Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 S-1B rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 18. august 2015

Rettevejledning

Opgave 1. Vi betragter 2×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Bestem matricen $B = AA^T$, hvor A^T er den til A transponerede matrix. Godtgør dernæst, at B er positiv definit.

Løsning. Vi finder, at

$$B = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

De ledende hovedunderdeterminanter for matricen B er $D_1 = 9$ og $D_2 = \det B = 18$, hvoraf vi ser, at B er positiv definit.

(2) Bestem nulrummet

$$N(A) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = \underline{0}\}.$$

Løsning. Man aflæser, at

$$N(A) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = \underline{0}\} = \text{span}\{(-1, 0, 1)\}.$$

(3) Bestem nulrummet

$$N(A^T) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid A^T x = \underline{0}\}.$$

Løsning. Her får vi, at

$$N(A^T) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid A^T x = \underline{0}\} = \operatorname{span}\{(0,0)\} = \{\underline{0}\}.$$

(4) Bestem mængden

$$N(A)^\perp = \{y \in \mathbf{R}^3 \mid y \perp N(A)\} = \{y \in \mathbf{R}^3 \mid \forall\, x \in N(A) : x \cdot y = 0\},$$

og godtgør dernæst, at $N(A)^\perp$ er et underrum af $\mathbf{R}^3$.

Løsning. En vektor $x = (x_1, x_2, x_3) \in N(A)^\perp$, hvis og kun hvis skalarproduktet $x \cdot (-1, 0, 1) = 0$, hvilket er ensbetydende med, at $-x_1 + x_3 = 0$. Heraf ser vi så, at

$$N(A)^\perp = \operatorname{span}\{(1,0,1), (0,1,0)\},$$

hvoraf det tillige fremgår, at mængden $N(A)^\perp$ er et underrum af $\mathbf{R}^3$.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = \frac{x^2}{1+4y^2}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1+4y^2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{8x^2y}{(1+4y^2)^2}.$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, netop når $x = 0$. Men så er også $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. De stationære punkter er derfor $(x,y) = (0,y)$.

(3) Afgør, om de stationære punkter er maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkter for funktionen f.

Løsning. Vi bemærker, at $f(x, y) \geq 0$, og at $f(x, y) = 0$, hvis og kun hvis $x = 0$. De stationære punkter er derfor alle globale minimumspunkter for funktionen f.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Da $f(x, 0) = x^2 \to \infty$ for $x \to \pm\infty$, ser vi, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [0, \infty[$.

(5) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1, 1, f(1, 1)\big)$.

Løsning. Vi har, at $f(1, 1) = \frac{1}{5}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{2}{5}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -\frac{8}{25}$, hvoraf vi ser, at den pågældende tangentplan har ligningen

$$z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}(x - 1) - \frac{8}{25}(y - 1) = \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}y + \frac{3}{25}.$$

(6) Udregn dobbeltintegralet

$$I(v) = \int_0^v \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x, y)\, dy \right) dx$$

for et vilkårligt $v \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi finder, at

$$I(v) = \int_0^v \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_0^v x^2 \Big(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + (2y)^2}\, d(2y) \Big)\, dx =$$

$$\int_0^v x^2 \Big[\frac{1}{2} \mathrm{Arctan}(2y) \Big]_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{8} \Big[\frac{x^3}{3} \Big]_0^v = \frac{\pi v^3}{24}.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningerne

$$(\S) \quad \frac{dx}{dt} + 3t^2 x = 2te^{-t^3} \quad \text{og} \quad (\S\S) \quad \frac{dy}{dt} = e^{t^3} x.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen (§).

Løsning. Ved at benytte "panserformlen" får vi, at

$$x = Ae^{-t^3} + e^{-t^3} \int e^{t^3} e^{-t^3} 2t\,dt = Ae^{-t^3} + e^{-t^3} \int 2t\,dt = Ae^{-t^3} + t^2 e^{-t^3},$$

hvor $A \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen (§§).

Løsning. Vi finder, at

$$y = \int e^{t^3} x\,dt = \int (A + t^2)\,dt = \frac{1}{3}t^3 + At + B,$$

hvor $A, B \in \mathbf{R}$.

Opgave 4. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

og den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^4 + \ln x - \ln y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + \frac{1}{x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - \frac{1}{y}.$$

(2) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

Man finder, at funktionen f har Hessematricen

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 12y^2 + \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

(3) Bestem mængden

$$P = \{(x, y) \in D \mid f''(x, y) \text{ er positiv definit}\},$$

og godtgør, at P er konveks.

Løsning. Da $f''(x, y)$ er en diagonalmatrix, ser vi, at $f''(x, y)$ er positiv definit, hvis og kun hvis

$$2 - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{1}{2}},$$

så

$$P = \Big\{(x, y) \in D \mid x > \sqrt{\frac{1}{2}}\Big\} = \Big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > \sqrt{\frac{1}{2}} \wedge y > 0\Big\}.$$

Da mængden P åbenbart er fællesmængden af to åbne halvplaner, er P konveks.

(4) Definer funktionen $\phi : P \to \mathbf{R}$ ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in P : \phi(x, y) = \exp\Big(f(x, y)\Big).$$

Vis, at ϕ er kvasikonveks. Er ϕ konveks?

Løsning. Restriktionen af f til P er naturligvis strengt konveks, og da eksponentialfunktionen exp er voksende, er ϕ kvasikonveks. Da exp endda er en voksende, konveks funktion, er ϕ konveks.