Rettevejledning:

Eksamen på Økonomistudiet sommer 2016

Makro I

2. årsprøve

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

24. juni

Alle delspørgsmål, 1.1-1.3 og 2.1-2.7, skal besvares og vægtes ens ved bedømmelsen.

Dette eksamenssæt består af 7 sider (inkl. forside).

Opgave 1: Immigration og velstand

1.1

Redegør for sammenhængen mellem størrelsen på arbejdsstyrken (benævnt ved L i pensum) og niveauet af BNP pr. arbejder på lang sigt (dvs. i steady state) i henhold til:

1) Den generelle Solowmodel uden vækst i arbejdsstyrken (svarende til pensums kapitel 5, hvor $n = 0$),

Svar: *Vækststien for BNP pr. arbejder i den generelle Solowmodel er givet ved:*

$$\ln y_t^* \approx \ln A_0 + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\ln s - \ln\left(g+\delta\right)\right),$$

det ses at L_0 ikke indgår (dvs. ingen sammenhæng). Grunden til dette er produktionsfunktionen i denne model udviser CRS til kapital og arbejdskraft, hvilket indebærer, at fx en initial fordobling af arbejdsstyrken fører - på langt sigt - til en fordobling af kapital (og dermed) BNP. BNP pr. arbejder er derfor uændret.

2) Solowmodellen med land som en fast produktionsfaktor uden vækst i arbejdsstyrken (svarende til pensums kapitel 7, hvor $n = 0$).

Svar: *Vækststien for BNP pr. arbejder i Solowmodellen med land er givet ved:*

$$\ln y_t^* \approx \frac{\alpha}{\beta+\kappa}\ln z^* + \frac{\beta}{\beta+\kappa}\ln A_0 + \frac{\beta}{\beta+\kappa}gt + \frac{\kappa}{\beta+\kappa}\ln X - \frac{\kappa}{\beta+\kappa}L,$$

det ses at L indgår negativt. Størrelsen på arbejdsstyrken påvirker altså beliggenheden af vækststien negativt (dvs. L har en negativ niveaueffekt). Intuitionen bag dette resultat er, at produktionsfunktionen i denne model udviser DRS til kapital og arbejdskraft (pga land), hvilket betyder, at en stigning i arbejdsstyrken vil lægge mere pres på den faste faktor (land) og reducere produktiviteten pr. arbejder.

1.2

Ved hjælp af de to typer Solowmodeller angivet i forrige delspørgsmål, skal du nu beskrive udviklingen i forbruget pr. arbejder fra kort til lang sigt som følge af en permanent *engangsstigning* i størrelsen på arbejdsstyrken (forårsaget af fx immigration). Antag at immigranterne er identiske med den indenlandske befolkning.

Svar: *Først bemærkes det, at udviklingen i forbruget pr. arbejder følger udviklingen i BNP pr. arbejder da* $c_t = (1 - s)y_t$.

1) I Solowmodellen fra kapitel 5 vil en stigning i arbejdsstyrken initialt reducere kapital pr. arbejder og dermed BNP pr. arbejder (og forbruget pr. arbejder). Man kan beregne denne effekt til at være $-\alpha\%$ *ved en* 1% *stigning i arbejdsstyrken Hvis vi udgangspunktet var i en steady state, vil det betyde, at opsparingen pr. arbejder efter chokket er større end nedslidningen, og kapital pr. arbejder vil begynde at stige indtil vi er tilbage i den gamle steady state (eftersom transitionsligningen er upåvriket).*

2) I Solowmodellen fra kapitel 7 vil en stigning i arbejdsstyrken ligeså reducere kapital pr. arbejder og dermed BNP pr. arbejder (og forbruget pr. arbejder) initialt. Man kan beregne denne effekt til at være $-(1 - \beta)\%$ *ved en* 1% *stigning i arbejdsstyrken. Dynamikken tilbage til steady state er dog anderledes end kapitel 5, hvilket skyldes, at transitionsligningen rykker nedad som følge af chokket. Hvis* $(1 - \beta) > \frac{\kappa}{\beta+\kappa}$ *vil forbruget begynde, at stige efter det initiale fald, men det nye steady state forbrug pr. arbejder vil stadigvæk være lavere end det oprindelige niveau. Hvis* $(1 - \beta) < \frac{\kappa}{\beta+\kappa}$ *vil forbruget begynde at falde yderligere efter det initiale fald, indtil vi rammer det nye lavere steady state niveau.*

Bemærk: Hvis den studerende "bare" har valgt at tegne udviklingen i 1) og 2) i fx et fasediagrammet, sammen med en kortfattet forklaring, er det også ok!

