Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

Факультет экономических наук

Веселова Арина Олеговна

Домашнее задание № 2

Отчет студентки 4 курса бакалавриата группы БЭК201

по Моделям с качественными и ограниченными зависимыми переменными

Москва, 2023

Часть 1. Теория и гипотезы

№ 1.1. Выберите независимые переменные для уравнения зарплаты и уравнения занятости. Кратко теоретически обоснуйте выбор каждой из них: не обязательно со ссылками на литературу, достаточно здравого смысла. Укажите и кратко обоснуйте предполагаемые направления эффектов. Уравнение занятости должно включать по крайней мере одну переменную, которой не было в уравнении зарплаты, и одну переменную,

которая есть в уравнении зарплаты. Желательно, чтобы общая для двух уравнений переменная была непрерывной, например, возраст, а также не использовать более трех переменных в каждом из уравнений.

Для уравнения зарплаты:

- Кол-во лет образования – чем более образована женщина, тем больше у нее высокооплачиваемых навыков, что увеличивает зарплату
- Рабочий стаж женщины в годах – чем больше опыта, тем лучше и эффективнее сотрудник выполняет задачи, значит, зарплата будет возрастать
- Возраст – вероятно, у каждой женщины будет пик ее карьеры, когда ее занятость и зарплата будут наибольшими, до этого момента зарплата будет расти (и, скорее всего, занятость) как признак ее карьерного роста, а после – либо оставаться на том же уровне, либо немного падать как признак уже достигшего успеха

Для уравнения занятости:

- Количество детей младше 6 лет – в случае, если у женщины есть маленькие дети, то она, с большей вероятностью, будет использовать декрет или, в принципе, сокращать время за работой, чтобы больше времени уделять ребенку, то есть эффект отрицательный
- Возраст – вероятно, у каждой женщины будет пик ее карьеры, когда ее занятость и зарплата будут наибольшими, до этого момента зарплата будет расти (и, скорее всего, занятости) как признак ее карьерного роста, а после – либо оставаться на том же уровне, либо немного падать как признак уже достигшего успеха

Часть 2. Модель Тобина

№ 2.1. Оцените Тобит модель, предварительно записав максимизируемую функцию правдоподобия. Результат представьте в форме таблицы (можно, например, использовать выдачу из stata, R или python).

$Y_i = \begin{cases} Y_i^*, \text{ если } Y_i^* > 0 \\ 0, \text{ если } Y_i^* \leq 0 \end{cases}$, где $Y_i^* = x_i'\beta + \epsilon_i$ и $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Тогда $E(Y_i) = (x_i'\beta + \sigma\lambda_i)\Phi\left(\frac{x_i'\beta}{\sigma}\right)$

С помощью ММП будут оцениваться коэффициенты модели β, σ:

$$l = \ln(L) = \ln\left(\prod_{Y_i>0}^{N} f_{Y_i^*}(y_i) \prod_{Y_i=0}^{N} P(Y_i^* \leq 0)\right) \to \max_{\beta,\sigma}$$

```
Call:
crch(formula = wage ~ age + educ + exper, data = Mroz87, dist = "gaussian", left = 0, truncated = FALSE)

Standardized residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-1.5320 -0.0145  0.3067  0.6916  5.9192 

Coefficients (location model):
            Estimate Std. Error z value            Pr(>|z|)    
(Intercept) -4.90440    1.46786  -3.341            0.000834 ***
age         -0.10705    0.02489  -4.301    0.000016988903343 ***
educ         0.62964    0.08068   7.804    0.000000000000006 ***
exper        0.22928    0.02468   9.289 < 0.0000000000000002 ***

Coefficients (scale model with log link):
            Estimate Std. Error z value           Pr(>|z|)    
(Intercept)  1.49740    0.03694   40.54 <0.0000000000000002 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Distribution: gaussian
Log-likelihood: -1463 on 5 Df
Number of iterations in BFGS optimization: 20
```

Табл. 1. Результаты оценивания модели Тобина.

№ 2.2. Опишите преимущества Тобит модели над усеченной регрессией. Объясните, в каких случаях можно использовать усеченную регрессию, но не получится использовать Тобит модель: приведите гипотетический (можно использовать фантазию) пример.

Тобит модель позволяет учитывать такие наблюдения, по которым известны значения независимых переменных, но неизвестно значение зависимой переменной, а усеченная регрессия же предполагает наличие только известных значений для каждого из типов переменных.

