Skriftlig eksamen i Matematik B. Vinteren 2014 - 2015

Torsdag den 8. januar 2015

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog ikke lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 V-1B ex

Skriftlig eksamen i Matematik B

Torsdag den 8. januar 2015

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert tal $\alpha \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(\alpha)$, og bestem de $\alpha \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(\alpha)$ er regulær.

(2) Bestem – for ethvert $\alpha \in \mathbf{R}$ – de karakteristiske rødder for matricen $A(\alpha)$, og angiv de tilhørende rodmultipliciteter.

(3) Bestem – for ethvert $\alpha \in \mathbf{R}$ – egenværdierne og egenrummene for matricen $A(\alpha)$. Angiv desuden de tilhørende egenværdimultipliciteter.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = -2x^2 + x - 2y - y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Vis dernæst, at f er strengt konkav overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

(5) Vis, at funktionen $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \psi(x,y) = \exp\Big(-f(x,y)\Big),$$

er kvasikonveks.

For ethvert $v > 0$ betragter vi herefter den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq v \,\wedge\, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(6) Bestem integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x,y)\,d(x,y)$$

for et vilkårligt $v > 0$.

(7) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \left(\frac{I(v)}{\tan(2v)}\right).$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)x = \big(\cos t\big)e^{\sin t - \sqrt{1+t^2}}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Godtgør, at det for enhver maksimal løsning $x = x(t)$ til $(*)$ gælder, at

$$x(t) \to 0 \text{ for } t \to \pm\infty.$$

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0)$$

for en enhver maksimal løsning til differentialligningen $(*)$.

Opgave 4. Vi betragter den funktion $f :]-1, \infty[\to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x > -1 : f(x) = \ln(x+1) + x^2 e^{2x}.$$

(1) Bestem de afledede f' og f'' af første og anden orden for funktionen f.

(2) Bestem Taylorpolynomiet P_2 af anden orden for funktionen f ud fra punktet $x_0 = 0$.

(3) Udregn det ubestemte integral

$$\int f(x)\, dx,$$

idet $x > -1$.