Skriftlig eksamen på Økonomistudiet

Vinteren 2018 - 2019

MATEMATIK B

Torsdag den 14. februar 2019

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler.
Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

OBS: Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du kontakte eksamenstilsynet for at blive registeret som syg.

I den forbindelse skal du udfylde en blanket.

Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen.

Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende en lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2019 V-1B rx

Skriftlig eksamen i Matematik B

Torsdag den 14. februar 2019

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & s \\ 1 & 3 & 1 \\ s & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten $\det A(s)$ for matricen $A(s)$, og bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er regulær.

(2) Bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ er positiv definit.

(3) Godtgør, at matricen $A(s)$ ikke er negativ definit eller negativ semidefinit for noget tal $s \in \mathbf{R}$.

(4) For hvilke $s \in \mathbf{R}$ er matricen $A(s)$ indefinit.

(5) Bestem egenværdierne og de tilhørende egenrum for matricen $A(2)$.

(6) Bestem en diagonalmatrix D og en ortogonal matrix Q, så

$$D = Q^{-1}A(2)Q.$$

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

samt den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) = xy + \frac{1}{xy}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

(3) Vis, at alle de stationære punkter er globale minimumspunkter for funktionen f, og bestem værdimængde for f.

Vink: Lad (x_0, y_0) være et vilkårligt stationært punkt for f. Udregn $f(x_0, y_0)$, og vis dernæst, at udsagnet

$$\forall\,(x, y) \in D : f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq 0$$

er opfyldt.

(4) Godtgør, at funktionen f ikke er homogen af nogen grad.

(5) Bestem niveaumængden

$$P^2 = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) \leq 2\},$$

og godtgør dernæst, at funktionen f ikke er kvasikonveks.

Opgave 3. For ethvert $a > 0$ betragter vi differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \left(\frac{2t}{a + t^2}\right) x = \frac{e^t}{a + t^2}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = \frac{2}{a}$ er opfyldt.

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0),$$

og vis, at enhver maksimal løsning $x = x(t)$ er voksende i en omegn af punktet $t = 0$.

Opgave 4. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ med forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2y + y^3.$$

(1) Vis, at funktionen f er homogen, og anfør homogenitetsgraden.

(2) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(3) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(1,1)$.

(4) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, og vis, at f hverken er konkav eller konveks.