Skriftlig eksamen i Matematik A. Sommeren 2015

Tirsdag den 9. juni 2015

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 S-1A ex

Skriftlig eksamen i Matematik A

Tirsdag den 9. juni 2015

---

2 sider med 3 opgaver.
Løsningstid: 2 timer.
Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Partielle afledede.

Lad $D \subseteq \mathbf{R}^2$ være en åben, ikke-tom mængde, og lad $f : D \to \mathbf{R}$ være en funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f har de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

efter henholdsvis x og y i punktet $(a,b) \in D$.

(2) Betragt funktionen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : g(x,y) = x^2 y + \cos(xy) - \ln(1 + x^2 + y^4) + e^x.$$

Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(3) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for funktionen g i punktet $\big(0, 1, g(0,1)\big)$.

(4) Vi betragter den funktion $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall s \in \mathbf{R} : h(s) = g(s,s).$$

Bestem den afledede $h'(s)$ i et vilkårligt punkt $s \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^3y + x^2 - \frac{y^4}{4}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Opgave 3. Vi betragter den rationale funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,x \in \mathbf{R} : f(x) = \frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2x + 1}{1 + x^2}.$$

(1) Vis, at ligningen

$$\forall\,x \in \mathbf{R} : f(x) = (x^3 + 1) + \frac{2x}{1 + x^2}.$$

er opfyldt.

(2) Bestem værdimængden for f.

(3) Udregn de ubestemte integraler

$$\int f(x)\,dx \text{ og } \int f(-x)\,dx.$$