Skriftlig eksamen i Matematik A. Vinteren 2015 - 2016

Torsdag den 14. januar 2016

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 V-1A ex

Skriftlig eksamen i Matematik A

Torsdag den 14. januar 2016

---

2 sider med 3 opgaver.
Løsningstid: 2 timer.
Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Integraler og stamfunktioner.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent, ikke-tomt interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en kontinuert funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen $F : I \to \mathbf{R}$ er en stamfunktion til funktionen f.

(2) Hvad forstår man ved det ubestemte integral

$$\int f(x)\,dx$$

af funktionen f?

(3) Er funktionen

$$F(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \cos(7x) + \text{Arctan}(5x), \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

en stamfunktion til funktionen

$$f(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} - 7\sin(7x) + \frac{5}{1+25x^2}, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}?$$

(4) Udregn følgende ubestemte integraler

$$\int (x^2+10x^4-16x^7+e^x)\,dx, \int \frac{4x^3}{2+x^4}\,dx, \int 6\cos(2x)e^{\sin(2x)}dx, \int \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + xy + y^4.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

(5) Bestem en forskrift for den funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\,s \in \mathbf{R} : g(s) = f(e^s, e^s).$$

Udregn dernæst Taylorpolynomiet P_2 af 2. orden for funktionen g ud fra punktet $s_0 = 0$.

Opgave 3. Vi betragter den funktion $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,x \in \mathbf{R}^2 : F(x,y) = e^{xy} + x^2 + xy^2 + e^y - 2e^2 - 5.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Godtgør, at ligningen $F(1,2) = 0$ er opfyldt. Vis dernæst, at den variable y i en omegn af $x = 1$ er givet implicit som en funktion $y = y(x)$, og bestem differentialkvotienten $y'(1)$.