KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

1. ÅRSPRØVE 2011 V-1B ex ret

EKSAMEN I MATEMATIK B

Mandag den 3. januar 2011

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert tal $p \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$A(p) = \begin{pmatrix} p & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 2p \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem determinanten $\det(A(p))$ for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$, og bestem dernæst de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er regulær.

Løsning. Vi finder, at $\det(A(p)) = 2p^2 - p^2 = p^2$. Matricen $A(p)$ er regulær, når og kun når dens determinant ikke er nul, dvs. netop når $p \neq 0$.

(2) Matricen $A(1)$ er regulær. Bestem den inverse matrix $A(1)^{-1}$ til $A(1)$.

Løsning. Det er klart, at matricen $A(1)$ er regulær, jvf ovenstående resultat. Vi har, at

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ved at reducere blokmatricen $(A(1)|E)$ til echelonmatrix får vi frembragt matricen $(E|A(1)^{-1})$, og vi ser, at

$$A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Bestem egenværdierne for matricen $A(p)$ for et vilkårligt $p \in \mathbf{R}$.

Løsning. Det karakteristiske polynomium P for matricen $A(p)$ er givet ved

$$\forall t \in \mathbf{R} : P(t) = \det(A(p) - tE) = (p - t)(1 - t)(2p - t) - p^2(1 - t) =$$

$$(1 - t)\Big((p - t)(2p - t) - p^2\Big) = (1 - t)\Big(t^2 - 3pt + p^2\Big).$$

De karakteristiske rødder for polynomiet P, og dermed geneværdierne for matricen $A(p)$, er

$$t_1 = 1,\ t_2 = \frac{(3 - \sqrt{5})p}{2} \text{ og } t_3 = \frac{(3 + \sqrt{5})p}{2}.$$

(4) Bestem de tal $p \in \mathbf{R}$, for hvilke matricen $A(p)$ er henholdsvis positiv definit, positiv semidefinit eller indefinit.

Løsning. Matricen $A(p)$ er positiv definit, netop når alle egenværdierne er positive. Heraf får vi så, at

$$A(p) \text{ er positiv definit} \Leftrightarrow p > 0.$$

Endvidere får vi, at Matricen $A(p)$ er positiv semidefinit, netop når alle egenværdierne er ikke-negative. Heraf får vi så, at

$$A(p) \text{ er positiv semidefinit} \Leftrightarrow p \geq 0.$$

Matricen $A(p)$ er indefinit definit, netop når egenværdierne har forskellige fortegn. Heraf får vi så, at

$$A(p) \text{ er indeninit} \Leftrightarrow p < 0.$$

(5) Bestem egenværdierne og egenrummene for matricen $A(0)$.

Løsning. Vi ser, at

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da matricen $A(0)$ er en diagonalmatrix har den åbenbart egenværdierne 0 og 1. Vi ser desuden umiddelbart, at de tilhørende egenrum er

$$V(0) = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \text{ og } V(1) = \text{span}\{(0, 1, 0)\}.$$

(6) Udregn matricen $A(0)^2 = A(0)A(0)$. Vis dernæst, at

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : A(0)^k = A(0).$$

Løsning. Vi finder, at

$$A(0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A(0).$$

Dernæst er det klart, at

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : A(0)^k = A(0).$$

Opgave 2. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = e^x + e^y - e^{2x} - e^{2y}.$$

(1) Bestem de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

af første orden for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x - 2e^{2x} = e^x(1 - 2e^x)$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^y - 2e^{2y} = e^y(1 - 2e^y).$$

(2) Vis, at funktionen f har netop et stationært punkt, og bestem dette stationære punkt.

Løsning. Det er klart, at

$$e^x(1 - 2e^x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\Big(\frac{1}{2}\Big) \Leftrightarrow x = -\ln 2.$$

På tilsvarende måde indses det, at $e^y(1-2e^y) \Leftrightarrow y = -\ln 2$. Funktionen f har således det ene stationære punkt $(x, y) = (-\ln 2, -\ln 2)$.

