Skriftlig eksamen i Matematik A. Vinteren 2014 - 2015

Onsdag den 18. februar 2015

Dette sæt omfatter 2 sider med 3 opgaver ud over denne forside

Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2015 V-1A rx

Skriftlig eksamen i Matematik A

Onsdag den 18. februar 2015

---

2 sider med 3 opgaver.
Løsningstid: 2 timer.
Ingen hjælpemidler må medbringes ved eksamen.

Opgave 1. Stamfunktioner.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent, ikke-tomt interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen $F : I \to \mathbf{R}$ er en stamfunktion til f.

(2) Vis, at hvis F_0 er en stamfunktion til f, da kan enhver stamfunktion F til f skrives på formen

$$F(x) = F_0(x) + c, \text{ hvor } c \in \mathbf{R}.$$

(3) Hvad forstår man ved det ubestemte integral

$$\int f(x)\, dx$$

til funktionen f?

(4) Udregn følgende ubestemte integraler

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\, dx, \int \frac{e^x}{1066+e^x}\, dx \text{ og } \int (1,479 + e^x)e^x\, dx.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 - y^2 + (x-y)^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \ \text{ og } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(4) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for f.

(5) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $\big(1, 2, f(1, 2)\big)$.

Opgave 3. Vi betragter ligningen

$$(*) \qquad e^x + \sin x - 2y^2 + xy + 1 = 0.$$

(1) Godtgør, at punktet $(x_0, y_0) = (0, 1)$ er en løsning til ligningen $(*)$.

(2) I en omegn af punktet $x = 0$ definerer ligningen $(*)$ den variable y som en implicit given funktion $y = y(x)$ af den variable x. Bestem differentialkvotienten $y'(0)$.

(3) I en omegn af punktet $y = 1$ definerer ligningen $(*)$ den variable x som en implicit given funktion $x = x(y)$ af den variable y. Bestem differentialkvotienten $x'(1)$.

(4) I en åben omegn U af $x = 0$ betragter vi den funktion $f : U \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, x \in U : f(x) = y\Big(\sin(2x)\Big).$$

Bestem differentialkvotienten $f'(0)$.