Makro A sommer 2012

1.1) Steady state for den Solow model har konstant kapital og BNP per capita (per arbejdskraft) og kan derfor kun frembringe vedvarende vækst når arbejdskraften vokser.

1.2) Vækst i BNP per capita. Den simple Solow model har steady state BNP per capita der er konstant så modellen må udvides med tekniske fremskridt

1.3) Med en Cobb-Douglas produktionsfunktion er det muligt at producere en given mængde output med uendeligt lidt af den ene input når blot der er tilstrækkeligt meget af de andre: vedvarende vækst er mulig med passende teknisk fremskridt. Med andre produktionfunktione er det ikke sikkert at vedvarede vækst er mulig når der er et mindste krav til et input.

2.1)

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha} \quad \text{prod. funktion}$$

$$S_t = sY_t \quad \text{adfærd}$$

$$I_t = S_t \quad \text{nat.regn. identitet}$$

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t \quad \text{kapital akk.}$$

$$A_{t+1} = (1+g)A_t \quad \text{tekniske fremskridt}$$

(Betingelser for ligevægt vedr. w og r, realløn og usercost kan udelades)

Ligning for kap. akk. viser at ændring i kapital er investeringer/opsparing fratrukket afskrivninger/nedslidning. Det er en dynamisk eller intertemporal definitionsligning der som den centrale binder de enkelte perioder sammen.

2.2) Kapital akk. kan opskrives som

$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$$

Divider med $A_{t+1}L = (1+g)A_t L$ og brug $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L}$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{1+g}\left(s\frac{Y}{A_t L} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right)$$

Via $\frac{Y}{A_t L} = \frac{K_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha}}{A_t L} = \left(\frac{K_t}{A_t L}\right)^{\alpha} = \tilde{k}_t^{\alpha}$

får så

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{1+g}\left(s\,\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right)$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{1+g}\left(s\,\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t - (1+g)\tilde{k}_t\right)$$

$$= \frac{1}{1+g}\left(s\,\tilde{k}_t^{\alpha} - (\delta + g)\tilde{k}_t\right)$$

Dette er Solows ligning.
Væksten i kapital per effektiv arbejdskraft er opsparing minus afskrivning og udtynding grundet stigning i effektivitet/produktivitet.

2.3) Steady state er et vækstforløb hvor vækstraten er konstant, diverse forhold er konstante. Fx er $\tilde{k}_t$ konstant. Er forløbet stabilt er steady state det modellen konvergerer mod.

I denne model er det smartest at se på $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L}$ eller $\frac{K_t}{A_t}$ da disse forhold vil konvergere mod en konstant. På langt sigt vil Y_t vokse med g og derfor vil K_t også vokse med g så $\frac{K_t}{A_t}$ og $\frac{K_t}{A_t L}$ vil være konstante på langt sigt

2.4) Steady state for $\tilde{k}_t$ er at $\tilde{k}_t$ er konstant så hver side i Solows ligning er konstant, steady state findes derfor af

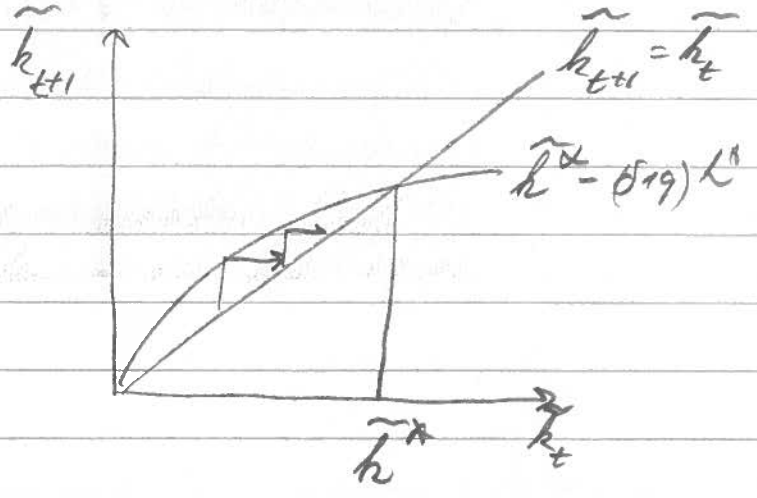
$$\frac{1}{1+g}\left[s\,\tilde{k}^{*\alpha} - (\delta+g)\,\tilde{k}^{*}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{k}^{*\,1-\alpha} = \frac{s}{\delta+g}$$