1.3

Betragt en lukket økonomi, hvor den samlede produktion er beskrevet ved:

$$Y_t = K_t^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1 \text{ og } K_0 \text{ givet}, \tag{1}$$

$$\tilde{L} = \left(\eta L_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\eta) L_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \ 0 < \eta < 1, \sigma > 0 \text{ og } \sigma \neq 1, \tag{2}$$

hvor K_t er kapital og $\tilde{L}$ er et CES aggregat af to typer arbejdskraft, L_1 and L_2, der tilsammen udgør den samlede arbejdsstyrke i landet, givet ved ligning (2), hvor σ måler graden af substituerbarhed mellem de to typer arbejdskraft. Under antagelse om fuldkommen konkurrence på vare og arbejdsmarkederne:

1) Find reallønnen for arbejderne benævnt ved L_2 (dvs. w_{2t}).

2) Vis herefter hvordan w_{2t} påvirkes af en stigning i L_1 på *kort* sigt.

Med udgangspunkt i dette delspørgsmål diskutér kortfattet, hvordan immigration kan tænkes at påvirke økonomisk velstand (hint: tænk immigration som en engangsstigning i L_1).

Svar: 1) *Aflønnigen til de forskellige produktionsfaktorer er aflønnet ved deres marginal produkt, så:*

$$\begin{aligned}
w_{2t} &= MP_{L2} = (1-\alpha) K_t^{\alpha} \tilde{L}^{-\alpha} \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(\eta L_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\eta) L_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} (1-\eta) \frac{\sigma-1}{\sigma} L_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \Leftrightarrow \\
w_{2t} &= (1-\alpha) K_t^{\alpha} \tilde{L}^{-\alpha} \left(\tilde{L}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} (1-\eta) L_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \Leftrightarrow \\
w_{2t} &= (1-\alpha) K_t^{\alpha} \tilde{L}^{-\alpha} \tilde{L}^{1-\frac{\sigma-1}{\sigma}} (1-\eta) L_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \Leftrightarrow \\
w_{2t} &= (1-\alpha)(1-\eta) K_t^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha-\frac{\sigma-1}{\sigma}} L_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1}.
\end{aligned}$$

2) *I næste skridt findes, hvordan reallønnen for L_2 initialt (dvs. på 'kort sigt') er påvirket af en stigning i den anden type arbejdskraf (L_1):*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{2t}}{\partial L_1} &= (1-\alpha)(1-\eta) \left(1 - \alpha - \frac{\sigma-1}{\sigma} \right) K_t^{\alpha} \tilde{L}^{-\alpha-\frac{\sigma-1}{\sigma}} L_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \\
&\quad \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(\eta L_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\eta) L_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \frac{\sigma-1}{\sigma} \eta L_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{2t}}{\partial L_1} &= (1-\alpha)(1-\eta)\eta\left(1-\alpha-\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)K_t^{\alpha}\tilde{L}^{-\alpha-\frac{\sigma-1}{\sigma}}L_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \\
&\quad \left(\eta L_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+(1-\eta)L_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1}\eta L_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1},
\end{aligned}$$

her kan det ses at $\frac{\partial w_{2t}}{\partial L_1}>0$ *hvis og kun hvis*:

$$\begin{aligned}
1-\alpha-\frac{\sigma-1}{\sigma} &> 0 \Leftrightarrow \\
1-\alpha &> \frac{\sigma-1}{\sigma},
\end{aligned}$$

dvs. i grænsetilfældet hvor $\sigma=\infty$ *(de typer arbejdskraft er perfekte substitutter) er betingelsen ikke opfyldt, hvilket svarer til analysen i 1.2 (del 1) og reallønnen falder pga. kapital pr. arbejder falder. I det andet grænsetilfælde hvor* $\sigma\to 0$ *(de typer arbejdskraft er perfekte komplementer) er betingelsen opfyldt.*

