Reeksamen på Økonomistudiet sommer 2016

Makro I

2. årsprøve

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

25. august

Alle delspørgsmål, 1.1-1.3 og 2.1-2.7, skal besvares og vægtes ens ved bedømmelsen.

Denne rettevejledning består af 14 sider (inkl. forside).

Opgave 1:

1.1

Redegør for begrebet “balanceret vækst” og forklar kort, hvordan dette begreb bruges i opbygningen af de teoretiske vækstmodeller i pensum.

Svar:

1. BNP pr. arbejder, kapital pr. arbejder, forbrug pr. arbejder og reallønnen vokser alle med en og samme konstante vækstrate,

2. Arbejdsstyrken (eller befolkningen) vokser med en konstant rate, BNP, samlet forbrug og mængden af kapital vokser med fælles rate,

3. Reallejsesatsen og kapital-output forholdet er konstante.

Begrebet balanceret vækst bruges teoretisk som en slags konsistenstjek på vækstmodeller: De skal gerne udvise balanceret vækst på langt sigt for grundlæggende at være i overensstemmelse med empirien. Med andre ord, en "god" teoretiske vækstmodel skal helst udvise balanceret vækst.

1.2

I Solowmodellen med eksogen teknologisk vækst (svarende til kapitel 5) anvendes Harrod-neutrale teknologiske fremskridt. Redegør for to andre typer af teknologisk fremskridt og diskutér hvilken betydning antagelsen om formen af teknologisk fremskridt har for resultaterne i denne model.

Svar:

1) Hicks-neutrale teknologiske fremskridt antager følgende form (i en C-D produktionsfunktion):

$$Y_t = A_{Yt} K^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

2) Solow-neutrale teknologiske fremskridt antager følgende form (i en C-D produktionsfunktion):

$$Y_t = (A_{Kt} K_t)^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

3) Harrod-neutral teknologiske fremskridt antager følgende form (i en C-D produktionsfunktion):

$$Y_t = K_t^{\alpha} (A_{Lt} L_t)^{1-\alpha}$$

Da vi i kapitel 5 anvender CD produktionsfunktionen, der har en substitutionselasticitet på én, har antagelsen om formen af de teknologiske fremskridt ingen betydning for resultaterne. Fx kan man omskrive 1) til 3) ved at bruge følgende antagelse $A_{Yt} \equiv A_{Lt}^{1-\alpha}$:

$$\begin{aligned} Y_t &= A_{Lt}^{1-\alpha} K^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\ Y_t &= K_t^{\alpha} (A_{Lt} L_t)^{1-\alpha} . \end{aligned}$$

1.3

Betragt følgende CES produktionsfunktion:

$$Y = \left(\alpha \left[A_K K \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) \left[A_L L \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \; 0 < \alpha < 1, \, \sigma > 0 \text{ og } \sigma \neq 1, \qquad (1)$$

hvor Y er BNP, K er fysisk kapital og L er arbejdskraft. A_K og A_L er to forskellige typer af teknologi.

1) Find det relative marginal produkt mellem de to inputfaktorer (dvs. MP_K/MP_L).

Svar:

Det relative marginal produkt mellem de to faktorer er givet ved:

$$\frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{A_K}{A_L} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left(\frac{K}{L} \right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

2) Diskuter - med vægt på intuition - hvorledes en stigning i A_K/A_L påvirker det relative marginal produkt af fysisk kapital.

Svar:

Først kan man evt. bemærke substitutionseffekten: det relative marginal produkt for fysisk kapital er faldende i K/L

Effekten af en stigning i A_K/A_L:

- Hvis $\sigma > 1$, en stigning i A_K (relativt til A_L) øger det relative marginal produkt på kapital.
- Hvis $\sigma < 1$, en stigning i A_K reducerer det relative marginal produkt på kapital.
- hvis $\sigma \to 1$, svarende til CD tilfældet, en stigning i A_K påvirker ikke det relative marginal produkt.

