

Eksamen på Økonomistudiet sommeren 2017
Sandsynlighedsteori og Statistik

2. årsprøve

12. juni, 2017

(3-timers prøve med hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 5 sider (forsiden inklusiv).

NB: If you fall ill during the actual examination at Peter Bangsvej, you must contact an invigilator in order to be registered as having fallen ill. Then you submit a blank exam paper and leave the examination. When you arrive home, you must contact your GP and submit a medical report to the Faculty of Social Sciences no later than seven (7) days from the date of the exam.

Opgaven består af tre delopgaver, som alle skal besvares. De tre opgaver kan regnes uafhængigt af hinanden. Opgave 1 og 2 indgår tilsammen med samme vægt som opgave 3.

Opgave 1

Den simultane fordeling af X og Y er givet ved

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0, 1	0, 2
$X = 1$	0, 3	0, 1
$X = 2$	0, 1	0, 2

1. Beregn middelværdi og varians af den marginale fordeling for X . Dvs. beregn $E(X)$ og $V(X)$.
2. Angiv fordelingen af Z hvor $Z = X^2 + Y$. Udregn også $E(Z)$.
3. Udregn den betingede middelværdi og den betingede varians af Y givet $Z = 1$. dvs. udregn $E(Y|Z = 1)$ og $V(Y|Z = 1)$.
4. Er X og Y uafhængige? Begrund svaret.

Opgave 2

På to indfaldsveje til København optælles antallet af BMW'er, der ankommer i tidsrummet 9.00 til 9.30 en hverdag.

På indfaldsvej A kan dette antal (X) beskrives med en poissonfordeling med $\lambda = 10$.

På indfaldsvej B kan dette antal (Y) beskrives med en poissonfordeling med $\lambda = 20$.

De tilsvarende stokastiske variable antages at være uafhængige.

1. Beregn sandsynligheden for at der ankommer mere end 12 BMW'er på indfaldsvej A.
2. Angiv fordelingen for $Z=X+Y$.
3. Givet at der en tilfældig dag samlet er registreret 35 ankomster af mærket BMW, hvad er sandsynligheden for, at 10 af disse ankomster er sket ved indfaldsvej A?
dvs. udregn $P(X=10|Z=35)$.
4. Udregn sandsynligheden for at $W=10$, hvor W er $BIN(35, \frac{1}{3})$ (dvs. binomialfordelt med antalsparameter 35 og sandsynlighedsparameter $\frac{1}{3}$).

Sammenlign dette resultat med sp. 3

Opgave 3

I en større europæisk undersøgelse blandt borgerne i de enkelte lande, er der blevet stillet spørgsmålet "Hvor tilfreds er De med Europarlamentet".

I nedenstående tabel er vist fordelingen for landene Belgien, Danmark og Sverige

Land	meget tilfreds (X_i)	alt andet	i alt (n_i)
Belgien (i=1)	222	1.526	1.748
Danmark (i=2)	182	1.241	1.423
Sverige (i=3)	164	1.479	1.643

kilde: European Social Survey 2014

Der opstilles følgende model:

X_i = antallet af personer der svarer "meget tilfreds". $i=1,2,3$

X_i er $BIN(n_i, p_i)$. Dvs at $P(X_i = x_i) = \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}$

De tre stokastiske variable er uafhængige af hinanden.

1. Argumentér for at det er rimeligt at bruge en binomialfordeling i de enkelte lande og giv en fortolkning af p_i .

2. Opskriv likelihood funktionen $L(p_1, p_2, p_3)$ og vis at log-likelihood funktionen $\log[L(p_1, p_2, p_3)]$ bliver

$$\sum_{i=1}^3 \ln\left[\binom{n_i}{x_i}\right] + \sum_{i=1}^3 x_i \ln(p_i) + \sum_{i=1}^3 (n_i - x_i) \ln(1 - p_i)$$

Angiv de tre scorefunktioner og Hesse-matricen.

Udregn MLE (maksimumlikelihood-estimerne) for p_1, p_2, p_3 .

3. Udregn konfidensintervallet for p_2 , dvs. for Danmarks andel.

4. Det antages nu at $p_1 = p_2 = p_3$. Den fælles parameter kaldes p .

Opskriv likelihood funktionen $L(p)$ samt log-likelihood funktionen $\log[L(p)]$.

Udregn MLE for p som kaldes \hat{p} .

5. Angiv den approksimative fordeling for \hat{p} .

6. Test $H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = p$ mod $H_A : H_0^C$.

Ved brug af et likelihood ratio test.

7. Giv en samlet konklusion.