Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 S-1B rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 19. august 2014

Rettevejledning

Opgave 1. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem egenværdierne for matricen A, og anfør deres rodmultiplicitet.

Løsning. Vi ser, at det karakteristiske polynomium for matricen A er

$$P(t) = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = (1-t)^2(2-t),$$

hvoraf det fremgår, at de karakteristiske rødder (og dermed egenværdierne for A) er 1 og 2, hvor 1 har rodmultipliciteten 2, og 2 har rodmultipliciteten 1.

(2) Bestem egenrumme for matricen A, og bestem egenværdiernes egenværdimultiplicitet.

Løsning. Vi ser, at

$$V_A(1) = N(A - E) = \text{span}\{(1,0,0)\}$$

og

$$V_A(2) = N(A - 2E) = \text{span}\{(1,1,1)\},$$

og vi ser da også, at begge egenværdier har egenværdimultipliciteten 1.

(3) Udregn matricen $B = AA = A^2$.

Løsning. Vi får ved direkte udregning, at

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4) Udregn matricen $C = B - A$.

Løsning. Vi udregner, at

$$C = B - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5) Bestem egenværdierne for matricen C, og anfør deres rodmultiplicitet.

Løsning. Det er oplagt, at matricen C har egenværdierne 0 og 2, der har rodmultipliciteterne henholdsvis 2 og 1.

(6) Bestem egenrumme for matricen C, og bestem egenværdiernes egenværdimultiplicitet.

Løsning. Vi ser, at

$$V_C(0) = N(C) = \text{span}\{(1,0,0)\}$$

og

$$V_C(2) = N(C - 2E) = \text{span}\{(1,1,1)\},$$

og vi ser tillige, at begge egenværdier har egenværdimultipliciteten 1.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3 + y^3.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3x^2 = x(2-3x) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 3y^2 = y(2+3y).$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. De stationære punkter er $(0,0), (0,-\frac{2}{3}), (\frac{2}{3},0)$ og $(\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Afgør dernæst for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

Løsning. Vi ser, at funktionen f har Hessematricen

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2-6x & 0 \\ 0 & 2+6y \end{pmatrix}.$$

Ved indsættelse af de stationære punkter i Hessematricen får vi, at $(0,0)$ er et minimumspunkt, $(0,-\frac{2}{3})$ og $(\frac{2}{3},0)$ er sadelpunkter, og $(\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ er et maksimumspunkt.

For ethvert $v > 0$ betragter vi den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le v \wedge 0 \le y \le 1\}.$$

(4) Udregn for ethvert $v > 0$ integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x,y)\, d(x,y).$$

Løsning. Vi får, at

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^v \Big(\int_0^1 (x^2 + y^2 - x^3 + y^3)\, dy \Big)\, dx =$$

$$\int_0^v \left[x^2y + \frac{1}{3}y^3 - x^3y + \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 dx = \int_0^v \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^3 + \frac{1}{4}\right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x\right]_0^v = \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{7}{12}v.$$

(5) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \left(\frac{I(v)}{\sin v}\right).$$

Løsning. Det er klart, at vi kan anvende L'Hôpitals regel, og vi får så, at

$$\lim_{v \to 0+} \left(\frac{I(v)}{\sin v}\right) = \frac{7}{12}.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = \left(\frac{t}{2 + t^2}\right) x^8.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi bemærker, at funktionen $x = x(t) = 0$ er den eneste konstante løsning til $(*)$, og at denne løsning er defineret overalt på $\mathbf{R}$.

Hvis $x \neq 0$, omskrives $(*)$ til

$$x^{-8}\, dx = \frac{t}{2 + t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2 + t^2}\right) d(2 + t^2),$$

og ved efterfølgende integration opnår vi, at

$$-\frac{1}{7}x^{-7} = \frac{1}{2}\ln(2 + t^2) + k = \ln\sqrt{2 + t^2} + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$. Heraf følger, at de maksimale, ikke-konstante løsninger til $(*)$ har forskriften

$$x = \sqrt[7]{\frac{1}{c - 7\ln\sqrt{2 + t^2}}}\,,$$

hvor $c = -7k \in \mathbf{R}$.

