Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2017 V-1A ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik A

Torsdag den 5. januar 2017

Rettevejledning

Opgave 1. Partiel integration.

Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent, ikke-tomt interval, og lad $f, g : I \to \mathbf{R}$ være to kontinuerte funktioner. Lad $F : I \to \mathbf{R}$ være en stamfunktion til funktionen f, og antag, at funktionen g er differentiabel på hele intervallet I, og at den afledede funktion g' er kontinuert.

(1) Vis, at formlen

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

er opfyldt.

Løsning. Ved differentiation opnår vi, at

$$\frac{d}{dx}\Big(\int f(x)g(x)\,dx\Big) = f(x)g(x),$$

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)g(x)\Big) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

og

$$\frac{d}{dx}\Big(\int F(x)g'(x)\,dx\Big) = F(x)g'(x),$$

hvoraf påstanden fremgår.

(2) Udregn følgende ubestemte integraler

$$\int x \ln x\,dx, \int x^2 \ln x\,dx \;\text{ og }\; \int x^n \ln x\,dx, \;\text{ hvor }\; n \in \mathbf{N}.$$

Løsning. Ved udregning får vi, at

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$,

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$, og

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \ln x - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + k, \quad \text{hvor } \; k \in \mathbf{R}.$$

(3) Udregn

$$\int xe^{-x} \, dx \;\text{ og }\; \int_0^1 xe^{-x} \, dx.$$

Løsning. Vi ser, at

$$\int xe^{-x} \, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + k = -e^{-x}(x+1) + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$, så

$$\int_0^1 xe^{-x} \, dx = \Big[-e^{-x}(x+1) \Big]_0^1 = 1 - 2e^{-1}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall \, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + x^2y^2.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 2xy^2 \;\text{ og }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6y + 2x^2y.$$

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Idet

$$4x + 2xy^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

og

$$6y + 2x^2y = 0 \Leftrightarrow 2y(3 + x^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0,$$

ser vi, at funktionen f har det ene stationære punkt $(0, 0)$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi får straks, at

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 4 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 6 + 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Desuden ser vi, at

$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

som åbenbart er positiv definit, så det stationære punkt $(0, 0)$ er et minimumspunkt for funktionen f med minimumsværdien $f(0, 0) = 0$.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Da $f(x, y) \geq 0$, da $f(0, 0) = 0$, og da

$$f(x, 0) = 2x^2 \to \infty \text{ for } x \to \infty,$$

ser vi, at værdimængden for f er $R(f) = [0, \infty[$.

Opgave 3. Vi betragter den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^x}{e^{2x} + 1} \right)^n .$$

(1) Vis, at uligheden
$$e^{2x} - e^x + 1 > 0$$
er opfyldt for ethvert $x \in \mathbf{R}$.

Løsning. Idet
$$e^{2x} - e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y \,\wedge\, y^2 - y + 1 = 0,$$
og da diskriminanten for denne andengradsligning er $d = 1 - 4 = -3 < 0$, er $y^2 - y + 1 > 0$ for ethvert $y \in \mathbf{R}$. Dermed har vi også vist, at uligheden
$$e^{2x} - e^x + 1 > 0$$
er opfyldt for ethvert $x \in \mathbf{R}$.

(2) Vis, at den uendelige række (§) er konvergent for ethvert $x \in \mathbf{R}$.

Løsning. Idet
$$0 < \frac{e^x}{e^{2x}+1} < 1 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x + 1 > 0$$
for ethvert $x \in \mathbf{R}$, er den uendelige række (§) konvergent overalt på $\mathbf{R}$.

(3) Bestem en forskrift for sumfunktionen
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^x}{e^{2x}+1}\right)^n .$$

Løsning. Vi ser umiddelbart, at
$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{e^x}{e^{2x}+1}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x} - e^x + 1}, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

(4) Bestem værdimængden for sumfunktionen f.

Løsning. Vi finder først, at
$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} - e^x + 1) - (e^{2x}+1)(2e^{2x} - e^x)}{(e^{2x} - e^x + 1)^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} - e^x + 1)^2}.$$

Heraf ser vi, at

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{3x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0,$$

og desuden får vi, at

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \ \wedge \ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

hvilket viser, at $x = 0$ er et maksimumspunkt for f med funktionsværdien $f(0) = 2$. Desuden bemærker vi, at

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - e^x + 1} \to 1 \ \text{ for } \ x \to \pm\infty.$$

Vi finder derpå, at funktionen f har værdimængden $R(f) =]1, 2]$.