Mikroøkonomi I: Eksamen december 2016 med kortfattede løsningsforslag

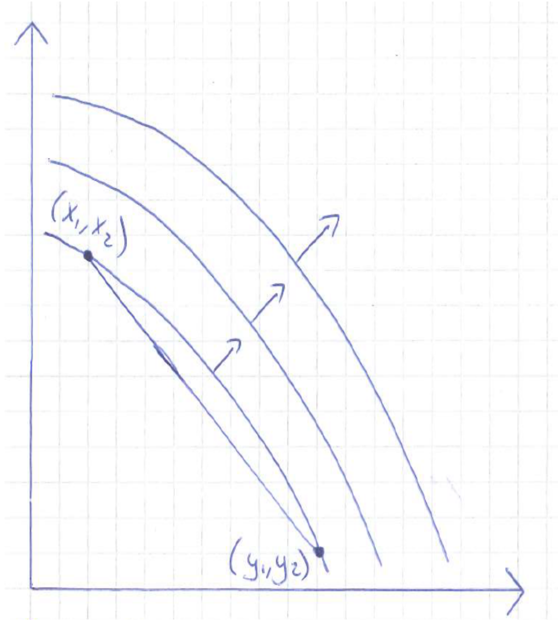
Thomas Jensen

December 2016

1. **Diverse Korte Spørgsmål**

   (a) Betragt en forbrugssituation med to varer. Skitsér grafisk nogle indifferenskurver for en præferencerelation, der er monoton men ikke konveks. Angiv klart, hvorfor monotonicitet er opfyldt, mens konveksitet ikke er.

   LØSNINGSFORSLAG: Eksempel på grafisk skitse:



Præferencerelationen er monoton, da forbrugeren kommer op på en højere indifferenskurve, hvis hun får mere af begge varer. Alle konvekse kombinationer af varebundterne (x_1, x_2) og (y_1, y_2) ligger under indifferenskurven gennem disse punkter (og altså ikke i den øvre konturmængde). Dermed er præferencerelationen ikke konveks.

(b) Peter står i en situation, hvor han skal vælge mellem forskellige lotterier over pengebeløb (målt i kroner). Hans præferencer kan repræsenteres af en von-Neumann-Morgenstern forventet nyttefunktion, hvor nytten af pengebeløb er givet ved $u(x) = \sqrt{x}$.

Er Peter risiko-avers? Begrund dit svar.

Lad G være lotteriet, der giver 3000 kr med sandsynlighed $\frac{1}{2}$ og 5000 kr med sandsynlighed $\frac{1}{2}$:

$$G = (\frac{1}{2} \circ 3000, \frac{1}{2} \circ 5000).$$

Hvis Peter skal vælge mellem lotteriet G eller at få 4000 kr med sikkerhed, hvad vil han så foretrække? Begrund dit svar.

LØSNINGSFORSLAG: Da u er (strengt) konkav ($u''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0$) er Peter risiko-avers. En risiko-avers belutningstager vil (pr. definition af risiko-aversion) foretrække at få den forventede værdi af et lotteri med sikkerhed fremfor lotteriet selv. Da $E(G) = 4000$ vil Peter derfor foretrække 4000 kr med sikkerhed fremfor G.

(c) Betragt en forbruger, hvis præferencerelation $\succsim$ over varebundter $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ kan repræsenteres af en differentiabel nyttefunktion $u(x_1, x_2)$. Angiv et udtryk for det marginale substitutionsforhold $MRS(x_1, x_2)$. Forklar kort den økonomiske betydning af dette forhold.