Diskussion: Konklusionen fra dette delspørgsmål er således, at hvis de to typer arbejdskraft komplementere hinanden tilstrækkeligt ($\frac{1}{\sigma}>\alpha$*), så kan en stigning arbejdskraftstyrken (via* L_1*) faktisk på kort medføre en reallønsfremgang for gruppen* L_2 *og man kan sige, at økonomisk velstand stiger for dem. På den anden side, så vil* w_{1t} *være negativt påvirket og* L_1 *vil derfor opleve et fald i økonomisk velstand. Kapitalejerne vil uafhængigt af* σ *opleve en stigning i velstand, da reallejesatsen vil stige som følge af en stigning i fx* L_1*.*

Opgave 2: En alternativ Solowmodel med human kapital

Ligningerne (3)-(7) udgør en lukket økonomi, der er beskrevet ved en model med fysisk kapital og human kapital:

$$Y_t = K_t^{\alpha} \left(A_t H_t\right)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

$$K_{t+1} = s_K Y_t + (1-\delta) K_t, \; 0 < s_K < 1, \; K_0 \text{ givet}, \tag{4}$$

$$h = \exp(\psi u), \, \psi > 0 \text{ og } u \geq 0 \tag{5}$$

$$A_{t+1} = (1+g) A_t, \, A_0 \text{ givet}, \tag{6}$$

$$L_{t+1} = (1+n) L_t, \; L_0 \text{ givet}. \tag{7}$$

Ligning (3) angiver en Cobb-Douglas produktionsfunktion, der beskriver den samlede produktion, Y_t, som funktion af fysisk kapital, K_t, og human kapital, $H_t \equiv hL_t$. Ligning (4) beskriver, hvorledes fysisk kapital udvikler sig over tid, hvor s_K er opsparingsraten og δ er nedslidningsraten. Ligning (5) angiver human kapital pr. arbejder, h_t, som en funktion af antal års uddannelse, u.[1] Ligningerne (6) and (7) beskriver henholdsvist den teknologiske udvikling og hvordan arbejdsstyrken vokser. Det antages at den repræsentative virksomhed maksimerer profitten og at der eksisterer faktormarkeder for fysisk kapital og arbejdskraft, men ikke noget særskilt marked for human kapital. Faktorpriserne er benævnt ved reallejesatsen, r_t, og reallønnen, w_t. Der anvendes definitionerne:

$$k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}, \, \tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}, \, y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} \text{ og } \tilde{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t}. \tag{8}$$

[1] Bemærk, at exp() er den naturlige eksponentialfunktion.

2.1

Opstil den repræsentatives virksomheds profitmaksimeringsproblem, udled reallejesatsen og reallønnen.

Svar:

Virksomheds profitmaksimeringsproblem:

$$\max_{K,L} \pi = K_t^{\alpha} \left(A_t H_t\right)^{1-\alpha} - r_t K_t - w_t L_t.$$

Reallejesatsen og reallønnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial K_t} &= \alpha K_t^{\alpha-1} \left(A_t H_t\right)^{1-\alpha} - r_t = 0 \\
r_t &= \alpha \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1} h^{1-\alpha} = \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} h^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial L_t} &= (1-\alpha) K_t^{\alpha} \left(A_t H_t\right)^{-\alpha} A_t h - w_t = 0 \\
w_t &= (1-\alpha) \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} (h)^{-\alpha} A_t h = (1-\alpha) \tilde{k}_t^{\alpha} h^{1-\alpha} A_t
\end{aligned}$$

2.2

Vis at modellen indebærer følgende transitionsligning for fysisk kapital pr. effektiv arbejder:

$$\tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} h^{1-\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right). \tag{9}$$

Svar: *Start med ligning (4) og divider begge sider med $A_{t+1}L_{t+1}$:*

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = s_K \frac{Y_t}{A_{t+1}L_{t+1}} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_{t+1}L_{t+1}},$$

brug nu ligningerne (6) og (7) og definitionerne på kapital pr. effektiv arbejder og BNP pr.

effektiv arbejder:

$$\begin{aligned}\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} &= s_K\frac{Y_t}{(1+g)A_t(1+n)L_t}+(1-\delta)\frac{K_t}{(1+g)A_t(1+n)L_t} \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_{t+1} &= \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left(s_K\tilde{y}_t+(1-\delta)\tilde{k}_t\right),\end{aligned}$$

brug tilsidst at $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}h^{1-\alpha}$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}h^{1-\alpha}+(1-\delta)\tilde{k}_t\right).$$

