

# Arithmetisches Kodieren

VITO SCHOPPER - 7503386

MARIO NAVARRO -

PRO-SEMINAR

DATENKOMPRESSION WS 2022

Dozent: Dr.- Ing. The Anh Vuong  
Graphische Daten Verarbeitung, Informatik Institut  
Goethe Universität, Frankfurt am Main  
vorgelegt am xx.01.2023

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Thema</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Verfahren-Beschreibung</b>	<b>2</b>
3.1	Kodierung . . . . .	2
3.2	Problematik - Finite-Precision Arithmetic Coding . . . . .	3
3.3	Dekodierung . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Anwendungsgebiet</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Qualitätsbewertung über das Verfahren</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Präsentation / Demonstration Kit</b>	<b>6</b>
6.1	naives Verfahren . . . . .	6
6.1.1	Installation . . . . .	6
6.1.2	Kodierung . . . . .	6
6.1.3	Dekodierung . . . . .	7
6.2	genaues Verfahren . . . . .	7
6.2.1	Kodierung . . . . .	7
6.2.2	Dekodierung . . . . .	7
6.3	naive HTML-Kodierung . . . . .	7

# 1 Thema

Arithmetisches Kodieren ist eine Form der Entropiekodierung. Im Gegensatz zu anderen Entropiekodierungen wie z.B. der Huffman-Kodierung, wo zunächst ein Baum erstellt wird, um anschließend für jedes Zeichen eine individuelle Kodierung zu berechnen, wird beim Arithmetischen Kodieren eine lange binäre Fließkommazahl ausgegeben, welche die komplette Eingabe kodiert. Es findet also keine Kodierung kleinerer Komponente statt, sondern es wird Zeichen für Zeichen kodiert. Hierdurch werden Kompressionsraten erreicht, welche sehr nahe am theoretischen Limit der Entropie liegen.[3]

## 2 Theoretische Grundlagen

Das Verfahren stützt sich wie auch viele andere Kompressionsverfahren auf die Stochastik. So wird zu Beginn die Häufigkeit und die entsprechende Wahrscheinlichkeit für jedes Zeichen einer Eingabe berechnet. Das Verständnis von Binary-Search wird vorausgesetzt und nicht genauer erklärt, da dies auch keine Charakteristik des Kompressionsverfahrens beschreibt, sondern nur zur Berechnung einer binären Zahl innerhalb eines Intervalles dient (*siehe 3.1*).

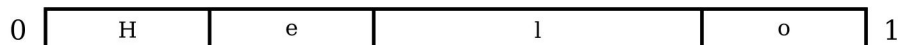
## 3 Verfahren-Beschreibung

### 3.1 Kodierung

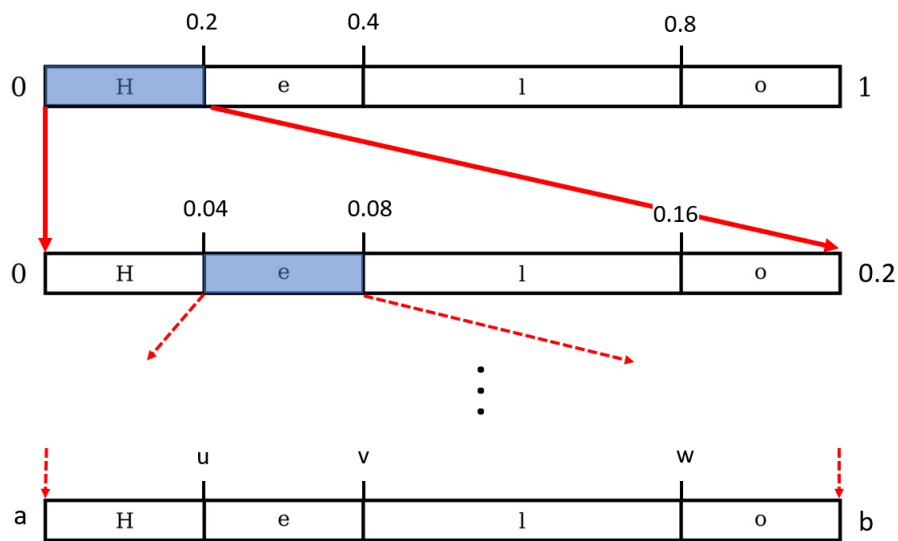
Zunächst wird für die Eingabe die Häufigkeit aller vorkommenden Zeichen berechnet. Anschließend wird das Intervall  $[0,1]$  entsprechend dieser Häufigkeiten aufgeteilt. Dies wird gemacht, da am Ende beim Arithmetischen Kodieren die Eingabe als eine beliebig lange Fließkommazahl kodiert wird. Legen wir nun das Intervall  $[0,1]$  fest, so wird der später kodierte String irgendwo zwischen 0 und 1 liegen. So könnte z.B für die Eingabe **Hello** folgende Startbedingung erstellt werden.

