Rettevejledning til

Eksamen på Økonomistudiet, vinter 2012-2013

Makro A

2. årsprøve

7. januar , 2013

(3-timers skriftlig prøve uden hjælpemidler)

Problem 1: Konvergens i Solow-modellen og tværlandeempirien

Der er i denne opgave en mindre, men beklagelig trykfejl i spørgsmål 1.3, hvor den angivne formel

$$g^i = 0,063 - \underset{(se=0,0015)}{0,006} \ln y_0^i + \underset{(se=0,0025)}{0,016} \ln \left[\ln s^i - \ln \left(n^i + 0,075\right)\right]$$

skulle have været

$$g^i = 0,063 - \underset{(se=0,0015)}{0,006} \ln y_0^i + \underset{(se=0,0025)}{0,016} \left[\ln s^i - \ln \left(n^i + 0,075\right)\right]$$

altså uden ln uden for den firkantede parantes. Ved bedømmelsen skal der tages højde for denne fejl, således at den mindste forvirring i forbindelse med besvarelsen af spørgsmål 1.3 skal føre til, at dette delspørgsmål udgår af bedømmelsen.

1.1 De parametre og andre eksogene variable i den generelle Solow-model, der bestemmer niveau for og hældning langs steady state-vækstbanen for BNP per arbejder er:

Bruttoopsparings/investerings-raten s, vækstraten i arbejdsstyrken, n, nedslidningsraten for kapital, δ, vækstraten, g, for den arbejdsudvidende teknologivariabel, initialværdien, A_0, for samme samt en teknisk parameter fra Cobb-Douglas-produktionsfunktionen (med konstant skalafkast), nemlig outputelasticiteten, α, mht. kapital. Vækstbanens niveau er højere, jo større forholdet $s/(n+g+\delta)$ er, og jo større A_0 er. Vækstraten langs banen er g.

Ovenstående er, hvad der bedes om. Man kan supplere med lidt forklaring. Forholdet $s/(n+g+\delta)$ er bestemmende for, hvor meget kapital per effektiv arbejder, der bliver på langt sigt, simpelt hen fordi kapital kommer af bruttoopsparing/investering fratrukket nedslidning, mens vækst i antal mand eller hver mands effektivitet betyder, at der kommer flere arbejdere målt i effektivitestenheder ind og deles om kapitalen. Mere kapital per effektiv arbejder trækker produktionen per effektiv arbejder opad. Det underliggende teknologiniveau givet ved A_0 er naturligvis også afgørende for produktionsniveauet per mand, og vækst i teknologisk formåen over tid skaber forøget produktion per mand.

Nogle vil nok anføre formlen for steday state-vækstbanen:

$$y_t^* = A_0 \left(1+g\right)^t \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

eller (idet $ng \approx 0$ og $\ln(1+g) \approx g$):

$$\ln y_t^* \approx \ln A_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\ln s - \ln (n+g+\delta)\right] + gt$$

Dette kræves ikke, men er helt fint, jf. også opgavetekstens side 1.

1.2 Det vides, at i henhold til modellen vil BNP per arbejder y_t konvergere mod steady state-vækstbanen y_t^* over tid. Derfor vil man forvente, at den gennesnitlige årlige vækstrate i BNP per arbejder fra et initialt år 0 til et senere år T, som man kunne kalde $g_{0,T}$, er lig med g, vækstraten *langs med* banen, plus et tillæg for *konvergens mod* banen (evt. negativt), som er større, jo længere under banen, BNP per arbejder ligger initialt (og negativt, hvis BNP per arbejder initialt ligger over) og numerisk mindre, jo flere år der betragtes (idet ved mange år vil tiden tæt på banen betyde relativt meget og konvergenstillægget relativt mindre).

Man vil altså forvente højere gennemsnitlig vækst, jo højere banen ligger, dvs. alt andet lige jo større A_0 og $s/(n+g+\delta)$ er, og jo mindre y_0 er, eller jo større $\ln A_0$ og $\ln s - \ln(n+g+\delta)$ er, og jo mindre $\ln y_0$ er.

