KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2012 V-1A rx ret

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A

Tirsdag den 21. februar 2012

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. Stamfunktion og integraler. Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en kontinuert funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen $F : I \to \mathbf{R}$ er en stamfunktion til den givne kontinuerte funktion f.

Løsning. At funktionen $F : I \to \mathbf{R}$ er en stamfunktion til den givne funktion f betyder, at F er differentiabel, og at

$$\forall\, x \in I : F^{'}(x) = \frac{dF}{dx}(x) = f(x).$$

(2) Forklar, hvad man forstår ved det ubestemte integral

$$\int f(x)\, dx$$

af den givne funktion f.

Løsning. Det ubestemte integral af den givne funktion f er samtlige stamfunktioner til f, altså

$$\int f(x)\, dx = F(x) + k,$$

hvor F er en vilkårlig stamfunktion til f, og hvor $k \in \mathbf{R}$ er en arbitrær konstant.

(3) Antag, at $f, g : I \to \mathbf{R}$ er to givne kontinuerte funktioner på det åbne interval I, og antag endvidere, at funktionerne F og G er stamfunktioner til henholdsvis f og g.

Vis, at

$$\int f(x)g(x)\, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g^{'}(x)\, dx,$$

dersom funktionen g er differentiabel, og den afledede funktion $g^{'}$ er kontinuert.

Vis endvidere, at

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f^{'}(x)G(x)\,dx,$$

dersom funktionen f er differentiabel, og den afledede funktion $f^{'}$ er kontinuert.

Løsning. Idet vi ved, at

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x),$$

får vi, at

$$\frac{d}{dx}\int f(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) = (fg)(x),$$

og endvidere finder vi, at

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)g(x) - \int F(x)g^{'}(x)\,dx\Big) =$$

$$f(x)g(x) + F(x)g^{'}(x) - F(x)g^{'}(x) = (fg)(x),$$

hvoraf det ønskede fremgår.

Den anden påstand fås ved at lade funktionerne f og g bytte roller.

(4) Udregn det ubestemte integral

$$\int x^2 \sin(x)\,dx\,.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\int x^2 \sin(x)\,dx = x^2(-\cos(x)) - \int 2x(-\cos(x))\,dx =$$

$$-x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)\,dx =$$

$$-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)\,dx =$$

$$-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

(5) Udregn det ubestemte integral

$$\int \frac{8x}{5+(2x)^2}\,dx\,.$$

Løsning. Vi ser, at

$$\int \frac{8x}{5+(2x)^2}\,dx = \int \frac{1}{5+(2x)^2}\,d(5+(2x)^2) = \ln(5+(2x)^2)+k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in D : f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Løsning. Vi får, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}.$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi får, at

$$\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = 0 \wedge -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y,$$

thi $x > 0$ og $y > 0$.

De stationære punkter for funktionen f er derfor punkterne $(x,y) = (x,x)$.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,,\;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \;\text{ og }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$, og afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y}{x^3}\,,\;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \;\text{ og }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x}{y^3}.$$

Specielt får vi, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,x) = \frac{2}{x^2} > 0\,,\;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,x) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,x) = 0 \;\text{ og }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,x) = \frac{2}{x^2} > 0.$$

Heraf fremgår det, at alle de stationære punkter $(x,x) \in D$ for funktionen f er minimumspunkter.

(4) Vis, at

$$\forall\,(x,y) \in D : f\Big(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\Big) = f(x,y).$$

Løsning. Vi finder, at

$$\forall\,(x,y) \in D : f\Big(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\Big) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = f(x,y).$$

(5) Vis, at

$$\forall\,(x,y) \in D : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)y = 0.$$

Er funktionen f homogen, og i bekræftende fald af hvilken grad?

Vi får, at

$$\forall\,(x,y) \in D : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)y = \frac{x}{y} - \frac{yx}{x^2} - \frac{xy}{y^2} + \frac{y}{x} = 0,$$

og ved fx at benytte Eulers sætning kan vi hermed godtgøre, at funktionen f er homogen af grad 0.

Opgave 3. For ethvert $a > 0$ og for ethvert $x \in \mathbf{R}_+$ betragter vi den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^{an}.$$

(1) Bestem mængden

$$C = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid (\S) \text{ er konvergent}\} = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid \sum_{n=0}^{\infty} x^{an} < \infty\}.$$

Løsning. Den uendelige række (§) er en kvotientrække med kvotienten $q = x^a$, og vi har derfor, at (§) er konvergent, hvis og kun hvis $|q| < 1$. Dette er så ensbetydende med, at $|x^a| < 1$, og vi ser så, at $C =]0,1[$, thi vi har jo på forhånd forudsat, at $x > 0$.

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : C \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\,(x,a) \in C \times \mathbf{R}_+ : f(x,a) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{an}.$$

Løsning. Vi får umiddelbart, at

$$\forall\, x \in]0,1[: f(x,a) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{an} = \frac{1}{1-x^a}.$$

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,a) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial a}(x,a)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, a) \in C \times \mathbf{R}_+$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, a) = -\frac{1}{(1 - x^a)^2} \cdot (-ax^{a-1}) = \frac{ax^{a-1}}{(1 - x^a)^2}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, a) = -\frac{1}{(1 - x^a)^2} \cdot (-\ln(x)) \cdot x^a = \frac{\ln(x) \cdot x^a}{(1 - x^a)^2}.$$

(4) Bestem de partielle elasticiteter $\mathrm{El}_x f(x, a)$ og $\mathrm{El}_a f(x, a)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, a) \in C \times \mathbf{R}_+$.

Løsning. Vi får straks, at

$$\mathrm{El}_x f(x, a) = \frac{ax^a}{1 - x^a}, \text{ og at } \mathrm{El}_a f(x, a) = \frac{a \ln(x) \cdot x^a}{1 - x^a} = \frac{\ln(x^a) \cdot x^a}{1 - x^a}.$$