KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 S-1B ex ret

EKSAMEN I MATEMATIK B

Fredag den 10. juni 2011

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert tal $v \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & v \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem determinanten $\det(A(v))$ for matricen $A(v)$ for et vilkårligt $v \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst de tal $v \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(v)$ er regulær.

Løsning. Vi finder, at

$$\det(A(v)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & v \end{pmatrix} = v - 2 - 3 = v - 5.$$

Da en matrix er regulær, når og kun når dens determinant ikke er 0, ser vi, at $A(v)$ er regulær, netop når $v \neq 5$.

(2) Matricen $A(0)$ er regulær. Bestem den inverse matrix $A(0)^{-1}$ til $A(0)$.

Løsning. Fra løsningen på ovenstående spørgsmål ser vi, at matricen

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

er regulær. Ved at reducere blokmatricen $(A(0)|E)$ til echelonmatrix får man blokmatricen $(E|A(0)^{-1})$, hvor

$$A(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 & 2/5 \\ -3/5 & 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

(3) For ethvert $v \in \mathbf{R}$ skal man udregne det karakteristiske polynomium $P_v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, der er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P_v(t) = \det\Big(A(v) - tE\Big).$$

Løsning. Vi ser, at

$$P_v(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 2 \\ 0 & 1-t & 3 \\ 1 & 1 & v-t \end{pmatrix} = (1-t)^2(v-t) - 2(1-t) - 3(1-t) =$$

$$(1-t)\Big((1-t)(v-t) - 5\Big) = (1-t)\Big(t^2 - (v+1)t + (v-5)\Big).$$

(4) Vis dernæst, at

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P_v(t) = (1-t)Q_v(t),$$

hvor $Q_v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et andengradspolynomium, der afhænger af v.

Løsning. Af løsningen på det foregående spørgsmål fremgår påstanden, idet $Q_v(t) = t^2 - (v+1)t + (v-5)$.

(5) For ethvert $v \in \mathbf{R}$ skal man udregne diskriminanten $D(v)$ for andengradspolynomiet Q_v og vise, at $D(v) > 0$.

Løsning. Diskriminanten $D(v)$ for andengradspolynomiet Q_v er givet ved

$$D(v) = (-(v+1))^2 - 4(v-5) = v^2 + 2v + 1 - 4v + 20 =$$

$$(v^2 - 2v + 1) + 20 = (v-1)^2 + 20 \geq 20,$$

hvoraf man ser, at $D(v) > 0$, for et vilkårligt $v \in \mathbf{R}$.

(6) Vis, at andengradspolynomiet Q_v ikke har $t = 1$ som rod, og bestem dernæst samtlige rødder i det karakteristiske polynomium P_v.

Løsning. Vi ser, at $Q_v(1) = 1 - (v+1) + (v-5) = -5$, så $t = 1$ er ikke rod i Q_v. Det er klart, at polynomiet har to forskellige rødder, thi diskriminanten $D(v) > 0$. Vi finder nu disse to rødder:

$$t = \frac{v + 1 \pm \sqrt{(v-1)^2 + 20}}{2}.$$

Heraf får man, at polynomiet P_v har rødderne

$$t_1 = 1, t_2 = \frac{v + 1 + \sqrt{(v-1)^2 + 20}}{2} \text{ og } t_3 = \frac{v + 1 - \sqrt{(v-1)^2 + 20}}{2}.$$

(7) Vis, at for ethvert $v \in \mathbf{R}$ har matricen $A(v)$ tre forskellige egenværdier.

Løsning. Rødderne i det karakteristiske polynomium P_v er netop egenværdierne for matricen $A(v)$, og af løsningen på det foregående spørgsmål fremgår det, at egenværdierne er forskellige.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + 2y^2 + x^4 + 2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4x^3 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Det er klart, at $2x + 4x^3 = 2x(1 + 2x^2)$, så

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0.$$

Funktionen f har således det ene stationære punkt $(x, y) = (0, 0)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og vis dernæst, at funktionen f er strengt konveks.

Løsning. Ved differentiation finder vi, at

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2+12x^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diagonalelementerne i $H(x,y)$ er netop egenværdierne for denne matrix, og det er klart, at de begge er positive, så $H(x,y)$ er positiv definit. Heraf følger det så, at funktionen f er strengt konveks.

