Matematik B: Eksamen juni 2019

Rettevejledning

Opgave 1

Betragt følgende matricer:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Udregn matrixproduktet BA.

Løsningsforslag: Ved matrixmultiplikation fås

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

(b) Vis, at A er regulær (invertibel).

Løsningsforslag: Determinanten af A kan fx. udregnes ved udvikling efter tredje række:

$$\det(A) = (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -(3 \cdot 2 - 1 \cdot 4) = -2.$$

Da $\det(A) \neq 0$, er A er regulær (LA 9.1.6).

(c) Bestem den inverse matrix A^{-1}.

Løsningsforslag: Først opstilles 3×6-matricen $\begin{pmatrix} A & E_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denne kan ved rækkeoperationer omdannes til formen $(\, E_3 \;\; D\,)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Da har vi $A^{-1} = D$ (LA 4.2.2), altså

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Ved matrixmultiplikation kan evt. direkte checkes, at $AA^{-1} = A^{-1}A = E_3$.

(d) Vis, at $\lambda = 2$ er en egenværdi for B, og bestem alle øvrige egenværdier for B.

Løsningsforslag: Egenværdierne for B findes som rødddderne i det karakteristiske polynomium (LA afsnit 10.2)

$$p_B(t) = \det(B - tE) = \det \begin{pmatrix} -1-t & 1 & 2 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & 1 & 4-t \end{pmatrix}.$$

Idet determinanten udregnes ved udvikling efter anden række fås

$$\begin{aligned} p_B(t) &= (-1)^{2+2} \cdot (2-t) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-t & 2 \\ -2 & 4-t \end{pmatrix} \\ &= (2-t)((-1-t)(4-t)+4) = (2-t)(t^2-3t) = -t(2-t)(3-t)\,. \end{aligned}$$

Heraf ses umiddelbart, at B har de tre egenværdier $\lambda = 0$, $\lambda = 2$ og $\lambda = 3$.

(e) Bestem egenrummet hørende til egenværdien $\lambda = 2$ for B.

Løsningsforslag: Egenvektorerne hørende til egenværdien $\lambda = 2$ kan findes ved løsning af følgende homogene lineære ligningssystem (LA afsnit 10.1-2):

$$(B - 2E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ved rækkeoperationer omdannes $B - 2E$ til følgende echelonmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf ses, at x_3 er en fri variabel, samt at $x_1 = 0$ og $x_2 = -2x_3$. Med vektornotation kan løsningerne således skrives (sæt $x_3 = s$):

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, -2s, s) = s(0, -2, 1), \quad \text{hvor } s \in \mathbb{R}.$$

Altså er egenrummet hørende til egenværdien $\lambda = 2$:

$$V_B(2) = \text{span}\{(0, -2, 1)\}\,.$$

(Her er brugt vandret vektornotation for egenvektorer som i LA, egenvektorer kan også skrives som søjler).

Opgave 2

Lad funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y) = 3xy^2 \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lad K_1 og K_2 være følgende kompakte delmængder af $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2 \text{ og } 0 \leq y \leq 2\}\,, \\ K_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2 \text{ og } 0 \leq y \leq x\}\,. \end{aligned}$$

(a) Udregn integralet

$$\int_{K_1} f(x, y)\, d(x, y)\,.$$

Løsningsforslag: Integralet udregnes som et dobbeltintegral (MII3 4.3.1):

$$\int_{K_1} f(x, y)\, d(x, y) = \int_0^2 \Big(\int_0^2 3xy^2\, dy \Big)\, dx = \int_0^2 x \left([y^3]_0^2 \right) dx = \int_0^2 8x\, dx = [4x^2]_0^2 = 16\,.$$

(b) Udregn integralet

$$\int_{K_2} f(x, y)\, d(x, y)\,.$$

Løsningsforslag: Integralet udregnes som et dobbeltintegral (MII3 4.3.2, lad $g(x) = 0$, $h(x) = x$):

$$\int_{K_2} f(x, y)\, d(x, y) = \int_0^2 \Big(\int_0^x 3xy^2\, dy \Big)\, dx = \int_0^2 x \left([y^3]_0^x \right) dx = \int_0^2 x^4\, dx = [\frac{1}{5}x^5]_0^2 = \frac{32}{5}\,.$$

Opgave 3

(a) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 6 \\ x_2 + 4x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

Løsningsforslag: Den udvidede koefficientmatrix for ligningssystemet er

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ved rækkeoperationer omdannes den til følgende echelonmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Heraf kan umiddelbart aflæses, at den eneste løsning er

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -1)\,.$$

(b) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_2 - 2x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Løsningsforslag: Den udvidede koefficientmatrix for ligningssystemet er

