Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 S-1B ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Torsdag den 9. juni 2016

Rettevejledning

Opgave 1. Vi betragter 3×3 matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Desuden betragter vi for ethvert $s \in \mathbf{R}$ 3×3 matricen

$$C(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & s \end{pmatrix}.$$

(1) Vis, at matricen A er positiv definit, og at matricen B er negativ definit.

Løsning. Matricen A har de ledende hovedunderdeterminanter $D_1 = 2, D_2 = 1$ og $D_3 = 1$, hvilket viser, at A er positiv definit. Matricen B har de ledende hovedunderdeterminanter $D_1 = -1, D_2 = 2$ og $D_3 = -2$. Dette viser, at B er negativ definit.

(2) Udregn matricen AB, og godtgør, at denne matrix ikke er symmetrisk, men at den er regulær.

Løsning. Vi finder, at

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Vi ser heraf, at AB ikke er symmetrisk. Da matricerne A og B begge er regulære, jvf. ovenstående spørgsmål, er matricen AB også regulær.

(3) For hvilke $s \in \mathbf{R}$ er matricen $C(s)$ regulær?

Løsning. Vi ser, at determinanten for matricen $C(s)$ er $D_3(s) = s^2 - s - 1$. Heraf ser vi, at $D_3(s) = 0$, når og kun når

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

hvoraf det fremgår, at matricen $C(s)$ er regulær, dersom og kun dersom $s \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

(4) For hvilke $s \in \mathbf{R}$ er matricen $C(s)$ positiv definit?

Løsning. Matricen $C(s)$ har de ledende hovedunderdeterminanter $D_1(s) = s, D_2(s) = s - 1$ og $D_3(s) = s^2 - s - 1$, som alle er positive, hvis og kun hvis $s > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Derfor er $C(s)$ positiv definit, netop når $s > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy - x.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2y - 1 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x.$$

(2) Bestem de stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi sætter begge de partielle afledede lig med 0, og får da, at $x = y$. Da følger det, at

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}.$$

Funktionen f har derfor de stationære punkter $(1, 1)$ og $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

(4) Afgør, for ethvert af de stationære punkter, om det er et maksimums-, et minimums- eller et sadelpunkt for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at

$$f''(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } f''\Big(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\Big) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Heraf følger det umiddelbart, at $(1, 1)$ er et minimumspunkt, og at $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ er et sadelpunkt for funktionen f.

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at $f(x, 0) = x^3 - x \to \pm\infty$ for $x \to \pm\infty$. Derfor er værdimængden $R(f) = \mathbf{R}$.

For ethvert $v \in \mathbf{R}_+$ betragter vi den kompakte mængde

$$K(v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq v\}.$$

(6) Bestem integralet

$$I(v) = \int_{K(v)} f(x, y)\, d(x, y).$$

Løsning. Vi finder, at

$$I(v) = \int_0^1 \Big(\int_0^v (x^3 + y^2 - 2xy - x)\, dy\Big) dx = \int_0^1 \Big[x^3 y + \frac{y^3}{3} - xy^2 - xy\Big]_0^v dx =$$

$$\int_0^v (x^3 v + \frac{v^3}{3} - xv^2 - xv)\, dx = \Big[\frac{x^4 v}{4} + \frac{v^3 x}{3} - \frac{x^2 v^2}{2} - \frac{x^2 v}{2}\Big]_0^1 =$$

$$\frac{v^3}{3} - \frac{v^2}{2} - \frac{v}{4}.$$

(7) Udregn grænseværdien

$$\lim_{v \to 0+} \left(\frac{I(v)}{\sin\left(\frac{v}{8}\right)} \right).$$

Løsning. Vi benytter L'Hôpitals regel og finder så, at

$$\lim_{v \to 0+} \left(\frac{I(v)}{\sin\left(\frac{v}{8}\right)} \right) = \lim_{v \to 0+} \frac{v^2 - v - \frac{1}{4}}{\frac{1}{8}\cos\left(\frac{v}{8}\right)} = -2.$$