Hello

x	#
H	1
e	1
l	2
o	1



Nun wird das erste Zeichen eingelesen. Dessen Intervall wird nun das komplette Intervall ersetzen. Die Verhältnisse der Intervalle untereinander ändert sich nicht. Es werden lediglich die Grenzen aktualisiert. Anschließend wird das nächste Zeichen eingelesen und die Intervallgrenzen entsprechend aktualisiert. Hat man dies nun für alle Zeichen der Eingabe durchgeführt, so liegt einem ein Intervall  $[a,b]$  vor.



Alle Zahlen innerhalb dieses Intervalls sind korrekte Kodierungen für unsere Eingabe. Es gibt somit theoretisch unendlich viele Kodierungen für eine Eingabe  $x$ , nämlich alle Zahlen im Intervall  $[a, b]$ . Da man bei einer Kodierung eine Eingabe aber natürlich mit möglichst wenig Bits kodieren möchte, wird die kürzeste Binärzahl genommen, welche im Intervall  $[a, b]$  liegt. Dies kann z.B. durch einen Binary-Search Algorithmus erreicht werden. In unserem Fall wäre 0.11001 eine mögliche Kodierung für das Intervall  $[0.78, 0.8]$ .

### 3.2 Problematik - Finite-Precision Arithmetic Coding

Normalerweise werden Zahlen mit 32 oder 64 Bit precision gespeichert. Das wird für uns ein Problem, da die Intervallgrenzen sich immer stärker annähern. Dies führt unvermeidlich zu einem Intervall, in welchem beide Grenzen den gleichen Wert annehmen  $[a, a]$  und fortan falsch Kodieren würde.

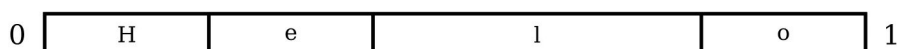
Es existieren mehrere Möglichkeiten, um diese Problematik mehr oder weniger effektiv zu umgehen. Oft direkt nach einem kodierten Zeichen, geschaut ob die Zahl im Intervall  $[0, 0.5]$  oder  $[0.5, 1]$  liegt und das jeweilige Intervall anschließend normalisiert, sodass Rechnungen mit hoher Präzision nie auftreten.

