Skriftlig eksamen i Matematik B. Sommeren 2014

Tirsdag den 19. august 2014

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 S-1B rx

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 19. august 2014

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem egenværdierne for matricen A, og anfør deres rodmultiplicitet.

(2) Bestem egenrumme for matricen A, og bestem egenværdiernes egenværdimultiplicitet.

(3) Udregn matricen $B = AA = A^2$.

(4) Udregn matricen $C = B - A$.

(5) Bestem egenværdierne for matricen C, og anfør deres rodmultiplicitet.

(6) Bestem egenrumme for matricen C, og bestem egenværdiernes egenværdimultiplicitet.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^2 - x^3 + y^3.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Afgør dernæst for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

For ethvert $v > 0$ betragter vi den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq v \wedge 0 \leq y \leq 1\}.$$

(4) Udregn for ethvert $v > 0$ integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x, y)\, d(x, y).$$

(5) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \left(\frac{I(v)}{\sin v} \right).$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = \left(\frac{t}{2 + t^2} \right) x^8.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 1$ er opfyldt.

Opgave 4. Lad $a > 0$ være en given konstant, og lad $n \in \mathbf{N}$ være valgt, så $n \geq 3$.

Betragt mængden

$$U = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

og den funktion $P : U \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, i = 1, 2, 3, \ldots, n : P(i) = -a \ln \left(\int_0^1 t^i \, dt \right).$$

(1) Bestem a, så P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U.

(2) Bestem sandsynligheden $P(i)$ for ethvert $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

(3) Bestem sandsynligheden $P(\{1, 2, 3\})$ for hændelsen $A = \{1, 2, 3\}$.

(4) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1, 2, 3\}) \text{ og } \lim_{n\to\infty} P(U \setminus \{1, 2, 3\}).$$