KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2012 V-1A ex ret

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A

Fredag den 6. januar 2012

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. Differentiabilitet. Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en given funktion.

(1) Lad $a \in I$ være et fast valgt punkt. Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er differentiabel i punktet a, og forklar, hvordan man bestemmer differentialkvotienten $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Løsning. For et givet $x \in I$, hvor $x \neq a$, betragter vi differenskvotienten

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

som er hældningskoeficienten for den sekant, der går gennem punkterne $P_0 = (a, f(a))$ og $P = (x, f(x))$. Hvis differenskvotienten har en grænseværdi L for x gående mod a, siger vi, at funktionen f er differentiabel i punktet a med differentialkvotienten

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = L = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

og det gælder, at denne differentialkvotient er hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f gennem punktet $P_0 = (a, f(a))$.

(2) Betragt funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{for } x \geq 0 \\ -x^3, & \text{for } x < 0 \end{cases}.$$

Vis, at funktionen f er differentiabel i ethvert punkt $x \in \mathbf{R}$, og bestem den afledede funktion $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Løsning. For $x \neq 0$ ser vi, at

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{2x^2}{x} = 2x, & \text{for } x > 0 \\ \frac{-x^3}{x} = -x^2, & \text{for } x < 0 \end{cases},$$

og det er nu klart, at

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to 0 \text{ for } x \to 0.$$

Dette viser, at funktionen f er differentiabel i $x = 0$, og at $f'(0) = 0$. Det er endvidere klart, at f er differentiabel i alle øvrige værdier af $x \in \mathbf{R}$, og vi finder, at

$$f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{for } x = 0 \\ -3x^2, & \text{for } x > 0 \end{cases}.$$

(3) Vis, at den afledede funktion $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ikke er differentiabel i $x = 0$.

Løsning. For $x \neq 0$ ser vi, at

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{4x}{x} = 4, & \text{for } x > 0 \\ \frac{-3x^2}{x} = -3x, & \text{for } x < 0 \end{cases},$$

hvoraf det umiddelbart fremgår, at differenskvotienten

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$$

ikke har nogen grænseværdi for x gående mod 0.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 + 2x = 2x(y^2 + 1) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y + 1.$$

(2) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

Løsning. Hvis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + 2x = 2x(y^2+1) = 0,$$

ser vi, at $x = 0$. Men for $x = 0$ er

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y + 1 = 1.$$

Vi har hermed godtgjort, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

af anden orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør hvilke af disse partielle afledede af anden orden, der er homogene funktioner, og angiv deres grad.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2 + 2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4xy\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xy \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2.$$

Det er nu klart, at $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ ikke er en homogen funktion, mens de tre øvrige partielle afledede af anden orden er homogene funktioner af grad 2.

Opgave 3. Betragt funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}.$$

(1) Bestem, for ethvert $t \in \mathbf{R}$, integralet

$$I(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)}\,dx.$$

Løsning. Vi ser, at

$$I(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)}\,dx = \int_0^t \frac{1}{2+\sin(x)}\,d(2+\sin(x)) =$$

$$\Big[\ln(2+\sin(x))\Big]_0^t = \ln(2+\sin(t)) - \ln(2) = \ln\Big(1+\frac{\sin(t)}{2}\Big).$$

(2) Bestem, for ethvert $a \neq 0$ og ethvert $t \in \mathbf{R}$, integralet

$$I_a(t) = \int_0^t f(ax)\,dx = \int_0^t \frac{\cos(ax)}{2+\sin(ax)}\,dx.$$

Løsning. Vi finder, at

$$I_a(t) = \int_0^t f(ax)\,dx = \int_0^t \frac{\cos(ax)}{2+\sin(ax)}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^t \frac{1}{2+\sin(ax)}\,d(2+\sin(ax)) =$$

$$\frac{1}{a}\Big[\ln(2+\sin(ax))\Big]_0^t = \frac{1}{a}\Big(\ln(2+\sin(at)) - \ln(2)\Big) = \frac{1}{a}\ln\Big(1+\frac{\sin(at)}{2}\Big).$$

(3) Bestem, for ethvert $a \neq 0$ og ethvert $t \in \mathbf{R}$, integralet

$$J_a(t) = \int_0^t f(ax)\,d(ax) = \int_0^t \frac{\cos(ax)}{2+\sin(ax)}\,d(ax).$$

Løsning. Vi får, at

$$J_a(t) = \int_0^t f(ax)\,d(ax) = \int_0^t \frac{\cos(ax)}{2+\sin(ax)}\,d(ax) = \int_0^t \frac{1}{2+\sin(ax)}\,d(2+\sin(ax)) =$$

$$\Big[\ln(2+\sin(ax))\Big]_0^t = \ln(2+\sin(t)) - \ln(2) = \ln\Big(1+\frac{\sin(t)}{2}\Big),$$

thi den variable, med hensyn til hvilken vi integrerer, er $y = ax$.