KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2012 V-1B rx ret

EKSAMEN I MATEMATIK B

Onsdag den 22. februar 2012

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} -s & s & 1 \\ s & -s & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem determinanten $\det(A(s))$ for matricen $A(s)$ for et vilkårligt $s \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi ser, at $\det A(s) = s^2 + s - s^2 = s$, idet vi har benyttet Sarrus' regel, og vi får så, at matricen $A(s)$ er regulær, når og kun når $s \neq 0$.

(2) Vis, at matricen $A(s)$ hverken er positiv definit eller negativ definit for nogen værdi af $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Matricen $A(s)$ har de ledende hovedunderdeterminanter

$$D_1 = -s,\ D_2 = 0 \text{ og } D_3 = \det A(s) = s,$$

hvoraf det straks fremgår, at $A(s)$ hverken kan være positiv definit eller negativ definit.

(3) Vis, at matricen $A(s)$ er indefinit for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Matricen $A(s)$ har hovedunderdeterminanterne

$$\Delta_1 = -s,\ -s \text{ og } 1 \text{ af første orden,}$$

$$\Delta_2 = 0,\ -s - 1 \text{ og } -s \text{ af anden orden,}$$

og $\Delta_3 = \det A(s) = s$ af tredje orden.

Hvis alle hovedunderdeterminanterne skal være større end eller lig med 0, må vi kræve, at $s = 0$, men det fører til, at en af hovedunderdeterminanterne af anden orden bliver -1. Altså kan matricen $A(s)$ ikke være positiv semidefinit.

Da en af hovedunderdeterminanterne af første orden er 1, kan matricen $A(s)$ heller ikke være negativ semidefinit.

På baggrund af disse undersøgelser og af svaret på ovenstående spørgsmål, kommer vi frem til, at $A(s)$ er indefinit for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem egenværdierne for matricen $A(0)$.

Løsning. Vi ser, at

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og vi finder så, at matricen $A(0)$ har det karakteristiske polynomium $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P(t) = \det(A(0) - tE) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$t^2(1-t) + t = t\Big(t(1-t) + 1\Big) = t\Big(-t^2 + t + 1\Big),$$

så rødderne i P (og dermed egenværdierne for $A(0)$) er $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $t_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(5) Bestem 3×3 matricen $B = A(0)^2 = A(0)A(0)$, og vis, at B er positiv semidefinit.

Løsning. Vi finder, at

$$B = A(0)A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium $Q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ for matricen B er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : Q(t) = \det(B - tE) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 2-t \end{pmatrix} =$$

$$-t(1-t)(2-t)+t = t\Big(1-(1-t)(2-t)\Big) = t\Big(-t^2+3t-1\Big),$$

så rødderne i Q (og dermed egenværdierne for B) er $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ og $t_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, hvoraf vi ser, at B er positiv semidefinit, idet $\sqrt{5} < 3$.

(6) Bestem en forskrift for den til matricen B hørende kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, og godtgør, at K er en konveks funktion på mængden $\mathbf{R}^3$.

Løsning. Vi finder, at

$$\forall\,(x_1,x_2,x_3) : K(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)B(x_1,x_2,x_3)^T =$$

$$x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3,$$

hvor superscripten T betyder transponering.

Da matricen B er positiv semidefinit, er den kvadratiske form K en konveks funktion på mængden $\mathbf{R}^3$.

(7) Vis, at funktionen $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\,(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 : g(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{K(x_1,x_2,x_3)+2\pi},$$

er kvasikonveks.

Løsning. Det er klart, at kvadratrodsfunktionen er voksende, og at funktionen $K(x_1,x_2,x_3)+2\pi$ er konveks. Derfor er funktionen g kvasikonveks.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0 \,\wedge\, y \geq 0\}$$

og funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in D : f(x,y) = xy + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D^o$, hvor

$$D^o = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \,\wedge\, y > 0\}.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \frac{1}{2\sqrt{x}} = y + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \frac{1}{2\sqrt{y}} = x + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}.$$

(2) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at

$$\forall\,(x,y) \in D : f(x,y) \geq 0,$$

og at

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \,\wedge\, y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Desuden ser vi, at

$$f(x,x) = x^2 + 2\sqrt{x} \to \infty \;\text{ for }\; x \to \infty.$$

Alt dette viser, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [0,\infty[$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D^o$, og vis, at $H(1,1)$ er indefinit, og at $H(1,\frac{1}{9})$ er negativ definit.

