Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2013

MATEMATIK A

1. årsprøve

Mandag den 10. juni 2013

(2 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Opgavesættet består foruden af denne forside af 2 sider med opgaver.

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 S-1A ex

Skriftlig eksamen i Matematik A

Mandag den 10. juni 2013

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Partielle afledede.

Lad $D \subseteq \mathbf{R}^2$ være en åben, ikke-tom mængde, og lad $f : D \to \mathbf{R}$ være en funktion af de to variable x og y, så $(x, y) \in D$.

Lad $(a, b) \in D$ være et fast valgt punkt.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

for f efter x resp. y eksisterer i punktet (a, b), og forklar endvidere, hvordan disse partielle afledede bestemmes.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2 + x^3y + y^2 - e^{xy}\Big) \text{ og } \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2 + x^3y + y^2 - e^{xy}\Big)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}\Big) \text{ og } \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}\Big)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{for } x \geq 0 \\ 2x + y^2, & \text{for } x < 0 \end{cases} .$$

Afgør, om de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

eksisterer, og bestem dem, hvis de findes.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x,y) \in D : f(x,y) = \ln(x) - 2\sqrt{x} + y^2 - \frac{1}{3}y^3.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\ln(2x)\Big)^n,$$

hvor $x > 0$.

(1) Bestem mængden

$$K = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\ln(2x)\Big)^n \text{ er konvergent}\}.$$

(2) Lad $f : K \to \mathbf{R}$ være sumfunktionen for den givne uendelige række, så

$$\forall x \in K : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\ln(2x)\Big)^n.$$

Bestem en forskrift for f.

(3) Bestem differentialkvotienten $f' : K \to \mathbf{R}$ for funktionen f.

(4) Vis, at funktionen f er voksende på mængden K.