Intuitionen for hvorfor, når $\sigma < 1$, at en stigning i A_K faktisk ender med at *reducere* det relative marginal produkt på fysisk kapital:

- Når kapital og arbejdskraft er komplementer i produktionen vil en stigning i kapitals produktivitet øge efterspørgslen efter arbejdskraft med mere end efterspørgslen efter kapital, hvilket skaber "overefterspørgsel" efter arbejdskraft.
- marginal produktet på arbejdskraft stiger mere end marginal produktet på kapital.

Opgave 2:

Ligningerne (2)-(7) udgør en lille åben økonomi, der er beskrevet ved en model med human kapital og endogen vidensudvikling:

$$Y_t = H_t^{\beta}(A_t L_Y)^{1-\beta},\ 0 < \beta < 1, \tag{2}$$

$$H_{t+1} = s_H Y_t + (1-\delta)H_t,\ 0 < s_H, \delta < 1,\ H_0 \text{ givet}, \tag{3}$$

$$A_{t+1} - A_t = \bar{A}_t^{\mu} A_t^{\phi} L_A^{\lambda},\ 0 < \lambda, \mu, \phi < 1 \text{ og } A_0 \text{ givet}, \tag{4}$$

$$\bar{A}_{t+1} = (1+g^W)\bar{A}_t,\ \bar{A}_0 \text{ givet}, \tag{5}$$

$$L_Y + L_A = L, \tag{6}$$

$$L_A = s_R L,\ 0 < s_R < 1. \tag{7}$$

Ligning (2) beskriver BNP som funktion af human kapital $H_t \equiv h_t L_Y$, hvor L_Y er produktionsarbejdere og A_t er vidensniveuet (eller produktivitet). Ligning (3) beskriver, hvorledes human kapital udvikler sig over tid, hvor s_H er opsparingsraten og δ er nedslidningsraten. Ligning (4) angiver udviklingen i viden, hvor $\bar{A}_t$ er udtryk for det globale vidensniveau og L_A er antal forskere. Parameteren μ kan fx fortolkes som graden, hvori landet er integreret i international vidensdeling. Ligningen (5) beskriver udviklingen i det globale vidensniveau. Den samlede befolkning i landet er L, hvor andelen s_R er forskere og $1-s_R$ er produktionsarbejdere; jvf. ligningerne (6) og (7).

Det antages at den repræsentative virksomhed maksimerer profitten og at der eksisterer et faktormarked for produktionsarbejdere, men ikke noget særskilt marked for human kapital. Yderligere antages det, at befolkningen (dvs. forskere og produkionsarbejdere) er fuldstændige immobile og at den offentlige sektor (indirekte) finansierer forskningssektoren. BNP pr. capita er givet ved $y_t \equiv Y_t/L$.

2.1

Find BNP pr. capita og vis, at dennes aproksimative vækstrate, til alle tidspunkter, kan skrives som:

$$g_t^y = (1-\beta)g_t^A + \beta g_t^h, \tag{8}$$

hvor g_t^A og g_h^h angiver aproksimative vækstrater i hhv. det nationale vidensiniveau og humankapital pr. produktionsarbejder.

Under antagelse, at der faktisk eksisterer en balanceret vækststi, hvor bl.a. y_t og h_t vokser med samme hastighed, hvad bliver da steady-state vækstraten i BNP pr. capita?

Svar: start med ligning (2)

$$Y_t = H_t^\beta (A_t L_Y)^{1-\beta},$$

divder nu begge sidder med L og brug $L_Y = (1-s_R)L$:

$$\begin{aligned}
\frac{Y_t}{L} &= \frac{H_t^\beta (A_t L_Y)^{1-\beta}}{L} \Leftrightarrow \\
\frac{Y_t}{L} &= \left(\frac{H_t}{L}\right)^\beta \left(\frac{A_t L_Y}{L}\right)^{1-\beta} \Leftrightarrow \\
\frac{Y_t}{L} &= \left(\frac{h_t L_y}{L}\right)^\beta \left(\frac{A_t L_Y}{L}\right)^{1-\beta} \Leftrightarrow \\
y_t &= h_t^\beta A_t^{1-\beta}(1-s_R) \\
\ln y_t &= (1-\beta)\ln A_t + \beta \ln h_t + \ln(1-s_R)
\end{aligned}$$

