Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2013

MATEMATIK B

1. årsprøve

Tirsdag den 20. august 2013

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes nogen form for elektroniske hjælpemidler)

Opgavesættet består foruden af denne forside af 3 sider med opgaver.

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2013 S-1B rx

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 20. august 2013

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert talpar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ betragter vi den symmetriske 3×3 matrix

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} u & v & 1 \\ v & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten $\det\big(A(u, v)\big)$ for vilkårlige $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, og bestem de $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, for hvilke matricen $A(u, v)$ er regulær.

(2) Bestem egenværdierne for matricen $A(0, v)$.
(Her er $u = 0$.)

(3) Vis, at matricen $A(0, v)$ er indefinit for ethvert $v \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem egenværdierne for matricen $A(u, 0)$.
(Her er $v = 0$.)

(5) Vis, at matricen $A(u, 0)$ er indefinit for ethvert $u \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$$

og funktionen $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in D : f(x, y) = \ln x + e^y + xy.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

(2) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$. Vis, desuden, at $H(x,y)$ er indefinit for ethvert $(x,y) \in D$.

Vi betragter mængden

$$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le 1\}.$$

(4) Begrund, at funktionen $g : K \to \mathbf{R}$, som er defineret ved betingelsen

$$\forall\, (x,y) \in K : g(x,y) = f(x,y),$$

har både et globalt maksimum og et globalt minimum på mængden K.

(5) Bestem de globale ekstremumspunkter for funktionen g på mængden K, og bestem de tilhørende funktionsværdier.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = 3t^2\big(x^2 - 1\big).$$

(1) Vis, at

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\} : \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big).$$

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Opgave 4. Lad $n \in \mathbf{N} \setminus \{1,2,3\}$, og betragt mængden

$$U = \{1,2,3,\ldots,n\}$$

og funktionen $P : U \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, i \in U : P(i) = a\Big(\frac{1}{10}\Big)^i,$$

hvor $a > 0$ er en konstant.

(1) Bestem $a > 0$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U.

(2) Bestem sandsynligheden $P(\{1, 2, 3\})$.

(3) Bestem sandsynligheden $P(\{4, 5, \ldots, n\})$.

(4) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1, 2, 3\}) \text{ og } \lim_{n\to\infty} P(\{4, 5, \ldots, n\}).$$