Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2012

MATEMATIK A

1. årsprøve

Fredag den 10. august 2012

(2 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2012 S-1A rx

SKRIFTLIG EKSAMEN I MATEMATIK A

Fredag den 10. august 2012

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Elasticiteter. Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en differentiabel funktion.

(1) Antag, at $f(x_0) \neq 0$ for et bestemt tal $x_0 \in I$. Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f har elasticiteten $\mathrm{El} f(x_0)$ i punktet x_0.

(2) Vis, at hvis f og g er to differentiable funktioner på intervallet I, hvor elasticiteterne $\mathrm{El} f(x_0)$ og $\mathrm{El} g(x_0)$ eksisterer, så findes elasticiteterne $\mathrm{El}(fg)(x_0)$ og $\mathrm{El}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$, og man har, at

$$\mathrm{El}(fg)(x_0) = \mathrm{El} f(x_0) + \mathrm{El} g(x_0), \text{ og at } \mathrm{El}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \mathrm{El} f(x_0) - \mathrm{El} g(x_0).$$

(3) Bestem elasticiteten af følgende funktioner i et vilkårligt punkt $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = x^7 e^{2x} \text{ og } g(x) = \frac{e^{3x}}{1 + x^4}.$$

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften:

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 y - y + x.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

for denne funktion i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Afgør for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

(4) Begrund, at funktionen f har både en største og en mindste værdi på mængden

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \, \wedge \, 0 \leq y \leq 1\},$$

og find disse værdier.

Opgave 3. Betragt funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall \, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 y^3 + 6xy^4.$$

(1) Vis, at funktionen f er homogen og angiv homogenitetsgraden.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

for denne funktion i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(3) Godtgør, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)y = kf(x, y),$$

hvor k er homogenitetsgraden for funktionen f.