Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2017 V-1B ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 10. januar 2017

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & s \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi udregner determinanten $D(s)$ til matricen $A(s)$ og får, at den er $D(s) = 2 - 2s$. Så er $A(s)$ regulær, når og kun når $s \neq 1$.

(2) Vis, at matricen $A(s)$ er indefinit for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. De tre ledende hovedunderdeterminanter er $D_1 = s, D_2 = -1$ og $D_3 = 2(1 - s)$. Da $D_2 = -1$, ser vi, at matricen $A(s)$ er indefinit for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

(3) Bestem egenværdierne for matricen $A(0)$. (Her er $s = 0$.)

Løsning. Idet

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

får vi, at det karakteristiske polynomium er

$$P(t) = \det(A(0) - tE) = -t^3 + 3t + 2,$$

og vi ser umiddelbart, at $t = -1$ er en karakteristisk rod. Ved polynomiers division opnår vi, at

$$P(t) = (t+1)(-t^2 + t + 2),$$

hvoraf vi finder, at de karakteristiske rødder – og dermed egenværdierne for $A(0)$ – er $t_1 = -1$, der har rodmultipliciteten 2, og $t_2 = 2$, som er en simpel rod.

(4) Bestem egenrummene for matricen $A(0)$.

Løsning. Vi finder, at egenrummene er

$$V(-1) = N(A(0) + E) = \operatorname{span}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$
$$V(2) = N(A(0) - 2E) = \operatorname{span}\{(1, 1, 1)\}.$$

(5) Vis, at vektorerne $v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ og $v_3 = (1, 1, 1)$ er egenvektorer for matricen $A(0)$, og angiv de tilhørende egenværdier.

Løsning. Ved udregning ser vi, at $A(0)v_1 = -v_1, A(0)v_2 = -v_2$ og $A(0)v_3 = 2v_3$. Altså er v_1 og v_2 egenvektorer for matricen $A(0)$ med egenværdien -1, og v_3 er egenvektor for $A(0)$ med egenværdien 2. Desuden bemærker vi, at vektorerne v_1, v_2 og v_3 er parvis ortogonale. Normeres de, fås et ortonormalt vektorsæt (q_1, q_2, q_3) bestående af egenvektorer for matricen $A(0)$. Lad Q være den matrix, der har sættet (q_1, q_2, q_3) som sine søjler.

(6) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^{-1} A(0) Q.$$

Løsning. På baggrund af svaret i det ovenstående finder vi, at

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + xy + x + y^2 + y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser straks, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y + 1 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y + 1.$$

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Sættes begge de partielle afledede lig med 0, får vi, at funktionen f har det ene stationære punkt $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Vis dernæst, at f er strengt konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

Løsning. Man får, at

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser umiddelbart, at denne matrix er positiv definit, så funktionen f er strengt konveks overalt på $\mathbf{R}^2$. Det stationære punkt er derfor et globalt minimumspunkt for f.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Idet $f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$, og idet $f(x,0) \to \infty$ for $x \to \infty$, er værdimængden $R(f) = \left[-\frac{1}{3}, \infty\right[$.

Vi betragter nu funktionerne $\phi, \psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskrifterne

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : \phi(x,y) = \sqrt{f(x,y) + 1} \wedge \psi(x,y) = \sqrt[3]{f(x,y)}.$$

(5) Vis, at funktionerne ϕ og ψ er kvasikonvekse.

Løsning. Klart, da funktionerne $t \to \sqrt{t}$ og $t \to \sqrt[3]{t}$ er voksende på henholdsvis $[0, \infty[$ og $\mathbf{R}$.

For ethvert $v > 0$ betragter vi den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq v \,\wedge\, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(6) Udregn integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x, y)\, d(x, y).$$

Løsning. Vi får, at

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x, y)\, d(x, y) = \int_0^v \Big(\int_0^1 \big(x^2 + xy + x + y^2 + y\big)\, dy\Big)\, dx =$$

$$\int_0^v \Big[x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 + xy + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2\Big]_0^1 dx = \int_0^v \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{6}\right) dx =$$

$$\Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{6}x\Big]_0^v = \frac{1}{3}v^3 + \frac{3}{4}v^2 + \frac{5}{6}v.$$

(7) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \frac{I(v)}{\sin\left(\frac{v}{6}\right)}.$$

Løsning. Ved at benytte L'Hôpitals regel får vi, at

$$\lim_{v \to 0+} \frac{I(v)}{\sin\left(\frac{v}{6}\right)} = \lim_{v \to 0+} \left(\frac{v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{5}{6}}{\frac{1}{6}\cos\left(\frac{v}{6}\right)} \right) = 5.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1 + t^2}x^4.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser straks, at den konstante funktion $x(t) = 0$ er den eneste konstante løsning til differentialligningen. Den har definitionsmængden $D(x) = \mathbf{R}$.

