Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 S-1B rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 23. august 2016

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} s^2 & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem dernæst de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi finder, at determinanten til $A(s)$ er

$$\det A(s) = s^3 - s^2 - s + 1.$$

Vi bemærker straks, at $s = 1$ er rod i $\det A(s)$, og ved polynomiers division opnår vi, at

$$\det A(s) = (s - 1)(s^2 - 1) = (s - 1)^2(s + 1).$$

Dette viser, at $\det A(s) = 0$, netop når $s = \pm 1$. Vi ser så, at matricen $A(s)$ er regulær for $s \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(2) Bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er positiv definit.

Løsning. Matricen $A(s)$ har de ledende hovedunderdeterminanter $D_1 = s^2, D_2 = s^3 - 1$ og $D_3 = s^3 - s^2 - s + 1$. Hvis disse alle skal være positive, må vi kræve, at $s > 1$. Altså er $A(s)$ positiv definit, netop når $s > 1$.

(3) Vis, at matricen $A(s)$ ikke er negativ definit for noget tal $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Da den ledende hovedunderdeterminant $D_1 = s^2 \geq 0$, er matricen $A(s)$ ikke negativ definit for nogen værdi af $s \in \mathbf{R}$.

(4) Opstil det karakteristiske polynomium for matricen $A(-1)$, og bestem de karakteristiske rødder.

Løsning. Vi finder, at det karakteristiske polynomium $P = P(t)$ for matricen

$$A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

er givet ved forskriften

$$P(t) = \det\Big(A(-1) - tE\Big) = -t^3 + t^2 + 4t = t(-t^2 + t + 4).$$

De karakteristiske rødder er derfor $t = 0$ og $t = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

(5) Bestem egenværdierne for matricen $A(-1)$, og godtgør, at denne matrix er indefinit.

Løsning. Egenværdierne for matricen $A(-1)$ er $\lambda_1 = 0, \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ og $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$. Og heraf fremgår det, at matricen er indefinit.

(6) Bestem nulrummet

$$N(A(-1)) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid A(-1)x = \underline{0}\}.$$

Løsning. Vi finder, at $N(A(-1)) = \text{span}\{(-1, 0, 1)\}$.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = 2x^3 + 24y - 6xy^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 6y^2 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 24 - 12xy.$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Sættes begge de partielle afledede lig med 0, får vi, at $y = \pm x$ og $xy = 2$. Dette giver, at $x^2 = 2$ eller $x^2 = -2$. Det sidste resultat kan ikke bruges, så $x = \pm\sqrt{2}$, og $y = x$. Vi får så, at der er de to stationære punkter $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -12y \\ -12y & -12x \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør, for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Idet

$$f''(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 12\sqrt{2} & -12\sqrt{2} \\ -12\sqrt{2} & -12\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

og

$$f''(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -12\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \\ 12\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ser vi, at de stationære punkter $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ begge er sadelpunkter for funktionen f.

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Da $f(x,0) = 2x^3 \to \pm\infty$ for $x \to \pm\infty$, har funktionen f værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

Betragt den kompakte mængde

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \,\wedge\, 0 \leq y \leq x\}.$$

(6) Bestem integralet

$$I = \int_T f(x,y)\, d(x,y).$$

Løsning. Vi finder, at

$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^x (2x^3 + 24y - 6xy^2)\, dy \Big)\, dx = \int_0^1 \Big[2x^3 y + 12y^2 - 2xy^3 \Big]_0^x dx =$$

$$\int_0^1 (2x^4 + 12x^2 - 2x^4)\, dx = \int_0^1 12x^2\, dx = \Big[4x^3 \Big]_0^1 = 4.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = x^3 e^t.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser indledningsvis, at løsningen $x = x(t) = 0$ er den eneste konstante løsning, og at denne løsning er defineret overalt på $\mathbf{R}$.

Hvis $x \neq 0$, får vi, at $x^{-3} dx = e^t dt$, og ved efterfølgende integration får vi så, at

$$-\frac{1}{2} x^{-2} = e^t + k \Leftrightarrow x^{-2} = -2e^t - 2k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R}.$$

Vi må imidlertid kræve, at $x^{-2} = -2e^t - 2k > 0$, så $e^t < -k$, hvilket betyder, at $k < 0$, og at $t < \ln(-k)$. Herefter finder vi, at

$$x = x(t) = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{-2e^t - 2k}} \right).$$

(2) Bestem værdimængden for enhver af de maksimale løsninger til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser umiddelbart, at den konstante løsning $x = 0$ har værdimængden $R(x) = \{0\}$, og at

$$x \to \pm \frac{1}{\sqrt{-2k}} \text{ for } t \to -\infty$$

og $x \to \pm\infty$ for $t \to \ln(-k)-$.

Dette viser, at værdimængden for $x = \frac{1}{\sqrt{-2e^t - 2k}}$ er $R(x) = \left]\frac{1}{\sqrt{-2k}}, \infty\right[$, og at værdimængden for $x = -\frac{1}{\sqrt{-2e^t - 2k}}$ er $R(x) = \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{-2k}}\right[$.

Opgave 4. Vi betragter ligningssystemerne

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4w = 1 \\ x + 3y - 2z + w = 3 \end{cases}$$

og

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4w = 1 \\ x + 3y - 2z + w = 3 \\ 2x + y + 5z - w = s^2 - 1 \end{cases}, \quad \text{hvor } s \in \mathbf{R}.$$

(1) Løs ligningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4w = 1 \\ x + 3y - 2z + w = 3 \end{cases}.$$

Løsning. Den udvidede koefficientmatrix til dette ligningssystem er

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

som omformes til echelonmatricen

$$F = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right),$$

og heraf aflæser vi, at

$$(x, y, z, w) = (-3 - s - 10t, 2 + s + 3t, s, t), \quad \text{hvor } s, t \in \mathbf{R}.$$

(2) Løs – for ethvert $s \in \mathbf{R}$ – ligningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4w = 1 \\ x + 3y - 2z + w = 3 \\ 2x + y + 5z - w = s^2 - 1 \end{cases}.$$

Løsning. Dette ligningssystem har den udvidede koefficientmatrix

$$T(s) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & s^2 - 1 \end{array}\right),$$

som omformes til echelonmatricen

$$F(s) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{58}{4} & -\frac{s^2+15}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{30}{4} & \frac{s^2+11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{18}{4} & \frac{s^2+3}{4} \end{array} \right).$$

Den fuldstændige løsning til dette lineære ligningssystem er derfor givet ved parameterfremstillingen

$$(x, y, z, w) = \left(-\frac{s^2 + 15 + 58p}{4}, \frac{s^2 + 11 + 30p}{4}, \frac{s^2 + 3 + 18p}{4}, p \right),$$

hvor $s, p \in \mathbf{R}$.

En hyperplan H i vektorrummet $\mathbf{R}^4$ har ligningen

$$x + 3y - 7z + 5w = 0.$$

(3) Godtgør, at hyperplanen H er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$, og bestem tre vektorer b, c og d, så

$$H = \text{span}\{b, c, d\}.$$

Løsning. Vi ser, at $\underline{0} \in H$, hvilket sikrer, at H er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$. Desuden finder vi, at

$$(x, y, z, w) = (-3y + 7z - 5w, y, z, w) =$$

$$y(-3, 1, 0, 0) + z(7, 0, 1, 0) + w(-5, 0, 0, 1),$$

hvilket viser, at

$$H = \text{span}\{(-3, 1, 0, 0), (7, 0, 1, 0), (-5, 0, 0, 1)\}.$$