Rettevejledning til eksamen på Økonomistudiet
2011-I-R

Økonometri A

2. årsprøve

februar

(3-times prøve med hjælpemidler)

Kompetence Beskrivelse:
Målet er at de studerende efter at have gennemført faget Økonometri A kan:

- Forstå de vigtigste sandsynlighedsteoretiske begreber som: sandsynlighed, simultane-, marginale- og betingede sandsynligheder, fordeling, tæthedsfunktion, uafhængighed, middelværdi, varians og kovarians samt at selvstændigt kunne anvende disse begreber på konkrete problemstillinger
- Kende resultatet fra den centrale grænseværdi sætning
- Kende og genkende de mest anvendte diskrete og kontinuerte fordelinger som: Bernoulli, Binomial, Poisson, multinomial, hypergeometrisk, geometrisk, lige-, normal-, Chi-i-anden-, eksponential, gamma-, t-, F-fordeling samt at selvstændigt kunne arbejde med disse fordelinger i konkrete problemstillinger
- Forstå de vigtigste statistiske begreber som: tilfældige udvælgelse, likelihood funtionen, sufficiens, stikprøvefunktion, egenskaber ved stikprøvefunktionen, estimation heruden maksimum likelihood og moment estimation, konsistens, konfidensinterval, hypoteseprøvning, teststørrelser, hypoteser, testsandsynlighed, signifikansniveau og type I og II fejl
- Være i stand til selvstændigt at gennemføre en simpel statistisk analyse, som involverer estimation, inferens og hypoteseprøvning, f.eks. sammenligning af middelværdien i to populationer og statistisk analyse af en kontingenstabel.
- Kunne anvende software til databehandling, herunder indlæsning og udskrivning af data, sortering, udvalg og kombination af flere datasæt.
- Forstå og anvende grundlæggende principper i programmering, herunder do-løkker, if-then-else sætninger og opsamling af data i et array.
- Beskrive resultatet af egne analyser og overvejelser i et klart og tydeligt sprog

1 Spørgmål 1

1. $E(T_1) = \frac{1}{\lambda}$ og $Var(T_1) = \frac{1}{\lambda^2}$.
2. Erlang fordelingen (eller gamma fordelingen).
3. $\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \end{pmatrix} 0.0001^0 0.9999^{1000} = 1 - 0.90483 \approx 0.095$. Hvis der genereres 1000 ideer, så er sandsynligheden for mindst 1 produkt på markedet $9,5$ pct.

2 Spørgmål 2

1. $$\begin{aligned} \Pr(D = 1) &= 0.84 \Leftrightarrow \\ 0.90 \cdot x + 0.75 \cdot (1 - x) &= 0.84 \Leftrightarrow \\ 0.15x &= 0.09 \Leftrightarrow \\ x &= \frac{0.09}{0.15} \Leftrightarrow \\ x &= 0.6 \end{aligned}$$

   60 pct. er type A, mens de resterende 40 pct. er type B.

2. Vi har fra multipliceringsreglen p. 55 at

   $$\Pr(D = 1 \cap \text{type } A \cap Z = 1) = \Pr(Z = 1) \Pr(\text{type } A | Z = 1) \Pr(D = 1 | \text{type } A, Z = 1)$$

   Hvis vi benævner hændelsen $D = 1 \cap$type A for E har vi fra den simple multipliceringsregel p. 54 at

   $$\begin{aligned} \Pr(E \cap Z = 1) &= \Pr(E | Z = 1) \Pr(Z = 1) \Leftrightarrow \\ \Pr(D = 1 \cap \text{type } A \cap Z = 1) &= \Pr(D = 1 \cap \text{type } A | Z = 1) \Pr(Z = 1) \end{aligned}$$

   Kombinerer vi de to ligninger fås

   $$\begin{aligned} \Pr(D = 1 \cap \text{type } A | Z = 1) \Pr(Z = 1) &= \Pr(Z = 1) \Pr(\text{type } A | Z = 1) \Pr(D = 1 | \text{type } A, Z = 1) \Leftrightarrow \\ \Pr(D = 1 \cap \text{type } A | Z = 1) &= \Pr(D = 1 | \text{type } A, Z = 1) \Pr(\text{type } A | Z = 1) \end{aligned}$$

   og udnyttes det, at $\Pr(D = 1 | \text{type } A, Z = 1) = \Pr(D = 1 | \text{type } A)$ kan vi skrive det som

   $$\Pr(D = 1 \cap \text{type } A | Z = 1) = \Pr(D = 1 | \text{type } A) \Pr(\text{type } A | Z = 1)$$

