Rettevejledning til Resksamen på Økonomistudiet, sommer 2015

Makro A

2. årsprøve

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

17. august

Opgave 1

1.1

1. Gennemsnitlig vækst i BNP pr. arbejder omkring 1,5-2 %,
2. gennemsnitlig vækst i reallønnen omkring 1,5-2%
3. Ingen trend i realrenten,
4. Ingen trend i indkomstandelene til kapital eller arbejdskraft.

1.2

Ligning (1) kommer fra den lineariseret transitionsligning for kapital (svarende til Solowmodellen i kapitel 5) omkring steady state, hvor man yderligere har benyttet sig af produktionsfunktionen. Dette betyder, at den angiver et test af Solowmodellen udenfor steady state. Det bemærkes dog, at en sådan approksimation kun holder i nærheden af steady state. For at teste modellen med data fra Tabel A er det yderligere antaget, at landene har det samme teknologiske vækstrate, der - i dette tilfælde - fanges af konstantledet.

1.3

En stigning i θ får BNP pr. capita til at stige både på kort og lang sigt. Kort og langsigts elasticiteterne er henholdsvis $1-\alpha$ og 1. Timeproduktiviteten er defineret som $\hat{y}_t \equiv \frac{y_t}{\theta}$. Bruges denne definition kan (2) omskrives til:

$$\hat{k}_{t+1} = sB\hat{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\hat{k}_t,$$

hermed kan det indses, at en stigning i θ *ikke* har en effekt på timeproduktiviteten på lang sigt. På kort sigt vil timeproduktiviteten faktisk falde, men som k_t stiger vil denne effekt blive neutraliseret.

Opgave 2

2.1

Virksomheden maksimerinsproblem er:

$$\max_{K,L_Y,X} \pi_t = K_t^{\alpha}(A_t L_{Yt})^{\beta} X^{\kappa} - r_t K_t - w_t L_t - \nu_t X.$$

Reallejesatsen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial K_t} &= 0 \Rightarrow \\ r_t &= \alpha k_t^{\alpha-1} \left(\left[1 - s_R \right] A_t \right)^{\beta} x_t^{\kappa}. \end{aligned}$$

Reallønnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial L_t} &= 0 \Rightarrow \\ w_t &= \beta k_t^{\alpha} \left(\left[1 - s_R \right] A_t \right)^{\beta} x_t^{\kappa} \end{aligned}$$

Prisen på land:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial X} &= 0 \Rightarrow \\ \nu_t &= \kappa k_t^{\alpha} \left(\left[1 - s_R \right] A_t \right)^{\beta} x_t^{\kappa-1} \end{aligned}$$

Faktorindkomstandelene er givet ved:

$$\alpha, \ \beta \text{ og } \kappa,$$

dette kan vises ved at indsætte faktorpriserne og produktionsfunktionen i:

$$r_t \frac{K_t}{Y_t}, \ w_t \frac{L_t}{Y_t}, \text{ og } \nu_t \frac{X}{Y_t}$$

2.2

Fra ligning har vi

$$g_t^A \equiv \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda},$$

herefter 'leader' vi denne og får:

$$\begin{aligned}
\frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \frac{\rho A_{t+1}^{\phi-1} L_{At+1}^{\lambda}}{\rho A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda}} = \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{L_{At+1}}{L_{At}}\right)^{\lambda} \Leftrightarrow \\
\frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{s_R L_{t+1}}{s_R L_t}\right)^{\lambda} \Leftrightarrow \\
\frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \left(1 + g_t^A\right)^{\phi-1} (1+n)^{\lambda}, \\
\frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \left(1 + g_t^A\right)^{\phi-1} (1+n)^{\lambda},
\end{aligned}$$

hvor vi har udnyttet $L_{At} = s_R L_t$, $\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + g_t^A$ og$\frac{L_{t+1}}{L_t} = (1+n)$.

2.3

Ved at droppe tidsindekset i lign. (9) følger det, at steady-state værdien for vækstraten er $g^A = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1$. Vha. af trappeiteration i transitionsdiaggrammet (hvor transitionskurven er stigende konkav og går igennem origo, såfremt $n > 0$ og $0 < \phi < 1$) kan det vises, at den omtalte steady state er global stabil. Den studerende kan alternativt snakke mere formelt om betingelserne for konvergens (dvs. global stabilitet):

1. Går gennem (0,0).
2. Positive hældning ($\frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t} > 0$).
3. $\lim_{g \to 0} \frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t} > 1$ og $\lim_{g \to \infty} \frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t} < 1$.

