z_t hvorom det gælder at g_t^A ikke ændres over tid (dette er den ene null-cline, der skal indtegnes i g_t^A, z_t-diagram). Fra ligning (10) findes den anden null-cline (via samme fremgangsmetode):

$$
\begin{aligned}
z_{t+1} &= \left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{1-\alpha} z_t^{\alpha} \Leftrightarrow \\
\frac{z_{t+1}}{z_t} &= \left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{1-\alpha} z_t^{\alpha-1} \Rightarrow \\
1 &= \frac{z_{t+1}}{z_t} = \left(\frac{s_Y}{1+g_t^A}\right)^{1-\alpha} z_t^{\alpha-1} \\
1+g_t^A &= s_Y z_t^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} \\
1+g_t^A &= \frac{s_Y}{z_t}
\end{aligned}
$$

Dvs. denne ligning angiver kombinationer af $1+g_t^A$ og z_t hvorom det gælder at z_t ikke ændres over tid. Disse er nu indtegnet nedenfor (som skitse; sort er den første null-cline og rød er den anden null-cline) og så længe $\alpha/(\alpha+\frac{\mu}{1-\mu})<1$ vil de skære hinanden som vist (og her findes SS). Den kan yderligere vises at uanset hvor vi starter ender vi i SS; dvs. i hver "rum", der dannes mellem af de to grafer vil pillene pege ind mod SS-værdien.



2.7

Udled steady-state vækststien for BNP pr. arbejder ($\ln y_t^*$) og diskuter hvilket af de to politikinstrumenter (s_Y og s_R), der har den største effekt på BNP pr. arbejder på lang sigt (dvs. y_t^*).

Svar:

Udled SS-vækststien: I steady-state ved vi at $g^{A*} = g^W$ og $z_{t+1} = z_t = z^* = \frac{s_Y}{1+g^w}$, hvilket kan indsættes i ligning (8)

$$\begin{aligned}
g^W &= \rho\left(\frac{\bar{A}_t}{A_t}\right)^{\mu}\left(s_R z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L\right)^{1-\mu} \Leftrightarrow \\
A_t^{\mu} &= \frac{\rho}{g^W}\bar{A}_t^{\mu}\left(s_R z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L\right)^{1-\mu} \Leftrightarrow \\
\ln A_t &= \frac{1}{\mu}\ln\frac{\rho}{g^W} + \ln\bar{A}_t + \frac{1-\mu}{\mu}\left[\ln s_R + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln z^* + \ln L\right] \Leftrightarrow \\
\ln A_t &= \frac{1}{\mu}\ln\frac{\rho}{g^W} + \ln\bar{A}_t + \frac{1-\mu}{\mu}\left[\ln s_R + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\frac{s_Y}{1+g^w} + \ln L\right]
\end{aligned}$$

Denne skal indsættes i produktionfunktionen efter lidt omskrivning. BNP. pr arbejder kan til alle tidspunkter skrives som $y_t = z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t$. På steady-state vækststien er den derfor

$y_t^* = (z^*)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t = \left(\frac{s_Y}{1+g^w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t$. Der tages nu ln på begge sider og $\ln A_t$ kan indsættes:

$$\ln y_t^* = \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \frac{s_Y}{1+g^W} + \frac{1}{\mu} \ln \frac{\rho}{g^W} + \ln \bar{A}_t + \frac{1-\mu}{\mu} \left[\ln s_R + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \frac{s_Y}{1+g^w} + \ln L \right]$$

Hvis man har lyst kan man også indsætte løsningen til ligning (6) i denne. Det ses nu nemt at $\partial \ln y_t^* / \partial s_Y > \partial \ln y_t^* / \partial s_R$. Dvs. at s_Y er det mest "effektive" politik-instrument, hvilket skyldes at en stigning i s_Y har to positive effekter på y_t^*: 1) mere opsparing i fysisk kapital giver mere kapital pr. arbejder og dermed et højere niveau af y_t^*, hvilket leder til 2) flere resurser til forskningssektorer. En stigning i s_R har "kun" en gavnlig effekt på y_t^* via 2).