Eksamen på Økonomistudiet sommer 2020

Matematik A

8. juni 2020 kl. 9-12

Besvarelsen uploades på Digital Eksamen som én pdf.fil (inkl. bilag) navngivet udelukkende med eksamensnummeret, f.eks. 12.pdf eller 127.pdf

Dette eksamenssæt består af 4 sider incl. denne forside.

Denne eksamen er ændret fra at foregå på Peter Bangsvej til at foregå som en hjemmeeksamen med hjælpemidler.
Læs grundigt teksten i boksen nedenfor, så du undgår at komme i problemer med mistanke om eksamenssnyd.

Pas på at du ikke begår eksamenssnyd!

Det er fx eksamenssnyd, hvis du …

- Kopierer andres tekster uden at sætte citationstegn eller kildehenvise, så det ser ud som om det er din egen tekst. Det gælder også tekst fra gamle rettevejledninger
- Stiller din opgave til rådighed for andre under eksamen
- Kommunikerer med andre om opgaven under eksamen
- Bruger andres idéer eller tanker uden at kildehenvise, så det ser ud om det er din egen idé eller dine tanker
- Genbruger dele af en opgave, som du tidligere har indleveret og fået en bestå karakter for uden at sætte citationstegn eller kildehenvise (selvplagiering)

Du kan læse mere om reglerne for eksamenssnyd på Din Uddannelsesside og i Rammestudieordningens afs. 4.12.

Eksamenssnyd sanktioneres altid med en advarsel og bortvisning fra prøven. I de fleste tilfælde bliver den studerende også bortvist fra universitetet i et semester.

Der lægges ved bedømmelsen af de enkelte spørgsmål vægt på, at den studerende præsenterer en fyldestgørende besvarelse med klare forklaringer og eventuelle mellemregninger, der ikke er baseret på brug af matematiske IT-værktøjer. Det er således ikke tilstrækkeligt bare at angive et facit.

Opgave 1

Betragt funktionen

$$f(x) = x^2 e^{-2x} \text{ for alle } x \in \mathbb{R}.$$

1) Vis, at $f'(x) = (2x - 2x^2)e^{-2x}$ og $f''(x) = (4x^2 - 8x + 2)e^{-2x}$

2) Bestem Taylorpolynomiet af anden orden for f omkring punktet $x = 0$.

   Brug det til at finde en tilnærmet værdi af funktionsværdien $f(0{,}01)$.

3) Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{e^x - 1}$$

4) Vis, at for $x > 0$ er elasticiteten af f givet ved

$$El_x\, f(x) = 2 - 2x$$

Opgave 2

Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x} - 1)^n = 4 + 4 \cdot (e^{2x} - 1) + 4 \cdot (e^{2x} - 1)^2 + 4 \cdot (e^{2x} - 1)^3 + \cdots$$

hvor x er en reel konstant.

1) Vis, at den uendelige række er konvergent, hvis og kun hvis

$$x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

2) Bestem en forskrift for sumfunktionen f, der er givet ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (e^{2x} - 1)^n \quad \text{for alle} \quad x < \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

3) Vis, at f er strengt voksende i definitionsmængden, og find værdimængden for f.

Opgave 3

Betragt funktionen f givet ved forskriften

$$f(x,y) = x^2 - 2 \cdot \ln(2x) - y^3 + \frac{3}{2} \cdot y^2 + 6y - 5, \text{ hvor } x > 0 \text{ og } y \in \mathbb{R}.$$

1) Bestem de partielle afledede

$$f_1'(x,y) \quad \text{og} \quad f_2'(x,y)$$

2) Bestem de fire anden-ordens partielle afledede for f og opstil Hessematricen (*the Hessian Matrix*) $f''(x,y)$.

3) Vis, at f har de to kritiske punkter $(x,y) = (1,-1)$ og $(x,y) = (1,2)$, og at der ikke er andre kritiske punkter.

4) Afgør for hvert af de kritiske punkter, om det er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt.

5) Afgør, om f har nogen globale ekstremumspunkter.

Opgavesættet slut