Nogle vil måske anføre en forventet formel i stil med:

$$g_{0,T} \approx \underbrace{g}_{\text{Langs ss-bane}} + \underbrace{H(T)\left(\ln A_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\ln s - \ln(n+g+\delta)\right] - \ln y_0\right)}_{\text{Tillæg for konvergens mod ss-bane}}$$

hvor $H(T)$ er aftagende i T og går mod nul for T gående mod uendelig.

1.3 Estimationen på tværs af lande i indikerer, idet de estimerede koefficienter har signifikante fortegn, at den gennemsnitlige vækstrate i BNP per arbejder, g^i, har været større, jo større $\ln s^i - \ln(n^i + 0,075)$ har været, hvor $g+\delta$ er approksimeret med 0,075 for alle lande, og jo mindre $\ln y_0^i$ har været. Hvis man kan tillade sig at antage, at A_0 og g og $g+\delta$ har været de samme på tværs af de betragtede lande bortset fra usystematiske udsving, indikerer dette, at en stor initial afstand op til steady state har trukket opad i væksten. Dette er i nydelig overensstemmelse med Solow-modellens konvergensegenskab.

Opgave 2: Giver fri kapitalebvægelighed højere nationalindkomst, når der er en risikopræmie på indlandets kapital?

2.1 Dette er meget standardagtig udledning fra pensum. Fra (C1) fås ved at dividere på begge sider med L_t, på højresiden i formen $L_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$, at $y_t = k_t^\alpha$. Ved at dividere på begge sider af (C2) med L_{t+1}, på højresiden i formen $(1+n)L_t$, fås:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sy_t + k_t)$$

Når heri indsættes det fundne udtryk for y_t fås:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sk_t^\alpha + k_t) \qquad \text{(C4)}$$

2.2 Man kan evt. fra (C4) udlede "Solow-ligningen" ved at trække k_t fra på begge sider:

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(sk_t^\alpha - nk_t)$$

Betingelsen for en konstant kapitalintensitet, $k_{t+1} = k_t$, er så ensbetydende med $sk_t^\alpha = nk_t$, eller:

$$k_t = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv k_c^*$$

Fra $y_t = k_t^\alpha$ fås så i steady state:

$$y_t = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \equiv y_c^*$$

Det er oplyst i opgaven, at risikoen for at miste den i indlandet investerede kapital svarer til, at det forventede afkast per enhed kapital reduceres med risikopræmien ε. Derfor er den risikokorrigerede aggregerede indkomst $\hat{Y}_t \equiv Y_t - \varepsilon K_t$ og per mand $\hat{y}_t \equiv y_t - \varepsilon k_t$. I steady state fås så fra udtrykkene ovenfor:

$$\begin{aligned} \hat{y}_c^* &= \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1 - \varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) \Rightarrow \\ \hat{y}_c^* &= \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1 - \varepsilon\frac{s}{n}\right) > 0 \qquad \text{(C5)} \end{aligned}$$

Det angivne fortegn følger af antagelsen $\varepsilon s < n$.

2.3 Ligning (O3) siger, at udlændinge, der (som oplyst) har placeret kapital i indlandet på $|F_t|$, opnår afkast $\bar{r} + \varepsilon$ på hver enhed af denne kapital, hvorfor $(\bar{r} + \varepsilon)|F_t|$ af den indenlandsk skabte indkomst Y_t bliver brugt til rentebetalinger til udlændinge og fragår indlændingenes nationalindkomst. Når hver enhed af den udenlandsk ejede, indenlandsk placerede kapital må tjene $\bar{r}+\varepsilon$, er de fordi alle kan opnå $\bar{r}$ per enhed kapital risikofrit ved placering på det internationale kapitalmarked og dermed kun vil placere en enhed kapital i indlandet, hvis der er kompensation for risikoen.

