Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2018 S-1A ex

Skriftlig eksamen i Matematik A

Tirsdag den 12. juni 2018

---

2 sider med 3 opgaver.
Løsningstid: 2 timer.
Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Homogene funktioner.

Lad $C \subseteq \mathbf{R}^n$ være en kegle, hvilket betyder, at betingelsen

$$\forall\, t > 0 \,\forall\, x \in C : tx \in C$$

er opfyldt.

(1) Lad C_1 og C_2 være kegler i vektorrummet $\mathbf{R}^n$. Vis, at da er fællesmængden $C = C_1 \cap C_2$ også en kegle i $\mathbf{R}^n$.

(2) Lad $f : C \to \mathbf{R}$ være en funktion. Forklar, hvad det vil sige, at f er homogen af grad k.

(3) Afgør, om følgende funktioner, der alle er defineret på $\mathbf{R}^2$, er homogene eller ej, og angiv i bekræftende fald homogenitetsgraden.

$$f_1(x, y) = 3x^2 y + y^3,\ f_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},\ f_3(x, y) = x^{\frac{7}{3}} + yx^{\frac{4}{3}}.$$

(4) Lad $C \subseteq \mathbf{R}^n$ være en kegle, og lad $f, g : C \to \mathbf{R}$ være homogene funktioner af graden henholdsvis k og l.

Vis, at funktionen $fg : C \to \mathbf{R}$ er homogen, og angiv homogenitetsgraden for denne funktion.

Opgave 2.

(1) Udregn følgende integraler

$$\int 2(x^2+1)^4 x\,dx, \quad \int e^{\sin y}\cos y\,dy$$

og for $t > 0$ tillige integralet

$$\int \left(te^{t^2} + \ln t\right)\,dt.$$

(2) Udregn integralet

$$\int_1^{e^2} \ln t\,dt.$$

(3) For $a \in \mathbf{R}$ skal man løse ligningen

$$\int_0^a \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 9x^2\,dx.$$

Opgave 3. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2 + x - y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at punktet $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ er det eneste stationære punkt for funktionen f, og afgør, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

(3) Bestem værdimængden for funktionen f.