u1

LM August 17 - Løsning

1 1) $Tx = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$x_3 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = r$ frie variable

$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \iff$
$x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -2s - 3t - 4r$

$x_1 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \iff x_1 = x_3 + 2x_4 + 3x_5$

$$x_1 = s + 2t + 3r$$

Så er

$$N(T): \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + r \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}, \quad s, t, r \in \mathbb{R}.$$

Vektorerne v_1, v_2, v_3 udgør en basis for $N(T)$, T er ikke injektiv da $N(T) \neq \{0\}$

2)

$$Tv = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ så } v \in N(T).$$

Koordinaterne bestemmes ved

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = V$, dvs

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & -3 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 2R_4 \\ R_2 + 2R_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - R_3 \\ R_2 + 3R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 3R_5 \\ R_2 + 4R_5 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Heraf ses, at

$V = (1,1,1)$ mht V_1, V_2, V_3

3) $Tx = y$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & y_2 \end{array}\right] \; R_1 - 2R_2$$

~~Heraf ses, jf. 1) at~~

$\cancel{\alpha_1}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & y_1 - 2y_2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & y_2 \end{array}\right]$$

Heraf fås, jfr 1) at

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \overbrace{s v_1 + t v_2 + r v_3}^{N(T)},$$

$s, t, r \in \mathbb{R}$.

4) L er oplagt bijektiv, så $Ly = \underline{0} \Leftrightarrow y = \underline{0}$

Derfor er $LT(x) = \underline{0} \Leftrightarrow Tx = \underline{0}$

Så $x \in N(LT) \Leftrightarrow x \in N(T)$,
dvs $N(LT) = N(T)$.

2

1) Da egenvektorerne er indbyrdes ortogonale er A symmetrisk.

2) Egenværdierne er $1, -1, 0$, alle med multiplicitet 1.

3) $\det A = 1 \cdot (-1) \cdot 0 = 0$.

4) $A = QDQ^T$, hvor $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Så er $A^4 - A^3 = Q(D^4 - D^3)Q^T$, hvor

$$D^4 - D^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$A^4 - A^3 = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & -\frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{4}{6} & \frac{8}{6} & -\frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} & -\frac{4}{6} & \frac{2}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

5) $D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ så

$D^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Derfor er

$$D^{2k+1} = D^{2k} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

Dermed er $A^{2k+1} = A$.

3 $\int \sin(a-b)x \cos(b+c)x \, dx$

$$= \int \left(\frac{e^{i(a-b)x} - e^{-i(a-b)x}}{2i} \right) \left(\frac{e^{i(b+c)x} + e^{-i(b+c)x}}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4i} \int \left(e^{i(a+c)x} - e^{-i(a+c)x} \right) + \left(e^{i(a-2b-c)x} - e^{-i(a-2b-c)x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(a+c)x + \sin(a-2b-c)x \, dx$$

For $a+c \neq 0$ og $a-2b-c \neq 0$ fås

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a+c} \cos(a+c)x - \frac{1}{a-2b-c} \cos(a-2b-c)x \right) + k.$$

Hvis f.eks. $a+c = 0$ er $\sin(0) = 0$ og $\cos(a+c)x$ skal erstattes med en vilkårlig konstant - hvorfor leddet helt kan fjernes da vi allerede har konstanterne med. Analogt for $a-2b-c = 0$.

3

2) $w^2 = 3+i$. Skriv $w = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$.

Så er $w^2 = x^2 - y^2 + i2xy = 3+i$, hvoraf

$$x^2 - y^2 = 3$$
$$2xy = 1 \qquad (\rightarrow x \neq 0 \text{ og } y \neq 0)$$

NB:

Så fås $y = \frac{1}{2x} \longrightarrow x^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 3$

$$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 3 \iff 4x^4 - 12x^2 - 3 = 0$$

Så er $x^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{8} = \frac{12 \pm \sqrt{192}}{8}$

hvor (−) forkastes. $= \frac{3}{2} + \sqrt{3}$

$$x^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{3} \iff$$
$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{3}}.$$

Så er $w = x + iy = x + i\frac{1}{2x}$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{3}} + i \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{3}}} \right).$$

$$= \pm (\alpha + i\beta) \quad (*)$$

I $z^2 - z - \frac{1}{4}(2+i) = 0$

er diskriminanten $D = 3+i$

Løsningen er så $z = \dfrac{1 \pm (\alpha + i\beta)}{2}$

$= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\alpha}{2}\right) \pm i\,\frac{\beta}{2}$ fra (*).

