Københavns Universitet. Økonomisk Institut

**1. årsprøve 2016 V-1B rx ret**

# Skriftlig eksamen i Matematik B

**Torsdag den 18. februar 2016**

**<u>Rettevejledning</u>**

---

**Opgave 1.** For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi $3 \times 3$ matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 0 & 1 & 1 \\ s & 1 & s \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

**Løsning.** Vi finder, at $\det\big(A(s)\big) = -s$, så matricen $A(s)$ er regulær, når og kun når $s \neq 0$.

(2) Udregn for ethvert $s \in \mathbf{R}$ matricen $A(s)^2 = A(s)A(s)$.

**Løsning.** Vi får, at

$$A(s)^2 = A(s)A(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 0 & 1 & 1 \\ s & 1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 0 & 1 & 1 \\ s & 1 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s^2 & s & 2s^2 \\ s & 2 & s+1 \\ 2s^2 & s+1 & 2s^2+1 \end{pmatrix}.$$

(3) Vis, at matricen $A(1)^2$ er positiv definit.

**Løsning.** Vi har, at

$$A(1)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nu, at de ledende hovedunderdeterminanter er $D_1 = 2$, $D_2 = 3$ og $D_3 = 1$, som alle er positive. Da er matricen $A(1)^2$ positiv definit.

(4) Udregn det karakteristiske polynomium $P(t) = \det\Big(A(s) - tE\Big)$ for matricen $A(s)$.

**Løsning.** Vi finder, at

$$P(t) = \det \begin{pmatrix} s-t & 0 & s \\ 0 & 1-t & 1 \\ s & 1 & s-t \end{pmatrix} =$$

$$(s-t)^2(1-t) - s^2(1-t) - (s-t) = \Big((s-t)^2 - s^2\Big)(1-t) - (s-t).$$

(5) Bestem det tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ har egenværdien $t = 1$. Bestem dernæst de øvrige egenværdier for matricen $A(1)$.

**Løsning.** Hvis $P(1) = 0$, har vi, at $s = 1$. Hvis $s = 1$, får vi, at

$$P(t) = (1-t)^2(1-t) - 2(1-t) = \Big((1-t)^2 - 2\Big)(1-t),$$

og vi ser, at dette polynomium har rødderne $t_1 = 1$, $t_2 = 1 - \sqrt{2}$ og $t_3 = 1 + \sqrt{2}$. Disse rødder er netop egenværdierne for matricen $A(1)$.

**Opgave 2.** Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = e^{x^2} + ye^y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^y + ye^y = e^y(1+y).$$

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen $f$.

**Løsning.** De partielle afledede er begge 0, når og kun når $(x,y) = (0,-1)$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x,y)$ for funktionen $f$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Vi finder, at

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} & 0 \\ 0 & 2e^y + ye^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} & 0 \\ 0 & e^y(2+y) \end{pmatrix}.$$

(4) Bestem mængden

$$P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f''(x,y) \text{ er positiv definit}\}.$$

**Løsning.** Det er klart, at

$$P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f''(x,y) \text{ er positiv definit}\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > -2\}.$$

Vi betragter den funktion $g : P \to \mathbf{R}$, som er defineret ved betingelsen

$$\forall (x,y) \in P : g(x,y) = f(x,y).$$

(5) Vis, at funktionen $g$ er strengt konveks, og bestem $g$'s værdimængde.

**Løsning.** Da funktionen $g$ har Hessematricen $g''(x,y) = f''(x,y)$ på mængden $P$, er $g$ strengt konveks. Det stationære punkt $(0,-1)$ er derfor et globalt minimumspunkt for $g$. Vi ser, at $g(0,-1) = 1 - e^{-1}$, og da $g(x,0) = e^{x^2} \to \infty$ for $x \to \infty$, har funktionen $g$ værdimængden $R(g) = [1 - e^{-1}, \infty[$.

(6) Vis, at den funktion $h : P \to \mathbf{R}$, som er defineret ved betingelsen

$$\forall (x,y) \in P : h(x,y) = \ln g(x,y),$$

er kvasikonveks.

**Løsning.** Påstanden er klar, thi ln er voksende.

**Opgave 3.** Vi betragter differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = 6t^2 + 4\sin(2t)$$

og

$$(**) \qquad \frac{dy}{dt} = x + 10t.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

**Løsning.** Ved integration finder vi straks, at

$$x = 2t^3 - 2\cos(2t) + k_1, \text{ hvor } k_1 \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

**Løsning.** Vi ser først, at

$$\frac{dy}{dt} = x + 10t = 2t^3 - 2\cos(2t) + k_1 + 10t, \text{ hvor } k_1 \in \mathbf{R},$$

og ved integration får vi så, at

$$y = \frac{1}{2}t^4 + 5t^2 - \sin(2t) + k_1 t + k_2, \text{ hvor } k_1, k_2 \in \mathbf{R}.$$

(3) Bestem den specielle løsning $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ til differentialligningen $(**)$, så betingelserne $\tilde{y}(0) = 0$ og $\tilde{y}'(0) = 3$ er opfyldt.

**Løsning.** Vi finder, at $k_1 = 5$ og $k_2 = 0$, så

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2}t^4 + 5t^2 + 5t - \sin(2t) \text{ og } \tilde{y}'(t) = 2t^3 + 10t - 2\cos(2t) + 5.$$

(4) Bestem Taylorpolynomiet $P_3$ af tredje orden for funktionen $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ ud fra punktet $t_0 = 0$.

**Løsning.** Vi har, at $\tilde{y}''(t) = 6t^2 + 4\sin(2t) + 10$ og $\tilde{y}'''(t) = 12t + 8\cos(2t)$. Heraf finder vi, at

$$P_3(t) = \tilde{y}(0) + \tilde{y}'(0)t + \frac{1}{2}\tilde{y}''(0)t^2 + \frac{1}{6}\tilde{y}'''(0)t^3 = 3t + 5t^2 + \frac{4}{3}t^3.$$

**Opgave 4.** For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

(1) Bestem mængden

$$C = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \text{ er konvergent} \right\}.$$

**Løsning.** Vi ser, at $x \in C$, hvis og kun hvis

$$\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow -3 < x < 3,$$

så $C = ]-3, 3[$.

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : C \to \mathbf{R}$, som er givet ved udtrykket

$$\forall\, x \in C : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Denne funktion er rækkens sumfunktion.

**Løsning.** Vi får, at

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{3}{3 - x}.$$

(3) Bestem den afledede funktion $f'$, og godtgør, at funktionen $f$ er voksende på mængden $C$.

**Løsning.** Vi finder, at

$$f'(x) = -\frac{-3}{(3-x)^2} = \frac{3}{(3-x)^2},$$

hvoraf det fremgår, at $f$ er voksende.

(4) Bestem elasticiteten $f^{\epsilon}$ for funktionen $f$.

**Løsning.** Elasticiteten bliver

$$f^{\epsilon}(x) = x \frac{3}{(3-x)^2} \frac{3-x}{3} = \frac{x}{3-x}.$$

(5) Bestem den anden afledede $f''$ for funktionen $f$, og godtgør, at $f$ er strengt konveks på mængden $C$.

**Løsning.** Den anden afledede bliver

$$f''(x) = -\frac{-6}{(3-x)^3} = \frac{6}{(3-x)^3} > 0, \quad \forall\, x \in C.$$

Heraf ser man, at funktionen $f$ er strengt konveks.