Однако, Тобит модель нельзя использовать, когда выборка усечена, поскольку оценки ММП такой модели будут давать результаты обычного МНК, таким образом, не будут учитывать смещение выборки (полученные оценки будут несостоятельны). Пример такой ситуации: пусть у нас будет выборка наблюдаемых страховых исков, но усечение заключается в том, что такие иски рассматривают только, когда размер иска превышает определенного порогового значения, значит, иски с меньшим размером не попадут в выборку.

№ 2.3. Проинтерпретируйте полученные значения оценок для каждой независимой переменной. Поясните, как полученные результаты соотносятся с высказанными вами ранее предположениями.

Все коэффициенты оказались значимыми на любом разумном уровне значимости, тогда

- с увеличением возраста женщины на 1 год з/п снижается на 0.11$, как частично мной и предполагалось, однако я думала, что з/п снижается не с каждым годом, а только с определенного значения, предполагая нелинейную зависимость
- как и ожидалось, с увеличением лет обучения женщины на 1 год з/п увеличивается на 0.63$
- как и ожидалось, с увеличением лет опыта женщины на 1 год з/п увеличивается на 0.23$

№ 2.4. Для индивида с произвольными характеристиками укажите (предварительно записав используемые для расчетов формулы):

Будем рассчитывать каждую из величин для моих характеристик:

Рассчитывать изменение будем для моих характеристик:

Параметр	age	educ	exper
Значение	21	14	2,5

А) E(y*)

$$E(Y^*) = E(x'\beta + \epsilon) = x'\beta$$

Тогда в моем случае $E(Y^*) = 2.235666$

Б) E(y)

$$E(Y) = E(Y|Y^* > 0) * P(Y^* > 0) + E(Y|Y^* \leq 0) * P(Y^* \leq 0) = (x'\beta + \sigma\lambda(\alpha))\Phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right),$$

$$\text{где } \lambda(\alpha) = \frac{\phi(\alpha)}{1 - \Phi(\alpha)} = \frac{\phi(\alpha)}{\Phi(-\alpha)}, \text{где } \alpha = \frac{0 - x'\beta}{\sigma}$$

Тогда в моем случае $E(Y) = 3.119633$

В) Вероятности того, что индивид работает

$$P(Y^* > 0) = P(x'\beta + \epsilon > 0) = 1 - \Phi\left(-\frac{x'\beta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)$$

Тогда в моем случае $P(Y^* > 0) = 0.6915126$

№ 2.5. Для индивида с произвольными характеристиками рассчитайте предельный эффект любой переменной (не дамми), входящей линейно (предварительно записав используемые для расчетов формулы) на:

Будем рассматривать предельные эффекты возраста на:

А) E(y*)

$$\frac{\partial E(Y^*)}{\partial x_{age}} = \beta_{age} = -0.1070508$$

Б) E(y)

$$\frac{\partial E(Y)}{\partial x_{age}} = \frac{\partial\left((x'\beta + \sigma\lambda(\alpha))\Phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)\right)}{\partial x_{age}}$$

$$= \frac{\beta_{age}}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right) \cdot x'\beta + \beta_{age}\Phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right) + \sigma\frac{\partial\phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)}{\partial x_{age}}, \text{где}$$

$$\frac{\partial\phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)}{\partial x_{age}} = \phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right) \cdot \frac{-2\,\beta_{age} \cdot x'\beta}{\partial x_{age}}$$

Тогда:

$$\frac{\partial E(Y)}{\partial x_{age}} = \beta_{age}\,\Phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right) = -0.07402697$$

B) Вероятности того, что индивид работает

$$\frac{\partial P(Y^* > 0)}{\partial x_{age}} = \frac{\partial \Phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)}{\partial x_{age}} = \frac{\beta_{age}}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right) = -0.008430802$$

№ 2.6*. Добавьте в модель нелинейный эффект (например, квадрат). Повторите предыдущий пункт для переменной, имеющей нелинейный эффект.