2.3

Vis, og forklar hvorfor, at $\tilde{k}_t$ og $\tilde{y}_t$ konvergerer mod en steady state (dvs. $\tilde{k}^*$ og $\tilde{y}^*$). Vis dernæst at i steady state udvikler den naturlige logaritme til BNP pr. arbejder sig som:

$$\ln y_t^* \approx gt + \ln A_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\ln s_K - \ln(n+g+\delta+ng)\right]+\psi u. \tag{10}$$

Svar: *For at vise konvergens mod steady state bruges transitionsligningen givet ved (9) i en funktionsanalyse: I fasediagrammet for kapital pr. effektiv arbejder ses følgende:*

1. *Transitionskurven går igennem (0,0).*
2. *Den er positiv hældende for alle* $k_t > 0$*:*

$$\frac{\partial\tilde{k}_{t+1}}{\partial\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left(\alpha s_K\tilde{k}_t^{\alpha-1}h^{1-\alpha}+1-\delta\right) > 0$$

3. *I grænserne har vi:*

$$\lim_{k\to 0}\frac{\partial\tilde{k}_{t+1}}{\partial\tilde{k}_t} = \infty$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial\tilde{k}_{t+1}}{\partial\tilde{k}_t} = \frac{(1-\delta)}{(1+g)(1+n)}$$

hvilket betyder, at vi har en global stabil steady state (=konvergens uanset k_0'*s værdi),* *hvis*

$$\begin{aligned}
\frac{(1-\delta)}{(1+g)(1+n)} &< 1 \Leftrightarrow \\
(1-\delta) &< (1+g)(1+n) \Leftrightarrow \\
\delta + n + g + gn &> 0,
\end{aligned}$$

eftersom transitionskurven går igennem (0.0), er konkav og skærer 45-graderslinjen oppe fra. Herefter vil det være oplagt, hvis den studerende tegne fasediagrammet og viser grafisk dynamikken mod steady state via trappeiteration.

Intuitionen bag konvergens resultatet er (meget kort fortalt) aftagende marginalprodukt på kapital og konstant nedslidning/udtydning.

Nu findes steady state vækststien for BNP pr. arbejder. Solowligningen er givet ved:

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t &= \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} h^{1-\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t - (1+n+g+gn)\,\tilde{k}_t\right) \Leftrightarrow \\
\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t &= \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} h^{1-\alpha} - (\delta+n+g+gn)\,\tilde{k}_t\right)
\end{aligned}$$

steady-state for kapital pr. arbejder kan derfor beregnes som:

$$\begin{aligned}
s_K \tilde{k}^{\alpha} h^{1-\alpha} &= (\delta+n+g+gn)\,\tilde{k} \Leftrightarrow \\
\frac{s_K}{\delta+n+g+gn} h^{1-\alpha} &= \tilde{k}^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\
\tilde{k}^* &= \left(\frac{s_K}{\delta+n+g+gn}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} h,
\end{aligned}$$

denne værdi indsættes i produktionsfunktionen:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}^* &= \left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha} h^{1-\alpha} = \left(\left(\frac{s_K}{\delta+n+g+gn}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} h\right)^{\alpha} h^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\
\tilde{y}^* &= \left(\frac{s_K}{\delta+n+g+gn}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h
\end{aligned}$$

nu benyttes det at

$$y_t^* = A_t \tilde{y}^* = A_t \left(\frac{s_K}{\delta + n + g + gn} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h,$$

fra ligning (6) ved vi at $A_t = (1+g)^t A_0$*, hvilket indsættes:*

$$y_t^* = (1+g)^t A_0 \left(\frac{s_K}{\delta + n + g + gn} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h,$$

herefter tages ln til begge sider:

$$\ln y_t^* = t \ln(1+g) + \ln A_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\ln s_K - \ln(n + g + \delta + ng) \right] + \ln h,$$

benyt nu fra ligning (5) at $\ln h = \psi u$ *og* $\ln(1+g) \approx g$ *for lille* g:

$$\ln y_t^* \approx gt + \ln A_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\ln s_K - \ln(n + g + \delta + ng) \right] + \psi u.$$

2.4

Ved linearisering af transitionsligningen (9) omkring steady state kan det vises, at udviklingen i BNP pr. effektiv arbejder kan skrives som:

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \left(\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t \right), \tag{11}$$

hvor $\lambda \approx (1-\alpha)(n+g+\delta)$. Giv en intuitiv forklaring på sammenhængen mellem modellens parametre og konvergenshastigheden. Vha. ligning (11) find BNP pr. arbejder i tidspunkt $t = T$ (dvs. y_T) for $\tilde{y}_0 > 0$.

