Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2017 S-1B rx ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 22. august 2017

Opgave 1. En symmetrisk 3×3 matrix A har egenværdierne $1, 3$ og 5 med de tilhørende egenvektorer $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (1, 1, 1)$ og $v_3 = (-1, -1, 2)$. Endvidere oplyses det, at der findes en ortogonal 3×3 matrix Q så ligningen

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = Q^T A Q$$

er opfyldt.

(1) Bestem den ortogonale matrix Q.

Løsning. Vi ser umiddelbart, at vektorsættet (v_1, v_2, v_3) er et ortogonalt sæt, så hvis disse vektorer normeres, fremkommer der et ortonormalt sæt, som udgør søjlerne i den ortogonale matrix Q. Vi får derfor, at

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix},$$

idet vi erindrer, at $\frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Vi ser også, at

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

(2) Bestem den symmetriske matrix A.

Løsning. Vi ser umiddelbart, at $A = QDQ^T$, og vi finder så, at

$$DQ^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -\frac{5}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{6}} & \frac{10}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Heraf finder vi så, at

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

Lad B være en symmetrisk 3×3 matrix, som har de samme egenvektorer som matricen A.

(3) Hvilke egenværdier har matricen B, når vi ved, at $B^2 = BB = A$?

Løsning. Det er klart, at kvadratet på egenværdierne λ_1, λ_2 og λ_3 for matricen B skal være $1, 2$ og 5, altså netop egenværdierne for A. Vi har derfor, at $\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm\sqrt{3}$ og $\lambda_3 = \pm\sqrt{5}$.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^5 + (x - y)^2 x^3.$$

(1) Godtgør, at funktionen f er homogen, og angiv homogenitetsgraden.

Løsning. For $t > 0$ ser vi, at

$$f(tx, ty) = (tx)^5 + (tx - ty)^2 (tx)^3 = t^5 (x^5 + (x - y)^2 x^3) = t^5 f(x, y),$$

så f er homogen af grad $k = 5$.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi bemærker, at

$$f(x,y) = x^5 + x^5 + x^3y^2 - 2x^4y = 2x^5 + x^3y^2 - 2x^4y,$$

og vi finder så, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x^4 + 3x^2y^2 - 8x^3y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - 2x^4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2(10x^2 + 3y^2 - 8xy) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3(y-x).$$

(3) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at hvis $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, så er $x = 0$ eller $x = y$. Hvis $x = 0$, er $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ for ethvert $y \in \mathbf{R}$. Hvis $x = y$, er $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, netop når

$$5x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Funktionen f har således det ene stationær punkt $(0,0)$.

(4) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 40x^3 + 6xy^2 - 24x^2y & 6x^2y - 8x^3 \\ 6x^2y - 8x^3 & 2x^3 \end{pmatrix}.$$

(5) Undersøg for ethvert af de eventuelle stationære punkter, om det er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at $f(x,0) = 2x^5$, hvoraf det fremgår, at det ene stationære punkt $(0,0)$ er et sadelpunkt.

(6) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Idet $f(x,0) = 2x^5$, ser vi, at værdimængden for f er $R(f) = \mathbf{R}$.

For ethvert $v > 0$ betragter vi den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \land 0 \leq y \leq v\}.$$

(7) Udregn integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x,y)\, d(x,y).$$

Løsning. Vi ser, at

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^1 \Big(\int_0^v \Big(2x^5 + x^3y^2 - 2x^4y\Big)\, dy\Big)\, dx =$$

$$\int_0^v \left[2x^5y + \frac{1}{3}x^3y^3 - x^4y^2\right]_0^v dx = \int_0^1 \left(2x^5v + \frac{1}{3}x^3v^3 - x^4v^2\right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{3}x^6v + \frac{1}{12}x^4v^3 - \frac{1}{5}x^5v^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}v + \frac{1}{12}v^3 - \frac{1}{5}v^2.$$

(8) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v\to 0+} \frac{I(v)}{\sin\left(\frac{v}{6}\right)}.$$

Løsning. Ved at benytte L'Hopitals regel får vi, at

$$\lim_{v\to 0+} \frac{I(v)}{\sin\left(\frac{v}{6}\right)} = \lim_{v\to 0+} \left(\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}v^2 - \frac{2}{5}v}{\frac{1}{6}\cos\left(\frac{v}{6}\right)} \right) = 2.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(5t^4 - 7t^6\Big)\, x = 10t^4e^{t^7}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Den simpleste stamfunktion til funktionen $p(t) = 5t^4 - 7t^6$ er $P(t) = t^5 - t^7$. Vi finder derpå, at

$$x = Ce^{t^7-t^5} + e^{t^7-t^5}\int 10t^4e^{t^5-t^7}e^{t^7}\, dt =$$

$$Ce^{t^7-t^5} + 2e^{t^7-t^5}\int e^{t^5}\, d(t^5) = Ce^{t^7-t^5} + 2e^{t^7}, \text{ hvor } C \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 12$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder straks, at $C = 10$, så

$$\tilde{x} = 10e^{t^7 - t^5} + 2e^{t^7}.$$

(3) Bestem differentialkvotienterne

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0) \text{ og } \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}(0).$$

Løsning. Ved at benytte den givne differentialligning ser vi, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0) = 0,$$

og endvidere ser vi, at

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + (20t^3 - 42t^5)\tilde{x} + (5t^4 - 7t^6)\frac{d\tilde{x}}{dt} = 40t^3e^{t^7} + 70t^{10}e^{t^7},$$

hvoraf man får, at

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}(0) = 0.$$

Opgave 4. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + e^y + xy.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^y + x.$$

(2) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Vi ser, at

$$f''(t,t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}.$$

(3) Bestem mængden

$$P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f''(x,y) \text{ er positiv definit}\}.$$

Løsning. Vi ser, at det ønskede er opfyldt, netop når $2e^y - 1 > 0$. Heraf får man straks, at

$$P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > -\ln 2\}.$$

(4) En funktion $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er givet ved forskriften

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : \phi(s) = f(s,s).$$

Vis, at funktionen ϕ er strengt konveks, og bestem Taylorpolynomiet P_3 af 3. orden for ϕ ud fra punktet $s_0 = 0$.

Løsning. Først ser vi, at $\phi(s) = 2s^2 + e^s$, så $\phi'(s) = 4s + e^s, \phi''(s) = 4 + e^s$ og $\phi'''(s) = e^s$. Idet $\phi''(s) > 0$, er ϕ strengt konveks. Desuden får vi, at

$$P_3(s) = \phi(0) + \phi'(0)s + \frac{1}{2}\phi''(0)s^2 + \frac{1}{6}\phi'''(0)s^3 = 1 + s + \frac{5}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3.$$