Københavns Universitets Økonomiske Institut

1. årsprøve 2018 V-1A ex ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Matematik A

Torsdag den 18. januar 2018

Opgave 1. Differentiation.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent, ikke-tomt interval, og lad $a \in I$ være et givet punkt. Lad endvidere $f : I \to \mathbf{R}$ være en given reel funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er differentiabel i punktet $a \in I$ med differentialkvotienten

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

Løsning. Vi danner differenskvotienten

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \forall\, x \in I \setminus \{a\}.$$

Hvis differenskvotienten har en grænseværdi L for x gående mod a, siger vi, at funktionen f er differentiabel i punktet a med differentialkvotienten

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = L.$$

(2) Udregn følgende differentialkvotienter

$$\frac{d}{dx}\left(3^x + 2x^2 - \cos(5x)\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\cos(2x^2) - \sin(3x^3)\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1 + x^4}\right).$$

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{d}{dx}\left(3^x + 2x^2 - \cos(5x)\right) = (\ln 3)3^x + 4x + 5\sin(5x),$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(2x^2)-\sin(3x^3)\right) = -4x\sin(2x^2) - 9x^2\cos(3x^3),$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1+x^4}\right) = \frac{2x(1+x^4)-4x^2x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{2x-2x^5}{(1+x^4)^2} = \frac{2x(1-x^4)}{(1+x^4)^2}.$$

(3) Differentier den funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{for } x \geq 0 \\ 1+x, & \text{for } x < 0 \end{cases}.$$

Løsning. Der opstår kun et problem i punktet $x = 0$. Vi ser således, at

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{for } x > 0 \\ \frac{x}{x}, & \text{for } x < 0 \end{cases},$$

hvoraf vi finder, at

$$\begin{cases} e^x, & \text{for } x > 0 \\ 1, & \text{for } x < 0 \end{cases} \to 1 \ \text{ for } \ x \to 0,$$

hvor vi har benyttet L'Hôpitals regel.

Vi finder så, at

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & \text{for } x > 0 \\ 1, & \text{for } x \leq 0 \end{cases}.$$

(4) Er funktionen $f'(x)$ differentiabel overalt på $\mathbf{R}$?

Løsning. Vi ser på punktet $x = 0$, hvor der kunne opstå problemer. Vi finder, at

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{for } x > 0 \\ \frac{1-1}{x}, & \text{for } x < 0 \end{cases},$$

hvoraf vi får, at

$$\begin{cases} e^x, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{for } x < 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1, & \text{for } x \to 0+ \\ 0 & \text{for } x \to 0- \end{cases},$$

idet vi atter har benyttet L'Hôpitals regel.

Dette viser, at funktionen f' ikke er differentiabel i punktet $x = 0$.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 4 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 2.$$

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Funktionen har det ene stationære punkt $(x, y) = (2, -1)$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at funktionen f har Hessematricen

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Da Hessematricen $f''(x, y)$ er positiv definit overalt på mængden $\mathbf{R}^2$, og da funktionen f kun har et stationært punkt, er dette stationære punkt et globalt minimumspunkt. Vi ser straks, at $f(2, -1) = -5$. Endvidere ser vi, at $f(0, y) = y^2 + 2y \to \infty$ for $y \to \infty$.

Dette viser, at funktionen f har værdimængden $R(f) = [-5, \infty[$.

Opgave 3. Lad $a > 1$ være et fast valgt reelt tal. Vi betragter den uendelige række

(§) $$\sum_{n=0}^{\infty} a^{nx}.$$

(1) Bestem mængden

$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a^{nx} \text{ er konvergent}\}.$$

Løsning. Den givne uendelige række er konvergent, hvis og kun hvis kvotienten $q = a^x < 1$, hvilket er ensbetydende med, at $x < 0$. Heraf får vi, at $C = \mathbf{R}_-$.

(2) Bestem en forskrift for sumfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{nx}, \quad \forall\, x \in C.$$

Løsning. For ethvert $x < 0$ finder vi, at

$$f(x) = \frac{1}{1 - a^x}.$$

(3) Bestem værdimængden for sumfunktionen f.

Løsning. Vi ser, at

$$f'(x) = -\frac{1}{(1 - a^x)^2} \cdot (-\ln a)a^x = \frac{(\ln a)a^x}{(1 - a^x)^2},$$

som er positiv overalt på C, fordi $a > 1$. Heraf finder vi, at funktionen f er voksende overalt på $C = \mathbf{R}_-$.

Desuden ser vi, at $f(x) \to 1$ for $x \to -\infty$ og $f(x) \to \infty$ for $x \to 0-$. Dette viser, at sumfunktionen f har værdimængden $R(f) =]1, \infty[$.

(4) Bestem den afledede funktion $f'(x)$ og elasticiteten $f^{\epsilon}(x)$ for $x \in C$.

Løsning Ovenfor har vi allerede fundet den afledede funktion f'.

Elasticiteten af f er da

$$f^{\epsilon}(x) = x \cdot \frac{(\ln a)a^x}{(1 - a^x)^2} \cdot (1 - a^x) = \frac{x(\ln a)a^x}{1 - a^x}.$$