Matematik B juni 2020: Rettevejledning

Bemærk: Der lægges ved bedømmelsen af de enkelte spørgsmål vægt på, at den studerende præsenterer en fyldestgørende besvarelse med klare forklaringer og eventuelle mellemregninger, der ikke er baseret på brug af matematiske IT-værktøjer. Det er således ikke tilstrækkeligt bare at angive et facit.

(Ovenstående tekst er angivet i selve eksamenssættet, og de studerende var gjort bekendt med den på forhånd.)

I nedenstående løsningsforslag refereres gentagne gange til resultater fra EMEA og FMEA, som er de to pensumbøger i kurset (se kurser.ku.dk for detaljer). Sådanne referencer kræves dog <u>ikke</u> i eksamensbesvarelserne.

Opgave 1

Betragt først følgende matrix:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

(a) Lad $\mathbf{C}$ være en 3×3 matrix med determinant $|\mathbf{C}| = -1$.
Vis, at matricen $\mathbf{BC}$ er invertibel.

Da $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ begge er 3×3 matricer, har vi (EMEA Thm 16.4.1(vii), s.636):

$$|\mathbf{BC}| = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{C}| = -|\mathbf{B}| .$$

Determinanten af $\mathbf{B}$ kan fx udregnes ved udvikling efter første række:

$$|\mathbf{B}| = 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 \cdot 2 - 3 \cdot 3) - 2((-5) \cdot 2 - 0 \cdot 3) = -2 + 20 = 18 .$$

Altså er $|\mathbf{BC}| = -18 \neq 0$, og så følger det af EMEA Thm 16.7.1 (s.651), at $\mathbf{BC}$ er invertibel.

(b) Vis, at $\lambda = 2$ er en egenværdi for $\mathbf{B}$.

Det karakteristiske polynomium for $\mathbf{B}$ er:

$$p(\lambda) = |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ -5 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Ved at indsætte $\lambda = 2$ fås:

$$p(2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Altså er $\lambda = 2$ rod i det karakteristiske polynomium og dermed en egenværdi for $\mathbf{B}$ (FMEA afsnit 1.5, s.21-22).
Alternativt kan det karakteristiske polynomium udregnes til

$$p(\lambda) = (2-\lambda)\Big((4-\lambda)(2-\lambda) + 1\Big)$$

(eller et tilsvarende udtryk), hvoraf også umiddelbart følger, at $\lambda = 2$ er en rod.

(c) Vis, at $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\mathbf{B}$. Hvad er den tilhørende egenværdi?

Ved udregning af matrixproduktet $\mathbf{Bx}$ fås:

$$\mathbf{Bx} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\mathbf{x}\,.$$

Heraf ses umiddelbart, at $\mathbf{x}$ er en egenvektor for $\mathbf{B}$, og at den tilhørende egenværdi er $\lambda = 3$.

I resten af opgaven betragtes følgende kvadratiske form:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3\,.$$

(d) Opskriv den symmetriske matrix $\mathbf{A}$ hørende til Q.

(Se FMEA afsnit 1.7). Lad a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, være elementerne i $\mathbf{A}$. Diagonalelementet a_{ii} er konstanten foran x_i^2-leddet. For $i \neq j$ skal elementerne a_{ij} og a_{ji} opfylde, at $a_{ij} + a_{ji}$ er konstanten foran x_ix_j-leddet, og at $a_{ij} = a_{ji}$ (symmetri).
Derfor får vi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(e) Vis, at Q er positiv semidefinit, men ikke positiv definit.

Vi udregner først hovedunderdeterminanterne (principal minors) for $\mathbf{A}$ (se FMEA afsnit 1.7 s.31-33 for definition og notation).
Hovedunderdeterminanterne af orden 1 er:

$$D_1 = \Delta_1^{(1)} = 1, \quad \Delta_1^{(2)} = 4, \quad \Delta_1^{(3)} = 3\,.$$

Hovedunderdeterminanterne af orden 2 er:

$$D_2 = \Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3\,.$$

Hovedunderdeterminanten af orden 3 er:

$$D_3 = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0\,.$$

Af FMEA Thm 1.7.1(a,b) (s.32) kan vi så konkludere følgende: Q er positiv semidefinit, da alle hovedunderdeterminanter er større end eller lig med nul. Q er ikke positiv definit, da den ledende hovedunderdeterminant D_3 er lig med nul.

Opgave 2

Lad funktionerne $f(x,y)$ og $g(x,y)$ være givet ved følgende forskrifter:

$$f(x,y) = -e^x - (x+y)^2 + 3 \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{og}$$

$$g(x,y) = e^x + x^2 + y^2 + bxy \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

hvor b er en konstant.

(a) Vis, at $f(x,y)$ er strengt konkav.

Ved differentiation fås følgende partielle afledede af første orden:

$$f_1'(x,y) = -e^x - 2(x+y) \quad \text{og} \quad f_2'(x,y) = -2(x+y)\,.$$

Videre fås så følgende partielle afledede af anden orden:

$$f_{11}''(x,y) = -e^x - 2\,, \quad f_{22}''(x,y) = -2 \quad \text{og} \quad f_{12}''(x,y) = f_{21}''(x,y) = -2\,.$$

For alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gælder:

$$\begin{aligned} f_{11}''(x,y) &= -e^x - 2 < 0 \quad \text{og} \\ f_{11}''(x,y)f_{22}''(x,y) - (f_{12}''(x,y))^2 &= (-e^x - 2)(-2) - (-2)^2 = 2e^x > 0\,. \end{aligned}$$

Så følger af FMEA Thm 2.3.1(d) (s.56), at f er strengt konkav.
Alternativt kan man opskrive Hessematricen, og så bruge Thm 2.3.2(b) (s.57).