2.4

Tag ln til pr. capita produktionsfunktionen i t og $t+1$ og træk dem fra hinanden:

$$\ln y_{t+1} - \ln y_t = \alpha \left[\ln k_{t+1} - \ln k_t\right] + \beta \left[\ln A_{t+1} - \ln A_t\right] + \kappa \left[\ln x_{t+1} - \ln x_t\right],$$

udnyt nu at i steady state, hvor kapital-output forholdet er konstant, må i) $g_t^k = g_t^y = g^y$; ii) fra lign (10) $g^A = n\frac{\lambda}{1-\phi}$, samt at $\ln x_{t+1} - \ln x_t = -n$ fra definitionen af x.

$$\begin{aligned} g^y &\approx \alpha g^y + \beta n \frac{\lambda}{1-\phi} - \kappa n \Leftrightarrow \\ g^y &\approx \left(\frac{\beta\lambda}{1-\phi} - \kappa\right)\frac{n}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

2.5

Med udgangspunkt i lign. (11), hvor vi først vil antage $\lambda = 0$ (dvs. model= kapitel 7 med ingen teknologisk vækst), og Nordhaus' estimater, $\beta = 0,6$ og $\alpha = 0,2$ får vi, at den teoretiske effekt er:

$$g^y \approx -\frac{0,2}{1-0,2}n = -\frac{1}{4}n$$

og dermed er $\frac{\partial g^y}{\partial n} = -1/4$, hvilket er inden for 95% konfidensintervallet; dvs. uden R&D udvidelsen passer teorien ok med empirien. Men når R&D udvidelsen introduceres (dvs. $\lambda > 0$) kommer den teoretiske prædiktion til at lægge længere væk fra empirien. Med andre ord, skala effekter er svære at forene med på-tværs-af-lande empiri.

2.6

Fra definition af z_{t+1} og produktionsfunktionen har vi:

$$z_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{K_{t+1}^{1-\alpha}}{\left(A_{t+1}\left[1-s_R\right]L_{t+1}\right)^{\beta} X^{\kappa}},$$

indsæt nu lign. (5)

$$z_{t+1} = \frac{\left(sY_t + K_t\left(1-\delta\right)\right)^{1-\alpha}}{\left(A_{t+1}\left[1-s_R\right]L_{t+1}\right)^{\beta} X^{\kappa}} = \frac{\left(s + z_t\left(1-\delta\right)\right)^{1-\alpha}}{\left(A_{t+1}\left[1-s_R\right]L_{t+1}\right)^{\beta} X^{\kappa}} Y_t^{1-\alpha},$$

brug nu at $A_{t+1} = (1+g_t^A)A_t$ og $L_{t+1} = (1+n)L_t$

$$
\begin{aligned}
z_{t+1} &= \frac{\left(s+z_t\left(1-\delta\right)\right)^{1-\alpha}}{\left(\left(1+g_t^A\right)\left(1+n\right)\right)^{\beta}} \frac{Y_t^{1-\alpha}}{\left(A_t\left[1-s_R\right]L_t\right)^{\beta} X^{\kappa}} \frac{K_t^{\alpha}}{K_t^{\alpha}} \Leftrightarrow \\
z_{t+1} &= \frac{\left[s+z_t\left(1-\delta\right)\right]^{1-\alpha}}{\left[\left(1+g_t^A\right)\left(1+n\right)\right]^{\beta}} z_t^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Da s_R påvirker Y_t og Y_{t+1} på samme måde er udviklingen i kapital-output forholdet upåvirket af s_R. Dvs. øges s_R så reduceres z_t (da Y_t falder), men via opsparing falder K_{t+1} sådan, at z_{t+1} falder ligeså meget som z_t. En stigning i n vil have en negativ effekt på z (både på kort og lang sigt) pga. udtynding; dette sker direkte igennem n og indirekte igennem g_t^A.