   Vi kan på samme vis skrive

   $$\Pr(D = 1 \cap \text{type } B | Z = 1) = \Pr(D = 1 | \text{type } B) \Pr(\text{type } B | Z = 1)$$

hvormed vi har at

$$\begin{aligned}
\Pr(D=1|Z=1) &= \Pr(D=1\cap \text{type } A|Z=1)+\Pr(D=1\cap \text{type } B|Z=1) \\
& \Pr(D=1|\text{type } A)\Pr(\text{type } A|Z=1)+\Pr(D=1|\text{type } B)\Pr(\text{type } B|Z=1) \\
&= 0.9\cdot\frac{0.25}{0.25+0.25}+0.75\cdot\frac{0.25}{0.25+0.25} \\
&= 0.825
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(D=1|Z=2) &= \Pr(D=1|\text{type } A)\Pr(\text{type } A|Z=2)+\Pr(D=1|\text{type } B)\Pr(\text{type } B|Z=2) \\
&= 0.9\cdot\frac{0.20}{0.20+0.10}+0.75\cdot\frac{0.10}{0.20+0.10} \\
&= 0.85
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(D=1|Z=3) &= \Pr(D=1|\text{type } A)\Pr(\text{type } A|Z=3)+\Pr(D=1|\text{type } B)\Pr(\text{type } B|Z=3) \\
&= 0.9\cdot\frac{0.15}{0.15+0.05}+0.75\cdot\frac{0.05}{0.15+0.05} \\
&= 0.8625
\end{aligned}$$

De indledende udregninger er komplicerede, men der gives fuldt point, hvis blot de studerende kan opstille de mere intuitive sidste ligninger og udregne de betingede sandsynligheder korrekt.

2. Andelen af de nye kunder som er af type A:

$$\begin{aligned}
\Pr(A|Z=2\cup Z=3) &= \frac{\Pr(A\cap(Z=2\cup Z=3))}{\Pr(Z=2\cup Z=3)} \\
&= \frac{\Pr(A\cap Z=2)+\Pr(A\cap Z=3)}{\Pr(Z=2)+\Pr(Z=3)} \\
&= \frac{0.20+0.15}{0.20+0.15+0.10+0.05} \\
&= 0.7
\end{aligned}$$

3 Spørgsmål 3

1. Man kan definere butikker, der øger salget som "succes", og butikker, som ikke øger salget om "fiasko", således at hver butik repræsenterer et bernoulli eksperiment. Såfremt salget i hver af butikkerne er uahængige, vil antallet af successer, dvs. antallet af butikker hvis salg øges, være binomialfordelt.

2. $\hat{p} = \frac{\text{antal butikker med øget salg}}{\text{antal butikker}} = \frac{7}{11} = 0.64.$

3. $H_0 : p = 0.5$, $H_1 : p > 0.5$

$$
\begin{aligned}
\Pr(Y \geq 7|H_0) &= \left\{ \begin{array}{c} \Pr(Y=7|H_0) + \Pr(Y=8|H_0) + \Pr(Y=9|H_0) \\ + \Pr(Y=10|H_0) + \Pr(Y=11|H_0) \end{array} \right\} \\
&= 0.1611 + 0.0806 + 0.0269 + 0.0054 + 0.0005 \\
&\approx 0.2745
\end{aligned}
$$

Signifikanssandsynligheden er derfor 27,5% og dermed kan vi ikke forkaste H_0. Dvs. vi kan ikke afvise at $p = \frac{1}{2}$.

4. $\bar{x} = \frac{(-45)+(-50)+28+53+70+(-5)+60+50+(-10)+18+25}{11} = \frac{194}{11} \approx 17.64$

$s^2 = \frac{\left\{ \begin{array}{c} \left(-45 - \frac{194}{11}\right)^2 + \left(-50 - \frac{194}{11}\right)^2 + \left(28 - \frac{194}{11}\right)^2 + \left(53 - \frac{194}{11}\right)^2 + \left(70 - \frac{194}{11}\right)^2 \\ + \left(-5 - \frac{194}{11}\right)^2 + \left(60 - \frac{194}{11}\right)^2 + \left(50 - \frac{194}{11}\right)^2 + \left(-10 - \frac{194}{11}\right)^2 + \left(18 - \frac{194}{11}\right)^2 + \left(25 - \frac{194}{11}\right)^2 \end{array} \right\}}{11-1} = \frac{92\,238}{55} \approx 1677.05$

5. Vi kan benytte approksimative konfidens interval da det er antaget, at populationen er normalfordelt, dvs.

$$
\bar{x} \pm t_{0.975}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{194}{11} \pm 2.23\frac{\sqrt{\frac{92238}{55}}}{\sqrt{11}} = \left\{ \begin{array}{c} -9.89 \\ 45.17 \end{array} \right.
$$

Konfidensintervallet er altså $[-9.89; 45.17]$. Vi bemærker, at 0 ligger inden for konfidensintervallets grænser.

6. $H_0 : \mu = 0$, $H_1 : \mu > 0$

$$
T = \frac{\frac{194}{11} - 0}{\sqrt{\frac{92\,238}{55}\frac{1}{11}}} \approx 1.4283
$$

Den kristiske værdi er givet ved $t_{0.95}(11-1) = 1.81$ og p-værdien er givet ved 0.096. Derfor kan vi ikke afvise, middelværdien er 0.