Ligning (O6) er en arbitragebetingelse, der siger, at såvel indlændinge som udlændinge vil lade kapital strømme ind eller ud af indlandet indtil den indenlandske realrente, $r_t = \alpha\left(K_t/L_t\right)^{\alpha-1}$, netop svarer til den internationale realrente plus dækning af den ekstra risiko ved at investere i indlandet. Hvis eksempelvis $r_t < \bar{r}+\varepsilon$, strømmer kapital ud af indlandet, hvorved K_t/L_t falder, og r_t derfor øges osv.

Nationalindkomsten er indlændingenes samlede indkomst hidrørende fra aflønning af arbejdskraft og afkast på indlændingenes formue, V_t. Hele denne formue er jo (som oplyst) placeret i indenlandsk kapital, og derfor er der på hver enhed af denne formue en risiko på ε. Derfor er den risikokorrigerede nationalindkomst $\hat{Y}_t^n \equiv Y_t^n - \varepsilon V_t$ (per mand $\hat{y}_t^n \equiv y_t^n - \varepsilon v_t$).

2.4 Følgende fremgangsmåde er tættest på den, der kendes fra pensum. Der gælder jo fortsat, nu fra (O1), at $y_t = k_t^\alpha$. Ligning (O6) kan skrives $\bar{r}+\varepsilon = \alpha k_t^{\alpha-1}$, hvorfra $\left(\bar{r}+\varepsilon\right)k_t = \alpha k_t^\alpha$. Ligning (O7) kan skrives $w_t = \left(1-\alpha\right)k_t^\alpha$. Ved at lægge disse sammen fås $\left(\bar{r}+\varepsilon\right)k_t + w_t = \alpha k_t^\alpha + \left(1-\alpha\right)k_t^\alpha = k_t^\alpha = y_t$, altså:

$$y_t = \left(\bar{r}+\varepsilon\right)k_t + w_t \tag{O8}$$

Fra (O3) fås ved at dividere på begge sider med L_t at $y_t^n = y_t + \left(\bar{r}+\varepsilon\right)f_t$. Fra (O2) følger $f_t = v_t - k_t$. Ved at kombinere fås så $y_t^n = y_t + \left(\bar{r}+\varepsilon\right)\left(v_t - k_t\right) = y_t - \left(\bar{r}+\varepsilon\right)k_t + \left(\bar{r}+\varepsilon\right)v_t$, som ved anvendelse af (O8) giver:

$$y_t^n = w_t + \left(\bar{r}+\varepsilon\right)v_t \tag{O9}$$

Dermed fås så $\hat{y}_t^n = y_t^n - \varepsilon v_t = w_t + \left(\bar{r}+\varepsilon\right)v_t - \varepsilon v_t$, eller:

$$\hat{y}_t^n = w_t + \bar{r}v_t \tag{O10}$$

I risikokorrigerede termer gælder altså det sædvanlige, nemlig at nationalindkomst per mand hidrører fra afkastet på de indenlandske ressourcer per mand, nemlig reallønnen w_t per enhed arbejdskraft plus den (risikofri) internationale realrente per enhed indenlandsk ejet formue. Sådan må det være, når indlændinge og udlændinge har helt fri adgang til at placere kapital, hvor de ønsker, i indlandet eller på det internationale kapitalmarked. Skulle eksempelvis den indenlandske ralrente, r_t, tendere at blive højere end $\bar{r}+\varepsilon$, så placering af kapital i indlandet blev bedre end international placering med risiko indregnet, så ville kapital strømme ind i indlandet og derved reducere grænseproduktet for kapital og dermed den indenlandske realrente til $\bar{r} + \varepsilon$. Risikokorrigeret bliver afkastet på al kapital derfor $\bar{r}$.

