Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 V-1A ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Mandag den 5. januar 2015

Rettevejledning

Opgave 1. Differentialregning.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent, ikke-tomt interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er differentiabel i punktet $a \in I$ med differentialkvotienten

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a).$$

Løaning. Funktionen f er differentiabel i punktet $a \in I$ med differentialkvotienten $f'(a)$, dersom differenskvotienten

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

har en grænseværdi for x gående mod a. Vi har da, at

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = f'(a).$$

(2) Hvis funktionerne $f, g : I \to \mathbf{R}$ begge er differentiable i punktet a med differentialkvotienterne $f'(a)$ og $g'(a)$, skal man vise, at funktionen $f + g : I \to \mathbf{R}$ er differentiabel i a, og at

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x - a} =$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\to f'(a)+g'(a) \text{ for } x\to a,$$

hvoraf påstanden aflæses.

(3) Betragt den funktion $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x}-1, & \text{for } x\geq 0 \\ 2x, & \text{for } x<0 \end{cases}.$$

Vis, at f er differentiabel overalt på $\mathbf{R}$, og bestem en forskrift for den afledede funktion $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

Løsning. Vi bemærker, at

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x}, & \text{for } x>0 \\ 2, & \text{for } x<0 \end{cases},$$

og da

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2,$$

hvor vi har benyttet L'Hôpitals regel, har vi, at f er differentiabel i $x=0$ med $f'(0)=2$.

Vi har så, at

$$f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x}, & \text{for } x>0 \\ 2, & \text{for } x\leq 0 \end{cases}.$$

(4) Differentier funktionerne

$$f_1(x)=2x^2+\cos(3x),\ f_2(x)=\frac{2}{1+x^2} \text{ og } f_3(x)=e^x+\ln(2+x^2).$$

Løsning. Vi finder, at

$$f_1'(x)=4x-3\sin(3x),\ f_2'(x)=-\frac{4x}{(1+x^2)^2} \text{ og } f_3'(x)=e^x+\frac{2x}{2+x^2}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2: f(x,y)=x^4+x^2+2y^2-y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y - 1.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Vi ser straks, at f har det ene stationære punkt $(x, y) = (0, \frac{1}{4})$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at funktionen f har Hessematricen

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Da Hessematricen

$$H\left(0, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

er positiv definit, ser vi, at det stationære punkt er et minimumspunkt for f.

Opgave 3. For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^n.$$

(1) Bestem mængden

$$K = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n \text{ er konvergent} \right\}.$$

Løsning. Vi har, at

$$x \in K \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow x \neq 0,$$

så $K = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : K \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall x \in K : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n .$$

Løsning. Vi får, at

$$\forall\, x \neq 0 : f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x^2}.$$

(3) Bestem en forskrift for den afledede funktion f', og bestem monotoniintervallerne for f.

Løsning. Vi ser, at den afledede funktion f' har forskriften

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - 2x(1+x^2)}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

Endvidere ser vi, at $f'(x) < 0$ for $x > 0$, og $f'(x) > 0$ for $x < 0$. Dette viser, at f er voksende på intervallet $\mathbf{R}_-$ og aftagende på intervallet $\mathbf{R}_+$.

(4) Bestem værdimængden for f.

Løsning. Vi bemærker, at $f(x) > 1$ for ethvert $x \neq 0$. Idet $f(x) \to \infty$ for $x \to 0$, og $f(x) \to 1$ for $x \to \pm\infty$, ser vi så, at f har værdimængden $R(f) =]1, \infty[$.