Предположим, что з/п зависит нелинейно от возраста, а квадратично, то есть добавим признак возраст в квадрате.

```
Call:
crch(formula = wage ~ age + I(age^2) + educ + exper, data = Mroz87, dist = "gaussian", left = 0, truncated = FALSE)

Standardized residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-1.4113 -0.0298  0.2998  0.6954  6.2025

Coefficients (location model):
              Estimate Std. Error z value             Pr(>|z|)
(Intercept) -19.278223   5.370497  -3.590             0.000331 ***
age           0.583667   0.248688   2.347             0.018926 *
I(age^2)     -0.008060   0.002893  -2.786             0.005343 **
educ          0.633263   0.080513   7.865  0.00000000000000368 ***
exper         0.233468   0.024761   9.429 < 0.0000000000000002 ***

Coefficients (scale model with log link):
            Estimate Std. Error z value            Pr(>|z|)
(Intercept)  1.49274    0.03691   40.44 <0.0000000000000002 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Distribution: gaussian
Log-likelihood: -1459 on 6 Df
Number of iterations in BFGS optimization: 26
```

Табл. 2. Результаты оценивания модели Тобина с нелинейной зависимостью от возраста.

Как видим, на 5%-ом уровне значимости все коэффициенты значимы, то есть зарплата имеет параболическую зависимость с ветвями вниз от возраста, соответственно, тот самый эффект, который я и предполагала ранее.

На примере моих данных:

Параметр	age	educ	exper
Значение	21	14	2,5

Будем рассматривать предельные эффекты возраста на:

A) E(y*)

$$\frac{\partial E(Y^*)}{\partial x_{age}} = \beta_{age} + 2\,\beta_{age2}\,x_{age} = 0.2451535$$

Б) E(y)

$$\frac{\partial E(Y\,)}{\partial x_{age}} = \frac{\partial\left((x'\beta + \sigma\lambda(\alpha)\,)\Phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)\right)}{\partial x_{age}}$$
$$= \frac{\beta_{age} + 2\,\beta_{age2}\,x_{age}}{\sigma}\cdot\phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)\cdot x'\beta + (\beta_{age} + 2\,\beta_{age2}\,x_{age})\Phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)$$
$$+\,\sigma\frac{\partial\phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)}{\partial x_{age}},\text{где}$$

$$\frac{\partial\phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)}{\partial x_{age}} = \phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)\cdot\frac{-2\,(\beta_{age} + 2\,\beta_{age2}\,x_{age})\cdot x'\beta}{2\sigma^2}$$

Тогда:

$$\frac{\partial E(Y\,)}{\partial x_{age}} = (\beta_{age} + 2\,\beta_{age2}\,x_{age})\,\Phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right) = 0.09808166$$

В) Вероятности того, что индивид работает

$$\frac{\partial P(Y^* > 0)}{\partial x_{age}} = \frac{\partial\Phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right)}{\partial x_{age}} = \frac{\beta_{age} + 2\,\beta_{age2}\,x_{age}}{\sigma}\cdot\phi\left(\frac{x'\beta}{\sigma}\right) = 0.02128848$$

№ 2.7**. При помощи LR теста проверьте гипотезу о гомоскедастичности в Тобит модели, предварительно формально записав предполагаемые нулевой гипотезой ограничения на параметры, асимптотическое распределение тестовой статистики (при верной нулевой гипотезе) и максимизируемую в гетероскедастичной Тобит модели функцию правдоподобия. При этом уравнение дисперсии должно включать по крайней мере одну переменную, не входящую в основное уравнение. Укажите негативные последствия, к которым может приводить отсутствие учета гетероскедастичности при условии ее наличия в Тобит модели.

Предположим, что возраст и количество детей младше 6 лет оказывают влияние на дисперсию случайной ошибки, то есть $\varepsilon \sim N(0, (exp(\theta + \gamma age + \mu kids5))^2)$.

$$H_0: \gamma = \mu = 0$$

Тестовая статистика:

$$LR = -2(l_R(\widehat{\beta_R}) - l_{UR}(\widehat{\beta_{UR}})) \sim \chi^2(2)$$