2.5 Fra (O6) følger (som allerede nævnt), at i en hvilken som helst periode t vil $\bar{r} + \varepsilon = \alpha k_t^{\alpha-1}$. Dette sikres ved ind- eller udstrømning af kapital. Det følger, at i hver periode må $k_t^{1-\alpha} = \alpha / (\bar{r} + \varepsilon)$, eller at k_t øjeblikeligt tilpasser sig til:

$$k_t = \left(\frac{\alpha}{\bar{r} + \varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv k^* > 0$$

Så følger fra $y_t = k_t^{\alpha}$, at BNP per arbejder øjeblikkeligt bliver:

$$y_t = \left(\frac{\alpha}{\bar{r} + \varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \equiv y^* > 0$$

og fra (O7), at reallønnen springer direkte til:

$$w^* = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r} + \varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} > 0 \qquad \text{(O11)}$$

De anførte fortegn følger af, at der ingen negative komponenter er (der er antaget $\bar{r} > 0$ og $\varepsilon > 0$).

2.6 Ved at dividere med L_{t+1} på begge sider af (O4), på højresiden i formen $(1+n) L_t$, fås:

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[s y_t^n + v_t\right]$$

Ved heri at indsætte udtrykket for y_t^n fra (O9) og efterfølgende bruge $w_t = w^*$ for alle t fås:

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= \frac{s\left[w_t + (\bar{r} + \varepsilon) v_t\right] + v_t}{1+n} \\ &= \frac{s w_t + s(\bar{r} + \varepsilon) v_t + v_t}{1+n} \end{aligned}$$

eller:

$$v_{t+1} = \frac{1 + s(\bar{r} + \varepsilon)}{1+n} v_t + \frac{s}{1+n} w^* \qquad \text{(O12)}$$

I transitionsdiagrammet (som bør tegnes) er transitionskurven (v_{t+1} som funktion af v_t) en ret linje med positiv skæring, $s w^* / (1+n)$, med v_{t+1}-aksen og med positiv hældning mindre end én. Det sidste følger af antagelsen $s(\bar{r} + \varepsilon) < n$. Dermed er der en entydig, strengt positiv skæring med 45°-linjen i et $v^* > 0$, og det følger af "trappeiteration" i figuren, at fra en hvilken som helst startværdi $v_0 > 0$, vil v_t konvergere mod v^*. Man kan finde v^* ved at sætte $v_{t+1} = v_t = v^*$ i (O12):

$$(1+n)\, v^* = [1 + s(\bar{r} + \varepsilon)]\, v^* + sw^* \Leftrightarrow$$

$$[n - s(\bar{r} + \varepsilon)]\, v^* = sw^* \Leftrightarrow$$

$$v^* = \frac{s}{n - s(\bar{r} + \varepsilon)} w^* = \frac{\frac{s}{n}}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r} + \varepsilon)} w^* > 0 \tag{O13}$$

Fortegnet følger igen af antagelsen $s(\bar{r} + \varepsilon) < n$.

2.7 Man kan bruge udtrykket (O10) for den risikokorrigerede indkomst per arbejder og indsætte heri, at i steady state er $v_t = v^*$ fra (O13):

$$\begin{aligned}
\hat{y}^{n*} &= w^* + \bar{r}v^* = w^* + \frac{\bar{r}\frac{s}{n}}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r} + \varepsilon)} w^* \\
&= \left(1 + \frac{\bar{r}\frac{s}{n}}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r} + \varepsilon)}\right) w^* = \frac{1 - \frac{s}{n}(\bar{r} + \varepsilon) + \bar{r}\frac{s}{n}}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r} + \varepsilon)} w^* \Rightarrow \\
\hat{y}^{n*} &= \frac{1 - \varepsilon\frac{s}{n}}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r} + \varepsilon)} w^* > 0
\end{aligned} \tag{O14}$$

Fortegnet følger af $w^* > 0$ og igen betingelsen $s(\bar{r} + \varepsilon) < n$.

