Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 S-1B ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 11. juni 2013

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi de symmetriske 3×3 matricer

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } B(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Udregn matrixprodukterne $A(s)B(s)$ og $B(s)A(s)$. Er $A(s)B(s) = B(s)A(s)$?

Løsning. Vi finder, at

$$A(s)B(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og

$$B(s)A(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf fremgår det, at $A(s)B(s) = B(s)A(s)$.

(2) Bestem egenværdierne for matricen $A(s)$ for et vilkårligt $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi finder, at matricen $A(s)$ har det karakteristiske polynomium

$$P(t) = \det\Big(A(s) - tE\Big) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & s-t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} =$$

$$t^2(s-t) - (s-t) = (t^2 - 1)(s-t),$$

så de karakteristiske rødder (og dermed egenværdierne for matricen $A(s)$) er $t_1 = -1, t_2 = 1$ og $t_3 = s$.

(3) Vis, at matricen $A(s)$ er indefinit for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Da matricen $A(s)$ har både en positiv og en negativ egenværdi, er den indefinit.

(4) Bestem egenværdierne og egenrummene for matricen $A(5)$.
(Her er $s = 5$.)

Løsning. Det er klart, at matricen $A(5)$ har egenværdierne $t_1 = -1, t_2 = 1$ og $t_3 = 5$.

De tilhørende egenrum er

$$V(-1) = N(A(5) + E) = \text{span}\{(-1, 0, 1)\},$$

De tilhørende egenrum er

$$V(1) = N(A(5) - E) = \text{span}\{(1, 0, 1)\},$$

og

$$V(5) = N(A(5) - 5E) = \text{span}\{(0, 1, 0)\},$$

(5) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^{-1}A(5)Q.$$

Løsning. Vi ser umiddelbart, at

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ og } Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2y^3 + \frac{y}{1 + x^2}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ \text{ og } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 - \frac{2xy}{(1+x^2)^2} = 2xy\Big(y^2 - \frac{1}{(1+x^2)^2}\Big)$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + \frac{1}{1+x^2}.$$

(2) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

Løsning. Dersom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy\Big(y^2 - \frac{1}{(1+x^2)^2}\Big) = 0,$$

gælder det, at

$$x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ y^2 = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Men vi har også, at udsagnet

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + \frac{1}{1+x^2} \neq 0$$

er opfyldt, så funktionen f har ingen stationære punkter.

(3) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at

$$f(0,y) = y \to \pm\infty \ \text{ for } \ y \to \pm\infty,$$

hvilket viser, at funktionen f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

Vi betragter mængden

$$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le 1\}.$$

(4) Udregn integralet
$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,d(x,y).$$

Løsning. Vi finder, at
$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,d(x,y) = \int_K \Big(2xy^3 - \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\Big)\,d(x,y) =$$
$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(2xy^3 - \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\Big)\,dx\Big)\,dy = \int_0^1 \Big[x^2y^3 + \frac{y}{1+x^2}\Big]_0^1 dy =$$
$$\int_0^1 \Big(y^3 + \frac{1}{2}y - y\Big)\,dy = \int_0^1 \Big(y^3 - \frac{1}{2}y\Big)\,dy = \Big[\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}y^2\Big]_0^1 = 0.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(\cos\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)x = \cos(t)e^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\sin(t)}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser først, at
$$\int \cos\Big(\frac{t}{2}\Big)\,dt = 2\sin\Big(\frac{t}{2}\Big) + k,$$
hvor $k \in \mathbf{R}$.

Ved derefter at benytte "panserformlen" får vi, at
$$x = Ce^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + e^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\int e^{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos(t)e^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\sin(t)}dt =$$
$$Ce^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + e^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\int \cos(t)e^{\sin(t)}dt =$$
$$Ce^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + e^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\int e^{\sin(t)}d(\sin(t)) =$$
$$Ce^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + e^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}e^{\sin(t)},$$
hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 5$ er opfyldt.

Løsning. Vi ser, at $\tilde{x}(0) = C + 1 = 5$ giver, at $C = 4$, så

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = \left(4 + e^{\sin(t)}\right)e^{-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

(3) Udregn differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0).$$

Løsning. Ved at benytte differentialligningen $(*)$ ser vi, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0) = 1 - 5 = -4.$$

Opgave 4. Den jødisk-ungarske matematiker Alfred Haar (1885 - 1933) indførte i begyndelsen af det 20. århundrede de såkaldte Haar-matricer. En af disse er 2×2 matricen

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn matricerne $H^2 = HH, H^3 = HH^2$ og $H^4 = HH^3$.

Løsning. Vi ser, at

$$H^2 = HH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E,$$

hvor E er 2×2 enhedsmatricen.

Derpå får vi, at

$$H^3 = HH^2 = 2HE = 2H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

og

$$H^4 = HH^3 = H^2H^2 = 4E = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) Vis, at matricen H er regulær, og bestem den inverse matrix H^{-1}.

Løsning. Vi ser, at $H(\frac{1}{2}H) = (\frac{1}{2}H)H = \frac{1}{2}H^2 = E$, hvilket viser, at H er regulær, og at

$$H^{-1} = \frac{1}{2}H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(3) Vis, at matricen H er indefinit.

Da 2×2 matricen H har determinanten $\det(H) = -2$, er H indefinit.