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

Løsning. Da funktionen f er strengt konveks, er det stationære punkt (0,0) åbenbart et globalt minimumspunkt. Vi ser, at $f(0,0) = 2$, og desuden ser vi, at

$$f(x,0) = x^2 + x^4 + 2 \to \infty \text{ for } x \to \infty,$$

så funktionen f har værdimængden $R(t) = [2, \infty[$.

(5) Betragt funktionen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : g(x,y) = \ln(f(x,y)).$$

Vis, at funktionen g er kvasikonveks.

Løsning. Da funktionen ln er voksende, og da f er strengt konveks, er g kvasikonveks.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(4\cos(2t)\Big)x = e^{t-2\sin(2t)}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi finder først, at

$$\int 4\cos(2t)\,dt = \int 2\cos(2t)\,d(2t) = 2\sin(2t) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$. Herefter benytter vi "panserformlen" og finder, at

$$x = Ce^{-2\sin(2t)} + e^{-2\sin(2t)} \int e^{2\sin(2t)} e^{t-2\sin(2t)} dt =$$

$$Ce^{-2\sin(2t)} + e^{-2\sin(2t)} \int e^t \, dt = Ce^{-2\sin(2t)} + e^{-2\sin(2t)} e^t \; =$$

$$e^{-2\sin(2t)} \Big(C + e^t \Big),$$

hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = -3$ er opfyldt.

Løsning. Idet $\tilde{x}(0) = C + 1 = -3$ er $C = -4$. Vi får da, at

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = e^{-2\sin(2t)} \Big(e^t - 4 \Big).$$

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0)$$

af første orden for funktionen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ i punktet $t = 0$.

Løsning. Ved at benytte den givne differentialligning får vi, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0) = 1 - 4\tilde{x}(0) = 1 + 12 = 13.$$

(4) Bestem en ligning for tangenten til grafen for løsningen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ gennem punktet $(0, -3)$.

Løsning. Denne tangent har ligningen

$$y = \tilde{x}(0) + \frac{d\tilde{x}}{dt}(0)x = -3 + 13x.$$

Opgave 4. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som givet ved

$$\forall \, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = xe^{xy} + 4x.$$

For ethvert $v > 0$ betragter vi desuden mængden

$$A(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq v \, \wedge \, 1 \leq y \leq 2\}.$$

(1) Bestem for ethvert $v > 0$ integralet

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x, y)\, d(x, y).$$

Løsning. Vi ser, at

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^v \Big(\int_1^2 (xe^{xy} + 4x)\, dy \Big) dx =$$

$$\int_0^v \left[e^{xy} + 4xy\right]_1^2 dx = \int_0^v (e^{2x} + 8x - e^x - 4x)\, dx = \int_0^v (e^{2x} - e^x + 4x)\, dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 2x^2\right]_0^v = \frac{1}{2}e^{2v} - e^v + 2v^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}e^{2v} - e^v + 2v^2 + \frac{1}{2}.$$

(2) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \Big(\frac{I(v)}{\cos(v) - 1} \Big).$$

Løsning. Vi ser straks, at forudsætningerne for at benytte L'Hôpitals regel er opfyldt og ved at benytte denne regel to gange, får vi, at

$$\lim_{v \to 0+} \Big(\frac{I(v)}{\cos(v) - 1} \Big) = \lim_{v \to 0+} \frac{\frac{1}{2}e^{2v} - e^v + 2v^2 + \frac{1}{2}}{\cos(v) - 1} = \lim_{v \to 0+} \frac{e^{2v} - e^v + 4v}{-\sin(v)} =$$

$$\lim_{v \to 0+} \frac{2e^{2v} - e^v + 4}{-\cos(v)} = -5.$$

(3) Løs ligningen $f(x, y) = 0$, og bestem dernæst værdimængden for funktionen f.

Løsning. Vi finder, at

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow xe^{xy} + 4x = 0 \Leftrightarrow x(e^{xy} + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Desuden ser vi, at $f(x, 0) = 5x$, hvoraf det umiddelbart fremgår, at værdimængden for f er $R(f) = \mathbf{R}$.