Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 S-1A rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Fredag den 9. august 2013

Rettevejledning

Opgave 1. Differentiabilitet.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et ikke-tomt, åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en given funktion. Lad $a \in I$ være et fast valgt punkt.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er differentiabel i punktet $a \in I$, og forklar, hvordan man bestemmer differentialkvotienten $\frac{df}{dx}(a)$.

Løsning. Vi betragter differenskvotienten

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

idet $x \neq a$, for funktionen f ud fra punktet a.

Hvis grænseværdien

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

eksisterer, siger vi, at f er differentiabel i punktet $x = a$ med differentialkvotienten

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(2) Differentier følgende funktioner:

$$f(x) = x^2 + e^x + \ln(1 + x^4), \; g(x) = \frac{\cos(x)}{2 + e^x} \text{ og } h(x) = \sqrt{1 + e^{\sin(x)}}.$$

Løsning. Vi finder, at

$$f'(x) = 2x + e^x + \frac{4x^3}{1 + x^4},$$

$$g'(x) = \frac{-\sin(x)(2+e^x) - \cos(x) \cdot e^x}{(2+e^x)^2} = -\frac{2\sin(x) + e^x \sin(x) + e^x \cos(x)}{(2+e^x)^2}$$

og

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+e^{\sin(x)}}} \cdot e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)e^{\sin(x)}}{2\sqrt{1+e^{\sin(x)}}}.$$

(3) Betragt funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{for } x \geq 0 \\ x^3 + x, & \text{for } x < 0 \end{cases}.$$

Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ i et vilkårligt punkt $x \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi ser umiddelbar, at

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{for } x > 0 \\ 3x^2 + 1, & \text{for } x < 0 \end{cases}.$$

For $x \neq 0$ ser vi desuden, at

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x} = x + 1, & \text{for } x > 0 \\ \frac{x^3+x}{x} = x^2 + 1, & \text{for } x < 0 \end{cases} \to 1 \text{ for } x \to 0,$$

så $f'(0) = 1$.

(4) Eksisterer $f''(0)$? (Funktionen f er den samme funktion, som vi betragtede i spørgsmål 3.)

Løsning. For $x \neq 0$ finder vi, at

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{2x}{x} = 2, & \text{for } x > 0 \\ \frac{3x^2}{x} = 3x, & \text{for } x < 0 \end{cases},$$

så

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \to \begin{cases} 2 & \text{for } x \to 0+ \\ 0 & \text{for } x \to 0- \end{cases}.$$

Dette viser, at $f''(0)$ ikke eksisterer.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = e^x + e^y - e^{x+y}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x - e^{x+y} = e^x - e^x e^y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y} = e^y - e^{x+y} = e^y - e^x e^y.$$

(2) Vis, at funktionen f har præcis et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Vi har, at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x - e^x e^y = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y} = e^y - e^x e^y = 0$$

giver, at $e^x = 1$ og $e^y = 1$, så $(x, y) = (0, 0)$ er det eneste stationære punkt for funktionen f.

(3) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Funktionen f har Hessematricen

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} e^x - e^{x+y} & -e^{x+y} \\ -e^{x+y} & e^y - e^{x+y} \end{pmatrix}, \text{ så } f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf fremgår det, at det stationære punkt $(0, 0)$ er et sadelpunkt for f.

(4) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(1, 1)$.

Løsning. Vi får, at denne tangentplan har ligningen

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) =$$

$$2e - e^2 + (e - e^2)(x - 1) + (e - e^2)(y - 1) = (e - e^2)(x + y) + e^2.$$

Opgave 3. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = x^2 + x^4 + e^x.$$

(1) Bestem f', f'' og f''' i et vilkårlig punkt $x \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi får, at

$$f'(x) = 2x + 4x^3 + e^x,\ f''(x) = 2 + 12x^2 + e^x \text{ og } f'''(x) = 24x + e^x.$$

(2) Vis, at funktionen f er strengt konveks på hele $\mathbf{R}$.

Løsning. Da $f''(x) > 0$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$, er funktionen f strengt konveks på hele $\mathbf{R}$.

(3) Bestem Taylorpolynomiet P_3 af tredje orden for f ud fra punktet $x = 0$.

Løsning. Vi ser, at $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 3$ og $f'''(0) = 1$, så

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

(4) Udregn det ubestemte integral

$$\int f(x)\, dx.$$

Løsning. Man får, at

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + e^x + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.