Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 V-1B ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Onsdag den 8. januar 2014

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ betragter vi den symmetriske 3×3 matrix

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 & v & 0 \\ v & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(u, v)$, og bestem de talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, så matricen $A(u, v)$ er regulær.

Løsning. Vi ser, at $\det\Big(A(u, v)\Big) = u^2 - v^2 - u^2 = -v^2$. Heraf får vi, at matricen $A(u, v)$ er regulær, når og kun når $v \neq 0$.

(2) Udregn de ledende hovedunderdeterminanter for matricen $A(u, v)$, og vis, at matricen $A(u, v)$ hverken er positiv definit eller negativ definit for noget talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. De ledende hovedunderdeterminanter er følgende: $D_1 = u^2, D_2 = u^2 - v^2$ og $D_3 = \det\Big(A(u, v)\Big) = -v^2$. Hvis matricen $A(u, v)$ skulle være positiv definit, skulle alle tre ledende hovedunderdeterminanter være positive, hvilket åbenbart er umuligt. Hvis matricen $A(u, v)$ skulle være negativ definit skulle D_1 være negativ, hvilket også er umuligt.

(3) Bestem 3×3 matricen

$$B = A(1, 1)^2 = \Big(A(1, 1)A(1, 1)\Big).$$

Løsning. Vi ser først, at

$$A(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Heraf får vi så, at

$$B = \big(A(1,1)\big)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4) Vis, at matricen B er positiv definit.

Løsning. Vi ser, at matricen B har de ledende hovedunderdeterninanter: $D(B)_1 = 2, D(B)_2 = 2$ og $D(B)_3 = \det(B) = 1$, hvilket viser, at B er positiv definit.

(5) Bestem nulrummet

$$N(B) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid Bx = \underline{0}\}$$

for matricen B.

Løsning. Da matricen B åbenbart er regulær, er nulrummet $N(B) = \{\underline{0}\}$.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = \sqrt{1+x^2} + y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Ud fra ovenstående resultat er det indlysende, at funktionen f kun har det ene stationære punkt $(0, 0)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Vis dernæst, at funktionen f er strengt konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi udregner, at funktionens Hessematrix er

$$H(x, y) = f''(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nu, at Hessematricen $H(x, y)$ er positiv definit for ethvert talpar $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og dette viser, at funktionen f er strengt konveks.

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for f.

Løsning. Det er klart, at det stationære punkt $(0, 0)$ er et globalt minimumspunkt for f, og at $f(0, 0) = 1$. Desuden ser vi, at

$$f(0, y) \to \infty \text{ for } y \to \pm\infty.$$

Heraf ser vi, at værdimængden er $R(f) = [1, \infty[$.

For ethvert $v \in \mathbf{R}$ betragter vi dobbeltintegralet

$$I(v) = \int_0^1 \Big(\int_0^v x f(x, y)\, dx \Big) dy.$$

(5) Udregn $I(v)$.

Løsning. Vi får, at

$$I(v) = \int_0^1 \Big(\int_0^v x f(x, y)\, dx \Big) dy = \int_0^1 \Big(\int_0^v \Big(x\sqrt{1+x^2} + xy^2 \Big)\, dx \Big)\, dy =$$

$$\int_0^1 \Big(\int_0^v \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\, d(1+x^2) + \int_0^v xy^2\, dx \Big)\, dy = \int_0^1 \Big[\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2y^2 \Big]_0^v dy =$$

$$\int_0^1 \Big(\frac{1}{3}(1+v^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}v^2y^2 - \frac{1}{3}\Big)\,dy = \Big[\frac{1}{3}(1+v^2)^{\frac{3}{2}}y + \frac{1}{6}v^2y^3 - \frac{1}{3}y\Big]_0^1 =$$
$$\frac{1}{3}(1+v^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}v^2 - \frac{1}{3}.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}\Big)x = \cos(t)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Idet

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}d(1+t^4) = \frac{1}{2}\sqrt{1+t^4} + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$, får vi, at

$$x = Ce^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}\int e^{\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}\cos(t)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}\,dt =$$
$$Ce^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}\int \cos(t)\,dt = Ce^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}\sin(t)\,dt =$$
$$\Big(C + \sin(t)\Big)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}, \text{ hvor } C \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = e^{-\frac{1}{2}}$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder straks, at $C = 1$, så

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = \Big(1 + \sin(t)\Big)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}}.$$

(3) Udregn differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0).$$

for en vilkårlig maksimal løsning $x = x(t)$ til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{dx}{dt}(0) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Opgave 4. I vektorrummet $\mathbf{R}^4$, som er forsynet med det sædvanlige indre produkt (prikproduktet), betragter vi hyperplanerne H_1 og H_2, som har ligningerne

$$H_1: \ \ x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0$$

og

$$H_2: \ \ 2x_1 + 14x_2 - 5x_3 - x_4 = 0.$$

(1) Godtgør, at hyperplanerne H_1 og H_2 begge er underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

Løsning. Hyperplanerne H_1 og H_2 er underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$, fordi $\underline{0} \in H_1$ og $\underline{0} \in H_2$.

(2) Bestem fællesmængden $U = H_1 \cap H_2$ af hyperplanerne H_1 og H_2, og godtgør, at mængden U er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^4$.

Løsning. Det homogene lineære ligningssystem

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 14x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

har koefficientmatricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 5 \\ 2 & 14 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

som omformes til echelonmatricen

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}.$$

Heraf fremgår det straks, at

$$U = \mathrm{span}\{(-7, 1, 0, 0), (28, 0, 11, 1)\},$$

og det ses da umiddelbart, at fællesmængden U er et underrum.