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ved rækkeoperationer omdannes den til følgende echelonmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf ses, at x_3 er en fri variabel, samt at $x_1 = 1 + 3x_3$ og $x_2 = -1 - 2x_3$. Altså kan løsningerne skrives (sæt $x_3 = s$):

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 + 3s, -1 - 2s, s) = (1, -1, 0) + s(3, -2, 1)\,, \quad \text{hvor } s \in \mathbb{R}.$$

(c) Betragt følgende delmængde af vektorrummet $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -x_1 + 4x_2\}\,.$$

Vis, at U er et underrum af $\mathbb{R}^3$.
Bestem to vektorer u og v, så

$$U = \operatorname{span}\{u, v\}\,.$$

Løsningsforslag: U er (hyper)planen givet ved ligningen

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\,.$$

Da nulvektoren ligger i U (U indeholder Origo), følger det, at U er et underrum (LA 1.4.2). Alternativt kan man direkte checke, at U opfylder underrumsbetingelserne (LA 1.4.1).

For at finde u og v sættes $x_2 = s$ og $x_3 = t$. Da får vi af ligningen ovenfor, at $x_1 = 4s - t$. Altså består U af vektorerne

$$(x_1, x_2, x_3) = (4s - t, s, t) = s(4, 1, 0) + t(-1, 0, 1)\,, \quad \text{hvor } s, t \in \mathbb{R}.$$

Heraf ses umiddelbart, at

$$U = \operatorname{span}\{(4, 1, 0), (-1, 0, 1)\}\,.$$

(Bemærk, at u og v ikke er entydigt bestemte, så der er mange mulige korrekte svar. Hvis vi fx sætter $x_1 = s$ og $x_2 = t$, så giver metoden ovenfor, at $U = \operatorname{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, 4)\}$).

Opgave 4

Lad $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ og betragt funktionen $f : S \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = (x + y)^2 - 4\ln(x) - 4y \quad \text{for alle } (x, y) \in S.$$

(a) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for f i ethvert punkt $(x, y) \in S$.
Vis, at f er strengt konveks.

Løsningsforslag: Ved differentiation fås følgende partielle afledede af første orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - \frac{4}{x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y - 4\,.$$

Videre fås så følgende partielle afledede af anden orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{4}{x^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2.$$

Dermed bliver Hessematricen:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{for alle } (x,y) \in S.$$

Den er symmetrisk, og de to ledende hovedunderdeterminanter er hhv.

$$2 + \frac{4}{x^2} \qquad \text{og} \qquad \det \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (2 + \frac{4}{x^2}) \cdot 2 - 2 \cdot 2 = \frac{8}{x^2}\,.$$

Disse er positive for alle $x > 0$, så $H(x,y)$ er positiv definit for alle $(x,y) \in S$ (LA 11.3.4). Så følger af MII3 9.2.23, at f er strengt konveks.

(b) Bestem alle globale minimumspunkter og den globale minimumsværdi for f.

Løsningsforslag: Da f er konveks, vil de globale minimumspunkter netop være de stationære punkter (MII3 9.2.25). Da f endda er strengt konveks, vil der højst være et globalt minimumspunkt (MII3 9.2.24).

Vi finder et eventuelt stationært punkt ved at sætte de partielle afledede af første orden lig nul:

$$2x + 2y - \frac{4}{x} = 0 \quad \text{og} \quad 2x + 2y - 4 = 0\,.$$

Det ses umiddelbart, at $\frac{4}{x} = 4$, og dermed at $x = 1$. Videre fås så $y = 1$. Altså er $(x,y) = (1,1)$ det eneste globale minimumspunkt for f. Den globale minimumsværdi er

$$f(1,1) = (1+1)^2 - 4\ln(1) - 4 = 0\,.$$

(c) Lad funktionerne $g, h : S \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$g(x,y) = \sqrt{f(x,y)} \quad \text{og} \quad h(x,y) = -f(x,y) + e^{-f(x,y)} \quad \text{for alle } (x,y) \in S\,.$$

Afgør, om g er kvasikonveks. Begrund dit svar.
Afgør, om h er kvasikonkav. Begrund dit svar.

Løsningsforslag: Definér følgende funktioner af én variabel:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sqrt{t}\,, \quad t \geq 0 \\ \psi(t) &= t + e^t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Da har vi (bemærk, at vi fra spørgsmål b ved, at $f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in S$)

$$g = \phi \circ f \qquad \text{og} \qquad h = \psi \circ (-f)\,.$$

Da f er konveks og ϕ er voksende, så følger af MII3 9.4.13, at g er kvasikonveks. Da $-f$ er konkav og ψ er voksende, så følger af MII3 9.4.17, at h er kvasikonkav.