KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2010 S-1B rx Ret

REEKSAMEN I MATEMATIK B

Mandag den 16. august 2010

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. For ethvert tal $p \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(p) = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & p \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem determinanten $\det(A(p))$ for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er regulær.

LØSNING: Vi finder, at $\det(A(p)) = p^2 - 4p = p(p-4)$. Da en kvadratisk matrix er regulær, hvis og kun hvis dens determinant er forskellig fra nul, ser vi, at matricen $A(p)$ er regulær, netop når $p \in \mathbf{R} \setminus \{0, 4\}$.

(2) Matricen $A(1)$ er regulær. Bestem den inverse matrix $A(1)^{-1}$ til $A(1)$.

LØSNING: Vi ser, at

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denne matrix er regulær, jvf. resultatet i (1). Den inverse matrix $A(1)^{-1}$ findes ved at danne blokmatricen $C = (A(1)|E)$ og reducere denne matrix til echelonmatricen $F = (E|A(1)^{-1})$. Vi opnår så, at

$$A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

(3) Bestem egenværdierne for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$.

LØSNING: Det karakteristiske polynomium $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ for matricen $A(p)$ er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P(t) = \det(A(p) - tE) = (p-t)^2(1-t) - 4(p-t) =$$

$$(p-t)\Big((p-t)(1-t)-4\Big) = (p-t)\Big(t^2-(p+1)t+(p-4)\Big).$$

Heraf finder vi, at de karakteristiske rødder, altså rødderne i polynomiet P og dermed egenværdierne for matricen $A(p)$, er $t_1 = p$,

$$t_2 = \frac{1}{2}\Big(p+1-\sqrt{(p+1)^2-4p+16}\Big) = \frac{1}{2}\Big(p+1-\sqrt{(p-1)^2+16}\Big)$$

og

$$t_3 = \frac{1}{2}\Big(p+1+\sqrt{(p+1)^2-4p+16}\Big) = \frac{1}{2}\Big(p+1+\sqrt{(p-1)^2+16}\Big).$$

(4) Bestem de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er positiv definit.

LØSNING: Matricen $A(p)$ er positiv definit, når og kun når alle dens ledende hovedunderdeterminanter, $D_1 = p, D_2 = p$ og $D_3 = p(p-4)$, er positive. Dette er ensbetydende med, at $p > 4$.

(5) Betragt den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, hvis tilhørende symmetriske matrix er 3×3 matricen $A(2)$.

Bestem en forskrift for den kvadratiske form K.

Betragt dernæst den kvadratiske form $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_2) = K(x_1, -x_2, x_2).$$

Bestem en forskrift for den kvadratiske form L, bestem den til L hørende symmetriske 2×2 matrix B, og godtgør, at B er indefinit.

LØSNING: Vi ser, at

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Heraf får vi så, at

$$\forall\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : K(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3.$$

Endvidere finder vi, at

$$\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_2) = K(x_1, -x_2, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_2^2 - 4x_2^2 =$$
$$2x_1^2 - x_2^2.$$

Den til den kvadratiske for L hørende symmetriske 2×2 matrix er

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da matricen B er en diagonalmatrix med et positivt og et negativt tal i diagonalen, er B åbenbart indefinit.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} + x^2 + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

LØSNING: Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{16}{x^2} + 2x \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{16}{y^2} + 2y.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

LØSNING: Hvis begge de partielle afledede er lig med nul, ser vi, at

$$x^3 = 8 \wedge y^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 2.$$

Dette viser, at funktionen f har netop et stationært punkt, nemlig $(x, y) = (2, 2)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og vis, at funktionen f er konveks.

LØSNING: Vi ser, at

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{32}{x^3} + 2 & 0 \\ 0 & \frac{32}{y^3} + 2 \end{pmatrix}.$$

Da denne matrix er en diagonalmatrix med positive diagonalelementer for ethvert $(x, y) \in D$, ser vi, at funktionen f er strengt konveks, thi $H(x, y)$ er åbenbart positiv definit.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

LØSNING. Det stationære punkt er et globalt minimumspunkt for f. Vi ser, at $f(2, 2) = 24$, og da fx

$$f(x, 1) = \frac{16}{x} + 17 + x^2 \to \infty \text{ for } x \to \infty,$$

får vi, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [24, \infty[$.

(5) Betragt funktionen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : g(x,y) = x - \frac{1}{2}y.$$

Vis, at funktionen f har et betinget minimum under bibetingelsen

$$g(x,y) = 0,$$

og bestem dette betingede minimumspunkt.

