Matematik B, 7. januar 2020: Rettevejledning

Opgave 1

Betragt matricerne A og B givet ved

A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ og B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Udregn matrixprodukterne AB og BA.

Løsning:

Produkterne udregnes til

AB = $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ og BA = $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) Vis, at matricen AB ikke er regulær og ikke er symmetrisk.

Løsning:

Determinanten af AB udregnes til 0, der viser, at AB ikke er regulær. AB er heller ikke symmetrisk, for eksempel da $1 \neq -4$.

3) Vis, at matricen BA er regulær og bestem den inverse matrix $(BA)^{-1}$.

Løsning:

Determinanten af BA udregnes til $-3 \neq 0$, så BA er regulær.

Ved omformning af (BA | E) til $((BA)^{-1}$| E) fås:

$(BA)^{-1}$ = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

4) Vis, at matricen BA har egenværdierne $2+\sqrt{7}$ og $2-\sqrt{7}$.

Løsning:

Det karakteristiske polynomium for BA udregnes til

$p_{BA}(t) = \det(BA - tE) = t^2 - 4t - 3,$

og rødderne i dette polynomium udregnes ved diskriminantmetoden til $2+\sqrt{7}$ og $2-\sqrt{7}$.

5) Vis, at matrixproduktet $B^T B$ ikke er en regulær matrix. Her betegner B^T den til B transponerede matrix.

Løsning:

$B^T B$ udregnes til

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Da række 1 og 3 er ens, ses, at determinanten af $B^T B$ er 0. Derfor er matricen $B^T B$ ikke regulær.

6) Vis, at $\lambda = 0$ er en egenværdi for $B^T B$.

Løsning:

Da $\det(B^T B) = 0$, er $\det(B^T B - 0E) = 0$, så $\lambda = 0$ er en egenværdi for $B^T B$.

7) Bestem egenrummet hørende til egenværdien $\lambda = 0$ for $B^T B$.

Løsning:

$B^T B - 0E = B^T B$ omformes ved hjælp af rækkeoperationer til echelonmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenvektorer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ hørende til egenværdien 0 opfylder altså $x_1 + x_3 = 0$ og $x_2 = 0$, så egenrummet hørende til egenværdien 0 er givet som Span $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Opgave 2

Lad funktionerne $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved forskrifterne

$$f(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 4xy + 1$$

og

$$g(x, y) = 2y \cdot \exp(x^3)$$

Lad desuden mængderne K_1 og K_2 være givet ved

$$K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$

og

$$K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge 0 \leq y \leq 3x\}$$

1) Udregn integralet

$$\int_{K_1} f(x, y)\, d(x, y)$$

Løsning:

$$\int_{K_1} f(x, y)\, d(x, y) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \left(\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} (3x^2 - 3y^2 + 4xy + 1)\, dy\right) dx =$$

$$\int_0^1 [3yx^2 - y^3 + 2xy^2 + y]_0^2 \ dx = \int_0^1 (6x^2 + 8x - 6)\, dx =$$

$$[2x^3 + 4x^2 - 6x]_0^1 = 2 + 4 - 6 = 0.$$

2) Udregn integralet

$$\int_{K_2} g(x,y)\, d(x,y)$$

Vink til 2) : Integrér først med hensyn til y.

Løsning:

$$\int_{K_2} g(x,y)\, d(x,y) = \int_0^1 (\int_0^{3x} 2y \cdot \exp(x^3)\, dy)\, dx =$$

$$\int_0^1 [y^2 \cdot \exp(x^3)]_0^{3x}\, dx = \int_0^1 9x^2 \cdot \exp(x^3)\, dx =$$

$$[3\exp(x^3)]_0^1 = 3\exp(1) - 3\exp(0) = 3e - 3.$$

Opgave 3

Betragt differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} + (\sin(t))\, x = \sin(t).$$

1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Løsning:

Ligningen er en lineær differentialligning af første orden med
$p(t) = \sin(t)$ og $q(t) = \sin(t)$.

$P(t) = -\cos(t)$ er en stamfunktion til $p(t)$, så den fuldstændige løsning er, jf. "Panserformlen", givet ved

$x = Ce^{\cos(t)} + e^{\cos(t)} \int e^{-\cos(t)} \sin(t)\, dt$, hvor C er en arbitrær konstant.

For at udregne det sidste integral bruges integration ved substitution: Sæt $u = -\cos(t)$. En stamfunktion til $e^{-\cos(t)} \sin(t)$ udregnes så til $e^{-\cos(t)}$.

Dermed er den fuldstændige løsning givet ved:

$x = Ce^{\cos(t)} + e^{\cos(t)}e^{-\cos(t)} = Ce^{\cos(t)} + 1,\ t \in \mathbb{R},$ hvor C er en arbitrær konstant.

2) Find den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen, hvor betingelsen $\tilde{x}(\pi) = 8$ er opfyldt.

Løsning:

Ved indsættelse af $t = \pi$ fås

$Ce^{\cos(\pi)} + 1 = 8 \Leftrightarrow Ce^{-1} + 1 = 8 \Leftrightarrow Ce^{-1} = 7 \Leftrightarrow C = 7e$

Dermed har $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ forskriften

$\tilde{x}(t) = 7e \cdot e^{\cos(t)} + 1 = 7e^{1+\cos(t)} + 1, t \in \mathbb{R}.$

Opgave 4

Lad funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}y^4 + 2x^2 + y^2 - xy + 7.$$

1) Bestem de partielle afledede $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ samt Hessematricen $H(x,y)$ for f i ethvert punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Løsning:

$f'_x(x,y) = x^3 + 4x - y$

$f'_y(x,y) = \frac{4}{3}y^3 + 2y - x$

$H(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+4 & -1 \\ -1 & 4y^2+2 \end{pmatrix}$

2) Vis, at f er en strengt konveks funktion.

Løsning:

Hessematricen er symmetrisk, og de to ledende hovedunder-determinanter er hhv. $3x^2 + 4$ og $(3x^2 + 4)(\ 4y^2 + 2) - 1$.
Den første er oplagt positiv for alle værdier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, og
$(3x^2 + 4)(\ 4y^2 + 2) - 1 \geq 4 \cdot 2 - 1 = 7 > 0$ for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Dermed er Hessematricen positiv definit for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, så f er en strengt konveks funktion.

3) Vis, at punktet $(0,0)$ er et stationært punkt for f.

Løsning:

Ved indsættelse af $(0,0)$ i de partielle afledede fås straks, at

$f_x'(0,0) = 0$ og $f_y'(0,0) = 0$,

som det skulle vises.

4) Find værdimængden for f.

Løsning:

Da f er en (strengt) konveks funktion, er det stationære punkt $(0,0)$ et globalt minimumspunkt for f.

Den tilhørende globale minimumsværdi er

$f(0,0) = 7.$

Desuden ses, at

$f(x, 0) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 7 \to \infty$ for $x \to \infty$.

Da f er kontinuert på $\mathbb{R}^2$, er værdimængden for f $[7, \infty[$.

Opgavesættet slut