Skriftlig eksamen i Matematik B. Sommeren 2016

Torsdag den 9. juni 2016

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 S-1B ex

Skriftlig eksamen i Matematik B

Torsdag den 9. juni 2016

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter 3×3 matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Desuden betragter vi for ethvert $s \in \mathbf{R}$ 3×3 matricen

$$C(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & s \end{pmatrix}.$$

(1) Vis, at matricen A er positiv definit, og at matricen B er negativ definit.

(2) Udregn matricen AB, og godtgør, at denne matrix ikke er symmetrisk, men at den er regulær.

(3) For hvilke $s \in \mathbf{R}$ er matricen $C(s)$ regulær?

(4) For hvilke $s \in \mathbf{R}$ er matricen $C(s)$ positiv definit?

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy - x.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Afgør, for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

For ethvert $v \in \mathbf{R}_+$ betragter vi den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq v\}.$$

(6) Bestem integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x, y)\, d(x, y).$$

(7) Udregn grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \left(\frac{I(v)}{\sin\left(\frac{v}{8}\right)} \right).$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \left(\frac{5 \sin t}{2\sqrt{2 + \cos t}} \right) x = \frac{e^{6\sqrt{2+\cos t}} \sin t}{2\sqrt{2 + \cos t}}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 0$ er opfyldt.

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0)$$

for en vilkårlig maksimal løsning til differentialligningen $(*)$.

Opgave 4. For ethvert $n \in \mathbf{N}$ gælder det, at

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

og

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Disse formler kan vises ved induktion, **men** det kræves **ikke** her.

For ethvert $n \in \mathbf{N}$ betragter vi mængden

$$U = U(n) = \{1, 2, \ldots, n\},$$

og for ethvert $a > 0$ betragter vi funktionen $P : U \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, i \in U : P(i) = a \sum_{k=1}^{i} k = a\frac{i(i+1)}{2}.$$

(1) Bestem $a > 0$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion.

(2) Bestem – for den fundne værdi af $a > 0$ – sandsynligheden for hændelsen $A = \{1, 2, 3\}$, idet vi antager, at $n > 3$.