Eksamen på Økonomistudiet. Vinteren 2012 - 2013

MATEMATIK A

1. årsprøve

Tirsdag den 19. februar 2013

(2 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 V-1A rx

Skriftlig eksamen i Matematik A

Tirsdag den 19. februar 2013

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Optimeringsteori. Lad $D \subseteq \mathbf{R}^2$ være en ikke-tom, åben mængde, og lad $f : D \to \mathbf{R}$ være en differentiabel funktion af to variable, hvor alle de partielle afledede af 2. orden er kontinuerte på mængden D.

(1) Forklar, hvad det betyder, at et punkt $(a, b) \in D$ er et stationært punkt for f.

(2) Lad $(a, b) \in D$ være et stationært punkt for funktionen f.

Forklar, hvordan man ved hjælp af de partielle afledede af 2. orden kan afgøre, om punktet (a, b) er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for funktionen f.

(3) Betragt funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = (2x + y)^2 + x^4.$$

Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(5) Afgør, om det stationære punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for funktionen f.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + xy + \ln(y).$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Afgør, om det stationære punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt for funktionen f.

(4) Vi betragter nu funktionen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall s \in \mathbf{R} : g(s) = f(e^s, e^s).$$

Vis, at funktionen g er voksende, og at den er strengt konveks.

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{6}{2 + x^2}\Big)^n.$$

(1) Bestem mængden

$$K = \{x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{6}{2 + x^2}\Big)^n \text{ er konvergent}\}.$$

(2) Bestem en forskrift for funktionen $f : K \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{6}{2 + x^2}\Big)^n.$$

(3) Bestem den afledede funktion f' af f, og bestem monotoniintervallerne for f.

(4) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ og } \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.