Skriftlig eksamen i Matematik A. Vinteren 2015 - 2016

Onsdag den 17. februar 2016

Dette sæt omfatter 3 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 V-1A rx

Skriftlig eksamen i Matematik A

Onsdag den 17. februar 2016

---

3 sider med 3 opgaver.
Løsningstid: 2 timer.
Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Homogene funktioner.

Lad $C \subseteq \mathbf{R}^n$, for et givet $n \in \mathbf{N}$, være en kegle, hvilket betyder, at betingelsen

$$\forall\, t > 0\, \forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C : tx = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \in C$$

er opfyldt.

(1) Vis, at mængderne

$$C_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 > 0 \,\wedge\, x_2 > 0 \,\wedge\, x_3 > 0\}$$

og

$$C_2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 \geq 0 \,\wedge\, x_2 > 0 \,\wedge\, x_3 < 0\}$$

er kegler i $\mathbf{R}^3$.

(2) Lad $C \subseteq \mathbf{R}^n$ være en kegle, og lad $f : C \to \mathbf{R}$ være en funktion. Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er homogen af grad k.

(3) Godtgør, at følgende funktioner er homogene, og angiv definitionsmængden og homogenitetsgraden i hvert enkelt tilfælde.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^5 + 3x_1x_2^4 - x_1^2x_2^3 \\ f_2(x_1, x_2) = e^{\frac{x_1}{x_2}} \\ f_3(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1x_2^3 + x_2^4 \\ f_4(x_1, x_2) = \frac{x_1^4 + x_1x_2^3 + x_2^4}{\sqrt{x_1^6 + x_2^6}} \end{cases}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^3 + xy^2 + x + y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f ikke har nogen stationære punkter.

(3) Bestem Hessematricen $H(x,y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Godtgør, at $(0,0)$ er en løsning til ligningen $f(x,y) = 0$. Vis dernæst, at der findes en omegn $U(0)$ af $x = 0$, så den variable y er givet implicit som en funktion $y = y(x)$ i denne omegn. Bestem desuden differentialkvotienten $y'(0)$.

Lad $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være den funktion, som er givet ved udsagnet

$$\forall\, s \in \mathbf{R} : g(s) = f(e^s, e^s).$$

(5) Bestem en forskrift for funktionen g, og bestem Taylorpolynomiet P_2 af 2. orden for funktionen g ud fra punktet $s_0 = 0$.

Opgave 3. For ethvert $a > 0$ og ethvert $x > 0$ betragter vi den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\ln(ax)\Big)^n.$$

(1) Bestem for ethvert $a > 0$ mængden

$$C_a = \{x \in \mathbf{R} \mid (\S) \text{ er konvergent}\}.$$

Bemærk, at C_a afhænger af konstanten $a > 0$.

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f_a : C_a \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, x \in C_a : f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\ln(ax)\Big)^n.$$

Dette er rækkens sumfunktion.

(3) Bestem den afledede funktion f_a', og godtgør, at funktionen f_a er voksende.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f_a.

(5) Bestem elasticiteten f_a^{ϵ}.