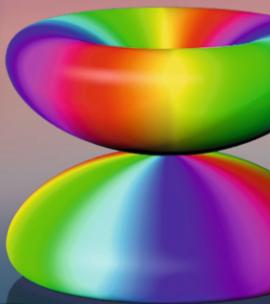


LEHRBUCH

Matthias Bartelmann  
Björn Feuerbacher  
Timm Krüger  
Dieter Lüst  
Anton Rebhan  
Andreas Wipf



# Theoretische Physik 1 Mechanik



Springer Spektrum

---

## Theoretische Physik 1 | Mechanik

---

Matthias Bartelmann · Björn Feuerbacher · Timm Krüger ·  
Dieter Lüst · Anton Rebhan · Andreas Wipf

# Theoretische Physik 1 | Mechanik



**Springer** Spektrum

Matthias Bartelmann  
Universität Heidelberg  
Heidelberg, Deutschland

Björn Feuerbacher  
Heidenheim, Deutschland

Timm Krüger  
University of Edinburgh  
Edinburgh, Großbritannien

Dieter Lüst  
Ludwig-Maximilians-Universität München  
München, Deutschland

Anton Rebhan  
Technische Universität Wien  
Wien, Österreich

Andreas Wipf  
Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Jena, Deutschland

ISBN 978-3-662-56114-0  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-56115-7>

ISBN 978-3-662-56115-7 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnetet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum  
Ursprünglich erschienenen in einem Band unter dem Titel „Theoretische Physik“  
© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018  
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.  
Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.  
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.  
Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Einbandabbildung: Collage unter Verwendung einer Einstein-Fotografie (Courtesy of the Caltech Archives, California Institute of Technology)  
Einbandentwurf: deblik Berlin, nach einem Entwurf von Kristin Riebe  
Grafiken: Kristin Riebe  
Verantwortlich im Verlag: Lisa Edelhäuser

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.  
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

# Vorwort und einleitende Bemerkungen

Dieses Werk stellt die Grundlagen der theoretischen Physik in vier eng aufeinander abgestimmten Bänden dar, wie sie in den Bachelor- und Masterstudiengängen an Universitäten in Deutschland, Österreich und der Schweiz gelehrt werden. In vier großen Teilen, die jeweils in einem Band behandelt werden, führt es ein in die klassische Mechanik, die Elektrodynamik, die Quantenmechanik sowie in die Thermodynamik und die statistische Physik. Dabei stehen diese Bände nicht nebeneinander, sondern sind durch zahlreiche Querverweise aufeinander bezogen, sodass die inneren Verstrebungen zwischen den Säulen der theoretischen Physik sichtbar werden. Erheblich erleichtert durch die weitestgehend einheitliche Notation wird so ein zusammenhängender Überblick über die Grundlagen der theoretischen Physik vermittelt.

Die vier Bände dieses Werks enthalten zahlreiche Beispiele, insgesamt fast 700 Verständnisfragen, Vertiefungen, mathematische Ergänzungen und weiterführende Überlegungen reichern den Text an und sind grafisch ansprechend abgesetzt. Mehr als 500 genau auf den Text abgestimmte Abbildungen verdeutlichen die Darstellung. Mehr als 300 Übungsaufgaben mit kommentierten Lösungen bieten sich für ein intensives Selbststudium an.

## Über die theoretische Physik im Allgemeinen und dieses Lehrbuch

Physik ist eine Erfahrungswissenschaft, die Vorgänge in der (meist unbelebten) Natur zu quantifizieren und auf Gesetzmäßigkeiten zurückzuführen sucht. Theoretische Physik strebt nach der Einheit hinter der Vielfalt, nach möglichst fundamentalen Gesetzen, die den zahlreichen Erfahrungstatsachen zugrunde liegen.

Die moderne Physik hat sich dennoch zu einer fast unüberschaubaren Wissenschaft entwickelt. Wie in praktisch jedem Wissenschaftszweig überblickt ein einzelner Physiker nur noch einen beschränkten Teil des Wissensgebietes in einem Maße, wie es der Stand der Forschung gebieten würde, und dies trifft auch auf die theoretische Physik zu.

Mit diesem Werk möchten wir eine breite Grundlage für das Studium der theoretischen Physik schaffen, die für die meisten einführenden und weiterführenden Vorlesungen ausreichend ist. Mit seinen vier Bänden umfasst es mehr, als in einer viersemestrigen Vorlesungsreihe zur theoretischen Physik behandelt werden kann. Durch eine Gliederung in Haupttext, farbige Merkkästen, vertiefende Kästen und Kästen zum mathematischen Hintergrund, eingestreute Selbsttests in kurzen Abständen, abgesetzte Beispiele und viele Aufgaben mit ausführlichen Lösungen soll jeder der vier Bände aber ebenso ein Lehrbuch wie ein Arbeitsbuch darstellen. Darüber hinaus werden Ausblicke in einige Bereiche der theoretischen Physik gegeben, die nicht Teil des traditionellen Kanons von Einführungsvorlesungen in die theoretische Physik sind.

Die Struktur dieses gesamten Werks orientiert sich an diesem traditionellen Kanon, wie er an vielen Universitäten geboten wird. Der erste Band enthält die klassische Mechanik und ihre relativistische Erweiterung, der zweite setzt mit der Elektrodynamik einschließlich ihrer speziell-relativistischen Formulierung fort. Der dritte Band verlässt die klassische Physik mit einer umfassenden Einführung in die nichtrelativistische Quantenphysik. Der vierte und letzte Band schließlich behandelt zunächst die

von der mikroskopischen Physik weitgehend unabhängige Thermodynamik, bevor deren Grundlage in der statistischen Mechanik inklusive statistischer Quantenmechanik erarbeitet wird.

Die Gesetze der theoretischen Physik, die dabei formuliert werden, nehmen die Gestalt mathematischer Gleichungen an, in denen die mathematischen Symbole semantisch an die Stelle physikalischer Größen treten. Die dafür benötigte Mathematik wird dabei parallel zur Physik entwickelt, so wie es sich auch in der Geschichte der Mathematik und Physik weitgehend zugetragen hat. Dies ersetzt nicht die separate Ausbildung in Mathematikvorlesungen, soll aber mit einem Fokus auf das Wesentliche eine schnelle Orientierung erleichtern.

Die in Bd. 1 behandelte klassische Mechanik benötigt für die Formulierung ihrer Aufgabenstellung *Vektorräume* und *Differenzialoperatoren*. Besonderer Wert wird auf die Beschreibung beschleunigter Bezugssysteme gelegt, da dies in der Literatur häufig unzureichend behandelt wird. Erhaltungssätze, die mit *Symmetrien* verbunden sind, spielen eine entscheidende Rolle, die für die gesamte übrige theoretische Physik von grundlegender Bedeutung sind. Der *Lagrange-* und *Hamilton-Formalismus* der klassischen Mechanik und seine *funktionale* Methodik stellt auch eine bedeutende mathematische Grundlage für alle weiteren Entwicklungen, Feldtheorien wie der Elektrodynamik, der Quantentheorie sowie der Thermodynamik dar. Wellenphänomene, die vor allem in der Elektrodynamik und Quantenmechanik eine zentrale Rolle spielen, werden bereits in Bd. 1 eingeführt und anhand einiger mechanischer Phänomene diskutiert. Dabei wird auch von den Fourier-Reihen Gebrauch gemacht. Bd. 1 beinhaltet einige Themen, die häufig nicht in Einführungskursen der klassischen Mechanik vorgestellt werden. Dazu gehören Gezeitenkräfte, das reduzierte Dreikörperproblem sowie die Grundlagen der Flüssigkeitsdynamik. Diese Abschnitte sind optional, liefern aber wertvolle Einblicke in weiterführende Themen.

Bereits in Bd. 1 wird die Erweiterung der Newton'schen Mechanik durch die spezielle Relativitätstheorie Einsteins behandelt, die traditionellerweise erst im Anschluss an die Elektrodynamik systematisch entwickelt wird. Hier erlaubt dieses Lehrbuch zwei Vorgangsweisen: Die spezielle Relativitätstheorie kann noch vor der Elektrodynamik im Rahmen der Mechanik ausführlich studiert werden, aber ebenso ist es möglich, diese Kapitel in die Elektrodynamik zu integrieren, und an den Anfang des achten Kapitels von Bd. 2 zu stellen, in dem mit einer relativistischen Formulierung der Maxwell'schen Elektrodynamik fortgefahren wird.

In der überarbeiteten Fassung von Bd. 1 wurden vor allem neue Anwendungs- und Vertiefungskästen hinzugefügt. Der Vertiefungskasten zur Stabilität der Lagrange-Punkte in Kap. 3 erweitert die Diskussion der Lagrange-Punkte und ihrer Relevanz für die moderne Astronomie. Kap. 6 enthält nun einen Anwendungskasten zum akustischen Dopplereffekt, wobei wir zwischen bewegtem Sender und/oder bewegtem Empfänger von Schallwellen unterscheiden. Der Anwendungskasten zur Symmetriebrechung in einem mechanischen System in Kap. 8 betrachtet das Verhalten eines elastischen Stabes unter Kompression und bereitet auf entsprechende weiterführende Konzepte in der Quantenmechanik vor.

Weiterhin wurden in allen Kapiteln eine Reihe von Unklarheiten und Fehlern beseitigt, die Notation stärker vereinheitlicht, sowie zahlreiche Begriffe in den Index übernommen, um die Navigation im Buch zu vereinfachen. Mehrere Abbildungen mit Zeichnungsfehlern wurden korrigiert. Insbesondere wurde eine neue Abbildung zur Darstellung der Wellenausbreitung in Kap. 6 eingefügt.

## Weiterführende Lehrbücher

Budo, A.: Theoretische Mechanik. Wiley (1990) – älteres aber sehr gutes und erschöpfendes Standardwerk zur klassischen Mechanik. Vorbild für viele spätere Lehrbücher über Mechanik. Neuere Entwicklungen, z. B. aus der analytischen Mechanik, werden natürlich nicht behandelt.

Goldstein, H., Poole, C.P., Safko, J.L.: Klassische Mechanik. Wiley (2006) – wie Budo ein Klassiker; umfangreich und gründlich mit Schwerpunkt auf Theorie sowie dem Lagrange- und Hamilton-Formalismus. In den neuen Auflagen findet man auch eine Einführung in die Chaostheorie.

Kuypers, F.: (2010) Klassische Mechanik. Wiley (2010) – didaktisch sehr gute Darstellung der Mechanik mit verständlichen Erklärungen und schönen Anwendungen sowie einer großen Anzahl von

Aufgaben und Lösungen. Man findet hier eine ausführliche Behandlung der Lagrange'schen und Hamilton'schen Dynamik.

Scheck, F.: Mechanik. Von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos. Springer (1992) – zeitgemäße und mathematisch anspruchsvollere Behandlung der klassischen Mechanik. Im Text und in den Übungsaufgaben werden sehr viele Probleme der klassischen Mechanik behandelt.

## Buchreihen zur theoretischen Physik

Neben den genannten Lehrbüchern existieren mehrere Lehrbuchreihen, die den gesamten Stoff der theoretischen Physikvorlesungen abdecken. Davon sind folgende deutschsprachigen Reihen zum Einstieg in die theoretische Physik oder zu einer Vertiefung der Kenntnisse geeignet:

- Fließbach, T.: Lehrbücher zur Theoretischen Physik (Springer Spektrum)
- Greiner, W.: Theoretische Physik (Harri Deutsch)
- Landau, L.D., Lifschitz, E.M.: Lehrbuch der Theoretischen Physik (Harri Deutsch)
- Nolting, W.: Grundkurs Theoretische Physik (Springer)
- Rebhan, E.: Theoretische Physik (Spektrum)
- Reineker, P., Schulz, M., Schulz, B.M.: Theoretische Physik (Wiley-VCH)
- Schwabl, F.: Lehrbücher zur Theoretischen Physik (Springer)

## Mathematische Methoden der theoretischen Physik

Die speziellen mathematischen Methoden der theoretischen Physik werden im vorliegenden Buch parallel zum physikalischen Stoff entwickelt, zum Teil im Haupttext und zum Teil in ergänzenden Kästen zum mathematischen Hintergrund. Diese fassen das Wesentliche zusammen, ersetzen aber nicht vollwertige mathematische Vorlesungen und entsprechende Lehrbücher. Ein mathematisches Lehrbuch, das in seinen didaktischen Elementen ganz ähnlich strukturiert ist wie dieses und sich speziell an die Bedürfnisse von Ingenieuren und Naturwissenschaftlern richtet, ist:

Arens T. et al.: Mathematik. Springer Spektrum (2012)

Darüber hinaus sehr empfehlenswert:

Großmann S.: Mathematischer Einführungskurs für die Physik. Vieweg-Teubner (2012) – eine bewährte, übersichtliche, gut verständliche Einführung in eine Vielzahl mathematischer Methoden, die in der Physik angewandt werden.

Jänich K.: Analysis für Physiker und Ingenieure. Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen. Springer (1995) – eine wirklich lebendige Darstellung der speziellen mathematischen Methoden der theoretischen Physik mit einer gründlichen Einführung in die komplexe Funktionentheorie und zahlreichen gelungenen Illustrationen des Autors.

## Dank

Dieses Buch ist das Ergebnis der gemeinsamen, intensiven Anstrengung vieler Menschen, denen die Autoren zu großem Dank verpflichtet sind. Ganz besonders möchte Anton Rebhan seinen Kollegen Dr. Dietrich Grau und Dr. Helmut Nowotny sowie seiner Frau und Mitphysikerin Dr. Ulrike Kraemer für umfangreiches kritisches Korrekturlesen und wertvolle Hinweise zu den Kapiteln über spezielle Relativitätstheorie und Elektrodynamik danken. Andreas Wipf dankt Frau Johanna Mader und seiner Frau Ingrid Wipf für eine kritische Durchsicht der Kapitel über Quantenmechanik sowie Studenten seiner Vorlesungen in Jena, die Vorschläge zur besseren Darstellung des Stoffes in Bd. 3 machten

und viele nützliche Hinweise gaben. Matthias Bartelmann bedankt sich herzlich bei seinen Mitarbeitern und vielen engagierten Studenten seiner Vorlesungen, die durch kritische Fragen und klärende Diskussionen wesentlich dazu beigetragen haben, Bd. 4 zu verbessern.

Bedanken möchten wir uns auch bei Herrn Prof. Stephan Wagner von der Landessternwarte Heidelberg für die freundliche Überlassung von Materialien zum Astronomie-Praktikum der Sternwarte, Herrn Prof. Bernd Thaller von der Universität Graz für die Erstellung des dem Bd. 3 vorangestellten Bildes, sowie die Darstellung der komplexen H-Eigenfunktion mit farbkodierter Phase zu Beginn von Bd. 3, Kap. 8, Herrn Prof. Rudolf Grimm vom Institut für Experimentalphysik der Universität Innsbruck für die Überlassung des Bildes zu Beginn von Bd. 3, Kap. 2 „Wellenmechanik“, Prof. Alexander Szameit von der Friedrich-Schiller-Universität Jena für die Bereitstellung des Bildes zu Beginn des Bd. 3, Kap. 5 „Zeitentwicklung“ und Ruth Bartelmann für das Porträt des Maxwell'schen Dämons bei der Arbeit, das im Bd. 4, Kap. 2 „Statistische Begründung der Thermodynamik“ erscheint.

Zu ganz großem Dank sind wir Frau Dr. Kristin Riebe verpflichtet, die mit großem Engagement, Kompetenz und Ideenreichtum die Grafiken dieses Buches gestaltete. Drs. Martin Kreh, Florian Modler und Michael Kuss halfen bei der Erstellung der mathematischen Einschübe und Christoph Kommer beim wissenschaftlichen Lektorat. Frau Bianca Alton vom Verlag Springer Spektrum stellte ihre große Erfahrung zur Verfügung. Nicht zuletzt danken wir besonders herzlich Frau Dr. Vera Spillner, die uns zu diesem Projekt zusammengeführt und mit unermüdlichem Enthusiasmus, großer Kreativität, hilfreichen Ideen und inspirierenden Diskussionen angetrieben und motiviert hat. Ohne sie wäre dieses Buch nicht zustande gekommen.

Heidelberg 2018

Matthias Bartelmann, Björn Feuerbacher, Timm Krüger,  
Dieter Lüst, Anton Rebhan & Andreas Wipf

# Wie dieses Buch zu lesen ist

## Frage 16

Überzeugen Sie sich davon, dass  $\hat{a}\psi_0 = 0$  ist.

**Achtung** Der Punkt über einer Größe, die neben der Zeit noch von anderen Größen abhängt, bezeichnet in der Regel die *vollständige* und nicht die *partielle* Zeitableitung, sofern es nicht anders definiert wird. ▶

### Schrödinger-Gleichung im Impulsraum

Im Impulsraum ist  $\hat{p}$  ein Multiplikationsoperator, und die freie Schrödinger-Gleichung lautet

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}(t, \mathbf{p})}{\partial t} = H_0(\hat{\mathbf{p}})\tilde{\psi}(t, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\tilde{\psi}(t, \mathbf{p}). \quad (2.76)$$

**Selbstfragen** Mit den Selbstfragen wird der Lesefluss dort unterbrochen, wo Sie in der Lage sein sollten, vom bereits Besprochenen ausgehend einfache weiterführende Fragen zu beantworten, die unmittelbar danach im Text wieder aufgegriffen werden. Selbstfragen erleichtern es Ihnen zu überprüfen, inwieweit Sie den bis dahin verfolgten Gedankengang bereits verinnerlicht haben und weiterdenken können. Die Selbstfragen bieten Ihnen eine Gelegenheit, innezuhalten und sich eigene Antworten zu überlegen.

**Achtung** In der Achtung-Umgebung finden Sie kurze Einschübe und ergänzende Erläuterungen, die vor allem Missverständnisse oder zu weit gehende Schlussfolgerungen vermeiden, scheinbare Widersprüche aufzuklären oder auf verschiedene Konventionen hinweisen sollen. Die Achtung-Umgebung macht Sie damit auf Stellen aufmerksam, an denen Sie nicht auf Irrwege geraten oder sich in ungelösten oder verwirrenden Fragen verlieren sollten.

**Merke** Die Merke-Umgebung fasst die wichtigsten Aussagen der jeweils vorangehenden Erläuterungen und Diskussionen in solchen Abständen zusammen, dass Ihnen die Abfolge von Merke-Umgebungen zur knappen Bündelung und Sammlung Ihres Wissens dienen kann und Ihnen bei der Wiederholung einen schnellen Überblick ermöglicht. In den Merke-Umgebungen werden die wichtigsten Aussagen knapp wiederholt und zusammengestellt.

### Mischungstemperatur

Damit können wir sofort angeben, welche Temperatur sich einstellen wird, wenn zwei gemeinsam isolierte Systeme in thermischen Kontakt gebracht werden. Wenn keinerlei mechanische Arbeit ausgeübt wird, muss  $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$  gelten, woraus

$$\begin{aligned}\Delta Q_1 + \Delta Q_2 &= 0 = m_1 \int_{T_1}^T c_{V_1}(T') dT' \\ &\quad + m_2 \int_{T_2}^T c_{V_2}(T') dT'\end{aligned}\quad (1.19)$$

folgt, wenn  $c_V$  die spezifische Wärme pro Masse bei konstantem Volumen ist. Wenn zudem noch  $c_V$  von der Temperatur zumindest in genügender Näherung unabhängig ist, erhalten wir daraus

$$m_1 c_{V_1}(T - T_1) + m_2 c_{V_2}(T - T_2) = 0. \quad (1.20)$$

Dies liefert die Mischungstemperatur

$$T = \frac{m_1 c_{V_1} T_1 + m_2 c_{V_2} T_2}{m_1 c_{V_1} + m_2 c_{V_2}}, \quad (1.21)$$

die bei gleichen Wärmekapazitäten allein durch das Massenverhältnis und die Ausgangstemperaturen bestimmt wird:

$$T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.22)$$

### Vertiefung: Zur Bestimmung der absoluten Entropie

Bei der Temperatur  $T$  gilt aufgrund der Definition der Entropie

$$\Delta S = \int_0^T \frac{\partial Q_{\text{rev}}}{T} = S_T - S_0.$$

Nun gibt es in der Thermodynamik jedoch keinen freien Raum, sondern nur als Nullpunkt oder Nullwert beschrieben, mit dem wir in Abschätzungen zurückkommen werden. Nach diesem Satz verschwindet die Entropie am absoluten Nullpunkt,  $S_0 = 0$ . Aufgrund dessen können wir den Entropieunterschied  $\Delta S$  relativ zum absoluten Nullpunkt mit der Entropie  $S$  und ebenso mit  $S_T$  identifizieren und

$$S = \int_0^T c_p(T') \frac{dT'}{T},$$

schreiben. Findet die Erwärmung von  $T = 0$  nach  $T$  bei konstantem Druck statt, dann ist

$$S = \int_0^T c_p^{\text{std}}(T') \frac{dT'}{T},$$

Auf dem Weg vom absoluten Nullpunkt bis zur Temperatur  $T$  geschieht jedoch einiges mit einem Stoff, und dabei ändert sich seine Wärmekapazität. Sehen wir uns dies für Tetraclorid  $\text{CCl}_4$  näher an. Er liegt bei einer angemessenen Zimmertemperatur von  $298\text{ K}$  nicht als eine Flüssigkeit vor, die gerade zu verdampfen beginnt.

Bei tiefen Temperaturen sind die Wärmekapazitäten seiner kristallinen Stoffe proportional zur dritten Potenz der Temperatur,

$$c_p^{\text{std}} = b T^3 \quad \text{für } T \leq T_c = 10\text{ K}.$$

wie in Abschnitt 5.7 gezeigt wird. Die Proportionalitätskonstante hat für  $\text{CCl}_4$  den Wert  $3.14 \cdot 10^{-2} \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^3$ . Bei  $T_c = 225.4\text{ K}$  ändert sich der Aufbau des Kristallgitters des bei diesen Temperaturen gefrorenen Stoffes; es erfolgt ein Übergang von einer festen Phase in eine andere. Dafür wird eine Wärmemenge von  $\Delta Q = 4524 \text{ J mol}^{-1}$  verbraucht. Bei  $T = 298\text{ K}$  ist die Wärmekapazität wieder  $c_p^{\text{std}}$ . Um zu berechnen, wieviel Wärme für die Umwandlung des Kristalls in eine Flüssigkeit benötigt wird, beträgt  $\Delta Q_0 = 2416 \text{ J mol}^{-1}$ . Für die Verdampfung bei  $T_d = 298.1\text{ K}$  werden  $\Delta Q_1 = 32.407 \text{ J mol}^{-1}$  aufgebracht. Daraus ergibt sich für die Entropie (in  $\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ )

$$\begin{aligned}S_{T_d} &= \int_0^{T_c} \int_0^T c_p^{\text{std}} \frac{dT'}{T} + \int_{T_c}^{T_d} \frac{\Delta Q_0}{T'} \\ &\quad + \int_{T_d}^{T_d} \frac{\Delta Q_1}{T'} + \int_{T_d}^{T_d} \frac{\Delta Q_0}{T'} + \int_{T_d}^{T_d} \frac{\Delta Q_1}{T'}.\end{aligned}$$

Bei  $T_d = 298.1\text{ K}$  hat  $\text{CCl}_4$  einen Dampfdruck von  $14.819 \text{ Pa}$ . Um den Dampf auf den Normaldruck von  $101.325 \text{ Pa}$  zu bringen, muss man ihn komprimieren. Dabei verringert sich die Entropie um

$$\Delta S = R \ln \frac{V_{101.325}}{V_{14.819}}.$$

Die Integranden  $c_p^{\text{std}}/T$  sind entsprechend den experimentellen Werten von  $c_p^{\text{std}}$  Funktionen der Temperatur. Die Integrationswerte werden numerisch ausgeführt. Die einzelnen Entropieanteile pro Mol und ihre Summe sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Insgesamt treten drei Phasenübergänge auf, nämlich bei der Umwandlung des Kristalls in die Schmelze und beim Verdampfen. In allen drei Fällen geht die Wärme zugunsten solcher Wärmeträger, die während Phasenübergängen auftreten können (nicht missen!), heißen latente Wärmen. Beachten Sie, dass die latenten Wärmen bei den Phasenübergängen wesentlich zur Gesamtentropie beitragen.

Aggregatzustand	Stoff	$\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Feststoffe	Graphit, C	5.7
	Diamant, C	2.4
	Iod, I <sub>2</sub>	100.1
Flüssigkeiten	Wasser, H <sub>2</sub> O	173.3
	Quecksilber, Hg	69.9
	Methan, CH <sub>4</sub>	76.0
Gase	Kohlendioxid, CO <sub>2</sub>	186.1
	Wasserstoff, H <sub>2</sub>	213.6
	Helium, He	130.6

Ahnlich verhält man mit anderen Stoffen. Die Europäischen Feststoffe, Flüssigkeiten und Gase bei  $298\text{ K}$  sind in der nächsten Tabelle zusammengestellt.

Wie wir sehen werden, lässt sich die Entropie eines Körpers auch theoretisch berechnen. In der Luft unseres Zimmers, in einem Stück Kreide – in jedem Körper steckt eine bestimmte Entropie.

**Beispiel** Beispiele in ganz verschiedener Länge und Ausführlichkeit erläutern die Darstellung durch Anwendungen, erklären Gleichungen oder Herleitungen anhand einfacher Systeme oder gehen auf Spezialfälle ein, die für den fortlaufenden Text nicht entscheidend, aber dennoch zum Verständnis nützlich oder wichtig sind. Beispiele geben Ihnen auch eine Gelegenheit, Ihr Verständnis abstrakterer Aussagen dadurch zu überprüfen, dass Sie sie auf konkrete Fälle übertragen.

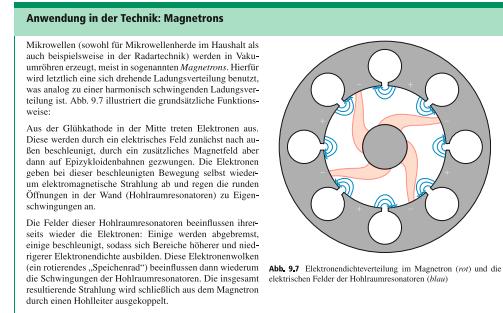


Abb. 9.7 Elektronendichteverteilung im Magnetron (rot) und die elektrischen Felder der Hohlraumresonatoren (blau)

### 1.5 Mathematischer Hintergrund: Differenzialgleichungen Lösungsverfahren

Es gibt kein festes Lösungsverfahren, mit dem man beliebige Differenzialgleichungen lösen kann. Manchmal hilft ein geschickter Lösungsansatz, oder eine Lösung kann erraten werden. Folgende „Kochrezepte“ sind beim Lösen von DGLs nützlich.

**Trennung der Veränderlichen für  $y'(t) = f(t)y(t)$**   
Um das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'(t) = f(t)y(t), \quad y(t_0) = y_0$$

mit  $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt, dass  $y(t_0) = y_0$  und  $y'(t_0) \neq 0$  lokal zu lösen, dividieren wir zunächst durch  $y(t)$ . Dies ist nur möglich, da  $y$  und  $t$  stetig sind und deshalb wegen  $y(t_0) = y_0 \neq 0$  auch  $y(t) \neq 0$  und  $y'(t) \neq 0$  in einer Umgebung  $U$  von  $t_0$  gilt. In ganz  $U$  hat  $y(t)$  ferner das gleiche Vorzeichen. Danach integrieren wir von  $t_0$  bis  $t$  und erhalten

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(r)}{y(r)} dr = \int_{t_0}^t f(r) dr, \quad H(y(t)) = \int_{t_0}^t f(r) dr$$

was aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zur vorigen Gleichung äquivalent ist. Mithilfe der Kettenregel lässt sich die linke Seite umformen, sodass wir

$$\int_{t_0}^t \frac{dy}{y(t)} dr = \int_{t_0}^t f(r) dr \quad \text{bzw.} \quad H(y(t)) = \int_{t_0}^t f(r) dr$$

mit  $H(c) = \int_{t_0}^t \frac{dy}{y(t)} dr$  erhalten. Da  $y$  in ganz  $U$  das gleiche Vorzeichen hat, ist  $H$  streng monoton wachsend bzw. fallend und besitzt in  $U$  eine Umkehrfunktion  $H^{-1}$ . Somit ist  $y(t) = H^{-1}(\int_{t_0}^t f(r) dr)$ . Um die Lösung zu erhalten, folgenden Umformungsritte lassen sich sehr leicht machen, wenn man die Ableitung  $y'(t)$  als Differenzialquotient  $\frac{dy}{dt}$  schreibt, dann formal mit dem Differenzial  $dr$  multipliziert und die Variablen trennt („alles mit  $y$  nach links, alles mit  $t$  nach rechts“), danach integriert und schließlich das Ganze nach  $t$  aufstößt.

**Substitution bei  $y'(t) = f(t)y(t) + c$**  Die DGL

$$y'(t) = f(t)y(t) + c$$

mit  $b = -c/f(t)$  erhält

Es gibt kein festes Lösungsverfahren, mit dem man beliebige Differenzialgleichungen (DGLs) lösen kann. Manchmal hilft ein geschickter Lösungsansatz, oder eine Lösung kann erraten werden. Folgende „Kochrezepte“ sind beim Lösen von DGLs nützlich.

**Trennung der Veränderlichen für  $y'(t) = f(t)y(t) + c$**   
Um das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'(t) = f(t)y(t) + c, \quad y(t_0) = y_0$$

mit  $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt, dass  $y(t_0) = y_0$  und  $y'(t_0) \neq 0$  lokal zu lösen, dividieren wir zunächst durch  $y(t)$ . Dies ist nur möglich, da  $y$  und  $t$  stetig sind und deshalb wegen  $y(t_0) = y_0 \neq 0$  auch  $y(t) \neq 0$  und  $y'(t) \neq 0$  in einer Umgebung  $U$  von  $t_0$  gilt. In ganz  $U$  hat  $y(t)$  ferner das gleiche Vorzeichen. Danach integrieren wir von  $t_0$  bis  $t$  und erhalten

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(r)}{y(r)} dr = \int_{t_0}^t f(r) dr, \quad H(y(t)) = \int_{t_0}^t f(r) dr$$

was aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zur vorigen Gleichung äquivalent ist. Mithilfe der Kettenregel lässt sich die linke Seite umformen, sodass wir

$$\int_{t_0}^t \frac{dy}{y(t)} dr = \int_{t_0}^t f(r) dr \quad \text{bzw.} \quad H(y(t)) = \int_{t_0}^t f(r) dr$$

mit  $H(c) = \int_{t_0}^t \frac{dy}{y(t)} dr$  erhalten. Da  $y$  in ganz  $U$  das gleiche Vorzeichen hat, ist  $H$  streng monoton wachsend bzw. fallend und besitzt in  $U$  eine Umkehrfunktion  $H^{-1}$ . Somit ist  $y(t) = H^{-1}(\int_{t_0}^t f(r) dr)$ . Um die Lösung zu erhalten, folgenden Umformungsritte lassen sich sehr leicht machen, wenn man die Ableitung  $y'(t)$  als Differenzialquotient  $\frac{dy}{dt}$  schreibt, dann formal mit dem Differenzial  $dr$  multipliziert und die Variablen trennt („alles mit  $y$  nach links, alles mit  $t$  nach rechts“), danach integriert und schließlich das Ganze nach  $t$  aufstößt.

**Substitution bei  $y'(t) = f(t)y(t) + c$**  Die DGL

$$y'(t) = f(t)y(t) + c$$

mit  $b = -c/f(t)$  erhält

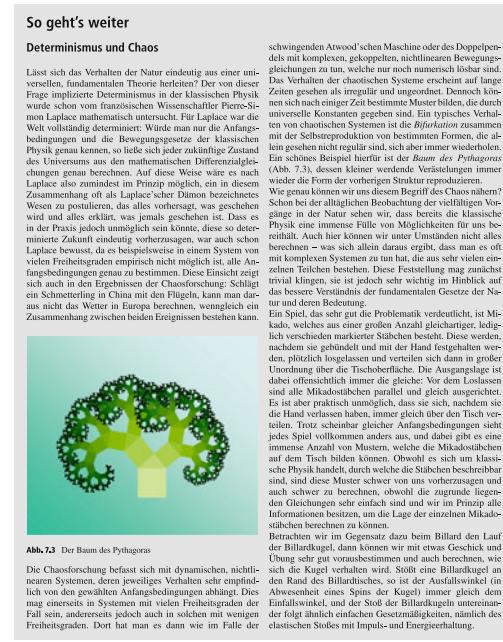


Abb. 7.3 Der Baum des Pythagoras

Die Chaoforschung befasst sich mit dynamischen, nichtlinearen Systemen, deren jeweiliges Verhalten sehr empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt. Das ist ein Merkmal, das man in Systemen mit vielen Freiheitsgraden der Fall sieht, andererseits jedoch auch in solchen mit wenigen Freiheitsgraden. Dafür hat man es dann wie im Falle der

**Anwendung** Anwendungen stehen zwischen Vertiefungen und Beispielen. Sie können einerseits insofern als erweiterte Beispiele angesehen werden, als der Stoff dort auf konkrete Systeme übertragen wird und andererseits insofern als Vertiefungen, als die dort besprochenen Themen bei einem ersten Durchgang übergangen werden können. Die Anwendungen sollen es Ihnen ermöglichen, Ihr Verständnis anhand weiterführender Beispiele zu vertiefen und Ihr bereits bestehendes Wissen zu übertragen.

**Mathematischer Hintergrund** Unter dieser Bezeichnung wird losgelöst vom fortlaufenden Text prägnant umrissen, welche mathematischen Themen und weitergehenden Fragestellungen an das behandelte Gebiet anschließen oder auf welchen mathematischen Grundlagen eine physikalische Betrachtung aufbaut. Sie finden hier auch Beweiseideen und Literaturvorschläge. In den Mathematischen Hintergründen können Sie Formeln nachschlagen oder sich mathematische Zusammenhänge wieder ins Gedächtnis rufen.

**So geht's weiter** In diesen meist ausführlichen Umgebungen werden Themen beschrieben, die jenseits des eigentlichen Stoffumfangs stehen, aber interessante Ausblicke in daran anschließende, weiterführende Fragestellungen und Probleme bieten. Diese So geht's-weiter-Umgebungen sollen Ihnen einen Anstoß geben, Ihr bis dahin erworbene Wissen zu erproben und in angrenzende Bereiche hinein zu erweitern. Diese Teile sollen Ihren Appetit anregen, mehr zu erfahren und über den üblichen Stoff hinauszudenken.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Newton'schen Axiome</b>	1
1.1	Definitionen und Grundlagen	2
1.2	Die Newton'schen Axiome	6
1.3	Eindimensionale Bewegung im homogenen Schwerefeld	12
1.4	Energiesatz in einer Dimension	18
1.5	Bewegung in drei Dimensionen	23
1.6	Energieerhaltung und konservative Kräfte	28
	Aufgaben	36
	Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	39
	Literatur	45
<b>2</b>	<b>Koordinatentransformationen und beschleunigte Bezugssysteme</b>	47
2.1	Drehungen von kartesischen Koordinatensystemen	48
2.2	Galilei-Transformationen	55
2.3	Beschleunigte Bezugssysteme	59
2.4	Kräfte in rotierenden Bezugssystemen	65
2.5	Nichtkartesische Koordinatensysteme	71
	Aufgaben	77
	Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	79
	Literatur	83
<b>3</b>	<b>Systeme von Punktmassen</b>	85
3.1	Allgemeine Aussagen und Erhaltungssätze	86
3.2	Das Zweikörper-Zentralkraftproblem	91
3.3	Das Kepler-Problem	95
3.4	Elastische Stöße und Streuung	101
3.5	Das reduzierte Dreikörperproblem	109
3.6	Gezeitenkräfte	112
3.7	Mechanische Ähnlichkeit und der Virialsatz	116
	Aufgaben	119
	Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	121
	Literatur	125

<b>4 Starre Körper</b>	127
4.1 Freiheitsgrade des starren Körpers	128
4.2 Kinetische Energie und Drehimpuls	131
4.3 Tensoren	133
4.4 Trägheitstensor und Trägheitsmomente	137
4.5 Kontinuierliche Massenverteilungen	143
4.6 Bewegungsgleichungen des starren Körpers	147
4.7 Rotation des Kreisels	149
Aufgaben	156
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	159
Literatur	164
<b>5 Lagrange-Formalismus und Variationsrechnung</b>	165
5.1 Systeme mit Zwangsbedingungen	166
5.2 Lagrange-Gleichungen erster Art	171
5.3 Lagrange-Gleichungen zweiter Art	176
5.4 Beispiele zur Anwendung des Lagrange-Formalismus	181
5.5 Variationsrechnung	185
5.6 Symmetrien und Erhaltungssätze	194
Aufgaben	200
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	202
Literatur	208
<b>6 Schwingungen</b>	209
6.1 Freie Schwingungen	210
6.2 Gedämpfte Schwingungen	217
6.3 Erzwungene Schwingungen und Resonanz	220
6.4 Kleine Schwingungen gekoppelter Systeme	223
6.5 Anwendungen gekoppelter Oszillatoren	229
Aufgaben	235
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	237
<b>7 Hamilton-Formalismus</b>	243
7.1 Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen	244
7.2 Kanonische Transformationen	249
7.3 Grundlagen der Hamilton-Jacobi-Theorie	254
So geht's weiter	259
Aufgaben	262
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	264
Literatur	269

<b>8 Kontinuumsmechanik</b>	271
8.1 Lineare Kette und Übergang zum Kontinuum	272
8.2 Schwingende Saite	277
8.3 Fourier-Reihen	281
8.4 Lagrange-Formalismus für Felder	287
8.5 Grundlagen der Elastizitätstheorie	290
8.6 Ideale Flüssodynamik	297
8.7 Viskosität und Navier-Stokes-Gleichung	304
So geht's weiter	308
Aufgaben	312
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	314
Literatur	318
<b>9 Spezielle Relativitätstheorie</b>	319
9.1 Anfang und Ende der Äther-Vorstellung	321
9.2 Lorentz-Transformationen	325
9.3 Minkowski-Raum	330
9.4 Viererformalismus	337
So geht's weiter	344
Aufgaben	347
Lösungen zu den Aufgaben	349
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	350
Literatur	354
<b>10 Relativistische Mechanik</b>	355
10.1 Punktteilchen, Ruhemasse und Viererimpuls	356
10.2 Relativistische Bewegungsgleichungen	357
10.3 Relativistische Teilchenstöße	360
Aufgaben	370
Lösungen zu den Aufgaben	373
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	374
Literatur	378
<b>Abbildungsnachweis</b>	379
<b>Sachverzeichnis</b>	381

# Übersicht der Kapitelinhalte aller Bände

## **Band 1 Mechanik**

- 1 Die Newton'schen Axiome
- 2 Koordinatentransformationen und beschleunigte Bezugssysteme
- 3 Systeme von Punktmassen
- 4 Starre Körper
- 5 Lagrange-Formalismus und Variationsrechnung
- 6 Schwingungen
- 7 Hamilton-Formalismus
- 8 Kontinuumsmechanik
- 9 Spezielle Relativitätstheorie
- 10 Relativistische Mechanik  
Abbildungsnachweis  
Sachverzeichnis

## **Band 2 Elektrodynamik**

- 1 Die Maxwell-Gleichungen
- 2 Elektrostatik
- 3 Vollständige Funktionensysteme: Fourier-Transformation und Multipolentwicklung
- 4 Elektrische Felder in Materie
- 5 Magnetismus und elektrische Ströme
- 6 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen
- 7 Optik
- 8 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik
- 9 Abstrahlung elektromagnetischer Wellen
- 10 Lagrange- und Hamilton-Formalismus in der Elektrodynamik  
Abbildungsnachweis  
Sachverzeichnis

**Band 3 Quantenmechanik**

- 1 Die Entstehung der Quantenphysik
- 2 Wellenmechanik
- 3 Formalismus der Quantenmechanik
- 4 Observablen, Zustände und Unbestimmtheit
- 5 Zeitentwicklung und Bilder
- 6 Eindimensionale Quantensysteme
- 7 Symmetrien und Erhaltungssätze
- 8 Zentralkräfte – das Wasserstoffatom
- 9 Elektromagnetische Felder und der Spin
- 10 Störungstheorie und Virialsatz
- 11 Mehrteilchensysteme und weitere Näherungsmethoden
- 12 Streutheorie  
Abbildungsnachweis  
Sachverzeichnis

**Band 4 Thermodynamik und statistische Physik**

- 1 Phänomenologische Begründung der Thermodynamik
- 2 Statistische Begründung der Thermodynamik
- 3 Einfache thermodynamische Anwendungen
- 4 Ensembles und Zustandssummen
- 5 Quantenstatistik  
Abbildungsnachweis  
Sachverzeichnis

# Verzeichnis der mathematischen Hintergründe

1.1 Vektorräume . . . . .	4
1.2 Metrische und normierte Räume . . . . .	6
1.3 Skalarprodukt, euklidische Räume . . . . .	7
1.4 Differenzialgleichungen . . . . .	13
1.5 Differenzialgleichungen – Lösungsverfahren . . . . .	14
1.6 Vektorprodukt und Levi-Civita-Symbol . . . . .	25
1.7 Differenzialoperatoren . . . . .	29
1.8 Taylor'scher Satz . . . . .	31
1.9 Der Satz von Stokes . . . . .	33
2.1 Matrizen I – Definition und grundlegende Rechenregeln . . . . .	50
2.2 Matrizen II – Determinanten . . . . .	52
2.3 Matrizen III – Matrixinversion und Rechenregeln für Determinanten . . . . .	57
2.4 Gruppen – Einführung in die Gruppentheorie . . . . .	60
4.1 Tensoren . . . . .	134
4.2 Diagonalisierbarkeit . . . . .	140
5.1 Mannigfaltigkeiten – Eine Verallgemeinerung euklidischer Räume . . . . .	168
5.2 Funktionale . . . . .	187
6.1 Lineare Differenzialgleichungen – Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen, Fundamentalsystem . . . . .	212
6.2 Komplexe Zahlen – Definition und Rechenregeln . . . . .	214
6.3 Lineare Differenzialgleichungen – Lösungsstrategien . . . . .	216
7.1 Legendre-Transformationen – Grundlagen und anschauliche Bedeutung . . . . .	246
8.1 Funktionenfolgen und Funktionenreihen – Punktweise und gleichförmige Konvergenz . . . . .	282
9.1 Dualraum . . . . .	340

# Verzeichnis weiterer mathematischer Hintergründe

## Band 2 Elektrodynamik

- 1.1 Distributionen
- 1.2 Rechenregeln für Distributionen
- 1.3 Integralsätze der Vektoranalysis – Satz von Gauß und Satz von Stokes
- 3.1 Komplexe Funktionen I – Definition von holomorphen Funktionen und die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen
- 3.2 Komplexe Funktionen II – Potenzreihen und Beispiele
- 3.3 Komplexe Funktionen III – Singularitäten und meromorphe Funktionen
- 3.4 Separationsansatz zum Lösen partieller Differenzialgleichungen
- 6.1 Bessel-Funktionen

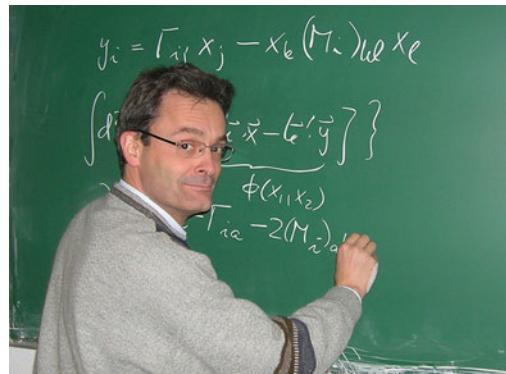
## Band 3 Quantenmechanik

- 3.1 Operatoren – Hermitesche und selbstadjungierte Operatoren
- 3.2 Spektralprojektoren
- 6.1 Verzweigungspunkte komplexer Funktionen
- 7.1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren
- 7.2 Darstellungen einer Lie-Gruppe und Lie-Algebra
- 8.1 Frobenius-Sommerfeld-Methode – Verallgemeinerte Potenzreihenansätze
- 8.2 Laguerre-Polynome
- 10.1 Asymptotische Reihen
- 12.1 Gammafunktion

## Band 4 Thermodynamik und Statistische Physik

- 1.1 Homogene Funktionen
- 2.1 Symplektische Struktur
- 2.2 Differentialformen – Ein Ausblick in die Differentialgeometrie
- 2.3 Volumen und Oberfläche der  $n$ -Sphäre
- 2.4 Kolmogorows Axiome und der Bayes'sche Satz
- 4.1 Gauß'sche Integrale
- 5.1 Riemann'sche Zetafunktion – Einige Eigenschaften

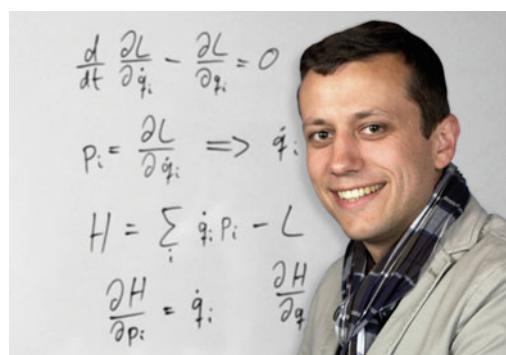
## Die Autoren



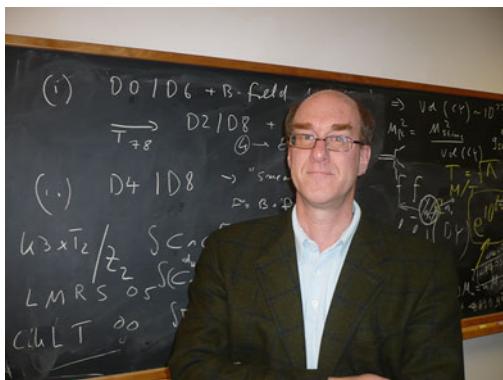
**Matthias Bartelmann** ist seit 2003 Professor für theoretische Astrophysik an der Universität Heidelberg. Sein besonderes Interesse gilt der Kosmologie und der Entstehung kosmischer Strukturen. Für seine Vorlesungen zu verschiedenen Gebieten der theoretischen Physik und Astrophysik erhielt er 2008 und 2016 den Lehrpreis seiner Fakultät.