2.8 For at føre den risikokorrigerede nationalindkomst per arbejder helt tilbage til parametre indsættes i (O14) udtrykket for w^* fra (O11):

$$\hat{y}^{n*} = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r} + \varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{1 - \varepsilon\frac{s}{n}}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r} + \varepsilon)}$$

For at sammenligne dette $\hat{y}^{n*}$ med $\hat{y}_c^*$ fra (C5) dannes

$$\begin{aligned}
x &\equiv \frac{\hat{y}^{n*}}{\hat{y}_c^*} = \frac{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}+\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{1-\varepsilon\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\varepsilon)}}{\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[1 - \varepsilon\frac{s}{n}\right]} \\
&= (1-\alpha)\left(\frac{\alpha\frac{n}{s}}{\bar{r} + \varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{1}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r} + \varepsilon)}
\end{aligned}$$

Man kan nu definere $\alpha n/s \equiv r_c^*$, hvoraf $s/n = \alpha/r_c^*$. [Denne notation skyldes, at $\alpha n/s$ netop er den rente (uden risikokorrektion), som den lukkede økonomi frembringer i steady state. Dette kan ses ved at indsætte k_c^* i grænseprodukttet for kapital: $\alpha (k_c^*)^{\alpha-1} = \alpha\left((s/n)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha-1} = \alpha (s/n)^{-1} = \alpha n/s$. Det er også informativt i beviset nedenfor at anvende denne notation]. Hermed kan x omskrives til:

$$x = (1-\alpha)\left(\frac{r_c^*}{\bar{r} + \varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r_c^*}(\bar{r} + \varepsilon)}$$

Definér:

$$\hat{r} = \frac{\bar{r} + \varepsilon}{r_c^*}$$

dvs. forholdet mellem den indenlandske realrente i ss. som åben og som lukket. Så kan x skrives:

$$x = (1 - \alpha) \left(\frac{1}{\hat{r}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{1}{1 - \alpha \hat{r}}$$

Den antagne stabilitetsbetingelse, $n > s(\bar{r} + \varepsilon)$, betyder $\alpha \frac{n}{s} > \alpha (\bar{r} + \varepsilon)$ eller $\alpha \hat{r} < 1$, så den sidste nævner er positiv.

Man kan nu vise, at $x > 1$ for alle værdier af $\hat{r}$, undtagen $\hat{r} = 1$, svarende til $\bar{r} + \varepsilon = \alpha n/s$, hvor $x = 1$. Det ses direkte, at for $\hat{r} = 1$, er $x = 1$. Den afledte af $\ln x$ mht. $\hat{r}$ er:

$$\frac{\partial \ln x}{\partial \hat{r}} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{1}{\hat{r}} + \frac{\alpha}{1 - \alpha \hat{r}}$$

Denne er nul for $\hat{r} = 1$, og den er strengt voksende i $\hat{r}$ så længe $0 < \alpha \hat{r} < 1$. Sidsnævnte betingelse er opfyldt pga. de gjorte antagelser. Dvs. x har et minimum for $\hat{r} = 1$, hvor $x = 1$, og dette er eneste ekstremumspunkt over de relevante værdier for $\hat{r}$. Defor er $x > 1$, undtagen for $\bar{r} + \varepsilon = \alpha n/s$, hvor $x = 1$. Dette var, hvad der skulle vises.

Fra pensum kendes et lignende resultat uden landerisiko for nationalindkomster (uden risikokorrektion). Hovedkommentaren er derfor, at det kendte resultat *uden* landeriosiko generaliserer til også at holde *med* landerisiko, når man betragter de risikokorrigerede nationalindkomster i stedet for selve nationalindkomsterne.

En forklaring af resultatet kan gå som følger: Hvis indlandet er relativt "opsparingssvagt" (s/n relativt lille), så det som lukket på langt sigt ville fremringe en relativt lav kapitalintensitet og dermed en relativt høj indenlandsk realrente, så $r_c^* = \alpha n/s > \bar{r} + \varepsilon$, så vil åbning af indlandet for kapitalbevægelser betyde, at kapital vil strømme ind i landet, hvorved den indenlandske kapitalintensitet og dermed realløn vil stige. Afkastet på den indenlandske formue vil ganske vist falde per enhed, fra r_c^* til $\bar{r} + \varepsilon$, men det mere end opvejes af, at lønningerne vokser, og formuen vokser.