Bemerkungen:

- $$\int_1^2 \vec{K}\cdot d\vec{r} \overset{\text{konservativ}}{=} V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

  $\Rightarrow$ Potential bis auf eine Konstante festgelegt.

- Beispiele für konservative Kräfte:

  Federkräfte: $\vec{K} = -c\,\vec{r}$

  Gravitation: $\vec{K} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \qquad r = |\vec{r}|$

  Coulombkraft: $\vec{K} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^3}\cdot\vec{r}$

1.2 n-Teilchen-Problem mit Zentralkraft: Konstanten der Bewegung

- System von n Massepunkten mit

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i\,, \qquad \vec{K}_i = \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\,f_{ij}(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$$

$$f_{ij} = \frac{\kappa_{ij}}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|^3}$$

Beispiel: $\kappa_{ij} = -G\,m_i m_j$ Gravitation

$\kappa_{ij} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_i q_j$ Coulomb

$$\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$$

nicht explizit zeitabhängig $\longrightarrow$ Unterdrücke jetzt Zeitabhängigkeit!

i) Summiere $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i$ über alle Massepunkte:

$$\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_i\sum_{j\neq i}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\,f_{ij}(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$$

da $f_{ij} = f_{ji}$ und $\vec{r}_i-\vec{r}_j = -(\vec{r}_j-\vec{r}_i)$

muss:

$$\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\vec{P}(t) = 0$$

ii) Bilde folgende Summe von Vektorprodukten:

Argument von f_{ij} unterdrückt

$[\vec{r}_i\times\vec{r}_i]=0$

$$\sum_i m_i[\vec{r}_i\times\ddot{\vec{r}}_i] = \sum_i\sum_{j\neq i}[\vec{r}_i\times(\vec{r}_i-\vec{r}_j)f_{ij}] = -\sum_i\sum_{i\neq j}\underbrace{[\vec{r}_i\times\vec{r}_j]f_{ij}}_{\text{antisymmetrisch}}$$

$$=0$$

Vektorprodukt: $[\vec{x}\times\vec{y}]^\alpha = \sum_{\beta,\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, x^\beta y^\gamma \qquad \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$

$$[\vec{y}\times\vec{x}] = -[\vec{x}\times\vec{y}]$$

$$[\vec{x}\times\vec{x}] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_i m_i [\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i] = \sum_i m_i\Big(\underbrace{[\dot{\vec{r}}_i\times\dot{\vec{r}}_i]}_{=0} + [\vec{r}_i\times\ddot{\vec{r}}_i]\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}(t) = \frac{d}{dt}\sum m_i[\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i] = 0 \qquad \text{Drehimpuls}$$

iii) Bilde Summe von Skalarprodukten:

$$\sum_i m_i(\dot{\vec{r}}_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i) = \sum_i\sum_{j\neq i}(\dot{\vec{r}}_i\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j))f_{ij}$$

$$\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow (\vec{x}\cdot\vec{y}) = \sum_\alpha x^\alpha y^\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i}(\dot{\vec{r}}_i\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j))f_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i}(\dot{\vec{r}}_j\cdot(\vec{r}_j-\vec{r}_i))f_{ji}$$

$$\overset{f_{ij}=f_{ji}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i}\big((\dot{\vec{r}}_i-\dot{\vec{r}}_j)\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\big)f_{ij}$$

weil $f_{ij} = \dfrac{\varkappa_{ij}}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|^3}$ folgt: $\displaystyle\sum_i m_i(\dot{\vec{r}}_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ j\neq i}}\big((\dot{\vec{r}}_i-\dot{\vec{r}}_j)\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\big)\frac{\varkappa_{ij}}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|^3}$

Betrachte: $\displaystyle\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i) = 2\cdot(\dot{\vec{r}}_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i)$

also: $\displaystyle\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i}{2}(\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\left(\frac{-\varkappa_{ij}}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\right) \qquad \varkappa_{ij} = \varkappa_{ji}$

und damit:

$$\frac{d}{dt}\Bigg(\underbrace{\sum_i\frac{m_i}{2}(\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i)}_{T} + \underbrace{\sum_{i<j}\frac{\varkappa_{ij}}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}}_{V}\Bigg) = 0$$

$$\frac{d}{dt} H = \frac{d}{dt}(T + V) = 0 \qquad \text{Energieerhaltung}$$

H : Hamilton-funktion

- Führen folgende Größen ein:

$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$ Impuls von Teilchen i

$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ Drehimpuls " " i

$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$ $\quad \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i)$ kinetische Energie von Teilchen i

$V_{ij} = \dfrac{\varkappa_{ij}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$ Potential der 2-Körperkraft $\vec{K}_{ij} = \dfrac{\varkappa_{ij}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$: Gesamtimpuls

$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$: Gesamtdrehimpuls

$H = \sum_i T_i + \sum_{i<j} V_{ij} = T + V$ Gesamtenergie

$M = \sum_i m_i$ Gesamtmasse

$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$ Schwerpunkt

- es folgt: i) $\rightarrow$ $\vec{P}(t) = \vec{P}_0 = \text{const}$ und $\vec{R} = \frac{\vec{P}_0}{M} \cdot t + \vec{R}_0$

ii) $\rightarrow$ $\vec{L}(t) = \vec{L}_0 = \text{const}$

iii) $\rightarrow$ $H = E = \text{const}$

umformen: $\vec{R} - \frac{\vec{P}_0}{M} \cdot t = \vec{R}_0$ Schwerpunktsatz

$\Rightarrow$ Erhaltungsgrößen, auch Integrale der Bewegung genannt

$\vec{P}, \vec{L}, \vec{R} - \frac{\vec{P}_0}{M} \cdot t, H$ ändern ihre Werte auf der Bahnkurve nicht!

d.h. $\exists$ für jede der Größen eine Funktion $f(\{\vec{r}_i(t)\}, \{\dot{\vec{r}}_i(t)\}, t) = f_0$

$\Rightarrow$ insgesamt 10 Erhaltungsgrößen $\vec{P}_0, \vec{L}_0, \vec{R}_0 \in \mathbb{R}^3$
$E \in \mathbb{R}$

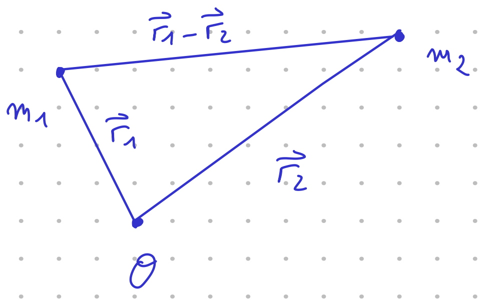
Bemerkung:

a) Erhaltungsgrößen hängen vom Kraftgesetz ab!
Mechanik $\rightarrow$ Finde Integrale der Bewegung zu gegebenem Kraftgesetz!

b) obige Herleitung kann für allgemeine Zentralkräfte verallgemeinert werden.

1.3 Keplerproblem

- Betrachten nun ein 2-Teilchen Problem mit Gravitation



- NA II

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \varkappa \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \vec{K}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \varkappa \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{K}_{12}$$

$\varkappa = -G m_1 m_2$ $\quad$ G: Gravitationskonstante

- Erhaltungssätze:

$$\vec{P}(t) = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{P}_0 = \text{const}$$

$$\vec{R}(t) = \frac{1}{M}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}_0}{M} \cdot t \qquad \vec{R}_0 = \text{const}, \quad M = m_1 + m_2$$

$$\vec{L}(t) = m_1 [\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1] + m_2 [\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2] = \vec{L}_0 = \text{const.}$$