KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2012 V-1B ex ret

EKSAMEN I MATEMATIK B

Mandag den 9. januar 2012

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 2s & 1 \\ 2s & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem determinanten $\det(A(s))$ for matricen $A(s)$ for et vilkårligt $s \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi finder, at $\det(A(s)) = 2s - 1 - 8s^2$, idet vi har benyttet Sarrus' regel. Da andengradspolynomiet

$$P(s) = -8s^2 + 2s - 1, \text{ for } s \in \mathbf{R},$$

har diskriminanten $d = 4 - 32 = -28 < 0$, har P ingen rødder, og vi ser, at

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : P(s) < 0.$$

Heraf finder vi så, at matricen $A(s)$ er regulær for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

(2) Vis, at matricen $A(s)$ hverken er positiv definit eller negativ definit for nogen værdi af $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Matricen $A(s)$ har de ledende hovedunderdeterminanter

$$D_1 = s,\ D_2 = s - 4s^2 \text{ og } D_3 = \det(A(s)) = -8s^2 + 2s - 1.$$

Hvis $A(s)$ skulle være positiv definit, måtte alle de ledende hovedunderdeterminanter være positive, men vi ved jo, at $D_3 < 0$ for ethvert $s \in \mathbf{R}$. Dette viser, at matricen $A(s)$ ikke er positiv definit.

Hvis $A(s)$ skulle være negativ definit, måtte vi kræve, at

$$D_1 = s < 0,\ D_2 = s - 4s^2 > 0 \text{ og } D_3 = \det(A(s)) = -8s^2 + 2s - 1 < 0.$$

Vi ser, at hvis $D_1 < 0$, så er $s < 0$. Hvis $D_2 = 0$, har vi, at $s = 0$ eller $s = \frac{1}{4}$. Dette viser, at

$$D_2 > 0 \Leftrightarrow 0 < s < \frac{1}{4}.$$

Heraf får vi så, at matricen $A(s)$ ikke kan være negativ definit for nogen værdi af $s \in \mathbf{R}$.

(3) Bestem 3×3 matricen $B = A(0)^2 = A(0)A(0)$, og vis, at B er positiv definit.

Løsning. Vi har, at

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

så

$$B = A(0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matricen B har de ledende hovedunderdeterminanter $D_1 = 1, D_2 = 1$ og $D_3 = \det B = 1$, hvilket viser, at B er positiv definit.

(4) Bestem en forskrift for den til matricen B hørende kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, og godtgør, at K er en strengt konveks funktion på mængden $\mathbf{R}^3$.

Løsning. Vi ser, at

$$\forall\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3.$$

Det er klart, at Hessematricen H_K for den kvadratiske form K er $H_K = 2B$, så H_K er positiv definit for ethvert $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Dermed har vi godtgjort, at den kvadratiske form K er en strengt konveks funktion på $\mathbf{R}^3$.

(5) Vis, at funktionen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = \exp\Big(K(x_1, x_2, x_3)\Big),$$

er kvasikonveks, og afgør derefter, om f er konveks.

Løsning. Da den kvadratiske form K er strengt konveks, og da funktionen exp er voksende, er funktionen f åbenbart kvasikonveks. Da exp også er strengt konveks, er f endda konveks.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + x^4 + 3y^2 - y^6.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x+4x^3 = 2x(1+2x^2) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6y-6y^5 = 6y(1-y^4).$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi har, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

og at

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \lor y = 1 \lor y = -1.$$

Funktionen f har derfor følgende stationære punkter: $(0, 0), (0, 1)$ og $(0, -1)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør dernæst for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Vi finder straks, at

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2+12x^2 & 0 \\ 0 & 6-30y^4 \end{pmatrix}.$$

Desuden får vi, at

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

hvilket viser, at punktet $(0,0)$ er et minimumspunkt for funktionen f, og at

$$H(0,1) = H(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix},$$

hvoraf vi aflæser, at punkterne $(0,1)$ og $(0,-1)$ begge er sadelpunkter for f.

