Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 V-1A rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Tirsdag den 18. februar 2014

Rettevejledning

Opgave 1. Homogene funktioner.

Lad $C \subseteq \mathbf{R}^2$ være en ikke-tom mængde. Vi siger, at C er en kegle, dersom betingelsen

$$\forall (x, y) \in C \ \forall t > 0 : (tx, ty) \in C$$

er opfyldt.

(1) Vis, at mængden

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \ \wedge \ y \geq 0\}$$

er en kegle, mens mængden

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \ \wedge \ y > 1\}$$

ikke er en kegle.

Løsning. Hvis $(x, y) \in C_1$, ser vi, at $(tx, ty) \in C_1$ for ethvert $t > 0$, så C_1 er en kegle.
Punktet $(1, 2) \in C_2$, men punktet $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \notin C_2$, hvilket viser, at C_2 ikke er en kegle.

Lad $C \subseteq \mathbf{R}^2$ være en kegle, og lad $f : C \to \mathbf{R}$ være en given funktion.

(2) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er homogen af grad $k \in \mathbf{R}$.

Løsning. Funktionen f er homogen af grad k, dersom betingelsen

$$\forall (x, y) \in C \ \forall t > 0 : f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

er opfyldt.

Vi betragter nu keglen

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \,\wedge\, y > 0\}$$

og funktionerne $f_1, f_2 : C \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskrifterne

$$\forall\,(x, y) \in C : f_1(x, y) = \frac{3xy^2 + x^2y}{x^4 + xy^3 + y^4} \,\wedge\, f_2(x, y) = \sqrt{x^2y^6} + x^4 - x^3y.$$

(3) Vis, at funktionerne f_1 og f_2 er homogene, og bestem deres homogenitetsgrader.

Løsning. Ved at benytte definitionen på homogen funktion, får man, at f_1 er homogen af grad $k_1 = -1$, og at f_2 er homogen af grad $k_2 = 4$.

(4) Antag, at en funktion f, som er defineret på en kegle C i $\mathbf{R}^2$ er positiv, i.e.

$$\forall\,(x, y) \in C : f(x, y) > 0,$$

og antag endvidere, at f er homogen af grad k.

Vis, at funktionen $g : C \to \mathbf{R}$, som er defineret ved betingelsen

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R} : g(x, y) = \Big(f(x, y)\Big)^j,$$

er homogen af grad jk.

Løsning. Vi ser, at

$$\forall\,(x, y) \in C\ \forall\, t > 0 : g(tx, ty) = \Big(f(tx, ty)\Big)^j = \Big(t^k f(x, y)\Big)^j = t^{kj} f(x, y),$$

hvoraf resultatet fremgår.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = xy^2 + x^2y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 2xy \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + x^2.$$

(2) Vis, at funktionen f har præcis et stationært punkt, og bestem dette punkt. Vis desuden, at det stationære punkt er et sadelpunkt for f.

Løsning. Det er klart, at hvis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0,$$

så er $x^2 = y^2$, hvilket er ensbetydende med, at $y = \pm x$.

Heraf får vi straks, at $x = y = 0$, så $(x, y) = (0, 0)$ er det eneste stationære punkt.

Idet $f(x, x) = 2x^3$, er det klart, at det stationære punkt er et sadelpunkt for funktionen f.

(3) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

Løsning. På grundlag af det ovenstående resultat får vi, at f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

Opgave 3.

(1) Udregn det ubestemte integral

$$\int \Big(x^2 + x\Big)e^x dx.$$

Løsning. Ved at benytte partiel integration finder vi, at

$$\int \Big(x^2 + x\Big)e^x dx = \Big(x^2 + x\Big)e^x - \int \Big(2x + 1\Big)e^x dx =$$

$$\Big(x^2+x\Big)e^x - \Big(2x+1\Big)e^x + \int 2e^x dx = \Big(x^2+x\Big)e^x - \Big(2x+1\Big)e^x + 2e^x + k =$$

$$\Big(x^2 - x + 1\Big)e^x + k, \;\text{ hvor }\; k \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, der er givet ved betingelsen

$$\forall\, a \in \mathbf{R} : f(a) = \int_0^a \left(x^2 + x\right) e^x dx.$$

Løsning. Vi finder umiddelbart, at

$$f(a) = \left[\left(x^2 - x + 1\right)e^x\right]_0^a = \left(a^2 - a + 1\right)e^a - 1.$$

(3) Bestem Taylorpolynomiet P_2 af anden orden for funktionen f ud fra punktet $a_0 = 0$.

Løsning. Vi får, at $f'(a) = (a^2 + a)e^a$, og at $f''(a) = (a^2 + 3a + 1)e^a$. Desuden har vi, at $f(0) = 0, f'(0) = 0$ og $f''(0) = 1$, så

$$P_2(a) = f(0) + f'(0)a + \frac{1}{2} f''(0)a^2 = \frac{a^2}{2}.$$