Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2013

MATEMATIK A

1. årsprøve

Fredag den 9. august 2013

(2 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Opgavesættet består foruden af denne forside af 2 sider med opgaver.

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 S-1A rx

Skriftlig eksamen i Matematik A

Fredag den 9. august 2013

---

2 sider med 3 opgaver.
Løsningstid: 2 timer.
Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Differentiabilitet.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et ikke-tomt, åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en given funktion. Lad $a \in I$ være et fast valgt punkt.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er differentiabel i punktet $a \in I$, og forklar, hvordan man bestemmer differentialkvotienten $\frac{df}{dx}(a)$.

(2) Differentier følgende funktioner:

$$f(x) = x^2 + e^x + \ln(1 + x^4),\; g(x) = \frac{\cos(x)}{2 + e^x} \text{ og } h(x) = \sqrt{1 + e^{\sin(x)}}.$$

(3) Betragt funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{for } x \geq 0 \\ x^3 + x, & \text{for } x < 0 \end{cases}.$$

Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ i et vilkårligt punkt $x \in \mathbf{R}$.

(4) Eksisterer $f''(0)$? (Funktionen f er den samme funktion, som vi betragtede i spørgsmål 3.)

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = e^x + e^y - e^{x+y}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har præcis et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

(4) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(1, 1)$.

Opgave 3. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = x^2 + x^4 + e^x.$$

(1) Bestem f', f'' og f''' i et vilkårlig punkt $x \in \mathbf{R}$.

(2) Vis, at funktionen f er strengt konveks på hele $\mathbf{R}$.

(3) Bestem Taylorpolynomiet P_3 af tredje orden for f ud fra punktet $x = 0$.

(4) Udregn det ubestemte integral

$$\int f(x)\, dx.$$