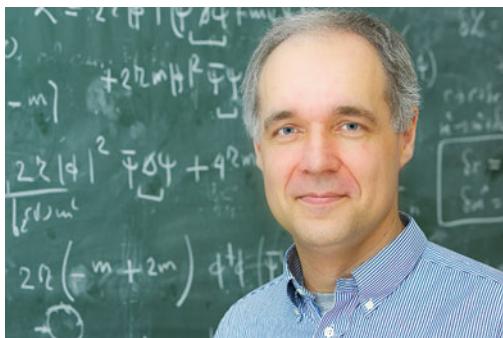
**Björn Feuerbacher** hat in Heidelberg Physik studiert und dort am Institut für Theoretische Physik über ein Thema der Quantenfeldtheorie promoviert. Nach einer PostDoc-Stelle in der theoretischen Chemie arbeitet er seit 2007 als Lehrer für Mathematik und Physik an der Friedrich-Fischer-Schule in Schweinfurt, einer beruflichen Oberschule.



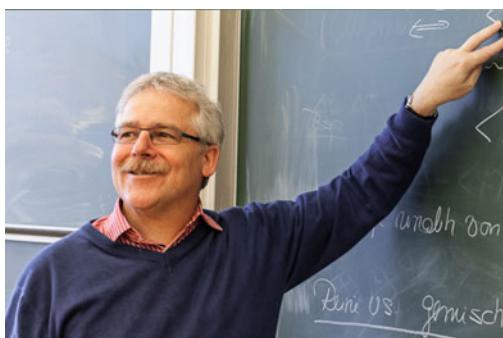
**Timm Krüger** hat in Bielefeld und Heidelberg Physik studiert und seine Doktorarbeit am Max-Planck-Institut für Eisenforschung in Düsseldorf geschrieben. Seit 2013 forscht er als Chancellor's Fellow an der Universität von Edinburgh. Er ist vor allem an der Rheologie komplexer Flüssigkeiten und der Modellierung und Simulation von Blutströmungen interessiert.



**Dieter Lüst** ist seit 2004 Professor für mathematische Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität in München und dort Direktor am Max-Planck-Institut für Physik. Davor war er von 1993 bis 2004 Professor für Theoretische Physik an der Humboldt-Universität zu Berlin. Sein besonderes Interesse gilt der Stringtheorie.



**Anton Rebhan** war als Wissenschaftler mehrere Jahre an den Forschungszentren CERN (Genf) und DESY (Hamburg) tätig und ist seit 2008 Professor für theoretische Physik an der Technischen Universität Wien und Leiter der Arbeitsgruppe fundamentale Wechselwirkungen. Seine Forschungsschwerpunkte sind Quantenfeldtheorie und Theorie des Quark-Gluon-Plasmas. Seit 2014 leitet er zudem eine Graduiertenschule zur theoretischen und experimentellen Teilchenphysik.



**Andreas Wipf** forsche am Dublin Institute for Advanced Studies, Los Alamos National Laboratory, Max-Planck-Institut für Physik und an der ETH-Zürich und ist seit 1995 Professor für Quantentheorie an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena. Er ist Sprecher eines Graduiertenkollegs zur Gravitation, Quantenfeldtheorie und Mathematischen Physik. Diesen Forschungsgebieten gilt auch sein besonderes Interesse.

## 1

# Die Newton'schen Axiome



Was bedeutet „klassische Mechanik“?

Wie lauten die Newton'schen Axiome?

Was ist ein Inertialsystem?

Wie löst man einfache Bewegungsgleichungen?

Was sind konservative Kräfte?

Was besagt der Energieerhaltungssatz?

1.1	Definitionen und Grundlagen . . . . .	2
1.2	Die Newton'schen Axiome . . . . .	6
1.3	Eindimensionale Bewegung im homogenen Schwerefeld . . . . .	12
1.4	Energiesatz in einer Dimension . . . . .	18
1.5	Bewegung in drei Dimensionen . . . . .	23
1.6	Energieerhaltung und konservative Kräfte . . . . .	28
	Aufgaben . . . . .	36
	Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	39
	Literatur . . . . .	45

Das vorliegende Kapitel liefert eine Einführung in die grundlegenden Konzepte der klassischen, nichtrelativistischen Mechanik. Ein wichtiges Fundament dieser Theorie ist das physikalische Verständnis der Begriffe „Raum“ und „Zeit“, „Körper“ und „Masse“, „Kraft“ und „Inertialsystem“. Auf der Basis dieser Größen werden wir die Newton'schen Axiome kennenlernen und erarbeiten. Sie bestimmen, auf welchen Bahnkurven sich Punktmassen bewegen. Zusätzlich werden wir zahlreiche mathematische Begriffe definieren und Techniken kennenlernen, die ein tieferes Verständnis der Mechanik überhaupt erst ermöglichen.

## 1.1 Definitionen und Grundlagen

In diesem Abschnitt finden Sie eine kurze historische Einführung in die klassische Mechanik. Anschließend werden wir zentrale physikalische und mathematische Größen einführen sowie das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik vorstellen.

### Eine kurze historische Einführung in die klassische Mechanik

Im Studium der theoretischen Physik beginnt man in den meisten Fällen mit der Mechanik. Das ist sinnvoll, da sie die älteste der theoretischen Physikdisziplinen darstellt und sich die grundlegenden physikalischen Begriffe in der Mechanik einführen und auf andere Theorien übertragen lassen. Darüber hinaus ist die theoretische Mechanik auch die anschaulichste Disziplin, da sie überwiegend Alltagsphänomene beschreibt. Historisch bauen viele andere Physikdisziplinen auf der klassischen Mechanik auf (z. B. die Quantenmechanik und die statistische Mechanik). Ursprünglich wurde sogar versucht, sämtliche Naturbeobachtungen im Rahmen der Mechanik zu verstehen (*mechanisches Weltbild*). Obwohl dies letztlich nicht möglich ist, spielt die Mechanik noch immer eine fundamentale Rolle in der Physik; sie kann als allgemeine Grundlage der Physik angesehen werden.

Die geschichtliche Entwicklung der Mechanik könnte ein eigenes Buch füllen. Hier sollen nur die grundlegendsten Meilensteine zusammengefasst und die wichtigsten Personen genannt werden. *Archimedes* (287–212 v. Chr.) formulierte die sogenannten Hebelgesetze und das nach ihm benannte Prinzip. Rund 1700 Jahre später wurden die Planetenbahnen von *Nikolaus Kopernikus* (1473–1543) und *Tycho Brahe* (1546–1601) studiert. *Johannes Kepler* (1571–1630) gelang es, diese Beobachtungen im Rahmen des heliozentrischen Weltbildes zu verstehen. *Galileo Galilei* (1564–1642) leistete mit seinen Fallversuchen und Pendelexperimenten wichtige Beiträge zur Mechanik. Ebenso formulierte er das nach ihm benannte Relativitätsprinzip.

Der wohl wichtigste Physiker in der Geschichte der Mechanik war *Isaac Newton* (1643–1727). So formulierte er nicht nur die fundamentalen Axiome der Mechanik, er entwickelte auch parallel zu *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) die Differenzial- und Integralrechnung und kombinierte Keplers und

Galileis Erkenntnisse, was auf die Beschreibung der Schwerkraft führte. Nach Newton wurde die Mechanik zur *analytischen Mechanik* weiterentwickelt. *Johann Bernoulli* (1667–1748) löste damit das Problem der Brachistochrone (dies ist die Kurve, auf der eine Punktmasse reibungsfrei am schnellsten von einem Punkt zu einem anderen fällt; sie wird in Aufgabe 5.5 besprochen), was die Entwicklung der Variationsrechnung einläutete. Auch weitere Mitglieder der Bernoulli-Familie lieferten wichtige Beiträge zur Mathematik und Physik.

Für die Entwicklung der analytischen Mechanik war auch *Leonhard Euler* (1707–1783) entscheidend mitverantwortlich. Nach ihm wurden zahlreiche Gleichungen benannt, die in der Variationsrechnung, der Hydrodynamik und der Kreiselbewegung fundamentale Bedeutung besitzen. *Jean-Baptiste le Rond d'Alembert* (1717–1783) legte die Grundsteine für die Kontinuumsmechanik. *Joseph-Louis Lagrange* (1736–1813) begründete den Lagrange-Formalismus, dem eine wesentliche Rolle in diesem Buch zukommt. Die Hamilton'sche Mechanik, die von *William Rowan Hamilton* (1805–1865) ausgearbeitet wurde, ist heute in der Quantenmechanik unverzichtbar. Die moderne Betrachtungsweise von Symmetrien und Erhaltungsgrößen wurde von *Amalie Emmy Noether* (1882–1935) entwickelt. Schließlich entwickelte *Albert Einstein* (1879–1955) die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie fast im Alleingang.

In Bd. 1 wird zunächst die klassische Mechanik behandelt. Sie beinhaltet sowohl die Newton'sche als auch die Lagrange'sche, die Hamilton'sche sowie die relativistische Mechanik. Die Quantenmechanik jedoch wird als nichtklassisch bezeichnet. Ihr ist Bd. 3 gewidmet.

Die theoretische Mechanik beschreibt die Gesetze, nach denen sich Massen unter dem Einfluss von Kräften mit der Zeit im Raum bewegen. Kräfte sind dabei die Ursache der Bewegung und mathematisch und physikalisch noch genauer zu definieren. Die Analyse der klassischen Mechanik führt zu Begriffen und Methoden, die sich durch die gesamte theoretische Physik ziehen und vor allem für die Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie außerordentlich fruchtbar sind.

Die klassische Punktmechanik, mit der wir uns zuerst beschäftigen werden, kennt dabei eine Vierheit von Objekten: Körper, Kräfte, Raum und Zeit. Die modernen Theorien für eine Vereinheitlichung der Physik werden später fundamental an diesen Begriffen einsetzen. Die Feldtheorie, geschichtlich zuerst die Elektrodynamik, wird dazu Kräfte und den Raum miteinander verbinden, die spezielle Relativitätstheorie dann Raum und Zeit, und die allgemeine Relativitätstheorie schließlich verknüpft Körper mit der Raum-Zeit-Struktur.

### Der Gültigkeitsbereich der klassischen Mechanik

Um physikalische Systeme verstehen zu können, müssen häufig Vereinfachungen und Idealisierungen vorgenommen werden.

Dabei versucht man, für das Problem wichtige und unwichtige Effekte voneinander zu trennen. Eine dafür wesentliche mathematische Methode ist die sogenannte *Taylor-Entwicklung*, die im Laufe dieses Kapitels erläutert wird. Erst durch dieses Vorgehen wird es überhaupt möglich, Theorien und Naturgesetze zu formulieren. Unser erstes Beispiel für dieses Vorgehen ist die Approximation von ausgedehnten Körpern durch punktförmige Massen. Hierbei werden die räumliche Ausdehnung und mögliche innere Freiheitsgrade der Objekte vernachlässigt. So gelten die Newton'schen Gesetze beispielsweise zunächst auch nur für punktförmige Massen. Die Auswirkungen der Ausdehnung der Objekte kann allerdings später durch zusätzliche Gleichungen beschrieben werden.

In der klassischen Mechanik werden Körper als Punkte bestimmter Masse, sogenannte *Punktmassen*, beschrieben. Ihre Ausdehnung ist dabei klein gegenüber den Dimensionen des Gesamtsystems. Die Begriffe „klein“ und „groß“ sind hier als relative Bezugsangaben zu verstehen. So ist beispielsweise die Erde im Vergleich zu einer Raumstation, die sie umkreist, groß. Relativ zur Ausdehnung der Sonne oder sogar der Milchstraße ist die Erde jedoch klein.

Eine Punktmasse wird allein durch ihre Masse  $m$  und ihren Ort  $\mathbf{x}(t)$  zur Zeit  $t$  beschrieben. Ausgedehnte starre Körper können dann als Systeme von Punktmassen aufgefasst werden, deren Abstände untereinander konstant sind. Punktmassen sind Idealisierungen, da sämtliche Alltagsgegenstände eine Ausdehnung besitzen. Andererseits können beispielsweise einige Elementarteilchen wie Elektronen doch als Punktmassen angesehen werden, da es experimentell bisher nicht gelungen ist, eine innere Struktur von Elektronen zu beobachten. Die obere Grenze für den Elektronenradius liegt derzeit bei etwa  $10^{-19}$  m.

Der physikalische Raum, in dem sich die klassische Mechanik abspielt, ist ein kontinuierlicher, dreidimensionaler *Vektorraum* (siehe „Mathematischer Hintergrund“ 1.1). Dieser Raum ist flach, also nicht gekrümmt, d. h., dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks stets  $180^\circ$  beträgt. Beispiele für gekrümmte zweidimensionale Räume sind die Oberflächen einer Kugel oder eines Sattels.

Im Rahmen der klassischen Mechanik sind die Eigenschaften des Raumes unabhängig von der Existenz von Körpern und deren Bewegung. Die Lage von Körpern wird stets relativ zu anderen Körpern, den *Bezugssystemen*, angegeben. Ein häufig anzutreffendes Bezugssystem ist das sogenannte *Laborsystem*, das durch die Wände desjenigen Labors definiert ist, in dem Experimente durchgeführt werden. Wir werden später darauf zurückkommen, welche Bezugssysteme am geeignetsten sind, um physikalische Gesetze zu formulieren.

Im Allgemeinen gelten die Annahmen der *Homogenität* und *Isoptropie* des Raumes, d. h., ein Bezugssystem kann beliebig (aber zeitunabhängig) verschoben und gedreht werden. Typischerweise wird ein *kartesisches Koordinatensystem* für das Bezugssystem gewählt (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 1.2 und darauf aufbauend den „Mathematischen Hintergrund“ 1.3).

## 1.1 Definitionen und Grundlagen

Die Zeit ist in der nichtrelativistischen Mechanik ein absoluter, kontinuierlicher und unabhängiger Parameter. Das heißt unter anderem, dass sich jedem *Ereignis* ein eindeutiger Zeitpunkt  $t$  zuordnen lässt und sich alle Ereignisse eindeutig zueinander ordnen lassen (ein Ereignis kann somit gleichzeitig, früher oder später als ein anderes Ereignis eintreten). Es wird im Rahmen der Newton'schen Mechanik postuliert, dass es eine für alle Bezugssysteme universelle Zeit gibt. Von dieser Hypothese muss man in der speziellen Relativitätstheorie abrücken.

Der Nullpunkt der Zeit ist im Allgemeinen frei wählbar. Letzteres wird als *Homogenität der Zeit* bezeichnet. Um Zeiten zu messen, benötigt man nicht zuletzt periodische Vorgänge (z. B. die Tageslänge, die Schwingungsdauer eines Pendels oder einer Lichtwelle).

Kräfte wirken in der nichtrelativistischen Mechanik instantan, d. h. von ihrer Wirkung wird angenommen, dass sie sich mit einer unendlichen Geschwindigkeit ausbreitet; Ursache und Wirkung einer Kraft ereignen sich also gleichzeitig.

Die klassische, nichtrelativistische Mechanik ist gültig in alltäglichen Dingen, bei denen

- Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind,
- Abstände groß gegenüber Atomdurchmessern sind,
- Abstände klein gegenüber kosmologischen Ausdehnungen sind,
- Massen hinreichend klein sind.

Die spezielle Relativitätstheorie wird sich als eine Erweiterung der Newton'schen Mechanik erweisen, in der Geschwindigkeiten nicht auf Werte beschränkt sind, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Sie wird in Kap. 9 diskutiert. Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie, die in diesem Buch nicht behandelt wird, werden sowohl kosmologische Abstände als auch beliebig große Massen, die den Raum krümmen, betrachtet. Systeme, bei denen die Abstände in der Größenordnung von Atomdurchmessern liegen, werden durch die Quantenmechanik in Bd. 3 beschrieben.

## Einführung der mechanischen Grundgrößen

Die Gleichungen der klassischen Mechanik lassen sich mithilfe der linearen Algebra formulieren. Zu diesem Zweck führen wir hier alle für den Anfang relevanten Größen ein und beginnen mit dem *Ortsvektor*  $\mathbf{x}$ . Ein Ortsvektor  $\mathbf{x}$  einer Punktmasse  $m$  beschreibt ihre Position im Raum relativ zu einem Koordinatensystem. Ausgedehnte Körper werden zusätzlich durch ihre Orientierung relativ zu den Achsen des Koordinatensystems charakterisiert. Sie werden in Kap. 4 behandelt. Die grundlegenden Konzepte der klassischen Mechanik lassen sich jedoch anhand von Punktmassen veranschaulichen, bevor der Schritt zu ausgedehnten Objekten unternommen wird.

## 1.1 Mathematischer Hintergrund: Vektorräume

Auf den ersten Blick haben die Menge der Verschiebungen im  $\mathbb{R}^3$ , die Menge der Polynome einer Veränderlichen mit rationalen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich  $n$  und die Menge der Paare von reellen Zahlen nicht viel gemeinsam. Tatsächlich jedoch handelt es sich bei allen dreien um *Vektorräume*, denn man kann die Elemente dieser Mengen addieren und vervielfachen, und dabei gelten gewisse Regeln, z. B. das Kommutativ- und Assoziativgesetz. Um den Begriff „Vektorraum“ allgemein fassen zu können, müssen wir zuerst die relevanten Eigenschaften der reellen Zahlen formulieren.

**Definition Körper** Eine Menge  $\mathbb{K}$  ist ein *Körper*, wenn es

- eine *Addition*  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  gibt, sodass  $\mathbb{K}$  bezüglich der Addition eine additive abelsche Gruppe ist (Gruppen werden im „Mathematischen Hintergrund“ 2.4 vertieft.):
  - *Assoziativgesetz*: Es gilt  $x + (y + z) = (x + y) + z$  für alle  $x, y, z \in \mathbb{K}$ .
  - *Existenz des neutralen Elements*: Es gibt ein Element  $0 \in \mathbb{K}$ , sodass für alle  $x \in \mathbb{K}$  gilt  $x + 0 = x$ .
  - *Existenz des Inversen*: Zu jedem Element  $x \in \mathbb{K}$  gibt es ein inverses Element  $-x$  mit  $x + (-x) = 0$ .
  - *Kommutativgesetz*: Für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  gilt  $x + y = y + x$ .
- eine *Multiplikation*  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto xy$  gibt, sodass  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  bezüglich der Multiplikation eine multiplikative abelsche Gruppe ist:
  - *Assoziativgesetz*: Es gilt  $x(yz) = (xy)z$  für alle  $x, y, z \in \mathbb{K}$ .
  - *Existenz des neutralen Elements*: Es gibt ein Element  $1 \in \mathbb{K}$ , sodass für alle  $1 \in \mathbb{K}$  gilt  $1x = x$ .
  - *Existenz des Inversen*: Zu jedem Element  $0 \neq x \in \mathbb{K}$  gibt es ein inverses Element  $x^{-1}$  mit  $x(x^{-1}) = 1$ .
  - *Kommutativgesetz*: Für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  gilt  $xy = yx$ .
- das *Distributivgesetz* erfüllt ist: Es gilt  $x(y+z) = xy + xz$  für alle  $x, y, z \in \mathbb{K}$ .

Die Gruppen  $(\mathbb{K}, +)$  bzw.  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  nennt man *abelsch* (nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel, 1802–1829), da die Gruppen das Kommutativgesetz erfüllen. Beispiele für Körper sind die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  und die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Die Menge der rationalen Funktionen einer Veränderlichen mit reellen Koeffizienten  $\mathbb{R}(X)$  bildet ebenfalls einen Körper. Es gibt auch endliche Körper, z. B. die Restklassen modulo 7.

In der Physik werden die Elemente eines Körpers als *Skalare* bezeichnet. Es handelt sich dabei praktisch immer um reelle und komplexe Zahlen ( $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ ). Zu komplexen Zahlen siehe Kap. 6.

Nachdem wir den Begriff „Körper“ definiert haben, können wir den Begriff *Vektorraum* präzisieren. Dieser enthält Elemente, sogenannte *Vektoren*, die sich addieren und mit Elementen des Körpers vervielfachen lassen.

**Definition Vektorraum** Eine Menge  $V$  ist ein Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{K}$ , wenn

- es eine *Addition*  $V \times V \rightarrow V$ :  $(x, y) \mapsto x + y$  gibt, sodass  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe ist;
- es eine *skalare Multiplikation*  $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ :  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$  gibt mit den Eigenschaften
  - $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ,
  - $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ,
  - $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ ,
  - $1x = x$
 für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  und  $x, y \in V$ .

Die Anforderungen an die skalare Multiplikation stellen dabei nur sicher, dass die skalare Multiplikation im Vektorraum und die Multiplikation innerhalb des Körpers zueinander kompatibel sind. Die Untersuchung von Vektorräumen ist Gegenstand der *linearen Algebra*. Wichtige Ergebnisse sind:

**Existenz einer Basis** Es gibt Vektoren  $\{b_1, b_2, \dots\} \subset V$ , sodass sich jeder Vektor  $v \in V$  eindeutig als (endliche) Linearkombination  $\sum_i \lambda_i b_i$  schreiben lässt.

**Dimension eines Vektorraumes** Alle Basen eines Vektorraumes sind gleich mächtig, d. h., zwischen beliebigen zwei Basen  $B_1$  und  $B_2$  eines Vektorraumes  $V$  gibt es eine bijektive (d. h. umkehrbare) Abbildung  $B_1 \rightarrow B_2$ . Besteht eine Basis eines Vektorraumes  $V$  nur aus endlich vielen Elementen, dann haben alle Basen von  $V$  die gleiche Länge. Diese Länge bezeichnet man als *Dimension* von  $V$ .

**Koordinaten eines Vektors** Ist  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  eine Basis des  $n$ -dimensionalen Vektorraumes  $V$ , kann man jeden Vektor  $v \in V$  eindeutig schreiben als  $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ . Das  $n$ -Tupel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

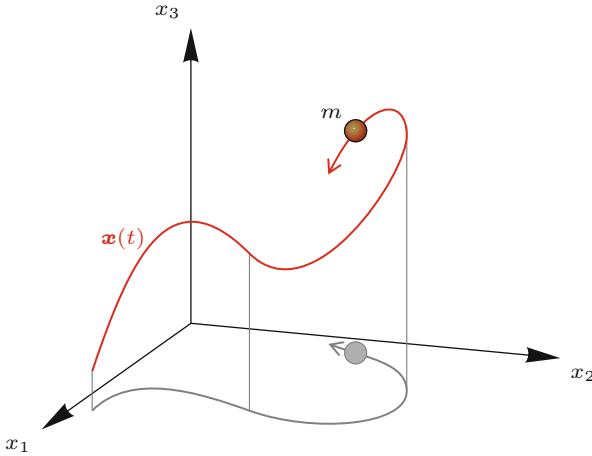
nennt man die Koordinaten von  $v$  bezüglich der Basis  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  und notiert diese als Spaltenvektoren. Um Platz zu sparen, werden in diesem Buch die Koordinatenvektoren auch als transponierte Zeilenvektoren  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$  notiert.

Die Koordinaten eines Vektors hängen von der Wahl der Basis ab. So hat z. B. das Polynom  $f(X) = 1 + 2X + 3X^2$  bezüglich der Basis  $\{1, X, X^2\}$  die Koordinaten  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und bezüglich der Basis  $\{1, 1 + X, 1 + X + X^2\}$  die Koordinaten  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

## 1.1 Definitionen und Grundlagen

### Literatur

- Jänich, K.: Lineare Algebra. 10. Aufl., Springer (2004)
- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., SpringerSpektrum (2014)



**Abb. 1.1** Die Bahnkurve  $\mathbf{x}(t)$  einer Punktmasse  $m$  (hier zusammen mit ihrer Projektion auf die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene dargestellt) umfasst die zusammenhängende Menge aller Punkte, die  $m$  im Laufe der Zeit durchläuft

Im gesamten Buch werden Vektoren im dreidimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  fett gedruckt. In der Regel werden Vektoren als Spaltenvektoren dargestellt, z. B.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Die entsprechenden Zeilenvektoren nennt man transponiert. Sie werden in der Form  $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, x_3)$  geschrieben. Eine mathematische Einführung in Vektorräume und die Darstellung eines Vektors in einem Koordinatensystem finden Sie im „Mathematischen Hintergrund“ 1.1.

Vektorräume spielen in der Physik eine zentrale Rolle. Mit ihrer Hilfe lassen sich alle Größen beschreiben, deren Linearkombinationen wieder einen Vektor ergeben. Man begegnet Vektoren über die Mechanik hinaus in praktisch allen physikalischen Disziplinen. In Aufgabe 1.1 wird die Vektorrechnung vertieft.

Die *Bahnkurve*  $\mathbf{x}(t)$  einer Punktmasse ist die zentrale Größe in der Mechanik von Punktmassen. Sie gibt an, wie sich ihre Koordinaten im gewählten Bezugssystem mit der Zeit  $t$  ändern. Die Bahnkurve enthält alle Raumpunkte, welche die Punktmasse im Laufe der Zeit durchläuft. Dies ist in Abb. 1.1 dargestellt. In Kap. 2 werden wir detailliert untersuchen, wie die Koordinaten einer Punktmasse von der Wahl des Koordinatensystems abhängen und wie man zwischen verschiedenen Koordinatensystemen transformieren kann.

Unter der *Geschwindigkeit* einer Punktmasse versteht man die Änderung ihres Ortes mit der Zeit. Hierzu vergleicht man die Position der Punktmasse zu verschiedenen Zeiten  $t$  und  $t + \Delta t$  und betrachtet den Grenzwert

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Dies ist die *Zeitableitung* (siehe auch „Mathematischer Hintergrund“ 1.7). Die Geschwindigkeit einer Punktmasse ist dann definiert als

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} =: \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (1.3)$$

Generell bezeichnet ein Punkt über einem Funktionssymbol die Zeitableitung dieser Funktion. Die Anzahl der Punkte gibt die Ordnung der Zeitableitung an: Ein Punkt steht für die erste Ableitung, zwei Punkte für die zweite usw.

Die Ableitung einer vektorwertigen Funktion wird berechnet, indem die Ableitung jeder einzelnen Komponente bestimmt wird, z. B.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

**Achtung** Streng genommen gilt diese Definition der Geschwindigkeit (1.3) nur in nicht rotierenden kartesischen Koordinatensystemen, da man zwischen einem Vektor und seiner Darstellung in einem Koordinatensystem unterscheiden muss. Um der Übersicht in diesem Kapitel Vorrang vor Vollständigkeit zu geben, werden die entsprechenden Verallgemeinerungen erst in Kap. 2 diskutiert. ▶

Die *Beschleunigung* einer Punktmasse schließlich ist die Änderung ihrer Geschwindigkeit mit der Zeit,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} =: \ddot{\mathbf{x}}(t), \quad (1.5)$$

und somit die zweite Zeitableitung des Ortes.

### Das klassische Relativitätsprinzip

Das *Relativitätsprinzip* besagt, dass zwei mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme äquivalent sind, d. h., keines dieser beiden Systeme ist irgendwie vor dem anderen ausgezeichnet. Durch eine Messung lässt sich folglich nicht entscheiden, ob ein gegebenes System ruht oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Nur die relative Geschwindigkeit zweier Systeme ist messbar.

## 1.2 Mathematischer Hintergrund: Metrische und normierte Räume

Metrische und normierte Räume werden eingeführt, um den Abstandsbegriff zwischen Punkten im  $\mathbb{R}^3$  auf beliebige Mengen zu verallgemeinern. Dies geht wie folgt:

**Definition Metrik** Eine *Metrik* auf einer Menge  $X$  ist eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

- $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (*Definitheit*)
- $d(x, y) = d(y, x)$  (*Symmetrie*)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (*Dreiecksungleichung*)

für beliebige  $x, y \in X$ . Die Dreiecksungleichung besagt anschaulich nichts anderes, als dass jeder Umweg von  $x$  nach  $z$  über  $y$  länger ist als der direkte Weg von  $x$  nach  $z$ . Eine Menge  $X$  mit einer Metrik  $d$  wird als *metrischer Raum* bezeichnet.

Mithilfe der Metrik kann der aus  $\mathbb{R}$  bekannte Konvergenzbegriff auf  $X$  übertragen werden: Eine Punktfolge  $(x_n)$  aus  $X$  konvergiert gegen  $x \in X$ , wenn die Folgenglieder irgendwann beliebig nahe bei  $x$  liegen, d. h. wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $d(x_i, x) < \varepsilon$  für alle  $i \geq n_\varepsilon$  gilt.

Auch der Begriff einer Cauchy-Folge lässt sich aus  $\mathbb{R}$  übertragen: Eine Folge  $(x_n)$  aus  $X$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn die Folgenglieder irgendwann beliebig nahe beieinander liegen, d. h. wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $d(x_i, x_j) < \varepsilon$  für alle  $i, j \geq n_\varepsilon$  gilt. Hat der metrische Raum die Eigenschaft, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, so nennt man den Raum *vollständig*.

**Definition Norm** Sei  $V$  ein reeller oder komplexer Vektorraum über  $\mathbb{K}$  (d. h. über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). (Komplexe Zahlen werden in Kap. 6 besprochen.) Eine *Norm* auf  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$  mit

- $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (*Definitheit*)

Sämtliche physikalischen Gesetze, die im Rahmen der klassischen Mechanik aufgestellt und abgeleitet werden, liefern daher identische Resultate in allen Bezugssystemen, die sich relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen. Dies kann man sich folgendermaßen veranschaulichen: Sitzt man im Zug und beobachtet durch das Fenster einen anderen Zug und physikalische Phänomene in seinem Inneren, so kann man daraus nicht ableiten, ob der eigene Zug vorwärts oder der andere rückwärts fährt. Nur die Relativgeschwindigkeit der Züge ist direkt bestimmbar, wenn man nicht zusätzlich die Gleise oder die Landschaft beobachtet (und damit ein weiteres Bezugssystem heranzieht).

Im Gegensatz zu Geschwindigkeiten sind Beschleunigungen jedoch stets messbar. Wir werden in Kürze sehen, dass sie eng mit

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (*Homogenität*)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (*Dreiecksungleichung*)

für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Ein Vektorraum  $V$  mit Norm  $\|\cdot\|$  wird als *normierter Raum* bezeichnet. Jeder normierte Raum ist durch  $d(x, y) := \|x - y\|$  auch ein metrischer Raum. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banach-Raum*.

Vektoren  $v \in V$  mit  $\|v\| = 1$  nennt man *Einheitsvektoren* bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$ . In diesem Buch werden Einheitsvektoren in der Regel fett und mit einem Hut dargestellt, z. B.  $\hat{v}$ .

### Beispiele

- $\mathbb{R}^n$  mit  $\|x\|_k := \sqrt[k]{|x_1|^k + |x_2|^k + \dots + |x_n|^k}$
- $\mathbb{R}^n$  mit  $\|x\|_\infty := \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$  (*Maximumsnorm*)
- der Vektorraum der integrierbaren Funktionen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Norm  $\|f\| := \int_0^1 |f(x)| dx$
- der Vektorraum der beschränkten Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  mit der *Supremumsnorm*  $\|f\|_\infty := \sup\{f(x) \mid x \in I\}$  (das Supremum einer nach oben beschränkten nichtleeren Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  ist die kleinste obere Schranke aller Elemente von  $M$ )

Die euklidische Norm  $\|\cdot\|_2$  im  $\mathbb{R}^n$  entspricht genau der Länge des durch die Komponenten  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  beschriebenen Verschiebepfeiles. Außerdem ist  $\|x\|_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x\|_k$ .

**Äquivalenz von Normen** In einem Vektorraum kann es mehrere verschiedene Normen geben (siehe obige Beispiele). In endlich-dimensionalen Vektorräumen sind allerdings alle Normen äquivalent und führen auf den gleichen Konvergenzbegriff.

Kräften verknüpft sind, welche diese Beschleunigungen erzeugen.

## 1.2 Die Newton'schen Axiome

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit den Newton'schen Axiomen, welche die Grundlage der klassischen Mechanik bilden. Sie können als fundamentale Naturgesetze innerhalb eines bestimmten, in der Einleitung beschriebenen Geltungsbereichs angesehen werden. Weiterhin werden Inertialsysteme definiert, in denen die Grundgleichungen der Mechanik eine besonders einfache Form annehmen. Der Begriff des Inertialsystems ist eng mit dem der Kräfte und Beschleunigungen verbunden, was

### 1.3 Mathematischer Hintergrund: Skalarprodukt, euklidische Räume

Das Skalarprodukt von Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  ist schon aus der Schule bekannt. Es gilt nun, dieses Konzept auf Vektorräume zu verallgemeinern.

**Definition Skalarprodukt** Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Ein *Skalarprodukt* ist eine Abbildung  $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  (wobei wir hier nur die Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  betrachten; wer mit den komplexen Zahlen noch nichts anfangen kann, kann sich hier immer  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  vorstellen),  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  mit den Eigenschaften

- $\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y_1 \rangle = \bar{\lambda} \langle x_1, y_1 \rangle + \bar{\mu} \langle x_2, y_1 \rangle$  (Bilinearität)
- $\langle x_1, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \lambda \langle x_1, y_1 \rangle + \mu \langle x_1, y_2 \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (Definitheit)

für alle  $x, x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Hierbei bezeichnet  $\bar{\mu}$  das komplexe Konjugierte zu  $\mu$ . Im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  kann die komplexe Konjugation weggelassen werden.

Bei Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^3$  wird in diesem Buch für das Skalarprodukt auch die Schreibweise  $x \cdot y$  verwendet. Man spricht häufig auch vom *inneren Produkt*.

**Definition euklidischer Raum** Ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit Skalarprodukt heißt *euklidischer Raum*.

Jeder euklidische Raum ist durch  $\|v\| := (\langle v, v \rangle)^{1/2}$  auch ein normierter Raum. In euklidischen Räumen sind die Einheitsvektoren genau die Vektoren mit  $\langle v, v \rangle = 1$ .

Im Folgenden sei  $V$  endlich-dimensional. Aufgrund der Bilinearität des Skalarprodukts kann man den Wert von  $\langle x, y \rangle$  berechnen, wenn alle Skalarprodukte  $\langle e_i, e_j \rangle$  zwischen den

Vektoren einer Basis  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  und die Koordinaten von  $x$  und  $y$  bezüglich dieser Basis bekannt sind. Für  $x = \sum_i x_i e_i$  und  $y = \sum_j y_j e_j$  ergibt sich  $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle$ .

**Orthogonalität von Vektoren** Zwei Vektoren  $x$  und  $y$  in  $V$  heißen orthogonal (bezüglich des Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ), wenn  $\langle x, y \rangle = 0$  ist. Eine Basis von  $V$ , bei der verschiedene Basisvektoren zueinander orthogonal sind, also  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$  für alle  $i \neq j$  gilt, nennt man *Orthogonalbasis* von  $V$ . Für eine Orthogonalbasis vereinfacht sich das Skalarprodukt zwischen  $x$  und  $y$  zu  $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i \langle e_i, e_i \rangle$ . Gilt jetzt auch noch  $\langle e_i, e_i \rangle = 1$  für alle  $i$ , sind also alle Basisvektoren Einheitsvektoren, so spricht man von einer *Orthonormalbasis* von  $V$ . Bezuglich einer Orthonormalbasis kann das Skalarprodukt zweier Vektoren einfach aus den Koordinaten der Vektoren berechnet werden:  $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ .

Ausgehend von einer beliebigen Basis von  $V$  kann man in endlich vielen Schritten eine Orthonormalbasis von  $V$  finden (Gram-Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren).

**Geometrische Bedeutung** Im  $\mathbb{R}^3$  bezüglich der Standardbasis (kartesische Koordinaten) gilt  $x \cdot y = |x||y| \cos \alpha$ , wobei  $\alpha$  der zwischen  $x$  und  $y$  eingeschlossene Winkel ist. Dies rechtfertigt auch die Verwendung des Begriffs *orthogonal* für  $x \cdot y = 0$ , denn nur in diesem Fall stehen die Vektoren  $x$  und  $y$  im  $\mathbb{R}^3$  genau senkrecht aufeinander. Ist  $\hat{y}$  ein Einheitsvektor, dann ist im  $\mathbb{R}^3$  das Skalarprodukt  $x \cdot \hat{y}$  genau gleich der Länge der Projektion von  $x$  auf  $\hat{y}$ . Ist  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  eine Orthogonalbasis von  $V$ , dann können die Koordinaten von  $x$  mithilfe des Skalarprodukts berechnet werden:  $x_i = \langle x, e_i \rangle$ . Auch hier sind die Skalarprodukte gleich den Projektionen von  $x$  auf  $e_i$ .

wiederum eine Diskussion der Masse erfordert. Im Anschluss wird das Konzept des Gravitationsfeldes eingeführt. Abschließend werden die physikalischen Einheiten vorgestellt, die zur Quantifizierung mechanischer Systeme verwendet werden.

durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

### Das erste Newton'sche Axiom

Das *erste Newton'sche Axiom* wird auch *Trägheitsgesetz* oder *Lex Prima* genannt.

#### Erstes Newton'sches Axiom

Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht

Durch dieses Axiom wird das Beharrungsvermögen des Körpers, seine *Trägheit*, postuliert. Weiterhin definiert man als Bewegungsgröße das Produkt aus Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $v$  als den *Impuls*

$$\mathbf{p} = mv. \quad (1.6)$$

Somit besagt das Trägheitsgesetz, dass der Impuls erhalten ist,

$$\mathbf{p} = \text{const}, \quad (1.7)$$

wenn Kräfte abwesend sind. Die Begriffe „Masse“ und „Kraft“ verwenden wir hier zunächst rein intuitiv, sie müssen noch definiert werden. Die Masse  $m$ , die im Bewegungsgesetz auftritt, sei hier jedoch als die *träge Masse* eingeführt, auf die wir in Kürze zurückkommen werden.

## Das zweite Newton'sche Axiom

Das *zweite Newton'sche Axiom* wird auch als *Bewegungsgesetz* oder *Lex Secunda* bezeichnet.

### Zweites Newton'sches Axiom

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

In mathematischer Form lautet es

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (1.8)$$

wobei der Impuls  $\mathbf{p}$  die Bewegungsgröße ist. Für eine zeitlich konstante Masse gilt (1.6)

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}. \quad (1.9)$$

Unter der Trägheit einer Masse versteht man also den Widerstand gegen eine Beschleunigung: je größer die träge Masse  $m$ , desto kleiner die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{x}}$  für eine gegebene Kraft  $\mathbf{F}$ .

Kräfte werden definiert, indem man Messvorschriften angibt, die z. B. eine unbekannte mit einer bekannten Kraft vergleichen. Die Gravitationskraft wird dabei häufig als Referenzkraft verwendet.

Im Allgemeinen sind Kräfte Funktionen von Ort und Geschwindigkeit. Wir wollen hier annehmen, dass sie nur von momentanen Größen und nicht von Eigenschaften des Systems in der Vergangenheit abhängen. Die Lorentz-Kraft, die auf ein geladenes Teilchen im Magnetfeld wirkt, ist beispielsweise geschwindigkeitsabhängig. Sie wird in Bd. 2 gründlich behandelt, wird aber auch bereits in Aufgabe 1.4 ein erstes Mal untersucht. Reibungskräfte sind ebenfalls von der Geschwindigkeit abhängig. Auf sie wird in Abschn. 1.3 wieder eingegangen. Beispiele für geschwindigkeitsunabhängige Kräfte sind die Gravitations- und die Coulomb-Kraft, die beide proportional zum inversen Abstandsquadrat sind. Diese beiden Kräfte wirken außerdem entlang des Abstandsvektors,

$$\mathbf{F}_{12} \parallel \pm (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad (1.10)$$

wobei  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  die Positionen der beiden wechselwirkenden Punktmassen sind. Kräfte, welche diese Eigenschaft besitzen, nennt man *Zentralkräfte*. Wir werden in Kürze auf die Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen zurückkommen.

Man erkennt, dass Bewegungsgleichungen in der Regel zweite Ableitungen des Ortes nach der Zeit beinhalten und somit Differenzialgleichungen sind (siehe „Mathematischer Hintergrund“ 1.4 und 1.5). Im Allgemeinen führen die Gleichungen der Mechanik für  $N$  Teilchen auf  $3N$  Differenzialgleichungen zweiter Ordnung. Der Faktor 3 röhrt daher, dass jedes Punktteilchen drei *Freiheitsgrade* besitzt, jeweils einen für die Bewegung

entlang jeder Raumrichtung. Die Anzahl der Freiheitsgrade entspricht folglich der Anzahl der unabhängigen Parameter, die ein System beschreiben. Unterliegt ein System *Zwangsbedingungen* (z. B. die eingeschränkte Bewegung auf einer Tischplatte), so ist die Zahl der Freiheitsgrade reduziert. Wir werden uns in Kap. 5 ausführlich mit diesem Thema beschäftigen. Im Folgenden gehen wir aber zunächst davon aus, dass keine Zwangsbedingungen existieren.

Das zweite Newton'sche Axiom kann über den axiomatischen Status hinaus als Naturgesetz aufgefasst werden, da es aus empirischen Beobachtungen abgeleitet wurde und Vorhersagen erlaubt. Es ist somit das Grundgesetz der Mechanik.

## Das dritte Newton'sche Axiom

Das *dritte Newton'sche Axiom* charakterisiert die Wechselwirkung zweier Punktmassen.

### Drittes Newton'sches Axiom

Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, d. h., die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets betragsgleich, aber von entgegengesetzter Richtung.

Dieses *Reaktionsgesetz* oder *Lex Tertia* ist insbesondere in seiner prägnanten Form *actio = reactio* bekannt. Mathematisch formuliert lautet es

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad (1.11)$$

wobei  $\mathbf{F}_{12}$  die Kraft ist, die von einer zweiten Punktmasse auf die erste ausgeübt wird. Entsprechend ist  $\mathbf{F}_{21}$  die Kraft, welche die zweite Punktmasse durch die erste erfährt. Hierbei spielt es keine Rolle, durch welchen physikalischen Mechanismus die Kräfte  $\mathbf{F}_{12}$  und  $\mathbf{F}_{21}$  erzeugt werden. Das dritte Newton'sche Axiom ist in Abb. 1.2 dargestellt.

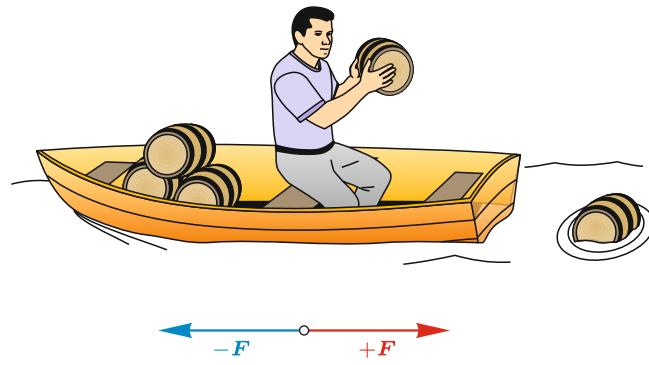
**Achtung** In der Literatur wird die Indexreihenfolge der Kräfte häufig genau anders herum notiert. Der Vorteil der hier gewählten Schreibweise ist, dass der erste Index (der am nächsten am Kraftsymbol steht) die betrachtete Punktmasse angibt. ▶

## Das vierte Newton'sche Axiom

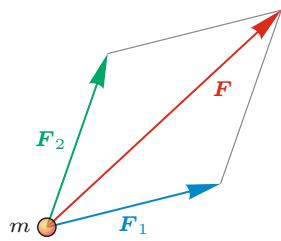
Es gibt eine wichtige Erweiterung zu den Newton'schen Axiomen. Von Newton selbst als Zusatz formuliert, bezeichnet man den folgenden Zusammenhang heute häufig als *Lex Quarta*.

### Viertes Newton'sches Axiom

Wirken auf einen Punkt mehrere Kräfte, so addieren sich diese vektoriell zu einer resultierenden Kraft auf.



**Abb. 1.2** Wirft eine im Boot sitzende Person ein Fass nach rechts, so wirkt während des Wurfes eine Kraft  $+F$  auf das Fass, während die Person die Kraft  $-F$  erfährt. Dies ist eine direkte Folge des dritten Newton'schen Axioms in (1.11). Dadurch wird das Boot nach links beschleunigt



**Abb. 1.3** Die Gesamtkraft  $F$  auf eine Punktmasse  $m$  ist die Superposition der beiden Einzelkräfte  $F_1$  und  $F_2$ . Diese Aussage gilt für beliebig viele Einzelkräfte, wird hier aber aus Gründen der Übersichtlichkeit nur für zwei Kräfte gezeigt

Dieses *Superpositionsprinzip* ist tatsächlich von entscheidender Bedeutung für die Mechanik und die gesamte Physik. In mathematischer Schreibweise lautet es

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad (1.12)$$

wobei die  $N$  Kräfte  $\mathbf{F}_i$  auf eine Punktmasse wirken und zu einer resultierenden Kraft  $\mathbf{F}$  aufaddiert werden können (Abb. 1.3).

**Achtung** In der klassischen Mechanik werden Mehrkörperkräfte (z. B.  $\mathbf{F}_{123}$  oder  $\mathbf{F}_{1234}$ ) ausgeschlossen. Stattdessen wird angenommen, dass alle Kräfte in einem mechanischen System als lineare Überlagerung von Zweikörperkräften der Form  $\mathbf{F}_{12}$  gebildet werden können. Dies gilt z. B. nicht mehr, wenn Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie ins Spiel kommen. ▶

## Inertialsysteme und ihre Bedeutung für die klassische Mechanik

Koordinatensysteme lassen sich aus mathematischer Sicht beliebig wählen. Physikalisch gesehen stellt sich jedoch die Frage, ob es eine Klasse von Koordinatensystemen gibt, die gegenüber

anderen ausgezeichnet sind. Offenbar macht es physikalisch einen Unterschied, ob die Bahnkurve einer Punktmasse in einem Bezugssystem betrachtet wird, das sich mit ihm bewegt, oder in einem Bezugssystem, das sich relativ dazu bewegt. Dies führt auf den Begriff der *Inertialsysteme*. Ein Inertialsystem ist ein solches Bezugssystem, in dem das erste Newton'sche Axiom gilt, in dem sich also ein kräftefreier Körper geradlinig-gleichförmig bewegt. Man bezeichnet Bezugssysteme dann als Inertialsysteme, wenn sie sich mit einer geradlinigen und konstanten Geschwindigkeit gegenüber den Fixsternen bewegen. Wir werden in Kap. 9 gründlicher über Inertialsysteme und den sogenannten absoluten Raum sprechen, der von Newton eingeführt wurde.