(b) Bestem alle værdier af b, for hvilke $g(x,y)$ er konveks.

Ved differentiation fås følgende partielle afledede af første orden:

$$g_1'(x,y) = e^x + 2x + by \quad \text{og} \quad g_2'(x,y) = 2y + bx\,.$$

Videre fås så følgende partielle afledede af anden orden:

$$g_{11}''(x,y) = e^x + 2\,, \quad g_{22}''(x,y) = 2 \quad \text{og} \quad g_{12}''(x,y) = g_{21}''(x,y) = b\,.$$

For alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gælder:

$$\begin{aligned} g_{11}''(x,y) &= e^x + 2 \geq 0\,, \\ g_{22}''(x,y) &= 2 \geq 0 \quad \text{og} \\ g_{11}''(x,y)g_{22}''(x,y) - (g_{12}''(x,y))^2 &= (e^x + 2)(2) - b^2 = 2e^x + 4 - b^2\,. \end{aligned}$$

Ifølge FMEA Thm 2.3.1(a) (s.56) (eller Thm 2.3.3(a), s.58) gælder således, at g er konveks hvis og hvis kun hvis $2e^x + 4 - b^2 \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Da $2e^x > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og $2e^x \to 0$ for $x \to -\infty$, er dette tilfældet netop hvis $4 - b^2 \geq 0$, hvilket er ækvivalent med $-2 \leq b \leq 2$.
Vi har således vist, at g er konveks hvis og kun hvis $b \in [-2, 2]$.

(c) Lad funktionen $h(x,y)$ være summen af $f(x,y)$ og $g(x,y)$:

$$h(x,y) = f(x,y) + g(x,y) \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,.$$

Lad R være følgende rektangel i $\mathbb{R}^2$:

$$R = [0,1] \times [0,2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1 \text{ og } 0 \le y \le 2\} \,.$$

Vis, at

$$\iint_R h(x,y)\,dx\,dy = b + 4 \,.$$

Vi finder først forskriften for $h(x,y)$:

$$\begin{aligned} h(x,y) &= f(x,y) + g(x,y) = -e^x - (x+y)^2 + 3 + e^x + x^2 + y^2 + bxy \\ &= -2xy + 3 + bxy = (b-2)xy + 3 \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,. \end{aligned}$$

Så bestemmer vi integralet ved først at integrere mht y (det indre integral) og dernæst mht x:

$$\begin{aligned} \iint_R h(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \Big(\int_0^2 \big((b-2)xy + 3\big)\,dy \Big)\,dx \\ &= \int_0^1 \big[(b-2)x(\tfrac{1}{2}y^2) + 3y\big]_{y=0}^{y=2}\,dx \\ &= \int_0^1 ((b-2)2x + 6)\,dx \\ &= \big[(b-2)x^2 + 6x\big]_0^1 = (b-2) + 6 = b + 4 \,. \end{aligned}$$

Integrationsrækkefølgen er ligegyldig (FMEA Thm 4.4.1, s.168), så man kan også integrere først mht x.

Opgave 3

Betragt følgende ligningssystem, hvor x, y og z er de ubekendte, og a er en konstant:

$$\begin{aligned} -x + az &= 0 \\ 4x + 2y + 3z &= 6 \\ x + y + az &= 0 \end{aligned}$$

(a) Opskriv koefficientmatricen for ligningssystemet.
Vis, at det for alle værdier af a gælder, at ligningssystemet har en entydig løsning.

Koefficientmatricen aflæses ud fra ligningssystemet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} .$$

Vi udregner determinanten af $\mathbf{A}$:

$$|\mathbf{A}| = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2a + 3) + 2a = 3 .$$

Da vi således har $|\mathbf{A}| \neq 0$ for alle a, følger det af EMEA Thm 16.8.1 (s.654), at ligningssystemet har en entydig løsning for alle værdier af a.

(b) Vis, at den udvidede koefficientmatrix (*augmented coefficient matrix*) for ligningssystemet ved rækkeoperationer kan omformes til følgende matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Brug dette til at bestemme den entydige løsning til ligningssystemet.

Den udvidede koefficientmatrix aflæses ud fra ligningssystemet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix} .$$

Ved at addere 4 gange første række til anden række og 1 gange første række til tredje række fås:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 3 + 4a & 6 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \end{pmatrix} .$$

Ved at multiplicere første række med -1 og ombytte anden og tredje række fås videre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 2 & 3+4a & 6 \end{pmatrix}.$$

Så adderes -2 gange anden række til tredje række:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Endelig multipliceres tredje række med $\frac{1}{3}$, hvorved vi får den ønskede matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Denne matrix svarer til følgende ligningssystem, som er ækvivalent med det oprindelige:

$$\begin{aligned} x - az &= 0 \\ y + 2az &= 0 \\ z &= 2\,. \end{aligned}$$

Ved at indsætte $z = 2$ i de første to ligninger fås følgende entydige løsning:

$$\begin{aligned} x &= 2a \\ y &= -4a \\ z &= 2\,. \end{aligned}$$

Alternativt kan man omforme den udvidede koefficientmatrix yderligere, så den kommer på reduceret echelon form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & -4a \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Heraf aflæses samme entydige løsning som ovenfor.