Оценим модель с учетом гетероскедастичности (неограниченная):

```
Call:
crch(formula = wage ~ age + educ + exper | age + kids5, data = Mroz87, link.scale = "log", left = 0)

Standardized residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-1.3668 -0.1276  0.2231  0.6664  6.9113 

Coefficients (location model):
            Estimate Std. Error z value             Pr(>|z|)    
(Intercept) -2.97319    1.40340  -2.119               0.0341 *  
age         -0.15706    0.02580  -6.088        0.00000000114 ***
educ         0.66451    0.07749   8.576 < 0.0000000000000002 ***
exper        0.24003    0.02482   9.670 < 0.0000000000000002 ***

Coefficients (scale model with log link):
            Estimate Std. Error z value    Pr(>|z|)    
(Intercept) 0.465720   0.216595   2.150      0.0315 *  
age         0.021289   0.004923   4.324 0.000015329 ***
kids5       0.583173   0.110100   5.297 0.000000118 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Distribution: gaussian
Log-likelihood: -1444 on 7 Df
Number of iterations in BFGS optimization: 16
```

Табл. 3. Результаты оценивания модели Тобина с учетом гетероскедастичности.

```
Likelihood ratio test

Model 1: wage ~ age + educ + exper | age + kids5
Model 2: wage ~ age + educ + exper
  #Df  LogLik Df  Chisq    Pr(>Chisq)    
1   7 -1444.4                            
2   5 -1462.7 -2 36.568 0.00000001146 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Табл. 4. Результаты LR-теста между моделью Тобина с учетом гетероскедастичности и без учета.

После реализации LR-теста получаем p-value стремящийся к 0, на любом разумном уровне значимости нулевая гипотеза отвергается и случайные ошибки гетероскедастичны.

Наличие гетероскедастичности и отсутствие ее учета в модели приводит к несостоятельным и неэффективным оценкам коэффициентов ММП.

Часть 3. Модель Хекмана

№ 3.1. Оцените модель Хекмана с помощью метода максимального правдоподобия, предварительно записав максимизируемую функцию правдоподобия и указав независимые переменные в уравнении занятости, которое должно иметь по крайней мере одну переменную, не входящую в уравнение зарплаты. Результат представьте в форме таблицы (можно, например, использовать выдачу из stata, R или python).

Пусть $Y_i^* = x_i'\beta + \epsilon_i$ — это уравнение зарплаты женщины, где вектор x_i означает признаки возраста, образования и опыта работы женщины, а

$D_i^* = z_i'\gamma + u_i$ — это уравнение занятости женщины, где вектор z_i означает признаки возраста женщины, количества ее детей младше 6 лет, причем

$$\forall i \begin{pmatrix} \epsilon_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & 1 \end{pmatrix})$$

$$D_i = \begin{cases} 1, & \text{если } D_i^* \geq 0 \\ 0, & \text{если } D_i^* < 0 \end{cases}$$

$$Y_i = \begin{cases} Y_i^*, & \text{если } D_i = 1 \\ \text{не наблюдается}, & \text{если } D_i = 0 \end{cases}$$

С помощью ММП будут оцениваться коэффициенты модели β, σ:

$$L = \prod_{D_i=1}^{N} f(Y_i; D_i = 1) \prod_{D_i=0}^{N} P(D_i = 0)$$
$$= \prod_{D_i=1}^{N} \Phi(\frac{\sigma z_i'\gamma + \rho(Y_i - x_i'\beta)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(Y_i - x_i'\beta)^2}{2\sigma^2})) \prod_{D_i=0}^{N} (1 - \Phi(z_i'\gamma))$$
$$\to \max_{\beta,\gamma,\sigma,\rho}$$

```
Tobit 2 model (sample selection model)
Maximum Likelihood estimation
Newton-Raphson maximisation, 2 iterations
Return code 8: successive function values within relative tolerance limit (reltol)
Log-Likelihood: -1573.799
753 observations (325 censored and 428 observed)
9 free parameters (df = 744)
Probit selection equation:
             Estimate Std. Error t value          Pr(>|t|)
(Intercept)  1.895712   0.299652   6.326 0.000000000433092 ***
age         -0.035887   0.006611  -5.429 0.000000076908897 ***
kids5       -0.804151   0.108769  -7.393 0.000000000000387 ***
Outcome equation:
            Estimate Std. Error t value          Pr(>|t|)
(Intercept) -2.83926    1.21913  -2.329            0.0201 *
age          0.01046    0.02357   0.444            0.6574
educ         0.49804    0.06602   7.544 0.000000000000133 ***
exper        0.01977    0.02128   0.929            0.3531
   Error terms:
      Estimate Std. Error t value            Pr(>|t|)
sigma 3.099912   0.105990  29.247 <0.0000000000000002 ***
rho   0.007784   0.208438   0.037                0.97
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Табл. 5. Результаты оценивания модели Хекмана.