hvor næstsidste skridt bruger definitionen $y_t \equiv Y_t/L$. Pr. capita produktionsfunktion er naturligvis også gældende for $t+1$, derfor har vi:

$$\begin{aligned}
\ln y_{t+1} - \ln y_t &= [(1-\beta)\ln A_{t+1} + \beta \ln h_{t+1} + \ln(1-s_R)] \\
&\quad - [(1-\beta)\ln A_t + \beta \ln h_t + \ln(1-s_R)] \\
&\Leftrightarrow \\
\ln y_{t+1} - \ln y_t &= (1-\beta)[\ln A_{t+1} - \ln A_t] + \beta[\ln h_{t+1} - \ln h_t] \\
&\Leftrightarrow \\
g_t^y &= (1-\beta)g_t^A + \beta g_t^h
\end{aligned}$$

Hvis der eksisterer en balanceret vækststi må det gælde at $g^h = g^A = g^{A*}$ og væksten i BNP pr. capita bliver:

$$\begin{aligned} g^y &= (1-\beta)g^{A*} + \beta g^{A*} \\ g^y &= g^A. \end{aligned}$$

2.2

Vis at modellen indebærer følgende transitionsligning for vækstraten i det nationale vidensniveau:

$$g_{t+1}^A = \left(1+g^W\right)^\mu \left(1+g_t^A\right)^{\phi-1} g_t^A. \tag{9}$$

Svar: Udfra ligning (4) er væksten i det nationale vidensniveau givet ved:

$$g_t^A = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \bar{A}_t^\mu A_t^{\phi-1} L_A^\lambda.$$

Skriv denne ligning op for t + 1 og dividér med g_t^A:

$$\begin{aligned} \frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \frac{\bar{A}_{t+1}^\mu A_{t+1}^{\phi-1} L_A^\lambda}{\bar{A}_t^\mu A_t^{\phi-1} L_A^\lambda} = \left(\frac{\bar{A}_{t+1}}{\bar{A}_t}\right)^\mu \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \Leftrightarrow \\ \frac{g_{t+1}^A}{g_t^A} &= \left(\frac{\bar{A}_{t+1}}{\bar{A}_t}\right)^\mu \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \Leftrightarrow \\ g_{t+1}^A &= \left(1+g^W\right)^\mu \left(1+g_t^A\right)^{\phi-1} g_t^A, \end{aligned}$$

hvor sidste skridt bruger ligning (5).

2.4

For en vilkårlig initial værdi g_0^A, udled under hvilke betingelser, at g_t^A konvergerer mod steady state-værdien:

$$g^{A*} = \left(1+g^W\right)^{\frac{\mu}{1-\phi}} - 1. \tag{10}$$

Giv en kort intutiv forklaring på hvorfor $g^{A*} = 0$ såfremt $\mu = 0$.

Svar: hvis transitionskurven opfylder følgende findes der en ikke-triviel SS værdi (dvs. $g^{A*} > 0$):

1) Går igennem (0,0)

2) Positiv hældning for alle $g_t > 0$

3a) $\lim_{g^A \to 0} \frac{\partial g_{t+1}^A}{\partial g_t^A} > 1$ og 3b) $\lim_{g^A \to \infty} \frac{\partial g_{t+1}^A}{\partial g_t^A} < 1$

