Københavns Universitet. Økonomisk Institut

**1. årsprøve 2015 S-1B ex ret**

# Skriftlig eksamen i Matematik B

**Torsdag den 11. juni 2015**

**Rettevejledning**

---

**Opgave 1.** For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi $3 \times 3$ matricerne

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & s \end{pmatrix} \text{ og } B(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

**Løsning.** Vi ser, at $\det\Big(A(s)\Big) = s^2 - s - 1$. Da en kvadratisk matrix er regulær, hvis og kun hvis dens determinant er forskellig fra 0, finder vi, at matricen $A(s)$ er regulær, når og kun når $s \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

(2) Bestem egenværdierne for matricen $B(0)$. Afgør desuden definitheden for $B(0)$.

**Løsning.** Matricen $B(0)$ har det karakteristiske polynomium

$$P(t) = \det\Big(B(0) - tE\Big) = \det\begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$-t(1-t)^2 - 2(1-t) = (1-t)\Big(t^2 - t - 2),$$

og heraf finder vi, at de karakteristiske rødder – og dermed egenværdierne for $B(0)$ – er $t_1 = -1, t_2 = 1$ og $t_3 = 2$. Da egenværdierne har forskellige fortegn, er matricen $B(0)$ indefinit.

(3) Bestem egenrummene for matricen $B(0)$.

**Løsning.** Vi finder, at

$$V(-1) = N\Big(B(0) + E\Big) = \text{span}\{(-2,1,1)\},$$

$$V(1) = N\Big(B(0) - E\Big) = \text{span}\{(0,-1,1)\}$$

og

$$V(2) = N\Big(B(0) - 2E\Big) = \text{span}\{(1,1,1)\}.$$

(4) Bestem en diagonalmatrix $D$ og en ortogonal matrix $Q$, så

$$D = Q^{-1}B(0)Q.$$

**Løsning.** Vi finder, at

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(5) Bestem matricen $C(s) = A(s)A(-s)$ for et vilkårligt $s \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst $s \in \mathbf{R}$, så matricen $C(s)$ er symmetrisk.

**Løsning.** Vi ser, at

$$C(s) = A(s)A(-s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -s^2+2 & s+1 & 0 \\ -s+1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1-s^2 \end{pmatrix}.$$

Heraf fremgår det, at $C(s)$ er symmetrisk, hvis og kun hvis $s = 0$.

**Opgave 2.** Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = 5e^x + 5e^y - e^{x+y}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Man får, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5e^x - e^{x+y} = e^x(5-e^y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5e^y - e^{x+y} = e^y(5-e^x).$$

(2) Vis, at funktionen $f$ har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

**Løsning.** Det ene stationære punkt er $(\ln 5, \ln 5)$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Vi får, at

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 5e^x - e^{x+y} & -e^{x+y} \\ -e^{x+y} & 5e^y - e^{x+y} \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen $f$.

**Løsning.** Man ser, at

$$f''(\ln 5, \ln 5) = \begin{pmatrix} 0 & -25 \\ -25 & 0 \end{pmatrix},$$

som er indefinit, så det stationære punkt er et sadelpunkt for funktionen $f$.

(5) Bestem værdimængden for funktionen $f$.

**Løsning.** Vi har, at $f(x,0) = 4e^x + 5 \to \infty$ for $x \to \infty$ og $f(x,x) = 10e^x - e^{2x} = e^x(10-e^x) \to -\infty$ for $x \to \infty$. Dette viser, at værdimængden er $R(f) = \mathbf{R}$.

(6) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for $f$ gennem punktet $\big(0,0,f(0,0)\big)$.

**Løsning.** Vi finder, at $f(0,0) = 9$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 4$ og $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 4$, så ligningen for tangenplanen til grafen for $f$ gennem punktet $\big(0,0,f(0,0)\big)$ er

$$z = 9 + 4x + 4y.$$

**Opgave 3.** Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} - \left(\frac{\sin t}{5+\cos t}\right) x = \sin t.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

**Løsning.** Idet $p(t) = -\frac{\sin t}{5+\cos t}$ er

$$P(t) = \int p(t)\,dt = \int \frac{1}{5+\cos t} d(5+\cos t) = \ln(5+\cos t) + k, \quad k \in \mathbf{R}.$$

Heraf får vi så ved at anvende ”panserformlen”, at

$$x = Ce^{-\ln(5+\cos t)} + e^{-\ln(5+\cos t)} \int e^{\ln(5+\cos t)} \sin t\,dt =$$

$$\frac{C}{5+\cos t} + \frac{1}{5+\cos t}\left(\int 5\sin t\,dt + \int \cos t \sin t\,dt\right) =$$

$$\frac{C}{5+\cos t} + \frac{1}{5+\cos t}\left(\int 5\sin t\,dt - \int \cos t\,d(\cos t)\right) =$$

$$\frac{C - 5\cos t - 0,5\cos^2 t}{5+\cos t}, \quad \text{hvor } C \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0)$$

for enhver maksimal løsning til differentialligningen $(*)$.

**Løsning.** Ved at sætte $t = 0$ i differetialligningen $(*)$ får man, at

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0.$$

(3) Bestem den løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ er opfyldt.

**Løsning.** Man får, at $C = 10$, så

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = \frac{10 - 5\cos t - 0,5\cos^2 t}{5 + \cos t}.$$

**Opgave 4.** Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + 2y^2 + x^4 + y^6.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x+4x^3 = 2x(1+2x^2) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y+6y^5 = 2y(2+3y^4).$$

(2) Vis, at funktionen $f$ har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

**Løsning.** Det er klart, at $(0, 0)$ er det eneste stationære punkt for funktionen $f$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og vis, at $f$ er strengt konveks.

**Løsning.** Vi ser, at

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 12x^2 & 0 \\ 0 & 4 + 30y^4 \end{pmatrix},$$

som er positiv definit, og dermed er $f$ en strengt konveks funktion.

(4) Bestem værdimængden for funktionen $f$.

**Løsning.** Man ser, at $f(0, 0) = 0$, og da $f$ er strengt konveks, er det stationære punkt $(0, 0)$ et globalt minimumspunkt. Da endvidere, $f(x, 0) \to \infty$ for $x \to \infty$ har $f$ værdimængden $R(f) = [0, \infty[$.

(5) For ethvert $a > 0$ betragter vi funktionen $\phi_a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \phi_a(x, y) = \ln\Big(f(x, y) + a\Big).$$

Vis, at $\phi_a$ er kvasikonveks.

**Løsning.** Da ln er en voksende funktion, er funktionen $\phi_a$ kvasikonveks.