**Eksamen på Økonomistudiet. Vinteren 2011 - 2012**

**MATEMATIK A**

1. årsprøve

Tirsdag den 21. februar 2012

(2 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

**KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT**

**1. ÅRSPRØVE 2012 V-1A rx**

**SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A**

**Tirsdag den 21. februar 2012**

---

3 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

---

**Opgave 1. Stamfunktion og integraler.** Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en kontinuert funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen $F : I \to \mathbf{R}$ er en stamfunktion til den givne kontinuerte funktion $f$.

(2) Forklar, hvad man forstår ved det ubestemte integral

$$\int f(x)\, dx$$

af den givne funktion $f$.

(3) Antag, at $f, g : I \to \mathbf{R}$ er to givne kontinuerte funktioner på det åbne interval $I$, og antag endvidere, at funktionerne $F$ og $G$ er stamfunktioner til henholdsvis $f$ og $g$.

Vis, at

$$\int f(x)g(x)\, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\, dx,$$

dersom funktionen $g$ er differentiabel, og den afledede funktion $g'$ er kontinuert.

Vis endvidere, at

$$\int f(x)g(x)\, dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\, dx,$$

dersom funktionen $f$ er differentiabel, og den afledede funktion $f'$ er kontinuert.

(4) Udregn det ubestemte integral

$$\int x^2 \sin(x)\, dx\,.$$

(5) Udregn det ubestemte integral

$$\int \frac{8x}{5+(2x)^2}\,dx\,.$$

**Opgave 2.** Vi betragter mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \,\land\, y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in D : f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen $f$.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,,\;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \;\text{ og }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

af anden orden for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$, og afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for $f$.

(4) Vis, at

$$\forall\,(x,y) \in D : f\Big(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\Big) = f(x,y).$$

(5) Vis, at

$$\forall\,(x,y) \in D : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)y = 0.$$

Er funktionen $f$ homogen, og i bekræftende fald af hvilken grad?

**Opgave 3.** For ethvert $a > 0$ og for ethvert $x \in \mathbf{R}_+$ betragter vi den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^{an}.$$

(1) Bestem mængden

$$C = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid (\S) \text{ er konvergent}\} = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid \sum_{n=0}^{\infty} x^{an} < \infty\}.$$

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : C \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\,(x, a) \in C \times \mathbf{R}_+ : f(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{an}.$$

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, a) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial a}(x, a)$$

af første orden for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x, a) \in C \times \mathbf{R}_+$.

(4) Bestem de partielle elasticiteter $\mathrm{El}_x f(x, a)$ og $\mathrm{El}_a f(x, a)$ for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x, a) \in C \times \mathbf{R}_+$.