Dvs. steady-state er global stabil og vi vil altid konvergere mod denne. Vi vil nu tjekke 1-3: Ved at indsætte $g_t = 0$ i ligning (9) kan det nemt ses, at det første punkt er opfyldt. For punkt 2 findes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{t+1}^A}{\partial g_t^A} &= \left(1 + g^W\right)^{\mu} \left(\begin{array}{c} (\phi - 1)\left(1 + g_t^A\right)^{\phi - 2} g_t^A + \\ \left(1 + g_t^A\right)^{\phi - 1} \end{array} \right) \Rightarrow \\ \frac{\partial g_{t+1}^A}{\partial g_t^A} &= \left(1 + g^W\right)^{\mu} \left(1 + \phi g_t^A\right) \left(1 + g_t^A\right)^{\phi - 2} > 0, \end{aligned}$$

såfremt $g^W > -1$

I relation til punkt 3 findes:

$$\begin{aligned} \lim_{g \to 0} \frac{\partial g_{t+1}^A}{\partial g_t^A} &= \left(1 + g^W\right)^{\mu} > 1, \text{ hvis } g^W > 0 \text{ og } \mu > 0 \\ \lim_{g \to \infty} \frac{\partial g_{t+1}^A}{\partial g_t^A} &< 1, \text{ hvis } \phi < 1 \end{aligned}$$

Hvis følgende gælder: $0 < \phi < 1$, $\mu, g^W > 0$ eksisterer der altså én streng positiv SS værdi for vækstraten i det indenlandske vidensniveau. Alternativt til punkt 3b) kan man vise

$$\frac{g_{t+1}^A - g_t^A}{g_t^A} = \left(1 + g^W\right)^{\mu} \left(1 + g_t^A\right)^{\phi - 1} - 1,$$

og under betingelsen $g^W > 0$ bliver vækstraten i g_t^A kun negativ såfremt $\phi < 1$, når $g_t^A \to \infty$.

I tilfældet $\mu = 0$ - hvilket ellers kræves i punkt 2 ovenfor - vil $g^{A*} = 0$, vil modellen i givet fald svare til en semi-endogen model uden befolkningsvækst (og dermed ingen vækst i antallet forskere). Med andre ord pga. $\phi < 1$, er fishing-out effekten relativ stærk og økonomien skal have vækst i viden udefra for at modvirke dette.

2.5

Vis at modellen indebærer følgende transitionsligning for human kapital pr. effektiv produktionsarbejder:

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{1+g_t^A}\left(s_H \tilde{h}_t^{\beta} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right) \tag{11}$$

hvor $\tilde{h}_t \equiv h_t/A_t$. Hvorfor har andelen af befolkning, der arbejder i produktionen, $1 - s_R$, en negativ effekt på $\tilde{h}_{t+1}$?

Under antagelsen at g_t^A konvergerer mod sin steady-state værdi, beskriv vha. relevante diagrammer, hvordan økonomien udvikler sig over tid for givne initial værdier $g_0^A > 0$ og $\tilde{h}_0 > 0$.

Svar: start med ligning (3) og divider begge sidder med $A_{t+1}L_y$ og brug $A_{t+1} = (1+g_t^A)A_t$:

$$\begin{aligned}
\frac{H_{t+1}}{A_{t+1}L_y} &= \frac{s_H Y_t}{A_{t+1}L_y} + (1-\delta)\frac{H_t}{A_{t+1}L_y} \Leftrightarrow \\
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{(1+g_t^A)}\left(\frac{s_H Y_t}{A_t L_y} + (1-\delta)\frac{H_t}{A_t L_y}\right) \Leftrightarrow \\
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{(1+g_t^A)}\left(\frac{s_H Y_t}{A_t L_y} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right),
\end{aligned}$$

indsæt nu ligning (2) og $H_t \equiv h_t L_Y$:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{1+g_t^A}\left(\frac{s_H H_t^{\beta}(A_t L_Y)^{1-\beta}}{A_t L_y} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right) \\
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{1+g_t^A}\left(s_H\left(\frac{H_t}{A_t L_y}\right)^{\beta}\left(\frac{A_t L_Y}{A_t L_y}\right)^{1-\beta} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right) \Leftrightarrow \\
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{1+g_t^A}\left(s_H \tilde{h}_t^{\beta} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right)
\end{aligned}$$

[Fasediagram der viser, hvordan økonomien udvikler sig over tid her]

2.6

Vis at den balanceret vækststi for BNP pr. capita (dvs. i steady state) kan udledes til:

$$y_t^* = \left(\frac{s_H}{g^A + \delta}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} (1 - s_R) s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \left(g^{A*}\right)^{\frac{1}{\phi-1}} L^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \left(\bar{A}_0\right)^{\frac{\mu}{1-\phi}} \left(1 + g^{A*}\right)^t . \tag{12}$$

Diskutér hvorledes international integration og befolkningstørrelse påvirker udvilkingen i BNP pr. capita på den balanceret vækststi.