### Inertialsysteme

Inertialsysteme sind Bezugssysteme, in denen sich ein kräftefreier Körper geradlinig-gleichförmig bewegt. Das erste Newton'sche Axiom dient der Einführung der Inertialsysteme, da es nur in solchen gilt.

Ein Beispiel für ein Bezugssystem, in dem das erste Newton'sche Axiom in der Form (1.7) nicht gilt, ist eine rotierende Scheibe. Auf ihr kann eine Punktmasse nur dann in Ruhe bleiben, wenn sie durch eine Kraft festgehalten wird. Es ist zu betonen, dass Naturgesetze im Allgemeinen und das zweite Newton'sche Axiom im Speziellen auch in Nichtinertialsystemen formuliert werden können, dabei aber in der Regel komplexer sind. Eine entsprechende Erweiterung der Bewegungsgleichungen (1.9) auf beschleunigte und krummlinige (d. h. nichtkartesische) Bezugssysteme wird in Kap. 2 besprochen.

### Frage 1

Überlegen Sie sich, warum ein Flugzeug während des Fluges näherungsweise als Inertialsystem aufgefasst werden kann, nicht jedoch während Start und Landung.

Das Zusammenspiel von Inertialsystemen, Kräften und dem ersten Newton'schen Axiom weist auf ein Dilemma hin, das bereits von Newton erkannt wurde: Die Definitionen von Kräften und Inertialsystemen sind zyklisch verbunden. Erst wenn ein Inertialsystem eingeführt wurde, kann man Kräfte sinnvoll definieren, da vorher nicht klar ist, ob eine nicht geradlinig-gleichförmige Bewegung auf eine Kraft oder darauf zurückzuführen ist, dass das Bezugssystem kein Inertialsystem ist. Andererseits kann man Inertialsysteme nicht definieren, ohne auf Kräfte Bezug zu nehmen, weil sie als Bezugssysteme definiert sind, in denen sich kräftefreie Körper geradlinig-gleichförmig bewegen. In diesem Sinne sollte das erste Newton'sche Axiom nicht als Spezialfall des zweiten Axioms in Abwesenheit von Kräften interpretiert werden. Vielmehr ist der Zweck des ersten Axioms die Einführung der Inertialsysteme, auch wenn dies in seiner Formulierung nicht direkt offensichtlich ist.

Da Kräfte nicht ohne Klarheit über Inertialsysteme und Inertialsysteme nicht ohne Klarheit über Kräfte definiert werden können, wird diese Problematik häufig schlicht verschwiegen und ignoriert. Die konzeptionellen Schwierigkeiten, welche durch die scheinbar einfachen Newton'schen Axiome aufgeworfen werden, wurden vor kurzem von Herbert Pfister im Physik-Journal diskutiert (Pfister 2016).

Im Alltag ist es möglich, die oben angesprochene zyklische Argumentation durch Näherungen zu umgehen. Die Erdoberfläche, die jedem Menschen als Laborsystem geläufig ist, ist streng genommen kein Inertialsystem, da sie sich relativ zu den Fixsternen dreht. Jedoch sind die damit verbundenen Effekte in der Regel so klein, dass sie im Alltag kaum eine Rolle spielen. In solchen Fällen kann man die Erdoberfläche als Inertialsystem ansehen. Ausnahmen sind beispielsweise tropische Wirbelstürme, die erst durch die Erddrehung entstehen können. Solche Wirbelstürme werden durch die Erddrehung beeinflusst, da ihre Ausdehnung nicht mehr klein gegenüber dem Erdradius ist. Wir kommen in Kap. 2 darauf zurück. Streng genommen bilden auch die Fixsterne kein Inertialsystem, da Galaxien rotieren. Ein vollständiger Umlauf dauert aber viele Millionen Jahre und kann für alle alltäglichen Phänomene getrost vernachlässigt werden.

## Schwere und träge Massen

Der tragen Masse sind wir bereits im Zusammenhang mit dem ersten Newton'schen Axiom (1.6) begegnet. Sie ist die Eigenschaft eines Körpers, sich einer Beschleunigung durch eine Kraft zu widersetzen, und sie ist in allen Bezugssystemen identisch. Je größer also die träge Masse  $m$  eines Körpers ist, desto kleiner fällt die Beschleunigung  $a$  bei einer gegebenen Kraft  $\mathbf{F}$  aus. Träge Massen lassen sich auf verschiedene Arten bestimmen. Das offensichtliche Verfahren ist, die Beschleunigung unter der Wirkung einer bekannten Kraft zu messen. Durch Stoßexperimente zweier Körper lässt sich die unbekannte träge Masse des einen Körpers bestimmen, wenn diejenige des anderen gegeben ist. Dabei muss die Kraft, welche die Körper während des Stoßes aufeinander ausüben, nicht bekannt sein.

Die *schwere Masse* hingegen wird über die Gravitationskraft definiert, die eine Masse  $m_1$  auf eine zweite Masse  $m_2$  ausübt:

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (1.13)$$

Hierbei ist  $\mathbf{r} := \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  der Vektor, der von der Punktmasse  $m_1$  zu  $m_2$  zeigt,  $r$  ist seine Länge und  $\hat{\mathbf{e}}_r$  ist der Einheitsvektor entlang des Vektors  $\mathbf{r}$ . Die Größe  $G$  ist die *Gravitationskonstante*. Die schwere Masse eines Körpers kann durch Wägen bestimmt werden, indem man die durch die Erde verursachte Gravitationskraft auf diesen Körper misst und mit der Kraft vergleicht, die auf einen Körper mit bekannter schwerer Masse wirkt. Dies ist auch der Grund, warum im alltäglichen Sprachgebrauch Massen fälschlicherweise mit Gewichten (Kräfte) gleichgesetzt werden („... wiegt ein Kilo“).

Das empirische *Galilei'sche Fallgesetz* besagt, dass alle Körper im Gravitationsfeld der Erde gleich schnell fallen, also gleich stark beschleunigt werden, wenn Reibung vernachlässigt wird. Aus dieser Beobachtung lässt sich ableiten, dass schwere und träge Massen proportional sind.

### Frage 2

Machen Sie sich klar, dass aus dem zweiten Newton'schen Axiom und dem Galilei'schen Fallgesetz direkt folgt, dass träge und schwere Massen proportional sein müssen.

Wie wir in Kürze sehen werden, kann die Proportionalität von träger und schwerer Masse durch eine geeignete Wahl der Gravitationskonstanten  $G$  in eine Gleichheit überführt werden. Im Folgenden wird daher generell nicht mehr zwischen träger und schwerer Masse unterschieden. Die Äquivalenz von schwerer und träger Masse ist im Rahmen der klassischen Mechanik nicht erklärbar, bildet allerdings eine wichtige Voraussetzung für die allgemeine Relativitätstheorie und findet dort eine natürliche Erklärung.

### Schwere und träge Masse

In der klassischen Mechanik (und sogar darüber hinaus) sind schwere und träge Masse äquivalent.

Im Rahmen der nichtrelativistischen Mechanik ist ferner die Gesamtmasse in einem abgeschlossenen System erhalten. Sie kann weder erzeugt noch vernichtet werden. Allerdings kann Masse von einem Teilsystem in ein anderes übertragen werden. So ist zwar die Masse einer Rakete nicht erhalten, aber die Gesamtmasse der Rakete und des ausgestoßenen Treibstoffes sind konstant.

## Das Gravitationsfeld

In (1.13) wurde die Gravitationskraft zwischen zwei Punktmasse  $m_1$  und  $m_2$  an den Orten  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  eingeführt:

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}. \quad (1.14)$$

Diese Gleichung lässt sich auch in anderer Weise interpretieren, indem sie in der Form

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = m_2 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_2) \quad (1.15)$$

geschrieben wird. Hierbei ist

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} \quad (1.16)$$

das *Gravitationsfeld*, das von der Punktmasse  $m_1$  am Ort  $\mathbf{x}$  erzeugt wird. Dieses Feld wird von der Punktmasse  $m_2$  am Ort  $\mathbf{x}_2$  wahrgenommen. Obwohl mathematisch gleichwertig, unterscheiden sich beide Betrachtungsweisen physikalisch grundlegend:

- Im Kraft-Bild existiert die Kraft  $\mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$  nur dann, wenn zwei Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand  $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  gravitativ wechselwirken.
- Das Gravitationsfeld  $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$  ist jedoch auch in Abwesenheit der Punktmasse  $m_2$  definiert, und zwar an jedem Punkt im Raum. Befindet sich nun  $m_2$  am Ort  $\mathbf{x}_2$ , so führt dies auf eine Anziehungskraft, die  $\mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$  entspricht.

In der Physik, insbesondere bei der Beschreibung der Elementarteilchen, ist der Begriff der *Kopplung* sehr wichtig. Man sagt, dass bestimmte Größen (z. B. Masse oder Ladung) an ein Feld koppeln (z. B. an das Gravitations- oder elektromagnetische Feld). Kopplungskonstanten geben dann die Stärke der Wechselwirkung an. Es ist sinnvoll, in diesem Bild zu denken, da gewisse Teilchen bestimmte Felder nicht wahrnehmen bzw. nicht an sie ankoppeln. Ein Beispiel ist eine ungeladene Punktmasse im elektromagnetischen Feld.

### Frage 3

Man mache sich klar, dass die Gravitationskraft  $\mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$  gleichwertig in den Formen  $\mathbf{F}_{21} = m_2 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_2)$  und  $\mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1)$  geschrieben werden kann.

Das physikalische Konzept von Feldern spielt in der theoretischen Physik eine zentrale Rolle, wird aber in der klassischen Mechanik noch nicht benötigt. Es wird daher erst in Bd. 2 ausführlich besprochen. Dort wird sich schließlich herausstellen, dass ein physikalisches Feld wesentlich mehr als eine mathematische Hilfsgröße darstellt.

## Die Einheiten der mechanischen Größen

Die Gültigkeit des zweiten Newton'schen Axioms (1.9) setzt eine geeignete Wahl der *Einheiten* von Masse, Beschleunigung und Kraft voraus. Dies kann man sich anhand der Gleichung

$$\dot{\mathbf{p}} = \gamma \mathbf{F} \quad (1.17)$$

klarmachen, wobei  $\gamma$  eine Konstante ist. Dieses allgemeiner gehaltene zweite Newton'sche Axiom sagt aus, dass Impulsänderung und Kraft proportional sind, wobei  $\gamma$  die entsprechende Proportionalitätskonstante ist. Nun lassen sich die Einheiten so wählen, dass  $\gamma = 1$  wird und das bekannte zweite Newton'sche Axiom in Erscheinung tritt.

Am häufigsten werden in der Physik die *SI-Einheiten* (Système international d'unités) oder die *CGS-Einheiten* (Centimetre Gram Second) verwendet. Für mechanische Systeme werden dabei stets drei *Grundeinheiten* benötigt, von denen andere Einheiten abgeleitet werden. Die wichtigsten mechanischen Größen und ihre SI- und CGS-Einheiten sind in Tab. 1.1 aufgelistet.

Obwohl es in der klassischen Mechanik vier Grundgrößen gibt (Masse, Raum, Zeit, Kraft), werden nur drei Einheiten benötigt.

**Tab. 1.1** Wichtige mechanische Größen und ihre SI- und CGS-Einheiten. Die Einheiten für Länge, Zeit und Masse sind die Grundeinheiten, alle anderen sind abgeleitete Einheiten. In Bd. 2, Abschn. 1.3 werden die Einheiten der Elektrodynamik aufgelistet

Größe	SI-Einheit	CGS-Einheit
Länge	m	cm
Zeit	s	s
Masse	kg	g
Geschw.	$\text{m s}^{-1}$	$\text{cm s}^{-1}$
Beschl.	$\text{m s}^{-2}$	$\text{Gal} = \text{cm s}^{-2}$ (Gal)
Kraft	$\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$ (Newton)	$\text{dyn} = \text{g cm s}^{-2}$ (Dyn)
Energie	$\text{J} = \text{Nm}$ (Joule)	$\text{erg} = \text{dyn cm}$ (Erg)
Leistung	$\text{W} = \text{J s}^{-1}$ (Watt)	$\text{erg s}^{-1}$

Der Grund ist das zweite Newton'sche Axiom in (1.9), das Masse, Raum und Zeit (in Form der zweiten Ableitung des Ortes nach der Zeit) und die Kraft in Relation setzt. Die vier Grundgrößen sind daher nicht unabhängig voneinander.

Genau wie für die Impulsänderung und Kraft im zweiten Newton'schen Axiom lässt sich die Proportionalität von schwerer und träger Masse in eine Gleichheit umwandeln. Hierfür ist es nötig, die Gravitationskonstante  $G$  entsprechend zu definieren. Zur Veranschaulichung gehen wir von der Kraft aus, die eine Masse  $m_1$  auf eine Masse  $m_2$  ausübt (1.13). Die Masse der Erde sei  $m_2$ , und eine Testmasse mit  $m_1 = 1 \text{ kg}$  befindet sich auf der Erdoberfläche und somit etwa 6378 km vom Zentrum der Erde entfernt,  $r = 6378 \text{ km}$ . Durch eine Messung wird festgestellt, dass eine Gravitationskraft von  $F = 9.81 \text{ N}$  auf  $m_1$  wirkt. Die Gravitationskraft in (1.13) beschleunigt  $m_1$ , sodass aus dem zweiten Newton'schen Axiom

$$m_1^t a_1 = \frac{G m_1^s m_2^s}{r^2} \quad (1.18)$$

folgt. Hier wird explizit zwischen tragen ( $m^t$ ) und schweren Massen ( $m^s$ ) unterschieden. Nimmt man Proportionalität von schwerer und träger Masse an,

$$m^s = \beta m^t, \quad (1.19)$$

schreibt man

$$a_1 = \frac{G \beta m_2^s}{r^2}. \quad (1.20)$$

Durch Absorption von  $\beta$  in die Gravitationskonstante kann eine Gleichheit von schwerer und träger Masse erzielt werden.

Bei bekanntem Erdradius kann auf diese Weise übrigens nur das Produkt von Erdmasse und Gravitationskonstante gemessen werden. Die Bestimmung der Erdmasse ist nur möglich, wenn die Gravitationskonstante in unabhängigen Experimenten bestimmt wird, z. B. durch die Gravitationskraft zwischen zwei Kugeln bekannter Masse (Cavendish-Experiment). Der im Jahre 2014 empfohlene Wert der Gravitationskonstanten ist  $G = 6,67408(31) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

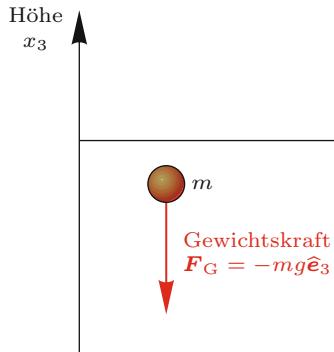
## 1.3 Eindimensionale Bewegung im homogenen Schwerefeld

Nachdem wir nun zentrale mathematische Größen und die Newton'schen Axiome eingeführt haben, liegt der Fokus dieses Abschnitts auf der Lösung einiger einfacher mechanischer Probleme. Die eindimensionale Bewegung einer einzelnen Punktmasse unter dem Einfluss eines homogenen Schwerefeldes wird anhand von einigen Beispielen untersucht. Dazu gehören der freie Fall und der Fall mit Reibung. Weiterhin wird die Raketengleichung hergeleitet und für einen Spezialfall gelöst. Da es sich bei den Bewegungsgleichungen um Differentialgleichungen handelt, werden diese mathematisch genauer beleuchtet und einige Lösungsverfahren vorgestellt.

### Vorbemerkungen zur Lösung mechanischer Probleme

Das Schema zur Lösung von mechanischen Problemen lässt sich generell in drei Schritte unterteilen:

1. Zu Beginn werden die *Bewegungsgleichungen* aufgestellt, die das mechanische Problem beschreiben. Dies sind in der Regel Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit.
2. Die Bewegungsgleichungen werden mithilfe *mathematischer Methoden* gelöst. Der Aufwand hängt dabei stark von den Details (Anzahl der Punktmassen, Art der Kräfte usw.) ab. Einige mechanische Probleme können analytisch exakt gelöst werden, die meisten jedoch nur näherungsweise. In manchen Fällen müssen die Gleichungen numerisch, d. h. mithilfe von Computern gelöst werden. In jedem Fall sind Anfangsbedingungen (in Form von Integrationskonstanten) zu spezifizieren.
3. Das Auffinden von *Erhaltungsgrößen* vereinfacht die anschließende Diskussion der Lösungen erheblich. In der Tat



**Abb. 1.4** Beim freien Fall wirkt lediglich die Gewichtskraft  $F_G = -mg\hat{e}_3$  auf die Punktmasse  $m$ . Es genügt daher eine Diskussion der  $x_3$ -Koordinate.

ist die Identifikation von erhaltenen Größen (z. B. Energie oder Impuls) ein zentraler Aspekt der gesamten theoretischen Physik. Dies wird im Verlauf dieses Buches vielfach deutlich werden.

Man unterscheidet dabei in der Mechanik die Begriffe *Kinematik* und *Dynamik*. Die Kinematik befasst sich lediglich mit der Untersuchung der Beschleunigung, Geschwindigkeit und Bahnkurve von Massen, ohne nach den wirkenden Kräften zu fragen. Im Gegensatz dazu beschreibt die Dynamik außerdem, welche Kräfte auf die Massen wirken und welche Mechanismen dafür verantwortlich sind.

Im Folgenden wird die Bewegung einer Punktmasse unter dem Einfluss einer homogenen Gravitationskraft untersucht.

### Der freie Fall aus geringer Höhe

Der einfachste, nichttriviale Spezialfall für ein äußeres Kraftfeld ist ein homogenes Kraftfeld:

$$\mathbf{F}(x) = \text{const.} \quad (1.21)$$

Dies ist beispielsweise eine gute Näherung für das Gravitationsfeld der Erde nahe ihrer Oberfläche, solange die Punktmasse sich in einem Raumvolumen bewegt, dessen Höhe  $h$  und seitliche Ausdehnung  $l$  klein im Vergleich zum Erdradius sind, d. h.  $h, l \ll R_{\text{Erde}}$ . In diesem Fall kann das Kraftfeld durch

$$\mathbf{F}_G = -mg\hat{e}_3 \quad (1.22)$$

beschrieben werden, wobei  $\hat{e}_3$  der Einheitsvektor in  $x_3$ -Richtung („nach oben“) ist, wie in Abb. 1.4 illustriert. Da die Gravitationskraft tatsächlich nach unten wirkt (also in negative  $x_3$ -Richtung), ist ein Minuszeichen zu berücksichtigen. Die Größe  $g$  ist die Erdbeschleunigung. Ihr Wert ist nicht überall auf der Erdoberfläche gleich. Aufgrund der leichten Abweichung der Erde von der Kugelform und der stärkeren Zentrifugalkraft am Äquator (Kap. 2) variiert  $g$  um einige Promille um den Wert  $g = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$ , der typischerweise als Referenz verwendet wird (*Normalbeschleunigung*).

Gl. (1.22) führt direkt auf die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -mg\hat{e}_3. \quad (1.23)$$

Dies ist eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (siehe „Mathematischer Hintergrund“ 1.4).

Verwendet man die Geschwindigkeit,  $v = \dot{x}$ , so erhält man zwei Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\dot{v} = -g\hat{e}_3, \quad \dot{x} = v. \quad (1.24)$$

Diese beiden Gleichungen sind äquivalent zu der ursprünglichen Bewegungsgleichung (1.23).

Es fällt zunächst auf, dass die  $x_1$ - und  $x_2$ -Komponenten der ersten Gleichung in (1.24) wegen  $\dot{v}_1 = \dot{v}_2 = 0$  homogen sind. Nur

## 1.4 Mathematischer Hintergrund: Differenzialgleichungen

**Differenzialgleichungen** (DGLs) sind Gleichungen zwischen Funktionen und deren Ableitungen. Dies bedeutet, dass die gesuchte Lösung einer DGL bzw. eines Systems von DGLs aus einer bzw. mehreren Funktionen besteht, die die DGL erfüllen, und zwar nicht nur für einzelne Argumente, sondern im gesamten Definitionsbereich der Lösungsfunktion(en).

Eine DGL heißt *gewöhnlich*, wenn die Funktionen in der DGL nur von einer Veränderlichen abhängen. Hängen die Funktionen in der DGL von mehreren Veränderlichen ab, enthält also die DGL partielle Ableitungen, so spricht man von einer *partiellen* DGL. Beispiele für gewöhnliche und partielle DGLs sind jeweils

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2}.$$

Partielle Ableitungen werden im Kasten „Vertiefung: Vollständiges Differenzial“ genauer besprochen. Unter der *Ordnung* einer DGL versteht man den Grad der höchsten auftretenden Ableitung in der DGL. Die Suche nach Lösungen einer DGL mit vorgegebenen Werten der Lösungsfunktion und deren Ableitungen in einem Punkt bezeichnet man als *Anfangswertproblem*.

Im Folgenden wird die häufige Notation  $y'(x)$  für die Ableitung von  $y$  nach  $x$  verwendet (siehe auch den „Mathematischen Hintergrund“ 1.7)

Das wichtigste Ergebnis zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines Anfangswertproblems ist der *Satz von Picard-Lindelöf*: Das Anfangswertproblem  $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$  mit  $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  ist lokal eindeutig lösbar (d. h., es gibt eine Umgebung  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ , in der die Lösung eindeutig ist), wenn  $f$  in  $x$  stetig und in  $y$  lokal Lipschitz-stetig (steigungsbeschränkt) ist, d. h., zu jedem  $(x, y)$  gibt es eine Umgebung  $U$  um  $(x, y)$ , sodass für alle  $(\xi, y_1), (\xi, y_2) \in U, y_1 \neq y_2$  die Steigung  $\frac{|f(\xi, y_2) - f(\xi, y_1)|}{|y_2 - y_1|}$  beschränkt ist.

**Beweisidee** Man konstruiert eine Folge  $(g_n)$  von Näherungslösungen  $g_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ausgehend von  $g_0(x) = y_0$  über  $g'_{n+1}(x) = f(x, g_n(x))$  und  $g_n(x_0) = y_0$ . Unter Verwendung der Stetigkeitsbedingungen an  $f$  kann man zeigen, dass die Folge  $(g_n)$  gegen eine Lösungsfunktion konvergiert. Auch die Eindeutigkeit der Lösung kann aus den Stetigkeitsbedingungen von  $f$  gefolgert werden.

Einige Lösungsverfahren für DGLs werden im „Mathematischen Hintergrund“ 6.3 vorgestellt.

### Literatur

- Walter, W.: Gewöhnliche Differenzialgleichungen: Eine Einführung. 7. Aufl., Springer (2000)
- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2. 2. Aufl., Spektrum (2012)

die Gleichung für die  $x_3$ -Komponente ist inhomogen,  $\dot{v}_3 = -g$ . (Homogen heißt eine Differenzialgleichung, wenn keine additiven konstanten Terme auftreten; ansonsten ist sie inhomogen.) Ihre Lösung folgt sofort durch Integration:

$$v_3 = -gt + C_1. \quad (1.25)$$

Die Integrationskonstante  $C_1$  ist offenbar die Geschwindigkeit  $v_3$  zur Zeit  $t = 0$ , also  $C_1 = v_3(t = 0) = v_{3,0}$ . Eine weitere Integration liefert

$$x_3 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{3,0}t + C_2. \quad (1.26)$$

Demnach ist die zweite Integrationskonstante  $C_2$  die  $x_3$ -Position der Punktmasse zur Zeit  $t = 0$ :  $C_2 = x_3(t = 0) = x_{3,0}$ .

### Frage 4

Überprüfen Sie, dass die Lösungen der Bewegungsgleichungen für die  $x_1$ - und  $x_2$ -Komponenten entsprechend  $x_i = v_i t + x_{i,0}$  ( $i = 1, 2$ ) lauten und somit eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene beschreiben.

Man sagt auch, dass die Bewegungen entlang der drei Raumrichtungen entkoppelt sind, da die Bewegung der Punktmasse in eine beliebige Richtung keinen Einfluss auf die Bewegung in eine der beiden übrigen Richtungen hat. Im Folgenden beschränken wir uns daher auf die Beschreibung der reinen Fallbewegung, d. h. auf die Bewegung der Punktmasse entlang der  $x_3$ -Achse. Hierbei unterschlagen wir zur Vereinfachung den Index 3 in der Geschwindigkeit und schreiben  $v$  anstatt  $v_3$ . Außerdem notieren wir  $z$  anstelle von  $x_3$ .

Zur Zeit  $t = 0$  befindet sich die Punktmasse bei  $z_0 = h > 0$  mit Geschwindigkeit  $v_0 = 0$ . Die Lösung der Bewegungsgleichung lautet dann

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + h. \quad (1.27)$$

Die Punktmasse benötigt daher die Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (1.28)$$

um den Erdboden bei  $z = 0$  zu erreichen. Daher wird diese Zeit auch als *Fallzeit* bezeichnet. Im Moment des Aufschlags ist die

## 1.5 Mathematischer Hintergrund: Differenzialgleichungen

### Lösungsverfahren

Es gibt kein festes Lösungsverfahren, mit dem man beliebige Differenzialgleichungen (DGLs) lösen kann. Manchmal hilft ein geschickter Lösungsansatz, oder eine Lösung kann erraten werden. Folgende „Kochrezepte“ sind beim Lösen von DGLs nützlich.

#### Trennung der Veränderlichen für $y'(t) = f(t)g(y(t))$

Um das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'(t) = f(t)g(y(t))$$

mit  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $y(t_0) = y_0$  und  $g(y_0) \neq 0$  lokal zu lösen, dividieren wir zunächst durch  $g(y(t))$ . Dies ist zulässig, da  $g$  und  $y$  stetig sind und deshalb wegen  $g(y(t_0)) = g(y_0) \neq 0$  auch  $g(y(t)) \neq 0$  in einer Umgebung  $U$  von  $t_0$  gilt. In ganz  $U$  hat  $g(y(t))$  ferner das gleiche Vorzeichen. Danach integrieren wir von  $t_0$  bis  $t$  und erhalten

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau,$$

was aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zur vorigen Gleichung äquivalent ist. Mithilfe der Kettenregel lässt sich die linke Seite umformen, sodass wir

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dv}{g(v)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \quad \text{bzw.} \quad H(y(t)) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

mit  $H(z) = \int_{y_0}^z \frac{dv}{g(v)}$  erhalten. Da  $g$  in ganz  $U$  das gleiche Vorzeichen hat, ist  $H$  streng monoton wachsend bzw. fallend und besitzt in  $U$  eine Umkehrfunktion  $H^{-1}$ . Somit ist  $y(t) = H^{-1}(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau)$  eine Lösung des AWP. Die erfolgten Umformungsschritte lassen sich sehr leicht merken, wenn man die Ableitung  $y'(t)$  als Differenzialquotient  $dy/dt$  schreibt, dann formal mit dem Differenzial  $dt$  multipliziert und die Variablen trennt („alles mit  $y$  nach links, alles mit  $t$  nach rechts“), danach integriert und schließlich das Ganze nach  $y(t)$  auflöst.

#### Substitution bei $y'(t) = f(at + by(t) + c)$

Die DGL

$$y'(t) = f(at + by(t) + c)$$

mit  $b \neq 0$  geht nach Substitution von  $g(t) = at + by(t) + c$  wegen  $g'(t) = a + by'(t)$  über in

$$g'(t) = a + bf(g(t)),$$

welche durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann.

#### Substitution bei $y'(t) = f(y(t)/t)$

Eine DGL der Form

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

geht nach der Substitution  $g(t) = y(t)/t$  über in

$$g'(t) = \frac{f(g(t)) - g(t)}{t}.$$

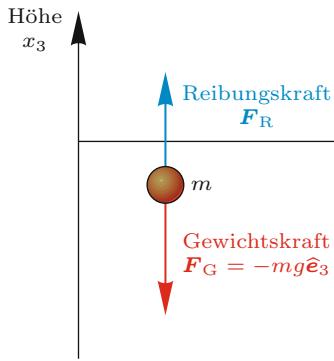
Diese DGL kann anschließend durch Trennung der Variablen gelöst werden.

**Lineare DGL**  $y^{(n)}(t) + \sum_{v=0}^{n-1} a_v(t)y^{(v)}(t) = f(t)$  Die Lösungsverfahren für lineare DGLs ( $y^{(n)}(t)$  ist die  $n$ -te Ableitung von  $y$  nach  $t$ ) werden im „Mathematischen Hintergrund“ 6.3 beleuchtet.

**Numerische Verfahren** Selbst wenn ein AWP eindeutig lösbar ist, bedeutet dies noch lange nicht, dass man die Lösung explizit angeben kann. Für viele Fragen (z. B. Wettervorhersage oder „In welcher Entfernung passiert ein Meteoroid die Erde?“) spielt es auch gar keine Rolle, ob die Lösung einer DGL bzw. eines Systems von DGLs explizit oder nur implizit angegeben werden kann. Tatsächlich interessiert nur die näherungsweise Berechnung von bestimmten Werten von  $y(t), y'(t), \dots$  mit ausreichender Genauigkeit. Hierzu gibt es zahlreiche numerische Verfahren, deren Beschreibung allerdings den Umfang dieses mathematischen Hintergrunds oder des Buches sprengen würde.

#### Literatur

- Walter, W.: Gewöhnliche Differenzialgleichungen: Eine Einführung. 7. Aufl., Springer (2000)
- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2. 2. Aufl., Spektrum (2012)
- Strehmel, K., Weiner, R., Podhaisky, H.: Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Springer Spektrum (2012)



**Abb. 1.5** Fällt ein Körper mit Masse  $m$  in einem Medium (z. B. in einer Flüssigkeit oder der Atmosphäre), muss zusätzlich zur Gewichtskraft  $\mathbf{F}_G = -mg \hat{\mathbf{e}}_3$  eine Reibungskraft  $\mathbf{F}_R$  berücksichtigt werden

Fallgeschwindigkeit

$$v = -gt = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}. \quad (1.29)$$

Der verwandte, sogenannte *schiefe Wurf* wird in Aufgabe 1.2 behandelt.

Wir haben gesehen, dass für die vollständige Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei Integrationskonstanten benötigt werden. In dem hier besprochenen Beispiel handelt es sich um eine Differentialgleichung in der Zeit, womit die Integrationskonstanten den Anfangsbedingungen (der Anfangshöhe und der Anfangsgeschwindigkeit) entsprechen.

### Lösung der Bewegungsgleichungen

Für die vollständige Lösung der Bewegungsgleichungen einer Punktmasse entlang einer Achse benötigt man zwei Integrationskonstanten. Dies können beispielsweise die Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit sein.

## Der Fall mit Stokes'scher Reibung

Der freie Fall kann idealerweise nur im Vakuum stattfinden, wo keine Reibung stattfindet. Beim Fall in der Atmosphäre oder unter Wasser treten Reibungskräfte auf, die erweiterte Bewegungsgleichungen erfordern. Dies ist in Abb. 1.5 dargestellt.

Bewegt sich ein Körper mit Geschwindigkeit  $v$  in einem zähen, d. h. *viskosen* Medium, wirkt ihm eine Reibungskraft entgegen,

$$\mathbf{F}_R = -K\mathbf{v}, \quad (1.30)$$

die proportional zur Geschwindigkeit des Körpers im Medium ist. Eine solche lineare Reibung nennt man *Stokes'sche Reibung*.

### 1.3 Eindimensionale Bewegung im homogenen Schwerefeld

Sie wirkt stets der Bewegung entgegen und führt zu einer Abbremsung. Dabei ist  $K$  ein Reibungskoeffizient, der von den Eigenschaften des Mediums und der Form des Körpers abhängt. Ein Beispiel ist der Fall eines Steines in einem Gefäß mit Sirup.

Wir beschränken uns für das nächste Beispiel wieder auf eine Bewegung entlang der  $x_3$ -Achse und bezeichnen die Geschwindigkeit und den Ort wie schon zuvor mit  $v$  und  $z$ . Die Bewegungsgleichung für die Bewegung entlang der  $z$ -Achse lautet dann

$$m\ddot{z} = m\dot{v} = -mg - Kv. \quad (1.31)$$

Gl. (1.31) lässt sich durch *Separation der Variablen* lösen:

$$\int \frac{dv}{1 + \frac{K}{mg}v} = -g \int dt. \quad (1.32)$$

(Siehe hierzu auch den „Mathematischen Hintergrund“ 1.5.) Die Lösung lautet

$$\frac{mg}{K} \ln \left( 1 + \frac{Kv}{mg} \right) = -gt + C_1 \quad (1.33)$$

mit einer Integrationskonstanten  $C_1$ . Die Fallgeschwindigkeit ist somit

$$v = \frac{mg}{K} \left[ \exp \left( \frac{K(C_1 - gt)}{mg} \right) - 1 \right]. \quad (1.34)$$

Nach sehr langer Zeit, für  $t \rightarrow \infty$ , nähert sich  $v$  der Endgeschwindigkeit

$$v_E = -\frac{mg}{K} < 0 \quad (1.35)$$

an, sodass die Lösung in der Form

$$v = -|v_E| \left[ 1 - \exp \left( \frac{C_1 - gt}{|v_E|} \right) \right] \quad (1.36)$$

geschrieben werden kann.

### Frage 5

Machen Sie sich den Zusammenhang zwischen (1.34), (1.35) und (1.36) im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  klar.

Es ist geschickter, die Integrationskonstante  $C_1$  durch die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = v(t=0)$  zu ersetzen. Offensichtlich gilt

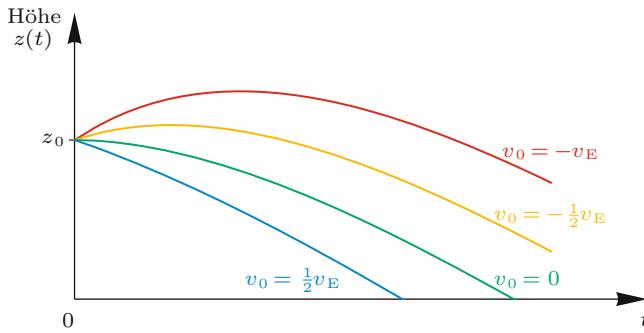
$$v_0 = |v_E| \left( \exp \frac{C_1}{|v_E|} - 1 \right) \quad (1.37)$$

und damit

$$v = (v_0 + |v_E|) \exp \left( -\frac{gt}{|v_E|} \right) - |v_E|. \quad (1.38)$$

Die Lösung für die Geschwindigkeit in (1.38) ist gleichzeitig eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Höhe  $z$ ,

$$\dot{z} = (v_0 + |v_E|) \exp \left( -\frac{gt}{|v_E|} \right) - |v_E|, \quad (1.39)$$



**Abb. 1.6** Fallkurven  $z(t)$  entsprechend (1.42) für Stokes'sche Reibung und verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0$ . Die Endgeschwindigkeit ist  $v_E$

deren Lösung

$$z = C_2 - |v_E|t - (v_0 + |v_E|) \frac{|v_E|}{g} \exp\left(-\frac{gt}{|v_E|}\right) \quad (1.40)$$

lautet. Die zweite Integrationskonstante  $C_2$  kann dann durch die Position  $z_0 = z(t=0)$  ausgedrückt werden:

$$C_2 = z_0 + (v_0 + |v_E|) \frac{|v_E|}{g}. \quad (1.41)$$

Die Lösung kann also in der Form

$$z = z_0 - |v_E|t + (v_0 + |v_E|) \frac{|v_E|}{g} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{gt}{|v_E|}\right) \right] \quad (1.42)$$

geschrieben werden. Nach sehr langer Zeit, wenn die Geschwindigkeit  $v \approx v_E$  erfüllt, nimmt  $z$  linear mit der Zeit ab, da der Exponentialterm vernachlässigbar wird:

$$z \rightarrow z_0 - |v_E|t + (v_0 + |v_E|) \frac{|v_E|}{g}. \quad (1.43)$$

Abb. 1.6 zeigt einige Beispielkurven für  $z(t)$  für verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten.

### Frage 6

Die Endgeschwindigkeit  $v_E$  lässt sich auch einfacher bestimmen. Man leite sie aus (1.31) und der Annahme her, dass im Endzustand  $\dot{v} = 0$  gilt.

In Aufgabe 1.3 kommen wir auf die Stokes'sche Reibung zurück.

## Der Fall mit Luftwiderstand

Fällt der Körper sehr schnell oder ist die Dichte des Mediums klein, so nimmt die Reibung quadratisch mit der Geschwindigkeit zu,

$$m\ddot{z} = -mg - K'v|v|, \quad (1.44)$$

wobei  $K'$  ein entsprechender Reibungskoeffizient ist, der genau wie  $K$  in (1.30) von der Beschaffenheit des fallenden Körpers und des Mediums abhängt.

### Frage 7

Machen Sie sich klar, dass der Reibungsterm in (1.44) stets der Geschwindigkeit  $v$  entgegenwirkt.

Für einen fallenden Körper gilt wegen der Orientierung der Koordinatenachsen  $v < 0$  und somit

$$\ddot{z} = -g + \frac{K'}{m}v^2. \quad (1.45)$$

Ähnlich wie im Falle Stokes'scher Reibung (1.35) wird

$$v_E^2 = \frac{mg}{K'} \quad (1.46)$$

definiert. Wir wählen die negative Lösung,  $v_E < 0$ , da die Punktmasse schließlich nach unten fällt. Aus der ursprünglichen Bewegungsgleichung (1.44) folgt bereits, dass  $v_E$  die asymptotische Endgeschwindigkeit des Körpers ist. Die Trennung der Variablen führt auf

$$\frac{dv}{1 - (v/v_E)^2} = -g dt, \quad (1.47)$$

was durch eine Partialbruchzerlegung in die Form

$$\int \frac{dv}{2} \left( \frac{1}{1 - v/v_E} + \frac{1}{1 + v/v_E} \right) = -g \int dt \quad (1.48)$$

gebracht werden kann. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$-\frac{v_E}{2} \ln \frac{v_E - v}{v_E + v} = -gt + C_1. \quad (1.49)$$

### Frage 8

Überprüfen Sie die Gültigkeit der Partialbruchzerlegung  $2/(1-x^2) = 1/(1-x) + 1/(1+x)$  und den Schritt von (1.47) nach (1.48). Zeigen Sie ferner, dass (1.49) tatsächlich eine Lösung von (1.48) ist.

Wir wählen die Integrationskonstante so, dass  $v = v_0$  bei  $t = 0$  gilt:

$$C_1 = -\frac{v_E}{2} \ln \frac{v_E - v_0}{v_E + v_0}. \quad (1.50)$$

Nach einer algebraischen Umformung folgt

$$v = v_E \frac{|v_E| - v_0 - (|v_E| + v_0) \exp(-2gt/|v_E|)}{|v_E| - v_0 + (|v_E| + v_0) \exp(-2gt/|v_E|)}. \quad (1.51)$$

Für sehr große Zeiten,  $t \rightarrow \infty$ , fallen die Exponentialterme weg, und die Geschwindigkeit nähert sich der asymptotischen Endgeschwindigkeit:  $v \rightarrow v_E$ .

Die durchfallene Höhe wird durch eine weitere Integration aus

$$z - z_0 = \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (1.52)$$

bestimmt. Um das Integral zu lösen, substituieren wir

$$a := \frac{|v_E| + v_0}{|v_E| - v_0} \quad \text{und} \quad s := \frac{2gt}{|v_E|}. \quad (1.53)$$

Der zurückgelegte Weg ist dann

$$z - z_0 = -\frac{v_E^2}{2g} \int_{s_0}^s \frac{1 - a \exp(-s')}{1 + a \exp(-s')} ds', \quad (1.54)$$

was sich zu

$$z - z_0 = -\frac{v_E^2}{2g} [s' + 2 \ln(1 + a \exp(-s'))]_{s_0}^s \quad (1.55)$$

integrieren lässt. Wir wählen  $t_0 = 0$  und somit  $s_0 = 0$  und setzen die Definitionen von  $a$  und  $s$  wieder ein. Das Endergebnis ist

$$\begin{aligned} z &= z_0 - |v_E|t - \frac{v_E^2}{g} \ln \alpha \quad \text{mit} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{v_0}{|v_E|} + \left( 1 + \frac{v_0}{|v_E|} \right) \exp\left(-\frac{2gt}{|v_E|}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Nach einer hinreichend langen Zeit,  $t \gg |v_E|/g$ , und für  $v_0 = 0$  ist der asymptotische Verlauf

$$z \rightarrow z_0 - |v_E|t + \frac{v_E^2}{g} \ln 2. \quad (1.57)$$

Im Gegensatz dazu haben wir für die Stokes'sche Reibung in (1.43) gesehen, dass für  $v_0 = 0$

$$z \rightarrow z_0 - |v_E|t + \frac{v_E^2}{g} \quad (1.58)$$

gilt. Wegen  $\ln 2 < 1$  ist die durchfallene Höhe bei Luftwiderstand kleiner als bei Stokes'scher Reibung. Dieser Vergleich gilt allerdings nur, wenn die beiden Endgeschwindigkeiten identisch sind, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

## Die Herleitung der Raketengleichung

Wir sind nun so weit, dass wir uns mit einer Gleichung beschäftigen können, in der die Masse keine Konstante mehr ist. Eine Rakete wird durch den Rückstoß des von ihr ausgestoßenen Materials beschleunigt (Abb. 1.7). Dabei nimmt die Masse  $m$  der Rakete kontinuierlich ab. Somit ist die Rakete die einzige Anwendung im nichtrelativistischen Abschnitt von Bd. 1, bei der die Masse nicht konstant ist. Es ist aber erneut zu betonen, dass



**Abb. 1.7** Start des GOES-N-Satelliten an Bord einer Boeing-Delta-IV-Rakete (© NASA)

die Gesamtmasse der Rakete und des ausgestoßenen Materials erhalten ist.

Im Folgenden wird angenommen, dass eine Rakete im homogenen Gravitationsfeld senkrecht nach oben beschleunigt wird und Luftwiderstand vernachlässigbar ist. Im Bezugssystem der Rakete wird der verbrannte Treibstoff dann mit einer Geschwindigkeit  $\Delta u$  nach unten ausgestoßen. In einem kleinen Zeitintervall  $dt$  verliert die Rakete somit eine Masse  $dm$ . Damit ändert sich der Impuls der Rakete in diesem Zeitintervall aufgrund des Ausstoßes um

$$dp_a = dm \Delta u. \quad (1.59)$$

Im homogenen Gravitationsfeld wird die Rakete zusätzlich nach unten beschleunigt, wobei die entsprechende Impulsänderung

$$dp_g = -mg dt \quad (1.60)$$

ist. Die Geschwindigkeit der Rakete ändert sich dadurch um

$$dv = \frac{dp_a + dp_g}{m}. \quad (1.61)$$

Generell nennt man eine Impulsänderung  $\Delta p$  durch eine wirkende Kraft  $F$  über eine Zeitspanne  $\Delta t$  den *Kraftstoß*:

$$\Delta p = \int_t^{t+\Delta t} F(t') dt'. \quad (1.62)$$

Die Bewegungsgleichung für die Rakete lautet also insgesamt

$$dv = \frac{dm}{m} \Delta u - g dt. \quad (1.63)$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch eine einfache Integration. Sie lautet

$$v(t) - v_0 = \Delta u \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) - gt, \quad (1.64)$$

wobei  $v_0 = v(0)$  und  $m_0 = m(0)$  die Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsmasse der Rakete sind. Die Geschwindigkeit der Rakete ist eindeutig bestimmt, sobald die Massenfunktion  $m(t)$  bekannt ist. Dann lässt sich auch  $x(t)$  durch eine weitere Integration bestimmen.

## 1.4 Energiesatz in einer Dimension

Die eindimensionale Bewegung im homogenen Schwerefeld aus Abschn. 1.3 wird hier nun auf allgemeinere Kraftfelder in zunächst einer Dimension erweitert. Dabei wird der Begriff der Energie einer Punktmasse eingeführt. Es wird gezeigt, dass die Energie unter bestimmten Umständen erhalten ist; dabei kommen wir auch auf dissipative Kräfte zu sprechen, die in der Regel zu einer Energieabnahme führen. Der Energieerhaltungssatz vereinfacht das Lösen der Bewegungsgleichung. Dies wird anhand des harmonischen Oszillators – als Beispiel einer periodischen Bewegung – verdeutlicht.

### Der freie Fall aus großer Höhe

Fällt eine Punktmasse  $m$ , bei vernachlässigter Reibung, im Gravitationsfeld der Erde über eine Strecke, die nicht klein im Vergleich zum Erdradius ist, so sieht die Punktmasse im Laufe des Fallens ein zunehmendes Gravitationsfeld im Abstand  $r$  zum Erdmittelpunkt (siehe (1.13)):

$$\mathbf{F}_G = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (1.65)$$

Hierbei ist anzumerken, dass (1.65) gültig ist, obwohl die Erde nicht als Punktmasse approximiert werden kann. Wir werden in Aufgabe 2.7 sehen, dass für radialsymmetrische Massenverteilungen die Näherung einer Punktmasse und das entsprechende Kraftgesetz (1.65) tatsächlich gelten, wenn man sich auf das Gravitationsfeld außerhalb der Massenverteilung (d. h. oberhalb der Erdoberfläche) beschränkt. Wir werden weiterhin finden, dass das Gravitationsfeld im Inneren der Erde eine andere Form annimmt, die an dieser Stelle jedoch keine Rolle spielt.

Für die weitere Beschreibung ist es nicht nötig, die Gravitationskonstante  $G$  und die Erdmasse  $M$  getrennt zu behandeln. Stattdessen ist es sinnvoller, die Größe  $\alpha := GM$  einzuführen. Die Bewegungsgleichung der Punktmasse entlang des Vektors  $\hat{\mathbf{e}}_r$  ist nun

$$m\ddot{r} = -\frac{\alpha m}{r^2}. \quad (1.66)$$

Wir beschränken uns hier auf eine radiale, d. h. eindimensionale Bewegung mit  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r$ . Weiterhin ist zu betonen, dass an dieser Stelle der Einfluss der Bewegung der Testmasse  $m$  auf die Bewegung der Erde vernachlässigt wird. In Wirklichkeit aber wird auch die große Punktmasse  $M$  von der kleinen Punktmasse  $m$  angezogen, was zu einer kleinen, aber endlichen

Beschleunigung von  $M$  führt. Eine allgemeine Diskussion ohne diese Einschränkungen wird in Kap. 3 nachgeholt.

