## Skriftlig eksamen i Matematik B. Sommeren 2015

**Torsdag den 11. juni 2015**

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

**Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler**

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

**1. årsprøve 2015 S-1B ex**

## Skriftlig eksamen i Matematik B

**Torsdag den 11. juni 2015**

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

---

**Opgave 1.** For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi $3 \times 3$ matricerne

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & s \end{pmatrix} \text{ og } B(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

(2) Bestem egenværdierne for matricen $B(0)$. Afgør desuden definitheden for $B(0)$.

(3) Bestem egenrummene for matricen $B(0)$.

(4) Bestem en diagonalmatrix $D$ og en ortogonal matrix $Q$, så

$$D = Q^{-1}B(0)Q.$$

(5) Bestem matricen $C(s) = A(s)A(-s)$ for et vilkårligt $s \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst $s \in \mathbf{R}$, så matricen $C(s)$ er symmetrisk.

**Opgave 2.** Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = 5e^x + 5e^y - e^{x+y}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen $f$ har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen $f$.

(5) Bestem værdimængden for funktionen $f$.

(6) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for $f$ gennem punktet $\big(0, 0, f(0, 0)\big)$.

**Opgave 3.** Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} - \left(\frac{\sin t}{5 + \cos t}\right) x = \sin t.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0)$$

for enhver maksimal løsning til differentialligningen $(*)$.

(3) Bestem den løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ er opfyldt.

**Opgave 4.** Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + 2y^2 + x^4 + y^6.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen $f$ har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og vis, at $f$ er strengt konveks.

(4) Bestem værdimængden for funktionen $f$.

(5) For ethvert $a > 0$ betragter vi funktionen $\phi_a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \phi_a(x, y) = \ln\Big(f(x, y) + a\Big).$$

Vis, at $\phi_a$ er kvasikonveks.