Svar:

Fra ligning (11) findes $\tilde{h}^*$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{t+1} - h_t &= \frac{1}{1+g^A}\left(s_H \tilde{h}_t^\beta - (g^A + \delta)\tilde{h}_t\right) \Rightarrow \\
\frac{s_H}{g^A + \delta} &= (\tilde{h}^*)^{1-\beta} \Leftrightarrow \\
\tilde{h}^* &= \left(\frac{s_H}{g^A + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}
\end{aligned}$$

Vækststien for BNP pr. capita i SS $y_t^* = \tilde{y}^* A_t$, hvor

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_t &= \frac{Y_t}{A_t L} = \frac{H_t^\beta (A_t L_Y)^{1-\beta}}{A_t L} = \left(\frac{H_t}{A_t L}\right)^\beta \left(\frac{A_t L_Y}{A_t L}\right)^{1-\beta} \Leftrightarrow \\
\tilde{y}_t &= \left(\frac{h_t L_y}{A_t L}\right)^\beta \left(\frac{A_t L_Y}{A_t L}\right)^{1-\beta} \Leftrightarrow \\
\tilde{y}_t &= \left(\tilde{h}_t (1 - s_R)\right)^\beta (1 - s_R)^{1-\beta} \Leftrightarrow \\
\tilde{y}_t &= \tilde{h}_t^\beta (1 - s_R) \Rightarrow \\
\tilde{y}_t^* &= \left(\frac{s_H}{g^A + \delta}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} (1 - s_R)
\end{aligned}$$

Fra ligning (4):

$$
\begin{aligned}
g^{A*} &= \frac{A_{t+1}-A_t}{A_t} = \bar{A}_t^{\mu} A_t^{\phi-1} L_A^{\lambda} \Leftrightarrow \\
A_t &= \left(\frac{1}{g^{A*}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \bar{A}_t^{\frac{\mu}{1-\phi}} L_A^{\frac{\lambda}{1-\phi}}
\end{aligned}
$$

Brug nu løsning til ligning (5)

$$
\begin{aligned}
A_t &= \left(\frac{1}{g^{A*}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \left(\left(1+g^W\right)^t \bar{A}_0\right)^{\frac{\mu}{1-\phi}} L_A^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \Leftrightarrow \\
A_t &= \left(\frac{1}{g^{A*}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} \left(1+g^{A*}\right)^t \bar{A}_0^{\frac{\mu}{1-\phi}} L_A^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \Leftrightarrow \\
A_t &= \left(g^{A*}\right)^{\frac{1}{\phi-1}} \left(1+g^{A*}\right)^t \bar{A}_0^{\frac{\mu}{1-\phi}} L_A^{\frac{\lambda}{1-\phi}}
\end{aligned}
$$

Indsætte dette udtryk og $\tilde{y}^*$ i $y_t^* = \tilde{y}^* A_t$:

$$
\begin{aligned}
y_t^* &= \tilde{y}^* \left(g^{A*}\right)^{\frac{1}{\phi-1}} \left(1+g^{A*}\right)^t \bar{A}_0^{\frac{\mu}{1-\phi}} L_A^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \\
y_t^* &= \left(\frac{s_H}{g^A+\delta}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} (1-s_R) \left(g^{A*}\right)^{\frac{1}{\phi-1}} \left(1+g^{A*}\right)^t \bar{A}_0^{\frac{\mu}{1-\phi}} (s_R L)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \Leftrightarrow \\
y_t^* &= \left(\frac{s_H}{g^A+\delta}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} (1-s_R) s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \left(g^{A*}\right)^{\frac{1}{\phi-1}} L^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \bar{A}_0^{\frac{\mu}{1-\phi}} \left(1+g^{A*}\right)^t
\end{aligned}
$$