Vi ser nu på ligningen $7\ln\sqrt{2 + t^2} = c$ (§) og finder, at $2 + t^2 = e^{\frac{2c}{7}}$.

Hvis $e^{\frac{2c}{7}} < 2$, hvilket er ensbetydende med, at $c < \frac{7}{2}\ln 2$, har ligningen (§) ingen løsninger, og så er løsningen x til $(*)$ defineret på hele $\mathbf{R}$.

Hvis $c = \frac{7}{2}\ln 2$, har ligningen (§) løsningen $t = 0$. I dette tilfælde har $(*)$ to maksimale løsninger, en defineret på intervallet $\mathbf{R}_-$ og en defineret på intervallet $\mathbf{R}_+$.

Hvis $c > \frac{7}{2}\ln 2$, har ligningen (§) de to løsninger $t = \pm\sqrt{e^{\frac{2c}{7}} - 2}$, og så har $(*)$ tre maksimale løsninger, der hver især er defineret på intervallerne

$$\Big] - \infty, -\sqrt{e^{\frac{2c}{7}} - 2}\Big[\,,\ \Big] - \sqrt{e^{\frac{2c}{7}} - 2}, \sqrt{e^{\frac{2c}{7}} - 2}\Big[\text{ og } \Big]\sqrt{e^{\frac{2c}{7}} - 2}, \infty\Big[\,.$$

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 1$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder straks, at $c - 7\ln\sqrt{2} = 1$, så $c = 1 + 7\ln\sqrt{2}$, og dermed er

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = \sqrt[7]{\frac{1}{1 + 7\Big(\ln\sqrt{2} - \ln\sqrt{2 + t^2}\Big)}}.$$

Da $c > \frac{7}{2}\ln 2$, og da vi kræver, at 0 ligger i definitionsintervallet, er $\tilde{x}$ defineret i intervallet $\Big] - \sqrt{e^{\frac{2c}{7}} - 2}, \sqrt{e^{\frac{2c}{7}} - 2}\Big[$.

Opgave 4. Lad $a > 0$ være en given konstant, og lad $n \in \mathbf{N}$ være valgt, så $n \geq 3$.

Betragt mængden

$$U = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

og den funktion $P : U \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, i = 1, 2, 3, \ldots, n : P(i) = -a\ln\left(\int_0^1 t^i\, dt\right).$$

(1) Bestem a, så P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U.

Løsning. Vi ser, at

$$P(i) = -a\ln\Big(\Big[\frac{t^{i+1}}{i+1}\Big]_0^1\Big) = -a\ln\Big(\frac{1}{i+1}\Big) = a\ln(i+1),$$

så $P(i) > 0$. Endvidere får vi, at

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = a \sum_{i=1}^{n} \ln(i+1) = a \ln(n+1)!,$$

så P er en sandsynlighedsfunktion på mængden U, netop når $a = \frac{1}{\ln(n+1)!}$.

(2) Bestem sandsynligheden $P(i)$ for ethvert $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Løsning. Man finder, at $P(i) = \frac{\ln(i+1)}{\ln(n+1)!}$.

(3) Bestem sandsynligheden $P(\{1, 2, 3\})$ for hændelsen $A = \{1, 2, 3\}$.

Løsning. Vi finder, at

$$P(\{1, 2, 3\}) = \frac{\ln 2 + \ln 3 + \ln 4}{\ln(n+1)!} = \frac{\ln 24}{\ln(n+1)!}.$$

(4) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{n \to \infty} P(\{1, 2, 3\}) \text{ og } \lim_{n \to \infty} P(U \setminus \{1, 2, 3\}).$$

Løsning. Vi ser umiddelbart, at

$$\lim_{n \to \infty} P(\{1, 2, 3\}) = 0 \text{ og } \lim_{n \to \infty} P(U \setminus \{1, 2, 3\}) = 1.$$