Matematik A, 18. **februar** 2019: Rettevejledning

Opgave 1: Stamfunktioner og integraler

(a) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion.
Gør rede for definitionen af det ubestemte integral

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Løsning: [Se MII2, afsnit 13.1]
Det ubestemte integral er defineret som mængden af alle stamfunktioner til f. Da f er kontinuert, har den en stamfunktion F. Endvidere ved vi, at mængden af alle stamfunktioner til f består af funktionerne $F_c(x) = F(x) + c$, hvor $c \in \mathbb{R}$. Altså er det ubestemte integral givet ved

$$\int f(x)\,dx \,= F(x) + c,$$

hvor F er en stamfunktion til f og c er en arbitrær (reel) konstant.

(b) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, og lad x_0, y_0 være reelle tal.
Gør rede for, at der findes en stamfunktion $\tilde{F}$ til f, som opfylder betingelsen

$$\tilde{F}(x_0) = y_0\,.$$

Løsning: [Se MII2, afsnit 13.1]
f har en stamfunktion F, da den er kontinuert. For enhver konstant c gælder da, at funktionen $F_c(x) = F(x) + c$ også er en stamfunktion til f. Altså er funktionen

$$\tilde{F}(x) = F(x) + (y_0 - F(x_0))$$

en stamfunktion til f (vi har valgt $c = y_0 - F(x_0)$). Da

$$\tilde{F}(x_0) = F(x_0) + (y_0 - F(x_0)) = y_0$$

er den ønskede betingelse opfyldt.

(c) Lad $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$g(x) = 2x(x^2+1)^3 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Udregn det ubestemte integral

$$\int g(x)\,dx\,.$$

Bestem den stamfunktion $\tilde{G}$ til g, der opfylder betingelsen

$$\tilde{G}(1) = 10\,.$$

Løsning: Integration ved substitution giver (lad $u = x^2 + 1$)

$$\int g(x)\,dx = \int 2x(x^2+1)^3\,dx = \int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + c\,,$$

hvor c er en arbitrær konstant. Vi skal bestemme den stamfunktion, der antager værdien 10 i $x = 1$. Dette opnås ved at sætte $c = 6$:

$$\tilde{G}(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + 6\,.$$

Opgave 2

Betragt funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = e^{x+y} - e^x - 2e^y \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt (x,y).

Løsning: Ved partiel differentiation mht henholdsvis x og y fås

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y} - e^x = e^x(e^y - 1) \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+y} - 2e^y = (e^x - 2)e^y$$

(b) Vis, at $(\ln(2), 0)$ er et stationært punkt for f.

Løsning: Ved at indsætte $(x,y) = (\ln(2), 0)$ i udtrykkene for de partielle afledede fra spørgsmål (a) fås

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(\ln(2),0) &= e^{\ln(2)}(e^0 - 1) = 2(1-1) = 0 \quad \text{og} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(\ln(2),0) &= (e^{\ln(2)} - 2)e^0 = (2-2)1 = 0\,.
\end{aligned}$$

Altså er $(\ln(2), 0)$ er et stationært punkt for f.

(c) Bestem Hessematricen (andenordensmatricen) $H(x,y)$ for f i et vilkårligt punkt (x,y).

Afgør om $(\ln(2),0)$ er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et saddelpunkt. Begrund dit svar.

Løsning: Ved differentiation af de partielle afledede fra spørgsmål (a) mht henholdsvis x og y fås følgende Hessematrice:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} - e^x & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} - 2e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x(e^y - 1) & e^{x+y} \\ e^{x+y} & (e^x - 2)e^y \end{pmatrix} .$$

Ved at indsætte $(x,y) = (\ln(2),0)$ fås

$$H(\ln(2),0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Da $AC - B^2 = -4 < 0$ er $(\ln(2),0)$ et saddelpunkt (MII3, 3.2.2).

(d) Bestem værdimængden for f.

Løsning: Da $f(x,1) = e^x(e^1 - 1) - 2e^1$ ses, at f kan antage alle værdier i det åbne interval $(-2e,\infty)$. Da $f(x,-1) = e^x(e^{-1} - 1) - 2e^{-1}$ ses, at f kan antage alle værdier i $(-\infty, -2e^{-1})$. Altså kan f antage alle værdier i $(-2e,\infty) \cup (-\infty,-2e^{-1}) = \mathbb{R}$, så værdimængden er

$$R(f) = \mathbb{R}.$$

Opgave 3

Betragt funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = xe^x \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestem funktionerne f', f'' og f''' (de afledede funktioner af henholdsvis første, anden og tredje orden).

Løsning: Ved differentiation fås

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + xe^x , \\ f''(x) &= e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x , \\ f'''(x) &= 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x . \end{aligned}$$

(b) Bestem Taylorpolynomiet P_3 af tredje orden for f ud fra punktet $a = 0$.

Løsning: Ved anvendelse af definitionen af Taylorpolynomiet og de afledede fra spørgsmål (a) fås

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3\,.$$

(c) Brug dine resultater fra spørgsmål (a) til at opstille et kvalificeret gæt på et udtryk for $f^{(n)}$ (den afledede funktion af n'te orden, $n \in \mathbb{N}$).

Vis ved induktion, at dit udtryk gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

Løsning: Ud fra de afledede fra spørgsmål (a) gættes på

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsstarten ($n = 1$) følger umiddelbart af udtrykket for $f'(x)$ fra spørgsmål (a).
Induktionsskridt: Antag vores gæt gælder for et vilkårligt $n \in \mathbb{N}$. Vi skal da vise, at det også gælder for $n+1$, altså at $f^{(n+1)}(x) = (n+1)e^x + xe^x$. Dette gør vi ved at differentiere $f^{(n)}$:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = ne^x + e^x + xe^x = (n+1)e^x + xe^x\,.$$

Dermed er induktionsskridtet gennemført.