Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2011

MATEMATIK B

1. årsprøve

Fredag den 10. juni 2011

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes nogen form for elektroniske hjælpemidler)

Vi henleder din opmærksomhed på, at du skal besvare eksamensopgaven på det sprog, som du har tilmeldt dig ved eksamenstilmeldingen. Har du tilmeldt dig fagets engelske titel, skal du besvare det engelske opgavesæt på engelsk. Har du tilmeldt dig fagets danske titel eller den engelske titel med "eksamen på dansk" i parentes, skal du besvare det danske opgavesæt på dansk.

Er du i tvivl om, hvad du har tilmeldt dig, fremgår det af printet med din tilmelding fra de studerendes selvbetjening.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 S-1B ex

EKSAMEN I MATEMATIK B

Fredag den 10. juni 2011

---

3 sider med 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert tal $v \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & v \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem determinanten $\det(A(v))$ for matricen $A(v)$ for et vilkårligt $v \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst de tal $v \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(v)$ er regulær.

(2) Matricen $A(0)$ er regulær. Bestem den inverse matrix $A(0)^{-1}$ til $A(0)$.

(3) For ethvert $v \in \mathbf{R}$ skal man udregne det karakteristiske polynomium $P_v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, der er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P_v(t) = \det\Big(A(v) - tE\Big).$$

(4) Vis dernæst, at

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P_v(t) = (1 - t)Q_v(t),$$

hvor $Q_v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et andengradspolynomium, der afhænger af v.

(5) For ethvert $v \in \mathbf{R}$ skal man udregne diskriminanten $D(v)$ for andengradspolynomiet Q_v og vise, at $D(v) > 0$.

(6) Vis, at andengradspolynomiet Q_v ikke har $t = 1$ som rod, og bestem dernæst samtlige rødder i det karakteristiske polynomium P_v.

(7) Vis, at for ethvert $v \in \mathbf{R}$ har matricen $A(v)$ tre forskellige egenværdier.

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + 2y^2 + x^4 + 2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og vis dernæst, at funktionen f er strengt konveks.

(4) Bestem værdimængden $R(f)$ for funktionen f.

(5) Betragt funktionen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x, y) = \ln(f(x, y)).$$

Vis, at funktionen g er kvasikonveks.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \Big(4\cos(2t)\Big)x = e^{t-2\sin(2t)}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = -3$ er opfyldt.

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0)$$

af første orden for funktionen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ i punktet $t = 0$.

(4) Bestem en ligning for tangenten til grafen for løsningen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ gennem punktet $(0, -3)$.

Opgave 4. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som givet ved

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = xe^{xy} + 4x.$$

For ethvert $v > 0$ betragter vi desuden mængden

$$A(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq v \wedge 1 \leq y \leq 2\}.$$

(1) Bestem for ethvert $v > 0$ integralet

$$I(v) = \int_{A(v)} f(x, y)\, d(x, y).$$

(2) Bestem grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \Big(\frac{I(v)}{\cos(v) - 1} \Big) .$$

(3) Løs ligningen $f(x, y) = 0$, og bestem dernæst værdimængden for funktionen f.