Matematik B: Eksamen august 2019

Rettevejledning

Opgave 1

Betragt følgende matricer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(a) Udregn determinanten af matricen A.

Løsningsforslag: Determinanten af A kan fx. udregnes ved udvikling efter første søjle:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (1-6) - 3(2-9) + 2(4-3) = 18. \end{aligned}$$

(b) Opskriv den til B transponerede matrix B^t, og bestem matrixproduktet B^tA.

Løsningsforslag: Ved transponering og matrixmultiplikation fås

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad B^tA = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 10 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} .$$

(c) Udregn determinanten af matrixproduktet B^tA, altså $\det(B^tA)$.

Løsningsforslag: Af LA 9.1.8+10 fås

$$\det(B^tA) = \det(B^t)\det(A) = \det(B)\det(A) .$$

Da $\det(B) = 2$ (udregnes nemt ved udvikling efter anden søjle), følger således, at

$$\det(B^tA) = 2 \cdot 18 = 36 .$$

(d) Vis, at $\lambda = 1$ er en egenværdi for B, og bestem alle øvrige egenværdier for B.

Løsningsforslag: Egenværdierne for B findes som røddderne i det karakteristiske polynomium (LA afsnit 10.2)

$$p_B(t) = \det(B - tE) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 2 & 0 & 2-t \end{pmatrix} .$$

Idet determinanten udregnes ved udvikling efter anden søjle, fås

$$\begin{aligned} p_B(t) &= (-1)^{2+2} \cdot (1-t) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 2 & 2-t \end{pmatrix} \\ &= (1-t)((2-t)^2 - 2) . \end{aligned}$$

B har således de tre egenværdier $\lambda = 1$, $\lambda = 2 - \sqrt{2}$ og $\lambda = 2 + \sqrt{2}$ (de to sidste egenværdier findes som rødderne i andengradspolynomiet $(2-t)^2 - 2$).

(e) Bestem egenrummet hørende til egenværdien $\lambda = 1$ for B.

Løsningsforslag: Egenvektorerne hørende til egenværdien $\lambda = 1$ kan findes ved løsning af følgende homogene lineære ligningssystem (LA afsnit 10.1-2):

$$(B - E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ved rækkeoperationer omdannes $B - E$ til følgende echelonmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Heraf ses, at x_2 er en fri variabel, samt at $x_1 = 0$ og $x_3 = 0$. Med vektornotation kan løsningerne således skrives (sæt $x_2 = s$):

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, s, 0) = s(0, 1, 0), \quad \text{hvor } s \in \mathbb{R}.$$

Altså er egenrummet hørende til egenværdien $\lambda = 1$:

$$V_B(1) = \operatorname{span}\{(0, 1, 0)\} .$$

(Her er brugt vandret vektornotation for egenvektorer som i LA, egenvektorer kan også skrives som søjler).

Opgave 2

Betragt følgende differentialligning:

$$\frac{dx}{dt} = -6t^2x^2 \,.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen, altså alle maksimale løsninger.

Løsningsforslag: Dette er en separabel differentialligning af første orden og løses som i MII2, afsnit 16.3.

Den eneste konstante løsning er nulfunktionen $x(t) = 0$ $(t \in \mathbb{R})$.

Antag nu $x \neq 0$. Ved separation af de variable og integration fås

$$x = \frac{1}{2t^3 + c}, \quad \text{hvor } 2t^3 + c \neq 0.$$

Altså er der for ethvert $c \in \mathbb{R}$ to maksimale løsninger:

$$x(t) = \frac{1}{2t^3 + c}, \quad \text{hvor } t < -\sqrt[3]{\frac{c}{2}}$$

og

$$x(t) = \frac{1}{2t^3 + c}, \quad \text{hvor } t > -\sqrt[3]{\frac{c}{2}}.$$

(b) Bestem den maksimale løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, der opfylder betingelsen

$$\tilde{x}(1) = \frac{1}{4} \,.$$

Løsningsforslag: Vi skal finde den af de maksimale løsninger fra (a), der opfylder betingelsen. Det må oplagt være en af de ikke-konstante løsninger. Ved indsættelse af $t = 1$ fås, at konstanten c må opfylde ligningen

$$\frac{1}{2 + c} = \frac{1}{4} \,.$$

Altså må $c = 2$. Løsningen bliver dermed

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2t^3 + 2}, \quad \text{hvor } t > -1.$$

Opgave 3

Betragt følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

(a) Opskriv den udvidede koefficientmatrix (totalmatricen) for ligningssystemet. Omdan denne matrix til en echelonmatrix ved anvendelse af rækkeoperationer.

Løsningsforslag: Den udvidede koefficientmatrix er

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ved rækkeoperationer omdannes den til følgende echelonmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestem alle løsninger til ligningssystemet.

Løsningsforslag: Af echelonmatricen fra (a) ses, at x_3 er en fri variabel, samt at $x_1 = 2x_3$, $x_2 = 1 - x_3$ og $x_4 = 1$. Altså kan løsningerne skrives (sæt $x_3 = s$):

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2s, 1 - s, s, 1) = (0, 1, 0, 1) + s(2, -1, 1, 0)\,, \quad \text{hvor } s \in \mathbb{R}.$$

(c) Betragt mængden af alle løsninger $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ til ligningssystemet. Er denne mængde et underrum af vektorrummet $\mathbb{R}^4$? Begrund dit svar.

Løsningsforslag: Da $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ *ikke* er en løsning til ligningssystemet, ligger nulvektoren ikke i mængden af alle løsninger. Denne mængde er derfor ikke et underrum (LA 1.4.1).

Opgave 4

Lad $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \text{ og } y > 0\}$ og betragt funktionerne $f, g : S \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \quad \text{for alle } (x, y) \in S$$

og

$$g(x, y) = xy \quad \text{for alle } (x, y) \in S.$$

(a) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for f i ethvert punkt $(x, y) \in S$.
Vis, at f er konkav.

Løsningsforslag: Ved differentiation fås følgende Hessematrix:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Alle hovedunderdeterminanter for $-H(x, y)$ er ikke-negative, så $-H(x, y)$ er positiv semidefinit (LA 11.3.5). Derfor er $H(x, y)$ negativ semidefinit (LA 10.3.5). Og derfor er f konkav (MII3 9.3.16).

(b) Afgør, om g er kvasikonkav. Begrund dit svar.

Løsningsforslag: $h(t) = t^2$ er voksende for $t > 0$ og $f(x, y) > 0$ for alle $(x, y) \in S$. Da f er konkav og $g = h \circ f$ følger så, at g er kvasikonkav (MII3 9.4.17).

(c) Afgør, om g er konkav. Afgør også, om g er konveks. Begrund dine svar.

Løsningsforslag: Ved differentiation fås følgende Hessematrix for g:

$$H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(H_g(x, y)) = \det(-H_g(x, y)) = -1$, er $H_g(x, y)$ hverken positiv eller negativ semidefinit (LA 11.3.5). Altså er g hverken konkav eller konveks (MII3 9.3.16 og 9.2.22).