$$\Rightarrow \tilde{k}^{*} = \left(\frac{s}{\delta+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Heraf følger $\tilde{y}^{*} = \tilde{k}^{*\alpha} = \left(\frac{s}{\delta+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ og

$$Y_t^{*} = A_t \cdot L\,\tilde{y}^{*} = A_t\left(\frac{s}{\delta+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L = (1+g)^t\left(\frac{s}{\delta+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_0 L$$



Det følger af fasediagrammet at $\tilde{k}^{*}$ er stabil.

Hældninge på den krumme kurve er

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{1}{1+g}\left(s\alpha\,\tilde{k}_t^{\alpha-1} + 1-\delta\right)$$ så i steady

state punktet: $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t}(\tilde{k}^{*}) = \frac{1}{1+g}\left(s\alpha\left(\frac{\delta+g}{s}\right) + 1-\delta\right)$

$$= \frac{1}{1+g}\left(\alpha(\delta+g) + (1-\delta)\right) < \frac{1}{1+g}\left(\delta+g+1-\delta\right) = 1$$

så hældninge er mindre end 1 og skærer $k_{t+1} = k_t$ fra oven så tilstande bliver stabil. Bogen viser skæringen mere omstændigt, men kun den virkeligt gode besvarelse har dette argument rigtigt. Antydning i fasediagram. er nok for den gode besvarelse.

2.5) Hvis s øges vil I_t og dermed K_t og Y_t øges; det kan også ses af $\frac{\partial y_t^m}{\partial s} > 0$.

Ved at forbruge mindskes kapitalakk og når $s=1$ får højeste Y_t. Men formålet er højt C_t.
Golden rule $s=\alpha$ giver det højeste C_t. Den virkeligt gode besvarelse vil udlede $s=\alpha$, den gode blot sige at sådan er det. Ved lavt s vil øget s give øget K og øget fremtidigt Y og dermed C, ved højt s vil øget s mindske C og det vil dominere fremtidig vækst

2.6) Fra opg 2.2 bruges $k_{t+1} = G(k_t)$
Taylor udvikling omkring k^*, hvorved $k^* = G(k^*)$

$$G(k_t) - G(k^*) = G'(k^*)(k_t - k^*)$$

$$\Rightarrow k_{t+1} - k^* = G'(k^*)(k_t - k^*).$$

Taylor af $\log k_t$ omkring $\log k^*$ giver

$\log k_t - \log k^* = \frac{1}{k^*}(k_t - k^*)$ så den første Taylor kan skrives som idet $\frac{1}{k^*}$ forkortes ud

$$\log k_{t+1} - \log k^* = G'(k^*)(\log k_t - \log k^*)$$

$$\Rightarrow \log k_{t+1} = G'(k^*) \log k_t + [1 - G'(k^*)] \log k^*$$

$$(*) \quad = (1-\lambda) \log k_t + \lambda \log k^*$$

hvor $G'(k^*) = 1 - \lambda$ eller $\lambda = 1 - G'(k^*)$

$$G'(k_t) = \frac{1}{1+g}\left(s\alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} + 1 - \delta\right)$$

$$G'(k^*) = \frac{1}{1+g}\left(s\alpha\left(\frac{s}{\delta+g}\right)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} + 1 - \delta\right)$$

$$= \frac{1}{1+g}\left(\alpha(\delta+g) + 1 - \delta\right).$$

$$\lambda = 1 - G'(k^*) = \frac{1}{1+g}\left(1 + g - \alpha(\delta+g) - 1 + \delta\right) = \frac{1}{1+g}\left((1-\alpha)(\delta+g)\right)$$