Svar:

Konvergenshastigheden er givet ved λ*. Det ses, at* $\alpha \uparrow$ *medfører en lavere konvergenshastighed, hvilket skyldes 'mindre' aftagende marginalprodukt til kapital. I grænsetilfældet* $\alpha \to 1$ *er* $\lambda = 0$*, eftersom marginalproduktet vil være konstant og ekstra bidraget fra opsparing som følge af mere kapital vil ikke blive mindre som kapital stiger. Parametrene* n, g, δ *trækker* *i den anden retning, da de angiver graden af udtynding/nedslidning som kapital stiger. Det bemærkes i øvrigt, at afkastet på human kapital (ψ) og årsuddannelse (u) ikke har indflydelse på konvergenshastigheden.*

2.5

Med de sædvanlige realistiske parametre værdier forudsiger teorien altså en konvergenshastighed på 5%. Empirisk estimering of konvergensligningen for modellen tyder på $\hat{\lambda} = 0.008$ og 95%-KI $= [0.004; 0.014]$. Hvorfor forbedrer denne alternative human-kapital model *ikke* nævneværdigt sammenhængen mellem den teoretisk og empiriske konvergenshastighed ift. den generelle Solow-model fra pensums kapitel 5? (hint: relatér svaret til human-kapital modellen fra pensums kapitel 6)

Svar: *Den primære grund til, at human-kapital modellen fra pensums kapitel 6 forbedrer sammenhængen ml. teoretisk og empirisk konvergenshastighed er, at den teoretiske konvergenshastighed reduceres som konsekvens af, at human kapital akkumuleres gradvist i kapitel 6 (i modsætning til indeværende model, hvor human-kapital niveauet er konstant givet ved lignining (5)).*

I delspørgsmålene 2.6-2.7 erstattes ligning (5) med:

$$H_{t+1} = s_H Y_t, \ 0 < s_H < 1, \ H_0 \text{ givet}, \tag{12}$$

hvor s_H er opsparingsraten i human kapital. Yderligere antages det at $\delta = 0$ og $g = 0$.

2.6

Vis at denne model indbærer følgende *nullclines*:

$$\begin{aligned} h_t &= \frac{1}{A_0}\left(\frac{1+n}{s_K}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} k_t, \\ h_t &= A_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{s_H}{1+n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} k_t. \end{aligned} \tag{13}$$

Ved brug af relevante diagrammer skitsér hvordan fysisk kapital og human kapital udvikler sig over tid for $k_0, h_0 > 0$.

Svar:

I den modificerede model udvikler fysisk kapital og human kapital sig som følger:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= s_K Y_t \\ H_{t+1} &= s_H Y_t, \end{aligned}$$

disse kan omskrives til:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= s_K Y_t \Leftrightarrow \\ k_{t+1} &= \frac{1}{1+n} s_K k_t^{\alpha} \left(A_0 h_t\right)^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\ k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+n} s_K k_t^{\alpha} \left(A_0 h_t\right)^{1-\alpha} - k_t \end{aligned} \tag{14}$$

og

$$\begin{aligned} H_{t+1} &= s_H Y_t \\ h_{t+1} - h_t &= \frac{1}{1+n} s_H k_t^{\alpha} \left(A_0 h_t\right)^{1-\alpha} - h_t, \end{aligned} \tag{15}$$

de såkaldte nullclines findes ved at sætte venstresiderne i (14) og (15) lig med nul og løse for h_t*:*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1+n} s_K k_t^{1-\alpha} \left(A_0 h_t\right)^{1-\alpha} - k_t \Leftrightarrow \\ k_t &= \frac{1}{1+n} s_K k_t^{\alpha} \left(A_0 h_t\right)^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\ h_t &= \frac{1}{A_0} \left(\frac{1+n}{s_K}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} k_t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{1+n} s_H k_t^{\alpha} \left(A_0 h_t\right)^{1-\alpha} - h_t \Leftrightarrow \\
h_t &= \frac{1}{1+n} s_H k_t^{\alpha} \left(A_0 h_t\right)^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\
h_t &= A_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{s_H}{1+n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} k_t
\end{aligned}
$$

Det skal herefter vises i et fasediagram-(h_t, k_t), at både fysisk kapital og human kapital vil stige over tid (dvs. ingen konvergens).

