KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 S-1B rx ret

EKSAMEN I MATEMATIK B

Tirsdag den 23. august 2011

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert tal $v \in \mathbf{R}$ betragter vi 2×3 matricen

$$A(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn matricen $B(v) = A(v)A(v)^t$ for et vilkårligt $v \in \mathbf{R}$. Superscripten t betyder transponering.

Løsning. Vi finder, at

$$B(v) = A(v)A(v)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 1+v \\ 1+v & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) Vis, at matricen $B(v)$ er regulær for ethvert $v \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi udregner determinanten for matricen $B(v)$ og får, at

$$\det B(v) = 3 + 3v^2 - (1+v)^2 = 2v^2 - 2v + 2 = (v^2+1) + (v^2 - 2v + 1) =$$

$$v^2 + 1 + (v-1)^2 \geq 1,$$

for ethvert $v \in \mathbf{R}$.

Da vi således har, at $\det B(v) > 0$, er matricen $B(v)$ regulær for ethvert $v \in \mathbf{R}$.

(3) Vis, at matricen $B(v)$ er positiv definit for ethvert $v \in \mathbf{R}$.

Løsning. De ledende hovedunderdeterminanter for matricen $B(v)$ er $D_1 = 1 + v^2$ og $D_2 = \det B(v)$. For ethvert $v \in \mathbf{R}$ er begge disse ledende hovedunderdeterminanter positive, hvilket viser, at $B(v)$ er positiv definit.

(4) Bestem egenværdierne for matricen $B(0)$.

Løsning. Vi ser først, at

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ for matricen $B(0)$ er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P(t) = \det\big(B(0) - tE\big) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} =$$

$$t^2 - 4t + 2.$$

Dette polynomium har rødderne

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Da disse rødder netop er egenværdierne for matricen $B(0)$, får vi altså, at egenværdierne er $t_1 = 2 + \sqrt{2}$ og $t_2 = 2 - \sqrt{2}$.

(5) Bestem egenrummene for matricen $B(0)$.

Løsning. Vi ser, at egenrummene for matricen $B(0)$ er

$$V(2+\sqrt{2}) = N(B(0) - (2+\sqrt{2})E) = \operatorname{span}\{(\sqrt{2}-1, 1)\}$$

og

$$V(2-\sqrt{2}) = N(B(0) - (2-\sqrt{2})E) = \operatorname{span}\{(-1-\sqrt{2}, 1)\}.$$

(6) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^{-1} B(0) Q.$$

Løsning. Vi ser, at vektoren $(\sqrt{2}-1, 1)$ har længden (normen) $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$, og at vektoren $(-1-\sqrt{2}, 1)$ har længden $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Heraf finder vi så, at

$$D = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ og } Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^4 + 2x^3 + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder straks, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 6x^2 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 2y.$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2x + 6x^2 = 0 \wedge 4y^3 + 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x(1+3x) = 0 \wedge 2y(2y^2+1) = 0 \Leftrightarrow \Big(x = 0 \vee x = -\frac{1}{3}\Big) \wedge y = 0.$$

Dette viser, at funktionen f har de stationære punkter $(x,y) = (0,0)$ og $(x,y) = (-\frac{1}{3}, 0)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør dernæst for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Vi finder, at

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2+12x & 0 \\ 0 & 2+12y^2 \end{pmatrix},$$

så

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } H(-\frac{1}{3}, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dette viser, at $(0,0)$ er et minimumspunkt, og at $(-\frac{1}{3}, 0)$ er et sadelpunkt for funktionen f.

(4) Bestem mængden

$$P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid H(x,y) \text{ er positiv definit}\}.$$

Løsning. Hessematricen $H(x,y)$ er positiv definit, hvis og kun hvis begge diagonalelementer er positive, og dette er opfyldt, netop når $x > -\frac{1}{6}$. Vi har derfor, at

$$P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > -\frac{1}{6}\}.$$

(5) Vi betragter funktionen $g : P \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\,(x,y) \in P : g(x,y) = f(x,y).$$

Vis, at funktionen g er strengt konveks.

Løsning. Dette er trivielt, thi $H(x,y)$ er Hessematrix for funktionen g på mængden P.

(6) Vi betragter mængden

$$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \,\wedge\, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Godtgør, at mængden K er kompakt, og begrund, at funktionen f har både en største og en mindste værdi på K. Bestem disse ekstremumsværdier og de tilhørende punkter i K, hvor ekstremumsværdierne antages.

Løsning. Det er klart, at mængden K er kompakt, thi K er både afsluttet og begrænset. Da mængden K er kompakt, og da funktionen f er kontinuert, ved vi fra ekstremværdisætningen, at f antager både en største og en mindste værdi på den kompakte mængde K.