2.7

Her skal der beskrives (grafisk) udviklingen i et system af 2 differensligninger, der er givet ved:

$$
\begin{aligned}
g_{t+1}^A &= \left(1+g_t^A\right)^{\phi-1} g_t^A \left(1+n\right)^{\lambda}, \\
z_{t+1} &= \frac{\left[s+z_t\left(1-\delta\right)\right]^{1-\alpha}}{\left[\left(1+g_t^A\right)\left(1+n\right)\right]^{\beta}} z_t^{\alpha},
\end{aligned}
$$

Dette er relativt simpelt, da den første ligning er uafhængig af udviklingen z. Dvs. så længe $g_{t+1}^A \neq g^A$ forskydes transitionsligningen for z (som er stigende konkav og går igennem origo) op eller ned. Fx hvis $g_{t+1}^A < g^A$ (som er det indeværende tilfælde, da $g_0^A < g^A$) så vil transitionsligningen for kapital-output forholdet blive forskudt nedad.

2.8

Ved omskrivning af pr. capita produktionsfunktionen fås:

$$y_t^* = (z^*)^{\frac{\alpha}{\beta+\kappa}} (1-s_R)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} A_t^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left(\frac{X}{L_t}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}},$$

Herefter benyttes at $g_t^A = \rho A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda}$, hvilket i steady state betyder $A_t = \left(\frac{\rho}{g^A}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} L_t^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$ som indsættes:

$$y_t^* = (z^*)^{\frac{\alpha}{\beta+\kappa}} (1-s_R)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left[\left(\frac{\rho}{g^A}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} L_t^{\frac{\lambda}{1-\phi}}\right]^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left(\frac{X}{L_t}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}},$$

nu udnyttes $L_t = L_0(1+n)^t$

$$\begin{aligned}
y_t^* &= (z^*)^{\frac{\alpha}{\beta+\kappa}} (1-s_R)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left[\left(\frac{\rho}{g^A}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \left(L_0(1+n)^t\right)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}\right]^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left(\frac{X}{L_0(1+n)^t}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} \Leftrightarrow \\
y_t^* &= (z^*)^{\frac{\alpha}{\beta+\kappa}} (1-s_R)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left[\left(\frac{\rho}{g^A}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}\right]^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} (1+n)^{t\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} (1+n)^{t\frac{\beta}{\beta+\kappa}\frac{\lambda}{1-\phi}} \Leftrightarrow \\
y_t^* &= (z^*)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{\rho}{g^A}\right)^{\frac{\beta}{(1-\phi)(1-\alpha)}} L_0^{\left(\frac{\lambda}{1-\phi}\frac{\beta}{1-\alpha}-\frac{\kappa}{1-\alpha}\right)} X^{\frac{\kappa}{1-\alpha}} (1-s_R)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} s_R^{\frac{\beta\lambda}{(1-\phi)(1-\alpha)}} (1+n)^{\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\frac{\lambda}{1-\phi}-\frac{\kappa}{1-\alpha}\right)t} \Leftrightarrow \\
\ln y_t^* &\approx \Gamma + \frac{1}{1-\alpha}\left[\beta\ln(1-s_R) + \frac{\beta\lambda}{1-\phi}\ln s_R + \left(\frac{\beta\lambda}{1-\phi} - \kappa\right) nt\right]
\end{aligned}$$

Ideen med den gyldne regel er at maksimere steady-state forbruget, som er $c_t^* = (1-s)y_t^*$. Dette betyder, at størrelsen på s_R, der maksimerer y_t^* maksimerer også c_t^*. Derfor skal lign.

(15) differentieres og sættes lig med nul:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \ln y_t^*}{\delta s_R} &= -\frac{\beta}{1-s_R} + \frac{\beta\lambda}{1-\phi}\frac{1}{s_R} = 0 \Rightarrow \\
\frac{\beta}{1-s_R} &= \frac{\beta\lambda}{1-\phi}\frac{1}{s_R} \Leftrightarrow \\
\beta s_R &= \frac{\beta\lambda}{1-\phi} - \frac{\beta\lambda}{1-\phi}s_R \Leftrightarrow \\
\beta s_R + \frac{\beta\lambda}{1-\phi}s_R &= \frac{\beta\lambda}{1-\phi} \Leftrightarrow \\
s_R &= \frac{\lambda}{1-\phi+\lambda}
\end{aligned}$$

Det ses, at afhængigheden af land (målt ved κ) *ikke* har inflydelse på 's_R−golden rule', hvilket skyldes at ændringer i s_R øøger/reducerer ikke presset på den faste resurse.