Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2016 V-1B ex ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Tirsdag den 12. januar 2016

Rettevejledning.

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & s \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi ser, at $\det A(s) = -s$, så $A(s)$ er regulær, når og kun når $s \neq 0$.

(2) Udregn for ethvert $s \in \mathbf{R}$ matricen $A(s)^2 = A(s)A(s)$.

Løsning. Vi finder, at

$$A(s)^2 = \begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2+1 & 1 & 2s \\ 1 & 1 & s \\ 2s & s & s^2+2 \end{pmatrix}.$$

(3) Vis, at matricen $A(0)^2$ er positiv semidefinit.

Løsning. Vi har, at

$$A(0)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hovedunderdeterminanterne er: $\Delta_1 = 1, 1, 2$ (af første orden), $\Delta_2 = 0, 2, 2$ (af anden orden) og $\Delta_3 = 0$ (af tredje orden). Dette viser, at matricen $A(0)^2$ er positiv semidefinit.

(4) Udregn det karakteristiske polynomium $P(t) = \det\big(A(s) - tE\big)$ for matricen $A(s)$.

Løsning. Vi ser, at

$$P(t) = \det\big(A(s) - tE\big) = \det\begin{pmatrix} s-t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 1 \\ 1 & 1 & s-t \end{pmatrix} =$$

$$(s-t)^2(-t)+t-(s-t) = (t^2-2st+s^2)(-t)-s+2t = -t^3+2st^2-s^2t+2t-s.$$

(5) Bestem de tal $s \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(s)$ har egenværdien $t = 1$. (Der er to sådanne værdier for s).

Løsning. Vi antager nu, at $P(1) = 0$. Så har vi altså, at

$$-1 + 2s - s^2 + 2 - s = 0 \Leftrightarrow s^2 - s - 1 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^2 + x^4 + y^4.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x+4x^3 = 2x(1+2x^2) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y+4y^3 = 2y(1+2y^2).$$

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Det eneste stationære punkt er $(0, 0)$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Vis dernæst, at f er strengt konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder straks, at

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 + 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Denne matrix er positiv definit overalt på $\mathbf{R}^2$, og dermed er f en strengt konveks funktion.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Det stationære punkt er et globalt minimumspunkt for f, og da $f(x, 0) = x^2 + x^4 \to \infty$ for $x \to \infty$, har f værdimængden $R(f) = [0, \infty[$.

For ethvert $a > 0$ betragter vi den funktion $g_a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : g_a(x, y) = \ln(x^2 + x^4 + y^2 + y^4 + a).$$

(5) Vis, at funktionen g_a er kvasikonveks for ethvert $a > 0$.

Løsning. Påstanden er sand, fordi ln er voksende.

(6) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for funktioen f gennem punktet $\big(1, 1, f(1, 1)\big)$.

Løsning. Vi får, at

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) = 6x + 6y - 8.$$

Vi betragter den kompakte mængde

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \,\wedge\, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(7) Godtgør, at funktionen f har en største- og en mindsteværdi på K, og bestem disse værdier.

Løsning. Da funktionen f er kontinuert, og mængden K er kompakt, har f en største- og en mindsteværdi på K. Der er ingen stationære punkter for funktionen f i det indre af K, og da f er strengt konveks, og da de variable x og y indgår med samme vægt i forskriften for f, har f minimum i $(0,0)$ med værdien 0 og maksimum i $(1,1)$ med værdien 4.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + (e^t - 2)x = 9e^{-e^t+5t}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Idet den simpleste stamfunktion til $p(t) = e^t - 2$ er $P(t) = e^t - 2t$, finder vi, at

$$x = Ce^{-(e^t-2t)} + e^{-(e^t-2t)} \int e^{e^t-2t} 9e^{-e^t+5t} dt =$$

$$Ce^{-e^t+2t} + e^{-e^t+2t} \int 9e^{3t} dt = Ce^{-e^t+2t} + 3e^{-e^t+5t}, \text{ hvor } C \in \mathbf{R}.$$

Vi har her benyttet "panserformlen".

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 4e^{-1}$ er opfyldt.

Løsning. Vi ser, at $C = 1$, så

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = e^{-e^t+2t} + 3e^{-e^t+5t}.$$

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0),$$

og godtgør, at der findes et åbent interval $U(0)$ omkring 0, hvorpå løsningen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ er voksende.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(0) - \tilde{x}(0) = 9e^{-1}, \text{ så } \frac{d\tilde{x}}{dt}(0) = 13e^{-1}.$$

Da $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ er en C^1-funktion, og da $\frac{d\tilde{x}}{dt}(0) > 0$, vil der findes et åbent interval $U(0)$ omkring 0, så $\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) > 0$ for ethvert $t \in U(0)$. Dette viser, at $\tilde{x}$ er voksende på intervallet $U(0)$.

Opgave 4. For ethvert $x \in \mathbf{R}$ betragter vi den uendelige række

$$(\S) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n.$$

(1) Bestem mængden

$$C = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n \text{ er konvergent} \right\}.$$

Løsning. Vi ser, at $x \in C$, hvis og kun hvis

$$|-2x| < 1 \Leftrightarrow 2|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Altså er $C =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

(2) Bestem en forskrift for den funktion $f : C \to \mathbf{R}$, som er givet ved udtrykket

$$\forall\, x \in C : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n.$$

Denne funktion er rækkens sumfunktion.

Løsning. Vi finder, at

$$f(x) = \frac{1}{1+2x} \quad \forall\, x \in C.$$

(3) Vis, at funktionen f er en løsning til differentialligningen

$$(\S\S) \qquad \frac{dy}{dx} = -2y^2,$$

og bestem dernæst den fuldstændige løsning til differentialligningen (§§).

Løsning. Da

$$\frac{df}{dx} = -\frac{2}{(1+2x)^2}.$$

er funktionen f en løsning til differentialligningen (§§).

Vi ser umiddelbart, at funktionen $y(t) = 0$ er en konstant løsning til (§§) med hele $\mathbf{R}$ som definitionsmængde.

Hvis $y \neq 0$, får vi, at

$$\frac{dy}{y^2} = -2dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -2x + k, \text{ hvor } k \in \mathbf{R}.$$

Så er der for ethvert $k \in \mathbf{R}$ to maksimale løsninger af formen

$$y = \frac{1}{2x - k},$$

en med definitionsintervallet $D(x) =]-\infty, \frac{k}{2}[$ og en med definitionsintervallet $D(x) =]\frac{k}{2}, \infty[$.