Skriftlig eksamen i Matematik A. Sommeren 2016

Onsdag den 15. juni 2016

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 S-1A ex

Skriftlig eksamen i Matematik A

Onsdag den 15. juni 2016

---

2 sider med 3 opgaver.
Løsningstid: 2 timer.
Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Partielle afledede.

Lad $D \subseteq \mathbf{R}^2$ være en ikke-tom, åben mængde, og betragt en funktion $f : D \to \mathbf{R}$.

(1) Hvorledes definerer man de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

efter x og y i et punkt $(a, b) \in D$?

(2) Find de partielle afledede efter x og y i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ for funktionerne

$$f_1(x, y) = x^3+7x^2-xy, \; f_2(x, y) = e^x+e^y+e^{xy}, \; f_3(x, y) = \cos x+\sin(xy).$$

Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = \text{Arctan}(xy).$$

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

efter x og y i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og godtgør, at udsagnet

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

er opfyldt.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = 3x^2 + y^2 - xy.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

(5) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1, 1, f(1,1)\big)$.

(6) Godtgør, at $(1,1)$ er en løsning til ligningen $f(x,y) = 3$. Vis dernæst, at der findes en omegn $U(0)$ af $x = 1$, så den variable y er givet implicit som en funktion $y = y(x)$ i denne omegn. Bestem desuden differentialkvotienten $y'(1)$.

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^4}{1+x^4} \right)^n .$$

(1) Bestem mængden

$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid (\S) \text{ er konvergent}\}.$$

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : C \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall x \in C : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^4}{1+x^4} \right)^n .$$

Dette er rækkens sumfunktion.

(3) Bestem den afledede funktion f' og elasticiteten f^{ϵ} for funktionen f.