Skriftlig eksamen i Matematik B. Vinteren 2015 - 2016

Torsdag den 18. februar 2016

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 V-1B rx

Skriftlig eksamen i Matematik B

Torsdag den 18. februar 2016

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 0 & 1 & 1 \\ s & 1 & s \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

(2) Udregn for ethvert $s \in \mathbf{R}$ matricen $A(s)^2 = A(s)A(s)$.

(3) Vis, at matricen $A(1)^2$ er positiv definit.

(4) Udregn det karakteristiske polynomium $P(t) = \det\big(A(s) - tE\big)$ for matricen $A(s)$.

(5) Bestem det tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ har egenværdien $t = 1$. Bestem dernæst de øvrige egenværdier for matricen $A(1)$.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = e^{x^2} + ye^y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Bestem mængden

$$P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f''(x,y) \text{ er positiv definit}\}.$$

Vi betragter den funktion $g : P \to \mathbf{R}$, som er defineret ved betingelsen

$$\forall\, (x,y) \in P : g(x,y) = f(x,y).$$

(5) Vis, at funktionen g er strengt konveks, og bestem g's værdimængde.

(6) Vis, at den funktion $h : P \to \mathbf{R}$, som er defineret ved betingelsen

$$\forall\, (x,y) \in P : h(x,y) = \ln g(x,y),$$

er kvasikonveks.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = 6t^2 + 4\sin(2t)$$

og

$$(**) \qquad \frac{dy}{dt} = x + 10t.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

(3) Bestem den specielle løsning $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ til differentialligningen $(**)$, så betingelserne $\tilde{y}(0) = 0$ og $\tilde{y}'(0) = 3$ er opfyldt.

(4) Bestem Taylorpolynomiet P_3 af tredje orden for funktionen $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ ud fra punktet $t_0 = 0$.

Opgave 4. For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

(1) Bestem mængden

$$C = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \text{ er konvergent} \right\}.$$

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : C \to \mathbf{R}$, som er givet ved udtrykket

$$\forall\, x \in C : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n .$$

Denne funktion er rækkens sumfunktion.

(3) Bestem den afledede funktion f', og godtgør, at funktionen f er voksende på mængden C.

(4) Bestem elasticiteten f^{ϵ} for funktionen f.

(5) Bestem den anden afledede f'' for funktionen f, og godtgør, at f er strengt konveks på mængden C.