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + \left(\frac{5\sin t}{2\sqrt{2+\cos t}} \right) x = \frac{e^{6\sqrt{2+\cos t}}\sin t}{2\sqrt{2+\cos t}}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Idet koefficientfunktionen $p(t) = \frac{5\sin t}{2\sqrt{2+\cos t}}$, er den simpleste stamfunktion til $p = p(t)$ funktionen

$$P = P(t) = -5\sqrt{2+\cos t}.$$

Vi benytter nu "panserformlen" og finder så, at

$$x = Ce^{5\sqrt{2+\cos t}} + e^{5\sqrt{2+\cos t}} \int e^{-5\sqrt{2+\cos t}} \frac{e^{6\sqrt{2+\cos t}}\sin t}{2\sqrt{2+\cos t}}\, dt =$$

$$Ce^{5\sqrt{2+\cos t}} + e^{5\sqrt{2+\cos t}} \int e^{\sqrt{2+\cos t}} \frac{\sin t}{2\sqrt{2+\cos t}}\, dt =$$

$$Ce^{5\sqrt{2+\cos t}} - e^{5\sqrt{2+\cos t}} \int e^{\sqrt{2+\cos t}} d(\sqrt{2+\cos t}) =$$

$$Ce^{5\sqrt{2+\cos t}} - e^{5\sqrt{2+\cos t}} e^{\sqrt{2+\cos t}} =$$

$$Ce^{5\sqrt{2+\cos t}} - e^{6\sqrt{2+\cos t}}, \text{ hvor } C \in \mathbf{R}.$$

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 0$ er opfyldt.

Løsning. Betingelsen $\tilde{x}(0) = 0$ giver, at $Ce^{5\sqrt{3}} - e^{6\sqrt{3}} = 0$, så $C = e^{\sqrt{3}}$. Dette viser, at

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = e^{\sqrt{3}} e^{5\sqrt{2+\cos t}} - e^{6\sqrt{2+\cos t}} = e^{5\sqrt{2+\cos t}+\sqrt{3}} - e^{6\sqrt{2+\cos t}}.$$

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{dx}{dt}(0)$$

for en vilkårlig maksimal løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Ved at indsætte $t = 0$ i differentialligningen $(*)$ får vi straks, at

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0.$$

Opgave 4. For ethvert $n \in \mathbf{N}$ gælder det, at

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

og

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Disse formler kan vises ved induktion, **men** det kræves **ikke** her.

For ethvert $n \in \mathbf{N}$ betragter vi mængden

$$U = U(n) = \{1, 2, \ldots, n\},$$

og for ethvert $a > 0$ betragter vi funktionen $P : U \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, i \in U : P(i) = a \sum_{k=1}^{i} k = a\frac{i(i+1)}{2}.$$

(1) Bestem $a > 0$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion.

Løsning. Først bemærker vi, at $P(i) > 0$ for ethvert $i \in U$, og dernæst indser vi, at

$$P(i) = a(1 + 2 + \ldots + i) = a\frac{i(i+1)}{2} = \frac{a}{2}(i^2 + i).$$

Nu får vi, at

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^2 + i) = \frac{a}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) =$$

$$\frac{a}{2}\left(\frac{(n+1)(2n^2+n+3n)}{6}\right) = a\frac{2n(n+1)(n+2)}{12} = 1,$$

så

$$a = \frac{12}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

(2) Bestem – for den fundne værdi af $a > 0$ – sandsynligheden for hændelsen $A = \{1, 2, 3\}$, idet vi antager, at $n > 3$.

Løsning. Vi ser, at $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{a}{2}(2 + 6 + 12) =$

$$\frac{3 \cdot 20}{n(n+1)(n+2)} = \frac{60}{n(n+1)(n+2)}.$$