KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2012 S-1B rx ret

EKSAMEN I MATEMATIK B

Tirsdag den 21. august 2012

Rettevejledning

Opgave 1. En symmetrisk 3×3 matrix A har egenværdierne $5, 7$ og 9, og de tilhørende egenrum er

$$V(5) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}, V(7) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} \text{ og } V(9) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}.$$

(1) Er matricen A regulær?

Løsning. Matricen A er regulær, idet den ikke har egenværdien 0.

(2) Er matricen A positiv definit?

Løsning. Matricen A er positiv definit, fordi den har tre forskellige positive egenværdier.

(3) Bestem matricen A.

Løsning. Fra spektralsætningen får vi, at der findes en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^t A Q \Leftrightarrow A = Q D Q^t,$$

og ud fra de givne oplysninger, ser vi, at

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \text{ og at } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ved udregning finder vi, at

$$A = QDQ^t = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

(4) Bestem matricen $A^2 = AA$.

Løsning. Vi finder, at

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & -12 & 0 \\ -12 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

(5) Bestem en diagonalmatrix Λ og en ortogonal matrix Q, så

$$\Lambda = Q^{-1} A^2 Q.$$

Løsning. Vi ser, at

$$D^2 = DD = (Q^t AQ)(Q^t AQ) = Q^t A(QQ^t)AQ = Q^t A^2 Q = Q^{-1} A^2 Q = \Lambda,$$

så

$$\Lambda = D^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0 \,\wedge\, y \geq 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in D : f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + xy.$$

(1) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

Løsning. Vi bemærker, at $f(0, 0) = 0$, og at $f(x, y) \geq 0$ for ethvert talpar $(x, y) \in D$.

Desuden ser vi, at

$$f(x, x) = 2\sqrt{x} + x^2 \to \infty \text{ for } x \to \infty.$$

Dette viser, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [0, \infty[$.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ \text{ og } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt (x, y), hvor $x > 0$ og $y > 0$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + y = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + y \ \text{ og } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} + x = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} + x.$$

(3) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

Løsning. Dette er trivielt, da $x > 0$ og $y > 0$.

(4) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt (x, y), hvor $x > 0$ og $y > 0$, og bestem dernæst mængden

$$N = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid H(x,y) \ \text{ er negativ definit}\}.$$

Løsning. Vi ser, at

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Vi har desuden, at $H(x, y)$ er negativ definit, hvis og kun hvis

$$-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0 \wedge (-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}})(-\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}}) - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0 \wedge y > 0 \wedge \frac{1}{16}x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{3}{2}} > 1 \Leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0 \wedge xy < \sqrt[3]{\frac{1}{16^2}}.$$

Dette viser, at

$$N = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0 \wedge xy < \sqrt[3]{\frac{1}{16^2}}\Big\}.$$

(5) Vi betragter funktionen $g : N \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\ (x, y) \in N : g(x, y) = f(x, y).$$

Vis, at funktionen g er strengt konkav.

Løsning. Dette er trivielt, idet Hessematricen for g er $H(x, y)$ på definitionsmængden N.

(6) For ethvert $u > 0$ betragter vi mængden

$$A(u) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq u \ \wedge\ 0 \leq y \leq u\}.$$

Udregn integralet

$$I(u) = \int_{A(u)} f(x, y)\, d(x, y)$$

for et vilkårligt $u > 0$.

Løsning. Vi ser, at

$$I(u) = \int_{A(u)} f(x, y)\, d(x, y) = \int_{A(u)} \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + xy\right) d(x, y) =$$

$$\int_0^u \Big(\int_0^u \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + xy\right) dy\Big) dx = \int_0^u \Big[x^{\frac{1}{2}} y + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x y^2\Big]_0^u dx =$$

$$\int_0^u \Big(x^{\frac{1}{2}} u + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x u^2\Big) dx = \Big[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} u + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} x + \frac{1}{4} x^2 u^2\Big]_0^u =$$

$$\frac{2}{3} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4} u^4 = \frac{4}{3} u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4} u^4.$$

(7) Bestem grænseværdien

$$\lim_{u \to 0} \Big(\frac{I(u)}{u^{\frac{3}{2}} \sin(2u)}\Big).$$

Løsning. Vi bemærker, at vi kan benytte L'Hôpitals regel, og vi ser, så, at

$$\lim_{u \to 0} \Big(\frac{I(u)}{u^{\frac{3}{2}} \sin(2u)}\Big) = \lim_{u \to 0} \Big(\frac{\frac{4}{3} u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4} u^4}{u^{\frac{3}{2}} \sin(2u)}\Big) = \lim_{u \to 0} \Big(\frac{\frac{4}{3} u + \frac{1}{4} u^{\frac{5}{2}}}{\sin(2u)}\Big) =$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{8} u^{\frac{3}{2}}}{2 \cos(2u)} = \frac{2}{3}.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = 6t^2x^2.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser straks, at den konstante funktion $x = x(t) = 0$, hvor $t \in \mathbf{R}$, er en konstant maksimal løsning til differentialligningen $(*)$. Lad nu $x \neq 0$. Vi finder da, at

$$\frac{dx}{x^2} = 6t^2 dt \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = 2t^3 + k \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2t^3 + k},$$

hvor $k \in \mathbf{R}$, og hvor vi må kræve, at $t^3 \neq -\frac{k}{2}$. Der er således to maksimale løsninger med forskriften

$$x = -\frac{1}{2t^3 + k}.$$

En hvor $t < \sqrt[3]{-\frac{k}{2}}$, og en hvor $t > \sqrt[3]{-\frac{k}{2}}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = -\frac{1}{16}$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at $\tilde{x}(0) = -\frac{1}{16} = -\frac{1}{k}$, så $k = 16$. Da har vi, at

$$x = -\frac{1}{2t^3 + 16} \text{ for } t > \sqrt[3]{-\frac{16}{2}} = -2.$$

Opgave 4. For ethvert $n \in \mathbf{N}$, hvor $n \geq 3$, betragter vi mængden

$$U = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

og funktionen $P : U \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, i \in U : P(i) = ae^i,$$

hvor $a > 0$ er en given positiv konstant.

(1) Bestem konstanten a, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion.

Løsning. Det er klart, at $P(i) > 0$ for ethvert $i = 1, 2, \dots, n$. Endvidere har vi, at

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = \sum_{i=1}^{n} ae^i = ae\frac{1-e^n}{1-e} = a\frac{e-e^{n+1}}{1-e} = 1,$$

så

$$a = \frac{1-e}{e-e^{n+1}} = \frac{e-1}{e^{n+1}-e}.$$

(2) Bestem sandsynligheden $P(\{1,2\})$.

Løsning. Vi får, at

$$P(\{1,2\}) = \frac{e-1}{e^{n+1}-e}\left(e+e^2\right) = \frac{(e-1)(e+1)}{e^n-1} = \frac{e^2-1}{e^n-1}.$$

(3) Bestem $n \geq 3$, så

$$P(\{1,2\}) < \frac{e^2-1}{10000}.$$

Løsning. Vi får, at

$$P(\{1,2\}) < \frac{e^2-1}{10000} \Leftrightarrow \frac{e^2-1}{e^n-1} < \frac{e^2-1}{10000} \Leftrightarrow$$

$$10000 < e^n - 1 \Leftrightarrow e^n > 10001 \Leftrightarrow n > \ln(10001).$$