Um die Bewegungsgleichung für den radialen Fall im Gravitationsfeld zu lösen, wird die Bewegungsgleichung der Punktmasse (1.66) zunächst mit der Geschwindigkeit  $\dot{r}$  multipliziert:

$$m\dot{r}\ddot{r} = -\frac{\alpha m\dot{r}}{r^2}. \quad (1.67)$$

Dies führt direkt auf

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \dot{r}^2 = \alpha m \frac{d}{dt} \frac{1}{r}. \quad (1.68)$$

Die Zeitableitungen werden nun auf der linken Seite gesammelt, und eine einmalige Zeitintegration liefert sofort

$$m \left( \frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r} \right) =: E = T + V = \text{const.} \quad (1.69)$$

Die Größe  $E$  wird als *Energie* bezeichnet. Sie ist wegen (1.69) zeitlich konstant; es gilt also Energieerhaltung. Der erste Term,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2, \quad (1.70)$$

ist die *kinetische Energie* und der zweite Term,

$$V = -\frac{\alpha m}{r}, \quad (1.71)$$

die *potenzielle Energie* der Punktmasse  $m$  im Gravitationsfeld. Energie ist eine Größe, die in der gesamten Physik eine fundamentale Rolle spielt. Sie ist ein Maß für die Fähigkeit eines Systems, Körper entgegen wirkender Kräfte zu bewegen und somit *Arbeit* zu verrichten (Arbeit wird später in (1.85) definiert). Die kinetische Energie  $T$  entspricht derjenigen Arbeit, die benötigt wird, die Punktmasse  $m$  aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit  $\dot{r}$  zu beschleunigen. Sie ist somit eng mit der Trägheitskraft  $m\ddot{r}$  der Punktmasse  $m$  verknüpft. Die potenzielle Energie  $V$  allerdings wird durch äußere Kraftfelder bestimmt. Wir werden in Kürze genauer über Arbeit und Energie sprechen.

Die Fallgeschwindigkeit  $v$  lässt sich somit als Funktion des Abstands  $r$  angeben. Es ist im Allgemeinen nicht möglich, eine geschlossene Gleichung für  $v$  als Funktion der Zeit  $t$  zu erhalten. Für die meisten Anwendungen ist dies auch gar nicht erforderlich, und man begnügt sich damit,  $v(r)$  zu bestimmen.

### Fluchtgeschwindigkeit

Gl. (1.69) besagt, dass sich die Energie einer Punktmasse im Gravitationsfeld der Erde nicht ändern darf:  $E(t) = E_0 = \text{const.}$  Hier ist  $E_0$  die Energie, die durch die Anfangsbedingungen des Problems gegeben ist,

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\alpha m}{r_0}, \quad (1.72)$$

wobei  $v_0 = \dot{r}(t=0)$  und  $r_0 = r(t=0)$  sind. Angenommen, die Punktmasse  $m$  ruht anfangs im Unendlichen,  $r_0 = \infty$  und  $v_0 = 0$ , so ist  $E_0 = E(t) = 0$  und damit

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\alpha m}{r} = \frac{GMm}{r} = \frac{gR_{\text{Erde}}^2 m}{r}. \quad (1.73)$$

Die letzte Identität folgt aus der Tatsache, dass die Gravitationsfelder  $-mg$  aus (1.22) und  $-GMm/r^2$  aus (1.65) an der Erdoberfläche identisch sein müssen:

$$-mg = -\frac{GMm}{R_{\text{Erde}}^2}. \quad (1.74)$$

Fällt nun eine Punktmasse aus dem Unendlichen auf die Erdoberfläche bei  $r = R_{\text{Erde}}$ , so ist die Geschwindigkeit beim Aufschlag

$$v_\infty = \sqrt{2gR_{\text{Erde}}} = 11,2 \text{ km s}^{-1}. \quad (1.75)$$

Diese Geschwindigkeit nennt man im Umkehrschluss auch die *Fluchtgeschwindigkeit* von der Erde, denn ein Körper muss an der Erdoberfläche mindestens diese Geschwindigkeit besitzen, um das Gravitationsfeld der Erde verlassen zu können.

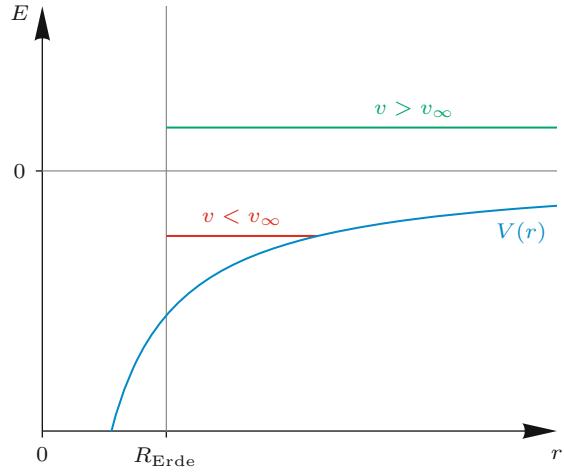
Angenommen, eine Punktmasse  $m$  startet bei  $t = 0$  auf der Erdoberfläche mit einer nach oben gerichteten Geschwindigkeit  $v_0$ . Ist  $v_0 \geq v_\infty$ , so ist  $E \geq 0$ , und die Punktmasse wird stets eine positive Geschwindigkeit behalten und somit nicht auf die Erde zurückfallen. Ist die Geschwindigkeit beim Start kleiner,  $v_0 < v_\infty$ , so ist  $E < 0$ , und die Punktmasse wird an einem Punkt  $r < \infty$  zunächst zur Ruhe kommen,  $\dot{r} = 0$ , und direkt danach wieder auf die Erde zurückfallen. Der Grund ist, dass die kinetische Energie  $T$  nicht negativ werden kann, da sie positiv-semidefinit ist. Dies ist in Abb. 1.8 anschaulich dargestellt. 

### Frage 9

Wie groß ist die Gravitationsbeschleunigung auf der Jupiteroberfläche im Vergleich zur Beschleunigung auf der Erdoberfläche, wenn die Masse von Jupiter 318 Erdmassen und sein Radius 10,9 Erdradien entspricht? Nutzen Sie dazu (1.74) aus. (Die Beschleunigung ist etwa um einen Faktor 2,7 größer.)

## Der Energieerhaltungssatz in einer Dimension

Mit (1.69) haben wir bereits die Energieerhaltung für den eindimensionalen, freien Fall im Gravitationsfeld aus großer Höhe gefunden. Wir werden diese Aussage nun zunächst im eindimensionalen Raum verallgemeinern. Die Energieerhaltung für



**Abb. 1.8** Startet eine Punktmasse auf der Erdoberfläche bei einem Radius  $r = R_{\text{Erde}}$  mit einer Geschwindigkeit  $v$ , so kann sie das Gravitationsfeld der Erde verlassen, wenn  $v > v_\infty$  und damit die Energie positiv ist:  $E > 0$ . In diesem Fall besitzt die Punktmasse noch einen Geschwindigkeitsüberschuss im Unendlichen, da dort das Potenzial verschwindet,  $V = 0$ , und demnach die kinetische Energie  $T$  positiv bleibt. Ist  $E < 0$ , so gilt  $v < v_\infty$ , und die Punktmasse kann das Potenzial nicht überwinden, da an einem endlichen Abstand  $T = 0$  wird und die Punktmasse zur Ruhe kommt. Dieser Punkt kann zeichnerisch bestimmt werden

die Bewegung in drei Dimensionen wird in Abschn. 1.6 diskutiert.

Die Bewegungsgleichung für eine Punktmasse  $m$  unter dem Einfluss einer ortsabhängigen Kraft  $F(z)$  lautet

$$m\ddot{z} = F(z). \quad (1.76)$$

Definiert man eine Funktion  $V(z)$  mit der Eigenschaft

$$-\frac{dV(z)}{dt} = -\frac{dV(z)}{dz}\dot{z} = F(z)\dot{z} \quad (1.77)$$

bzw.

$$F(z) = -\frac{dV(z)}{dz}, \quad (1.78)$$

so kann (1.76) nach Multiplikation mit  $\dot{z}$  in der Form

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \dot{z}^2 = -\frac{dV(z)}{dt} \quad (1.79)$$

geschrieben werden. Offensichtlich ist dabei

$$V(z) := - \int_{z_0}^z F(z') dz'. \quad (1.80)$$

### Frage 10

Man zeige, dass die untere Integrationsgrenze  $z_0$  in (1.80) frei gewählt werden kann. Überlegen Sie dabei, dass bei der Kraftberechnung nach  $z$  und nicht nach  $z_0$  abgeleitet wird.

Aus den obigen Überlegungen folgt, dass die Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{z}^2 + V(z) \right) = 0 \quad (1.81)$$

verschwindet. Demnach ist die Energie

$$E := \frac{m}{2} \dot{z}^2 + V(z) = T + V(z) = \text{const} \quad (1.82)$$

erhalten, wobei  $T$  wieder die kinetische Energie bezeichnet. Gl. (1.81) repräsentiert den *Energieerhaltungssatz*. Erhaltungsgrößen, die sich aus einer Integration der Bewegungsgleichungen ergeben (wie die Energie), nennt man auch *Integrale der Bewegung*.

Man nennt die Größe  $V(z)$  die *potenzielle Energie* oder das *Potenzial* zur Kraft  $F(z)$ . Es kann für eindimensionale Probleme stets über das Integral (1.80) aus der Kraft  $F(z)$  berechnet werden, solange diese nur vom Ort  $z$  abhängt. Für allgemeine geschwindigkeits- und zeitabhängige Kräfte lässt sich dagegen kein Potenzial definieren. Da  $z_0$  in (1.80) beliebig ist, ist das Potenzial nur bis auf eine Konstante bestimmt. Dies wird häufig ausgenutzt, um die Gesamtenergie auf einen bestimmten Wert zu setzen (z. B.  $E = 0$ ).

### Energieerhaltungssatz in einer Dimension

Ist die Kraft  $F(z)$  nur eine Funktion des Ortes, so kann in einer Dimension durch (1.80) stets ein Potenzial  $V(z)$  definiert werden. Die Energie ist dann erhalten.

### Zeitunabhängigkeit des Potenzials

Angenommen, die Kraft und das Potenzial hängen außer von der Koordinate  $z$  noch explizit von der Zeit  $t$  ab, d. h.  $V = V(z, t)$ . Ausgehend von (1.77) kann man zeigen, dass die Kraft dann nicht in der Form  $F(z, t) = -dV(z, t)/dz$  geschrieben werden kann. Dazu muss man die *vollständige Ableitung*

$$\frac{dV(z, t)}{dt} = \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \frac{dz(t)}{dt} + \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad (1.83)$$

berechnen. Hier wird berücksichtigt, dass  $V$  eine Funktion mehrerer Veränderlicher ist (in diesem Fall ist  $z(t)$  eine Funktion von  $t$ ). Man nennt die Größe

$$dV(z, t) = \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} dz + \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} dt \quad (1.84)$$

das vollständige Differenzial von  $V$  (siehe auch den Kasten „Vertiefung: Vollständiges Differenzial“). Der Term  $\partial V(z, t)/\partial t$  in (1.83) verhindert, dass man  $F(z, t) = -dV(z, t)/dz$  schreiben kann. ▲

Wird eine Punktmasse  $m$  in einem Kraftfeld  $F(z)$  von Punkt  $z_a$  nach  $z_b$  bewegt, so wird dabei die sogenannte *Arbeit*

$$W := \int_{z_a}^{z_b} F(z') dz' = -(V(z_b) - V(z_a)) \quad (1.85)$$

vom Kraftfeld am Teilchen verrichtet. Für  $W > 0$ , „fällt“ die Punktmasse im Potenzial. Die dabei verrichtete Arbeit wird in kinetische Energie umgesetzt. Ist dagegen  $W < 0$ , so wird kinetische Energie in potenzielle Energie umgewandelt, und die Punktmasse wird abgebremst. Während dieser Vorgänge bleibt  $T + V$  stets konstant. Unter der *Leistung*

$$P := \frac{dW}{dt} = F(z) \dot{z} \quad (1.86)$$

versteht man die Rate, mit der Arbeit verrichtet wird.

### Dissipation von Energie in mechanischen Systemen

Geschwindigkeitsabhängige Kräfte, z. B. Reibungskräfte, lassen sich nicht in der Form  $F = -dV/dz$  schreiben. Die Energie  $E = T + V$  ist dann im Allgemeinen nicht erhalten. In solchen Fällen spricht man von *dissipativen Kräften*. Eine Kraft lässt sich stets als Summe einer nichtdissipativen und einer dissipativen Kraft schreiben:

$$F = F_{\text{nd}}(z) + F_d(z, \dot{z}, t), \quad (1.87)$$

wobei wir annehmen, dass die dissipative Kraft von Ort, Geschwindigkeit und Zeit abhängt und dass  $F_{\text{nd}}(z) = -dV(z)/dz$  gilt. Es folgt dann direkt die Erweiterung des Energieerhaltungssatzes in (1.81):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{z}^2 + V(z) \right) = F_d \dot{z}. \quad (1.88)$$

#### Frage 11

Man überprüfe, dass (1.88) aus (1.87) folgt.

Die rechte Seite von (1.88) ist die Leistung, die durch die dissipative Kraft an der Punktmasse verrichtet wird. Ist diese Leistung positiv, nimmt die Energie zu. Eine negative Leistung wird häufig *Verlustleistung* genannt. Reibungskräfte führen immer zu einer Energieabnahme. Man sagt auch, die Energie wird dissipiert, was bedeutet, dass sie letztlich in Wärme umgewandelt wird.

**Achtung** Wärme ist ebenfalls eine Form der Energie. So lässt sich ein allgemeinerer Energieerhaltungssatz formulieren, der die Wärmeenergie berücksichtigt. Dies ist jedoch Aufgabe der statistischen Mechanik in Bd. 4. Der Grund ist, dass die klassische Mechanik im Wesentlichen eine makroskopische Theorie,

## Vertiefung: Vollständiges Differenzial

In vielen Fällen hängt eine Funktion  $f$  nicht nur von einer Veränderlichen ab. Ist  $f = f(x, y)$ , so nennt man

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

das *vollständige Differenzial* von  $f$ . Dies kann ohne Probleme auf beliebig viele Veränderliche erweitert werden. Die Terme  $\partial f / \partial x$  nennt man *partielle Ableitungen*, bei denen alle Veränderlichen außer  $x$  bei der Ableitung festgehalten (d.h. als Konstanten behandelt) werden. Anschaulich bedeutet das vollständige Differenzial, dass alle Veränderlichen zur Variation von  $f$  beitragen.

In der Physik tritt häufig der Fall auf, dass eine Funktion vom Ortsvektor  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^\top$  und der Zeit  $t$  abhängt:  $f = f(\mathbf{x}(t), t)$ . Dabei ist der Ortsvektor selbst zeit-

abhängig. Man nennt eine Funktion des Raumes, also eine Funktion aller drei Ortskoordinaten, ein *Feld*. Dann ist das vollständige Differenzial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

und die *vollständige Zeitableitung*

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Ist  $f = f(\mathbf{x}(t), t)$ , so sagt man,  $f$  ist *explizit zeitabhängig*, da  $f$  für festgehaltenes  $\mathbf{x}$  immer noch eine Funktion von  $t$  ist. Hingegen hängt  $f = f(\mathbf{x}(t))$  nur *implizit* von der Zeit ab, da die Zeitabhängigkeit nur über die Bahnkurve  $\mathbf{x}(t)$  in  $f$  eingeht.

Wärme aber ein mikroskopisches Konzept ist. Wärme ist eng mit der „inneren Energie“ von Körpern verknüpft, die wir in der klassischen Mechanik nicht behandeln. In Bd. 4, Abschn. 1.4 kommen wir darauf zurück.

## Periodische Bewegungen für nichtdissipative Kräfte

Aus dem Energieerhaltungssatz in (1.81) lässt sich die Bahnkurve  $z(t)$  implizit angeben, indem zunächst nach  $\dot{z}$  aufgelöst wird:

$$\dot{z} = \pm \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}. \quad (1.89)$$

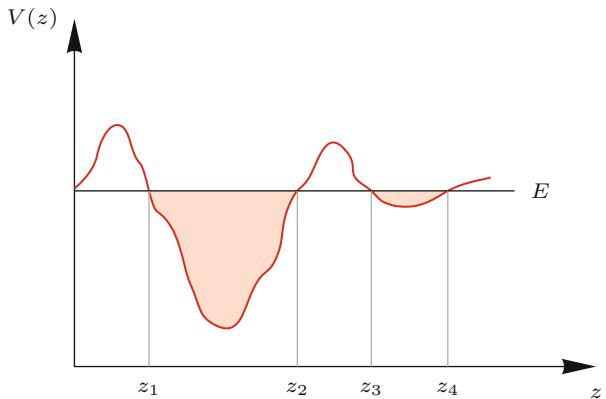
Diese Differentialgleichung ist separabel, da die rechte Seite nur eine Funktion von  $z$  ist. Sie kann daher in der Form

$$f_1(t) dt = f_2(z) dz \quad (1.90)$$

geschrieben werden. Für die benötigte Zeit, um von  $z_0$  nach  $z$  zu gelangen, folgt sofort

$$t - t_0 = \pm \int_{z_0}^z \frac{dz'}{\sqrt{2(E - V)/m}}. \quad (1.91)$$

Wie bereits zuvor erläutert, darf sich die Punktmasse dabei offensichtlich nur in Bereichen bewegen, für die  $E - V \geq 0$  ist, da die kinetische Energie,  $T = E - V = m\dot{z}^2/2$ , quadratisch und somit positiv-semidefinit ist. Punkte, für welche die kinetische Energie verschwindet,  $T = 0$ , bezeichnet man als *Umkehrpunkte*. Je nach Form des Potenzials  $V(z)$  und dem Wert der Gesamtenergie kann es beliebig viele Umkehrpunkte geben.

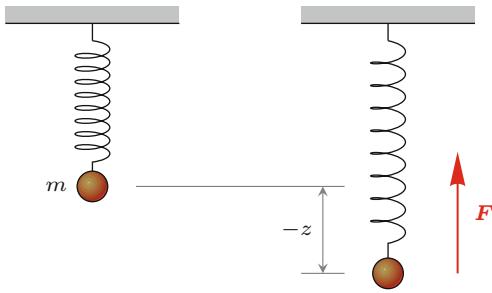


**Abb. 1.9** Beispiel einer eindimensionalen Potenziallandschaft  $V(z)$ , die zusammen mit der Energie  $E$  vier Umkehrpunkte definiert. Die Bewegung einer Punktmasse ist auf die eingefärbten Bereiche beschränkt, für die  $E \geq V(z)$  gilt. Eine Punktmasse im Bereich zwischen  $z_1$  und  $z_2$  kann nicht in den Bereich zwischen  $z_3$  und  $z_4$  gelangen, da seine Energie nicht ausreicht, die Barriere dazwischen zu überwinden. Stattdessen führt sie eine periodische Schwingung zwischen den Umkehrpunkten  $z_1$  und  $z_2$  aus

Dies ist in Abb. 1.9 dargestellt. Man spricht dann von einer gebundenen Bahn, wenn sich die Punktmasse nur zwischen zwei Umkehrpunkten,  $z_1$  und  $z_2$ , bewegen kann.

In der klassischen Mechanik kann eine Punktmasse keine Barrieren überspringen, für die  $V > E$  gilt. In der Quantenmechanik hingegen besteht eine endliche Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen eine solche Potenzialbarriere überwindet. Dieses sogenannte Tunneln wird in Bd. 3 diskutiert.

Ist die Bewegung einer Punktmasse  $m$  auf den Bereich zwischen zwei Umkehrpunkten beschränkt, so ist sie periodisch: Beim Er-



**Abb. 1.10** Ist der Oszillator um  $-z$  nach unten ausgelenkt, wirkt die Rückstellkraft  $F$  nach oben. Die Gravitationskraft für den senkrecht aufgestellten Federoszillator führt lediglich zu einer Verschiebung der Schwingung entlang der  $z$ -Achse und ändert ihre Schwingungsdauer nicht

reichen des ersten Umkehrpunktes,  $z_1$ , ändert die Punktmasse ihre Richtung und bewegt sich bis zum Umkehrpunkt  $z_2$ , wo sie abermals ihre Richtung wechselt und im Anschluss wieder zum Punkt  $z_1$  gelangt. Die beiden Vorzeichen in (1.89) drücken aus, dass die Punktmasse in diesem Bereich in beide Richtungen laufen kann. Während dieser Bewegung ist die Geschwindigkeit der Punktmasse durch die Differenz  $mv^2/2 = E - V$  festgelegt. Die *Schwingungsperiode* ist die Zeit, welche die Punktmasse von Punkt  $z_1$  zu Punkt  $z_2$  und zurück benötigt:

$$\Delta t = 2(t_2 - t_1) = \sqrt{2m} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{E - V}}. \quad (1.92)$$

## Der harmonische Oszillator

Das Integral in (1.92) ist für einige Potenzialformen  $V(z)$  analytisch lösbar. Ein für die Physik extrem wichtiges Potenzial ist das des *harmonischen Oszillators*:

$$V(z) = \frac{k}{2}z^2 + V_0. \quad (1.93)$$

Der Begriff „harmonisch“ bedeutet, dass sich die Lösung durch Sinus- und Kosinusfunktionen ausdrücken lässt. Der harmonische Oszillator wird in Kap. 6 noch gründlicher untersucht werden. Das Potenzial aus (1.93) führt auf die in  $z$  lineare Kraft

$$F(z) = -kz \quad (1.94)$$

mit der *Federkonstanten*  $k$ . Zur Vereinfachung wählen wir  $V_0 = 0$ . Die Auslenkung wird dabei relativ zur Ruhelage angegeben, in der sich die Punktmasse befindet, wenn sie nicht schwingt. Dieser Punkt entspricht dem Minimum des Potenzials  $V(z)$ . Ein Beispiel für einen harmonischen Oszillator ist in Abb. 1.10 gezeigt.

Definiert man

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.95)$$

so ist die Gesamtenergie des Oszillators

$$E = \frac{m}{2} (z^2 + \omega_0^2 z^2). \quad (1.96)$$

Für  $E > 0$  existieren stets zwei Umkehrpunkte, welche die Gleichung

$$E = \frac{m}{2} \omega_0^2 z_{1,2}^2 \quad (1.97)$$

erfüllen und daher durch

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \quad (1.98)$$

gegeben sind.

Die Bedeutung von  $\omega_0$  wird klar, wenn man die Schwingungsperiode berechnet. Einsetzen des harmonischen Oszillatortyps (1.93) und der Energie am Umkehrpunkt (1.97) in die Gleichung für die Schwingungsperiode (1.92) ergibt nach kurzer Umformung und unter Berücksichtigung von  $z_2 = -z_1 > 0$

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_0} \int_{-z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{z_2^2 - z^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (1.99)$$

Das Integral kann in einer Integrationstabelle nachgeschlagen oder nach Substitution mit  $y = z/z_2$  mit der Stammfunktion  $\arcsin(y)$  berechnet werden. Offensichtlich ist  $\omega_0$  die *Oszillationsfrequenz*.

### Frage 12

Man überprüfe, dass die angegebene Stammfunktion  $\arcsin(y)$  mit ihrer Ableitung  $d\arcsin(y)/dy = 1/\sqrt{1-y^2}$  auf das angegebene Ergebnis führt.

Aus (1.94) folgt

$$m\ddot{z} = -kz \quad (1.100)$$

für die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators. Die allgemeine Lösung ist

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi_0). \quad (1.101)$$

Hier ist  $A \geq 0$  die *Amplitude* der Schwingung, und  $\phi_0$  ist ein Phasenwinkel, der durch die Anfangsbedingungen festgelegt wird. Man kann diese Lösung durch direkte Integration von (1.91) erhalten, indem man

$$\arcsin(y) - \arcsin(a) = \int_a^y \frac{dy'}{\sqrt{1-y'^2}} \quad (1.102)$$

ausnutzt. Es ist dem interessierten Leser überlassen, dieses Ergebnis zu überprüfen (man findet dabei, dass die Amplitude  $A$  durch die Energie  $E$  bestimmt wird). In Aufgabe 1.7 wird ein alternativer Weg verfolgt, um zu diesem Ergebnis zu kommen.

**Frage 13**

Wirkt zusätzlich eine Gravitationskraft der Form  $-mg$ , z. B. wenn der Oszillator wie in Abb. 1.10 senkrecht aufgestellt ist, so lässt sich eine neue Koordinate  $\tilde{z} = z - h$  einführen, wobei  $h$  die Verschiebung der Ruhelage unter dem Einfluss der Gravitation ist. Man zeige, dass  $h = mg/k$  gilt. Weiterhin mache man sich klar, dass (1.101) ihre Gültigkeit behält und dass insbesondere  $\omega_0$  unverändert bleibt, wenn  $z$  durch  $\tilde{z}$  ersetzt wird.

## 1.5 Bewegung in drei Dimensionen

In diesem Abschnitt wird die Kinematik einer Punktmasse in drei Dimensionen diskutiert. Neben dem Konzept der Bahnkurven, Tangential-, Normalenvektoren und Bogenlänge werden weiterhin das Drehmoment und der Drehimpuls eingeführt. Dazu benötigt man das Kreuzprodukt zweier Vektoren, das sich mit dem Levi-Civita-Symbol darstellen lässt. Es wird gezeigt, wie sich Kurvenintegrale ausführen lassen. Dieser Abschnitt dient vor allem als Vorbereitung auf Abschn. 1.6, in dem die Energieerhaltung in drei Dimensionen behandelt wird.

### Bahnkurven in drei Dimensionen

Wie bereits in Abschn. 1.1 beschrieben, ist der dreidimensionale Ortsvektor  $\mathbf{x}$  einer Punktmasse im Allgemeinen eine Funktion der Zeit  $t$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ . Als Bahnkurve bezeichnet man die Menge der Punkte, die während einer Zeit  $\Delta t = t_2 - t_1$  von der Punktmasse durchlaufen werden. In drei Dimensionen lässt sich die Bahnkurve durch ihre drei kartesischen Komponenten

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad (1.103)$$

darstellen. Beispiele sind eine Kreisbahn in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene mit Radius  $R$ ,

$$\mathbf{x}_K(t) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.104)$$

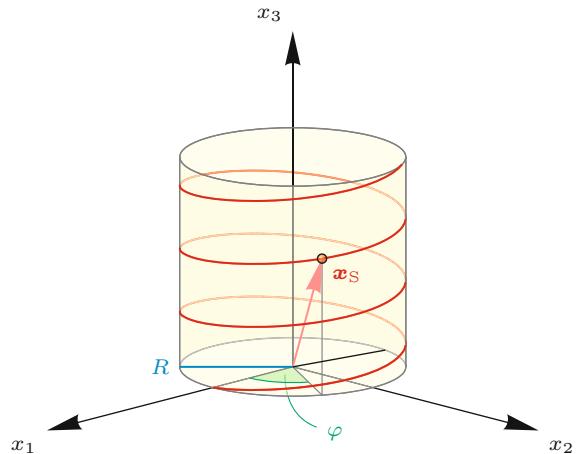
oder eine Schraubenlinie längs der  $x_3$ -Achse mit Radius  $R$ ,

$$\mathbf{x}_S(t) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad (1.105)$$

wie sie in Abb. 1.11 dargestellt ist.

**Frage 14**

Man vergewissere sich, dass der Radius der Kreisbahn in (1.104) tatsächlich  $R$  ist, indem man den Betrag von  $\mathbf{x}_K(t)$  bestimmt. Berechnen Sie ferner aus  $\mathbf{x}_K(t)$  in (1.104) die Bahn-



**Abb. 1.11** Die Schraubenlinie mit Radius  $R$  erfüllt (1.105) mit  $\varphi(t) = \omega t$  und  $x_3(t) = v_3 t$ , wobei  $\omega$  und  $v_3$  Konstanten sind. Der Winkel  $\varphi$  ist definiert als der Winkel zwischen der Projektion von  $\mathbf{x}_S$  auf die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene und der  $x_1$ -Achse

geschwindigkeit und Beschleunigung. Die Lösung finden Sie im anschließenden Beispiel.

### Bahngeschwindigkeit und -beschleunigung

Die obigen Beispiele führen durch einmalige Zeitableitung auf die Bahngeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_K(t) &= \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}R \sin \varphi(t) \\ \dot{\varphi}R \cos \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v}_S(t) &= \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}R \sin \varphi(t) \\ \dot{\varphi}R \cos \varphi(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Durch eine weitere Zeitableitung erhält man die Beschleunigungen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_K(t) &= \begin{pmatrix} -\ddot{\varphi}R \sin \varphi(t) - \dot{\varphi}^2 R \cos \varphi(t) \\ \ddot{\varphi}R \cos \varphi(t) - \dot{\varphi}^2 R \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_S(t) &= \begin{pmatrix} -\ddot{\varphi}R \sin \varphi(t) - \dot{\varphi}^2 R \cos \varphi(t) \\ \ddot{\varphi}R \cos \varphi(t) - \dot{\varphi}^2 R \sin \varphi(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Eine Punktmasse ist genau dann beschleunigt, wenn mindestens eine Komponente ihres Beschleunigungsvektors  $\mathbf{a}(t)$  von Null verschieden ist bzw. wenn mindestens eine Komponente ihres Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}(t)$  sich mit der Zeit ändert.

Selbst wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist, d.h.  $|\mathbf{v}(t)| = \text{const}$ , kann die Punktmasse beschleunigt sein. Dies ist beispielsweise für eine Bewegung auf einem Karussell der Fall.

### Frage 15

Eine Punktmasse bewege sich auf der Kreisbahn  $\mathbf{x}_K(t)$  wie in (1.104) angegeben. Zusätzlich sollen  $\varphi(t) = \omega t$  und  $\omega = \text{const}$  gelten. Man zeige, dass dann  $|\mathbf{v}_K(t)| = \text{const}$  gilt. Dennoch ist die Punktmasse beschleunigt, da die  $x_1$ - und  $x_2$ -Komponenten von  $\mathbf{a}_K(t)$  im Allgemeinen nicht null sind. Man berechne außerdem den Betrag der Beschleunigung und zeige, dass  $|\mathbf{a}_K(t)| = \omega^2 R$  gilt.

## Die Bogenlänge einer Bahnkurve

Bewegt sich eine Punktmasse auf einer Bahnkurve  $\mathbf{x}(t)$ , so überstreicht sie in der infinitesimalen Zeit  $dt$  einen infinitesimalen Abschnitt der Bahnkurve. Die *Bogenlänge* dieses Abschnitts ist

$$ds = |\mathbf{dx}(t)| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = |\mathbf{v}(t)| dt. \quad (1.108)$$

In einer endlichen Zeit zwischen  $t_1$  und  $t_2$  (bzw. zwischen den Punkten  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$  und  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$ ) ist die durchlaufene Bogenlänge daher

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt. \quad (1.109)$$

In vielen Fällen ist zwar die Form der Bahnkurve bekannt, aber nicht die Geschwindigkeit, mit der sie durchlaufen wird. Ein Beispiel dafür sind die Gleise einer Achterbahn, welche die Gesamtlänge der Strecke definieren, unabhängig davon, wie schnell die Achterbahn letztlich über die Gleise fährt. In diesem Fall bietet sich die Bogenlänge  $s$  als Bahnparameter an, um die Gesamtlänge zu berechnen. Dafür muss die Bahnkurve in die Form  $\mathbf{x}(s)$  anstelle von  $\mathbf{x}(t)$  gebracht werden. Ein *Bahnparameter* dient zur Parametrisierung der Bahnkurve. Er kann, muss aber nicht zwangsläufig der Zeit  $t$  oder der Bogenlänge  $s$  entsprechen. Wir nehmen an, dass der Zusammenhang  $s(t)$  zwischen Bogenlänge und Zeit eine monoton wachsende Funktion ist. Dann lässt sich die Bogenlänge auf zwei Arten berechnen:

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right| dt = \int_{s_1}^{s_2} \left| \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} \right| ds, \quad (1.110)$$

wobei  $s_1 = s(t_1)$  und  $s_2 = s(t_2)$  gelten.

Als Beispiel betrachte man erneut die Kreisbahn in (1.104). Man erkennt leicht, dass es sich um eine Kreisbahn handelt, selbst wenn die Funktion  $\varphi(t)$  unbekannt ist. So führt die Umparametrisierung  $\varphi(t) = s/R$  auf eine Bahnkurve  $\mathbf{x}_K(s)$ . Der Einfachheit halber soll hier angenommen werden, dass die Punktmasse auf der Bahnkurve nicht die Umlaufrichtung wechselt. In anderen Worten soll  $\varphi$  eine beliebige, aber monoton zunehmende Funktion der Zeit  $t$  sein.

## Tangential- und Normalenvektoren von Bahnkurven

Der *Tangentialvektor* einer Bahnkurve ist die Ableitung der Bahnkurve nach der Bogenlänge:

$$\boldsymbol{\tau} := \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \quad (1.111)$$

Aufgrund von (1.108) und der Gleichung

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| ds \quad (1.112)$$

ist der Tangentialvektor ein Einheitsvektor:  $|\boldsymbol{\tau}| = 1$ .

Der *Hauptnormalenvektor* ist definiert als die normierte Änderung des Tangentialvektors:

$$\mathbf{n}_H := \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|^{-1}. \quad (1.113)$$

Wegen

$$\boldsymbol{\tau}^2 = 1 \implies \frac{d}{ds} \boldsymbol{\tau}^2 = 2\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0 \quad (1.114)$$

steht  $\mathbf{n}_H$  senkrecht auf  $\boldsymbol{\tau}$ . Es lässt sich ein dritter Vektor definieren, der senkrecht auf  $\boldsymbol{\tau}$  und  $\mathbf{n}_H$  steht. Dieser Vektor,

$$\mathbf{n}_B := \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}_H, \quad (1.115)$$

wird als *Binormalenvektor* bezeichnet. Man nennt das in (1.115) auftretende Produkt das *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* zweier Vektoren. Seine Eigenschaften werden im „Mathematischen Hintergrund“ 1.6 erläutert (siehe auch Aufgabe 1.1). Damit lässt sich die  $k$ -te Komponente von  $\mathbf{n}_B$  auch als

$$n_{B,k} = \epsilon_{ijk} \tau_i n_{H,j} \quad (1.116)$$

schreiben, wobei  $\epsilon_{ijk}$  das *Levi-Civita-Symbol* ist und die *Einstein'sche Summenkonvention* verwendet wurde, also über alle doppelt auftretenden Indizes summiert wird. Die Ebene, die durch  $\boldsymbol{\tau}$  und  $\mathbf{n}_H$  aufgespannt wird, nennt man *Schmiegebene*, da die Bahnkurve sich lokal in dieser Ebene befindet (Abb. 1.12).

Wir werden nun sehen, dass der Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}_H$  die Krümmung der Bahnkurve beschreibt. Die Kreisbahn aus (1.104) lässt sich in die Form

$$\mathbf{x}_K(s) = R \begin{pmatrix} \cos(s/R) \\ \sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.117)$$

bringen. Der Tangentialvektor ist dann

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{x}_K(s)}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.118)$$

Aus ihm folgt sofort

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} \cos(s/R) \\ \sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = \frac{1}{R} \quad (1.119)$$

## 1.6 Mathematischer Hintergrund: Vektorprodukt und Levi-Civita-Symbol

Im  $\mathbb{R}^3$  kann man zu je zwei Vektoren einen dritten, zu diesen beiden orthogonalen Vektor bestimmen. Dies macht das Vektorprodukt, das noch weitere schöne geometrische Eigenschaften besitzt.

**Definition Vektorprodukt** Sei  $\{e_1, e_2, e_3\}$  eine rechts-händige Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$  (zeigt der Daumen der *rechten* Hand in Richtung von  $e_1$ , der Zeigefinger in Richtung von  $e_2$ , dann zeigt der Mittelfinger nach  $e_3$ ). Ferner seien  $x$  und  $y$  Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ , deren Koordinaten bezüglich  $\{e_1, e_2, e_3\}$  gegeben sind durch  $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$  bzw.  $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$ . Unter dem *Vektorprodukt*  $x \times y$  versteht man dann den Vektor

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Das Vektorprodukt (also die Abbildung  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(x, y) \mapsto x \times y$ ) ist bilinear, d. h.

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + \mu x_2) \times y_1 &= \lambda(x_1 \times y_1) + \mu(x_2 \times y_1), \\ x_1 \times (\lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda(x_1 \times y_1) + \mu(x_1 \times y_2), \end{aligned}$$

und antisymmetrisch, d. h.  $x \times y = -y \times x$ . Häufig wird dieses Produkt auch als ein *äußeres Produkt* bezeichnet (im Gegensatz zum Skalarprodukt, das ein inneres Produkt ist).

**Levi-Civita-Symbol** Die Definition des Vektorprodukts lässt sich elegant formulieren, wenn das *Levi-Civita-Symbol*  $\varepsilon_{ijk}$  verwendet wird, das für  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$  definiert ist durch

$$\begin{aligned} +1 &= \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312}, \\ -1 &= \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213}, \\ 0 &\quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Die  $k$ -te Koordinate von  $x \times y$  schreibt sich dann als

$$(x \times y)_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_i y_j,$$

und für das Vektorprodukt  $x \times y$  ergibt sich die Darstellung

$$x \times y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_i y_j e_k,$$

die unter Verwendung der *Einstein'schen Summenkonvention* kurz geschrieben wird als

$$x \times y = \varepsilon_{ijk} x_i y_j e_k.$$

Es wird dabei über doppelt auftretende Indizes summiert, ohne dies explizit anzugeben. Mathematisch ist das Levi-Civita-Symbol bei verschiedenen  $i, j, k$  gleich dem Vorzeichen

der Permutation  $(i \ j \ k)$ , d. h.  $+1$ , falls  $(i \ j \ k)$  durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen (Transpositionen) wieder in  $(1 \ 2 \ 3)$  überführt werden kann, und  $-1$ , falls dies nur durch eine ungerade Anzahl Vertauschungen möglich ist, bzw. null für nicht paarweise verschiedene  $i, j, k$  (mit dieser Definition kann  $\varepsilon_{ijk}$  auch auf mehr als drei Indizes verallgemeinert werden). Permutationen werden im „Mathematischen Hintergrund“ 2.2 genauer besprochen.

**Rechenregeln für das Levi-Civita-Symbol** Für Summen von Produkten von Levi-Civita-Symbolen gelten folgende Rechenregeln (die Regeln ergeben sich leicht aus der Tatsache, dass das Levi-Civita-Symbol nur für verschiedene Indizes nicht verschwindet):

- $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$ ,
- $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$ ,
- $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$ .

Dabei ist  $\delta_{ij}$  das *Kronecker-Symbol*, das definiert ist durch

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j \end{cases}.$$

**Rechenregeln für das Vektorprodukt** Unter Verwendung der oben angegebenen Regeln kann man zeigen, dass

- $x \times x = \mathbf{0}$ ,
- $e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$ ,
- $x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = \mathbf{0}$  (*Jacobi-Identität*)

für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$  gilt. Außerdem ist die *Graßmann-Identität* sehr nützlich, die man sich am besten durch die „bac-minus-cab-Regel“ merken kann:  $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$ .

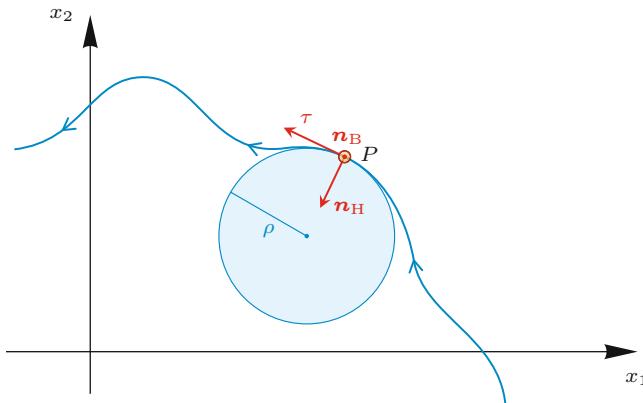
**Geometrische Eigenschaften** Schließlich sollte noch erwähnt werden, dass das Vektorprodukt einige wichtige geometrische Eigenschaften hat:

- Das Produkt  $x \times y$  steht senkrecht auf  $x$  und  $y$ , d. h.  $x \cdot (x \times y) = y \cdot (x \times y) = 0$ .
- Die Vektoren  $(x, y, x \times y)$  bilden ein Rechtshandsystem.
- Der Betrag von  $x \times y$  ist gleich der Fläche des durch  $x$  und  $y$  aufgespannten Parallelogramms, also

$$|x \times y| = |x||y| \sin \theta,$$

wobei  $\theta$  der von  $x$  und  $y$  eingeschlossene Winkel ist.

- Der Betrag des *Spatprodukts*  $(x \times y) \cdot z$  ist gleich dem Volumen des von  $x, y$  und  $z$  aufgespannten Spats. Daher stellt das Levi-Civita-Symbol ein *orientiertes Einheitsvolumen* dar:  $\varepsilon_{ijk} = (e_i \times e_j) \cdot e_k$ .



**Abb. 1.12** An einem Punkt  $P$  einer Bahnkurve lassen sich der Tangentialvektor  $\tau$ , der Hauptnormalenvektor  $n_H$  sowie der Binormalenvektor  $n_B$  (senkrecht aus der Papierebene hinaus) definieren. Der lokale Krümmungsradius  $\rho$  entspricht dem Radius eines Kreises, der am Punkt  $P$  die Bahnkurve approximiert

und somit

$$n_H = - \begin{pmatrix} \cos(s/R) \\ \sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.120)$$

#### Frage 16

Zeigen Sie, dass der entsprechende Binormalenvektor  $n_B = (0, 0, 1)^\top$  lautet.

Aufgrund der Identität

$$\left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \frac{1}{R} \quad (1.121)$$

für einen Kreis nennt man die Größe

$$\rho := \left| \frac{d\tau}{ds} \right|^{-1} \quad (1.122)$$

den *lokalen Krümmungsradius* der Bahnkurve. Er entspricht dem Radius des Kreises, der lokal die Form der Bahnkurve beschreibt. Dies wird aus Abb. 1.12 deutlich. Ist die Bahnkurve lokal gerade, so ist  $\tau = \text{const}$  und  $\rho = \infty$ .

In der Anwendung werden die Geschwindigkeit und die Beschleunigung häufig in ihre tangentialen und normalen Anteile zerlegt. Die Geschwindigkeit ist immer tangential zur Bahnkurve:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = |v(t)|\tau. \quad (1.123)$$

Mit der Schreibweise  $v = |\mathbf{v}|$  findet man für die Beschleunigung

$$a(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} v\tau = \dot{v}\tau + v \frac{d\tau}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{v}\tau + \frac{v^2}{\rho} n_H. \quad (1.124)$$

Der Anteil der Beschleunigung entlang  $n_H$  verändert nicht den Betrag der Bahngeschwindigkeit  $v$ , jedoch ihre Richtung  $\tau$ . Diese Beschleunigungskomponente heißt *Radialbeschleunigung* mit Betrag  $v^2/\rho$ , die in Kap. 2 wieder auftauchen wird. Sie macht sich deutlich bemerkbar, wenn man im Auto in eine Kurve oder in einer Achterbahn fährt.

#### Frage 17

Schleudert man einen Eimer Wasser mit ausreichender Geschwindigkeit im Kreis (mit der Drehachse parallel zum Erdboden), so schwatzt kein Wasser hinaus. Ist die Geschwindigkeit jedoch zu klein, wird man nass. Was ist die Bedingung dafür, dass das Wasser im Eimer bleibt, wenn der Eimer am höchsten Punkt seiner Bahn ist?

### Drehmoment und Drehimpuls von Punktmassen

Wirkt eine Kraft  $\mathbf{F}$  auf eine Punktmasse  $m$  am Ort  $\mathbf{x}$ , so definiert man das Moment der Kraft bezüglich des Koordinatenursprungs durch

$$\mathbf{M} := \mathbf{x} \times \mathbf{F}. \quad (1.125)$$

Dieses sogenannte *Drehmoment* steht senkrecht auf der Ebene, die durch die Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{F}$  aufgespannt wird.

#### Frage 18

Man mache sich mittels der Definition des Kreuzprodukts klar, dass das Moment  $\mathbf{M}$  verschwindet, wenn der Richtungsvektor  $\mathbf{x}$  und die Kraft  $\mathbf{F}$  parallel bzw. antiparallel ausgerichtet sind.

Der *Drehimpuls* wird ähnlich wie das Drehmoment definiert, allerdings mit dem Impuls  $\mathbf{p}$  anstelle der Kraft  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ :

$$\mathbf{L} := \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times (mv). \quad (1.126)$$

Der Drehimpuls steht senkrecht auf der Ebene, die durch  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{v}$  definiert wird (Abb. 1.13). Bewegt sich die Punktmasse direkt auf den Ursprung zu oder entfernt sie sich in entgegengesetzter Richtung, d. h.  $\mathbf{x} \parallel \mathbf{v}$ , so verschwindet der Drehimpuls:  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ . Wegen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$  und  $\dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{v}$  ist seine Zeitableitung durch

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{p} + \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = \mathbf{M} \quad (1.127)$$

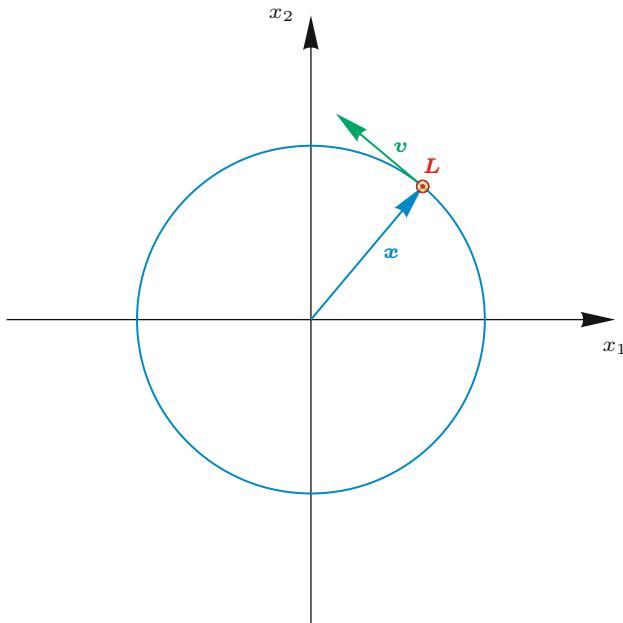
gegeben. Der *Drehimpulssatz* lautet somit

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}. \quad (1.128)$$

### Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls einer Punktmasse ist genau dann erhalten, wenn keine Drehmomente auf diese Punktmasse wirken.