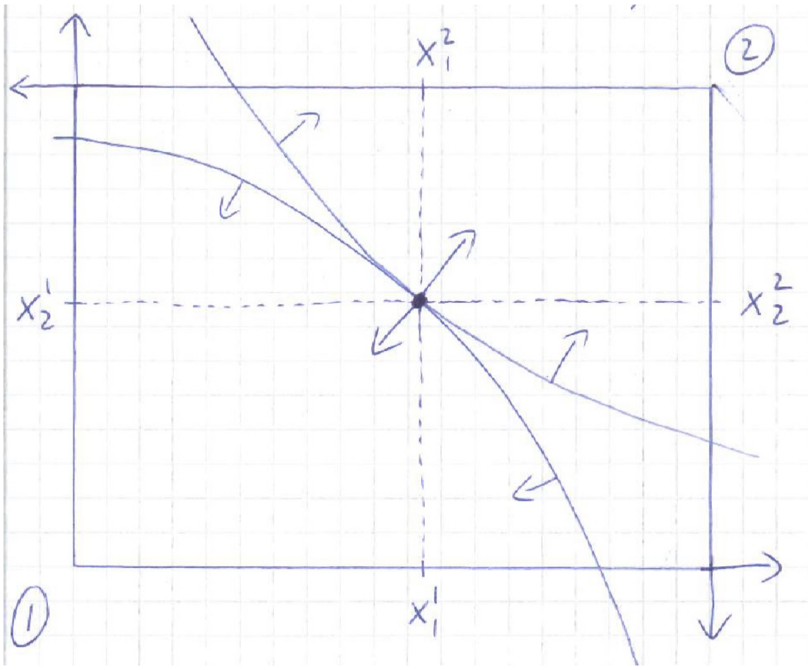
LØSNINGSFORSLAG:

$$MRS(x_1, x_2) = -\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}}.$$

Det marginale substitutionsforhold måler bytteforholdet mellem de to varer langs forbrugerens indifferenskurver. Det fortæller os (marginalt!), hvor meget ekstra af vare 2 forbrugeren skal have for at opnå samme nytte, hvis han afgiver en enhed af vare 1. Eller, ækvivalent, hvor meget han er villig til at afgive af vare 2, hvis han får en ekstra enhed af vare 1.

(d) Betragt en bytteøkonomi med to forbrugere og to varer. Forklar kort, hvad en Pareto-efficient allokation er. Skitsér grafisk, hvordan en sådan allokation ser ud i en Edgeworth Box.

LØSNINGSFORSLAG: En Pareto-efficient allokation er en fordeling af de samlede ressourcer i økonomien, der opfylder, at der ikke findes en anden allokation/fordeling, der stiller alle forbrugere mindst lige så godt og mindst en forbruger strengt bedre. Nedenfor er skitseret en sådan allokation i en Edgeworth Box. Bemærk at indifferenskurverne tangerer hinanden ($MRS^1(x_1^1, x_2^1) = MRS^2(x_1^2, x_2^2)$), hvilket betyder, at man ikke kan stille en forbruger strengt bedre uden at stille den anden strengt værre.



2. **Forbrugerteori**

   Petra kan forbruge to goder: brød (vare 1) og mælk (vare 2). Hun har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionen

$$u(x_1, x_2) = x_1x_2 + 2x_2,$$

   hvor x_1 er forbruget af brød og x_2 er forbruget af mælk.

   (a) Lad priserne $p_1, p_2 > 0$ og Petras indkomst $I > 0$ være eksogene. Opstil Petras nyttemaksimerings-problem og find hendes efterspørgsel efter de to varer.

   LØSNINGSFORSLAG: Nyttemaksimerings-problem:

$$\max_{x_1,x_2 \geq 0} x_1x_2 + 2x_2 \text{ u.b. } p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

Indifferenskurverne har formen $x_2 = \frac{u}{x_1+2}$ (hvor u er den konstante nytte langs en given indifferenskurve) og er dermed (strengt) konvekse og differentiable, så standard-metoderne kan bruges til at finde indre løsninger. Da indifferenskurverne rammer anden-aksen, kan der være randløsninger med $x_1 = 0$.