(3) Bestem Hessematricen $H(x, y)$ for funktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og afgør dernæst, om det stationære punkt er et maksimums- et minimums- eller et sadelpunkt for f. Bestem desuden funktionsværdien i det stationære punkt.

Løsning. Vi ser, at

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} e^x - 4e^{2x} & 0 \\ 0 & e^y - 4e^{2y} \end{pmatrix}.$$

Så er

$$H(-\ln 2, -\ln 2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

og denne matrix er negativ definit. Det stationære punkt er derfor et maksimumspunkt for funktionen f. Desuden ser vi, at maksimumsværdien er $f(-\ln 2, -\ln 2) = \frac{1}{2}$.

(4) Bestem dernæst mængderne

$$P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid H(x, y) \text{ er positiv definit}\}$$

og

$$N = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid H(x, y) \text{ er negativ definit}\}.$$

Løsning. Hessematricen $H(x, y)$ er positiv definit, netop når diagonalelementerne begge er positive. Vi ser, at

$$e^x - 4e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x < \ln\Big(\frac{1}{4}\Big) \Leftrightarrow x < -\ln 4.$$

På tilsvarende måde, ser vi, at $e^y - 4e^{2y} > 0 \Leftrightarrow y < -\ln 4$. Vi får derfor, at

$$P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid H(x, y) \text{ er positiv definit}\} =$$
$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < -\ln 4 \wedge y < -\ln 4\}.$$

På tilsvarende måde indser man, at

$$N = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid H(x, y) \text{ er negativ definit}\}.$$

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > -\ln 4 \wedge y > -\ln 4\},$$

idet Hessematricen $H(x, y)$ er negativ definit, netop når begge diagonalelementer er negative.

(5) Betragt funktionen $g : N \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall (x, y) \in N : g(x, y) = f(x, y).$$

Vis, at funktionen g er strengt konkav, og bestem dernæst værdimængden for g.

Løsning. Det er klart, at funktionen g er strengt konkav. Det er endvidere klart, at g har globalt maksimum i punktet $(-\ln 2, -\ln 2)$ med funktionsværdien $g(-\ln 2, -\ln 2) = \frac{1}{2}$. Vi ser også, at

$$g(x, 0) = e^x - e^{2x} = e^x(1 - e^x) \to -\infty \text{ for } x \to \infty,$$

hvoraf vi ser, at g har værdimængden $R(g) =]-\infty, \frac{1}{2}]$.

(6) Betragt funktionen $h : P \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall (x, y) \in P : h(x, y) = f(x, y).$$

Vis, at funktionen h er strengt konveks.

Løsning. Dette er trivielt.

(7) Betragt funktionen $\psi : P \to \mathbf{R}$, som er defineret ved

$$\forall (x, y) \in P : \psi(x, y) = (h(x, y))^3.$$

Vis, at funktionen ψ er kvasikonveks.

Løsning. Det er klart, at funktionen ψ er sammensat af en strengt konveks funktion og en voksende funktion. Derfor er ψ kvasikonveks.

Opgave 3. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} + (3t^2 + 4t^3)x = 3t^2 e^{-t^4}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser, at

$$\int (3t^2 + 4t^3)\, dt = t^3 + t^4 + k,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$. Vi finder derpå, at

$$x = Ce^{-(t^3+t^4)} + e^{-(t^3+t^4)} \int e^{(t^3+t^4)} 3t^2 e^{-t^4}\, dt =$$

$$Ce^{-(t^3+t^4)} + e^{-(t^3+t^4)} \int e^{t^3}\, d(t^3) = Ce^{-(t^3+t^4)} + e^{-(t^3+t^4)} e^{t^3} =$$

$$Ce^{-(t^3+t^4)} + e^{-t^4} = e^{-t^4}(Ce^{-t^3} + 1),$$

hvor $C \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(*)$, så betingelsen $\tilde{x}(0) = 1$ er opfyldt.