### 3.3 Dekodierung

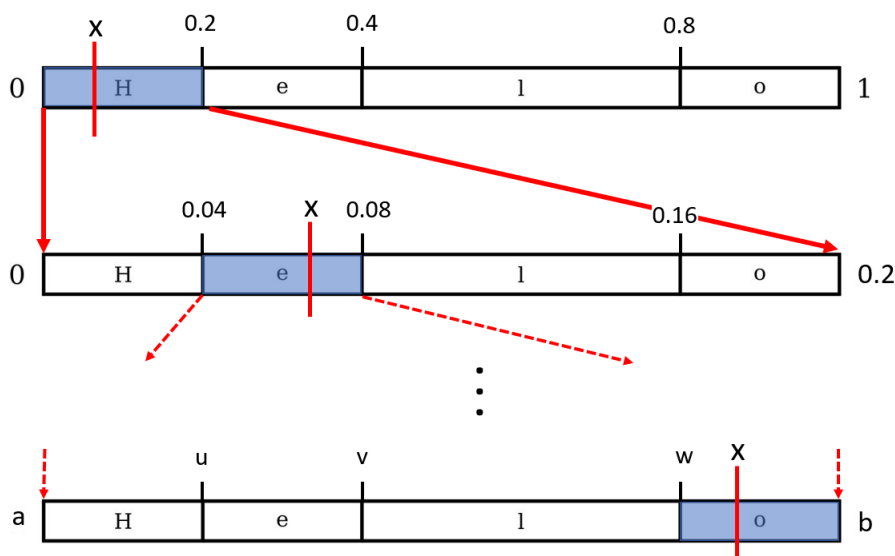
Hier wird als Eingabe ein kodierte Binärzahl  $x$  erwartet. Diese wird anschließend in eine Dezimalzahl umgerechnet. Ebenso wird eine Häufigkeitsverteilung aller Zeichen als Eingabe erwartet. Aus dieser wird analog zu 3.1 das Intervall  $[0,1]$  im Hinblick auf die Zeichen aufgeteilt. Eine Startbedingung könnte folgendermaßen aussehen:

$$x=0.000100011(2) = 0.068359375(10)$$

x	p(x)
H	1
e	1
l	2
o	1



Durch die Häufigkeitsangaben wissen wir, dass die Dekodierung aus genau 5 Zeichen besteht. Im ersten Schritt wird die Dezimalzahl  $x$  auf dem Intervall gesucht. Das kodierte Zeichen entspricht nun dem Intervall in welchem sich  $x$  befindet (*also H*). Anschließend werden die Intervallgrenzen analog zu 3.1 aktualisiert und  $x$  erneut auf dem Intervall  $[0, 0.2]$  gesucht.



Haben wir dies 5 mal durchgeführt erhalten wir unseren dekodierten String (*Hello*).

## **4 Anwendungsgebiet**

Hier könnte ein kurzer Satz zur Einleitung stehen.

## **5 Qualitätsbewertung über das Verfahren**

Hier könnte ein kurzer Satz zur Einleitung stehen.

## 6 Präsentation / Demonstration Kit

Wir haben bei der Visualisierung/der Umsetzung des Demonstrations Kit zwischen 2 Fällen unterschieden. Da es bei den Berechnungen während der Kodierung/Dekodierung zu Schwierigkeiten mit den Intervallgrenzen kommt (siehe 3.2), haben wir ein **naives** und ein **genaues** Kit erstellt.

Das naive Kit erstellt eine gut verständliche, visuelle Animation. Jedoch funktioniert dieses Verfahren nur für relativ kleine Eingaben wie z.B “Hello” oder “Laterne”. Bei größeren Eingaben benötigt die Erstellung der Animation erheblich länger. Da dieses Verfahren auch nicht das *Finite-Precision Arithmetic Coding* umsetzt, kommt es hier bei größeren Eingaben zu den in 3.2 erwähnten Fehlern. Auf kurzen Eingaben ist jedoch eine korrekte Kodierung/Dekodierung, sowie eine Erstellung einer visuell ansprechenden Animation kein Problem.

Hierfür haben wir auf das python-Modul **manim** zurückgegriffen. Dabei handelt es sich um ein Opensource-Projekt des Youtubers “3Blue1Brown”, welcher es 2015 geschrieben hat, um visuell ansprechende Animationen für den Bereich der Mathematik zu erstellen.[4]

Mittlerweile wird dieses Model jedoch durch die Community erweitert und bietet viele Möglichkeiten Themen aus dem MINT-Bereich visuell darzustellen.

### 6.1 naives Verfahren

#### 6.1.1 Installation

Es wird das python-modul **manim**, sowie viele kleine weitere module wie z.B. **ffmpeg** benötigt, welche jedoch automatisch mit **manim** heruntergeladen werden.

Der Installationsvorgang wird unter <https://docs.manim.community/en/stable/installation.html> genauer beschrieben.