Øget international integration kan tolkes som en stigning i parameteren μ. Det ses fra ligning (10) at g^{A*} er stigende i μ. Dette betyder at mere international integration øger vækstraten i SS, men samtidig har en negativ niveaueffekt via $\left(g^{A*}\right)^{\frac{1}{\phi-1}}$ og $\left(\frac{s_H}{g^{A*}+\delta}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}$ i udtrykket ovenfor, da $\tilde{y}^*$ reduceres som følge af øget udtynding pga den højere vækstrate. På den anden side er der også en positiv niveaueffekt via udtrykket $\bar{A}_0^{\frac{\mu}{1-\phi}}$, derfor er det ex-ante uklart, hvordan en stigning i μ påvirket niveauet af BNP pr. capita (dvs. skæringen).

Ændres L er der en positiv niveaueffekt (dvs. en ændring i skæringen på 2. aksen for vækststien). Denne effekt er ved en 1% stigning i L givet ved $\frac{\lambda}{1-\phi}\% > 0$. Dette er en skalaeffekt fra at have flere mennesker i forskningssektoren.

2.7

Diskutér betydningen af antagelsen om, at fysisk kapital ikke indgår eksplicit i produktionsfunktionen, givet ved ligning (2), ift. resultaterne i de forrige delspørgsmål.

Svar:

Dette er et relativ åben spørgsmål, hvortil der i princippet findes flere svarmuligheder afhængig af hvilke antagelser der anvendes. Her gengives en mulighed, der er "udregningsbaseret", men bemærk, at en *velbegrundet* verbal beskrivelse også kan være tilfredsstillende: Først bemærkes det, at ligningerne (4) og (5) er upåvirket af produktionssiden, hvilket betyder at udviklingen i g_t^A (og dermed g^{A*}) ikke er påvirket af antagelsen. Med andre ord, vækstraten (i viden) er på kort/lang sigt upåvirket af om vi antager, at der findes fysisk kapital i økonomien eller ej.

Da vi betragter en lille åben økonomi ville det være naturligt at antage fri fysisk-kapital mobilitet ala kapitel 4. Med fysisk kapital kan produktionsfunktionen fx skrives som:

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} (A_t L_Y)^{1-\beta-\alpha},\ 0 < \alpha + \beta < 1$$

Dette medfører følgende reallejesats:

$$r_t = \alpha K_t^{\alpha-1} H_t^{\beta} \left(A_t L_Y\right)^{1-\alpha-\beta} = \alpha \left(\frac{K_t}{A_t L_y}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{H_t}{A_t L_y}\right)^{\beta} = \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} \tilde{h}_t^{\beta},$$

hvor $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_y}$. Pga fri kapital mobilitet vil der være ækvalisering af reallejesatser, der "låser" kapital pr. effektiv produktionsarbejder fast ift. $\tilde{h}_t$:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r_t = \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} \tilde{h}_t^{\beta} \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_t &= \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Udviklingen i human kapital kan beskrives som:

$$\begin{aligned}
\frac{H_{t+1}}{A_{t+1}L_y} &= \frac{s_H K_t^{\alpha} H_t^{\beta}(A_t L_Y)^{1-\beta-\alpha}}{A_{t+1}L_y} + (1-\delta)\frac{H_t}{A_{t+1}L_y} \Leftrightarrow \\
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{1+g_t^A}\left[\frac{s_H K_t^{\alpha} H_t^{\beta}(A_t L_Y)^{1-\beta-\alpha}}{A_t L_y} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right] \Leftrightarrow \\
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{1+g_t^A}\left[s_H\left(\frac{K_t}{A_t L_y}\right)^{\alpha}\left(\frac{H_t}{A_t L_y}\right)^{\beta} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right] \Leftrightarrow \\
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{1+g_t^A}\left[s_H \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\beta} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right],
\end{aligned}$$

indsæt nu at $\tilde{k}_t = \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{1+g_t^A}\left[s_H\left(\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} h_t^{\beta} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right], \Leftrightarrow \\
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{1+g_t^A}\left[s_H\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{\beta\alpha}{1-\alpha}+\beta} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right] \Leftrightarrow \\
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{1+g_t^A}\left[s_H\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{\beta\alpha+\beta(1-\alpha)}{1-\alpha}} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right] \Leftrightarrow \\
\tilde{h}_{t+1} &= \frac{1}{1+g_t^A}\left[s_H\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right],
\end{aligned}$$

hvilket giver anledning til følgende SS værdi:

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{h}_{t+1} - h_t = \frac{1}{1+g^A}\left(s_H\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}} - (g^A+\delta)\tilde{h}_t\right) \Rightarrow \\
\tilde{h}^{1-\frac{\beta}{1-\alpha}} &= \frac{s_H\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{(g^A+\delta)} \Leftrightarrow \\
\tilde{h} &= \left(\frac{s_H}{g^A+\delta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}
\end{aligned}$$

dvs. der findes stadigvæk en SS for human kapital pr. effektiv produktionsarbejder. Kvantitativt har denne dog ændret sig med faktoren $\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$ og potensens har ændret sig fra $1/(1-\beta)$ til $(1-\alpha)/(1-\alpha-\beta)$.

Nu kan vi udlede den balanceret vækststi for BNP pr. capita:

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_t &= \frac{Y_t}{A_t L} = \left(\frac{K_t}{A_t L}\right)^{\alpha} \left(\frac{H_t}{A_t L}\right)^{\beta} \left(\frac{A_t L_Y}{A_t L}\right)^{1-\beta-\alpha} \Leftrightarrow \\
\tilde{y}_t &= \left(\frac{K_t}{A_t L}\right)^{\alpha} \left(\frac{H_t}{A_t L}\right)^{\beta} \left(\frac{A_t L_Y}{A_t L}\right)^{1-\beta-\alpha} \Leftrightarrow \\
\tilde{y}_t &= \left(\frac{(1-s_R)K_t}{A_t L_Y}\right)^{\alpha} \left(\frac{(1-s_R)H_t}{A_t L_Y}\right)^{\beta} \left((1-s_R)\frac{A_t L_Y}{A_t L_Y}\right)^{1-\beta-\alpha} \Leftrightarrow \\
\tilde{y}_t &= \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\beta} (1-s_R) \Rightarrow \\
\tilde{y}_t &= \left(\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} \tilde{h}_t^{\beta}(1-s_R) \Leftrightarrow \\
\tilde{y}_t &= \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{\beta\alpha+\beta(1-\alpha)}{1-\alpha}} (1-s_R) \Leftrightarrow \\
\tilde{y}_t &= \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tilde{h}_t^{\frac{\beta+\beta\alpha}{1-\alpha}} (1-s_R) \Rightarrow \\
\tilde{y}^* &= \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tilde{h}^{\frac{\beta+\beta\alpha}{1-\alpha}} (1-s_R) \\
\tilde{y}^* &= \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\left(\frac{s_H}{g^A+\delta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\right)^{\frac{\beta+\beta\alpha}{1-\alpha}} (1-s_R) \Leftrightarrow \\
\tilde{y}^* &= \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{(1-\alpha+\alpha\beta)\alpha}{(1-\alpha-\beta)(1-\alpha)}} \left(\frac{s_H}{g^A+\delta}\right)^{\frac{\beta+\beta\alpha}{1-\alpha-\beta}} (1-s_R),
\end{aligned}
$$

dette kan efterfølgende indsættes i $y_t^* = \tilde{y}^* \left(g^{A*}\right)^{\frac{1}{\phi-1}} \left(1+g^{A*}\right)^t \bar{A}_0^{\frac{\mu}{1-\phi}} L_A^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$. Vi ser at det eneste, der har ændret sig er skæringen. Dermed er konklusion ift. hvordan fx international integration og befolkningstørrelse påvirker udvilkingen i BNP pr. capita uændret.