LØSNING: Hvis bibetingelsen er opfyldt, gælder det, at $y = 2x$. Vi danner så funktionen $\phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\,x \in \mathbf{R}_+ : \phi(x) = f(x, 2x) = \frac{24}{x} + 5x^2.$$

Heraf får vi, at

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{24}{x^2} + 10x \wedge \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{48}{x^3} + 10.$$

Vi ser, at funktionen ϕ har det stationære punkt

$$x = \sqrt[3]{\frac{12}{5}},$$

og da

$$\forall\,x \in \mathbf{R}_+ : \frac{d^2\phi}{dx^2} > 0,$$

får vi, at det stationære punkt er et globalt minimumspunkt for funktionen ϕ. Dette viser, at punktet

$$(x_0, y_0) = \Big(\sqrt[3]{\frac{12}{5}}, 2\sqrt[3]{\frac{12}{5}}\Big)$$

er et betinget (globalt) minimumspunkt for funktionen f under bibetingelsen $g(x,y) = 0$.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(\frac{4t^3}{1+t^4}\Big)x = 21t^2.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

LØSNING: Vi finder, at

$$\int \Big(\frac{4t^3}{1+t^4}\Big)\, dt = \int \frac{1}{1+t^4}\, d(1+t^4) = \ln(1+t^4) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$. Heraf finder vi så, at

$$x = Ce^{-\ln(1+t^4)} + e^{-\ln(1+t^4)} \int e^{\ln(1+t^4)} 21t^2\, dt =$$

$$\frac{C}{1+t^4} + \frac{1}{1+t^4} \int (21t^2 + 21t^6)\, dt = \frac{C}{1+t^4} + \frac{1}{1+t^4}(7t^3 + 3t^7) =$$

$$\frac{C + 7t^3 + 3t^7}{1+t^4},$$

hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(1) = 3$ er opfyldt.

LØSNING: Da $\tilde{x}(1) = 3$, får vi, at

$$\frac{C+10}{2} = 3 \Leftrightarrow C = -4,$$

så

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = \frac{7t^3 + 3t^7 - 4}{1+t^4}.$$

(3) Betragt funktionen $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : y(s) = \tilde{x}(e^s).$$

Bestem grænseværdien

$$\lim_{s \to -\infty} y(s).$$

LØSNING: Vi ser, at

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : y(s) = \tilde{x}(e^s) = \frac{7e^{3s} + 3e^{7s} - 4}{1 + e^{4s}}.$$

Heraf får vi så, at

$$\lim_{s \to -\infty} y(s) = -4.$$

Opgave 4. For ethvert $n \in \mathbf{N} \setminus \{1,2,3\}$ betragter vi mængden

$$U_n = \{1,2,3,\dots,n\},$$

og for ethvert $a > 0$ betragter vi desuden funktionen $P : U_n \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, i \in U_n : P(i) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^i e^a.$$

(1) Bestem $a > 0$, udtrykt ved $n \in \mathbf{N} \setminus \{1,2,3\}$, således at funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U_n.

LØSNING: Det er klart, at

$$\forall\, i \in U_n : P(i) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^i e^a > 0.$$

Endvidere ser vi, at

$$\sum_1^n P(i) = \frac{1}{2}\, e^a \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, e^a \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = e^a\Big(1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big) = 1,$$

så

$$e^a = \frac{1}{1-\big(\frac{1}{2}\big)^n} \Leftrightarrow a = \ln\Big(\frac{1}{(1-(\frac{1}{2})^n}\Big) \Leftrightarrow a = -\ln\Big(1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big).$$

(2) Bestem sandsynligheden $P(\{1,2,3\})$, udtrykt ved $n \in \mathbf{N} \setminus \{1,2,3\}$, og bestem dernæst grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1,2,3\}).$$

LØSNING: Vi ser, at

$$P(\{1,2,3\}) = \frac{1}{\Big(1-\big(\frac{1}{2}\big)^n\Big)}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\Big) = \frac{7}{8\Big(1-\big(\frac{1}{2}\big)^n\Big)}.$$

Endvidere ser vi, at

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1,2,3\}) = \frac{7}{8}.$$

(3) Bestem grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} a.$$

LØSNING: Vi får, at

$$\lim_{n\to\infty} a = \lim_{n\to\infty}\Big(-\ln\Big(1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big)\Big) = 0.$$