Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2018 V-1B rx ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik B

Torsdag den 15. februar 2018

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 2 & 0 \\ 2 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi finder, at determinanten til matricen $A(s)$ er $\det A(s) = s^2 - 4$. Heraf finder vi umiddelbart, at matricen $A(s)$ er regulær, hvis og kun hvis $s \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

(2) Bestem de $s \in \mathbf{R}$ for hvilke, matricen $A(s)$ er positiv definit.

Løsning. De ledende hovedunderdeterminanter for matricen $A(s)$ er $D_1 = s, D_2 = s^2 - 4$ og $D_s = s^2 - 4$. Matricen $A(s)$ er positiv definit, hvis og kun hvis alle disse ledende hovedunderdeterminanter er positive, og dette er ensbetydende med, at $s > 2$.

(3) Vis, at matricen $A(s)$ ikke er negativ definit for noget $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Skulle matricen $A(s)$ være negativ definit, måtte vi have, at $D_2 = s^2 - 4 > 0$ og $D_s = s^2 - 4 < 0$. Men dette er umuligt.

(4) Bestem de $s \in \mathbf{R}$ for hvilke, matricen $A(s)$ er positiv semidefinit.

Løsning. Hovedunderdeterminanterne af første orden er $\Delta_1 = s, s, 1$, af anden orden $\Delta_2 = s^2 - 4, s, s$ og af tredje orden $\Delta_3 = \det A(s) = s^2 - 4$. Matricen $A(s)$ er positiv semidefinit, hvis og kun hvis alle disse hovedunderdeterminanter er ikke-negative. Dette er ensbetydende med, at $s \geq 2$.

(5) Vis, at matricen $A(s)$ ikke er negativ semidefinit for noget $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Matricen $A(s)$ kan ikke være negativ semidefinit for noget $s \in \mathbf{R}$, fordi en af hovedunderdeterminanterne af første orden er 1.

(6) Bestem de $s \in \mathbf{R}$ for hvilke, matricen $A(s)$ er indefinit.

Løsning. På baggrund af ovenstående resultater er matricen $A(s)$ indefinit, hvis og kun hvis $s < 2$.

(7) Bestem egenværdierne og de tilhørende egenrum for matricen $A(2)$. Her er $s = 2$.

Løsning. Vi ser, at

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium for matricen $A(2)$ er

$$P(t) = \det(A(2) - tE) = \Big((2-t)^2 - 4\Big)(1-t) = (t^2 - 4t)(1-t) = t(t-4)(1-t),$$

hvoraf det fremgår, at de karakteristiske rødder (og dermed egenværdierne for $A(2)$) er $0, 1$ og 4.

Egenrummene er

$$V(0) = N(A(2)) = \text{span}\{(-1, 1, 0)\},$$

$$V(1) = N(A(2) - E) = \text{span}\{(0, 0, 1)\}$$

og

$$V(4) = N(A(2) - 4E) = \text{span}\{(1, 1, 0)\}.$$

(8) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så ligningen

$$D = Q^{-1}A(2)Q$$

er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ og } Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^3y + y^3x + x^2y^2.$$

(1) Vis, at funktionen f er homogen, og bestem homogenitetsgraden k.

Løsning. Funktionen f ses at være et fjerdegradspolynomium, hvor alle led har graden 4. Altså er f homogen af grad $k = 4$.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + y^3 + 2xy^2 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + 3y^2x + 2x^2y.$$

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi får, at

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy + 2y^2 & 3x^2 + 3y^2 + 4xy \\ 3x^2 + 3y^2 + 4xy & 6yx + 2x^2 \end{pmatrix}.$$

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Idet $f(x,1) = x^3 + x + x^2 = x(x^2+1) + x^2$, ser vi, at $f(x,1) \to -\infty$ for $x \to -\infty$ og $f(x,1) \to \infty$ for $t \to \infty$. Dette viser, at funktionen f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

For ethvert $v > 0$ betragter vi den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le v \,\wedge\, 0 \le y \le 1\}.$$

(5) Udregn integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x,y)\, d(x,y).$$

Løsning. Vi finder, at

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^v \Big(\int_0^1 (x^3y + y^3x + x^2y^2)\, dy \Big)\, dx =$$

$$\int_0^v \left[\frac{1}{2}x^3y^2 + \frac{1}{4}y^4x + \frac{1}{3}x^2y^3 \right]_0^1 dx = \int_0^v \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x^2 \right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{9}x^3 \right]_0^v = \frac{1}{8}v^4 + \frac{1}{9}v^3 + \frac{1}{8}v^2.$$

(6) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \frac{I(v)}{v \sin(2v)}.$$

Løsning. Idet vi benytter L'Hôpitals regel, ser vi, at

$$\lim_{v \to 0+} \frac{I(v)}{v \sin(2v)} = \lim_{v \to 0+} \frac{\frac{1}{8}v^3 + \frac{1}{9}v^2 + \frac{1}{8}v}{\sin(2v)} =$$

$$\lim_{v \to 0+} \frac{\frac{3}{8}v^2 + \frac{2}{9}v + \frac{1}{8}}{2\cos(2v)} = \frac{1}{16}.$$

Opgave 3. For ethvert $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ betragter vi differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + (\tan t)x = \sin t.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi skal benytte panserformlen. Idet $p(t) = \tan t$, er

$$P(t) = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt = -\int \frac{1}{\cos t} \, d(\cos t) = -\ln(\cos t) + const.$$

Vi finder så, at

$$x = Ce^{\ln(\cos t)} + e^{\ln(\cos t)} \int e^{-\ln(\cos t)} \sin t \, dt =$$

$$C \cos t + \cos t \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt = C \cos t - \cos t \ln(\cos t) = \big(C - \ln(\cos t)\big) \cos t,$$

hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 1802$ er opfyldt.

Løsning. Hvis betingelsen skal være opfyldt, ser vi, at $C = 1802$. Dette betyder, at

$$\tilde{x}(t) = \big(1802 - \ln(\cos t)\big) \cos t.$$

Opgave 4. Lad $n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2\}$, og lad $a > 0$ være valgt. Betragt mængden

$$U = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$$

og den funktion $P : U \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\big(\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} : P(i) = a^{3i}\big) \wedge P(n+1) = \frac{a^{3n+3}}{1 - a^3}.$$

(1) Bestem $a > 0$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U.

Løsning. Det er klart, at alle funktionsværdierne for P er ikke-negative. Desuden ser vi, at

$$\sum_{i=1}^{n} a^{3i} = a^3 \frac{1 - a^{3n}}{1 - a^3} = \frac{a^3 - a^{3n+3}}{1 - a^3}.$$

Da summen af alle funktionsværdierne skal være 1, får vi, at

$$\frac{a^3 - a^{3n+3}}{1 - a^3} + \frac{a^{3n+3}}{1 - a^3} = \frac{a^3}{1 - a^3} = 1,$$

hvoraf man får, at $a^3 = 1 - a^3$. Vi ser nu, at $a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

(2) Bestem $n \in U$, så $P(n+1) < \frac{1}{100}$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{a^{3n+3}}{1-a^3} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 100a^{3n+3} < 1 - a^3 \Leftrightarrow 100\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100} \Leftrightarrow -n\ln 2 < -\ln 100 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(100)}{\ln 2}.$$