**Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2010**

**MATEMATIK B**

1. årsprøve

Mandag den 7. juni 2010

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes cas-værktøjer)

Vi henleder din opmærksomhed på, at du skal besvare eksamensopgaven på det sprog, som du har tilmeldit dig ved eksamenstilmeldingen. Har du tilmeldt dig fagets engelske titel, skal du besvare det engelske opgavesæt på engelsk. Har du tilmeldt dig fagets danske titel eller den engelske titel med "eksamen på dansk" i parentes, skal du besvare det danske opgavesæt på dansk.

Er du i tvivl om, hvad du har tilmeldt dig, fremgår det af printet med din tilmelding fra de studerendes selvbetjening.

**KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT**

**1. ÅRSPRØVE 2010 S-1B ex**

**EKSAMEN I MATEMATIK B**

**Mandag den 7. juni 2010**

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

---

**Opgave 1.** For ethvert tal $p \in \mathbf{R}$ betragter vi $3 \times 3$ matricen

$$A(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem determinanten $\det(A(p))$ for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er regulær.

(2) Matricen $A(1)$ er regulær. Bestem den inverse matrix $A(1)^{-1}$ til $A(1)$.

(3) Bestem egenværdierne for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er henholdsvis positiv definit, positiv semidefinit eller indefinit.

(5) Betragt den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, hvis tilhørende symmetriske matrix er $3 \times 3$ matricen $A(1)$.

Bestem en forskrift for den kvadratiske form $K$.

Betragt dernæst den kvadratiske form $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall (x_1, x_3) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_3) = K\Big(\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{4}x_1, x_3\Big).$$

Bestem en forskrift for den kvadratiske form $L$, bestem den til $L$ hørende symmetriske $2 \times 2$ matrix $B$, og godtgør, at $B$ er positiv definit.

**Opgave 2.** Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y \in \mathbf{R}\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in D : f(x,y) = x^2 + y^4 + 2\sqrt{x}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

(2) Vis, at funktionen $f$ ikke har nogen stationære punkter.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$, og bestem dernæst mængden

$$P = \{(x,y) \in D \mid H(x,y) \text{ er positiv definit}\}.$$

(4) Vis, at mængden $P$ ikke er konveks.

(5) Bestem mængden

$$S = \{(x,y) \in D \mid H(x,y) \text{ er positiv semidefinit}\},$$

og vis, at $S$ er en konveks mængde.

(6) Betragt funktionen $g : S \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\,(x,y) \in S : g(x,y) = \exp(f(x,y)).$$

Vis, at funktionen $g$ er kvasikonveks. Er $g$ konveks?

**Opgave 3.** Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = x - 5.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 10$ er opfyldt.

(3) Bestem differentialkvotienterne

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} \text{ og } \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}$$

af første og anden orden for løsningen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$.

(4) Bestem Taylorpolynomiet af tredje orden for funktionen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ ud fra punktet $t_0 = 0$.

**Opgave 4.** Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som givet ved

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = (x + 2y)^2.$$

For ethvert $v > 0$ betragter vi desuden mængden

$$A(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \,\wedge\, 0 \leq y \leq v\}.$$

(1) Løs ligningen $f(x, y) = 0$.

(2) Bestem værdimængden for funktionen $f$.

(3) Bestem for ethvert $v > 0$ integralet

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x, y)\, d(x, y).$$

(4) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \Big( \frac{I(v)}{\sin(\frac{v}{9})} \Big).$$