Petras efterspørgsel findes ved at løse nyttemaksimeringsproblemet, fx. ved hjælp af Lagrange-metoden (eller vha. en af de andre standard-metoder til nyttemaksimering). For $I > 2p_1$ fås en indre løsning:

$$x_1(p_1, p_2, I) = \frac{I - 2p_1}{2p_1} \text{ og } x_2(p_1, p_2, I) = \frac{I + 2p_1}{2p_2}.$$

For $I \leq 2p_1$ fås en randløsning:

$$x_1(p_1, p_2, I) = 0 \text{ og } x_2(p_1, p_2, I) = \frac{I}{p_2}.$$

(b) Lad som udgangspunkt priserne være $p_1 = 4, p_2 = 1$ og Petras indkomst være $I = 16$. Som følge af en usædvanligt god høst falder prisen på brød til $p_1 = 1$ (p_2 og I er uændrede). Beregn den totale effekt af denne prisændring på Petras forbrug af brød og mælk.

LØSNINGSFORSLAG: Efterspørgsel før prisændring:

$$x_1(4, 1, 16) = 1 \text{ og } x_2(4, 1, 16) = 12.$$

Efterspørgsel efter prisændring:

$$x_1(1, 1, 16) = 7 \text{ og } x_2(1, 1, 16) = 9$$

Altså er den totale effekt $+6$ for vare 1 og -3 for vare 2.

(c) Betragt igen prisændringen fra (c). Forklar, gerne med hjælp fra en figur, hvordan den totale effekt kan opdeles i en substitutionseffekt og en indkomsteffekt ved hjælp af Hicks-kompensation. Udregn substitutionseffekten og indkomsteffekten på forbruget af de to varer.

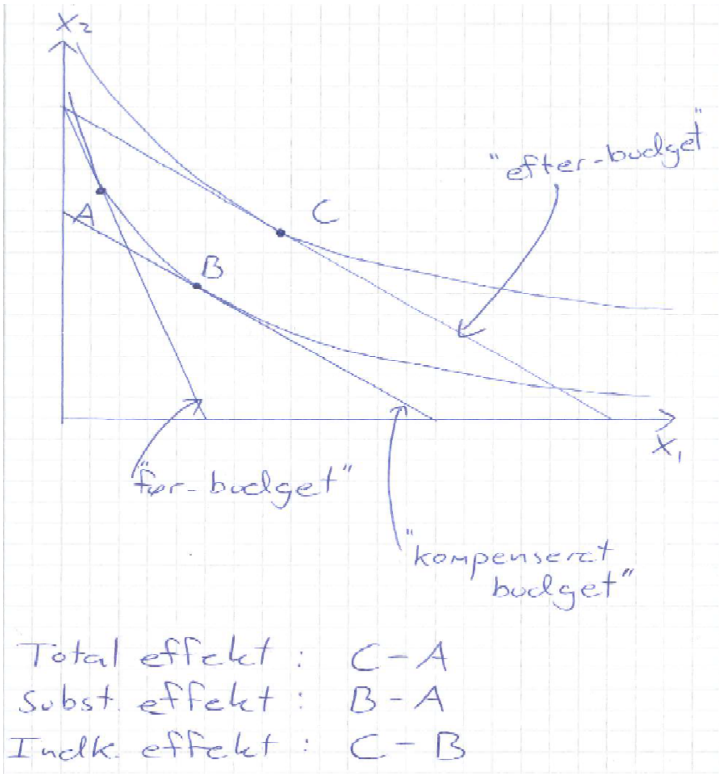
LØSNINGSFORSLAG: Substitutionseffekten er ændringen i forbrug, når vi kompenserer forbrugeren således, at hun kan opnå præcis samme nytte som før prisændringen (Hicks-kompensation). Indkomsteffekten er "resten", altså den totale effekt minus substitutionseffekten. Ved hjælp af Hicks-efterspørgselsfunktionen (som findes ved at løse udgiftsminimeringsproblemet), kan substitutionseffekten for vare i skrives:

$$h_i(1,1,u^f) - x_i(4,1,16),$$

hvor u^f er nytten inden prisændringen ($u^f = u(1,12) = 36$). Dermed bliver indkomsteffekten:

$$x_i(1,1,16) - h_i(1,1,u^f).$$

Grafisk skitse:



$h_i(1,1,36)$, $i = 1,2$ findes ved løsning af følgende udgiftsminimeringsproblem:

$$\min_{x_1,x_2 \geq 0} x_1 + x_2 \text{ u.b. } x_1x_2 + 2x_2 = 36.$$

Problemet kan f.x. løses vha Lagrange-metoden og resultatet er:

$$h_1(1,1,36) = 4 \text{ og } h_2(1,1,36) = 6.$$

Altså bliver substitutionseffekten på forbruget af de to varer:

$$(4,6) - (1,12) = (3,-6).$$

Og indkomsteffekten bliver:

$$(7, 9) - (4, 6) = (3, 3).$$

(Denne kan også udregnes som total effekt minus substitutionseffekt: $(6, -3) - (3, -6) = (3, 3)$)

3. **Produktion**

Betragt en virksomhed, der producerer et output ved hjælp af to inputs: arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$x = f(l, k) = 4l^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}},$$

hvor x er mængden af output, l er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital.

(a) Har virksomheden aftagende, konstant eller voksende skala-afkast (returns to scale)? Begrund dit svar.

LØSNINGSFORSLAG: Da, for alle $t > 0$,

$$f(tl, tk) = 4(tl)^{\frac{1}{4}}(tk)^{\frac{1}{4}} = t^{\frac{1}{2}}(4l^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}}) = t^{\frac{1}{2}}f(l, k)$$

er f homogen af grad $\frac{1}{2}$. Altså har virksomheden aftagende skala-afkast.

(b) Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogene. Opstil virksomhedens profitmaksimeringsproblem. Find førsteordensbetingelserne.

LØSNINGSFORSLAG: Profitmaksimeringsproblem:

$$\max_{l,k \geq 0} p(4l^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}}) - wl - rk.$$

Førsteordensbetingelser:

$$pl^{-\frac{3}{4}}k^{\frac{1}{4}} = w \text{ og } pl^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{3}{4}} = r.$$

(c) Hvor stor en mængde arbejdskraft vil virksomheden bruge i forhold til mængden af kapital? Find den profitmaksimerende produktionsplan når $w = 8$, $r = 2$, $p = 8$.

LØSNINGSFORSLAG: Ved at dividere den sidste af førsteordensbetingelserne med den første fås forholdet mellem de anvendte mængder af arbejdskraft og kapital:

$$\frac{l}{k} = \frac{r}{w}.$$

Ved at løse førsteordensbetingelserne (2 ligninger med 2 ubekendte) for $w = 8$, $r = 2$, $p = 8$ fås:

$$l = 2 \text{ og } k = 8.$$

Den producerede mængde er så:

$$f(2,8) = 8.$$

Altså kan den profitmaksimerende produktionsplan for eksempel skrives:

$$(l, k, x) = (2, 8, 8).$$

4. **Generel Ligevægt**

Betragt en bytteøkonomi med to forbrugere og to varer: kartofler (vare 1) og oksekød (vare 2). Som udgangspunkt ejer forbruger 1 60 kg kartofler, mens forbruger 2 ejer 30 kg oksekød. Altså er deres initialbeholdninger (endowments):

$$\begin{aligned} (e_1^1, e_2^1) &= (60, 0), \\ (e_1^2, e_2^2) &= (0, 30). \end{aligned}$$

De to forbrugeres præferencer er repræsenteret af følgende nyttefunktioner:

$$\begin{aligned} u^1(x_1, x_2) &= x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}, \\ u^2(x_1, x_2) &= x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Vi anvender pris-normaliseringen $p_1 = 1$.

(a) Definér begrebet Walras-ligevægt (competitive equilibrium) i en bytteøkonomi.

