Københavns Universitet. Økonomisk Institut

1. årsprøve 2017 V-1B rx ret

Skriftlig eksamen i Matematik B

Onsdag den 8. februar 2017

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert tal $s \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ s & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Udregn determinanten for matricen $A(s)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, for hvilke $A(s)$ er regulær.

Løsning. Vi finder, at determinanten af matricen $A(s)$ er $D_3 = 2s - 3$, så $A(s)$ er regulær, hvis og kun hvis $s \neq \frac{3}{2}$.

(2) Vis, at matricen $A(s)$ er indefinit for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi finder, at matricen $A(s)$ har de ledende hovedunderdeterminanter $D_1 = 1$, $D_2 = 2 - s^2$ og $D_3 = 2s - 3$. Hvis alle tre ledende hovedunderdeterminanter skulle være positive, måtte vi kræve, at $-\sqrt{2} < s < \sqrt{2}$ og $s > \frac{3}{2}$. Men det er umuligt, og vi ser, at $A(s)$ hverken kan være positiv definit eller negativ definit. At $A(s)$ heller ikke kan være positiv semidefinit eller negativ semidefinit, er nu ganske oplagt. Altså er $A(s)$ indefinit for ethvert $s \in \mathbf{R}$.

(3) Udregn matricen $(A(s))^2 = A(s)A(s)$.

Løsning. Ved udregning finder vi, at

$$(A(s))^2 = \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ s & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ s & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2+2 & 3s+1 & s+1 \\ 3s+1 & s^2+5 & s+2 \\ s+1 & s+2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi betragter en symmetrisk $n \times n$ matrix, M, som vi antager har egenværdien λ med egenvektoren $v \neq \underline{0}$.

(4) Vis, at matricen $M^2 = MM$ har egenværdien λ^2 med egenvektoren $v \neq \underline{0}$.

Løsning. Vi ser, at

$$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v,$$

hvoraf påstanden umiddelbart aflæses.

(5) Godtgør, at matricen $B(0) = A(0)A(0) = (A(0))^2$ er positiv definit.

Løsning. Matricen $A(0)$ er regulær, så dens egenværdier er ikke 0. Dermed er matricen $B(0)$ regulær, og af det ovenstående finder vi så, at alle egenværdierne for $B(0)$ må være positive, så $B(0)$ er positiv definit.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$$

og den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}.$$

(1) Vis, at funktionen f er homogen, og angiv homogenitetsgraden.

Løsning. For ethvert $t > 0$ gælder det, at

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^4}{(tx)^2 + (ty)^2} = t^2 \frac{x^4}{x^2 + y^2} = t^2 f(x, y),$$

hvilket viser, at funktionen f er homogen af grad $k = 2$.

(2) Løs ligningen $f(x, y) = 1$.

Løsning. Man finder, at

$$f(x, y) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^4 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2(x^2 - 1),$$

hvoraf vi ser, at $x > 1$, og $y = x\sqrt{x^2 - 1}$, idet vi husker, at $y > 0$.

(3) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3(x^2+y^2) - x^4 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x^4 y}{(x^2+y^2)^2}.$$

(4) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Da $x > 0$ og $y > 0$, har funktionen f ingen stationære punkter.

(5) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at $f(x,y) > 0$, og da

$$0 < f(x,y) = x^2 \frac{x^2}{x^2+y^2} < x^2 \to 0 \text{ for } x \to 0+$$

og

$$f(x,1) = \frac{x^4}{x^2+1} = \frac{x^2}{1+\frac{1}{x^2}} \to \infty \text{ for } x \to \infty,$$

ser vi, at funktionen f har værdimængden $R(f) = \mathbf{R}_+$.

Vi betragter den funktion $g : D \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udsagnet

$$\forall\,(x,y) \in D : g(x,y) = f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

(6) Bestem en forskrift for funktionen g, og vis, at g er homogen, og angiv homogenitetsgraden.

Løsning. Vi ser hurtigt, at

$$\forall\,(x,y) \in D : g(x,y) = f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{y^2}{(xy)^2 + x^4},$$

og endvidere ser vi, at funktionen g er homogen af grad $k = -2$.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + (6t^2 + 12t^3)x = 6t^2 e^{-3t^4}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi bemærker, at den simpleste stamfunktion til funktionen $p(t) = 6t^2 + 12t^3$ er funktionen $P(t) = 2t^3 + 3t^4$, så

$$x = Ce^{-(2t^3+3t^4)} + e^{-(2t^3+3t^4)} \int e^{2t^3+3t^4} 6t^2 e^{-3t^4}\, dt,$$

hvor $C \in \mathbf{R}$, så

$$x = Ce^{-(2t^3+3t^4)} + e^{-(2t^3+3t^4)} \int e^{2t^3}\, d(2t^3) = Ce^{-(2t^3+3t^4)} + e^{-3t^4},$$

med $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 2$ er opfyldt.

Løsning. Idet $\tilde{x}(0) = 2$, får vi, at $C = 1$. Vi har derfor, at

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = e^{-(2t^3+3t^4)} + e^{-3t^4}.$$

(3) Bestem differentialkvotienten

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(1),$$

og begrund, at der findes et ikke-tomt, åbent interval U, hvor $1 \in U$, så løsningen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ er aftagende på dette interval.

Løsning. Ved at benytte den givne differentialligning og ved at benytte, at $\tilde{x}(1) = e^{-5} + e^{-3}$, ser vi, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(1) = 6e^{-3} - 18(e^{-5} + e^{-3}) = -12e^{-3} - 18e^{-5}.$$

Det er klart, at løsningen $\tilde{x}$ er af klasse C^1 på $\mathbf{R}$, og da $\frac{d\tilde{x}}{dt}(1) < 0$, følger påstanden umiddelbart.

Opgave 4. Vi betragter mængden

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$$

og den funktion $f : D \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y) \in D : f(x, y) = 5x - y^2 + \frac{11}{8} \ln x - x^2 + y.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5 + \frac{11}{8x} - 2x \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + 1.$$

(2) Bestem eventuelle stationære punkter for funktionen f.

Løsning. Vi ser, at $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ giver, at

$$5 + \frac{11}{8x} - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - \frac{11}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 11}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{11}{4},$$

thi $x > 0$. Desuden ser vi, at $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ giver, at $y = \frac{1}{2}$. Funktionen f har derfor det ene stationære punkt $(x, y) = \left(\frac{11}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

(3) Bestem Hessematricen $f''(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in D$, og vis, at f er strengt konkav overalt på D.

Løsning. Vi får, at

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{8x^2} - 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser, at Hessematricen $f''(x, y)$ er negativ definit overalt på mængden D, så funktionen f er åbenbart strengt konkav. Det stationære punkt er derfor et globalt maksimumspunkt.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

Løsning. Vi finder, at $f\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{8}\ln\left(\frac{11}{4}\right) + \frac{103}{16}$, og da

$$f(x, 0) \to -\infty \text{ for } x \to 0+$$

har funktionen f værdimængden $R(f) = \left]-\infty, \frac{11}{8}\ln\left(\frac{11}{4}\right) + \frac{103}{16}\right]$.

(5) Godtgør, at mængden

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in D \wedge -100 \leq z \leq f(x, y)\}$$

er konveks.

Løsning. Idet subgrafen $G_S(f)$ for f er konveks, og idet mængden

$$S' = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in D \wedge -100 \leq z\}$$

er konveks, er fællesmængden $S = G_S(f) \cap S'$ også konveks.