Wir werden in Kap. 4 sehen, dass der Drehimpuls eine wichtige Größe zur Beschreibung von rotierenden Körpern ist.



**Abb. 1.13** Der Drehimpuls  $L$  für eine Punktmasse mit momentaner Geschwindigkeit  $v$  und Position  $x$  steht senkrecht auf  $v$  und  $x$ . Das Symbol  $\odot$  bedeutet, dass ein Vektor aus der Papierebene hinaus zeigt. Im Gegensatz dazu verwendet man  $\otimes$ , um Vektoren darzustellen, die in die Papierebene hinein zeigen

## Kurvenintegrale

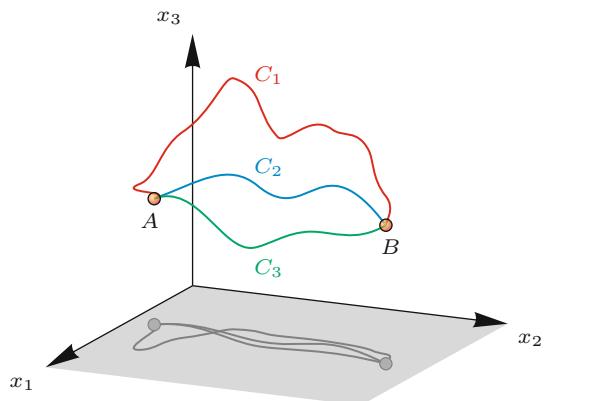
Das Ergebnis aus Abschn. 1.4 war, dass die Energie in einem eindimensionalen System erhalten ist, wenn die Kraft als negative Ableitung eines Potenzials nach dem Ort dargestellt werden kann:

$$F(z) = -\frac{dV(z)}{dz} \iff V(z) = - \int_{z_0}^z F(z') dz'. \quad (1.129)$$

Der Anfangspunkt  $z_0$  der Integration ist dabei beliebig. Es ist wünschenswert, eine ähnliche Aussage in drei Dimensionen zu formulieren. Hierbei ergibt sich allerdings die Frage, welcher Integrationsweg zwischen zwei Punkten im  $\mathbb{R}^3$  gewählt werden muss. Im Gegensatz zu der Integration in (1.129), die entlang der reellen Achse stattfindet, kann im dreidimensionalen Raum prinzipiell eine unendliche Zahl von Wegen verfolgt werden (Abb. 1.14). Wir werden bald sehen, dass ein Potenzial  $V(\mathbf{x})$  genau dann definiert werden kann, wenn die Integration von der Wahl des Weges unabhängig ist. Hierzu ist es sinnvoll, sich die Kurvenintegrale genauer anzusehen.

Es sei  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  eine vektorwertige Funktion im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$ . Einer kleinen Verschiebung vom Punkt  $\mathbf{x}$  nach  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  lässt sich der Skalar

$$\delta\Phi = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x} \quad (1.130)$$



**Abb. 1.14** Im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  gibt es generell unendlich viele Möglichkeiten, von Punkt  $A$  nach Punkt  $B$  zu gelangen. In dieser Abbildung sind drei Beispielwege und ihre Projektionen auf die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene dargestellt, um den dreidimensionalen Verlauf der Wege zu verdeutlichen

zuordnen. Ist  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  beispielsweise eine Kraft, die auf eine Punktmasse wirkt, so entspricht dieses Skalarprodukt der Arbeit, die an der Punktmasse verrichtet werden muss, um sie um  $\delta\mathbf{x}$  zu verschieben. Nun kann man sich eine Kurve  $C$  im Raum vorstellen, die aus lauter kleinen und kontinuierlichen Verschiebungen zusammengesetzt ist. Die Kurve werde durch den Kurvenparameter  $s$  beschrieben, der aus dem Intervall  $I = [s_a, s_b]$  entnommen wird:

$$C : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto \mathbf{x}(s). \quad (1.131)$$

Die Anfangs- und Endpunkte der Kurve  $C$  sind  $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}(s_a)$  und  $\mathbf{x}_b = \mathbf{x}(s_b)$ . Das Kurvenintegral über die Funktion  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  entlang des Weges  $\mathbf{x}(s)$  ist dann

$$\Phi = \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.132)$$

In dem speziellen Fall, dass die Anfangs- und Endpunkte identisch sind,  $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b$ , nennt man die Kurve geschlossen und schreibt das *geschlossene Wegintegral*

$$\int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.133)$$

Zur Berechnung des Kurvenintegrals entlang einer gegebenen Bahnkurve mit der Parametrisierung  $\mathbf{x}(s)$  schreibt man

$$\int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{s_a}^{s_b} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} ds. \quad (1.134)$$

Hier wurde der Integrand in die eindimensionale Funktion  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}/ds$  umgewandelt. Die Integration lässt sich daher wie gewohnt durchführen. Wir werden dies am Ende von Abschn. 1.6 an einem konkreten Beispiel vorführen.

## 1.6 Energieerhaltung und konservative Kräfte

In Abschn. 1.3 wurde die Bewegung einer Punktmasse in einer Dimension vorgestellt. Dies führte schließlich auf den Energieerhaltungssatz in Abwesenheit dissipativer Kräfte (1.88). Die Bewegung einer Punktmasse in drei Dimensionen erfordert besondere Aufmerksamkeit, da es sich dabei nicht um eine einfache Erweiterung von Abschn. 1.3 auf drei Dimensionen handelt. So haben wir beispielsweise zuvor gesehen, dass alle eindimensionalen Kräfte der Form  $F(z)$  aus einem Potenzial  $V(z)$  abgeleitet werden können. Im Gegensatz dazu kann man in drei Dimensionen im Allgemeinen kein Potenzial  $V(\mathbf{x})$  für eine beliebige Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  angeben, selbst wenn diese geschwindigkeits- und zeitunabhängig ist. Es wird allerdings gezeigt, dass es eine Klasse von Kräften gibt, für die eine solche Relation existiert. Diese sogenannten *konservativen Kräfte* werden im Laufe dieses Abschnitts eingeführt und definiert. Dazu werden die Differenzialoperatoren (Gradient, Divergenz und Rotation) sowie der wichtige Satz von Stokes besprochen.

### Der Energieerhaltungssatz in drei Dimensionen

Um den Energieerhaltungssatz in drei Dimensionen zu erhalten, gehen wir ähnlich wie in Abschn. 1.4 vor: Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung einer Punktmasse,

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}, \quad (1.135)$$

mit  $\dot{\mathbf{x}}$  und schreiben

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}. \quad (1.136)$$

In Analogie zum eindimensionalen Fall definiert man die kinetische Energie als

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (1.137)$$

Die infinitesimale Änderung der kinetischen Energie ist die von der Kraft  $\mathbf{F}$  längs des Wegelementes  $d\mathbf{x}$  an der Punktmasse verrichtete Arbeit  $dW$ :

$$d \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 \right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = dW. \quad (1.138)$$

Die Leistung in drei Dimensionen wird aus

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (1.139)$$

berechnet. Den eindimensionalen Fall haben wir bereits in (1.86) kennengelernt.

Die Bewegungsgleichung (1.136) beschreibt eine erhaltene Größe, wenn sie in der Form

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt} \quad (1.140)$$

geschrieben werden kann, da dann  $E = T + V = \text{const}$  für die Energie  $E$  gilt. Das eindimensionale Analogon dieses Energiesatzes haben wir schon in (1.81) gesehen. Im dreidimensionalen Fall ist dies offenbar nur dann möglich, wenn

$$\frac{dV}{dt} = -\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (1.141)$$

erfüllt ist. Eine Größe  $V$ , welche dieser Gleichung genügt, ist das Potenzial der Kraft  $\mathbf{F}$ . So erfüllen beispielsweise alle Kräfte, die senkrecht auf der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}$  stehen,  $\dot{V} = 0$ . Dies schließt beispielsweise die Lorentz-Kraft in einem beliebigen Magnetfeld  $\mathbf{B}$  ein. Sie ist proportional zum Kreuzprodukt  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  und erhält damit die Energie (Aufgabe 1.4). Hier ist anzumerken, dass die Lorentz-Kraft *geschwindigkeitsabhängig* ist. Wir wollen uns im Folgenden allerdings auf *geschwindigkeitsunabhängige* Kräfte beschränken (also solche mit Gestalt  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ). Die Lorentz-Kraft wird in Bd. 2 genauer untersucht werden.

Es gibt eine Klasse geschwindigkeitsunabhängiger Kräfte, die (1.141) erfüllen. Die Anwendung der Kettenregel zeigt, dass dies für Kräfte der Fall ist, die in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) \quad (1.142)$$

geschrieben werden können. Hierbei bezeichnet  $\nabla$  (*Nabla-Operator*) den *Gradienten* in kartesischen Koordinaten, der im „Mathematischen Hintergrund“ 1.7 eingeführt wird. Man rechnet somit nach, dass

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} \\ &= (\nabla V(\mathbf{x})) \cdot \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (1.143)$$

gilt. Es ist zu betonen, dass die Zeitabhängigkeit vollständig in  $\mathbf{x}(t)$  enthalten ist; die Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  und das Potenzial  $V(\mathbf{x})$  sind somit nicht explizit zeitabhängig.

**Achtung** Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs des Potenzials. Das Konzept des Gradienten (und Nabla-Operators) ist in der Physik sehr wichtig und für viele Leser vermutlich neu. Es wird daher empfohlen, den „Mathematischen Hintergrund“ 1.7 genau zu studieren und Aufgabe 1.5 zu bearbeiten. ▶

Kräfte der Form wie in (1.142) werden *Potenzialkräfte* oder *konservative Kräfte* genannt, da sie die Energie als Summe von kinetischer und potenzieller Energie erhalten und aus einem Potenzial abgeleitet werden können.

### Konservative Kräfte

Konservative geschwindigkeitsunabhängige Kräfte  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  lassen sich als Gradient eines skalaren Potenzials  $V(\mathbf{x})$  darstellen.

## 1.7 Mathematischer Hintergrund: Differenzialoperatoren

Im  $\mathbb{R}^n$ , und besonders im  $\mathbb{R}^3$ , gibt es einige besondere Ableitungsoperatoren, die in der Physik oft benutzt werden. Diese wollen wir hier kurz erklären.

**Ableitung und partielle Ableitung** Eine skalare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  ist *differenzierbar* in  $x$ , wenn der Grenzwert

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

existiert. Den Grenzwert bezeichnet man als *Ableitung* von  $f$ . Anschaulich beschreibt  $f'(x_0)$  die Änderungsrate (Steigung) von  $f$  in der Nähe von  $x_0$  (vorausgesetzt, dass  $f$  hinreichend glatt ist in einer Umgebung um  $x_0$ ). Für Details siehe den „Mathematischen Hintergrund“ 1.8).

Um das Änderungsverhalten skalarer Funktionen mehrerer Veränderlicher  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x})$  zu untersuchen, lässt man alle Veränderlichen bis auf  $x_i$  konstant und betrachtet für festes  $\mathbf{x}$  das Änderungsverhalten der durch  $g_i(t) := g(\mathbf{x} + t e_i)$  auf  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definierten Funktion. Dies führt auf die *partielle Ableitung*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(\mathbf{x} + \varepsilon e_i) - g(\mathbf{x})}{\varepsilon}.$$

Die partielle Ableitung  $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$  ist also die Ableitung von  $g$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  in Richtung des Vektors  $e_i$ . Statt  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  wird oft auch nur kurz  $\partial_i$  notiert.

**Differenzialoperatoren** Ein Differenzialoperator ist eine Abbildung, die einer Funktion eine (andere) Funktion zuordnet, die (partielle) Ableitung(en) der ursprünglichen Funktion enthält. Zum Beispiel ist die gewöhnliche Ableitung  $\frac{d}{dt}$  ein Differenzialoperator, der einer differenzierbaren Funktion  $f$  ihre Ableitung  $\frac{d}{dt}f = f'$  zuordnet.

**Gradient** Eine Funktion  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (der Gradient wird hier nur für  $\mathbb{R}^3$  eingeführt; die Definition lässt sich aber problemlos auf  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern) wird als *Skalarfeld* bezeichnet. Den Differenzialoperator, der einem Feld den Vektor der partiellen Ableitungen des Feldes zuordnet, bezeichnet man als *Gradienten* von  $f$ :

$$\mathbf{grad}f := \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix}.$$

In diesem Buch wird der Gradient als Spaltenvektor definiert. Vereinzelt wird der Gradient auch als Zeilenvektor eingeführt. Funktionen von  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  werden als *Vektorfelder* bezeichnet. Der Gradient ist also ein Vektorfeld. Er zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs des Skalarfeldes. Insbesondere steht der Gradient senkrecht auf Flächen, auf denen das Skalarfeld konstant ist.

Beispielsweise kann man die totale Zeitableitung einer Funktion  $f(\mathbf{x}(t))$  mithilfe der Kettenregel als  $df/dt = (\nabla f) \cdot \dot{\mathbf{x}}$  schreiben.

**Divergenz** Unter der *Divergenz* eines Vektorfeldes  $\mathbf{g}$  versteht man den Differenzialoperator, der dem Vektorfeld die Summe der  $i$ -ten partiellen Ableitung der  $i$ -ten Komponente, also einen Skalar, zuordnet:

$$\operatorname{div} \mathbf{g} := \operatorname{div} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \partial_i g_i.$$

**Rotation** Unter der *Rotation* eines Vektorfeldes versteht man den Differenzialoperator

$$\operatorname{rot} \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 \\ \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3 \\ \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \end{pmatrix}.$$

Wie bei der Ableitung auch, bezeichnet man mit Gradient, Divergenz und Rotation nicht nur den Differenzialoperator selbst, sondern auch das Ergebnis seiner Anwendung.

**Symbolische Schreibweise** In der Physik ist es üblich, Gradient, Divergenz und Rotation mithilfe des *Nabla-Operators* auszudrücken. Dieser ist zunächst formal nur der Vektor der Symbole  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ , also

$$\nabla := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}.$$

Beim formalen „Rechnen“ mit dem Nabla-Operator fasst man Produkte des Symbols  $\partial_i$  mit einer Funktion  $f$  als Anwendung von  $\partial_i$  auf  $f$  auf. Dann lässt sich der Gradient von  $f$  formal als skalare Multiplikation zwischen  $\nabla$  und  $f$  schreiben, die Divergenz von  $\mathbf{g}$  als Skalarprodukt zwischen  $\nabla$  und  $\mathbf{g}$  und die Rotation von  $\mathbf{g}$  als Vektorprodukt zwischen  $\nabla$  und  $\mathbf{g}$ , also

$$\mathbf{grad}f = \nabla f, \quad \operatorname{div} \mathbf{g} = \nabla \cdot \mathbf{g}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{g} = \nabla \times \mathbf{g}.$$

**Rechenregeln** Sind  $f$  bzw.  $g$  Skalarfelder und  $\mathbf{v}$  ein Vektorfeld, so gilt

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= f(\nabla g) + g(\nabla f), \\ \nabla \cdot (f\mathbf{v}) &= f(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\nabla f), \\ \nabla \times (f\mathbf{v}) &= (\nabla f) \times \mathbf{v} + f(\nabla \times \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Diese sind leicht in Komponentenschreibweise nachzurechnen.

Es ist leicht zu sehen, dass die Kraft in (1.142) senkrecht auf *Äquipotenzialflächen* (Flächen mit konstantem Potenzial,  $V = \text{const}$ ) steht. Dazu betrachte man eine Verschiebung  $\mathbf{dx}$ , die innerhalb einer Äquipotenzialfläche liegt:

$$0 = dV = \nabla V \cdot \mathbf{dx} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}. \quad (1.144)$$

An dieser Stelle bietet es sich auch an, die *Richtungsableitung* des Feldes  $V(\mathbf{x})$  entlang des Vektors  $\hat{\mathbf{n}}$  zu definieren:

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} V = \frac{\partial V}{\partial \hat{\mathbf{n}}} := \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla V. \quad (1.145)$$

Sie gibt die Steigung von  $V$  entlang des Vektors  $\hat{\mathbf{n}}$  an. Liegt  $\hat{\mathbf{n}}$  innerhalb einer Äquipotenzialfläche, d. h. ist

$$V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x} + \epsilon \hat{\mathbf{n}}) = 0 \quad (1.146)$$

für ein beliebiges infinitesimales  $\epsilon$ , dann verschwindet die Richtungsableitung  $\partial_{\hat{\mathbf{n}}} V$ .

Sind alle Kräfte, die auf die Punktmasse  $m$  wirken, konservativ, gilt der Energieerhaltungssatz:

$$E = T + V = \text{const.} \quad (1.147)$$

### Energieerhaltung

Die Energie eines mechanischen Systems ist erhalten, wenn alle Kräfte konservativ sind.

Treten zusätzlich nichtkonservative (also dissipative) Kräfte  $\mathbf{F}_d$  auf, so lautet die Energiegleichung

$$\dot{E} = \mathbf{F}_d \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (1.148)$$

Beispiele für nichtkonservative Kräfte sind Reibungskräfte, die von der Geschwindigkeit abhängen. Geschwindigkeitsabhängige Kräfte sind im Allgemeinen dissipativ. Dies haben wir bereits in Abschn. 1.4 gesehen. Es gibt allerdings auch, wie bereits vorher angedeutet, Ausnahmen: Die *geschwindigkeitsabhängige* Lorentz-Kraft ist ebenfalls konservativ (erhält also die Energie). Es gibt jedoch auch Kräfte der Form  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , die nichtkonservativ sind, wie in Aufgabe 1.5 gezeigt wird.

## Wichtige Potenzialkräfte

Die wichtigsten Potenzialkräfte in der Mechanik sind die radialsymmetrischen *Zentralkräfte*,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = F(r) \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (1.149)$$

die nur vom Abstand  $r$  abhängen und stets entlang der Richtung von  $\mathbf{r}$  wirken. Diese Kräfte können anziehend ( $F(r) < 0$ ) oder abstoßend ( $F(r) > 0$ ) sein. Das Potenzial lautet

$$V(r) - V(r_0) = - \int_{r_0}^r F(r') dr', \quad (1.150)$$

wobei  $r_0$  und somit  $V(r_0)$  beliebig ist.

Es ist zu beachten, dass es auch nichtradialsymmetrische Zentralkräfte gibt, die zwar entlang des Vektors  $\mathbf{r}$  wirken, aber nicht nur vom Abstand  $r$  abhängen. Im Gegensatz zu den radialsymmetrischen Zentralkräften in (1.149) können solche Kräfte nichtkonservativ sein. Eine wichtige Eigenschaft aller Zentralkräfte ist, dass sie den Drehimpuls  $\mathbf{L}$  erhalten, da  $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$  und somit  $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  gilt.

### Frage 19

Man zeige mithilfe von (1.142), dass (1.150) auf (1.149) führt. Dabei kann man ausnutzen, dass  $\nabla r = \mathbf{r}/r$  ist (Aufgabe 1.5).

Der dreidimensionale harmonische Oszillator ist ein Spezialfall einer radialsymmetrischen Zentralkraft. Er besitzt das Potenzial

$$V(r) = \frac{k}{2} r^2, \quad (1.151)$$

wie wir es bereits in (1.93) für den eindimensionalen Fall gesehen haben. Die Kraft in drei Dimensionen berechnet sich zu

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r} = -kr \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (1.152)$$

Die Gravitationskraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \quad (1.153)$$

ist ebenfalls eine radialsymmetrische Zentralkraft.

### Frage 20

Berechnen Sie das Gravitationspotenzial aus der Gravitationskraft. Nutzen Sie dazu (1.150).

Sowohl der harmonische Oszillator als auch die Gravitation sind Spezialfälle der *Potenz-Potenziale*,

$$V(r) = \alpha r^\beta, \quad (1.154)$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  reelle Zahlen sind ( $\beta = 2$  für das Oszillatopotentzial und  $\beta = -1$  für das Gravitationspotenzial).

## 1.8 Mathematischer Hintergrund: Taylor'scher Satz

Es ist oftmals sinnvoll, differenzierbare Funktionen als Potenzreihe oder als Polynom mit einem Fehlerterm zu schreiben. Dafür gibt es die sogenannte Taylor-Entwicklung.

**Taylor-Polynome** Sei  $I$  ein Intervall reeller Zahlen,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine mindestens  $(n+1)$ -mal differenzierbare Funktion und  $a \in I$ . Das  $r$ -te ( $1 \leq r \leq n$ ) Taylor-Polynom  $T_r(x)$  ist das Polynom vom Grad  $r$ , das mit  $f$  in  $a$  im Funktionswert und den ersten  $r$ -Ableitungen übereinstimmt. Durch diese Forderungen ist das Polynom  $T_r(x)$  eindeutig bestimmt.

Wie man leicht nachprüft, sind die Taylor-Polynome gegeben durch

$$T_0(x) := f(a)$$

$$T_1(x) := f(a) + f'(a)(x - a)$$

 $\vdots$ 

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Dabei bezeichnet  $k! := k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$  die *Fakultät* von  $k$ . Ergänzend ist  $0! := 1$  definiert. Das erste Taylor-Polynom  $T_1(x)$  ist genau die Tangente an  $f$  in  $a$ .

**Restglied** Wie gut lässt sich  $f$  durch ein Taylor-Polynom annähern? Für das Restglied  $R_{n+1}(x) := f(x) - T_n(x)$  gilt

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \quad (1)$$

Dies ist die Aussage des *Taylor'schen Satzes*, den man über vollständige Induktion ausgehend vom Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung beweisen kann.

**Restgliedabschätzung** Wenn die  $(n+1)$ -te Ableitung von  $f$  beschränkt ist in einer Umgebung  $U$  um  $a$ , dann folgt aus (1) die Abschätzung

$$|R_{n+1}(x)| \leq C |(x-a)^{n+1}| \quad \text{für } x \in U \quad (2)$$

mit einer geeigneten Konstanten  $C > 0$ .

**Landau-Notation** Für eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $a \in I$  versteht man unter  $O(f)$  die Menge aller Funktionen  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , durch die  $f$  lokal in einer Umgebung  $U_g$  um  $a$  beschränkt werden kann. Dies sind also die Funktionen  $g$ , zu denen es eine Umgebung  $U_g(a)$  um  $a$  gibt, sodass

$$|f(x)| \leq C |g(x)| \quad \text{für alle } x \in U_g(a)$$

gilt mit einer geeigneten Konstanten  $C \in \mathbb{R}$ . Bei der Schreibweise  $O(g)$  wird, etwas unsauber, auf die Angabe von  $a$  verzichtet, da sich  $a$  immer aus dem Zusammenhang ergibt. Im Falle  $x \rightarrow a$  und  $f \in O((x-a)^k)$  spricht man davon, dass

$f$  für  $x \rightarrow a$  mindestens mit  $k$ -ter Ordnung abfällt. Gl. (2) besagt also, dass das Restglied  $R_{n+1}(x)$  für  $x \rightarrow a$  mindestens mit  $(n+1)$ -ter Ordnung abfällt.

Die sehr gebräuchliche Schreibweise

$$f(x) = T_n(x) + O(x^{n+1}) \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

ist so zu lesen, dass  $O(x^{n+1})$  eine Funktion ist (die sich aus der Gleichung ergibt), die in der Menge  $O(x^{n+1})$  enthalten ist. Die  $O$ -Notation kann man in analoger Weise auch für  $x \rightarrow \infty$  einführen. Dann bedeutet  $f \in O(g)$ , dass  $f$  höchstens so stark ansteigt wie  $g$ .

**Beispiele** Verwendet man die Taylor-Polynome als Approximation, so erhält man für  $x \rightarrow 0$  folgende Näherungen:

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{x}{2} + O(x^2),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4),$$

$$\sin(x) = x + O(x^3).$$

**Taylor-Reihen** Wenn  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar ist, konvergiert dann die Folge der Taylor-Polynome  $T_n(x)$ , also die *Taylor-Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k ?$$

Wenn ja, konvergiert die Reihe nur für feste  $x$  in einer Umgebung  $U$  von  $a$  oder sogar gleichmäßig in  $U$  (d. h. bezüglich der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$ )? Beides muss im Allgemeinen verneint werden. Selbst wenn die Taylor-Reihe einer Funktion konvergiert, konvergiert diese nicht zwangsläufig gegen die Funktion. Notwendig und hinreichend ist, dass  $R_k(x)$  für  $k \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

**Taylor-Entwicklung für Funktionen**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Existieren die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , so gilt für  $x \rightarrow \mathbf{0}$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = (\mathbf{grad}f(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{x} + O(|\mathbf{x}|^2),$$

wobei  $O$  offensichtlich auf Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  verallgemeinert ist. Existieren auch die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von  $f$ , dann gilt für  $x \rightarrow \mathbf{0}$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = (\mathbf{grad}f(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot (H_f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^3),$$

wobei die *Hesse-Matrix*  $H_f$  die  $(n \times n)$ -Matrix der zweiten partiellen Ableitungen ist, d. h.

$$(H_f)_{ij} := \partial_i \partial_j f.$$

## Die Wegunabhängigkeit der Arbeit

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften der wichtigen konservativen Kraftfelder genauer untersucht. Wie bereits gezeigt, gilt für die Bewegung in einem konservativen Kraftfeld die Energieerhaltung.

Wir haben in Abb. 1.14 gesehen, dass sich im dreidimensionalen Raum prinzipiell verschiedene Wege zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  wählen lassen. Bewegt man sich dabei durch ein Kraftfeld, wird Arbeit verrichtet. Es stellt sich die Frage, ob es Kraftfelder gibt, für welche die verrichtete Arbeit nicht davon abhängt, auf welchem Weg man sich von Punkt  $A$  zu Punkt  $B$  begibt. Es ist zu erwarten, dass für solche Systeme eine physikalische Beschreibung einfacher ist, da der gewählte Weg nicht definiert werden muss.

Wir nehmen an, dass das Kurvenintegral

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}' \quad (1.155)$$

des Vektorfeldes  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  wegunabhängig ist. Der Startpunkt  $\mathbf{x}_0$  wird nun festgehalten. Verschiebt man dann die obere Integrationsgrenze um ein kleines Stück  $d\mathbf{x}$ , so gilt

$$\Phi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) = \int_x^{x+d\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}'. \quad (1.156)$$

Für eine infinitesimale Verschiebung kann man dies durch

$$\Phi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (1.157)$$

annähern (siehe „Mathematischer Hintergrund“ 1.8). Somit muss  $\mathbf{F}$  der Gradient des skalaren Feldes  $\Phi$  sein:  $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ . Ist umgekehrt  $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ , so ist das Wegintegral wegunabhängig, denn

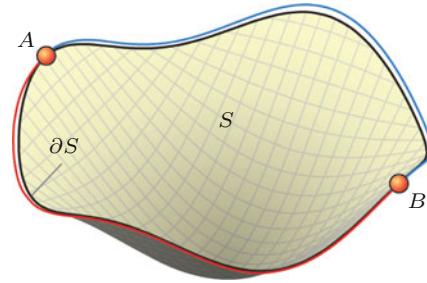
$$\int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \nabla\Phi \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Phi(\mathbf{x}_a)}^{\Phi(\mathbf{x}_b)} d\Phi = \Phi(\mathbf{x}_b) - \Phi(\mathbf{x}_a) \quad (1.158)$$

hängt nur noch von den Endpunkten der Kurve ab.

### Wegunabhängigkeit und Gradientenfeld

Ein Kurvenintegral über ein Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ist genau dann wegunabhängig, wenn es ein Skalarfeld  $\Phi$  gibt, dessen Gradient  $\mathbf{F}$  ist, d. h.  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x})$ .

Es stellt sich sofort die Frage, nach welchem Kriterium man entscheiden kann, ob  $\mathbf{F}$  ein Gradientenfeld ist. Hier bietet sich



**Abb. 1.15** Eine (gekrümmte) zweidimensionale Fläche  $S$  im dreidimensionalen Raum wird von einer Kurve  $\partial S$  begrenzt. Es gibt zwei Möglichkeiten, entlang  $\partial S$  von einem Punkt  $A$  zu einem anderen Punkt  $B$  zu gelangen (rote und blaue Pfade). Beide Pfade zusammen bilden eine geschlossene Kurve

die *Rotation*  $\nabla \times \mathbf{F}$  des Feldes  $\mathbf{F}$  an (siehe „Mathematischer Hintergrund“ 1.7). Da die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet,  $\nabla \times \nabla\Phi = \mathbf{0}$ , gilt offenbar, dass  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  ein notwendiges Kriterium ist. Aus  $\mathbf{F} = \nabla\Phi$  folgt daher, dass  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Wir werden im Folgenden untersuchen, unter welchen Umständen die Umkehrung gilt, d. h. wann  $\mathbf{F}$  ein Gradientenfeld ist, falls  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  gilt.

### Frage 21

Man mache sich klar, dass die Rotation eines Gradientenfeldes tatsächlich verschwindet. Hierzu ist es sinnvoll, das Kreuzprodukt  $\nabla \times \nabla\Phi$  durch das Levi-Civita-Symbol  $\varepsilon_{ijk}$  darzustellen. Bei der Rechnung geht man davon aus, dass Ableitungen vertauschbar sind, z. B.  $\partial_i \partial_j \Phi(\mathbf{x}) = \partial_j \partial_i \Phi(\mathbf{x})$ .

## Der Satz von Stokes

Der *Satz von Stokes* erlaubt es, ein geschlossenes Wegintegral über ein Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  durch das Flächenintegral über die Rotation von  $\mathbf{F}$  auszudrücken:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.159)$$

Hier ist  $S$  eine Fläche, die von einer Randkurve  $\partial S$  entlang  $d\mathbf{s}$  begrenzt wird (Abb. 1.15). Man nennt

$$\Gamma := \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.160)$$

auch die *Zirkulation* oder *Wirbelstärke* des Vektorfeldes  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  längs des geschlossenen Weges  $\partial S$ . Das infinitesimale Flächen-element  $d\mathbf{S}$  erfüllt

$$d\mathbf{S} = dS \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.161)$$

## 1.9 Mathematischer Hintergrund: Der Satz von Stokes

Der Satz von Stokes ist wohl der Höhepunkt in jedem Analysiszyklus. Man findet ihn in der Literatur in den verschiedensten Formen, wobei wir uns hier auf die physikalische Interpretation konzentrieren wollen. In der tiefsten und allgemeinen Form sagt der Satz von Stokes etwas über die Integration von Differenzialformen und verallgemeinert so den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der aus der Schule schon bekannt ist.

Wichtige Spezialfälle sind der klassische Satz von Stokes, der Gauß'sche Integralsatz und der Satz von Green, die alle in der Vektoranalysis behandelt werden.

**Der klassische Satz von Stokes** Eine Version (meistens wird diese so in einer Physikvorlesung gegeben) des Satzes von Stokes lautet wie folgt:

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche und  $\partial S$  ihre Randkurve (Abb. 1.15). Weiter sei das Vektorfeld  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S},$$

wobei die Randkurve  $\partial S$  die von  $S$  induzierte Orientierung trage,  $d\mathbf{s}$  das vektorielle Linienelement des Randes  $\partial S$  und  $d\mathbf{S}$  das vektorielle Flächenelement von  $S$  bezeichnet. Der Nutzen liegt vor allem darin, dass im Allgemeinen das Kurvenintegral einfacher als das Flächenintegral zu berechnen ist.

**Physikalische Interpretation** Stellen wir uns vor, dass  $\mathbf{F}$  das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung ist. Wie oben bemerkt, stellt  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  die tangentiale Komponente von  $\mathbf{F}$  längs der Randkurve  $\partial S$  dar. Man kann daher das Integral darüber als eine Größe interpretieren, die angibt, wie sich die Vektoren von  $\mathbf{F}$  entlang  $\partial S$  drehen. Wir unterscheiden dazu drei Fälle (Abb. 1.16), wenn wir die Randkurve  $\partial S$  im mathematisch positiven Sinne durchlaufen:

wobei  $dS$  der Betrag des Flächenelements und  $\hat{\mathbf{n}}$  ein Einheitsnormalenvektor ist, der lokal senkrecht auf der Fläche steht. Das Vorzeichen von  $\hat{\mathbf{n}}$  wird über die Rechte-Hand-Regel bestimmt:

Der Integrationspfad läuft im mathematisch positiven Sinn („gegen den Uhrzeigersinn“) um den Normalenvektor. Für weitere Details wird auf den „Mathematischen Hintergrund“ 1.9 verwiesen.

1. Es gilt  $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} > 0$ , wenn die Vektoren von  $\mathbf{F}$  in Tangentialrichtung zu  $\partial S$  zeigen. Physikalisch bedeutet dies, dass sich die Flüssigkeit im mathematisch positiven Sinne dreht.
2. Wir haben  $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} < 0$ , falls die Vektoren von  $\mathbf{F}$  entgegen der Richtung der Tangentialvektoren des Randes zeigen.
3. Es gilt natürlich  $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ , wenn  $\mathbf{F}$  senkrecht auf dem Rand  $\partial S$  steht. Physikalisch bedeutet dies, dass die Flüssigkeit nicht entlang des Randes rotiert.

Insgesamt stellt das Integral  $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  damit die Gesamtrotation der Flüssigkeit im mathematischen positiven Sinne entlang  $\partial S$  dar. Daher kann dieses Integral auch als Zirkulation bzw. Wirbelstärke der Flüssigkeit gedeutet werden. Der Satz von Stokes sagt uns nun, dass die Wirbelstärke von  $\mathbf{F}$  entlang der Randkurve  $\partial S$  gerade gleich dem Integral der Normalkomponente der Rotation  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  über der Fläche  $S$  ist.

**Weitere Anwendungen** Eine weitere Anwendung des allgemeinen Stokes'schen Satzes ist der sogenannte *Integralsatz von Gauß*, der vor allem in der Elektrodynamik eine außerordentlich wichtige Rolle spielt und dort noch wesentlich ausführlicher besprochen wird. Er soll hier bereits der Vollständigkeit halber notiert werden. Sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  ein Volumen und  $\partial V$  die geschlossene Fläche, die  $V$  berandet. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV,$$

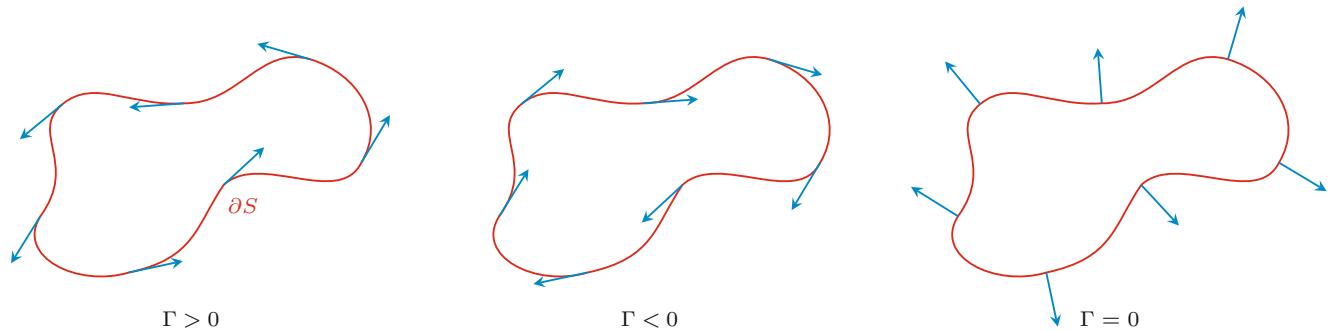
wobei die Randfläche  $\partial V$  nach außen orientiert ist (die Außenseite von  $\partial V$  gilt als positiv).

### Literatur

- Arens, T., et al.: Mathematik. 2. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag (2012)

Aus dem Satz von Stokes folgt sofort die hinreichende Bedingung, die uns im vorherigen Abschnitt noch gefehlt hatte: Gilt  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , so ist  $\mathbf{F} = \nabla \Phi$ . Dies kann man folgendermaßen sehen: Verschwindet die Rotation von  $\mathbf{F}$ , so ist gemäß (1.159)

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (1.162)$$



**Abb. 1.16** Das Vorzeichen der Zirkulation  $\Gamma = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  hängt von der Richtung des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  (blau) auf dem Rand  $\partial S$  (rot) ab. Die Randkurve wird entlang  $d\mathbf{s}$  im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen

und das Wegintegral zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  ist unabhängig vom gewählten Weg. Daher muss  $\mathbf{F}$  ein Gradientenfeld sein.

### Frage 22

Man mache sich klar, dass (1.162) zur Folge hat, dass das Wegintegral vom gewählten Weg unabhängig ist. Dazu zerlegt man wie in Abb. 1.15 ein beliebiges geschlossenes Wegintegral in zwei Integrale, eins von Punkt  $A$  nach Punkt  $B$ , das andere auf einem anderen Weg wieder zurück.

Die hinreichende Bedingung  $\nabla \times \mathbf{F} = 0 \implies \mathbf{F} = \nabla \Phi$  gilt nur dann, wenn  $\mathbf{F}(x)$  überall längs des Integrationsweges definiert ist und keine Löcher hat, wie in Abb. 1.17 dargestellt. Mathematisch spricht man von einem *einfach zusammenhängenden Gebiet*: Ein Gebiet  $G$  heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in  $G$  stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, ohne das Gebiet zu verlassen.

### Zusammenhang zwischen Wirbelfreiheit und Gradient

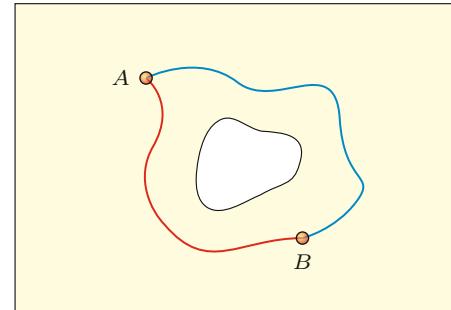
Felder  $\mathbf{F}(x)$ , die auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  definiert sind, haben genau dann ein Potenzial  $V(x)$ , wenn sie in  $G$  wirbelfrei (rotationsfrei) sind:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{F} = -\nabla V. \quad (1.163)$$

In Aufgabe 1.6 wird ein konkretes Beispiel gerechnet.

### Die Berechnung des Potenzials aus einer konservativen Kraft

Während es verhältnismäßig einfach ist, eine Kraft  $\mathbf{F}(x)$  mit (1.142) aus dem zugehörigen Potenzial  $V(x)$  zu berechnen, ist



**Abb. 1.17** Gibt es ein „Loch“ in einem Vektorfeld  $\mathbf{F}(x)$ , so ist das Definitionsbereich von  $\mathbf{F} : x \mapsto \mathbf{F}(x)$  nicht einfach zusammenhängend. Die beiden dargestellten Wege von Punkt  $A$  zu Punkt  $B$  müssen energetisch nicht gleichwertig sein, da sich beide Wege nicht kontinuierlich ineinander überführen lassen, ohne dabei durch das Loch zu laufen

die Umkehrung, also die Integration, anspruchsvoller. Zunächst schreibt man

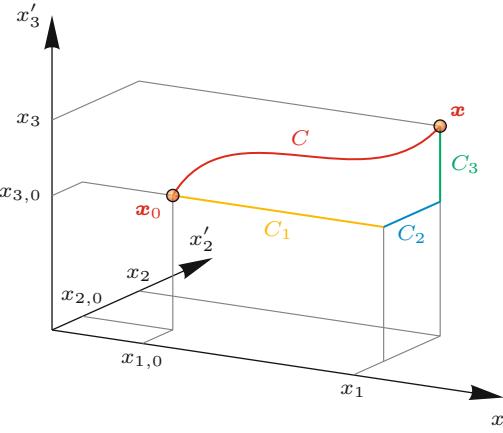
$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= -\nabla V(x) \\ \implies V(x) - V(x_0) &= - \int_{x_0}^x \mathbf{F}(x') \cdot dx'. \end{aligned} \quad (1.164)$$

Der Bezugspunkt  $x_0$  ist beliebig, da der Term  $\nabla V(x_0)$  verschwindet und die Kraft nicht beeinflusst. Das Potenzial  $V$  und die Energie  $E$  sind damit bis auf eine beliebige additive Konstante festgelegt.

Wir haben gesehen, dass der Integrationsweg von  $x_0$  nach  $x$  keine Rolle spielt, wenn  $\mathbf{F}$  konservativ ist. Daher lässt sich das Integral in (1.164) lösen, indem ein Weg  $C$  gewählt wird, für den die Berechnung möglichst einfach wird. Dazu wählt man eine geeignete Parametrisierung  $x(s)$  und schreibt

$$V(x) - V(x_0) = - \int_{s_0}^s \mathbf{F}(x') \cdot \frac{dx'}{ds} ds, \quad (1.165)$$

wobei  $x_0 = x(s_0)$  gilt. Dies wird in Aufgabe 1.6 vertieft.



**Abb. 1.18** Um das Potenzial  $V(\mathbf{x})$  zu einer gegebenen konservativen Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  zu berechnen, kann man einen beliebigen Integrationspfad von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}$  verfolgen. In diesem Fall wird zunächst entlang der  $x'_1$ -Achse integriert (Abschnitt  $C_1$ ), im Anschluss entlang der  $x'_2$ -Achse und abschließend entlang der  $x'_3$ -Achse (Abschnitt  $C_3$ )

### Potenzial aus Kraft

Ein einfaches Beispiel ist eine abschnittsweise definierte Parametrisierung, bei der zunächst ein Weg entlang der  $x_1$ -Achse, daraufhin ein Weg entlang der  $x_2$ -Achse und abschließend ein Weg entlang der  $x_3$ -Achse gewählt wird. Dies ist in Abb. 1.18 dargestellt. In diesem Fall besteht  $C$  aus den drei miteinander verbundenen Abschnitten  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  mit

$$\frac{d\mathbf{x}'}{ds} = \begin{cases} (1, 0, 0)^\top & \text{auf } C_1 \\ (0, 1, 0)^\top & \text{auf } C_2 \\ (0, 0, 1)^\top & \text{auf } C_3 \end{cases}. \quad (1.166)$$

Gl. (1.165) wird somit zu

$$V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}_0) = - \int_{x_{1,0}}^{x_1} F_1(x'_1, x_{2,0}, x_{3,0}) dx'_1 \quad (1.167)$$

$$-\int_{x_{2,0}}^{x_2} F_2(x_1, x'_2, x_{3,0}) dx'_2$$

$$-\int_{x_{3,0}}^{x_3} F_3(x_1, x_2, x'_3) dx'_3.$$

Da  $\mathbf{F}$  voraussetzungsgemäß eine konservative Kraft ist, kann auch zunächst entlang der  $x_2$ - oder der  $x_3$ -Achse integriert werden. Es kann aber auch ein vollständig anderer Weg gewählt werden, etwa entlang eines Kreisbogens oder einer Geraden, die direkt von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}$  führt.

Konkret soll dies für das einfache Beispiel  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} = C(x_1, x_2, x_3)^\top$  mit einer Konstanten  $C$  gezeigt werden. Wir integrieren von einem Punkt  $(a_1, a_2, a_3)^\top$  zu  $(b_1, b_2, b_3)^\top$  und sehen

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})$$

$$= -C \int_{a_1}^{b_1} x'_1 dx'_1 - C \int_{a_2}^{b_2} x'_2 dx'_2 - C \int_{a_3}^{b_3} x'_3 dx'_3 \quad (1.168)$$

$$= \frac{C}{2} (a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + a_3^2 - b_3^2)$$

$$= C \frac{\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2}{2}.$$

Für die spezielle Wahl  $\mathbf{b} = \mathbf{x}$  und  $\mathbf{a} = (0, 0, 0)^\top$  bekommt man also

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{C}{2} \mathbf{x}^2, \quad (1.169)$$

was wieder direkt auf

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} \quad (1.170)$$

führt. ◀

## Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- leichte Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
- mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
- anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständen auch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

### 1.1 •• Vektorrechnung

Das Rechnen mit Vektoren, Skalar- und Vektorprodukten soll hier geübt werden.

- (a) Wir betrachten  $n$  Vektoren  $v_i$  aus einem Vektorraum  $V$ . Man kann diese Vektoren verknüpfen, um die Linearkombination

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad (1.171)$$

zu erhalten. Hier sind die  $n$  Größen  $\lambda_i$  Skalare. Die Menge aller dieser darstellbaren Vektoren  $v$  bildet einen Untervektorraum  $U$  von  $V$ . Man bezeichnet  $U$  als den von den  $v_i$  aufgespannten Untervektorraum  $U = \text{span}(v_i)$ . Man nennt die Vektoren  $v_i$  linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad (1.172)$$

nur dann erfüllt werden kann, wenn alle Skalare  $\lambda_i$  verschwinden:  $\lambda_i = 0$ . In diesem Fall lässt sich ein Vektor  $v$  als eindeutige Linearkombination der  $v_i$  darstellen, d. h., die  $\lambda_i$  sind für einen gegebenen Vektor  $v$  eindeutig.

Überprüfen Sie, welche der folgenden Sätze von Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  linear unabhängig sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (1.173)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (1.174)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad (1.175)$$

Was passiert, wenn im dritten Beispiel der dritte Vektor durch  $v_3 = (2, -4, -4)^\top$  ersetzt wird?

- (b) Skalarprodukte können wesentlich allgemeiner definiert werden als das innere Produkt  $x \cdot y = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$  für Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  bezüglich einer Orthonormalbasis. Man betrachte beispielsweise den Vektorraum der Polynome vom Grad  $N$  (d. h., die Polynome dürfen höchstens Terme der Ordnung

$x^N$  enthalten) auf dem Intervall  $[-1, 1]$ . Das Skalarprodukt sei durch

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx \quad (1.176)$$

definiert. Welche dieser drei Polynome sind im Sinne dieses Skalarprodukts zueinander orthogonal?

$$p(x) = x, \quad q(x) = x^2 - 2, \quad r(x) = x^3 + x. \quad (1.177)$$

Wie könnte man die Polynome normieren?

- (c) Häufig benötigt man das *Spatprodukt*, das auch als *Mehrfachprodukt* bezeichnet wird:

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \quad (1.178)$$

Zeigen Sie, dass es verschwindet, wenn einer der Vektoren als Linearkombination der beiden anderen geschrieben werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn alle drei Vektoren in einer Ebene liegen. Die drei Vektoren spannen dann einen Spat mit Volumen null auf.