Løsning. Vi finder, at

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix},$$

så

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \;\text{ og }\; H(1,\frac{1}{9}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ 1 & -\frac{27}{4} \end{pmatrix}.$$

Da $\det H(1,1) = \frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16}$, er matricen $H(1,1)$ indefinit. Da $-\frac{1}{4} < 0$, og da $\det H(1,\frac{1}{9}) = \frac{27}{16} - 1 = \frac{11}{16}$, er matricen $H(1,\frac{1}{9})$ negativ definit.

(4) Vi betragter funktionen $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R}_+ : g(x) = \det H(x,x).$$

Bestem Taylorpolynomiet P_3 af tredje orden for funktionen g ud fra punktet $a = 1$.

Løsning. Vi har, at

$$H(x,x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix},$$

så

$$\forall\, x \in \mathbf{R}_+ : g(x) = \det H(x,x) = \frac{1}{16}x^{-3} - 1,$$

og heraf får vi så, at

$$g^{'}(x) = -\frac{3}{16}x^{-4},\ g^{''}(x) = \frac{3}{4}x^{-5} \text{ og } g^{'''}(x) = -\frac{15}{4}x^{-6}.$$

Taylorpolynomiet P_3 for af tredje orden for funktionen f ud fra punktet $a = 1$ er derfor givet ved

$$P_3(x) = g(1) + g^{'}(1)(x-1) + \frac{1}{2}g^{''}(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}g^{'''}(1)(x-1)^3 =$$

$$-\frac{15}{16} - \frac{3}{16}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{8}(x-1)^3.$$

Opgave 3. For $t > 0$ betragter vi differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = \ln(t) + 3t^2.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser, at

$$x = \int \left(\ln(t) + 3t^2\right) dt = t\ln(t) - t + t^3 + c,$$

hvor $c \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(1) = 5$ er opfyldt.

Løsning. Idet $\tilde{x}(1) = 5$, får vi, at $-1 + 1 + c = 5$, så $c = 5$. Vi har derfor, at

$$\forall\, t > 0 : \tilde{x} = \tilde{x}(t) = t\ln(t) - t + t^3 + 5.$$

(3) Vis, at enhver maksimal løsning $x = x(t)$ til differentialligningen $(*)$ er en strengt konveks funktion på hele $\mathbf{R}_+$.

Løsning. Vi ser, at

$$\forall\, t > 0 : \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t} + 6t > 0,$$

hvoraf det ønskede straks fremgår.

Opgave 4. Lad $n \in \mathbf{N}$ være givet, og antag, at $n \geq 4$. Betragt mængden

$$U = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

og funktionen $P : U \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} : P(i) = a(\ln i + 2^i),$$

hvor $a > 0$.

(1) Bestem $a > 0$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U.

Løsning. Det er klart, at $P(i) > 0$ for ethvert $i = 1, 2, \ldots, n$. Vi finder desuden, at

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = a\sum_{i=1}^{n}\Big(\ln(i)+2^i\Big) = a\Big(\ln(n!)+2\frac{1-2^n}{1-2}\Big) = a\Big(\ln(n!)+2^{n+1}-2\Big),$$

så

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\ln(n!) + 2^{n+1} - 2}.$$

(2) Bestem sandsynligheden $P(\{1,3\})$ for vilkårligt $n \geq 4$.

Løsning. Vi finder, at

$$P(\{1,3\}) = \frac{1}{\ln(n!) + 2^{n+1} - 2}(2 + \ln 3 + 8) = \frac{\ln 3 + 10}{\ln(n!) + 2^{n+1} - 2}.$$

(3) Bestem sandsynligheden $P(\{1,3\})$ for $n = 4$.

Vi får straks, at

$$P(\{1,3\}) = \frac{\ln 3 + 10}{\ln(4!) + 2^5 - 2} = \frac{\ln 3 + 10}{\ln 24 + 30}.$$