Eksamen på Økonomistudiet vinteren 2017-18
Sandsynlighedsteori og Statistik
2. årsprøve
14. februar, 2018
(3-timers prøve med hjælpemidler)

Dette eksamenssæt består af 5 sider (forsiden inklusiv).

OBS: Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangsvej, skal du kontakte et tilsyn, blive registreret som syg hos denne. Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen. Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Opgaven består af tre delopgaver, som alle skal besvares. De tre opgaver kan regnes uafhængigt af hinanden. Opgave 1 og 2 indgår tilsammen med samme vægt som opgave 3.

Opgave 1

Antag at indkomsten X for en passende indtægtsgruppe er ligefordelt på intervallet [1,2] (angivet i 100000 DKK).

1. Opskriv tætheden $p(x)$ for X og find $E(X)$.
2. Man ønsker at se på fordelingen af $Y = \log(X)$. Find tætheden $q(y)$ for Y.
3. Vis at $E(Y) = 2\log(2) - 1$.

   Hint: Der gælder at $\int \exp(x)\, x dx = \exp(x)(x-1)$ og tilsvarende at $\int \log(x)\, dx = x(\log(x) - 1)$.

Opgave 2

I denne opgave undersøges ventetiden (målt i uger) for en arbejdsløs til vedkommende kommer i arbejde. Ventetiden er defineret som 0 uger, hvis personen kommer i arbejde i uge 1, 1 uge hvis personen kommer i arbejde i uge 2 osv. Vi antager, at ventetiden kan beskrives som en stokastisk variabel T, hvor T er geometrisk fordelt med parametren $\theta = 0.2$.

1. Udregn sandsynligheden for at ventetiden er to uger (altså at personen kommer i arbejde i uge 3), $P(T = 2)$, og sandsynligheden for at ventetiden er under to uger $P(T < 2)$.
2. Udregn den forventede ventetid $E(T)$.

Vi antager nu, at der er 100 arbejdsløse tilknyttet et jobcenter. Hvis den arbejdsløse ikke selv finder arbejde i løbet af de to første uger, skal der laves en jobplan.

3. Udregn det forventede antal arbejdsløse hvor jobcentret skal lave en jobplan.

Vi antager nu, at der er to arbejdsløse, og begge deres ventetider T_1 og T_2 er geometrisk fordelt med parametren $\theta = 0.2$. Desuden antages, at ventetiderne er stokastisk uafhængige.

4. Udregn sandsynligheden for at den samlede ventetid for de to arbejdsløse er 4 uger, $P(T_1 + T_2 = 4)$.

Opgave 3

Denne opgave omhandler ventetiden mellem flyafgange i en mellemstor lufthavn. Vi har informationer om $n = 740$ ventetider (målt i minutter), angivet som $\{y_i\}_{i=1}^n$. Tabellen nedenfor angiver noget beskrivende statistik for de 740 ventetider og der vises også et histogram over de observerede ventetider.

For at modellere ventetiderne antages y_i at være en realisation af den stokastiske variabel Y_i, sådan at $Y_i > 0$. Som model for ventetiden anvendes en Erlang fordeling,

$$Y_i \overset{d}{=} \text{Erlang}(\lambda), \tag{1}$$

som har tæthedsfunktionen

$$f_{Y_i}(y \mid \lambda) = \lambda^2 y \exp(-\lambda y), \quad y > 0, \tag{2}$$

hvor $\lambda \in \Theta = \mathbb{R}_+$. Det antages, at alle $\{Y_i\}_{i=1}^n$ har samme fordeling og er uafhængige.

1. Opskriv sample likelihood-bidraget, $\ell(\lambda \mid y_i)$, sample likelihood funktionen, $L(\lambda \mid y_1, ..., y_n)$, og de tilsvarende log-likelihood bidrag og log-likelihood funktion. Angiv de antagelser du anvender undervejs.

2. Angiv første-ordens betingelsen for maksimum af log-likelihood funktionen og udled maksimum likelihood estimatoren, $\hat{\lambda}_n$, for den givne model.

   Brug informationen i den beskrivende statistik til at bestemme maksimum likelihood estimatet i det givne tilfælde.

3. Find variansen på estimatoren og udregn $V(\hat{\lambda}_n)$ og $\mathsf{se}(\hat{\lambda}_n)$ i det konkrete tilfælde med observationer for de $n = 740$ afgange.

4. Det oplyses nu at $\hat{\lambda}_n = 0.13953$ og $\mathsf{se}(\hat{\lambda}_n) = 0.0036269$.

   For en Erlang fordelt stokastisk variabel, Y, gælder der, at $E(Y) = 2/\lambda$, $V(Y) = 2/(\lambda^2)$, skewness er $\sqrt{2}$ og kurtosis er 6. Brug disse informationer til at kontrollere om modelantagelsen er rimelig.

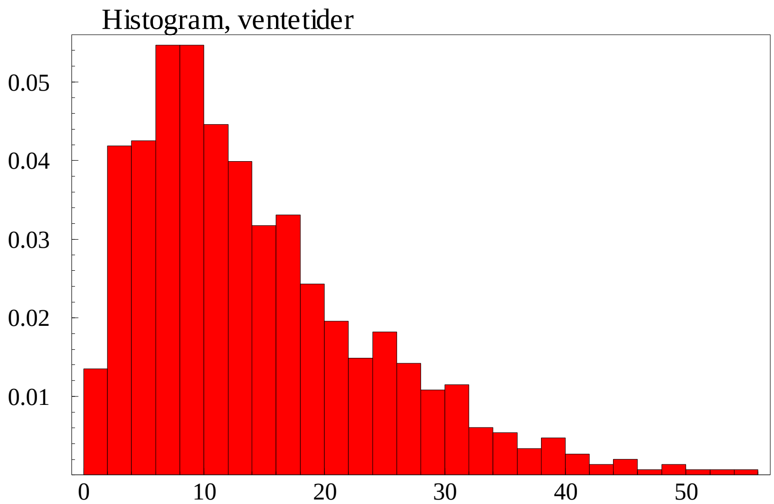
5. Lufthavnen har budgetteret med en gennemsnitlig ventetid på 15 minutter. Test hypotesen om at den sande gennemsnitlige ventetid er 15 minutter. Vær præcis med hypoteser, teststørrelse og kritisk værdi.

6. Man vil undersøge om ventetiden er anderledes på helligdage og man har konstrueret en variable der antager værdien én på helligdage

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis dag } i \text{ er en helligdag} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

   Opskriv likelihood funktionen for en model der har parameter β på almindelige dage og $\beta + \delta$ på helligdage.

	Ventetid
Minimum	0.593
Maximum	55.294
Gennemsnit	14.334
Standardafvigelse	9.832
Skewness	1.131
Kurtosis	4.167
n	740


Histogram, ventetider
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
10
20
30
40
50