- (d) Zeigen Sie die *Lagrange-Identität*

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c). \quad (1.179)$$

Verwenden Sie dazu die Levi-Civita- und Kronecker-Symbole.

- 1.2 •• Schiefer Wurf** Ein Speerwerfer trainiert für einen Wettkampf. Er überlegt sich, dass es einen optimalen Abwurfwinkel geben muss, um die Reichweite zu maximieren. Dies ist offensichtlich: Wird der Speer waagerecht geworfen, fällt er nach kurzer Flugstrecke auf den Boden. Wirft man ihn fast senkrecht nach oben, ist das Ergebnis ebenfalls enttäuschend. Man bestimme die allgemeine Bahnkurve des reibungsfreien schiefen Wurfes in der  $x$ - $z$ -Ebene, wobei die Gravitation in negative  $z$ -Richtung wirkt. Die Anfangsbedingungen für den Ort und die Geschwindigkeit sind  $x(0) = x_0$ ,  $z(0) = z_0$  und  $v_x(0) = v_{x,0}$ ,  $v_z(0) = v_{z,0}$ .

- (a) Man zeige, dass es sich um eine Parabelbahn (Wurfparabel) handelt. Wie hoch liegt der Scheitelpunkt? Wann wird er erreicht?

- (b) Der Wurfwinkel zwischen Anfangsgeschwindigkeitsvektor und dem Boden ( $x$ -Achse) ist  $\alpha$ . Stellen Sie zunächst jeweils einen Zusammenhang zwischen dem Betrag der Anfangsgeschwindigkeit,  $v_0$ , dem Wurfinkel  $\alpha$  und den Projektionen der Anfangsgeschwindigkeit auf die  $x$ - und  $z$ -Achsen,  $v_{x,0}$  und  $v_{z,0}$ , auf.
- (c) Leiten Sie eine Gleichung ab, die die Reichweite des Wurfs als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und des Wurfwinkels  $\alpha$  beschreibt. Gehen Sie dabei davon aus, dass sowohl die Abwurft- als auch die Endhöhe  $z_0$  sind. Für welchen Wurfwinkel wird die Reichweite bei festem  $v_0$  maximal?
- (d) Kann ein Fußballtorwart einen Fußball direkt ins gegnerische Tor schießen, wenn der Ball mit  $v_0 = 100 \text{ km h}^{-1}$  aus dem eigenen Torraum abgeschlagen wird? Ein Fußballfeld ist etwa 100 m lang. Reibungseffekte sollen auch hier vernachlässigt werden.

**1.3 •• Schiefer Wurf mit Stokes'scher Reibung** Betrachten Sie den schießen Wurf mit Stokes'scher Reibung (Reibungskoeffizient  $K$ ). Die Bewegung erfolge in der  $x$ - $z$ -Ebene, und die homogene Gravitationskraft zeige in negative  $z$ -Richtung. Die Anfangsbedingungen für den Ort und die Geschwindigkeit sind  $x(0) = x_0$ ,  $z(0) = z_0$  und  $v_x(0) = v_{x,0}$ ,  $v_z(0) = v_{z,0}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen entkoppelt sind.
- (b) Schreiben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für  $x$  und  $z$  auf. Orientieren Sie sich dabei an den Schritten, die auf (1.42) geführt haben. Für das weitere Vorgehen bietet es sich an, die Endgeschwindigkeit  $v_E$  nicht als Abkürzung einzuführen.
- (c) Berechnen Sie die allgemeine Bahnkurve  $z(x)$ . Dazu muss die Zeit aus der Lösung  $z(t)$  mithilfe von  $x(t)$  eliminiert werden.
- (d) Zeigen Sie, dass der Grenzfall  $K = 0$  auf die Lösung für die Bahnkurve ohne Reibung aus Aufgabe 1.2 führt. Achtung: Es ist nicht möglich, einfach  $K = 0$  zu setzen. Stattdessen muss der Logarithmus in  $z(x)$  für kleine  $K$  entwickelt werden. Danach kann der Grenzfall  $K \rightarrow 0$  durchgeführt werden. Nutzen Sie aus, dass  $\ln(1 + x) \approx x - x^2/2$  gilt. Warum muss an dieser Stelle die zweite Ordnung der Taylor-Entwicklung ebenfalls mitgenommen werden?

**1.4 •• Lorentz-Kraft** Auf ein geladenes Teilchen (elektrische Ladung  $q$ ) wirkt im elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  und magnetischen Feld  $\mathbf{B}$  die Lorentz-Kraft (in SI-Einheiten)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.180)$$

Es soll die Bewegung in einem reinen Magnetfeld, das homogen und zeitunabhängig ist, untersucht werden. Hierzu wird das Koordinatensystem so gelegt, dass

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z \quad (1.181)$$

gilt. Das elektrische Feld wird vernachlässigt:  $\mathbf{E} = 0$ .

- (a) Zeigen Sie ohne weitere Rechnungen, dass der Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens konstant ist und dass keine Arbeit am Teilchen verrichtet wird. Die Energie ist somit erhalten und die Kraft konservativ. Greifen Sie dazu auf die Ergebnisse zurück, die in Abschn. 1.5 und 1.6 erarbeitet wurden.
- (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für das Teilchen auf. Die Anfangsbedingungen lauten  $\mathbf{x}(t = 0) = 0$  und  $\dot{\mathbf{x}}(t = 0) = (0, v_{y,0}, v_{z,0})^\top$ . Die Lösung für die Bewegung entlang der  $z$ -Achse kann direkt hingeschrieben werden. Wie lautet sie?
- (c) Wie lauten die Lösungen der Bewegungsgleichungen entlang der  $x$ - und  $y$ -Achsen? Um die beiden gekoppelten Gleichungen zu entkoppeln, integrieren Sie zunächst eine der beiden Bewegungsgleichungen und setzen Sie das Ergebnis in die andere ein.
- (d) Wie lauten der Tangential- und der Hauptnormalenvektor der Bahnkurve? Bestimmen Sie den Krümmungsradius.

**1.5 •• Differenzialoperatoren** In dieser Aufgabe wird die Anwendung der Differenzialoperatoren vertieft.

- (a) Berechnen Sie die Rotation einer allgemeinen radialsymmetrischen Zentralkraft:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.182)$$

Verwenden Sie dazu  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . Es bietet sich an, die Rotation mithilfe des Levi-Civita-Symbols in Indexschreibweise zu bestimmen.

- (b) Wie lautet die Rotation der Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -x_2/\varrho^2 \\ x_1/\varrho^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.183)$$

mit  $\varrho^2 = x_1^2 + x_2^2$ ? Verwenden Sie hier die Schreibweise

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ijk}\hat{\mathbf{e}}_i \partial_j F_k. \quad (1.184)$$

Berechnen Sie weiterhin das Kurvenintegral über die Kraft entlang des Weges

$$\mathbf{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (1.185)$$

Was ist die Interpretation dieser Resultate?

- (c) Gegeben sei ein Skalarfeld  $g(\mathbf{x})$ . Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung entlang der Achse  $\hat{\mathbf{e}}_j$ , also  $\partial_{\hat{\mathbf{e}}_j} g(\mathbf{x})$ , identisch ist mit der partiellen Ableitung  $\partial_j g(\mathbf{x})$ .
- (d) Zeigen Sie, dass die Divergenz eines Rotationsfeldes verschwindet:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{x})) = 0, \quad (1.186)$$

wobei  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  ein zweifach differenzierbares Vektorfeld ist.

- (e) Man berechne die Rotation eines Rotationsfeldes:  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{x}))$ . Stellen Sie das Ergebnis in Komponentenschreibweise dar.

### 1.6 •• Bewegung im Kraftfeld

Es ist das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = C \begin{pmatrix} k_1 x_1 x_2 \\ x_1^2 + k_2 x_3^2 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix} \quad (1.187)$$

gegeben ( $C > 0$  ist eine dimensionsbehaftete Konstante, sodass  $\mathbf{F}$  die Einheit einer Kraft besitzt). Die Parameter  $k_1$  und  $k_2$  sind zunächst offen.

- (a) Für welchen Wert von  $k_1$  und  $k_2$  besitzt diese Kraft ein Potenzial? Rechnen Sie im Folgenden mit diesen Werten weiter.
- (b) Berechnen Sie die benötigte Arbeit, um eine Punktmasse  $m$  vom Ursprung zum Punkt  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$  zu befördern. Der gewählte Weg spielt dabei keine Rolle. Wählen Sie den direkten Weg entlang einer Geraden. Wann benötigt man für den Transport Energie, wann gewinnt man Energie?
- (c) Wie lautet das Potenzial? Überprüfen Sie, dass es auf die korrekte Kraft führt.

### 1.7 ••• Harmonischer Oszillatator

Es wird die Lösung der Schwingungsgleichung (1.100) des harmonischen Oszillators gesucht:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (1.188)$$

- (a) Machen Sie einen Potenzreihenansatz

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (\omega_0 t)^j \quad (1.189)$$

mit konstanten Koeffizienten  $c_j$  ( $j = 0, \dots, \infty$ ). Zeigen Sie, dass zwischen den Koeffizienten der folgende Zusammenhang besteht:

$$c_{j+2} = -\frac{c_j}{(j+2)(j+1)}. \quad (1.190)$$

Dies nennt man eine *Rekursionsgleichung* für die Koeffizienten  $c_j$ . Begründen Sie, warum  $c_0$  und  $c_1$  beliebig wählbar sind und wie dies zu interpretieren ist.

- (b) Zeigen Sie, dass aus der Rekursionsgleichung die explizite Form

$$c_j = \begin{cases} (-1)^{j/2+1} \frac{c_0}{j!} & j \text{ gerade} \\ (-1)^{(j-1)/2} \frac{c_1}{j!} & j \text{ ungerade} \end{cases} \quad (1.191)$$

folgt.

- (c) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktionen  $\cos(\omega_0 t)$  und  $\sin(\omega_0 t)$  um  $t = 0$  bis einschließlich des dritten nichtverschwindenden Terms. Wie lauten die Koeffizienten der Entwicklung? Was folgt daraus?
- (d) Überprüfen Sie, dass  $x_1(t) = \cos(\omega_0 t)$  und  $x_2(t) = \sin(\omega_0 t)$  die Schwingungsgleichung lösen. Außerdem löst  $A \cos(\omega_0 t - \phi_0)$  die Schwingungsgleichung, da es eine Linearkombination der sogenannten *Fundamentallösungen*  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  ist. Zeigen Sie dies durch Anwendung des Additionstheorems

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta. \quad (1.192)$$

# Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

## 1.1

- (a) Die Vektoren in (1.173) sind linear unabhängig, da (1.172) nur für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  erfüllt werden kann. Dies ist trivial zu sehen. Auch die Vektoren in (1.174) sind linear unabhängig. Um dies zu sehen, betrachtet man zunächst die  $x_3$ -Komponente. Sie kann nur dann verschwinden, wenn  $\lambda_1 = 0$  ist. Die  $x_2$ -Komponente verschwindet nur, wenn dann auch  $\lambda_2 = 0$  ist. Weiterhin muss auch  $\lambda_1 = 0$  erfüllt sein. Für (1.175) muss man ein lineares Gleichungssystem lösen. Es lautet

$$\begin{aligned} -3\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0, \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 1\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.193)$$

Zunächst addieren wir Vielfache der zweiten Gleichung zur ersten und zur dritten, sodass jeweils  $\lambda_3$  verschwindet, und betrachten die beiden resultierenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1\lambda_1 + 5\lambda_2 &= 0, \\ -5\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.194)$$

Wir addieren das Fünffache der ersten Gleichung zur zweiten und finden zunächst  $\lambda_2 = 0$ . Durch Einsetzen in die vorherigen Gleichungssysteme ergeben sich dann  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_3 = 0$ . Die Vektoren sind also ebenfalls linear unabhängig. Ersetzt man allerdings den dritten Vektor durch  $\mathbf{v}_3 = (2, -4, -3)^\top$ , ergibt sich statt (1.193) zunächst

$$\begin{aligned} -3\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0, \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.195)$$

Wir addieren diesmal Vielfache der dritten Gleichung, um in den beiden anderen  $\lambda_1$  zu eliminieren:

$$\begin{aligned} 10\lambda_2 - 10\lambda_3 &= 0, \\ -4\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.196)$$

Diese beiden Gleichungen sind Vielfache voneinander. Sie führen somit nur auf die Bedingung  $\lambda_2 = \lambda_3$ . Beide Skalare können beliebige, aber identische Werte annehmen. Die drei Vektoren sind in diesem Fall also nicht linear unabhängig.

- (b) Die beiden Polynome  $p(x)$  und  $q(x)$  sind orthogonal, denn

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - x^2 \right]_{-1}^1 = 0. \quad (1.197)$$

Dies hätte man auch direkt daran erkennen können, dass der Integrand eine ungerade Funktion von  $x$  ist, die Integrationsgrenzen aber symmetrisch sind. Allerdings sind  $p(x)$  und  $r(x)$  nicht orthogonal:

$$\begin{aligned} \langle p, r \rangle &= \int_{-1}^1 (x^4 + x^2) dx \\ &= \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = -\frac{4}{15}. \end{aligned} \quad (1.198)$$

Weiterhin findet man, dass wegen

$$\langle q, r \rangle = \int_{-1}^1 (x^5 - x^3 - 2x) dx = 0 \quad (1.199)$$

die beiden Polynome  $q(x)$  und  $r(x)$  orthogonal sind. Die Polynome lassen sich normieren, indem man beispielsweise

$$\langle p, p \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \quad (1.200)$$

berechnet und entsprechend  $\tilde{p}(x) := p(x)/\sqrt{2/3}$  als normiertes Polynom definiert.

- (c) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir  $\mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}$  schreiben. Das Spatprodukt lautet dann

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \lambda_1 \varepsilon_{ijk} a_i b_j a_k + \lambda_2 \varepsilon_{ijk} a_i b_j b_k. \quad (1.201)$$

In beiden Termen auf der rechten Seite haben wir das Produkt einer antisymmetrischen Größe (Levi-Civita-Symbol) und einer symmetrischen Größe ( $a_i a_k$  bzw.  $b_j b_k$ ) unter Vertauschung der Indizes  $i \leftrightarrow j$  bzw.  $j \leftrightarrow k$ . Summiert man über alle Indizes, fallen alle Terme gegeneinander weg, denn

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} a_2 a_3 + \varepsilon_{132} a_3 a_2 &= (\varepsilon_{123} + \varepsilon_{132}) a_2 a_3 \\ &= (1-1) a_2 a_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.202)$$

- (d) Die linke Seite von (1.179) schreiben wir zunächst in der Form

$$\varepsilon_{kij} a_i b_j \varepsilon_{kmn} c_m d_n = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} a_i b_j c_m d_n. \quad (1.203)$$

Hier verwendet man die Identität

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \quad (1.204)$$

und erhält sofort

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) a_i b_j c_m d_n \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \end{aligned} \quad (1.205)$$

## 1.2

- (a) Die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen für das beschriebene Problem sind (siehe (1.26))

$$x - x_0 = v_{x,0}t, \quad z - z_0 = v_{z,0}t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.206)$$

Die Bahnkurve erhält man, indem man  $t$  eliminiert:

$$z - z_0 = \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{x,0}^2}(x - x_0)^2. \quad (1.207)$$

Diese ist offensichtlich eine nach unten geöffnete Parabel. Der Scheitelpunkt ist durch  $dz/dx = 0$  definiert. Dies führt auf

$$x_S - x_0 = \frac{v_{x,0}v_{z,0}}{g}, \quad (1.208)$$

wobei  $x_S$  die  $x$ -Koordinate des Scheitelpunktes ist. Eingesetzt in (1.207) folgt

$$z_S - z_0 = \frac{v_{z,0}^2}{2g}. \quad (1.209)$$

Dies ist die maximale Wurfhöhe. Dieser Punkt wird nach der Zeit

$$t_S = \frac{v_{z,0}}{g} \quad (1.210)$$

erreicht.

- (b) Eine einfache geometrische Überlegung führt auf

$$v_0^2 = v_{x,0}^2 + v_{z,0}^2, \quad v_{x,0} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{z,0} = v_0 \sin \alpha. \quad (1.211)$$

- (c) Um herauszufinden, wie weit der Speer fliegt, setzen wir  $z = z_0$ . Dies führt auf zwei Lösungen. Die erste Lösung (Anfangsbedingung  $x = x_0$ ) ist trivial. Die zweite lautet

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{2v_{x,0}v_{z,0}}{g} \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha). \end{aligned} \quad (1.212)$$

Dies ist gerade die Weite des Wurfes. Sie wird offensichtlich für  $\alpha = \pi/2$  maximal. Der Speer muss also genau diagonal geworfen werden, um für eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit die größte Weite zu erreichen.

- (d) Nein, dies ist nicht möglich. Die maximale Reichweite des Fluges ist bei  $v_0 \approx 28 \text{ m s}^{-1}$  und mit  $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$  ungefähr 78 m. Das Fußballfeld ist aber etwa 100 m lang. Selbstverständlich kann der Ball noch ins Tor rollen.

## 1.3

- (a) Die Bewegungsgleichung in Vektorform lautet

$$m\ddot{x} = -K\dot{x} - mg. \quad (1.213)$$

Für die beiden relevanten Komponenten ist sie

$$m\ddot{x} = -K\dot{x}, \quad m\ddot{z} = -K\dot{z} - mg. \quad (1.214)$$

Die Bewegungsgleichungen sind also entkoppelt.

- (b) Gl. (1.42) beinhaltet bereits die Lösung der Bewegungsgleichung für  $z$ :

$$\begin{aligned} z - z_0 &= -\frac{mg}{K}t \\ &+ \left(v_{z,0} + \frac{mg}{K}\right) \frac{m}{K} \left[1 - \exp\left(-\frac{K}{m}t\right)\right]. \end{aligned} \quad (1.215)$$

Die Lösung für  $x$  erhält man, indem man  $g = 0$  setzt und  $x$  durch  $z$  ersetzt:

$$x - x_0 = \frac{mv_{x,0}}{K} \left[1 - \exp\left(-\frac{K}{m}t\right)\right]. \quad (1.216)$$

- (c) Man erkennt, dass die Zeit  $t$  in (1.215) an zwei Stellen vorkommt: einmal als linearer Term, das zweite Mal innerhalb der Exponentialfunktion. Da die Exponentialfunktionen in den Lösungen für  $x(t)$  und  $z(t)$  identisch sind, kann man zunächst

$$z - z_0 = -\frac{mg}{K}t + \left(v_{z,0} + \frac{mg}{K}\right) \frac{x - x_0}{v_{x,0}} \quad (1.217)$$

schreiben. Es verbleibt noch die Zeit im linearen Term. Hierzu lösen wir (1.216) nach  $t$  auf,

$$t = -\frac{m}{K} \ln \left[1 - \frac{K}{mv_{x,0}}(x - x_0)\right], \quad (1.218)$$

und setzen das Ergebnis in (1.217) ein:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{m^2 g}{K^2} \ln \left[1 - \frac{K(x - x_0)}{mv_{x,0}}\right] \\ &+ \left(v_{z,0} + \frac{mg}{K}\right) \frac{x - x_0}{v_{x,0}}. \end{aligned} \quad (1.219)$$

- (d) Wir wollen den Grenzfall  $K \rightarrow 0$  untersuchen. Einsetzen von  $K = 0$  führt auf Probleme, daher muss zunächst der Logarithmus entwickelt werden. Für  $K \rightarrow 0$  ist die folgende Näherung gültig (indem man um  $x = 0$  entwickelt):

$$\begin{aligned} \ln \left[1 - \frac{K(x - x_0)}{mv_{x,0}}\right] &\approx -\frac{K(x - x_0)}{mv_{x,0}} - \frac{K^2(x - x_0)^2}{2m^2 v_{x,0}^2}. \end{aligned} \quad (1.220)$$

Setzt man (1.220) in (1.219) ein, folgt sofort

$$z - z_0 = \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{x,0}^2}(x - x_0)^2. \quad (1.221)$$

Dies ist genau (1.207), die schon beim schiefen Wurf ohne Reibung gefunden wurde. Da der Faktor vor dem Logarithmus in (1.219)  $K^2$  im Nenner enthält, muss im Zähler mindestens bis zur zweiten Ordnung entwickelt werden, damit kein  $K$  im Nenner übrig bleibt. Würde man höhere Terme der Entwicklung des Logarithmus berücksichtigen, würden diese wegen  $K \rightarrow 0$  keine Rolle spielen.

## 1.4

(a) Aus (1.180) folgt

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{q}{m} \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}. \quad (1.222)$$

Somit steht der Beschleunigungsvektor stets senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor. Es gibt keine Beschleunigungskomponente entlang der Bahnkurve bzw. entlang des Tangentialvektors  $\tau$ . Wegen (1.123) und (1.124) bedeutet dies aber gerade, dass der Betrag der Bahngeschwindigkeit konstant ist. Gl. (1.180) besagt weiterhin, dass die Kraft  $\mathbf{F}$  und die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}$  senkrecht aufeinander stehen. Ihr Skalarprodukt verschwindet somit. Wegen (1.148) ist die Energie erhalten. Es wird also keine Arbeit am Teilchen verrichtet.

(b) Zunächst ist das Kreuzprodukt auszuwerten. Mit

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} v_j B_k \quad (1.223)$$

und (1.181) folgt

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m} \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\frac{qB}{m} \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (1.224)$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen lautet die Lösung für die Bewegung entlang der  $z$ -Achse einfach

$$z = v_{z,0} t. \quad (1.225)$$

(c) Die Bewegungsgleichungen für  $x$  und  $y$  sind noch gekoppelt. Wir integrieren zunächst die Gleichung für  $x$  einmal nach der Zeit. Wegen  $\dot{x}(t=0)=0$  und  $y(t=0)=0$  folgt

$$\dot{x} = \frac{qB}{m} y. \quad (1.226)$$

Dieses Ergebnis kann in die Bewegungsgleichung für  $y$  eingesetzt werden:

$$\ddot{y} = -\omega_B^2 y. \quad (1.227)$$

Hier wurde

$$\omega_B := \frac{qB}{m} \quad (1.228)$$

als Abkürzung definiert. Man nennt  $\omega_B$  die *Zyklotronfrequenz*. Die allgemeine Lösung von (1.227) kann in der Form

$$y = A_y \sin(\omega_B t - \phi_y) \quad (1.229)$$

geschrieben werden. Die beiden Integrationskonstanten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Man kann schnell nachprüfen, dass  $\phi_y = 0$  aus  $y(t=0) = 0$  folgt. Weiterhin ist  $A_y = v_{y,0}/\omega_B$ . Dies erkennt man, wenn man die erste Zeitableitung von (1.229) berechnet und mit der Anfangsbedingung  $\dot{y}(t=0) = v_{y,0}$  vergleicht. Der letzte Schritt ist die Integration von (1.226), in die zuvor (1.229) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{qB}{m\omega_B} A_y \cos(\omega_B t) + C_1 \\ &= -\frac{v_{y,0}}{\omega_B} \cos(\omega_B t) + C_1. \end{aligned} \quad (1.230)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{x}(t=0) = 0$  ist automatisch erfüllt, da sie bereits für (1.226) verwendet wurde. Die letzte verbleibende Integrationskonstante,  $C_1$ , ergibt sich aus der letzten Forderung:  $x(t=0) = 0$ . Die Lösung der Bewegungsgleichung lautet zusammengefasst

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{y,0}}{\omega_B} [1 - \cos(\omega_B t)], \\ y &= \frac{v_{y,0}}{\omega_B} \sin(\omega_B t), \\ z &= v_{z,0} t. \end{aligned} \quad (1.231)$$

Das Teilchen bewegt sich auf einer Schraubenlinie ähnlich zu der in Abb. 1.11. Der Unterschied hier ist, dass der Ursprung nicht auf der Achse der Schraubenlinie liegt. Er ist um  $v_{y,0}/\omega_B$  entlang der  $x$ -Achse verschoben.

(d) Zunächst berechnen wir die Geschwindigkeit:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -v_{y,0} \sin(\omega_B t) \\ v_{y,0} \cos(\omega_B t) \\ v_{z,0} \end{pmatrix}. \quad (1.232)$$

Ihr Betrag ist  $v := \sqrt{v_{y,0}^2 + v_{z,0}^2} = \text{const}$ . Der Tangentialvektor erfüllt wegen (1.123)

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|} = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} -v_{y,0} \sin(\omega_B t) \\ v_{y,0} \cos(\omega_B t) \\ v_{z,0} \end{pmatrix}. \quad (1.233)$$

Der Bahnpараметer und die Zeit sind demnach über

$$\frac{ds}{dt} = v \quad (1.234)$$

verbunden, da wegen der Definition des Tangentialvektors  $|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{dx}/ds| = 1$  erfüllt sein muss. Der Hauptnormalenvektor aus (1.113) ist

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_H &= \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|^{-1} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \right|^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_B t) \\ -\sin(\omega_B t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.235)$$

Schließlich fehlt noch der Krümmungsradius, der wegen (1.122) den Wert

$$\rho = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|^{-1} = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \frac{dt}{ds} \right|^{-1} = \frac{v^2}{v_{y,0}\omega_B} = \frac{mv^2}{qv_{y,0}B} \quad (1.236)$$

nimmt.

## 1.5

(a) In Indexschreibweise lautet die Rotation des Kraftfeldes

$$\left( \nabla \times \left[ F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \right)_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j F(r) \frac{x_k}{r}. \quad (1.237)$$

Statt  $\nabla_j$  könnte man genauso gut  $\partial_j$  schreiben; beide Terme sind identisch. Es ist unbedingt zu beachten, dass die Ableitung  $\nabla_j$  auf alle Terme wirkt, die rechts von ihr stehen. Als Hilfsgleichung verwenden wir

$$\nabla_j r = \nabla_j \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_j}{r}. \quad (1.238)$$

Wir wenden zunächst die Produktregel an und sehen, dass wir es mit drei Faktoren zu tun haben, die wir im Einzelnen untersuchen wollen:

$$\begin{aligned} \frac{x_k}{r} \nabla_j F(r) &= \frac{x_j x_k}{r^2} \frac{dF(r)}{dr}, \\ \frac{F(r)}{r} \nabla_j x_k &= \frac{F(r)}{r} \delta_{jk}, \\ F(r) x_k \nabla_j \frac{1}{r} &= -\frac{x_j x_k}{r^3} F(r). \end{aligned} \quad (1.239)$$

Bei der Summation über  $j$  und  $k$  treten die beiden Kombinationen  $\epsilon_{ijk} \delta_{jk}$  und  $\epsilon_{ijk} x_j x_k$  auf. Sowohl  $\delta_{jk}$  als auch  $x_j x_k$  sind symmetrisch unter Vertauschung der beiden Indizes, aber  $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$  ist antisymmetrisch. Bei der Summation fallen daher alle Terme mit  $x_j x_k$  paarweise gegeneinander weg:

$$\epsilon_{ijk} x_j x_k + \epsilon_{ikj} x_k x_j = \epsilon_{ijk} x_j x_k - \epsilon_{ijk} x_j x_k = 0. \quad (1.240)$$

Die Kontraktion  $\epsilon_{ijk} \delta_{jk}$  verschwindet, da  $\epsilon_{ijk}$  nur für  $j \neq k$ ,  $\delta_{jk}$  allerdings nur für  $j = k$  ungleich null ist. Damit ist gezeigt, dass die Rotation von  $\mathbf{F}(r)$  verschwindet.

(b) Man erkennt an der Form der Kraft, dass alle Ableitungen, die  $F_3$  oder  $x_3$  betreffen, verschwinden. Somit reduziert sich die Rotation direkt auf

$$\nabla \times \mathbf{F}(r) = \hat{\mathbf{e}}_3 \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right). \quad (1.241)$$

Aus

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\varrho}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\varrho} \quad (1.242)$$

folgt weiterhin, dass sich die beiden verbleibenden Ableitungen in (1.241) gegenseitig aufheben. Somit ist auch hier das Kraftfeld rotationsfrei. Das Kurvenintegral lautet

$$\oint \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(r(\varphi)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} d\varphi. \quad (1.243)$$

Die Kraft muss als Funktion des Winkels  $\varphi$  geschrieben werden. Dies ist möglich, indem  $x_1$  und  $x_2$  durch die entsprechenden Ausdrücke in (1.185) ersetzt werden:

$$\mathbf{F}(r(\varphi)) = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.244)$$

Gl. (1.243) lautet dann

$$\oint \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = 2\pi \neq 0. \quad (1.245)$$

Wählt man einen Weg, der um den Pol bei  $x_1 = x_2 = 0$  herumläuft, verschwindet das geschlossene Wegintegral nicht, obwohl die Rotation des Kraftfeldes null ist. Die Erklärung ist, dass das Gebiet nicht einfach zusammenhängend ist. In der Tat gibt es bei  $x_1 = x_2 = 0$  eine Definitionslücke, die das beobachtete Verhalten erklärt.

(c) Die Richtungsableitung entlang einer Achse  $\hat{\mathbf{n}}$  ist definiert als

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} g(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla g(\mathbf{x}) = \hat{n}_i \partial_i g(\mathbf{x}). \quad (1.246)$$

Für  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_j$  ist offensichtlich  $\hat{e}_{j,i} \partial_i = \delta_{ij} \partial_i = \partial_j$  und somit

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} g(\mathbf{x}) = \partial_j g(\mathbf{x}), \quad (1.247)$$

was zu zeigen war.

(d) Wir schreiben die Divergenz in Komponenten und sortieren um:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{x})) = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j h_k = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j h_k. \quad (1.248)$$

Dieser Ausdruck muss verschwinden, wenn die beiden Ableitungen vertauschbar sind, da über symmetrische ( $\partial_i \partial_j$ ) und antisymmetrische ( $\epsilon_{ijk}$ ) Terme summiert wird.

(e) Zunächst ist

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{x})) &= \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l h_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \hat{\mathbf{e}}_i \partial_j \partial_l h_m. \end{aligned} \quad (1.249)$$

Hier nutzt man das bekannte Ergebnis

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (1.250)$$

aus. Es folgt

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{x})) &= \hat{\mathbf{e}}_l \partial_l \partial_m h_m - \hat{\mathbf{e}}_m \partial_l \partial_l h_m \\ &= \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{h} - (\partial_l \partial_l) \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (1.251)$$

Der sogenannte *Laplace-Operator*

$$\Delta := \partial_l \partial_l \quad (1.252)$$

wird uns in Kap. 2 wieder begegnen.

## 1.6

(a) Wir berechnen die Rotation von  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \partial_j F_k = C \begin{pmatrix} x_3 - 2k_2 x_3 \\ 0 - 0 \\ 2x_1 - k_1 x_1 \end{pmatrix} \\ &= C \begin{pmatrix} (1 - 2k_2)x_3 \\ 0 \\ (2 - k_1)x_1 \end{pmatrix}. \quad (1.253)\end{aligned}$$

Die Rotation verschwindet für  $k_1 = 2$  und  $k_2 = \frac{1}{2}$ . Da das Gebiet einfach zusammenhängend ist (es gibt keine Definitionslücken), muss es dann ein Potenzial  $V(\mathbf{x})$  geben.

(b) Der einfachste Weg in kartesischen Koordinaten ist eine Gerade mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(s) = s\mathbf{a}, \quad s \in [0, 1]. \quad (1.254)$$

Für  $s = 0$  und  $s = 1$  befindet man sich jeweils am Anfangspunkt (Ursprung  $O$ ) und Endpunkt ( $\mathbf{a}$ ). Selbstverständlich könnte man auch entlang der einzelnen Achsen integrieren oder irgendeinen anderen Weg verfolgen. Die geleistete Arbeit lautet

$$W = \int_O^a \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}(s)) \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} ds \quad (1.255)$$

mit der Ableitung  $d\mathbf{x}(s)/ds = \mathbf{a}$ . Da  $s$  die Integrationsvariable ist, müssen die Koordinaten  $\mathbf{x}$  durch  $s$  ausgedrückt werden. Dies ist aber mit (1.254) bereits geschehen. Wir verwenden also  $x_i = a_i s$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Zu lösen ist somit das Integral

$$\begin{aligned}W &= C \int_0^1 [2a_1^2 a_2 + (a_1^2 a_2 + a_2 a_3^2/2) + a_2 a_3^2] s^2 ds \\ &= C (3a_1^2 + 3a_3^2/2) a_2 \int_0^1 s^2 ds \\ &= Ca_2 (a_1^2 + a_3^2/2). \quad (1.256)\end{aligned}$$

Die geleistete Arbeit ist je nach Vorzeichen von  $a_2$  positiv oder negativ. Ist  $a_2 = 0$ , wird gar keine Energie umgesetzt.

(c) Das Potenzial erhält man direkt aus (1.256). Dazu muss man sich überlegen, dass das Potenzial am Ort  $\mathbf{x}$  die negative Arbeit ist, die man benötigt, um eine Punktmasse von einem Bezugspunkt nach  $\mathbf{x}$  zu bewegen. Wählt man als Bezugspunkt den Ursprung und benennt  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{x}$  um, lautet das Potenzial

$$V(\mathbf{x}) = -Cx_2 (x_1^2 + x_3^2/2). \quad (1.257)$$

Es soll zum Abschluss überprüft werden, ob sich die korrekte Kraft daraus ergibt:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= -\nabla V(\mathbf{x}) = -\begin{pmatrix} \partial_1 V(\mathbf{x}) \\ \partial_2 V(\mathbf{x}) \\ \partial_3 V(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= C \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ x_1^2 + x_3^2/2 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix}. \quad (1.258)\end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich das richtige Ergebnis.

## 1.7

(a) Wir berechnen zunächst die zweite Zeitableitung der Potenzreihe:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} j \omega_0 c_j (\omega_0 t)^{j-1}, \\ \ddot{x}(t) &= \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) \omega_0^2 c_j (\omega_0 t)^{j-2}.\end{aligned} \quad (1.259)$$

Es wurde dabei berücksichtigt, dass die Ableitung von  $t^0$  verschwindet. In der zweiten Zeitableitung wird der Index verschoben, sodass die Summe wieder bei  $j = 0$  beginnt:

$$\ddot{x}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) \omega_0^2 c_{j+2} (\omega_0 t)^j. \quad (1.260)$$

Durch Einsetzen der Potenzreihe (1.189) in die Schwingungsgleichung (1.188) folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(j+2)(j+1)c_{j+2} + c_j] (\omega_0 t)^j = 0. \quad (1.261)$$

Damit diese Gleichung zu allen Zeiten erfüllt werden kann, müssen alle Summanden einzeln verschwinden. Dies führt auf die Rekursionsgleichung

$$c_{j+2} = -\frac{c_j}{(j+2)(j+1)}. \quad (1.262)$$

Für bekanntes  $c_0$  sind alle  $c_j$  mit geraden  $j$  gegeben. Genauso folgen aus bekanntem  $c_1$  alle  $c_j$  mit ungeraden  $j$ . Somit sind nur  $c_0$  und  $c_1$  nicht festgelegt. Die Wahl dieser beiden Koeffizienten entspricht den beiden Anfangsbedingungen des Problems, da es sich um eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung handelt.

(b) Die explizite Form soll nicht mit mathematischer Strenge gezeigt werden (man könnte sie jedoch mit vollständiger Induktion beweisen). Zunächst nehmen wir an,  $c_0$  sei bekannt. Dann folgt sofort  $c_2 = -c_0/(1 \cdot 2)$ , daraus wiederum

$c_4 = +c_0/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)$  usw. Offenbar wechselt das Vorzeichen von Iteration zu Iteration, und im Nenner steht der Term  $j!$ . Analog findet man den expliziten Ausdruck, wenn man mit  $c_1$  beginnt. Die Exponenten in (1.191) stellen sicher, dass die Vorzeichen stimmen.

- (c) Um die Taylor-Entwicklung von Sinus und Kosinus zu erhalten, müssen die ersten Ableitungen berechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d \cos(\omega_0 t)}{dt} &= -\omega_0 \sin(\omega_0 t), \\ \frac{d^2 \cos(\omega_0 t)}{dt^2} &= -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t), \\ \frac{d^3 \cos(\omega_0 t)}{dt^3} &= +\omega_0^3 \sin(\omega_0 t), \\ \frac{d^4 \cos(\omega_0 t)}{dt^4} &= +\omega_0^4 \cos(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (1.263)$$

Anwendung der Taylor'schen Formel liefert

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{0!}(\omega_0 t)^0 - \frac{1}{2!}(\omega_0 t)^2 + \frac{1}{4!}(\omega_0 t)^4 \mp \dots \quad (1.264)$$

Für den Sinus findet man analog

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{1!}(\omega_0 t)^1 - \frac{1}{3!}(\omega_0 t)^3 + \frac{1}{5!}(\omega_0 t)^5 \mp \dots \quad (1.265)$$

Tatsächlich entspricht die Reihenentwicklung des Kosinus genau der Entwicklung (1.189) für gerade  $j$  und die des Sinus der Entwicklung für ungerade  $j$ . Man kann daraus folgern, dass sowohl der Kosinus als auch der Sinus die Schwingungsgleichung lösen.

- (d) Wegen

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) &= -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x_1(t), \\ \ddot{x}_2(t) &= -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x_2(t) \end{aligned} \quad (1.266)$$

sind sowohl  $x_1(t)$  als auch  $x_2(t)$  Lösungen der Schwingungsgleichung. Es ist noch zu zeigen, dass

$$A \cos(\omega_0 t - \phi_0) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t) \quad (1.267)$$

gilt. Dabei folgen  $A$  und  $\phi_0$  aus  $A_1$  und  $A_2$ . Als Anfangsbedingungen sind beide Paare gleichwertig. Das Additionstheorem (1.192) bedeutet im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t - \phi_0) \\ = (A \cos \phi_0) \cos(\omega_0 t) + (A \sin \phi_0) \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (1.268)$$

Offensichtlich haben wir das Ziel mit  $A_1 = A \cos \phi_0$  und  $A_2 = A \sin \phi_0$  erreicht.

## Literatur

Pfister, H.: Lange nach Newton – Das schwer fassbare, aber außerordentlich reichhaltige Trägheitsgesetz. Physik Journal **15**(3), 47–51 (2016)

### Weiterführende Literatur

Abraham, R.: Foundations Of Mechanics. 2. Aufl., Westview Press (1994)

Cambridge Digital Library: Newton Papers. <http://cudl.lib.cam.ac.uk/collections/newton> (2013) Zugriffen: 5. September 2013



# Koordinatentransformationen und beschleunigte Bezugssysteme

2



Kapitel 2

Wie lassen sich Drehungen mathematisch beschreiben?

Was sind Galilei-Transformationen?

Wie lauten die Newton'schen Axiome in beschleunigten Bezugssystemen?

Was ist die Zentrifugalkraft?

Warum werden Kugelkoordinaten verwendet?

2.1 Drehungen von kartesischen Koordinatensystemen . . . . .	48
2.2 Galilei-Transformationen . . . . .	55
2.3 Beschleunigte Bezugssysteme . . . . .	59
2.4 Kräfte in rotierenden Bezugssystemen . . . . .	65
2.5 Nichtkartesische Koordinatensysteme . . . . .	71
Aufgaben . . . . .	77
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	79
Literatur . . . . .	83

Die Untersuchung des Verhaltens eines physikalischen Systems unter einer Koordinatentransformation ist ein zentraler Punkt in der gesamten theoretischen Physik. Wird ein physikalisches System nach einer Koordinatentransformation durch dieselben Gleichungen beschrieben wie vorher, so heißt es symmetrisch unter dieser Transformation.

Symmetrien spielen in der Physik eine herausragende Rolle, was in Kap. 5 herausgearbeitet wird. Das Interesse an den Symmetrieeigenschaften physikalischer Systeme ist deswegen so wichtig, da Symmetrien in der Regel auf Erhaltungsgrößen führen. Beispiele hierfür sind die Energieerhaltung aufgrund der Zeittranslationsinvarianz (Symmetrie unter Verschiebung des Zeitnullpunktes) oder die Impulserhaltung aufgrund der Homogenität des Raumes (Symmetrie unter räumlichen Translationen). Wir werden darauf in Kap. 5 genauer eingehen.

In diesem Kapitel werden zahlreiche mathematische Werkzeuge eingeführt, um Koordinatentransformationen und beschleunigte Bezugssysteme beschreiben zu können. Dazu gehören z. B. die Drehmatrizen (Abschn. 2.1) sowie Zylinder- und Kugelkoordinaten (Abschn. 2.5). Des Weiteren wird ein Schwerpunkt auf die mit Koordinatentransformationen verbundene Physik gelegt. Beispielsweise lässt eine bestimmte Klasse von Koordinatentransformationen, den Galilei-Transformationen (Abschn. 2.2), die Newton'schen Bewegungsgleichungen invariant. Beschleunigte Bezugssysteme andererseits erfordern Erweiterungen der Bewegungsgleichungen, was letztlich auf die Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte führt (Abschn. 2.3 und 2.4).

## 2.1 Drehungen von kartesischen Koordinatensystemen

Wir werden uns im Folgenden mit Drehungen von kartesischen Koordinatensystemen im dreidimensionalen Raum beschäftigen. Dabei wird im Normalfall nicht das betrachtete physikalische System selbst im Raum gedreht, sondern das beschreibende Koordinatensystem. Als Konsequenz aus diesen sogenannten passiven Drehungen ändern sich die Koordinaten des Ortes einer Punktmasse, nicht jedoch ihre Lage bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems. Drehungen von Vektoren lassen sich dabei durch orthogonale Matrizen darstellen, deren mathematische Eigenschaften vorgestellt werden. Schließlich werden die Transformationsgleichungen für Vektoren unter Drehungen abgeleitet.

### Darstellung des Ortsvektors in einem Koordinatensystem

Es ist deutlich zu unterscheiden zwischen einem physikalischen Vektor (z. B. dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$ ) und seiner *Darstellung* in einem gegebenen Koordinatensystem. Der Vektor  $\mathbf{x}$  kann durch

seine Komponenten  $(x_1, x_2, x_3)$  bezüglich einer geeigneten Basis  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  als

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.1)$$

dargestellt werden. Oftmals werden dabei die drei Koordinaten in der Form

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

zusammengefasst. Mit dem *Koordinatenvektor*  $\mathbf{x}$  lässt sich dann wie gewohnt rechnen. Man sagt auch, dass  $\mathbf{x}$  nach den Basisvektoren entwickelt wird. Die Koordinaten sind jeweils die Projektionen des Vektors  $\mathbf{x}$  auf die drei Koordinatenachsen entlang  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , also  $x_i = \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Hierbei nehmen wir an, dass die Basisvektoren eine Orthonormalbasis bilden und somit  $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$  erfüllen. Weiterhin sollen die  $\hat{\mathbf{e}}_i$  ein *rechtshändiges Dreibein* bilden, d. h.  $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1$  und  $\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2$ . Wir nennen physikalische Vektoren wie  $\mathbf{x}$  auch *abstrakte* Vektoren, da sie unabhängig von irgendeiner Wahl des Koordinatensystems sind.

**Achtung** Es ist unbedingt zu unterscheiden zwischen einem physikalischen Vektor  $\mathbf{x}$  und seiner Darstellung  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$  bezüglich einer gewählten Basis, d. h. eines festgelegten Koordinatensystems. Die Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  hängen von der Wahl der Basis ab, der Vektor  $\mathbf{x}$  ist allerdings völlig unabhängig von der Wahl irgendeiner Basis. Oftmals tritt Verwirrung auf, da  $\mathbf{x}$  ebenfalls als Vektor bezeichnet wird. Dies liegt daran, dass es sich bei  $\mathbf{x}$  um einen *mathematischen* Vektor handelt („Mathematischer Hintergrund“ 1.1). In diesem Buch werden wir dennoch häufig auf die bequemere Formulierung ausweichen und  $\mathbf{x}$  als den Ortsvektor bezeichnen, wenn keine Missverständnisse zu erwarten sind. In den wenigen Fällen, bei denen eine Unterscheidung zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}$  notwendig ist, wird dies explizit betont. ▶

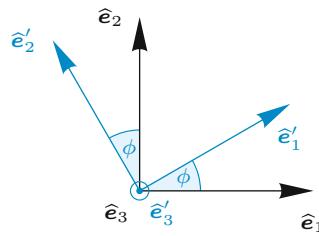
### Frage 1

Machen Sie sich klar, dass die Darstellungen der drei normierten Basisvektoren in ihrem eigenen Koordinatensystem stets  $(1, 0, 0)^\top$ ,  $(0, 1, 0)^\top$  und  $(0, 0, 1)^\top$  lauten.

Physikalische Vorgänge sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, da Koordinatensysteme lediglich der Darstellung dienen, physikalische Prozesse aber nicht beeinflussen. Dies erlaubt das geschickte Auswählen eines Koordinatensystems, in welchem die resultierenden Gleichungen möglichst einfach werden. Ein Beispiel haben wir bereits in Abschn. 1.3 gesehen: Dort wurde das Koordinatensystem so gewählt, dass die Bewegung der Punktmasse entlang der  $z$ -Achse erfolgte. Genauso gut hätte man die Bewegung entlang der  $x$ -Achse oder innerhalb der  $y$ - $z$ -Ebene definieren können.

Geht man von einem Koordinatensystem in ein anderes über, ohne das physikalische System als solches zu verändern, stellt

**Abb. 2.1** Ein ungestrichenes Koordinatensystem (schwarz) wird um einen Winkel  $\phi$  um die  $x_3$ -Achse gedreht und geht somit in ein neues, gestrichenes Koordinatensystem (blau) über



sich die Frage nach den damit verbundenen Transformationsgleichungen für die Basisvektoren und die Koordinaten des Ortsvektors. In diesem Kapitel werden wir uns daher mit den wichtigsten dieser Transformationen beschäftigen:

- zeitunabhängige und zeitabhängige Drehungen und Translationen von kartesischen Koordinatensystemen,
- Übergang von einem kartesischen zu einem nichtkartesischen Koordinatensystem, insbesondere zu Zylinder- und sphärischen Polarkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten.

Es werden hierbei auch beschleunigte Koordinatensysteme und solche mit nichtkonstanten Basisvektoren zugelassen, was eine Modifizierung des zweiten Newton'schen Axioms erfordert.