$$\approx (1-\alpha)(\delta+g) \approx \frac{2}{3}(5\% + 3\%) \approx 5\% < 1$$

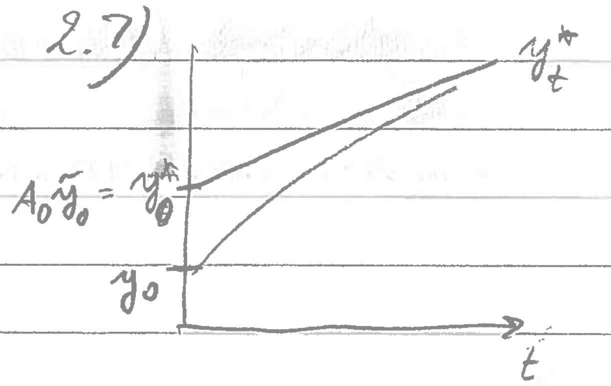
Strengt taget er det ikke nødvendigt at finde $G'(k^*)$; der bliver ikke bedt om det.

(*) er $\log \tilde{k}_{t+1} = (1-\lambda)\log k_t + \lambda \log k^*$

Da vi har vist at $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$ er $\log y_t = \alpha \log k_t$ så gang med α på begge sider og få

$$\log \tilde{y}_{t+1} = (1-\lambda)\log \tilde{y}_t + \lambda \log \tilde{y}^*$$

2.7)



$$y_t = A_t \tilde{y}_t$$

Start i y_0 og konverger til de rette linje y_t^*.

Væksten vil være $\frac{1}{T}(\log y_t^* - \log y_0)$ i tilnærmelse plus g som det hele vokser med

Partikulær løsning til differensligningen er $\log \tilde{y}^*$, steady state værdie.

Den homogene ligning $\log \tilde{y}_{t+1} = (1-\lambda)\log \tilde{y}_t$ har løsningen $\log \tilde{y}_t = (1-\lambda)^t C$ så den fuldstændige løsning er $\log \tilde{y}_t = (1-\lambda)^t C + \log \tilde{y}^*$

Vi kan fastlægge C ved $t=0$:

$$\log \tilde{y}_0 = (1-\lambda)^0 C + \log \tilde{y}^* \Rightarrow$$

$$C = \log \tilde{y}_0 - \log \tilde{y}^*.$$

Den totale løsning:

$$\log \hat{y}_t = (1-\lambda)^t \left(\log \tilde{y}_0 - \log \hat{y}^*\right) + \log \hat{y}^*$$

$$= \left[1-(1-\lambda)^t\right] \log \tilde{y}^* + (1-\lambda)^t \log \tilde{y}_0 .$$

$y_t = A_t \tilde{y}_t$ så $\log y_t = \log A_t + \log \tilde{y}_t$ og

$$\log A_t = \log\left((1+g)^t A_0\right) = t \log(1+g) + \log A_0$$

$$\approx t \cdot g + \log A_0 .$$

Heraf følger

$$\frac{\log y_T - \log y_0}{T} = \frac{\log \tilde{y}_T - \log \tilde{y}_0}{T} + \frac{Tg + \log A_0 - \log A_0}{T}$$

$$= g + \frac{1}{T}\left\{\left[1-(1-\lambda)^T\right] \log \tilde{y}^* + (1-\lambda)^T \log \tilde{y}_0 - \log \tilde{y}_0\right\}$$

$$= g + \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}\left\{\log \tilde{y}^* - \log \tilde{y}_0\right\}$$

fra opg 2.4)

$$= g + \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\log s - \log(\delta+g)\right) - \log y_0 + \log A_0\right\}$$

Bortset fra $1-(1-\lambda)^T$ svarer det til det forventede.

Kun den virkeligt exceptionelt gode besvarelse har 2.6 (og 2.7) rigtigt. Den gode besvarelse har alene nogle antydninger af det rigtige.
Det betyder at en studerende kan bestå uden at besvare 2.6 (og 2.7) hvis ellers resten er nogenlunde besvaret