2.7

Vis først at fysisk-human kapital forholdet til alle tidspunkter er konstant lig med $\frac{s_K}{S_H}$. Vis dernæst at udviklingen i BNP pr. arbejder kan skrives som:

$$\ln y_t = \ln y_0 + \left[\alpha \ln s_K + (1-\alpha) \ln s_H + (1-\alpha) \ln A_0 - \ln(1+n)\right] t.$$

Udviser modellen balanceret vækst? Hvorfor/hvorfor ikke. Med vægt på intuition skal du tilsidst forklare, hvorfor vedvarende økonomisk vækst er muligt på trods af $g = 0$.

Svar:

Fysisk-human kapital forholdet findes ved (14) og (15):

$$\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} = \frac{\frac{1}{1+n} s_K k_t^\alpha \left(A_0 h_t\right)^{1-\alpha}}{\frac{1}{1+n} s_H k_t^\alpha \left(A_0 h_t\right)^{1-\alpha}} = \frac{s_K}{s_H},$$

dvs. til alle tidspunkter er forholdet konstant, hvilket må betyder, at fysisk kapital og human kapital vokser/falder med samme rate.

Nu findes væksten i fx human kapital. Fra ligninig (15) har vi:

$$\begin{aligned}
h_{t+1} &= \frac{s_H}{1+n} k_t^\alpha \left(A_0 h_t\right)^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\
\frac{h_{t+1}}{h_t} &= \frac{s_H}{1+n} k_t^\alpha A_0^{1-\alpha} h_t^{-\alpha} \Leftrightarrow \\
\frac{h_{t+1}}{h_t} &= \frac{s_H}{1+n} \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^\alpha A_0^{1-\alpha} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

indsæt nu at $\frac{k_t}{h_t} = \frac{s_K}{s_H}$:

$$\begin{aligned}
\frac{h_{t+1}}{h_t} &= \frac{s_H}{1+n} \left(\frac{s_K}{s_H}\right)^\alpha A_0^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\
\frac{h_{t+1} - h_t}{h_t} &= \frac{1}{1+n} s_K^\alpha s_H^{1-\alpha} A_0^{1-\alpha} - 1.
\end{aligned}$$

Fra pr. arbejder produktionsfunktionen ved vi:

$$g_t^y = \alpha g_t^k + (1-\alpha) g_t^h,$$

da fysisk-human kapital forholdet altid er konstant, må det gælde at $g_t^k = g_t^h \Rightarrow$

$$g_t^y = g_t^h,$$

dvs

$$y_{t+1} = \left(1 + g_t^h\right) y_t,$$

denne 1.ordens differens ligning har følgende løsning:

$$\begin{aligned} y_t &= \left(\frac{1}{1+n} s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha} A_0^{1-\alpha}\right)^t y_0 \Leftrightarrow \\ \ln y_t &= \ln y_0 + \left[\alpha \ln s_K + (1-\alpha) \ln s_H + (1-\alpha) \ln A_0 + \ln(1+n)\right] t. \end{aligned}$$

Denne model udviser balanceret vækst, da 1) pr. arbejder variablene i økonomien vokser med denne samme konstante rate, 2) lønindkomstandelen er konstant, og 3) reallejesatsen er konstant.

Den fundamentale grund til, at vedvarende er mulig i denne model er, at der er CRS til fysisk kapital pr. arbejder og human kapital pr. arbejder, hvilket vil sige at bidraget fra opsparing i de to faktorer ikke vil være aftagende pga. kryds og selvforstærkende effekter. Modellen i pensums kapitel 6 udviser derimod DRS til de to førnævnte faktorer. Man kunne fx - i et tanke eksperiment - antage $k_t = h_t$ *og* $s_K = s_H = s$*, der medfører, at transitionsligningen reduceres til:*

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)} s A_0 k_t,$$

hvilket er AK-modellen uden skalaeffekter. Dvs. den bagvedliggende intuitionen følger denne modeltype.