Rettevejledning

Spilteori

19. januar 2012

1. For at se, at vi får en imputation, skal vi vise at $\sum_{i\in N} m_i^\alpha(v) = v(N)$. Det er nemmest at vise ved induktion på samme måde som man definerer Harsanyi-dividenderne. Man ser umiddelbart, at $v(S)$ er summen af de tildelte Harsanyi-dividender, og da man hele tiden tildeler dividenden til én repræsentant, udtømmer man $v(S)$ ved tildelingen. (Hvis man holder sig til den strikse definition af en imputation, så skal den også være individualt rationel, men det kan man ikke være sikker på at den er).

Hvis man ønsker et eksempel hvor en imputation af denne type ikke er i kernen, kan man vælge et spil hvor kernen er tom. Det får man f.eks. ved at tage $v(\{i\}) = 1$ for $i = 1,\ldots,4$, $v(S) = \sum_{i\in S} v(\{i\}) + |S|$ for $S \neq N$ og $v(N) = \frac{7}{2}$.

Vi har brug for et eksempel, hvor der for hver Nash ligevægt vil være en lille ændring af visse payoff'er således at den pågældende strategikombination ikke længere er ligevægt. Det ses let at $\triangle_v(S) = 0$ for alle koalitioner med $S \neq N$ og mere end 1 spiller, og $\triangle_v(N) = -\frac{1}{2}$. Hvis vi som α vælger altid at udtage spiller med lavest nummer, får vi imputationen $(-\frac{1}{2},1,1,1)$ og den er klart nok ikke i kernen.

2. Hertil kan man f.eks. bruge spillet

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (\frac{1}{2},0) & (1,1) \\ (0,\frac{1}{2}) & (0,0) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}$$

Der er tre Nash-ligevægte i rene strategier (alle dem som giver $(1,1)$). Alle disse lider af, at hvis spillet ændres en smule, så at en passende anden af disse i stedet har payoff $(1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$, for $\varepsilon > 0$ vilkårligt lille, så er den ikke længere en Nash ligevægt.

(Der er også ligevægte i blandede strategier i dette spil, men de eneste mulige er dem hvor den ene spiller altid har den første (række eller søjle) mens den anden vælger en blandet strategi med udelukkende 1. og 3. (søjle eller række). Disse blandede strategier har helt det samme problem, så de er heller ikke essentielle.

3. Hvis der er n faktorer som skal indsættes i et fast forhold, så kan produktionsfunktionen skrives som

$$f(z_1,\ldots,z_n) = \min\left\{\frac{z_1}{a_1},\ldots,\frac{z_n}{a_n}\right\}$$

for passende $a_1,\ldots,a_n > 0$. Antag at koalitionen S har produktionsfaktorer $z^S = (z_1^S,\ldots,z_n^S)$ og koalitionen T har $(z_1^T,\ldots,z_n^T)$ og at S og T er disjunkte. For hvert i er

$$\frac{z_i^S}{a_i} \geq f(z^S),\ \frac{z_i^S}{a_i} \geq f(z^S),$$

så

$$\frac{z_i^S + z_i^T}{a_i} \geq f(z^S) + f(z^T),$$

hvilket giver os at $f(z^S + z^T) = \min\left\{\frac{z_i^S+z_i^T}{a_i}\right\} \geq f(z^S) + f(z^T)$, hvoraf det ses at spillet er superadditivt.

Den nemmeste måde at se at spillet er balanceret, er ved at finde et element i kernen. Det oplagte vil være begynde med z^N, de samlede ressourcer i den store koalition. Hvis p er skyggeprisen hørende til problemet om at maximere output med ressourcerne z^N, så kan vi tildele hver koalition $p \cdot z^S$. Det bliver automatisk $\geq$ hvad koalitionen kunne få ved at producere selv, så denne tildeling er i kernen. Spillet er dermed balanceret

Når man noterer, at et vilkårligt S giver anledning til helt det samme slags produktionsspil, ser man at spillet er totalt balanceret.