## Drehungen um eine Koordinatenachse

Stellen wir uns zunächst vor, dass ein vorher eingeführtes ungestrichenes Koordinatensystem  $S$  mit den kartesischen Basisvektoren  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  und  $\hat{e}_3$  um einen Winkel  $\phi$  um die  $x_3$ -Achse gedreht wird, wobei der Ursprung nicht verschoben wird (Abb. 2.1). Dadurch gehen die beiden Basisvektoren  $\hat{e}_1$  und  $\hat{e}_2$  in neue Basisvektoren  $\hat{e}'_1$  und  $\hat{e}'_2$  über. Das neue gestrichene Koordinatensystem  $S'$  ist ebenfalls kartesisch. Offenbar ist der Winkel zwischen  $\hat{e}_1$  und  $\hat{e}'_1$  sowie zwischen  $\hat{e}_2$  und  $\hat{e}'_2$  gerade der Winkel  $\phi$ , während der Basisvektor  $\hat{e}_3$  unverändert bleibt:

$$\hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_1 = \cos \phi, \quad \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_2 = \cos \phi, \quad \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_3 = 1. \quad (2.3)$$

Diese Größen werden *Richtungskosinus* genannt.

Aus Abb. 2.1 erkennt man, dass zwischen  $\hat{e}_1$  und  $\hat{e}'_2$  der Winkel  $\pi/2 + \phi$  und zwischen  $\hat{e}_2$  und  $\hat{e}'_1$  der Winkel  $\pi/2 - \phi$  ist:

$$\begin{aligned} \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_1 &= \cos(\pi/2 + \phi) = -\sin \phi, \\ \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_2 &= \cos(\pi/2 - \phi) = \sin \phi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Da  $\hat{e}_3 = \hat{e}'_3$  ist, verschwinden alle übrigen Skalarprodukte  $a_{ij} := \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Zusammengefasst lauten die  $3 \times 3$  Zahlen  $a_{ij}$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \phi, & a_{12} &= \sin \phi, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= -\sin \phi, & a_{22} &= \cos \phi, & a_{23} &= 0, \\ a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

## 2.1 Drehungen von kartesischen Koordinatensystemen

Die neuen Basisvektoren lassen sich somit aus den alten berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{e}'_1 &= \cos \phi \hat{e}_1 + \sin \phi \hat{e}_2, \\ \hat{e}'_2 &= -\sin \phi \hat{e}_1 + \cos \phi \hat{e}_2, \\ \hat{e}'_3 &= \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned} \hat{e}'_i &= (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 + (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2 + (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3 \\ &= a_{1i} \hat{e}_1 + a_{2i} \hat{e}_2 + a_{3i} \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die entsprechende Umkehrung ist

$$\begin{aligned} \hat{e}_i &= (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_1) \hat{e}'_1 + (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_2) \hat{e}'_2 + (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_3) \hat{e}'_3 \\ &= a_{1i} \hat{e}'_1 + a_{2i} \hat{e}'_2 + a_{3i} \hat{e}'_3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

### Frage 2

Man überprüfe die Gültigkeit von (2.6) anhand von Abb. 2.1 bzw. (2.5).

Wie bereits betont, handelt es sich bei der oben diskutierten Koordinatentransformation um eine Drehung des Koordinatensystems, wobei das physikalische System selbst unverändert bleibt. In diesem Zusammenhang spricht man von *passiven Drehungen*. Dreht man im Gegensatz dazu das physikalische System in einem festen Koordinatensystem, bezeichnet man dies als *aktive Drehung*. Mathematisch sind beide Vorgänge äquivalent, physikalisch aber streng zu unterscheiden, da für eine aktive Drehung in der Regel Kräfte benötigt werden (und auch nicht immer möglich sind, z. B. bei Spiegelungen).

### Passive Koordinatentransformation

Passive Koordinatentransformationen entsprechen dem Wechsel von einem Koordinatensystem zu einem anderen. Sie haben keine Auswirkung auf physikalische Größen, ändern aber in der Regel ihre Darstellung.

## Darstellung von Drehungen durch Matrizen

Die  $3 \times 3$  Zahlen  $a_{ij}$  aus (2.5) lassen sich durch das rechteckige Zahlenschema einer *quadratischen Matrix* darstellen:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Matrizen und ihre grundlegenden Rechenregeln werden im „Mathematischen Hintergrund“ 2.1 besprochen. Die Matrix  $A$

## 2.1 Mathematischer Hintergrund: Matrizen I

### Definition und grundlegende Rechenregeln

In der Mathematik und der Physik sind lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen von großer Bedeutung. Im Falle des  $\mathbb{R}^3$  sind dies beispielsweise Drehungen oder Spiegelungen. Solche linearen Abbildungen lassen sich mithilfe von Matrizen beschreiben.

**Matrizen** Matrizen (singular: Matrix) sind Zahlenschemata aus  $M \times N$  Zahlen eines Körpers  $K$ , die in  $M$  Zeilen und  $N$  Spalten angeordnet sind:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} =: (a_{ij}).$$

Die Zahlen  $a_{ij}$  heißen *Matrixelemente*. Eine Matrix mit  $M$  Zeilen und  $N$  Spalten nennt man auch  $M \times N$ -Matrix. Jeder linearen Abbildung kann man (nachdem in den betreffenden Vektorräumen eine Basis gewählt wurde) genau eine Matrix zuordnen, und umgekehrt definiert jede Matrix (bei festen Basen) eine eindeutige lineare Abbildung. Eine spezielle Matrix ist die *Einheitsmatrix*

$$\mathbf{I} = (a_{ij}) \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \delta_{ij}.$$

Diese Matrix beschreibt die Identitätsabbildung.

**Vektorraum der Matrizen** Die  $M \times N$ -Matrizen bilden selbst wieder einen Vektorraum  $\mathcal{M}_{MN}$  über  $K$ , wenn man die Addition und die Multiplikation mit Skalaren elementweise definiert:

$$\begin{aligned} + : \mathcal{M}_{MN} \times \mathcal{M}_{MN} &\rightarrow \mathcal{M}_{MN}, \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto (a_{ij} + b_{ij}), \\ \cdot : K \times \mathcal{M}_{MN} &\rightarrow \mathcal{M}_{MN}, \quad (\lambda, \mathbf{A}) \mapsto (\lambda a_{ij}). \end{aligned}$$

Man kann nur Matrizen addieren, bei denen sowohl die Zeilen- als auch die Spaltenanzahl übereinstimmt.

**Matrixmultiplikation** Man definiert eine *Matrixmultiplikation* so, dass man  $L \times M$ -Matrizen mit  $M \times N$ -Matrizen multiplizieren kann, um  $L \times N$ -Matrizen zu erhalten:

$$\mathcal{M}_{LM} \times \mathcal{M}_{MN} \rightarrow \mathcal{M}_{LN}, \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \mathbf{AB} = (a_{ij}b_{jk}).$$

Hier sind  $1 \leq i \leq L$ ,  $1 \leq j \leq M$  und  $1 \leq k \leq N$ . Die Summation über doppelte Indizes (hier über  $j$  von 1 bis  $M$ ) wird implizit vorausgesetzt, d. h.

$$a_{ij}b_{jk} := \sum_{j=1}^M a_{ij}b_{jk}.$$

Das Matrixprodukt ist gerade so definiert, dass das Produkt zweier Matrizen der Verkettung der zugehörigen linearen Abbildungen entspricht. Hierbei ist es wichtig, dass man zwei Matrizen nur dann multiplizieren kann, wenn die erste Matrix genauso viele Spalten wie die zweite Matrix Zeilen hat.

**Rechenregeln für die Matrixmultiplikation** Für das Matrixprodukt gelten folgende Rechenregeln, sofern man die beteiligten Matrizen addieren bzw. multiplizieren kann:

- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$  (Assoziativgesetz)
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$  (rechtes Distributivgesetz)
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$  (linkes Distributivgesetz)
- $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$  (Identitätsabbildung)

Im Allgemeinen gilt jedoch  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ .

**Matrix-Vektor-Multiplikation** Indem man die Koordinatendarstellungen von Spaltenvektoren aus  $N$ -dimensionalen Vektorräumen  $V_N$  als  $N \times 1$ -Matrizen auffasst, ist damit auch eine Multiplikation von  $M \times N$ -Matrizen mit  $N$ -dimensionalen Spaltenvektoren definiert, deren Ergebnis ein Vektor aus einem  $M$ -dimensionalen Vektorraum  $V_M$  ist:

$$\mathcal{M}_{MN} \times V_N \rightarrow V_M, \quad (\mathbf{A}, \mathbf{v}) \mapsto (a_{ij}v_j),$$

wobei  $1 \leq i \leq M$  und  $1 \leq j \leq N$  sind. Ebenso kann man Zeilenvektoren aus  $V_N$  als  $1 \times N$ -Matrizen auffassen und sie von rechts mit  $N \times M$ -Matrizen multiplizieren, um  $M$ -dimensionale Zeilenvektoren zu erhalten:

$$V_N \times \mathcal{M}_{NM} \rightarrow V_M, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{A}) \mapsto (v_i a_{ij}).$$

Man schreibt die Multiplikationen auch kurz in der Form  $\mathbf{Av}$  und  $\mathbf{v}^\top \mathbf{A}$ .

**Transponierte** Die *Transponierte* einer Matrix wird definiert, indem man die beiden Indizes und damit Zeilen und Spalten vertauscht:

$$\mathbf{A}^\top = (a_{ij})^\top = (a_{ji}).$$

Somit gilt dann

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{A} = v_i a_{ij} = a_{ji}^\top v_i = \mathbf{A}^\top \mathbf{v}.$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

- $(\mathbf{AB})^\top = (a_{ij}b_{jk})^\top = (a_{kj}b_{ji}) = (a_{jk}^\top b_{ij}^\top) = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top,$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top,$
- $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A},$
- $\mathbf{I}^\top = \mathbf{I}.$

### Literatur

- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., Springer Spektrum (2014)
- Bosch, S.: Lineare Algebra. 4. Aufl., Springer (2007)

ist die *Drehmatrix*, welche die in Abb. 2.1 beschriebene Drehung vermittelt. Für eine allgemeine lineare Transformation zwischen beliebigen kartesischen Koordinatensystemen gilt

$$A = \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_1 & \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_2 & \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_3 \\ \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_1 & \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_2 & \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_3 \\ \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_1 & \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_2 & \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_3 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

oder in Kurzform  $a_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$ . Solche Matrizen sind *orthogonale Matrizen*, die im „Mathematischen Hintergrund“ 2.2 definiert werden und für die  $A^T A = I$  gilt, wobei  $I = (\delta_{ij})$  die Einheitsmatrix ist. Als Konvention für die Schreibweise legen wir fest, dass Matrizen durch Großbuchstaben, die Matrixelemente jedoch durch Kleinbuchstaben notiert werden, z. B.  $A = (a_{ij})$  oder  $R = (r_{kl})$ .

### Frage 3

Man mache sich klar, warum nur quadratische Matrizen für Drehungen von Koordinatensystemen infrage kommen.

## Sukzessive Drehungen

Im Folgenden wollen wir Drehmatrizen mit  $R$  (wie Rotation) bezeichnen. Sie bilden eine mathematische Untergruppe (siehe den „Mathematischen Hintergrund“ 2.4) der allgemeineren orthogonalen Matrizen. Da sich Drehungen durch quadratische Matrizen ausdrücken lassen, können nacheinander ausgeführte mehrfache Drehungen eines Bezugssystems mithilfe der Matrixmultiplikation formuliert werden. Eine solche mehrfache Rotation ist in vielen Bereichen der theoretischen Physik von großer Bedeutung. Wird ein Koordinatensystem nacheinander durch  $N$  Rotationen  $R_1, \dots, R_N$  gedreht, so ist dies äquivalent zu einer Drehung mit der Matrix

$$R = R_N R_{N-1} \dots R_2 R_1. \quad (2.11)$$

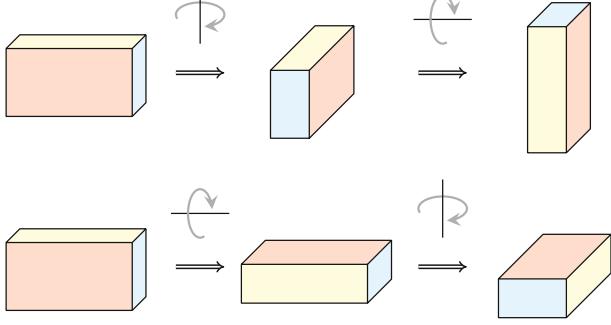
Die Reihenfolge der  $R_i$  ist dabei derart, dass dasjenige  $R_i$ , das als Erstes auf einen Vektor wirken soll, ganz rechts und somit unmittelbar „vor“ dem Vektor steht (und folglich zuerst multipliziert wird).

**Achtung** Die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ, das Ergebnis hängt von der Reihenfolge der Multiplikation ab. Physikalisch bedeutet dies, dass das Ergebnis aufeinanderfolgender Drehungen im Raum von deren Reihenfolge abhängt (Abb. 2.2). 

### Reihenfolge von Drehungen

Betrachten wir zwei Drehungen, die erste um einen Winkel  $\phi$  um die  $\hat{e}_3$ -Achse, die zweite um einen Winkel  $\psi$

## 2.1 Drehungen von kartesischen Koordinatensystemen



**Abb. 2.2** Bei aufeinanderfolgenden Drehungen spielt die Reihenfolge der Einzeldrehungen eine Rolle. Im *oberen Beispiel* wird ein Quader um zwei zueinander senkrechte Achsen gedreht. Vertauscht man die Reihenfolge, ist das Resultat unterschiedlich (*unteres Beispiel*)

um die ursprüngliche  $\hat{e}_2$ -Achse. Die beiden Drehmatrizen lauten

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_2 &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Wendet man die Regeln der Matrixmultiplikation an, findet man für die resultierende Drehmatrix

$$\begin{aligned} R &= R_2 R_1 \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \psi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Im Gegensatz dazu würde eine Drehung vermittelt durch  $R_2$  gefolgt von  $R_1$  auf die Drehmatrix

$$R_1 R_2 = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi & \sin \phi & \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \psi & \cos \phi & -\sin \phi \sin \psi \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

führen. Offensichtlich sind beide Ergebnisse unterschiedlich. 

### Frage 4

Rechnen Sie die beiden Produkte in (2.13) und (2.14) komponentenweise nach, wobei Sie die Regeln der Matrixmultiplikation verwenden.

## 2.2 Mathematischer Hintergrund: Matrizen II

### Determinanten

Wir haben bereits Matrizen und deren Bedeutung kennengelernt. Hier wollen wir uns nun noch etwas genauer mit ihnen beschäftigen. Außerdem werden wir die Determinante kennenlernen, die für Matrizen eine große Bedeutung hat. Dafür benötigen wir Permutationen.

**Permutationen** Eine *Permutation* ist eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge in sich selbst. Anders gesagt, vertauscht (permutiert) eine Permutation nur die Reihenfolge der Elemente einer Menge. Meist werden Permutationen auf einer endlichen Indexmenge (d. h. einer endlichen Menge von Zahlen  $\{1, \dots, N\}$ ) betrachtet. Die Menge dieser Permutationen bezeichnet man dann mit  $S_N$ .

Findet eine gerade Anzahl von Vertauschungen (von je zwei Elementen) statt, so nennt man die Permutation *gerade*, ansonsten *ungerade*. Entsprechend ist für eine Permutation  $\pi$  das *Signum*  $\text{sgn}(\pi)$  definiert als 1, wenn  $\pi$  gerade ist, und als  $-1$ , wenn  $\pi$  ungerade ist. Da die Indizes  $\{1, \dots, N\}$  auf  $N \cdot (N - 1) \cdots 1 = N!$  verschiedene Arten permutiert werden können, enthält  $S_N$  genau  $N!$  Elemente. Davon sind genau  $N!/2$  gerade.

**Determinante** Die *Determinante* einer Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{NN}$  ist definiert als

$$\det(A) := \sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{N\pi(N)}.$$

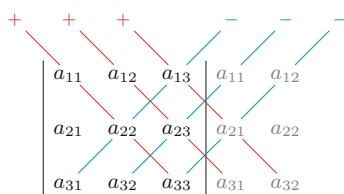
Statt  $\det(A)$  schreibt man auch  $|A|$ . Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Für  $N = 2$  lautet die obige Formel

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

und für  $N = 3$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \end{aligned}$$

Diese Formel nennt man auch *Regel von Sarrus*, die man sich folgendermaßen grafisch vorstellen kann:



Man kann sich merken, dass die Produkte der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten) minus der Produkte

der Nebendiagonalen (von rechts oben nach links unten) genommen werden.

Normalerweise wird die Determinante etwas anders definiert und die obige Formel daraus gefolgt. Für uns werden die obige Definition und die folgenden Rechenregeln (die im Wesentlichen alle Details der „richtigen“ Definition der Determinante enthalten) jedoch ausreichen.

#### Rechenregeln für die Determinante

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- $\det(A^\top) = \det(A)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^N \det(A)$
- sind in  $A$  zwei Zeilen oder Spalten linear abhängig, so ist  $\det(A) = 0$
- $\det(I) = 1$

**Orthonormale Transformationen** Mit Matrizen lassen sich Koordinatentransformationen beschreiben, die eine alte Basis  $\hat{\mathbf{e}}_i$  in eine neue  $\hat{\mathbf{e}}'_i$  überführen. Besonders wichtig sind Transformationen für Orthonormalbasen, d. h. für Basen, für die  $\langle \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = \delta_{ij}$  bzw.  $\langle \hat{\mathbf{e}}'_i, \hat{\mathbf{e}}'_j \rangle = \delta_{ij}$  gilt. Ist  $A = (a_{ij})$  eine solche Matrix, so muss

$$\delta_{ij} = \langle a_{ik} \hat{\mathbf{e}}_k, a_{jl} \hat{\mathbf{e}}_l \rangle = a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = a_{ik} a_{jk} = a_{ik} a_{kj}^\top,$$

also

$$AA^\top = I = A^\top A,$$

gelten. Eine solche Matrix heißt *orthogonal*, während man die Transformation *orthonormal* nennt. Wegen der Rechenregeln für Determinanten gilt

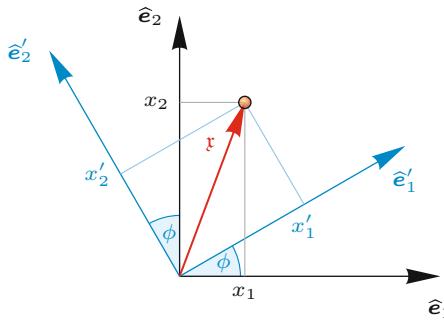
$$1 = \det(I) = \det(AA^\top) = \det(A) \det(A^\top) = (\det(A))^2,$$

also  $\det(A) = \pm 1$ . Ist  $\det(A) = 1$ , nennt man die orthonormale Transformation *eigentlich*, ansonsten *uneigentlich*.

Anschaulich gibt die Determinante einer Transformationsmatrix an, wie sich das orientierte Volumen eines Körpers unter dieser Transformation ändert. Insbesondere lassen orthonormale Transformationen das Volumen höchstens bis auf das Vorzeichen invariant.

#### Literatur

- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., Spektrum (2014)
- Bosch, S.: Lineare Algebra. 4. Aufl., Springer (2007)



**Abb. 2.3** Darstellung einer passiven Drehung, bei der das ungestrichene Koordinatensystem (schwarz) durch eine Drehung um die  $x_3$ -Achse in das gestrichene Koordinatensystem (blau) überführt wird. Der Vektor  $\mathbf{x}$  wird davon nicht berührt, allerdings hängt seine Darstellung vom Koordinatensystem ab, wie man an den Projektionen auf die entsprechenden Koordinatenachsen erkennen kann

In Kap. 4 werden wir sehen, dass eine räumliche Drehung um eine beliebige Achse stets durch drei sukzessive Drehungen um die drei Koordinatenachsen dargestellt werden kann. Drehungen im dreidimensionalen Raum lassen sich daher durch drei unabhängige Drehwinkel beschreiben.

## Transformation des Ortsvektors unter Drehungen

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Darstellung des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  ändert, wenn das Koordinatensystem gedreht wird. Eine Punktmasse befindet sich am Ort mit den Koordinaten  $\mathbf{x}$ . Abhängig von der Wahl des Koordinatensystems hat dieser Ort verschiedene Darstellungen. Wir schreiben die Darstellungen vor und nach der Drehung als  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$  bzw.  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)^\top$ . Die Drehung ist in Abb. 2.3 illustriert. Wir wissen, dass für die Koordinaten des Ortes in den beiden Koordinatensystemen

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \quad \text{bzw.} \quad x'_i = \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i \quad (2.15)$$

gilt. Weiterhin sind

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = x'_1 \hat{\mathbf{e}}'_1 + x'_2 \hat{\mathbf{e}}'_2 + x'_3 \hat{\mathbf{e}}'_3 \quad (2.16)$$

gegeben. Dies führt direkt auf

$$\begin{aligned} x'_i &= (x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i \\ &= x_j \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i = x_j \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = r_{ij} x_j, \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei die Matrix  $\mathbf{R}$  durch (2.10) definiert ist. Hier und im Folgenden wird über doppelt auftretende Indizes summiert, ohne das Summenzeichen explizit anzugeben (*Einstein'sche Summenkonvention*):

$$r_{ij} x_j := \sum_{j=1}^3 r_{ij} x_j. \quad (2.18)$$

## 2.1 Drehungen von kartesischen Koordinatensystemen

Offensichtlich erhält man die neuen Koordinaten des Ortsvektors durch Anwendung der Matrix  $\mathbf{R}$  auf die alten Koordinaten. In Kurzform können wir auch

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}. \quad (2.19)$$

schreiben.

**Achtung** Ausdrücke der Form  $r_{ij}a_ib_j$  oder  $r_{ij}r_{kj}$  sind Abkürzungen (und nichts anderes als das) für die längeren Schreibweisen  $\sum_{i,j} r_{ij}a_ib_j$  oder  $\sum_j r_{ij}r_{kj}$ . Dabei wird stets über doppelt auftretende Indizes summiert. Einzelne Indizes müssen auf beiden Seiten einer Gleichung auftreten, z.B.  $a_ib_j = r_{ij}c_kd_k$  oder  $a_ib_j = r_{ik}c_jd_k$ . Gleichungen wie  $a_ib_i = c_i$ ,  $r_{ij} = d_k$  oder  $a_ib_j = r_{ik}c_id_k$  sind nicht korrekt! Indizes können also entweder einfach vorkommen, müssen dann aber auf beiden Seiten einer Gleichung stehen oder auf einer oder beiden Seiten doppelt. Dann wird über sie summiert. Zum Beispiel sind die Gleichungen  $a_ib_i = c_jd_j$  und  $a_kb_k = c_kd_k$  beide gültig und sogar gleichwertig. Indizes dürfen nicht häufiger als zweimal auf einer Seite einer Gleichung vorkommen, da stets paarweise summiert wird. Summationsindizes können also im Rahmen der oben genannten Regeln umbenannt werden. ▶

### Transformation der Darstellung des Ortsvektors unter passiven Drehungen

Der Koordinatenvektor des Ortes transformiert unter passiven Drehungen vermittelt durch die Matrix  $\mathbf{R}$  wie

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}. \quad (2.20)$$

### Frage 5

Machen Sie sich anhand des Beispiels in (2.9) und Abb. 2.3 klar, dass die Drehmatrix  $\mathbf{R}$  verwendet wird, um die neue Darstellung des Ortsvektors zu finden.

### Drehung

Wir betrachten den Vektor mit der ursprünglichen Darstellung  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top = (1, 1, 1)^\top$ . Die Drehung, die durch die Matrix  $\mathbf{R}$  in (2.9) vermittelt wird, führt auf die Darstellung

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi + \sin \phi \\ \cos \phi - \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Bei einer *aktiven* Transformation wird ein physikalischer Vektor  $\mathbf{x}$  mit der Darstellung  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$  in ein und demselben Koordinatensystem gedreht, sodass sich ein *anderer* physikalischer Vektor  $\mathbf{x}'$  mit der Darstellung  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)^\top$  ergibt.

Hier gilt ebenfalls (2.19); dies ist jedoch anders zu interpretieren, da die Basisvektoren von der Transformation nicht betroffen sind.

### Passive und aktive Drehungen

Möchte man die Rückseite einer auf dem Tisch stehenden Vase betrachten, kann man um den Tisch herum gehen. Dies entspricht einer passiven Transformation, da sich die Vase nicht dreht, das Bezugssystem (festgelegt durch die Blickrichtung) schon. Die andere Möglichkeit ist, die Vase zu nehmen und umzudrehen. Dabei ändert sich das Bezugssystem nicht, aber die Vase wird im Raum gedreht. Mathematisch werden beide Vorgänge durch dieselbe Drehung beschrieben, physikalisch kann es jedoch Unterschiede geben: So könnte beispielsweise der Lichteinfall von der Richtung abhängen, sodass man die Rückseite der Vase im einen Fall gut, im anderen nur schlecht sehen kann. Außerdem muss eine aktive Drehung jeweils genau entgegengesetzt zu einer passiven sein, damit man dasselbe Ergebnis erhält. ▲

In Aufgabe 2.1 wird gezeigt, dass Winkel zwischen Vektoren und Längen (Beträge) von Vektoren invariant unter orthogonalen Transformationen sind.

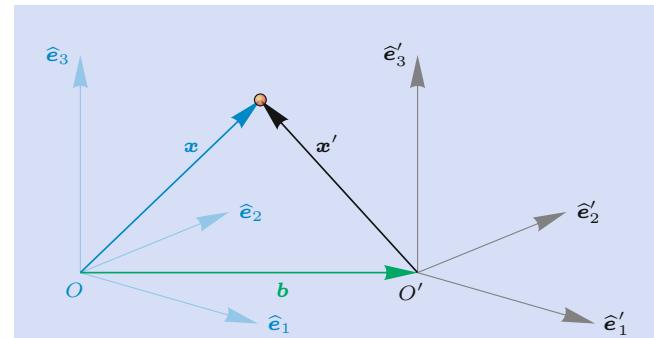
### Gebundene und ungebundene Vektoren, Transformation des Geschwindigkeitsvektors

Man unterscheidet zwischen *gebundenen* und *ungebundenen* Vektoren. Der Ort einer Punktmasse wird durch einen gebundenen Vektor beschrieben, da der Ort von der Wahl des Koordinatenursprungs abhängt. Man sagt, dass der Ortsvektor an den Ursprung gebunden ist. Ein ungebundener Vektor ist dagegen von der Lage des Ursprungs unabhängig. Solche Vektoren sind *Verschiebungsvektoren*, die z. B. die Differenz von zwei Ortsvektoren und somit eine Verschiebung beschreiben. Häufig nennt man ungebundene Vektoren schlicht *Vektoren* und gebundene Vektoren Elemente eines *affinen Raumes*.

Um dies besser zu verstehen, betrachten wir ein Beispiel.

### Verschiebungsvektoren und Drehungen

Zwei Koordinatensysteme,  $S$  und  $S'$ , seien durch eine Translation gegeneinander verschoben, die Achsen aber nicht gegeneinander gedreht (Abb. 2.4). Der Ursprung  $O'$  des gestrichenen Systems  $S'$  habe vom ungestrichenen System  $S$  aus betrachtet die Koordinaten  $\mathbf{b}$ . Der Ursprung  $O'$  hat in  $S'$  natürlich die Koordinaten  $\mathbf{b}' = (0, 0, 0)^\top$ .



**Abb. 2.4** Transformation zwischen kartesischen Koordinatensystemen. Der Ursprung des gestrichenen Koordinatensystems  $S'$  befindet sich vom ungestrichenen Koordinatensystem  $S$  aus betrachtet am Ort  $\mathbf{b}$ . Eine Punktmasse hat in  $S$  die Ortskoordinaten  $\mathbf{x}$  (blau), in  $S'$  dagegen  $\mathbf{x}'$  (schwarz)

Wird der Ort einer Punktmasse beschrieben, so lauten die Koordinaten in  $S$  zunächst  $\mathbf{x}$ . Ein Beobachter in  $S'$  gibt dagegen die Koordinaten  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{b}$  für dieselbe Punktmasse an. Legt man nun eine zweite Punktmasse genau in den Ursprung  $O'$  und fragt nach dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{d}$ , der beide Punktmassen verbindet, so lautet dieser Vektor  $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{b}$  bzw.  $\mathbf{d}' = \mathbf{x}' - \mathbf{b}' = \mathbf{x}'$ . Man sieht sofort, dass dann  $\mathbf{d} = \mathbf{d}'$  gilt, wohingegen  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$  ist. Somit ist  $\mathbf{x}$  ein Beispiel für einen gebundenen,  $\mathbf{d}$  für einen ungebundenen Vektor. Allgemein kann man sagen, dass ungebundene Vektoren ihre Darstellung unter *Transformationen* des Koordinatensystems nicht ändern. ▲

Nehmen wir nun an, dass  $S'$  gegenüber  $S$  zuerst verschoben und dann gedreht ist. Die Verschiebung des Ursprungs sei durch den Vektor  $\mathbf{b}$ , die Rotation durch die Drehmatrix  $\mathbf{R}$  beschrieben. Sowohl  $\mathbf{b}$  als auch  $\mathbf{R}$  seien zeitunabhängig. In diesem Fall gilt für den Ort einer Punktmasse

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{b}), \quad (2.22)$$

da  $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$  ist. Für den Verschiebungsvektor  $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{b}$  gilt dagegen

$$\mathbf{d}' = \mathbf{R}\mathbf{d}. \quad (2.23)$$

Gebundene und ungebundene Vektoren transformieren sich daher unterschiedlich.

### Transformation der Darstellung des Ortsvektors unter passiven Rotationen und Translationen

Der Ortsvektor ist ein an den Ursprung gebundener Vektor. Nur Differenzen von Ortsvektoren,  $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{b}$ , transformieren sich wie

$$\mathbf{d}' = \mathbf{R}\mathbf{d}. \quad (2.24)$$

Solche Größen nennt man im physikalischen Sinne Vektoren.

**Frage 6**

Machen Sie sich die Gültigkeit von (2.22) zeichnerisch klar.

Fragt man nach dem Transformationsverhalten des Geschwindigkeitsvektors der Punktmasse, so sieht man direkt, dass

$$\dot{x}' = \mathbf{R}\dot{x} \quad (2.25)$$

gilt. Geschwindigkeiten transformieren unter Drehungen daher wie ungebundene Vektoren. Eine gleichzeitige Verschiebung des Ursprungs spielt dabei keine Rolle.

**Frage 7**

Überprüfen Sie das Ergebnis in (2.25), indem sie von (2.22) ausgehen und  $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  verwenden.

Wir werden auf das Transformationsverhalten von  $\dot{x}$  bei allgemeinen zeitabhängigen Verschiebungen und Drehungen in Abschn. 2.3 zurückkommen.

## Transformation des Drehimpulses unter Drehungen, polare und axiale Vektoren

Der Drehimpuls  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$  einer Punktmasse am Ort  $\mathbf{x}$  mit Impuls  $\mathbf{p}$  lautet in Komponentenschreibweise

$$L_i = \varepsilon_{ijk}x_j p_k. \quad (2.26)$$

Wir betrachten erneut eine durch eine Rotation  $\mathbf{R}$  vermittelte Transformation vom ungestrichenen System  $S$  zum gestrichenen System  $S'$ . Zur Vereinfachung seien beide Koordinatensysteme nicht gegeneinander verschoben. In  $S'$  lautet der Drehimpuls

$$L'_i = \varepsilon_{ijk}x'_j p'_k = \varepsilon_{ijk}(r_{jl}x_l)(r_{km}p_m) = \varepsilon_{ijk}r_{jl}r_{km}x_l p_m. \quad (2.27)$$

Die Orthogonalität der Drehmatrix,  $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I}$  oder  $r_{pq}r_{iq} = \delta_{pi}$ , lässt sich ausnutzen, um das Matrixprodukt umzuschreiben:

$$\varepsilon_{ijk}r_{jl}r_{km} = \varepsilon_{pjkl}\delta_{pi}r_{jl}r_{km} = \varepsilon_{pjkl}(r_{pq}r_{il})r_{jl}r_{km}. \quad (2.28)$$

Wie im „Mathematischen Hintergrund“ 2.2 und 2.3 erläutert wird, erfüllen  $3 \times 3$ -Matrizen die Relation

$$\det(\mathbf{A}) = \varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}. \quad (2.29)$$

Hier ist  $\det(\mathbf{A})$  die *Determinante* der Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ . Allge-

meiner lässt sich der folgende Zusammenhang zeigen (Riley et al. 2006):

$$\varepsilon_{pjkl}a_{pq}a_{il}a_{km} = \det(\mathbf{A})\varepsilon_{qlm}. \quad (2.30)$$

Dies wiederum führt mit der Drehmatrix  $\mathbf{R}$  statt  $\mathbf{A}$  auf

$$\varepsilon_{pjkl}r_{pq}r_{il}r_{km}r_{iq} = \det(\mathbf{R})\varepsilon_{qlm}r_{iq}. \quad (2.31)$$

Es folgt sofort der transformierte Drehimpuls

$$L'_i = \det(\mathbf{R})r_{iq}(\varepsilon_{qlm}r_{lp}p_m) = \det(\mathbf{R})r_{iq}L_q \quad (2.32)$$

bzw.

$$L' = \det(\mathbf{R})\mathbf{RL} \quad (2.33)$$

in Vektorform.

Im Gegensatz zu Geschwindigkeiten bzw. Impulsen, die entsprechend  $\mathbf{p}' = \mathbf{Rp}$  transformieren, tritt beim Drehimpuls ein zusätzlicher Faktor  $\det(\mathbf{R})$  auf. Dies ist typisch für Größen, in deren Definitionen das Levi-Civita-Symbol auftaucht. Der Drehimpuls ändert daher sein Vorzeichen, wenn die Matrix  $\mathbf{R}$  eine uneigentliche Transformation mit  $\det(\mathbf{R}) = -1$  ist. Beispiele hierfür sind Spiegelungen oder das paarweise Vertauschen von Koordinatenachsen. Eigentliche Drehungen sind dagegen stets durch  $\det(\mathbf{R}) = +1$  ausgezeichnet.

### Spiegelung

Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

vermittelt eine Spiegelung an der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene, d. h., die Koordinaten  $\mathbf{x}$  des Ortsvektors werden folgendermaßen transformiert:  $(x_1, x_2, x_3)^\top \rightarrow (x_1, x_2, -x_3)^\top$ . Offensichtlich ist  $\det(\mathbf{A}) = -1$ . Es handelt sich also um eine uneigentliche orthogonale Matrix. Die neuen Basisvektoren sind wegen

$$\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = -\varepsilon_{ijk}\hat{\mathbf{e}}_k \quad (2.35)$$

nicht mehr rechtshändig, sondern *linkshändig*. Man sagt auch, dass die *Helizität* vertauscht wurde. ◀

## 2.2 Galilei-Transformationen

In Abschn. 2.1 wurden einige mathematischen Grundlagen für Koordinatentransformationen (insbesondere Drehungen) bereitgestellt. Diese Ergebnisse werden nun ausgenutzt, um physikalische Aussagen treffen zu können. Das Verhalten von physikalischen Systemen unter Transformationen ist von fundamentaler Bedeutung für die theoretische Physik. Dies gilt vor allem, wenn Systeme unter gewissen Transformationen invariant, d. h. symmetrisch sind. Wie in Kap. 5 diskutiert wird, führen Symmetrien

## Vertiefung: Transformationsverhalten von Vektoren Polare und axiale Vektoren

Man unterscheidet physikalische Vektoren entsprechend des Verhaltens ihrer Darstellungen unter orthogonalen Transformationen  $\mathbf{R}$ , die sie von einem ungestrichenen in ein gestrichenes Koordinatensystem überführen. Transformiert ein Darstellungsvektor wie der Impuls,

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p},$$

d. h. unabhängig von  $\det(\mathbf{R})$ , so ist diese Größe ein *polarer Vektor*. Transformiert ein Darstellungsvektor wie der Drehimpuls,

$$\mathbf{L}' = \det(\mathbf{R}) \mathbf{R} \mathbf{L},$$

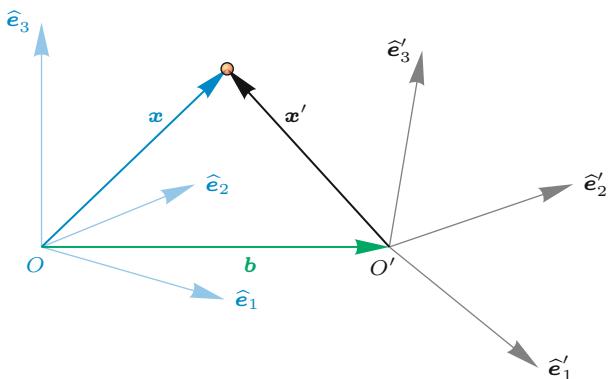
ändert er also bei einer uneigentlichen Transformation das Vorzeichen, so ist diese Größe ein *axialer Vektor*. Allgemein ist das Kreuzprodukt zweier polarer Vektoren ein axialer Vektor. Das Skalarprodukt zweier polarer Vektoren ist ein Skalar, der unter uneigentlichen Transformationen invariant ist. Das Produkt eines skalaren und eines polaren Vektors, z. B.  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}$ , ist ein *Pseudoskalar*, der sein Vorzeichen ändert, wenn  $\det(\mathbf{R}) = -1$  ist. Die physikalischen Begriffe der polaren und axialen Vektoren sind von der mathematischen Definition eines Vektors zu unterscheiden.

in der Regel auf Erhaltungsgrößen, deren Kenntnis das Lösen physikalischer Probleme stark vereinfacht. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die Newton'schen Axiome invariant unter einer gewissen Klasse von Koordinatentransformationen sind. Diese werden als Galilei-Transformationen bezeichnet. Sie überführen Inertialsysteme ineinander. Anhand der Galilei-Transformationen werden einige Grundlagen der mathematischen Gruppen erläutert, die in der theoretischen Physik eine wichtige Rolle spielen.

## Kovarianz des ersten Newton'schen Axioms unter Galilei-Transformationen

Wir haben in Abschn. 1.2 gelernt, dass das erste Newton'sche Axiom in allen Inertialsystemen gültig ist: Sind Kräfte abwesend, bewegen sich Punktmassen gleichförmig-geradlinig. Dieses Prinzip besagt, dass alle Inertialsysteme im Hinblick auf die Newton'schen Axiome gleichwertig sind. Weiterhin bedeutet dies, dass die Bewegungsgleichungen *kovariant*, d. h. forminvariant, sein müssen, wenn eine Transformation von einem Inertialsystem in ein anderes durchgeführt wird. Kein Inertialsystem kann sich gegenüber einem anderen auszeichnen. Genauso darf sich die Form der Bewegungsgleichungen in keinem Inertialsystem von der in einem anderen Inertialsystem unterscheiden. Diese Aussagen sollen im weiteren Verlauf näher beleuchtet werden.

Wir untersuchen nun, welchen Einfluss Koordinatentransformationen auf die Bewegungsgleichungen einer Punktmasse haben. Das Ausgangssystem sei ein Inertialsystem  $S$  mit Ursprung  $O$  und den Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_i$ . Das neue System sei  $S'$  mit Ursprung  $O'$  und Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}'_i$ . Zusätzlich zu Transformationen, vermittelt durch orthogonale Matrizen  $\mathbf{R}$ , erlauben wir räumliche und zeitliche Translationen. Der Ursprung  $O'$  von  $S'$  liege von  $S$  aus betrachtet an einem beliebigen Ort  $\mathbf{b}$  (Abb. 2.5). Offensichtlich sind die Koordinaten eines Punktes in  $S$  und  $S'$  wegen



**Abb. 2.5** Transformation zwischen kartesischen Koordinatensystemen. Der Ursprung des gestrichenen Koordinatensystems  $S'$  befindet sich vom ungestrichenen Koordinatensystem  $S$  aus betrachtet am Ort  $\mathbf{b}$ . Zusätzlich sind die Koordinatenachsen von  $S'$  und  $S$  gegeneinander gedreht. Eine Punktmasse hat in  $S$  die Ortskoordinaten  $\mathbf{x}$  (blau), in  $S'$   $\mathbf{x}'$  (schwarz)

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top \text{ in der Form}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{R}^\top \mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' = \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{b}) \quad (2.36)$$

miteinander verbunden.

Im Rahmen der Newton'schen Mechanik ist die Zeit ein externer Parameter, dessen Verlauf nicht von der Bewegung von Punktmassen im physikalischen System abhängt. Allerdings kann der Zeitnullpunkt beliebig gewählt werden. Wir schreiben daher die Relation zwischen den Zeiten  $t$  und  $t'$  in  $S$  und  $S'$  in der Form

$$t' = t - t_0, \quad (2.37)$$

d. h., es gebe eine konstante zeitliche Verschiebung. Daraus folgt das Differenzial

$$dt' = dt. \quad (2.38)$$

Somit hängen Zeitableitungen nicht von der Wahl von  $t_0$  ab.

## 2.3 Mathematischer Hintergrund: Matrizen III

### Matrixinversion und Rechenregeln für Determinanten

Hier wollen wir nun noch einige Hilfsmittel zur Berechnung von Determinanten bzw. inversen Matrizen bereitstellen. Ein Hilfsmittel dafür werden Unterdeterminanten sein.

**Existenz der inversen Matrix** Man nennt eine Matrix  $A$  invertierbar, wenn es eine Matrix  $B$  gibt, sodass

$$AB = BA = I$$

gilt. In diesem Fall nennt man  $B$  die *inverse Matrix* und schreibt dafür  $A^{-1}$ . Nicht jede Matrix besitzt eine Inverse. Eine Inverse existiert aber genau dann, wenn  $\det(A) \neq 0$ . Eine solche Matrix nennt man auch *regulär*. Eine nichtreguläre Matrix heißt auch *singulär*.

Betrachtet man wieder die linearen Abbildungen, die durch eine Matrix beschrieben werden, so ist eine Matrix genau dann invertierbar, wenn die zugehörige lineare Abbildung invertierbar ist, und die inverse Matrix beschreibt gerade die Umkehrabbildung.

#### Rechenregeln für inverse Matrizen

- $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- sind  $A$  und  $B$  invertierbar, so ist auch  $AB$  invertierbar, und es gilt  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$
- ist  $A$  orthogonal, so gilt  $A^{-1} = A^\top$

**Unterdeterminanten** Ist  $A$  eine  $N \times N$ -Matrix, so schreiben wir  $A_{ij}$  für die Matrix, die man aus  $A$  erhält, wenn man die  $i$ -te Zeile und die  $j$ -te Spalte streicht. Da dies dann wieder eine quadratische Matrix ist, können wir hiervon die Determinante berechnen. Wir schreiben

$$A^{(ij)} = \det(A_{ij})$$

und nennen dies *Unterdeterminante* oder *Minor*.

**Laplace'scher Entwicklungssatz** Der *Laplace'sche Entwicklungssatz* ist eine Möglichkeit, Determinanten zu berechnen. Diese Methode ist besonders dann geeignet, wenn die Matrix viele Nullen enthält. Es gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} a_{ij} A^{(ij)},$$

wobei  $a_{ij}$  die Matrixelemente von  $A$  sind. Dies kann man sich so vorstellen, dass man die  $i$ -te Zeile auswählt (am besten eine, in der es viele Nullen gibt) und sich dann jedes Element in dieser Zeile nimmt, das nicht null ist. Für jedes solche Element berechnet man den Wert der Unterdeterminante (z. B. wieder durch die Laplace-Entwicklung). Die berechneten Werte summiert man dann gewichtet mit den  $a_{ij}$  und entsprechenden Vorzeichen auf. Das Ganze funktioniert auch mit Spalten statt Zeilen.

Das Vorzeichen kann man sich nach folgendem Schachbrettmuster merken:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Cramer'sche Regel** Die *Cramer'sche Regel* ist ein Schema zum Lösen von linearen Gleichungssystemen. Mit ihrer Hilfe kann man eine Formel herleiten, die zur Berechnung der Matrixelemente der inversen Matrix dient. Es gilt

$$A^{-1} = B = (b_{ij}) \quad \text{mit} \quad b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} A^{(ii)}}{\det(A)}.$$

Die Cramer'sche Regel erfordert viel Rechenaufwand, deshalb lohnt sie sich nur für kleine Matrizen. Für  $N = 2$  lautet die Regel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Hier werden also in der Matrix die Diagonalelemente vertauscht; bei den beiden anderen wird das Vorzeichen geändert und am Schluss durch die Determinante geteilt.

#### Literatur

- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., Spektrum (2014)
- Bosch, S.: Lineare Algebra. 4. Aufl., Springer (2007)

Es stellt sich nun die Frage, welchen Einfluss die oben eingeführten Transformationen auf die Bewegungsgleichungen einer Punktmasse haben. In  $S$  lautet das erste Newton'sche Axiom  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ . Die ersten beiden Zeitableitungen von  $\mathbf{x}'$  haben wegen (2.36) die allgemeine Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{b}}) + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x} - \mathbf{b}), \\ \ddot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{R}(\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{b}}) + 2\dot{\mathbf{R}}(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{b}}) + \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{x} - \mathbf{b}).\end{aligned}\quad (2.39)$$

An diesen Gleichungen lässt sich das Prinzip der Forminvarianz (Kovarianz) illustrieren. Im Gegensatz zu  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  (erstes Newton'sches Axiom in Inertialsystemen) treten in (2.39) eine Reihe von Zusatztermen auf, sodass die Gleichungen nicht die gleiche Form haben. Allerdings erkennt man, dass das erste Newton'sche Axiom in  $S'$  zu  $\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}$  wird, wenn  $\mathbf{R}$  konstant ist und  $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$  gilt bzw.  $\dot{\mathbf{b}}$  konstant ist. Dies bedeutet, dass eine Koordinatentransformation mit  $\mathbf{R} = \text{const}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{b}_0$  ( $\mathbf{v}_0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{b}_0 = \text{const}$ ) und  $t_0 = \text{const}$  von einem Inertialsystem auf ein anderes Inertialsystem führt, in dem das erste Newton'sche Axiom ebenfalls gültig ist. In diesem Fall sind die Bewegungsgleichungen also kovariant. Inertialsysteme können daher

- durch eine konstante orthogonale Matrix  $\mathbf{R}$  auseinander hervorgehen (drei Parameter),
- um einen konstanten Vektor  $\mathbf{b}_0$  verschoben sein (drei Parameter),
- sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  relativ zueinander bewegen (drei Parameter) und
- verschiedene Zeitnullpunkte besitzen (ein Parameter).

Transformationen, welche diese Eigenschaften besitzen, nennt man *Galilei-Transformationen*.

