Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 V-1A ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Torsdag den 14. januar 2016

Rettevejledning

Opgave 1. Integraler og stamfunktioner.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent, ikke-tomt interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en kontinuert funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen $F : I \to \mathbf{R}$ er en stamfunktion til funktionen f.

Løsning. Funktionen F er stamfunktion til funktionen f, dersom F er differentiabel, og $F'(x) = f(x)$ for ethvert $x \in I$.

(2) Hvad forstår man ved det ubestemte integral

$$\int f(x)\,dx$$

af funktionen f?

Løsning. Det ubestemte integral af funktionen f omfatter samtlige stamfunktioner til f. Hvis F er en af disse stamfunktioner, har man, at

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R}.$$

(3) Er funktionen

$$F(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \cos(7x) + \operatorname{Arctan}(5x), \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

en stamfunktion til funktionen

$$f(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} - 7\sin(7x) + \frac{5}{1+25x^2}, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}?$$

Løsning. Ja, thi F er differentiabel, og $F'(x) = f(x)$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$.

(4) Udregn følgende ubestemte integraler

$$\int (x^2+10x^4-16x^7+e^x)\,dx,\ \int \frac{4x^3}{2+x^4}\,dx,\ \int 6\cos(2x)e^{\sin(2x)}dx,\ \int \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Løsning. Vi ser, at

$$\int (x^2+10x^4-16x^7+e^x)\,dx = \frac{1}{3}x^3+2x^5-2x^8+e^x+k,\ \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

$$\int \frac{4x^3}{2+x^4}\,dx = \int \frac{1}{2+x^4}\,d(2+x^4) = \ln(2+x^4)+k,\ \text{ hvor } k \in \mathbf{R},$$

$$\int 6\cos(2x)e^{\sin(2x)}dx = \int 3e^{\sin(2x)}d(\sin(2x))\,dx = 3e^{\sin(2x)}+k,\ \text{ hvor } k \in \mathbf{R}$$

og

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan}(x)+k,\ \text{ hvor } k \in \mathbf{R}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2+xy+y^4.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+4y^3.$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at hvis begge de partielle afledede skal være 0, må vi kræve, at $y = -2x$ og $x = 32x^3$. Heraf finder vi så, at de stationære punkter er $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{32}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ og $\left(-\frac{1}{\sqrt{32}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi får, at

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Nu er

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

så $(0, 0)$ er et sadelpunkt, og

$$H\Big(\frac{1}{\sqrt{32}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}\Big) = H\Big(-\frac{1}{\sqrt{32}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\Big) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

hvoraf vi ser, at $\big(\frac{1}{\sqrt{32}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}\big)$ og $\big(-\frac{1}{\sqrt{32}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\big)$ er minimumspunkter.

(5) Bestem en forskrift for den funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : g(s) = f(e^s, e^s).$$

Udregn dernæst Taylorpolynomiet P_2 af 2. orden for funktionen g ud fra punktet $s_0 = 0$.

Løsning. Vi ser, at $g(s) = 2e^{2s} + e^{4s}$. Da er $g'(s) = 4e^{2s} + 4e^{4s}$ og $g''(s) = 8e^{2s} + 16e^{4s}$.

Heraf får man, at

$$P_2(s) = g(0) + g'(0)s + \frac{1}{2}g''(0)s^2 = 3 + 8s + 12s^2.$$

Opgave 3. Vi betragter den funktion $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^2 : F(x, y) = e^{xy} + x^2 + xy^2 + e^y - 2e^2 - 5.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + 2x + y^2 \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 2xy + e^y.$$

(2) Godtgør, at ligningen $F(1,2) = 0$ er opfyldt. Vis dernæst, at den variable y i en omegn af $x = 1$ er givet implicit som en funktion $y = y(x)$, og bestem differentialkvotienten $y'(1)$.

Løsning. Vi ser, umiddelbart at $F(1,2) = 0$. Desuden ser vi, at $\frac{\partial F}{\partial x}(1,2) = 2e^2 + 6$ og $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2) = 2e^2 + 4$. Da $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2) \neq 0$, findes der en omegn af $x = 1$, hvor y er givet implicit som en funktion $y = y(x)$. Vi ser, at

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,2)} = -\frac{2e^2+6}{2e^2+4} = -\frac{e^2+3}{e^2+2}.$$