Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2014 S-1A rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Fredag den 8. august 2014

Rettevejledning

Opgave 1. Differentiation.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et ikke-tomt, åbent interval, og lad $f : I \to \mathbf{R}$ være en funktion.

(1) Forklar, hvad det vil sige, at funktionen f er differentiabel i et punkt $a \in I$, og forklar dernæst, hvad man forstår ved differentialkvotienten $f'(a)$.

Løsning. Funktionen f er differentiabel i $a \in I$, dersom differenskvotienten for f ud fra a har en grænseværdi for x gående mod a. Dette betyder, at grænseværdien

$$L = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

eksisterer.

Hvis f er differentiabel i a, er differentialkvotienten $f'(a) = L$.

(2) Betragt den funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{for } x \leq 0 \end{cases}.$$

Vis, at funktionen f er differentiabel overalt på $\mathbf{R}$, og bestem den afledede funktion f'.

Løsning. For $x > 0$, er $f'(x) = 4x^3$, og for $x < 0$, er $f'(x) = 0$.

Hvis $x \neq 0$, får vi, at

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \frac{x^4}{x} = x^3, & \text{for } x > 0 \\ \frac{0}{x} = 0, & \text{for } x < 0 \end{cases} \to 0 \text{ for } x \to 0,$$

så $f'(0) = 0$.

Da er

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{for } x \leq 0 \end{cases}.$$

(3) Afgør, om funktionen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$g(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{for } x \neq 0 \\ 0, & \text{for } x = 0 \end{cases},$$

er differentiabel i punktet $x = 0$.

Løsning. For $x \neq 0$ får vi, at

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

som ikke har nogen grænseværdi for x gående mod 0. Derfor er g ikke differentiabel i 0.

(4) Differentier funktionen $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : h(x) = \frac{x^2+2}{1+x^2}.$$

Løsning. Vi ser, at

$$h'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x(x^2+2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

(5) Bestem monotoniintervallerne, evt. ekstremumspunkter og værdimængden for funktionen h.

Løsning. Vi finder, at $f'(x) > 0$ for $x < 0, f'(x) = 0$, når og kun når $x = 0$, og at $f'(x) < 0$ for $x > 0$.

Da er f voksende på intervallet $]-\infty, 0]$ og aftagende på intervallet $[0, \infty[$. I punktet $x = 0$ har f et globalt maksimum med den globale maksimumsværdi $f(0) = 2$.

Desuden ser vi, at

$$f(x) = \frac{x^2+2}{1+x^2} \to 1 \text{ for } x \to \pm\infty.$$

Heraf får vi, at f har værdimængden $R(f) =]1, 2]$.

Opgave 2.

(1) Udregn de ubestemte integraler

$$\int (x^2-1)e^x \, dx \text{ og } \int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} \, dx.$$

Løsning. Vi udregner, at

$$\int (x^2-1)e^x \, dx = (x^2-1)e^x - \int 2xe^x \, dx = (x^2-1)e^x - \Big(2xe^x - \int 2e^x \, dx\Big) =$$

$$(x^2-1)e^x - 2xe^x + 2e^x + k = x^2e^x - 2xe^x + e^x + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$.

Desuden får vi, at

$$\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} \, dx = \int e^{-\sin x} d(\sin x) = -e^{-\sin x} + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R}.$$

(2) Udregn det bestemte integral

$$I(a) = \int_0^a \frac{\cos x}{e^{\sin x}} \, dx$$

for et vilkårligt $a \in \mathbf{R}$.

Løsning. Ved at udnytte det netop fundne resultat får vi, at

$$I(a) = \int_0^a \frac{\cos x}{e^{\sin x}} \, dx = \Big[-e^{-\sin x}\Big]_0^a = 1 - e^{-\sin a}.$$

(3) Bestem grænseværdien

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{I(a)}{1-e^a}\right).$$

Løsning. Vi opnår, ved at benytte L'Hôpitals regel, at

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{I(a)}{1-e^a}\right) = \lim_{a\to 0}\left(-\frac{\cos a}{e^{\sin a}e^a}\right) = -1.$$

Opgave 3. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + (x-y)^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - 2y \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 2y.$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette punkt.

Løsning. Funktionen har det ene stationære punkt $(0,0)$.

(3) Afgør, om det stationære punkt er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Funktionen f har Hessematricen

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

hvoraf det fremgår, at $(0,0)$ er et minimumspunkt for f.

Vi betragter mængden

$$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \,\wedge\, 0 \leq y \leq x\}.$$

(4) Begrund, at restriktionen af funktionen f til mængden K har både et globalt maksimum og et globalt minimum på K.

Bestem desuden disse globale ekstremumspunkter og deres tilhørende globale ekstremumsværdier.

Løsning. Mængden K er afsluttet og begrænset og derfor kompakt, og f er en kontinuert funktion. Af ekstremværdisætningen følger det så, at restriktionen af f til K har et globalt maksimum og et globalt minimum på K.

Der er ingen stationære punkter i det indre af K, så de globale ekstremer findes derfor på randen af K. Denne rand inddeles nu i de tre retlinjede stykker I, II og III.

$I : 0 \leq x \leq 1$ og $y = 0$. Da er $f(x, 0) = 2x^2$, som er voksende på I. Vi ser, at $f(0, 0) = 0$ og $f(1, 0) = 2$.

$II : x = 1$ og $0 \leq y \leq 1$. Så er $f(1, y) = 2+y^2-2y$, og $f'(1, y) = 2y-2$, så f aftager på II. Vi får, at $f(1, 1) = 1$.

$III : 0 \leq x \leq 1$ og $x = y$. Da er $f(x, x) = x^2$, som er voksende på III.

Dette viser følgende:

Restriktionen af f til den kompakte mængde K har globalt minimum i $(0, 0)$ med den globale minimumsværdi 0 og globalt maksimum i $(1, 0)$ med den globale maksimumsværdi 2.