№ 3.2. Опишите отличия модели Хекмана от модели Тобина.

Модель Хекмана включает в себя уравнения отбора, в отличие от Тобина, тем самым, мы говорим, что процесс принятия решения об участии (вероятность участия) и наблюдаемая величина переменной (интенсивность участия) объясняются двумя разными процессами.

№ 3.3. Воспользуйтесь методом Хекмана, основанным на двухшаговой процедуре и сравните оценки, с полученными с использованием метода Хекмана, основанном на методе максимального правдоподобия. Опишите относительные преимущества и недостатки обоих методов.

```
Tobit 2 model (sample selection model)
2-step Heckman / heckit estimation
753 observations (325 censored and 428 observed)
10 free parameters (df = 744)
Probit selection equation:
             Estimate Std. Error t value         Pr(>|t|)
(Intercept)  1.895794   0.299647   6.327 0.000000000432117 ***
age         -0.035889   0.006611  -5.429 0.000000076764367 ***
kids5       -0.804158   0.108769  -7.393 0.000000000000387 ***
Outcome equation:
            Estimate Std. Error t value         Pr(>|t|)
(Intercept) -2.83965    1.21919  -2.329           0.0201 *
age          0.01025    0.02439   0.420           0.6745
educ         0.49787    0.06619   7.522 0.000000000000156 ***
exper        0.01978    0.02128   0.930           0.3529
Multiple R-Squared:0.121,       Adjusted R-Squared:0.1127
   Error terms:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
invMillsRatio  0.04168    0.82614    0.05     0.96
sigma          3.10001         NA      NA       NA
rho            0.01345         NA      NA       NA
```

Табл. 6. Результаты оценивания метода Хекмана, основанного на двухшаговой процедуре.

	Heckman.MLE	Heckman.2step
(Intercept)	-2.83926101	-2.83964908
age	0.01046022	0.01024685
educ	0.49803511	0.49787043
exper	0.01977328	0.01978216

Табл. 7. Результаты оценивания метода Хекмана, основанного на методе максимального правдоподобия, и метода Хекмана, основанного на двухшаговой процедуре.

Итого, видим, что оценки коэффициентов в обоих методах схожи.

Модель Хекмана, основанной на методе максимального правдоподобия, отличается большей эффективностью оценок (в случае если ошибки распределены нормально), а также ее оценки обладают всеми свойствами ММП оценок, однако, такую модель сложнее вычислять и при нарушении предпосылки о нормальности ошибок оценки становятся несостоятельными и неэффективными, также имеется риск нахождения локального, а не глобального минимума.

Модель же Хекмана, основанной на двухшаговой процедуре, вычисляется проще, является более устойчивой к нарушению предпосылки о нормальности ошибок, но ее оценки менее эффективны и требуют ограничения исключения.

№ 3.4. Проинтерпретируйте значимость и значение оценки корреляции между случайными ошибками в обоих оцененных моделях. Укажите, можно ли было бы обойтись оцениванием обычной МНК модели.

В модели Хекмана, основанной на методе максимального правдоподобия, p-value у оценки корреляции между случайными ошибками равно 0.97, значит, на любом разумном уровне значимости она не значима.

В модели Хекмана, основанной на двухшаговой процедуре, p-value у оценки корреляции между случайными ошибками не указано, но p-value при обратном отношении Миллса равно 0.96, что также свидетельствует, что на любом разумном уровне значимости корреляция не значима.

Тогда можно сделать вывод о том, что в нашей выборке не наблюдается корреляция между случайными ошибками.

№ 3.5. В любой из двух оцененных в данном разделе моделей для индивида с произвольными характеристиками рассчитайте (предварительно записав формулу):

А) E(y*|d=1) и E(y*|d=0)

Будем рассчитывать на примере моих данных:

Параметр	age	educ	exper	kids5
Значение	21	14	2,5	0

$$E\left(Y_i^* \mid D_i = 1\right) = x_i'\beta + E\left(\epsilon_i \mid D_i = 1\right), \qquad \text{где } \epsilon_i = \rho\sigma u_i + v_i, \text{тогда}$$

$$\begin{aligned} E\left(Y_i^* \mid D_i = 1\right) &= x_i'\beta + \rho\sigma E\left(u_i \mid u_i \ge -x_i'\beta\right) + E\left(v_i \mid u_i \ge -x_i'\beta\right) \\ &= x_i'\beta + \rho\sigma E\left(u_i \mid u_i \ge -x_i'\beta\right) = x_i'\beta + \rho\sigma\lambda_i, \\ &\text{где } \lambda_i = \frac{\phi(-z_i'\gamma)}{1-\Phi(-z_i'\gamma)} = \frac{\phi(z_i'\gamma)}{\Phi(z_i'\gamma)} \end{aligned}$$

Значит, $E\left(Y_i^* \mid D_i = 1\right) = x_i'\beta + \rho\sigma\lambda_i = 4.40807$

Аналогично для $E\left(Y_i^* \mid D_i = 0\right)$

$$E\left(Y_i^* \mid D_i = 1\right) = x_i'\beta - \rho\sigma\frac{\phi(z_i'\gamma)}{\Phi(-z_i'\gamma)} = 4.362755$$

Б) предельный эффект любой переменной (не дамми), входящей линейно и в основное уравнение, и в уравнение занятости, на E(y*| d =1) и E(y*| d = 0) .

Рассмотрим предельный эффект возраста:

На $E(Y^*|D_i = 1)$:

$$\frac{\partial E(Y^*|D_i = 1)}{\partial x_{age}} = \beta_{age} + \rho\sigma \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_{age}}, \qquad \text{где } \lambda_1 = \frac{\phi(z_i'\gamma)}{\Phi(z_i'\gamma)}$$

Заметим, что $\frac{\partial \phi(z_i'\gamma)}{\partial x_{age}} = -\gamma_{age} z_i'\gamma \cdot \phi(z_i'\gamma)$ и $\frac{\partial \Phi(z_i'\gamma)}{\partial x_{age}} = \gamma_{age} \cdot \phi(z_i'\gamma)$

Тогда $\frac{\partial E(Y^*|D_i=1)}{\partial x_{age}} = \beta_{age} + \rho\sigma \frac{-\gamma_{age} z_i'\gamma \cdot \phi(z_i'\gamma) \cdot \Phi(z_i'\gamma) - \gamma_{age} \cdot \phi(z_i'\gamma) \cdot \phi(z_i'\gamma)}{(\Phi(z_i'\gamma))^2} = \beta_{age} - \rho\sigma\gamma_{age}(z_i'\gamma \cdot \lambda_1 + \lambda_1^2) = 0.01074459$

На $E(Y^*|D_i = 0)$:

$$\frac{\partial E(Y^*|D_i = 0)}{\partial x_{age}} = \beta_{age} - \rho\sigma \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_{age}}, \qquad \text{где } \lambda_2 = \frac{\phi(z_i'\gamma)}{\Phi(-z_i'\gamma)}$$

Заметим, что $\frac{\partial \phi(z_i'\gamma)}{\partial x_{age}} = -\gamma_{age} z_i'\gamma \cdot \phi(z_i'\gamma)$ и $\frac{\partial \Phi(z_i'\gamma)}{\partial x_{age}} = -\gamma_{age} \cdot \phi(-z_i'\gamma) = -\gamma_{age} \cdot \phi(z_i'\gamma)$

Тогда $\frac{\partial E(Y^*|D_i=0)}{\partial x_{age}} = \beta_{age} - \rho\sigma \frac{-\gamma_{age} z_i'\gamma \cdot \phi(z_i'\gamma) \cdot \Phi(-z_i'\gamma) + \gamma_{age} \cdot \phi(z_i'\gamma) \cdot \phi(z_i'\gamma)}{\left(\Phi(-z_i'\gamma)\right)^2} = \beta_{age} + \rho\sigma\gamma_{age}(z_i'\gamma \cdot \lambda_2 - \lambda_2^2) = 0.01116744$

Часть 4. Модель Ньюи.

№ 4.1*. Опишите преимущества и недостатки метода Ньюи по сравнению с методом Хекмана.

Преимущества метода Ньюи заключаются в относительной легкости реализации и в состоятельности оценок несмотря на нарушение предпосылки о многомерном нормальном распределении случайных ошибок.

Недостатками является сложность в вычислении метода, необходимость ограничения исключения, неидентифицируемость константы в основном уравнении и отсутствие возможности получения оценок параметров распределения модели.