4

1) Her er $g(x) = \dfrac{1}{x^4 - x^2}$. Bemærk g er lige.

Da g ikke er defineret når $x^4 - x^2 = 0$

dvs $x = 0$ eller $x = \pm 1$, ligger disse ikke i definitionsmængden.

$|g(x)| < 1$ er for $x \notin \{0, 1, -1\}$

ensbetydende med $1 < |x^4 - x^2|$.

Vi løser 1) $x^4 - x^2 = 1$ og 2) $x^4 - x^2 = -1$.

1) har løsningerne $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} = \pm\varphi$

2) har ingen løsning.

Da $x^4 - x^2$ er kontinuert og går mod ∞ for $x \to \pm\infty$, er

$$x^4 - x^2 > 1 \quad \text{for} \quad x \in \underbrace{]-\infty, -\varphi[\cup]\varphi, \infty[}_{M.} = M$$

som ønsket.

2) $$f(x) = \frac{1}{1-g(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^4 - x^4}}, \text{ for } x \in M.$$

3) $$f'(x) = \frac{g'(x)}{(1-g(x))^2}, \quad x \in M, \text{ hvor}$$

$$g'(x) = -(x^4 - x^2)^{-2} \cdot (4x^3 - 2x)$$

$$g'(x) = 0 \iff 4x^3 - 2x = 0 \iff$$
$$x(4x^2 - 2) = 0 \iff$$
$$x = 0 \lor x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$ **NB:**

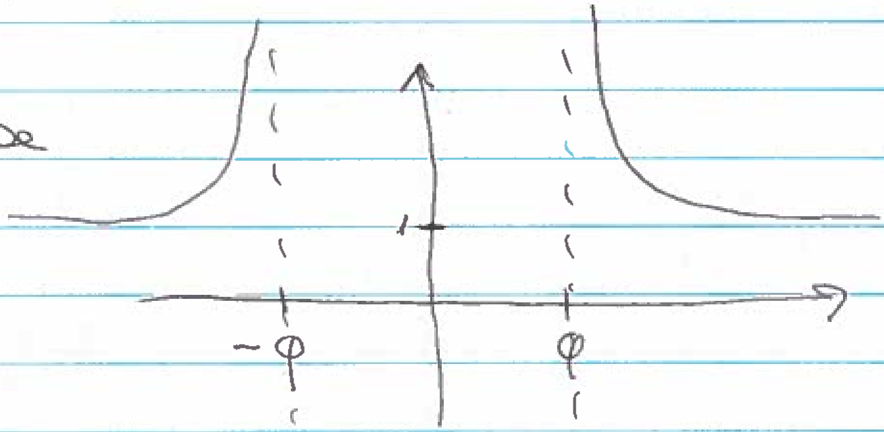
Ingen af disse ligger i M, så ingen ekstrema i M.

For $x < -\varphi$ er $g'(x) > 0$ og

for $x > \varphi$ er $g'(x) < 0$

x		$-\varphi$		φ	
$f'(x)$	$+$				$-$
f	$\nearrow$				$\searrow$

Skitse



4) For $x \to \pm\infty$ vil $f(x) \to 1$ $\left(\text{da } g(x) \to \infty\right)$

Så $Vm(f) = \,]1, \infty[$. f er ej injektiv – oplagt.

5)

$$f(x) = y \quad , \quad y > 1.$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x^4 - x^2}} = y \iff \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{x^4 - x^2}$$

$$\iff \frac{1}{x^4 - x^2} = \frac{y-1}{y} \iff x^4 - x^2 = \frac{y}{y-1} \iff$$

$$x^4 - x^2 - \frac{y}{y-1} = 0 \iff x^2 = \frac{1 \underset{(-)}{+} \sqrt{1 + 4\left(\frac{y}{y-1}\right)}}{2}$$

hvor $(-)$ skal forkastes.

Da fås

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4\left(\frac{y}{y-1}\right)}}{2}}$$

Da $y > 1$ er der altid 2 løsninger – i overensstemmelse med skitsen af grafen.