KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 S-1A ex ret

EKSAMEN I MATEMATIK A

Onsdag den 15. juni 2011

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1.

Elasticiteter.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en funktion, som er differentiabel i punktet $x_0 \in I$. Det antages desuden, at $f(x_0) \neq 0$.

(1) Definer elasticiteten $\mathrm{El} f(x_0)$ af funktionen f i punktet $x_0 \in I$.

Løsning. Elasticiteten $\mathrm{El} f(x_0)$ er defineret ved formlen

$$\mathrm{El} f(x_0) = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

(2) Antag, at funktionerne f og g begge er defineret på det åbne interval I, og at elasticiteterne $\mathrm{El} f(x_0)$ og $\mathrm{El} g(x_0)$ eksisterer.

Vis, at elasticiteten $\mathrm{El}(fg)(x_0)$ eksisterer, og at

$$\mathrm{El}(fg)(x_0) = \mathrm{El} f(x_0) + \mathrm{El} g(x_0).$$

Løsning. Idet elasticiteterne $\mathrm{El} f(x_0)$ og $\mathrm{El} g(x_0)$ eksisterer, ved vi, at funktionerne f og g er differentiable i punktet $x_0 \in I$, og at $f(x_0) \neq 0$ og $g(x_0) \neq 0$. Da er funktionen fg differentiabel i x_0, og vi har, at

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Desuden er $(fg)(x_0) = f(x_0)g(x_0) \neq 0$.

Vi får nu, at

$$x_0 \frac{(fg)'(x_0)}{(fg)(x_0)} = x_0 \frac{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}{f(x_0)g(x_0)} =$$

$$x_0 \frac{f'(x_0)g(x_0)}{f(x_0)g(x_0)} + x_0 \frac{f(x_0)g'(x_0)}{f(x_0)g(x_0)} = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} + x_0 \frac{g'(x_0)}{g(x_0)},$$

hvoraf påstanden straks fremgår.

(3) Find elasticiteten i punktet x for funktionerne

$$f(x) = 2 + \cos(5x), \; g(x) = e^{17x} \text{ og } h(x) = 2 + \cos(5x) + e^{17x}.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\mathrm{El}f(x) = x \frac{-5\sin(5x)}{2 + \cos(5x)}, \; \mathrm{El}g(x) = x \frac{17e^{17x}}{e^{17x}} = 17x$$

og

$$\mathrm{El}h(x) = x \frac{-5\sin(5x) + 17e^{17x}}{2 + \cos(5x) + e^{17x}}.$$

Opgave 2. For ethvert $x \in \mathbf{R}_+$ betragter vi den uendelige række

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(x))^n.$$

(1) Bestem mængden

$$K = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid (*) \text{ er konvergent}\}.$$

Løsning. Vi ser, at den uendelige række $(*)$ er en kvotientrække med kvotienten $q = \ln(x)$, og denne række er konvergent, hvis og kun hvis $|q| = |\ln(x)| < 1$. Vi får så, at

$$-1 < \ln(x) < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e.$$

Altså er

$$K = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid (*) \text{ er konvergent}\} =]e^{-1}, e[.$$

(2) Bestem en forskrift for funktionen $f : K \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall x \in K : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(x))^n.$$

Løsning. Vi finder, at

$$\forall x \in]e^{-1}, e[: f(x) = \ln(x) \frac{1}{1 - \ln(x)} = \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}.$$

(3) Bestem den afledede $f^{'}$ af funktionen f, og vis, at f er voksende på hele mængden K.

Løsning. Vi ser, at

$$f^{'}(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - \ln(x)(\frac{-1}{x})}{(1-\ln(x))^2} = \frac{1}{x(1-\ln(x))^2}.$$

Da $f^{'}(x) > 0$ for ethvert $x \in]e^{-1}, e[$, er funktionen f åbenbart voksende.

(4) Bestem mængden af de $x \in K$, hvor elasticiteten $\mathrm{El}f(x)$ for funktionen f eksisterer, og udregn derpå $\mathrm{El}f(x)$.

Løsning. Vi ser, at $f(x) = 0$, netop når $x = 1$. For $x \in]e^{-1}, e[\setminus \{1\}$ finder vi så, at

$$\mathrm{El}f(x) = x\frac{f^{'}(x)}{f(x)} = x\frac{1}{x(1-\ln(x))^2}\frac{1-\ln(x)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)(1-\ln(x))}.$$

Opgave 3. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + \ln(1 + y^2).$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser straks, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1+y^2}.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, bestem dette punkt, og godtgør, at det er et globalt minimumspunkt for f.

Løsning. Det er klart, at punktet $(0, 0)$ er det eneste stationære punkt for funktionen f. Vi ser desuden, at

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) \geq 0 \wedge f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Det stationære punkt $(0, 0)$ er således et globalt minimumspunkt for funktionen f.

(3) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at

$$f(x,0) \to \infty \ \text{ for } \ x \to \infty,$$

og heraf får vi så, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [0, \infty[$.

(4) Lad funktionen $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : \phi(s) = f(e^s, e^s).$$

Vis, at funktionen ϕ er strengt konveks på hele den reelle akse.

Løsning. Vi ser, at

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : \phi(s) = f(e^s, e^s) = e^{2s} + \ln(1 + e^{2s}).$$

Vi får nu, at

$$\frac{d\phi}{ds} = 2e^{2s} + \frac{2e^{2s}}{1 + e^{2s}},$$

og

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = 4e^{2s} + \frac{4e^{2s}(1 + e^{2s}) - 4e^{4s}}{(1 + e^{2s})^2} = 4e^{2s} + \frac{4e^{2s}}{(1 + e^{2s})^2} > 0.$$

Dette viser, at funktionen ϕ er strengt konveks.