Skriftlig eksamen i Matematik A. Sommeren 2014

Onsdag den 11. juni 2014

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 S-1A ex

Skriftlig eksamen i Matematik A

Onsdag den 11. juni 2014

---

2 sider med 3 opgaver.

Løsningstid: 2 timer.

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Rentesregning.

I et pengeinstitut er terminsrenten $r > 0$, og i n på hinanden følgende terminsdage indsættes beløbet $a > 0$ på en konto i dette pengeinstitut. Vi antager, at $n \geq 2$.

Der er her tale om en opsparingsannuitet.

Efter at den sidste indbetaling på kontoen er foretaget, er saldoen A_n.

(1) Vis, at

$$A_n = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \ldots + a(1+r)^{n-1} = \frac{a}{r}\Big((1+r)^n - 1\Big).$$

(2) I det samme pengeinstitut indsættes på en terminsdag en kapital S, og denne kapital forrentes i n terminer, så den vokser til beløbet S_n.

Bestem S udtrykt ved a, r og n, så $S_n = A_n$.

Opgave 2.

(1) Udregn de ubestemte integraler

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx, \int \frac{\cos x}{10 + \sin x}\,dx \text{ og } \int \frac{e^x}{(3+e^x)^2}\,dx.$$

(2) Bestem værdien af det uegentlige integral

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(3+e^x)^2}\,dx.$$

(3) Bestem tallet k, så

$$\int_0^\infty \frac{ke^x}{(3+e^x)^2}\,dx = 1.$$

Opgave 3. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = e^x + y^2 - y^3.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

Vi definerer herefter den funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : g(x) = f(x,x).$$

(3) Bestem Taylorpolynomiet P_3 af tredje orden for funktionen g ud fra punktet $x_0 = 0$. Dette polynomium kaldes også Maclaurinpolynomiet af tredje orden for funktionen g.