Løsning. Vi ser, at betingelsen $\tilde{x}(0) = 1$ giver, at $C + 1 = 1$, så $C = 0$. Da er

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = e^{-t^4}.$$

(3) Bestem differentialkvotienterne

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} \text{ og } \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}$$

af første og anden orden for løsningen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$.

Løsning. Vi finder straks, at

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = -4t^3 e^{-t^4} \text{ og } \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = -12t^2 e^{-t^4} + 16t^9 e^{-t^4}.$$

(4) Bestem Taylorpolynomiet af anden orden for funktionen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ ud fra punktet $t_0 = 1$.

Løsning. Vi ser, at $\tilde{x}(1) = e^{-1}$,

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(1) = -4e^{-1} \text{ og } \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}(1) = 4e^{-1}.$$

Taylorpolynomiet $P_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ af anden orden for funktionen $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ ud fra punktet $t_0 = 1$ er derfor givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P_2(t) = e^{-1} - 4e^{-1}(t-1) + \frac{1}{2} \cdot 4e^{-1}(t-1)^2 =$$

$$e^{-1} - 4e^{-1}t + 4e^{-1} + 2e^{-1}(t^2 - 2t + 1) = 2e^{-1}t^2 - 8e^{-1}t + 7e^{-1}.$$

Opgave 4. Vi betragter mængden

$$U(n) = \{1, 2, 3, \ldots, n\},$$

hvor det naturlige tal $n \geq 4$. Desuden betragter vi for ethvert $a \in \mathbf{R}_+$ funktionen $P : U(n) \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, i \in U(n) : P(i) = a\Big(\frac{1}{3}\Big)^i.$$

(1) Bestem tallet $a \in \mathbf{R}_+$, så funktionen P er en sandsynlighedsfunktion på mængden $U(n)$.

Løsning. Det er klart, at

$$\forall\, i \in U(n) : P(i) = a\Big(\frac{1}{3}\Big)^i > 0.$$

Endvidere ser vi, at

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = a \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{3}\Big)^i = a \cdot \frac{1}{3} \frac{1 - \big(\frac{1}{3}\big)^n}{1 - \frac{1}{3}} = a \frac{1 - \big(\frac{1}{3}\big)^n}{2} = 1$$

giver, at

$$a = \frac{2}{1 - \big(\frac{1}{3}\big)^n}.$$

Vi har således, at

$$\forall\, i \in U(n) : P(i) = \frac{2}{1 - \big(\frac{1}{3}\big)^n} \Big(\frac{1}{3}\Big)^i.$$

(2) Bestem sandsynligheden $P(\{1, 2, 3\})$ udtrykt ved tallet n.

Løsning. Vi finder, at

$$P(\{1, 2, 3\}) = \frac{2}{1 - \big(\frac{1}{3}\big)^n} \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\Big) = \frac{26}{27\Big(1 - \big(\frac{1}{3}\big)^n\Big)}.$$

(3) Bestem sandsynligheden $P(\{4, 5, \ldots, n\})$ udtrykt ved tallet n.

Løsning. Vi finder, at

$$P(\{4, 5, \ldots, n\}) = 1 - P(\{1, 2, 3\}) = 1 - \frac{26}{27\Big(1 - \big(\frac{1}{3}\big)^n\Big)}.$$

(4) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1, 2, 3\}) \;\text{ og }\; \lim_{n\to\infty} P(\{4, 5, \ldots, n\}).$$

Løsning. Vi ser, at

$$\lim_{n\to\infty} P(\{1, 2, 3\}) = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{26}{27\Big(1 - \big(\frac{1}{3}\big)^n\Big)}\Big) = \frac{26}{27},$$

og så får vi straks, at

$$\lim_{n\to\infty} P(\{4, 5, \ldots, n\}) = \frac{1}{27}.$$