Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 S-1A rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Fredag den 7. august 2015

Rettevejledning

Opgave 1. Uegentlige integraler.

Lad $a \in \mathbf{R}$ være et fast valgt tal. Vi betragter et interval $[a, \infty[\subset \mathbf{R}$ og en kontinuert funktion $f : [a, \infty[\to \mathbf{R}$.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at det uegentlige integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

er konvergent med værdien V.

Løsning. Lad $t > a$ være valgt. Da funktionen f er kontinuert på intervallet $[a, \infty[$, eksisterer integralet

$$I(t) = \int_a^t f(x)\,dx, \qquad \forall\, t > a.$$

Hvis $I(t) \to V$ for $t \to \infty$, er det uegentlige integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

konvergent med værdien V, og man skriver

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = V.$$

(2) Undersøg, om de uegentlige integraler

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \ \text{ og } \ \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

er konvergente, og angiv i bekræftende fald værdien.

Løsning. Lad $t > 0$ være valgt. Da har man, at

$$I_1(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^t = \mathrm{Arctan}(t) \to \frac{\pi}{2} \text{ for } t \to \infty$$

$$I_2(t) = \int_0^t \frac{x}{1+x^2}\,dx = \Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^t = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \to \infty \text{ for } t \to \infty.$$

Vi har hermed vist, at

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

mens

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

er divergent.

(3) Vis, at de uegentlige integraler

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx \text{ og } \int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$$

er konvergente, og bestem deres værdier.

Løsning. Lad $t > 0$ være valgt. Da har man, at

$$J_1(t) = \int_0^t xe^{-x}\,dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^t + \int_0^t e^{-x}\,dx =$$

$$\Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1 \to 1 \text{ for } t \to \infty,$$

så

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1.$$

Desuden ser vi, at

$$J_2(t) = \int_0^t xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\Big[-e^{-x^2}\Big]_0^t = \frac{1-e^{-t^2}}{2} \to \frac{1}{2} \text{ for } t \to \infty,$$

så

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x + xy + x^2y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ \text{ og } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + y + 2xy^2 \ \text{ og } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2x^2y.$$

(2) Vis, at punktet $(0, -1)$ er et stationært punkt for funktionen f.

Løsning. Ved indsættelse af punktet $(0, -1)$ i de partielle afledede, ser vi, at $(0, -1)$ er et stationært punkt for f.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi får, at

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 1+4xy \\ 1+4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør, om det stationære punkt $(0, -1)$ er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Da

$$H(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

er indefinit (determinanten er -1), er det stationære punkt et sadelpunkt for f.

Opgave 3. For ethvert $a > 0$ betragter vi den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{a + x^2} \right)^n.$$

(1) Godtgør, at den uendelige række er konvergent for ethvert $x \in \mathbf{R}$.

Løsning. Da $a > 0$, er $\frac{x^2}{a+x^2} < 1$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$, hvoraf vi ser, at rækken er konvergent overalt på $\mathbf{R}$.

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, hvor udsagnet

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{a + x^2} \right)^n$$

er opfyldt. (Funktionen f er sumfunktionen for den givne uendelige række.)

Løsning. Vi får, at

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{a+x^2}} = \frac{a + x^2}{a} = 1 + \frac{x^2}{a}.$$

(3) Bestem den afledede funktion f', og bestem derefter monotoniintervallerne for f.

Løsning. Vi får, at $f'(x) = \frac{2x}{a}$, hvoraf det fremgår, at f er voksende på $[0, \infty[$ og aftagende på $]-\infty, 0]$.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Ud fra forskriften for f fremgår det, at værdimængden er $[1, \infty[$.

(5) Bestem elasticiteten f^ϵ for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at

$$f^\epsilon = x \frac{f'(x)}{f(x)} = x\, \frac{2x}{a}\, \frac{a}{a + x^2} = \frac{2x^2}{a + x^2}.$$