Da funktionen f ikke har nogen stationære punkter i det indre af K, vil ekstremumspunkterne ligge på randen af K. Vi opdeler derfor randen i fire stykker I, II, III og IV og undersøger f på hvert af disse stykker.

Stykket $I : 0 \leq x \leq 1$ og $y = 0$. Da er $f(x,0) = x^2 + 2x^3$, som er voksende på stykket I. Vi ser, at $f(0,0) = 0$ og, at $f(1,0) = 3$.

Stykket $II : x = 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Da er $f(1,y) = 3 + y^4 + y^2$, som er voksende på stykket II. Vi finder, at $f(1,1) = 5$.

Stykket $III : 0 \leq x \leq 1$ og $y = 1$. Da er $f(x, 1) = x^2 + 2x^3 + 2$, som er voksende på stykket III. Vi ser, at $f(0, 1) = 2$.

Stykket $IV : x = 0$ og $0 \leq y \leq 1$. Da er $f(0, y) = y^4 + y^2$, som er voksende på stykket IV.

Vi ser nu, at f har maksimum i punktet $(1, 1)$ med maksimumsværdien $f(1, 1) = 5$ og minimum i $(0, 0)$ med minimumsværdien $f(0, 0) = 0$.

Opgave 3. For $n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$ betragter vi mængden

$$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}.$$

Desuden betragter vi funktionen $P : U \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$P(i) = a \cdot 2^i,$$

hvor $a > 0$, og $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$.

(1) Bestem konstanten $a > 0$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U.

Løsning. Det er klart, at funktionsværdierne $P(i) = a \cdot 2^i > 0$ for ethvert $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$. Desuden har vi, at

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = \sum_{i=1}^{n} a \cdot 2^i = a \sum_{i=1}^{n} 2^i = a \cdot 2 \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2a(2^n - 1) = 1,$$

så

$$a = \frac{1}{2(2^n - 1)} = \frac{1}{2^{n+1} - 2}.$$

(2) Bestem sandsynlighederne $P(\{1, 2, 3\})$ og $P(\{4, 5, \dots, n\})$.

Vi ser, at

$$P(\{1, 2, 3\}) = a(2 + 4 + 8) = \frac{14}{2^{n+1} - 2} = \frac{7}{2^n - 1},$$

og at

$$P(\{4, 5, \dots, n\}) = 1 - P(\{1, 2, 3\}) = \frac{2^{n+1} - 16}{2^{n+1} - 2} = \frac{2^n - 8}{2^n - 1}.$$

(3) Løs uligheden $P(\{1,2,3\}) < P(\{4,5,\dots,n\})$.

Løsning. Vi ser, at

$$P(\{1,2,3\}) < P(\{4,5,\dots,n\}) \Leftrightarrow 7 < 2^n - 8 \Leftrightarrow 15 < 2^n \Leftrightarrow n \geq 4,$$

thi $2^4 = 16$.

(4) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1,2,3\}) \text{ og } \lim_{n\to\infty} P(\{4,5,\dots,n\}).$$

Løsning. Vi finder straks, at

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1,2,3\}) = 0 \text{ og } \lim_{n\to\infty} P(\{4,5,\dots,n\}) = 1.$$

Opgave 4. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som givet ved

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = 6x^2y + 3y^2.$$

For ethvert $v > 0$ betragter vi desuden mængden

$$A(v) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq v \wedge 0 \leq y \leq 1\}.$$

(1) Bestem for ethvert $v > 0$ integralet

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x,y)\,d(x,y).$$

Løsning. Vi får, at

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^v \Big(\int_0^1 (6x^2y + 3y^2)\,dy \Big)\,dx =$$

$$\int_0^v \Big[3x^2y^2 + y^3\Big]_0^1 dx = \int_0^v (3x^2 + 1)\,dx = \Big[x^3 + x\Big]_0^v = v^3 + v.$$

(2) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v\to 0+} \Big(\frac{I(v)}{3v\cos(2v)}\Big).$$

Løsning. Vi får at

$$\lim_{v\to 0+} \Big(\frac{I(v)}{3v\cos(2v)}\Big) = \lim_{v\to 0+} \Big(\frac{v^3 + v}{3v\cos(2v)}\Big) = \lim_{v\to 0+} \Big(\frac{v^2 + 1}{3\cos(2v)}\Big) = \frac{1}{3}.$$

(3) Løs ligningen $f(x, y) = 0$.

Løsning. Vi ser, at

$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow 6x^2y + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow 3y(2x^2 + y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = -2x^2.$

(4) Løs ligningen $f(x, 1) = 15$.

Løsning. Vi får, at

$$f(x, 1) = 15 \Leftrightarrow 6x^2 + 3 = 15 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}.$$