LØSNINGSFORSLAG: En Walras-ligevægt består af priser p_1^*, p_2^* og en allokation (feasible allocation) $(x_1^{*1}, x_2^{*1}), (x_1^{*2}, x_2^{*2})$, så (x_1^{*i}, x_2^{*i}) er forbruger i's optimale forbrug ved priserne p_1^*, p_2^* for $i = 1, 2$. I en Walras-ligevægt har vi altså:

$$\begin{aligned} x_1^{*1} + x_1^{*2} &= e_1^1 + e_1^2 \\ x_2^{*1} + x_2^{*2} &= e_2^1 + e_2^2 \end{aligned}$$

og, for $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} x_1^{*i} &= x_1^i(p_1^*, p_2^*, p_1^* e_1^i + p_2^* e_2^i) \\ x_2^{*i} &= x_2^i(p_1^*, p_2^*, p_1^* e_1^i + p_2^* e_2^i). \end{aligned}$$

(b) Find Walras-ligevægten i denne økonomi, dvs. find både ligevægtspriser og ligevægtsallokation.

LØSNINGSFORSLAG: Forbrugernes indkomster er:

$$\begin{aligned} I^1 &= 60p_1 \\ I^2 &= 30p_2 \end{aligned}$$

Da forbrugerne er Cobb-Douglas, er deres efterspørgselsfunktioner:

$$\begin{aligned} x_1^1(p_1, p_2, I) &= \frac{1}{3}\frac{I}{p_1} \text{ og } x_2^1(p_1, p_2, I) = \frac{2}{3}\frac{I}{p_2} \\ x_1^2(p_1, p_2, I) &= \frac{2}{3}\frac{I}{p_1} \text{ og } x_2^2(p_1, p_2, I) = \frac{1}{3}\frac{I}{p_2} \end{aligned}$$

Betingelsen for "markeds-clearing" (efterspørgsel=udbud) for vare 1 (som automatisk giver markedsclearing for vare 2 pga Walras' lov) er således:

$$\frac{1}{3}\frac{I^1}{p_1^*} + \frac{2}{3}\frac{I^2}{p_1^*} = 60 + 0.$$

Ved at indsætte I^1, I^2 og $p_1^* = 1$ (fra pris-normaliseringen) fås:

$$\frac{1}{3}60 + \frac{2}{3}30p_2^* = 60,$$

hvilket giver

$$p_2^* = 2.$$

Ligevægtsallokationen fås så ved anvendelse af forbrugernes efterspørgselsfunktioner:

$$\begin{aligned} x_1^{*1} &= x_1^1(1, 2, 60) = 20 \text{ og } x_2^{*1} = x_2^1(1, 2, 60) = 20 \\ x_1^{*2} &= x_1^2(1, 2, 60) = 40 \text{ og } x_2^{*2} = x_2^2(1, 2, 60) = 10 \end{aligned}$$

Altså vil forbruger 1's ligevægtsforbrug være $(20, 20)$, mens forbruger 2's vil være $(40, 10)$.

(c) Er ligevægtsallokationen fra (b) Pareto-efficient? Betragt også allokationen, hvor de to forbrugere deler alle ressourcer i økonomien ligeligt. Er denne Pareto-efficient? Begrund dine svar.

LØSNINGSFORSLAG: Ifølge Første Velfærdssætning er ligevægtsallokationen Pareto-efficient (bemærk at monotonicitets-antagelsen er opfyldt).

Ved lige fordeling af de samlede ressourcer vil hver forbruger få varebundtet $(30, 15)$. Denne allokation er Pareto-efficient netop hvis:

$$MRS^1(30, 15) = MRS^2(30, 15).$$

De to forbrugeres MRS er (beregnet vha. standardformlen fra opgave 1(c)):

$$MRS^1(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} \text{ og } MRS^2(x_1, x_2) = -2\frac{x_2}{x_1}.$$

Altså har vi

$$MRS^1(30, 15) = -\frac{1}{4} \neq -1 = MRS^2(30, 15),$$

så allokationen er ikke Pareto-efficient.