KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 S-1A rx ret

EKSAMEN I MATEMATIK A

Tirsdag den 16. august 2011

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1.

Rentesregning.

(1) Hvis den årlige rente i et pengeinstitut kaldes r, og der er n årlige terminer, skal man vise, at en kapital S_0, som indsættes i pengeinstituttet på en terminsdag, og som forrentes i t år, vokser til

$$S_{nt} = S_0\Big(\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^n\Big)^t = S_0\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{nt}.$$

Løsning. Når den årlige rente er r, og der er n årlige terminer, er terminsrenten $r_{termin} = \frac{r}{n}$. Hvis 1 krone forrentes i 1 termin, vil man få en kapital på $1+\frac{r}{n}$ kroner, og i løbet af et år vil man opnå $(1+\frac{r}{n})^n$ kroner. I løbet af t år vokser 1 krone derfor til $(1+\frac{r}{n})^{nt}$ kroner, idet der på t år er i alt nt terminer. En kapital S_0 vil derfor i løbet af t år vokse til

$$S_{nt} = S_0\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{nt} = S_0\Big(\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^n\Big)^t.$$

(2) Vis, at

$$\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^n \to e^r \text{ for } n \to \infty.$$

Løsning. Vi ser, at

$$\ln\Big(\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^n\Big) = n\ln\Big(1+\frac{r}{n}\Big) = n\Big(\ln\Big(1+\frac{r}{n}\Big) - \ln(1)\Big) =$$

$$r\frac{\ln\Big(1+\frac{r}{n}\Big)-\ln(1)}{\frac{r}{n}} = r\frac{\ln\Big(1+\frac{r}{n}\Big)-\ln(1)}{(1+\frac{r}{n})-1} \to r\frac{d\ln}{dx}(1) = r$$

for $n \to \infty$.

Dette viser, at
$$\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^n \to e^r \ \text{ for } \ n\to\infty.$$

(3) Vis, at
$$r = n\Big(\Big(\frac{S_{nt}}{S_0}\Big)^{\frac{1}{nt}} - 1\Big).$$

Løsning. Vi finder, at
$$S_{nt} = S_0\Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{nt} \Leftrightarrow \frac{S_{nt}}{S_0} = \Big(1+\frac{r}{n}\Big)^{nt} \Leftrightarrow \Big(\frac{S_{nt}}{S_0}\Big)^{\frac{1}{nt}} = 1+\frac{r}{n} \Leftrightarrow$$
$$r = n\Big(\Big(\frac{S_{nt}}{S_0}\Big)^{\frac{1}{nt}} - 1\Big).$$

Opgave 2. For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{5+\cos(x)}\Big)^n.$$

(1) Bestem mængden
$$K = \{x \in \mathbf{R} \mid (*) \ \text{ er konvergent}\}.$$

Løsning. Vi ser, at den uendelige række $(*)$ er en kvotientrække med kvotienten $q = \frac{2}{5+\cos(x)}$. En kvotientrække er konvergent, hvis og kun hvis $|q| < 1$, og dette krav er opfyldt for ethvert $x \in \mathbf{R}$, thi $|q| \leq \frac{1}{2}$. Derfor er $K = \mathbf{R}$.

(2) Bestem en forskrift for funktionen $f : K \to \mathbf{R}$, som er givet ved
$$\forall\, x \in K : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{5+\cos(x)}\Big)^n.$$

Løsning. Vi finder, at
$$\forall x \in \mathbf{R} : f(x) = \frac{1}{1-\frac{2}{5+\cos(x)}} = \frac{5+\cos(x)}{3+\cos(x)}.$$

(3) Bestem den afledede $f^{'}$ af funktionen f.

Løsning. Vi finder, at

$$f^{'}(x) = \frac{df}{dx} = \frac{(-\sin(x))(3+\cos(x)) - (-\sin(x))(5+\cos(x))}{(3+\cos(x))^2} =$$

$$\frac{2\sin(x)}{(3+\cos(x))^2}.$$

(4) Bestem mængden af de $x \in K$, hvor elasticiteten $\mathrm{El} f(x)$ for funktionen f eksisterer, og udregn derpå $\mathrm{El} f(x)$.

Løsning. Det er klart, at $f(x) \neq 0$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$, så elasticiteten $\mathrm{El} f(x)$ for funktionen f eksisterer i ethvert punkt $x \in \mathbf{R}$.

Desuden får vi, at

$$\mathrm{El} f(x) = x\frac{f^{'}(x)}{f(x)} = x\Big(\frac{2\sin(x)}{(3+\cos(x))^2}\Big)\Big(\frac{3+\cos(x)}{5+\cos(x)}\Big) =$$

$$x\frac{2\sin(x)}{(3+\cos(x))(5+\cos(x))} = x\frac{2\sin(x)}{\cos^2(x) + 8\cos(x) + 15} =$$

$$\frac{2x\sin(x)}{(\cos(x)+4)^2 - 1}.$$

Opgave 3. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) = \ln(x) - x + \ln(y) - 5y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x} - 1 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y} - 5.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, bestem dette punkt, og godtgør, at det er et maksimumspunkt for f.

Løsning. Hvis begge de partielle afledede er 0, får vi, at $x = 1$ og $y = \frac{1}{5}$. Funktionen f har derfor det ene stationære punkt $(x, y) = (1, \frac{1}{5})$. Desuden finder vi, at funktionen f har Hessematricen

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix},$$

så

$$H(1, \frac{1}{5}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix},$$

hvoraf vi ser, at det stationære punkt er et maksimumspunkt for funktionen f.

(3) Lad funktionen $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : \phi(s) = f(e^s, e^{2s}).$$

Vis, at funktionen ϕ er strengt konkav på hele den reelle akse, og bestem værdimængden $R(\phi)$ for ϕ.

Løsning. Vi finder, at

$$\phi(s) = f(e^s, e^{2s}) = \ln(e^s) - e^s + \ln(e^{2s}) - 5e^{2s} = s - e^s + 2s - 5e^{2s} =$$

$$3s - e^s - 5e^{2s}.$$

Herefter får vi, at

$$\frac{d\phi}{ds} = 3 - e^s - 10e^{2s},$$

så

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \Leftrightarrow 10(e^s)^2 + e^s - 3 = 0 \Leftrightarrow e^s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{20} \Leftrightarrow$$

$$e^s = \frac{-1 \pm 11}{20} \Leftrightarrow e^s = \frac{1}{2},$$

thi $e^s > 0$. Heraf får vi, at $s = \ln(\frac{1}{2})$.

Vi finder endvidere, at

$$\forall s \in \mathbf{R} : \frac{d^2\phi}{ds^2} = -e^s - 20e^{2s} < 0,$$

hvilket viser, at funktionen ϕ er strengt konkav, og derfor er det stationære punkt $s = \ln(\frac{1}{2})$ et globalt maksimumspunkt for funktionen ϕ.

Vi finder herefter, at $\phi(\ln(\frac{1}{2})) = 3\ln(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = 3\ln(\frac{1}{2}) - \frac{7}{4}$ er den globale maksimumsværdi for ϕ, og at

$$\phi(s) = 3s - e^s - 5e^{2s} \to -\infty \text{ for } s \to -\infty,$$

så værdimængden for ϕ er $R(\phi) =]-\infty, 3\ln(\frac{1}{2}) - \frac{7}{4}]$.