Matematik A, 11. juni 2019: Rettevejledning

Opgave 1. Homogene funktioner.

Lad C være en kegle i $\mathbb{R}^2$ med $C \neq \emptyset$, og lad f være en reel funktion defineret på C.

1) Opskriv definitionen af, at f er homogen af grad k.

   Løsning:

   f er homogen af grad k, hvis der for alle $(x, y) \in C$ og alle $t > 0$ gælder
$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Lad nu $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \ \wedge y > 0\}$. C er en kegle, hvilket ikke ønskes bevist.

Lad desuden funktionerne f og g, begge defineret på C, have forskrifterne

$$f(x, y) = \frac{2x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x}}{x^2 + 2y^2}$$

$$g(x, y) = \sin\left(\frac{x^2}{2x^2 + y^2}\right)$$

2) Vis, ved hjælp af definitionen i 1), at f og g begge er homogene funktioner, og find deres homogenitetsgrader.

   Løsning:

   For $(x, y) \in C$ og $t > 0$ er

$$f(tx, ty) = \frac{2tx\sqrt{ty} - 3ty\sqrt{tx}}{(tx)^2 + 2(ty)^2} = \frac{2tx\sqrt{t}\sqrt{y} - 3ty\sqrt{t}\sqrt{x}}{t^2x^2 + 2t^2y^2}$$
$$= \frac{t^{3/2}\left(2x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x}\right)}{t^2(x^2 + 2y^2)}$$

$$= \ t^{-1/2} f(x, y).$$

   Derfor er f homogen af grad $-1/2$.

   For $(x, y) \in C$ og $t > 0$ er

$$g(tx, ty) = \sin\left(\frac{(tx)^2}{2(tx)^2 + (ty)^2}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{t^2x^2}{2t^2x^2 + t^2y^2}\right) = \sin\left(\frac{x^2}{2x^2 + y^2}\right)$$

(Opgave 1 spørgsmål 2) fortsat)

$= t^0 g(x,y)$.

Derfor er g homogen af grad 0.

Opgave 2

Lad funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$f(x,y) = -x^2 + 2x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + 4$$

1) Find de partielle afledede

$$f_x'(x,y) \quad \text{og} \quad f_y'(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Løsning:

$f_x'(x,y) = -2x + 2$ og $f_y'(x,y) = y^2 - 3y + 2$.

2) Vis, at f har netop to stationære punkter, og find disse.

Løsning:

$f_x'(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ved diskriminantmetoden fås

$$f_y'(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow y = 2 \lor y = 1.$$

Altså har f netop de to stationære punkter $(1,1)$ og $(1,2)$.

3) Find Hessematricen $H(x,y)$ for f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Løsning:

For $(x,y) \epsilon \mathbb{R}^2$ er $H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2y-3 \end{pmatrix}$

(Opgave 2 fortsat)

4) Undersøg for hvert af de to stationære punkter, om det er et maksimumspunkt, minimumspunkt eller sadelpunkt.

Løsning:

$H(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Da $A = -2 < 0$ og $AC - B^2 = 2 > 0$, er $(1,1)$ et (lokalt) maksimumspunkt.

$H(1,2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Her er $AC - B^2 = -2 < 0$, så $(1,2)$ er et sadelpunkt.

5) Find en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(2, 0, f(2,0))$.

Løsning:

Ligningen er

$$z = f(2,0) + f_x'(2,0)(x - 2) + f_y'(2,0)(y - 0).$$

$f(2,0) = 4$, $f_x'(2,0) = -2$ og $f_y'(2,0) = 2$, og ligningen reduceres derfor til

$$z = -2x + 2y + 8.$$

6) Find værdimængden for f.

Løsning:

$f(0, y) = \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + 4.$

På grund af den positive koefficient foran tredjegradsleddet fås:

$f(0, y) \longrightarrow \infty$ for $y \to \infty$ og $f(0, y) \longrightarrow -\infty$ for $y \to -\infty$.

Da f er kontinuert, er værdimængden derfor hele $\mathbb{R}$.

Opgave 3

1) Udregn det bestemte integral

$$\int_0^1 8xe^{2x}\,dx$$

Vink til 1): Benyt partiel integration.

Løsning:

Ved brug af partiel integration fås, idet en stamfunktion til e^{2x} er $\frac{1}{2}e^{2x}$:

$$\int 8xe^{2x}\,dx = 8x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 8\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = 4xe^{2x} - \int 4e^{2x}\,dx$$

$$= 4xe^{2x} - 2e^{2x} + c,$$

hvor c er en arbitrær konstant.

Derfor er

$$\int_0^1 8xe^{2x}\,dx = [4xe^{2x} - 2e^{2x}]_0^1 = 4e^2 - 2e^2 - (0-2) = 2e^2 + 2.$$

2) Udregn det ubestemte integral

$$\int \big((4x-2)\cos(x^2-x) - 6x^2\big)\,dx$$

Løsning:

For at finde en stamfunktion til $(4x-2)\cos(x^2-x)$ benyttes integration ved substitution.

Sæt $u = x^2 - x$. Så er $\frac{du}{dx} = 2x - 1$, hvorved fås

$$\int (4x-2)\cos(x^2-x)\,dx$$

$$= \int 2\cos(u)du = 2\sin(u) + c = 2\sin(x^2-x) + c,$$

hvor c er en arbitrær konstant.

Derfor er

$$\int \big((4x-2)\cos(x^2-x) - 6x^2\big)\,dx = 2\sin(x^2-x) - 2x^3 + c,$$

hvor c er en arbitrær konstant.

Opgavesættet slut