Hvis $x \neq 0$, får vi, at

$$x^{-4}dx = \frac{2t}{1+t^2}dt \Leftrightarrow x^{-3} = -3\ln(1+t^2) + C,$$

hvor $C \in \mathbf{R}$. Formelt set finder vi nu, at

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{C - 3\ln(1+t^2)}}.$$

Endvidere ser vi følgende:

Hvis $C < 0$, er $C - 3\ln(1+t^2) < 0$ for ethvert $t \in \mathbf{R}$. Så er der netop en maksimal løsning med definitionsmængden $D(x) = \mathbf{R}$.

Hvis $C = 0$, er $3\ln(1+t^2) = 0$, netop når $t = 0$. Der er da to maksimale løsninger med definitionsmængderne $D(x) = \mathbf{R}_-$ og $D(x) = \mathbf{R}_+$.

Hvis $C > 0$, gælder det, at

$$C - 3\ln(1+t^2) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{e^{\frac{C}{3}} - 1},$$

og dermed er der tre maksimale løsninger med definitionsmængderne $D(x) = \left]-\infty, -\sqrt{e^{\frac{C}{3}} - 1}\right[$, $D(x) = \left]-\sqrt{e^{\frac{C}{3}} - 1}, \sqrt{e^{\frac{C}{3}} - 1}\right[$,
og $D(x) = \left]\sqrt{e^{\frac{C}{3}} - 1}, \infty\right[$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 1$ er opfyldt.

Løsning. Hvis $\tilde{x}(0) = 1$, ser vi straks, at $C = 1$. Derfor får vi, at

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{1 - 3\ln(1+t^2)}}, \text{ hvor } D(\tilde{x}) = \left]-\sqrt{e^{\frac{1}{3}} - 1}, \sqrt{e^{\frac{1}{3}} - 1}\right[.$$

Opgave 4. Betragt den hyperplan H_0 i vektorrummet $\mathbf{R}^4$, som er givet ved ligningen

$$H_0 : \; x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0,$$

idet $\mathbf{R}^4$ er forsynet med det sædvanlige indre produkt (prikproduktet), og mængden

$$U = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_2 = x_1\}.$$

(1) Begrund, at hyperplanen H_0 er et underrum af $\mathbf{R}^4$, og bestem tre vektorer v_1, v_2 og v_3, så

$$H_0 = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

Løsning. Idet hyperplanen H_0 går gennem nulvektoren $\underline{0}$, ved vi, at den er et underrum af $\mathbf{R}^4$. Desuden ser vi, at

$$x_1 = -2x_2 + 5x_3 - x_4 \Leftrightarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(-2, 1, 0, 0) + x_3(5, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1),$$

hvoraf det fremgår, at

$$H_0 = \operatorname{span}\{(-2, 1, 0, 0), (5, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}.$$

(2) Vis, at mængden U er et underrum af $\mathbf{R}^4$.

Løsning. Vi ser, at

$$U = \operatorname{span}\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

hvoraf det fremgår, at mængden U er et underrum af $\mathbf{R}^4$.

(3) Bestem fællesmængden $V = H_0 \cap U$, og godtgør, at V er et underrum af $\mathbf{R}^4$.

Løsning. For at bestemme fællesmængden $V = H_0 \cap U$, må vi løse ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Dette ligningssystem har koefficientmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

som reduceres til echelonmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Da ser vi, at

$$V = \operatorname{span}\Big\{ \Big(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0\Big), \Big(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\Big) \Big\} =$$

$$\operatorname{span}\Big\{(5,5,3,0), (1,1,0,-3)\Big\}.$$

Heraf aflæser vi straks, at mængden V er et underrum af $\mathbf{R}^4$.