Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 V-1B rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Onsdag den 20. februar 2013

Rettevejledning

Opgave 1. Vi betragter den symmetriske 3×3 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen A, og begrund, at A ikke er regulær.

Løsning. Vi finder straks, at $\det A = 0$, thi anden og tredje række er ens, og dette godtgør, at matricen A ikke er regulær.

(2) Bestem egenværdierne for matricen A.

Løsning. Matricen A har det karakteristiske polynomium $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P(t) = \det\Big(A - tE\Big) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$(1-t)^2(2-t) + 1 + 1 - (1-t) - (1-t) - (2-t) = -t^3 + 4t^2 - 2t = t(-t^2 + 4t - 2).$$

Idet

$$-t^2 + 4t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{-2} \Leftrightarrow t = 2 - \sqrt{2} \vee t = 2 + \sqrt{2},$$

får vi, at de karakteristiske rødder (og dermed egenværdierne for A) er $t_1 = 0, t_2 = 2 - \sqrt{2}$ og $t_3 = 2 + \sqrt{2}$.

(3) Godtgør, at matricen A er positiv semidefinit.

Løsning. Egenværdierne er større end eller lig med 0.

(4) Vi betragter nu den kvadratiske form $K : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, hvis tilhørende symmetriske matrix netop er matricen A.

Bestem en forskrift for den kvadratiske form K.

Løsning. Vi finder straks, at

$$K(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(5) Vi betragter dernæst den kvadratiske form $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : L(x_1, x_2) = K(x_1, x_2, -2x_2).$$

Opskriv en forskrift for den kvadratiske form L.

Løsning. Vi får, at

$$L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2 = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2.$$

(6) Bestem den til den kvadratiske form L hørende symmetriske 2×2 matrix B, og afgør om L er positiv definit.

Løsning. Den til L hørende symmetriske 2×2 matrix er

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

og vi ser umiddelbart, at B har de ledende hovedunderdeterminanter $D_1 = 2$ og $D_2 = \det(B) = 1$. Dette viser, at B er positiv definit.

(7) Bestem værdimængden $R(L)$ for den kvadratiske form L.

Løsning. Idet

$$L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2,$$

ser vi, $L(x_1, x_2) \geq 0$. Vi har tillige, at $L(0, 0) = 0$, og at

$$L(x_1, 0) = 2x_1^2 \to \infty \quad \text{for} \quad x_1 \to \infty,$$

hvoraf det fremgår, at L har værdimængden $R(L) = [0, \infty[$.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 > y\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in D : f(x, y) = \ln(x^2 - y) + x^2 + y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

Løsning. Vi får, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y} + 2x \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 - \frac{1}{x^2 - y}.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Hvis $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, har vi, at $\frac{1}{x^2-y} = 1$, og hvis også $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, får vi, at $4x = 0$, så $x = 0$. Heraf får vi så, at $y = -1$. Funktionen f har derfor det ene stationære punkt $(x, y) = (0, -1)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

Løsning. Vi får, at

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2(x^2-y)-2x\cdot 2x}{(x^2-y)^2} + 2 & \frac{2x}{(x^2-y)^2} \\ \frac{2x}{(x^2-y)^2} & -\frac{1}{(x^2-y)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2x^2-2y}{(x^2-y)^2} + 2 & \frac{2x}{(x^2-y)^2} \\ \frac{2x}{(x^2-y)^2} & -\frac{1}{(x^2-y)^2} \end{pmatrix}.$$

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Idet

$$H(0, -1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

er det stationære punkt $(0, -1)$ et sadelpunkt for funktionen f.

(5) Bestem værdimængden $R(f)$ for f.

Løsning. Vi ser, at for $x \neq 0$ har vi, at

$$f(x,0) = \ln(x^2) + x^2 \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 0,$$

og at

$$f(x,0) = \ln(x^2) + x^2 \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty.$$

Dette viser, at f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

(6) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1, 0, f(1,0)\big)$.

Løsning. Vi ser, at $f(1,0) = 1$, og at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 4 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0,$$

så tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1, 0, f(1,0)\big)$ har ligningen

$$z = 1 + 4(x-1) = 4x - 3.$$

Opgave 3. For $t > 0$ betragter vi differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{6(\ln t)^2}{t} x = \sin(t) e^{-2(\ln t)^3 + \cos(t)}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser straks, at

$$\int \frac{6(\ln t)^2}{t}\, dt = \int 6\Big(\ln(t)\Big)^2 d\Big(\ln(t)\Big) = 2\Big(\ln(t)\Big)^3 + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Så får vi, at

$$x = Ce^{-2(\ln t)^3} + e^{-2(\ln t)^3} \int e^{2(\ln t)^3} e^{-2(\ln t)^3 + \cos(t)} \sin(t)\, dt =$$

$$x = Ce^{-2(\ln t)^3} - e^{-2(\ln t)^3} \int e^{2(\ln t)^3} e^{-2(\ln t)^3 + \cos(t)}\, d(\cos t) =$$

$$Ce^{-2(\ln t)^3} - e^{-2(\ln t)^3} \int e^{\cos t} d(\cos t) = Ce^{-2(\ln t)^3} - e^{-2(\ln t)^3} e^{\cos t} =$$

$$e^{-2(\ln t)^3}\Big(C - e^{\cos t}\Big),$$

hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(1) = 2 - e^{\cos(1)}$ er opfyldt.

Løsning. Vi får, at $C - e^{\cos(1)} = 2 - e^{\cos(1)}$, så $C = 2$. Dette giver, at

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = e^{-2(\ln t)^3}\Big(2 - e^{\cos t}\Big).$$

(3) Lad $x = x(t)$ være en vilkårlig (maksimal) løsning til differentialligningen $(*)$.

Vis, at

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Løsning. Da faktoren $C - e^{\cos t}$ er begrænset, er sagen klar.

Opgave 4. Vi betragter de symmetriske 3×3 matricer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem matricen $P = AB$. Er matricen P symmetrisk?

Løsning. Vi ser, at

$$P = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Det er ganske klart, at matricen P ikke er symmetrisk.

(2) Er matricen $S = PP^t$ symmetrisk? Her betegner P^t den til P transponerede matrix.

Løsning. Vi finder, at $S^t = (PP^t)^t = P^{tt}P^t = PP^t = S$, så matricen S er symmetrisk.

Idet $n \in \mathbf{N}$, betragter vi nu to vilkårlige symmetriske $n \times n$ matricer A og B.

(3) Vis, at $n \times n$ matricen ABA er symmetrisk.

Løsning. Vi ser, at $(ABA)^t = A^t B^t A^t = ABA$, hvoraf vi ser, at ABA er symmetrisk.

(4) Vis, at $n \times n$ matricen $ABABA$ er symmetrisk.

Løsning. Vi finder, at $(ABABA)^t = A^t B^t A^t B^t A^t = ABABA$, hvilket viser, at matricen $ABABA$ er symmetrisk.