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at

$$f(x,0) = x^2 + x^4 \to \infty \text{ for } x \to \infty,$$

og at

$$f(0,y) = 3y^2 - y^6 = y^2(3-y^4) \to -\infty \text{ for } y \to \infty,$$

så funktionen f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

(5) Bestem mængden

$$P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \text{Hessematricen } H(x,y) \text{ er positiv definit}\}.$$

Løsning. Det er klart, at $2 + 12x^2 > 0$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$, og da

$$6 - 30y^4 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} > y^4 \Leftrightarrow -\sqrt[4]{\frac{1}{5}} < y < -\sqrt[4]{\frac{1}{5}},$$

får vi, at

$$P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \text{Hessematricen } H(x,y) \text{ er positiv definit}\} =$$

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R} \wedge -\sqrt[4]{\frac{1}{5}} < y < -\sqrt[4]{\frac{1}{5}}\}.$$

(6) Betragt funktionen $g : P \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\,(x,y) \in P : g(x,y) = f(x,y).$$

Vis, at funktionen g er strengt konveks.

Løsning. Dette er trivielt, thi Hessematricen for funktionen g er netop $H(x,y)$ på mængden P.

(7) For ethvert $v > 0$ betragter vi mængden

$$A(v) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \,\wedge\, 0 \leq y \leq v\}.$$

Bestem for ethvert $v > 0$ integralet

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x,y)\,d(x,y).$$

Løsning. Vi finder, at

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1 \Big(\int_0^v (x^2 + x^4 + 3y^2 - y^6)\,dy \Big)\,dx =$$

$$\int_0^1 \Big[x^2 y + x^4 y + y^3 - \frac{1}{7} y^7 \Big]_0^v dx = \int_0^1 (x^2 v + x^4 v + v^3 - \frac{1}{7} v^7)\,dx =$$

$$\Big[\frac{1}{3} x^3 v + \frac{1}{5} x^5 v + v^3 x - \frac{1}{7} v^7 x \Big]_0^1 = \frac{1}{3} v + \frac{1}{5} v + v^3 - \frac{1}{7} v^7 = -\frac{1}{7} v^7 + v^3 + \frac{8}{15} v.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = e^t + 2t.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser, at

$$x = \int (e^t + 2t)\,dt = e^t + t^2 + c,$$

hvor $c \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 15$ er opfyldt.

Løsning. Idet $\tilde{x}(0) = 15$, har vi, at $1 + c = 15$, så $c = 14$. Dette viser, at

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = e^t + t^2 + 14.$$

(3) Vis, at enhver maksimal løsning $x = x(t)$ til differentialligningen $(*)$ er en strengt konveks funktion på hele $\mathbf{R}$.

Løsning. Vi får, at

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : \frac{d^2x}{dt^2} = e^t + 2 > 0,$$

hvoraf det ønskede straks fremgår.

Opgave 4. Lad $n \in \mathbf{N}$ være givet, og antag, at $n \geq 3$. Betragt mængden

$$U = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

og funktionen $P : U \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} : P(i) = a(2^i + 3^i),$$

hvor $a > 0$.

(1) Bestem $a > 0$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U.

Løsning. Det er klart, at $P(i) > 0$. Endvidere ser vi, at

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = a\Big(2\frac{1-2^n}{1-2} + 3\frac{1-3^n}{1-3}\Big) = a\Big(-2 + 2^{n+1} + \frac{3}{2}(-1+3^n)\Big) =$$

$$a\Big(2^{n+1} - 2 - \frac{3}{2} + \frac{3^{n+1}}{2})\Big) = a\Big(2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{7}{2}\Big) = 1,$$

så

$$a = \frac{1}{2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{7}{2}}.$$

(2) Bestem sandsynligheden $P(\{1,2\})$ for vilkårligt $n \geq 3$.

Løsning. Vi får, at

$$P(\{1,2\}) = a(2+3+4+9) = \frac{18}{2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{7}{2}}$$

(3) Bestem sandsynligheden $P(\{1,2\})$ for $n = 3$.

Løsning. Af svaret ovenfor får vi, at

$$P(\{1,2\}) = \frac{18}{2^4 + \frac{3^4}{2} - \frac{7}{2}} = \frac{18}{53},$$

idet vi blot har sat $n = 3$.