Rettevejledning
Spilteori, 5.januar 2011

1. Hvis vi betegner den forventede fremtidige indtægt fra patentet med W og virksomhed i's udgifter til patentet med C_i, så er virksomhed i's rene strategier alle $C_i \geq 0$, og payoff til i med ialt N virksomheder vil være

$$\pi_i(C_1, \ldots, C_N) = \begin{cases} W - C_i & \text{hvis } C_i > C_j,\ j \neq i \\ -C_i & \text{hvis } C_j > C_i, \text{for et } j \neq i, \end{cases}$$

og

$$\pi_i(C_1, \ldots, C_N) = \frac{1}{k}W - C_i$$

i tilfældet hvor i er en ud af ialt $k \leq N$ virksomheder der alle har brugt nøjagtig samme beløb (idet vi her antager at alle vinderne får lige andel af gevinsten, subsidiært at de trækker lod om patentet med samme sandsynlighed).

Der er ikke Nash ligevægte i rene strategier, for givet vilkårlige strategivalg $C_1, \ldots, C_N$ vil der altid være mindst én spiller i, som med fordel kan vælge et andet C_i': Hvis det største af alle C_j er $< W$, og i ikke har valgt det største, (eller hvis alle har valgt det samme men stadig mindre end W), skal i vælge noget som ligger imellem det største og W. Hvis en eller anden har valgt W (klart nok vil ingen vælge højere end W), så vil de andre vælge lavere C_i hvis det er muligt, og hvis alle andre har valgt 0, så skal den, der har valgt W, naturligvis vælge lavere.

Man kan godt finde en løsning i blandede strategier: Her skal man bruge, at det gennemsnitlige payoff for alle strategier, som den blandede strategi kan vælge, skal være den samme. Da spillet er symmetrisk, er det naturligt at antage, at dette payoff er 0. Hvis vi lader alle vælge samme sandsynlighedsfordeling over tal mellem 0 og W, skal der altså gælde at 1's gennemsnitlige payoff vil være

$$WP(C_1 > C_2) \cdots P(C_1 > C_N) - C_1 = 0,$$

hvor $P(C_j > C_1)$ er sandsynligheden (i den blandede strategi) for at j vælger noget større end C_1 (og alle disse sandsynligheder er antaget ens). Vi får dermed, når $P(C_1 > C_j) = P(C_j < C_1)$ skrives som fordelingsfunktionen $F(C_1)$ for den blandede strategi, at $WF(C_1)^{N-1} - C_1 = 0$ eller

$$F(C_1) = \left(\frac{C_1}{W}\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Givet denne blandede strategi er der ingen der kan opnå noget bedre (alle rene strategier har payoff 0), så det er en Nash ligevægt.

2. Et eksempel på et spil (N, v), som er superadditivt men har tom kerne, er følgende: Lad $N = \{1, 2, 3\}$, lad $v(N) = 1$ og lad $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\} = 0$, $v(\{1, 2\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 3\}) = \frac{2}{3}$. Det ses at spillet er superaddivt - ligegyldig hvilke to disjunkte mængder man vælger, har foreningsmængden større værdi af v end summen af de oprindelige. Men for enhver vektor (x_1, x_2, x_3) med $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ må der gælde $x_i + x_j < \frac{3}{4}$ for mindst en koalition $\{i, j\}$ med $i \neq j$.

Da den superadditive udvidelse $\hat{v}$ af v opfylder $\hat{v}(S) \geq v(S)$ for alle S (S selv er jo en af de familier af disjunkte delkoalitioner, som der maximeres over), har vi umiddelbart, at hvis $x \in \mathrm{Core}(N, \hat{v})$ og $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, da er x også i $\mathrm{Core}(N, v)$. Den omvendte gælder også: Hvis $x \in \mathrm{Core}(N, v)$ og $v(N) = \hat{v}(N)$, da må der også gælde $x \in \mathrm{Core}(N, \hat{v})$: Antag nemlig at x var domineret via en koalition S i spillet $\hat{v}$; så må der være gælde

$$\sum_{i \in S} x_i < \hat{v}(S) = v(T_1) + \cdot + v(T_k),$$

hvor $T_1, \ldots, T_k$ er indbyrdes disjunkte koalitioner indeholdt i S (sådan er $\hat{v}$ defineret). Men så må der være mindst en af koalitionerne T_j så at $\sum_{i \in T_j} x_i < v(T_j)$, en modstrid, hvis x skal være i $\mathrm{Core}(N, v)$.

Vi har altså, at hvis $\hat{v}(N) = v(N)$, da er kernen af (N, v) og af $(N, \hat{v})$ den samme. Hvis $\hat{v}(N) \neq v(N)$ er en imputation i $\hat{v}(N)$ ikke nødvendigvis en imputation i $v(N)$ og omvendt, så i det tilfælde kan man ikke umiddelbart sammenligne kernerne.

3. Det nemmeste er at lave eksempler med to spillere, $N = \{1, 2\}$. Betragt først spillet

	L	R
T	$(1, 1)$	$(0, 0)$
B	$(0, 0)$	$(0, 0)$

Her kan hver af spillerne kun opnå 1, hvis den anden spiller vælger en bestemt strategi. Dermed har $V_\beta(\{i\})$ ikke noget payoff > 0, for $i = 1, 2$. Men så er payoff'et $(1, 1)$, som ligger i $V_\beta(N)$ (det gør alle payoffs i matricen), ikke domineret, dvs. den er i kernen af (N, V_β).

Dernæst kan vi se på:

	L	R
T	$(1, 0)$	$(0, 1)$
B	$(0, 1)$	$(1, 0)$

Uanset om spiller 2 vælger L eller R, kan spiller 1 svare med en strategi, der giver 1. Det betyder, at $V_\beta(\{1\})$ ihvertfald indeholder payoff'et 1 til spiller 1. Nøjagtig samme argument holder for spiller 2. Men så vil alle de payoffs, som N kan realisere (alle payoffs i tabellen) være domineret via enten $\{1\}$ eller $\{2\}$, altså er kernen tom.

Lad $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ være et strategivalg, som er stærk Nash ligevægt. Hvis σ ikke tilhører β-kernen, må der være en koalition S, som kan dominere $\pi(\sigma)$ ved en vektor y med $y_i > \pi_i(\sigma)$ for alle $i \in S$, dvs. at uanset hvad komplementet har valgt, for eksempel ved valget $(\sigma_j)_{j \in N \setminus S}$, har S et strategyvalg τ_i, $i \in S$, så $\pi_i(\tau_S, \sigma_{N \setminus S}) = y_i$. Men det betyder at S ved at vælge disse strategier kan opnå noget bedre end ved σ, en modstrid.