Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 V-1A ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Torsdag den 3. januar 2013

Rettevejledning

Opgave 1. Stamfunktioner. Lad de reelle funktioner f og F være defineret på et åbent interval $I \subseteq \mathbf{R}$.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at F er en stamfunktion til f.

Løsning. At funktionen F er stamfunktion til f betyder, at F er differentiabel, og at $F' = f$.

(2) Forklar, hvad man forstår ved det ubestemte integral

$$\int f(x)\,dx.$$

Løsning. Det ubestemte integral

$$\int f(x)\,dx$$

omfatter samtlige stamfunktioner til integranden f. Hvis F er en stamfunktion til f, har man derfor, at

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R}.$$

(3) Er det korrekt, at

$$\int \Big(\frac{1}{x} - x\sin\Big(\frac{x^2}{2}\Big) - 2xe^{x^2}\Big)\,dx = \ln(x) + \cos\Big(\frac{x^2}{2}\Big) - e^{x^2} + k$$

for $x > 0$, og hvor $k \in \mathbf{R}$?

Løsning. Vi ser, at funktionen $\ln(x)+\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)-e^{x^2}+k$ er differentiabel for $x > 0$, og vi finder, at

$$\frac{d}{dx}\Big(\ln(x)+\cos\Big(\frac{x^2}{2}\Big)-e^{x^2}+k\Big)=\frac{1}{x}-x\sin\Big(\frac{x^2}{2}\Big)-2xe^{x^2},$$

så påstanden er korrekt.

(4) Udregn de ubestemte integraler

$$\int x^2 e^{2x^3} dx \quad \text{og} \quad \int \cos(x)\sin^5(x)\,dx.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\int x^2 e^{2x^3} dx = \frac{1}{6}\int e^{2x^3} d(2x^3) = \frac{1}{6}e^{2x^3}+k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

og at

$$\int \cos(x)\sin^5(x)\,dx = \int \sin^5(x) d\Big(\sin(x)\Big) = \frac{1}{6}\sin^6(x)+k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R}.$$

(5) Udregn det ubestemte integral

$$\int x^2 \ln(x) dx,$$

hvor $x > 0$.

Løsning. Ved at benytte partiel integration får vi, at

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = e^{x^2+xy+y},$$

og funktionen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : g(x,y) = x^2+xy+y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+xy+y}(2x+y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+xy+y}(x+1).$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Hvis (x, y) er et stationært punkt for funktionen f, må vi kræve, at $2x + y = 0$, og at $x + 1 = 0$. Dette opfyldes kun, når $(x, y) = (-1, 2)$.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial g}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial g}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + y \text{ og } \frac{\partial g}{\partial y} = x + 1.$$

(4) Vis, at funktionen g har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Vis endvidere, at dette punkt er et sadelpunkt for funktionen g.

Løsning. Det er klart, at punktet $(x, y) = (-1, 2)$ er det eneste stationære punkt for funktionen g, jvf. spørgsmål (2).

Hessematricen for funktionen g er

$$g''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

for ethvert $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og heraf fremgår det, at $(x, y) = (-1, 2)$ er et sadelpunkt for g, thi $\det g''(-1, 2) = -1$.

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\cos(x)\Big)^n.$$

(1) Vis, at den uendelige række $(*)$ er konvergent for ethvert $x \in \mathbf{R}$.

Løsning. Det er klart, at

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\cos(x) \leq \frac{1}{2},$$

hvilket viser det ønskede.

(2) Bestem en forskrift for funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\cos(x)\Big)^n.$$

Løsning. Vi får, at

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos(x)} = \frac{2}{2 - \cos(x)}.$$

(3) Bestem den afledede funktion f' af f.

Løsning. Vi finder, at

$$f'(x) = -\frac{2}{\big(2 - \cos(x)\big)^2} \cdot \sin(x) = -\frac{2\sin(x)}{\big(2 - \cos(x)\big)^2}.$$

(4) Bestem elasticiteten $\mathrm{El} f(x)$ for f i et vilkårligt punkt $x \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi opnår, at

$$\mathrm{El} f(x) = -x\frac{2\sin(x)}{\big(2 - \cos(x)\big)^2} \cdot \frac{2 - \cos(x)}{2} = -\frac{x\sin(x)}{2 - \cos(x)}.$$