Vejl. løsninger LM Vinter 2013/14 ①

Opg 1

1) Da u_1 og u_2 er lin. uafh. og udspænder U er de en basis.
Da $\dim U = 2$ og u_3 og u_4 er lin. uafh. vektorer i U vil u_3 og u_4 ligeledes udspænde U. (u_3 og u_4 er jo vektorerne med koordinater $(2,2)$, hhv. $(1,-1)$ m.h.t. basen u_1, u_2).

2) $v = \alpha(2,2) + \beta(1,-1) = (2\alpha+\beta, 2\alpha-\beta)$
m.h.t. u_1, u_2.

3)
$$\begin{aligned}
L u_1 &= u_2 + u_3 = 2u_1 + 3u_2 \\
L u_2 &= L(u_1 - (u_1 - u_2)) = L u_1 - L(u_1 - u_2) \\
&= L u_1 - L u_4 = 2u_1 + 3u_2 - (u_1 - u_3) \\
&= 2u_1 + 3u_2 - u_1 + (2u_1 + 2u_2) \\
&= 3u_1 + 5u_2
\end{aligned}$$

Så fås matricen $L = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

4) $\det(L) \neq 0$ så L er invertibel

5) $L u_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$ (mht u_1, u_2)

②

$L^{-1}(u_1 - u_3) = x \Leftrightarrow Lx = u_1 - u_3$

Altså er $x = u_4$, jfr. sp. 3, så

$$L^{-1}(u_1 - u_3) = u_4 = u_1 - u_2$$

Opg 2

1) Da egenvektorerne er ortogonale, skal

$$(1,-1,1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{og}$$
$$(1,0,-1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$$

Det ses let at $(x_1, x_2, x_3) = (1,2,1)$ er en mulig løsning. (Der er naturligvis uendelig mange muligheder, $t(1,2,1)$, $t \neq 0$)

2) Jfr. spektralsætningen har vi

$$D = Q^{-1} A Q \quad \text{, med}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

og $Q^{-1} = Q^t$.

Så er $\quad A = QDQ^t$.

3

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c & -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c & \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c \\ -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c & \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c & -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c \\ \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c & -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c & \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c \end{bmatrix}$$

(4)

3) $f(A) = Q f(D) Q^t$, fremkommer ved at udskifte a, b og c i A med $f(a)$, $f(b)$ og $f(c)$.

4) $\det(f(A)) = f(a) f(b) f(c)$

5) e^x veldefineret på $\mathbb{R}$, dvs. også på $\{a, b, c\}$. Derfor er e^A veldefineret.

Da $\det(e^A) = e^a e^b e^c \neq 0$ er e^A invertibel.

---

opg 3

1) $$\int \cos^2(x)\sin(2x)\,dx = \int \left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}\right)\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)dx$$

$$\frac{1}{8i}\int e^{i4x} - 1 + 1 - e^{-i4x} + 2(e^{i2x} - e^{-i2x})\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\int \sin(4x) + 2\sin(2x)\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\cos(4x) - \cos(2x)\right) + k.$$

2) $$(2+i)z - (3+4i) = (1+2i)z$$

$$(1-i)z = 3+4i, \text{ dvs}$$

$$z = \frac{3+4i}{1-i} = \frac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+7i}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i}}$$

opg 4 $\quad e^{n(x^2+x-2)} = \left(e^{x^2+x-2}\right)^n$ så... (5)

1) Konvergent for $\left|e^{x^2+x-2}\right| < 1 \iff$

$$e^{x^2+x-2} < 1 \iff$$

$$\underline{x^2+x-2 < 0}$$

$$x^2+x-2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}, \text{ dvs}$$

konvergent for $\underline{\underline{-2 < x < 1}}$

2)

$$f(x) = \frac{1}{1-e^{x^2+x-2}} \quad \text{for} \quad x \in \,]-2,1[\,.$$

3)

Monotoniforhold som for e^{x^2+x-2}.

$$\left(e^{x^2+x-2}\right)' = \left(e^{x^2+x-2}\right)(2x+1)$$

Stationært punkt for $2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$

Monotoniforhold

x		$-\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$\div$		$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

Det ses at f har min i $x = -\frac{1}{2}$.

Det fremgår af monotoniforholdene at f <u>ikke</u> er injektiv (f er i øvrigt symmetrisk omkring linjen $x = -\frac{1}{2}$)

4)

$$f(x) = \frac{e}{e - e^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-2}}$$

Heraf ses, at $e^{x^2+x-2} = e^{-2}$

hvorfor $x^2 + x - 2 = -2$, dvs:

$$x^2 + x = 0$$

L: $\underline{\underline{x = 0}} \vee \underline{\underline{x = -1}}$