#### 6.1.2 Kodierung

Für die Kodierung wird die Datei **encoding.py** mithilfe des Befehls

```
manim -pql -v critical encoding.py
```

im terminal ausgeführt.

Anschließend wird als Eingabe das zu kodierende Wort erfragt. Hier wie oben erwähnt, kein zu langes Wort eingeben. Daraufhin kann es je nach länge des Wortes 1-2 min dauern, bis die Animation erstellt wurde, welche sich direkt in einem neuen Fenster öffnet und angeschaut werden kann. Alternativ wurde die Animation unter

```
.\SeminarDatenkompression-2022\pythno\media\videos%encodin\480p15\Encoding.mp4
```

gespeichert.

### 6.1.3 Dekodierung

Für die Dekodierung wird die Datei **decoding.py** mithilfe des Befehls

```
manim -pql -v critical decoding.py
```

im terminal ausgeführt. Anschließend wird als Eingabe zuerst die zu dekodierende Binärzahl erfragt. Daraufhin wird eine Häufigkeitsverteilung der vorkommenden Buchstaben erfragt. Diese muss im Format eines python-Dictionaries eingegeben werden.

Beispiele:

```
{"H": 1, "e": 1, "l": 2, "o": 1}  
{"A": 1, "e": 1, "f": 2}
```

Daraufhin kann es je nach Länge des Wortes mehrere Minuten dauern, bis die Animation erstellt wurde, welche sich direkt in einem neuen Fenster öffnet und angeschaut werden kann. Alternativ wurde die Animation unter

```
.\Seminar-Datenkompression-2022\python%\media\videos\decodin\480p15\Decoding.mp4
```

gespeichert.

## 6.2 genaues Verfahren

Hierfür bitte die html Datei **Datenkompression.html** unter `./Seminar-Datenkompression-2022/HTML` öffnen. Die erscheinende Seite, implementiert unsere Kodierungen/Dekodierungen gebündelt in einer html. Hier werden jedoch keine Animationen angezeigt. (Verweis auf 6.1)

### 6.2.1 Kodierung

Für die Kodierung wird eine Eingabe im Eingabefeld erwartet. Falls gewünscht kann man sich mit dem Button **Generiere Wahrscheinlichkeiten**, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Eingabe anzeigen lassen.

Um nun eine genaue Kodierung berechnen zu lassen, nach Eingabe ins obere Feld, den Button **Starte Genaues-Kompressionsverfahren** drücken.

Anschließend wird der kodierte Binärstring im unteren Feld angezeigt.

### 6.2.2 Dekodierung

Um den kodierte Binärstring zu dekodieren, sollte man am besten kurz das obere Eingabefeld manuell leeren. Fügt man nun den kodierte Binärstring ins untere Feld ein und drückt auf **Starte Genaues-Dekompressionsverfahren**, so wird einem die Dekodierung im oberen Feld angezeigt.

## 6.3 naive HTML-Kodierung

Auf der HTML Seite kann man zusätzlich noch einmal das naive Verfahren ausführen lassen. Das Vorgehen ist analog zu 6.2.

*Anmerkung: Die Kodierung weicht leicht von der Kodierung in den Animationen ab, da der Algorithmus anders implementiert wurde.*



## Literatur

- [1] Mark Nelson. (2014, October 19). Data compression with arithmetic coding. Mark Nelson. Retrieved January 12, 2023, from <https://marknelson.us/posts/2014/10/19/data-compression-with-arithmetic-coding.html>
- [2] Arithmetic coding. The Hitchhiker's Guide to Compression. (n.d.). Retrieved January 15, 2023, from <https://go-compression.github.io/algorithms/arithmetic/>
- [3] Wikimedia Foundation. (2022, November 6). Arithmetisches Kodieren. Wikipedia. Retrieved January 12, 2023, from [https://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetisches\\_Kodieren](https://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetisches_Kodieren)
- [4] Wikimedia Foundation. (2022, December 30). 3Blue1Brown. Wikipedia. Retrieved January 15, 2023, from <https://en.wikipedia.org/wiki/3Blue1Brown>