### Allgemeine Galilei-Transformation

Eine eigentliche Galilei-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen überführt die Darstellung des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  und der Zeit  $t$  in

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t - \mathbf{b}_0), \quad t' = t - t_0. \quad (2.40)$$

Die Drehmatrix  $\mathbf{R}$ , Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$ , Verschiebung  $\mathbf{b}_0$  und Verschiebung  $t_0$  der Zeitnullpunkte sind konstant.

Ist  $S'$  gegenüber  $S$  beschleunigt, d. h. sind  $\mathbf{R}$  oder  $\dot{\mathbf{b}}$  nicht konstant, so treten Zusatzterme auf, welche die Kovarianz aufheben. Diese Zusatzterme sind bereits in (2.39) enthalten. Eine gründliche Diskussion wird allerdings erst in Abschn. 2.3 und 2.4 erfolgen, was schließlich auf die sogenannten Scheinkräfte führen wird.

### Kovarianz des ersten Newton'schen Axioms unter Galilei-Transformationen

Das erste Newton'sche Axiom ändert seine Form unter Galilei-Transformationen nicht. Dies ist äquivalent zu einem Übergang von einem zu einem anderen Inertialsystem. Sind zwei Koordinatensysteme gegeneinander beschleunigt, treten Zusatzterme auf, und das erste Newton'sche Axiom ist nicht mehr kovariant.

**Achtung** Obwohl  $\mathbf{R}$  eine allgemeine orthogonale Matrix sein kann, beschränkt man sich bei der Diskussion von Galilei-Transformationen häufig auf Drehmatrizen, die eine Untergruppe der orthogonalen Matrizen bilden und sich durch  $\det(\mathbf{R}) = +1$  auszeichnen. ▶

### Frage 8

Machen Sie sich klar, dass die Geschwindigkeit unter Galilei-Transformationen gemäß  $\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{b}})$  transformiert.

### Kovarianz des zweiten Newton'schen Axioms unter Galilei-Transformationen

Im weiteren Verlauf beschränken wir uns auf Galilei-Transformationen und werfen einen Blick auf das zweite Newton'sche Axiom:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}). \quad (2.41)$$

Hier ist  $\mathbf{F}$  eine Kraft, die zur Zeit  $t$  auf die Punktmasse  $m$  wirkt, welche sich am Ort  $\mathbf{x}$  befindet und sich mit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}$  bewegt. Wird eine Galilei-Transformation auf (2.41) angewendet, nimmt sie die Form

$$m\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}'(t', \mathbf{x}', \dot{\mathbf{x}}') \quad (2.42)$$

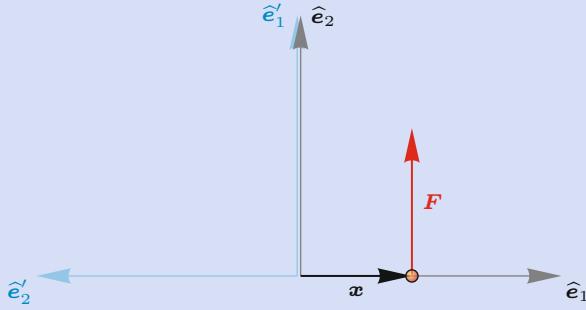
an, wobei offensichtlich

$$\mathbf{F}'(t', \mathbf{x}', \dot{\mathbf{x}}') = \mathbf{R}\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (2.43)$$

gilt. Obwohl  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{F}'$  im Allgemeinen unterschiedliche Funktionen der Koordinaten sind, bleibt die Form des zweiten Newton'schen Axioms invariant unter Galilei-Transformationen, d. h., es treten keine Zusatzterme auf. Das zweite Newton'sche Axiom ist somit ebenfalls kovariant unter Galilei-Transformationen. Physikalisch sind die beiden Beschreibungen in (2.41) und (2.42) völlig gleichwertig, da es sich lediglich um eine passive Koordinatentransformation handelt. Insbesondere sind die Ausdrücke  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{F}'$  nur zwei verschiedene Darstellungen in den Koordinatensystemen  $S$  und  $S'$  für dieselbe physikalische Kraft.

### Auswirkung einer Drehung auf eine Kraft

Zur Veranschaulichung betrachten wir ein Inertialsystem  $S$ , in dem sich die Punktmasse  $m$  am Ort  $x = r\hat{e}_1$  befindet, wobei  $r$  der Abstand zum Ursprung ist. Auf die Punktmasse wirke eine Kraft  $\mathbf{F}(x) = F\hat{e}_2$ . Nun stellen wir uns ein anderes Inertialsystem  $S'$  vor, das nur durch eine Rotation  $\mathbf{R}$  um  $90^\circ$  um die  $\hat{e}_3$ -Achse aus  $S$  hervorgeht (Abb. 2.6).



**Abb. 2.6** Eine Punktmasse befindet sich vom ungestrichenen Koordinatensystem (schwarz) aus gesehen am Ort  $x = r\hat{e}_1$ , vom gestrichenen (blau) aus betrachtet bei  $-r\hat{e}'_2$ . Auf sie wirkt eine Kraft  $\mathbf{F}$  in Richtung  $\hat{e}_2$  bzw.  $\mathbf{F}'$  in Richtung  $\hat{e}'_1$ . Physikalisch sind beide Betrachtungen völlig äquivalent

In  $S'$  lauten die Koordinaten der Punktmasse  $x' = \mathbf{R}x = -r\hat{e}'_2$ , und die Kraft ist  $\mathbf{F}'(x') = \mathbf{R}\mathbf{F}(x) = F\hat{e}'_1$ . Offensichtlich wirkt die Kraft in  $S$  am Ort  $x$ , in  $S'$  aber am Ort  $x'$ , was physikalisch gleichwertig ist.

### Kovarianz der Newton'schen Axiome unter Galilei-Transformationen

Das zweite Newton'sche Axiom ist unter Galilei-Transformationen kovariant. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen ändern ihre Form beim Übergang zwischen Inertialsystemen nicht.

## Galilei-Transformationen als mathematische Gruppe

Unter Galilei-Transformationen versteht man alle Transformationen, die durch konstante orthogonale Transformationen, Verschiebungen, Relativgeschwindigkeiten und Zeittranslationen charakterisiert sind. Hier beschränken wir uns auf eigentliche orthogonale Transformationen mit  $\det(\mathbf{R}) = +1$ . Spiegelungen sind somit ausgeschlossen.

Galilei-Transformationen sind im Rahmen der Newton'schen Mechanik diejenigen Transformationen, die Inertialsysteme ineinander überführen und die Newton'schen Axiome invariant

### 2.3 Beschleunigte Bezugssysteme

lassen. Wir werden in Kap. 9 sehen, dass sich diese Situation ändert, wenn relativistische Effekte ( $|v_0|$  nicht klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit) berücksichtigt werden. Stattdessen werden dort die Lorentz- bzw. Poincaré-Transformationen eingeführt, die im Grenzfall kleiner Relativgeschwindigkeiten wieder in die Galilei-Transformationen übergehen.

Mathematisch bilden die Galilei-Transformationen eine Gruppe (siehe „Mathematischer Hintergrund“ 2.4). Insbesondere gibt es eine triviale Transformation, die das Inertialsystem unverändert lässt,

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}, \quad t_0 = 0, \quad (2.44)$$

und zu jeder Galilei-Transformation gibt es eine inverse Transformation. Zwei aufeinanderfolgende Galilei-Transformationen bilden wieder eine Galilei-Transformation (Aufgabe 2.2). Die für die theoretische Physik wichtige  $SO(3)$ -Drehgruppe (das S in  $SO(3)$  bedeutet, dass spezielle orthogonale Matrizen, nämlich jene mit  $\det(\mathbf{R}) = +1$  betrachtet werden) beinhaltet alle Drehungen im dreidimensionalen Raum um den Ursprung und ist somit eine Untergruppe der Galilei-Gruppe.

### Frage 9

Überlegen Sie sich, warum die Galilei-Gruppe keine abelsche, d. h. keine kommutative Gruppe sein kann. Der Schlüssel liegt in den mathematischen Eigenschaften der Drehmatrizen (Abschn. 2.1).

## 2.3 Beschleunigte Bezugssysteme

In Abschn. 2.2 haben wir gesehen, dass die Bewegungsgleichungen unter Galilei-Transformationen, also Transformationen zwischen Inertialsystemen, invariant sind. In diesem Abschnitt gehen wir noch einen Schritt weiter und beschäftigen uns mit der Frage, welche Konsequenzen der Übergang zu einem beschleunigten Koordinatensystem aufwirft. Insbesondere linear beschleunigte und rotierende Bezugssysteme sind hier von Interesse, da sie in der Physik häufig anzutreffen sind. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, das Transformationsverhalten von Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren zu verstehen, was in Abschn. 2.4 schließlich auf die sogenannten Scheinkräfte führen wird.

### Definition der Koordinatentransformation

Wir betrachten nun zeitabhängige Verschiebungen  $\mathbf{b}(t)$  und Matrizen  $\mathbf{R}(t)$ . Dabei folgen wir den Konventionen in Abschn. 2.2 und beginnen mit den Gleichungen in (2.39), die wir hier nochmals wiederholen:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \mathbf{R}(\dot{x} - \dot{b}) + \dot{\mathbf{R}}(x - b), \\ \ddot{x}' &= \mathbf{R}(\ddot{x} - \ddot{b}) + 2\dot{\mathbf{R}}(\dot{x} - \dot{b}) + \ddot{\mathbf{R}}(x - b). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Die gegenseitige Lage der beiden Bezugssysteme wurde bereits in Abb. 2.5 gezeigt.

## 2.4 Mathematischer Hintergrund: Gruppen

### Einführung in die Gruppentheorie

Wir wollen kurz auf grundlegende algebraische Strukturen eingehen, die für die theoretische Physik extrem wichtig sind: die Gruppen.

**Gruppe** Eine *Gruppe* ist eine Menge  $G$  zusammen mit einer Verknüpfung  $\circ$ , sodass gilt:

- $\circ$  ist assoziativ, d. h. für alle  $a, b, c \in G$  gilt  

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$
- Es gibt ein neutrales Element  $e$ , sodass für alle  $a \in G$  gilt  

$$e \circ a = a \circ e.$$
- Zu jedem  $a \in G$  gibt es ein inverses Element, das wir mit  $a^{-1}$  bezeichnen und für das gilt  

$$a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e.$$

Man nennt die Gruppe  $G$  *kommutativ* oder *abelsch*, wenn außerdem

$$a \circ b = b \circ a$$

ist. Man schreibt dann für die Gruppe auch  $(G, \circ)$ .

**Beispiele** Gruppen haben wir schon viele kennengelernt. So ist jeder Vektorraum zusammen mit der Vektorraumaddition eine Gruppe. Weitere Gruppen sind z. B.  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$  oder  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ .

Gruppen treten außerdem häufig bei Symmetriebetrachtungen auf; so bilden beispielsweise die Symmetrien (d. h. Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen) der Ebene oder des dreidimensionalen Raumes eine Gruppe, wobei die Verknüpfung hier die Hintereinanderausführung ist. Auch die wichtigen Galilei- und Lorentz-Transformationen bilden jeweils eine Gruppe.

Man unterscheidet außerdem zwischen *diskreten* und *kontinuierlichen* Gruppen. Ein Beispiel für erstere ist die Menge der Spiegelungen an einer Koordinatenachse. Kontinuierliche Gruppen hängen von einem oder mehreren kontinuierlichen Parametern ab. Ein Beispiel hierfür ist die Menge der Drehungen in der Ebene. Diese hängt von einem Parameter, nämlich dem Drehwinkel, ab.

**Orthogonale Gruppe** Eine besonders wichtige Gruppe ist die Gruppe der Symmetrien im  $N$ -dimensionalen euklidischen Raum. An dieser Stelle wollen wir uns auf Drehungen und Spiegelungen beschränken, also keine Verschiebungen betrachten. Symmetrien haben die Eigenschaft, dass sie Längen und Winkel erhalten. Für jede orthogonale Matrix  $\mathbf{R}$  gilt

nämlich

$$\langle \mathbf{R}x, \mathbf{R}y \rangle = x^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R}y = x^\top y = \langle x, y \rangle,$$

und dies bedeutet gerade, dass orthogonale Matrizen Längen und Winkel erhalten. Die Gruppe der Symmetrien kann also durch die Gruppe der orthogonalen  $N \times N$ -Matrizen dargestellt werden. Diese Gruppe bezeichnet man auch mit  $O(N)$ . Die Menge der orthogonalen  $N \times N$ -Matrizen mit Determinanten  $+1$  bildet eine Untergruppe von  $O(N)$ , die wir *spezielle orthogonale Gruppe* nennen und mit  $SO(N)$  bezeichnen. Diese Gruppe beschreibt genau die orientationserhaltenden Symmetrien im  $N$ -dimensionalen Raum, d. h. die Drehungen.

**Gruppenhomomorphismen** Mit speziellen Funktionen kann man Beziehungen zwischen Gruppen beschreiben. Diese Funktionen nennt man *Gruppenhomomorphismen*. Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung  $f : G_1 \rightarrow G_2$  zwischen zwei Gruppen  $G_1$  und  $G_2$ , die

$$f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$$

für alle  $a, b \in G_1$  erfüllt. Hierbei müssen die beiden Verknüpfungen nicht unbedingt dieselben sein. Ein Beispiel für einen Gruppenhomomorphismus ist z. B. die Determinantefunktion

$$\det : O(N) \rightarrow \{\pm 1\}.$$

**Darstellungen von Gruppen** Es ist wichtig, zwischen Gruppen und Darstellungen von Gruppen zu unterscheiden. Die Menge der Drehungen ist z. B. eine Gruppe, für die man zunächst einmal keine Matrizen benötigt. Wählt man nun eine feste Basis (d. h. ein Koordinatensystem), so lässt sich diese Gruppe durch  $N \times N$ -Matrizen darstellen. Wählt man eine andere Basis, so wird dieselbe Drehung durch eine andere Matrix dargestellt. Eine Gruppe besitzt also im Allgemeinen mehrere Darstellungen. Per Definition ist eine *Darstellung* ein Gruppenhomomorphismus von der betrachteten Gruppe  $G$  in die Menge der  $N \times N$ -Matrizen.

Wählt man für eine Gruppe eine feste Darstellung, so kann man die Gruppenoperationen (z. B. die Drehung eines Vektors um einen festen Winkel) als Matrix-Vektor-Multiplikation schreiben.

### Literatur

- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., Spektrum (2014)
- Artin, M.: Algebra. Birkhäuser (1990)

Das ungestrichene System sei ein Inertialsystem  $S$  mit Basisvektoren  $\hat{e}_i$ . Weiterhin führen wir das gestrichene und im Allgemeinen beschleunigte Bezugssystem  $\mathcal{B}$  mit Basisvektoren  $\hat{e}'_i(t)$  ein. Da  $\mathcal{B}$  rotieren kann, sind seine Basisvektoren in der Regel zeitabhängig. Wir werden ausschließlich passive Transformationen betrachten, durch die lediglich das Koordinatensystem gewechselt wird. Weiterhin wollen wir annehmen, dass es sich bei  $\mathbf{R}$  um eine Drehmatrix handelt, da diese in der Physik am wichtigsten ist. Der Vektor  $\mathbf{b}$  beschreibt die Lage des Ursprungs des Systems  $\mathcal{B}$  von  $S$  aus gesehen,  $\mathbf{x}$  ist der Ort einer Punktmasse  $m$ . Sowohl  $\mathbf{b}(t)$  als auch  $\mathbf{R}(t)$  sind vorgegebene Funktionen der Zeit, wobei wir zur Vereinfachung den Ursprung der Zeit unverändert lassen,  $t' = t$ , was keine Einschränkung darstellt.

Wir haben in Abschn. 2.2 bereits erkannt, dass zeitabhängige Transformationen zu Zusatztermen führen, welche die Kovarianz der Newton'schen Axiome verletzen. Diese Zusatzterme sind letztlich die Ursache für die Zentrifugal- und die Corioliskraft in rotierenden Bezugssystemen, wie wir in Abschn. 2.4 sehen werden.

## Linear beschleunigte Bezugssysteme

Wir beginnen mit dem einfachen Fall, dass  $\mathcal{B}$  im Vergleich zu  $S$  lediglich linear beschleunigt ist. Die Zeitableitung der Transformationsmatrix verschwindet folglich:  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ . Dennoch erlauben wir weiterhin eine konstante Drehung, d. h.,  $\mathbf{R}$  muss nicht zwangsläufig der Einheitsmatrix entsprechen. In diesem Fall lauten die Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Punktmasse in  $\mathcal{B}$

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{b}}), \quad \ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{R}(\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{b}}). \quad (2.46)$$

Für  $\ddot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$  werden die Beschleunigungen in  $S$  und  $\mathcal{B}$  nur durch eine einfache Drehung ineinander überführt, und die Transformation ist eine Galilei-Transformation. Ansonsten muss die relative Beschleunigung von  $\mathcal{B}$  zu  $S$  ebenfalls berücksichtigt werden. Diese Beschleunigung erlebt man ständig im Alltag, z. B. wenn das Auto oder der Zug, in dem man sitzt, auf gerader Strecke beschleunigt oder verzögert und man in den Sitz gedrückt oder aus diesem gehoben wird. In diesem Fall entspricht  $S$  der Erdoberfläche und  $\mathcal{B}$  dem Koordinatensystem, das durch die Wände des Fahrzeugs definiert ist. Sind die Koordinatensysteme nicht gegeneinander gedreht, lauten die Transformationsgleichungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung einfach

$$\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{b}}, \quad \ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{b}}. \quad (2.47)$$

### Fahrstuhl

Betrachten wir den freien Fall eines Fahrstuhls. Das Koordinatensystem  $\mathcal{B}$  sei durch die Wände des Fahrstuhls definiert. Der Ursprung  $\mathbf{b}$  könnte sich zum Beispiel am

Boden des Fahrstuhls befinden. Ein Beobachter im Fahrstuhl befindet sich am Ort  $\mathbf{x}$ .

Im freien Fall werden der Beobachter und der Fahrstuhl mit der Erdbeschleunigung beschleunigt, wenn sie aus  $S$  beobachtet werden, d. h.  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}$  und  $\ddot{\mathbf{b}} = \mathbf{g}$ . Im Koordinatensystem des Fahrstuhls ist der Beobachter somit unbeschleunigt, da  $\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}$  folgt. Der Beobachter ist im Fahrstuhl daher schwerelos, da sich hier die Scheinkraft in  $\mathcal{B}$  und die Schwerkraft verursacht durch die Erddanziehung gerade aufheben. Dies ist der Ansatzpunkt für die allgemeine Relativitätstheorie. Einstein fragte sich, ob die Schwerkraft nicht generell als Scheinkraft angesehen werden könnte, was ihn schließlich darauf brachte, diese mit Raumkrümmung in Verbindung zu bringen. Der freie Fall wird in der Forschung häufig verwendet, um ein schwereloses System zu simulieren. Beispiele hierfür sind Falltürme oder Parabelflüge (Abb. 2.7).



**Abb. 2.7** Parabelflug einer DC-9. Das Flugzeug beschleunigt zunächst nach oben und geht danach in einen Trägheitsflug ohne Schub über. Die Flugbahn beschreibt dabei eine Parabel, und das Flugzeug befindet sich für etwa 20 s nahezu im freien Fall (lediglich Reibungskräfte werden vom Piloten durch die Triebwerke ausgeglichen). In dieser Zeit können Experimente in Schwerelosigkeit durchgeführt werden (© NASA) ▶

## Rotierende Bezugssysteme

Nun nehmen wir an, dass sich beide Bezugssysteme beliebig gegeneinander drehen können. Das System  $S$  ist nach wie vor ein Inertialsystem. Wir konzentrieren uns zunächst auf das Transformationsverhalten des Verschiebungsvektors  $\mathbf{d} := \mathbf{x} - \mathbf{b}$ . Er kann später ohne Einschränkung wieder durch  $\mathbf{x} - \mathbf{b}$  ersetzt werden.

Aufgrund der Eigenschaften der Drehmatrix,  $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I}$ , können wir die erste Zeitableitung in (2.45) in der Form

$$\dot{\mathbf{d}}' = \mathbf{R}\dot{\mathbf{d}} + (\mathbf{R}\mathbf{R}^\top)\dot{\mathbf{R}}\mathbf{d} = \mathbf{R}[\dot{\mathbf{d}} + (\mathbf{R}^\top\dot{\mathbf{R}})\mathbf{d}] \quad (2.48)$$

schreiben. Wegen  $\mathbf{R}^\top\mathbf{R} = \mathbf{I}$  ist weiterhin

$$\mathbf{R}^\top\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}}^\top\mathbf{R} = \mathbf{0} \implies \mathbf{R}^\top\dot{\mathbf{R}} + (\mathbf{R}^\top\dot{\mathbf{R}})^\top = \mathbf{0}. \quad (2.49)$$

Man sieht daran, dass die Matrix  $\mathbf{B} := \mathbf{R}^\top\dot{\mathbf{R}}$  ihr Vorzeichen wechselt, wenn man sie transponiert. Solche Matrizen heißen *schiefsymmetrisch* oder *antisymmetrisch*. In drei Dimensionen gilt für sie

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

oder in Kurzform  $b_{ij} = -b_{ji}$ . Die Diagonalelemente müssen verschwinden:  $b_{11} = -b_{11} = 0$  usw. Aus diesem Grund kann eine schiefsymmetrische  $3 \times 3$ -Matrix nur drei unabhängige Komponenten enthalten.

### Frage 10

Begründen Sie, dass eine symmetrische  $3 \times 3$ -Matrix im Allgemeinen sechs unabhängige Komponenten hat.

Durch eine zunächst willkürliche Definition kann man eine schiefsymmetrische Matrix als

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

schreiben. Die Bedeutung von  $\boldsymbol{\omega} := (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top$  wird in Kürze klar werden. Mithilfe des Levi-Civita-Symbols kann die Matrix auch in der Form

$$b_{ij} = r_{ki}r_{kj} = \epsilon_{ijk}\omega_k \quad (2.52)$$

dargestellt werden.

### Frage 11

Zeigen Sie mithilfe der Identität  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ , dass aus (2.52) der Zusammenhang

$$\omega_l = \frac{1}{2}\epsilon_{ijl}b_{ij} \quad (2.53)$$

folgt.

Gln. (2.48) und (2.52) führen somit auf

$$\dot{\mathbf{d}}' = \mathbf{R}(\dot{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}). \quad (2.54)$$

Dieses wichtige Zwischenergebnis besagt, dass die Zeitableitung eines polaren Vektors in einem rotierenden Bezugssystem

(d.h. für  $\dot{\mathbf{R}} \neq 0$ ) einen Zusatzterm aufweist, der über den naiv zu erwartenden Term  $\mathbf{R}\dot{\mathbf{d}}$  hinausgeht. Der Grund ist die Zeitabhängigkeit der Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}'_i$  von  $\mathcal{B}$ , die ebenfalls einen Beitrag zu  $\dot{\mathbf{d}}'$  leisten. Wie wir in Kürze sehen werden, enthält dieser Zusatzterm Informationen über die Rotation von  $\mathcal{B}$ . Bevor wir uns weiter mit dem Transformationsverhalten von  $\dot{\mathbf{d}}$  und  $\ddot{\mathbf{d}}$  beschäftigen, wollen wir uns die Größe  $\boldsymbol{\omega}$  genauer ansehen.

## Physikalische Bedeutung von $\boldsymbol{\omega}$

Um zu verstehen, welche Bedeutung  $\boldsymbol{\omega}$  hat, untersuchen wir eine Drehung zwischen einem Zeitpunkt  $t_0$  und einem infinitesimal späteren Zeitpunkt  $t_0 + dt$ , die durch die Drehmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t_0 + dt) &= \mathbf{R}(t_0) + \dot{\mathbf{R}}(t_0)dt \\ &= \mathbf{R}(t_0)(\mathbf{I} + \mathbf{R}^\top(t_0)\dot{\mathbf{R}}(t_0)dt) \end{aligned} \quad (2.55)$$

ausgedrückt wird. Der erste Schritt folgt aus der Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung in  $dt$ . Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer *infinitesimalen Drehung*. Aus der Definition von  $\boldsymbol{\omega}$  in (2.52) folgt

$$r_{ik}(t_0 + dt) = r_{ij}(t_0)(\delta_{jk} + \epsilon_{jkl}\omega_l(t_0)dt). \quad (2.56)$$

Die Koordinatenachsen seien so orientiert, dass  $\boldsymbol{\omega}$  zur Zeit  $t_0$  in  $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Richtung zeigt:  $\boldsymbol{\omega}(t_0) = (0, 0, \omega(t_0))^\top$ . Weiterhin seien die gestrichenen und ungestrichenen Achsen bei  $t_0$  identisch:  $\hat{\mathbf{e}}'_i(t_0) = \hat{\mathbf{e}}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Dann ist  $\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}^\top(t_0) = \mathbf{I}$ , d.h.,  $\mathbf{R}$  entspricht zur Zeit  $t_0$  der Identität. Daher gilt

$$\dot{r}_{ik}(t_0) = \frac{r_{ik}(t_0 + dt) - r_{ik}(t_0)}{dt} = \epsilon_{ikl}\omega_l(t_0). \quad (2.57)$$

Es folgt somit

$$\mathbf{R}^\top(t_0)\dot{\mathbf{R}}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & \omega(t_0) & 0 \\ -\omega(t_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

und schließlich

$$\mathbf{R}(t_0 + dt) = \begin{pmatrix} 1 & \omega(t_0)dt & 0 \\ -\omega(t_0)dt & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

### Frage 12

Überprüfen Sie die obige Argumentation und das Ergebnis in (2.59).

Gl. (2.59) entspricht einer infinitesimalen Drehung um die  $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Achse um den Winkel  $d\phi = \omega dt$  (was man durch einen Blick auf die Taylor-Entwicklung des Sinus und Kosinus erkennt).

Deswegen wird  $\omega$  als der Vektor der momentanen *Winkelgeschwindigkeit* bezeichnet. Seine Richtung gibt die Orientierung der momentanen Drehachse an. Häufig wird der Drehwinkel auch in Vektorform geschrieben:

$$\mathbf{d}\phi := \boldsymbol{\omega} dt. \quad (2.60)$$

**Achtung** Die hier vorgeführten Rechnungen sind nur für infinitesimale Drehungen gültig. Eine Darstellung der Drehungen wie in (2.60) könnte dazu verleiten, aufeinanderfolgende Drehungen als Vektoraddition von  $\phi_1, \phi_2$  etc. zu schreiben. Dies ist allerdings falsch, wie wir in Abb. 2.2 gesehen haben: Drehungen kommutieren im Gegensatz zur Vektoraddition im Allgemeinen nicht. Im Kasten „Vertiefung: Infinitesimale Transformationen“ werden wir nochmals darauf zurückkommen. 

### Zusammenhang zwischen zeitabhängigen Drehmatrizen und Winkelgeschwindigkeit

Ist die Drehmatrix  $\mathbf{R}$  zwischen einem Inertialsystem  $S$  und einem beschleunigten System  $\mathcal{B}$  zeitabhängig, so wird die momentane Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  von  $\mathcal{B}$  aus dem Produkt  $\mathbf{B} = \mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}}$  bestimmt:

$$b_{ij} = r_{ki} \dot{r}_{kj} = \epsilon_{ijk} \omega_k, \quad \omega_l = \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} b_{ij}. \quad (2.61)$$

In einer infinitesimalen Zeit  $dt$  dreht sich  $\mathcal{B}$  dabei um einen Winkel

$$\mathbf{d}\phi = \boldsymbol{\omega} dt \quad (2.62)$$

um die Achse  $\boldsymbol{\omega}$ .

### Drehung um feste Achse

Zur Veranschaulichung betrachten wir erneut das Beispiel aus (2.9) mit einer Drehung um die  $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Achse um den zeitabhängigen Winkel  $\phi = \omega t$ :

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Man findet sofort

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ -\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

und

$$\mathbf{R}^\top(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Eine einfache Rechnung führt auf

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^\top(t) \dot{\mathbf{R}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \implies \boldsymbol{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Dieses Beispiel ist auch gültig, wenn die Drehung nicht infinitesimal ist. Der Grund ist, dass stets um dieselbe Achse gedreht wird. Es ist anschaulich klar, dass sukzessive, also aufeinanderfolgende Drehungen um dieselbe Achse kommutieren. 

**Achtung**  $\boldsymbol{\omega}$  ist die Drehachse, wie sie im ungestrichenen Koordinatensystem erscheint. Im gestrichenen Koordinatensystem ist die Orientierung der Drehachse im Allgemeinen verschieden, was wir in Kürze zeigen werden. Dies kann man beispielsweise daran sehen, dass die Rotationsachse der Erde, welche die Richtung von  $\boldsymbol{\omega}$  definiert, nur an den Polen senkrecht auf der Erdoberfläche steht. Am Äquator ist die Erdachse dagegen parallel zur Erdoberfläche. 

### Transformationsverhalten der Winkelgeschwindigkeit

Um zu untersuchen, wie sich die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  unter Koordinatentransformationen verhält, betrachten wir (2.53) in einem ungestrichenen und einem gestrichenen Koordinatenystem:

$$\omega_l = \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} b_{ij}, \quad \omega'_l = \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} b'_{ij}. \quad (2.67)$$

Die Frage ist, wie  $\omega'_l$  mit  $\omega_l$  zusammenhängt.

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass

$$\mathbf{B}' = \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{R}^\top \quad \text{bzw.} \quad b'_{ij} = r_{im} b_{mn} r_{jn} \quad (2.68)$$

gilt, wobei  $\mathbf{R}$  die Drehmatrix ist, die das ungestrichene in das gestrichene Koordinatensystem überführt. Wir schreiben

$$\omega'_l = \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} r_{im} r_{jn} b_{mn} \quad (2.69)$$

und wegen (2.52)

$$\omega'_l = \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} r_{im} r_{jn} \epsilon_{kmn} \omega_k. \quad (2.70)$$

## Vertiefung: Infinitesimale Transformationen

Wir haben in Abb. 2.2 gesehen, dass die Reihenfolge von sukzessiven *endlichen* Drehungen wichtig ist: Endliche Drehungen sind im Allgemeinen nicht kommutativ. Der Begriff der *infinitesimalen Transformationen* ist in vielen Bereichen der Physik sehr wichtig, insbesondere in der Quantenmechanik und in der Feldtheorie. Wir beschränken uns hier auf eine infinitesimale Drehung. Gl. (2.36) wird zu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{dR}.$$

Wegen  $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}$  ist

$$(\mathbf{I} + \mathbf{dR})^\top (\mathbf{I} + \mathbf{dR}) = \mathbf{I} \implies \mathbf{dR}^\top + \mathbf{dR} = \mathbf{0}.$$

Da  $\mathbf{dR}$  eine infinitesimale Größe ist, können quadratische Terme vernachlässigt werden. Deshalb müssen infinitesimale Drehmatrizen  $\mathbf{dR}$  stets schiefsymmetrisch sein. Analog zu (2.52) können wir

$$dr_{ij} = \epsilon_{ijk} d\phi_k$$

schreiben, wobei  $d\phi_k$  die infinitesimalen Drehwinkel um die Achse  $\mathbf{d}\phi$  sind. Allgemein definieren die Elemente jeder schiefsymmetrischen  $3 \times 3$ -Matrix einen Pseudovektor. Für die Änderung des Ortes gilt dann

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x} = \mathbf{dR}\mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{d}\phi.$$

Zwei aufeinanderfolgende infinitesimale Transformationen erfüllen

$$(\mathbf{I} + \mathbf{dR}_1)(\mathbf{I} + \mathbf{dR}_2) = \mathbf{I} + \mathbf{dR}_1 + \mathbf{dR}_2.$$

Im Gegensatz zu endlichen Drehungen spielt hier die Reihenfolge keine Rolle. Auf diese Weise kann man auch direkt zeigen, dass die Inverse von  $\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{dR}$  gerade  $\mathbf{I} - \mathbf{dR}$  ist. Drehmatrizen sind eine Untergruppe der orthogonalen Matrizen, die  $\det(\mathbf{R}) = +1$  erfüllen. Es ist bereits intuitiv klar und hier offensichtlich, dass es nur infinitesimale Drehungen, aber keine infinitesimale Spiegelungen geben kann, denn für Spiegelungen ist  $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$  keine infinitesimale Größe.

Weiterhin gilt wegen  $\delta_{pl} = r_{pq}r_{lq}$  und (2.30)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} r_{im} r_{jn} \epsilon_{kmn} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijp} r_{im} r_{jn} r_{pq} r_{lq} \epsilon_{kmn} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{mnq} \epsilon_{kmn} \det(\mathbf{R}) r_{lq} \\ &= \delta_{qk} \det(\mathbf{R}) r_{lq} = \det(\mathbf{R}) r_{lk}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Dies führt schließlich auf das Transformationsverhalten von  $\boldsymbol{\omega}$ .

### Transformationsverhalten der Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  ist wie der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  ein axialer Vektor und transformiert unter orthogonalen Transformationen  $\mathbf{R}$  wie

$$\boldsymbol{\omega}' = \det(\mathbf{R}) \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.72)$$

Man hätte sich bereits im Vorfeld denken können, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  ein axialer Vektor ist, da das Levi-Civita-Symbol bei seiner Definition auftaucht.

### Zeitableitungen in rotierenden Bezugssystemen

Wir haben in (2.54) gesehen, dass Zeitableitungen von polaren Vektoren einen Zusatzterm erhalten, wenn sie in rotierenden Bezugssystemen betrachtet werden. Für die zweite Zeitableitung

folgt

$$\ddot{\mathbf{d}}' = \mathbf{R} [\ddot{\mathbf{d}} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d})]. \quad (2.73)$$

Hier wurde berücksichtigt, dass  $\boldsymbol{\omega}$  durchaus selbst eine Funktion der Zeit sein kann.

### Frage 13

Machen Sie sich klar, dass (2.73) direkt aufgeschrieben werden kann, wenn man die Argumentation wiederholt, die zur Herleitung von (2.54) verwendet wurde.

Gln. (2.23), (2.54) und (2.73) sind die allgemeinen Transformationsgleichungen für einen polaren Vektor und seine ersten beiden Zeitableitungen von einem Inertialsystem  $S$  zu einem rotierenden Bezugssystem  $B$ . In vielen Fällen ist es allerdings sinnvoller, den umgekehrten Weg zu gehen: Man möchte die Zeitableitungen in  $S$  durch Größen im gestrichenen System  $B$  ausdrücken.

### Transformationsverhalten eines polaren Vektors und seiner Zeitableitungen

Transformiert man einen polaren Vektor  $\mathbf{d}'$  mittels einer orthogonalen Transformation  $\mathbf{R}$  von einem rotierenden System zurück in ein Inertialsystem, so lauten die Transformationsgleichungen für  $\mathbf{d}$  und seine ersten beiden Zeit-

ableitungen

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \mathbf{R}^\top \mathbf{d}', \\ \dot{\mathbf{d}} &= \mathbf{R}^\top (\dot{\mathbf{d}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{d}'), \\ \ddot{\mathbf{d}} &= \mathbf{R}^\top [\ddot{\mathbf{d}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{d}' + \boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{d}}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\dot{\mathbf{d}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{d}')].\end{aligned}\quad (2.74)$$

Dies wird in Aufgabe 2.3 gezeigt.

Da  $\mathbf{d}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{b}(t)$  geschrieben werden kann, wobei  $\mathbf{x}(t)$  der Ortsvektor einer Punktmasse und  $\mathbf{b}(t)$  ein Referenzpunkt (z. B. der Ursprung von  $\mathcal{B}$ ) ist, sind die entsprechenden Transformationsgleichungen für  $\mathbf{x}(t)$  ebenfalls bekannt, wenn  $\mathbf{b}(t)$  gegeben ist.

Die zweite Zeitableitung in (2.74) ist der Schlüssel, um die Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen zu berechnen. Dies wird im folgenden Abschnitt geschehen.

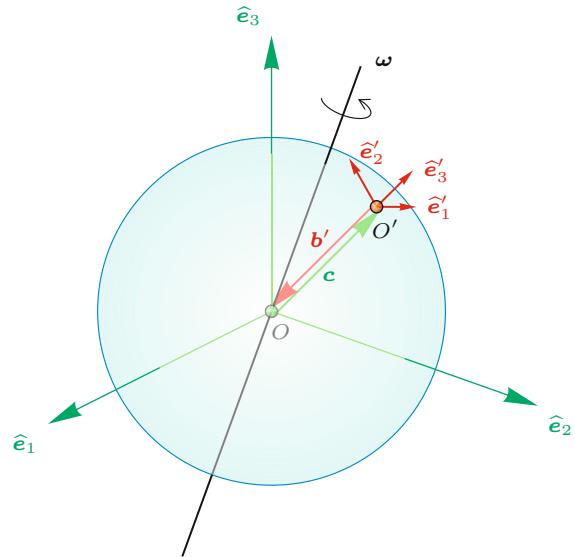
## 2.4 Kräfte in rotierenden Bezugssystemen

Die Bewegung von rotierenden Objekten (z. B. Kreiseln) und von Punktmassen in rotierenden Bezugssystemen (z. B. auf der Erdoberfläche) spielt eine wichtige Rolle in der Physik. So wird beispielsweise das Klima entscheidend durch die Rotation der Erde beeinflusst. Tropische Stürme wie Hurrikane oder Taifune könnten nicht entstehen, wenn die Erde nicht rotieren würde.

Das zweite Newton'sche Axiom gilt in seiner bisher bekannten Form in (2.41) nur in Inertialsystemen, also in unbeschleunigten Bezugssystemen. Es kann auch in Nichtinertialsystemen formuliert werden, wobei es jedoch seine Kovarianz verliert und zusätzliche Terme berücksichtigt werden müssen. Im Folgenden werden die Bewegungsgleichungen in rotierenden Bezugssystemen am Beispiel der rotierenden Erde diskutiert. Dies ist jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit, da die Erde durch jedes andere rotierende Objekt ersetzt werden kann. Die Rechnungen zeigen, dass in rotierenden Bezugssystemen Scheinkräfte, insbesondere die Zentrifugal- und die Coriolis-Kraft, auftreten.

### Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Wir wählen zunächst ein ungestrichenes kartesisches Inertialsystem  $S$ , in dessen Ursprung  $O$  der Mittelpunkt der rotierenden Erde liegt. Die Koordinaten dieses Punktes im ungestrichenen System sind  $\mathbf{b} = (0, 0, 0)^\top$ . Ein gestrichenes, ebenfalls kartesisches Koordinatensystem  $\mathcal{B}$  sei mit einem Punkt  $c$  an der Oberfläche der Erde verbunden. Dabei soll  $c$  den Ursprung  $O'$  von  $\mathcal{B}$  bilden, d.h., die Koordinaten im gestrichenen System



**Abb. 2.8** Darstellung der Koordinatensysteme  $S$  (in dem sich die Erde dreht) und  $\mathcal{B}$  (das sich mit einem Punkt  $c$  auf der Erdoberfläche mitbewegt). Der Erdmittelpunkt befindet sich im Ursprung  $O$  des Inertialsystems  $S$ , der Punkt  $c$  bildet den Ursprung  $O'$  des beschleunigten Bezugssystems  $\mathcal{B}$ . Die Erde dreht sich um eine beliebige Achse mit Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$

sind  $\mathbf{c}' = (0, 0, 0)^\top$ . Somit rotiert  $\mathcal{B}$  zusammen mit dem Punkt  $c$  relativ zu  $S$ . Die Erdrotation wird in  $S$  durch die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  beschrieben, die in (2.52) definiert wurde. Das Koordinatensystem  $\mathcal{B}$  sei weiterhin so definiert, dass die Achse  $\hat{\mathbf{e}}'_3$  senkrecht von der Erdoberfläche weg zeigt. Dies hat zur Folge, dass der Erdmittelpunkt von  $\mathcal{B}$  aus gesehen stets am festen Ort  $\mathbf{b}' = -|\mathbf{b}'| \hat{\mathbf{e}}'_3$  liegt und  $\dot{\mathbf{b}}' = \ddot{\mathbf{b}}' = \mathbf{0}$  gilt. Die Koordinatensysteme  $S$  und  $\mathcal{B}$  und die Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  sind in Abb. 2.8 dargestellt.

### Frage 14

Machen Sie sich klar, dass die beiden Vektoren  $\mathbf{c}$ , der in  $S$  von  $O$  nach  $O'$  zeigt, und  $\mathbf{b}'$ , der in  $\mathcal{B}$  von  $O'$  nach  $O$  zeigt, die gleiche Länge haben:  $|\mathbf{b}'| = |\mathbf{c}|$ . Überlegen Sie sich weiterhin, dass  $\mathbf{b}'$  in  $\mathcal{B}$  fest,  $\mathbf{c}$  in  $S$  aber eine Funktion der Zeit ist.

In diesem Abschnitt werden alle Vektoren in  $\mathcal{B}$  konsequent als gestrichene Größen geschrieben. Obwohl dies im ersten Moment als umständlich erscheinen mag, so ist dies doch von großem Vorteil: Es ist stets auf einen Blick zu erkennen, welche Vektoren in welchem der beiden Koordinatensysteme ( $S$  und  $\mathcal{B}$ ) gemeint sind. Dadurch werden von Anfang an Doppeldeutigkeiten vermieden.

Im Folgenden betrachten wir das Transformationsverhalten eines ungebundenen Vektors  $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{b}$ , wobei  $\mathbf{x}$  der beliebige Ort einer Punktmasse ist. Somit ist  $\mathbf{d}$  die relative Lage der Punktmasse zum Erdmittelpunkt von  $S$  aus gesehen und  $\mathbf{d}'$  derselbe Vektor von  $\mathcal{B}$  aus gesehen. Aus der zweiten Zeitableitung von  $\mathbf{d}$

in (2.74) folgt mit  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{b}}' = \mathbf{0}$  und  $\ddot{\mathbf{b}}' = \mathbf{0}$  sofort

$$\mathbf{R}\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times (\mathbf{x}' - \mathbf{b}') + 2\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{x}' - \mathbf{b}')). \quad (2.75)$$

**Achtung** Es ist zu betonen, dass es sich bei der Erddrehung um eine aktive, d. h. physikalische Drehung handelt: Ein Punkt auf der Erdoberfläche ändert seine Lage relativ zu S. Die Drehmatrix  $\mathbf{R}(t)$ , die S nach  $\mathcal{B}$  überführt, beschreibt eine passive Drehung des Koordinatensystems wie zu Beginn dieses Kapitels beschrieben. Allerdings wird in diesem Fall  $\mathbf{R}(t)$  gerade so gewählt, dass das Koordinatensystem  $\mathcal{B}$  genau mit einem Fixpunkt  $\mathbf{c}(t)$  auf der Erdoberfläche mitrotiert. Dies ist keine Notwendigkeit, vereinfacht die mathematische Beschreibung allerdings grundlegend, da das somit gewählte Koordinatensystem  $\mathcal{B}$  einem Laborsystem auf der Erdoberfläche entspricht. Somit ist  $\mathbf{R}(t)$  eine Funktion von  $\mathbf{c}(t)$ . ◀

### Kreisbahn und Winkelgeschwindigkeit

Wir wollen untersuchen, mit welcher Geschwindigkeit sich ein Punkt auf der Erdoberfläche von S aus betrachtet bewegt, wenn sich die Erde mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  dreht. Ausgehend von (2.54) fordern wir zunächst  $\dot{\mathbf{d}}' = \mathbf{0}$ , da sich der Punkt auf der Erdoberfläche befinden soll und somit in  $\mathcal{B}$  ruht. Es folgt sofort

$$\dot{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}. \quad (2.76)$$

Legt man zur Vereinfachung die Ursprünge von S und  $\mathcal{B}$  in den Erdmittelpunkt, ist  $\mathbf{b} = \mathbf{b}' = \mathbf{0}$  und

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}. \quad (2.77)$$

Diese wichtige Gleichung wird in der Mechanik häufig verwendet: Die momentane Bahngeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}$  einer Punktmasse kann direkt aus dem Abstandsvektor  $\mathbf{x}$  zum Drehzentrum und der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  berechnet werden. Bewegt sich die Punktmasse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn, finden wir das korrekte Ergebnis

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \frac{U}{r} \quad (2.78)$$

für die Bahngeschwindigkeit, wobei  $r$  und  $U$  Radius und Umfang der Bahn und  $T$  die Umlaufdauer sind. ◀

Gl. (2.75) beschreibt die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{x}}'$  einer Punktmasse im erdfesten System  $\mathcal{B}$ . Fasst man  $m\ddot{\mathbf{x}}$ , also die Beschleunigung der Punktmasse in S, als eine externe Kraft  $\mathbf{F}_{\text{ext}} = m\ddot{\mathbf{x}}$ , auf, so lautet die Bewegungsgleichung in  $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_{\text{ext}} &= m\ddot{\mathbf{x}}' + m\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times (\mathbf{x}' - \mathbf{b}') + 2m\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}' \\ &\quad + m\boldsymbol{\omega}' \times [\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{x}' - \mathbf{b}')], \end{aligned} \quad (2.79)$$

wobei  $\mathbf{F}'_{\text{ext}} = \mathbf{RF}_{\text{ext}}$  die gedrehte Kraft in  $\mathcal{B}$  ist (siehe (2.43)). Wir schreiben die Gleichung noch um, indem wir allein den Term  $m\ddot{\mathbf{x}}'$  auf eine Seite der Gleichung bringen.

### Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen

Auf eine Punktmasse am Ort  $\mathbf{x}'$  in einem mit  $\boldsymbol{\omega}'$  rotierenden Bezugssystem  $\mathcal{B}$  wirken äußere Kräfte und Scheinkräfte. Die Bewegungsgleichung für eine Punktmasse in  $\mathcal{B}$  lautet

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{F}'_{\text{ext}} - m\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times (\mathbf{x}' - \mathbf{b}') - 2m\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}' \\ &\quad - m\boldsymbol{\omega}' \times [\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{x}' - \mathbf{b}')]. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Der Vektor  $\mathbf{b}'$  zeigt vom Ursprung von  $\mathcal{B}$  zum Drehzentrum.

Gl. (2.80) ist die Verallgemeinerung des zweiten Newton'schen Axioms auf rotierende Bezugssysteme und reduziert sich für  $\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{0}$  auf seine ursprüngliche Form in Inertialsystemen (2.41). Offenbar ist ein in S kräftefreies Teilchen in  $\mathcal{B}$  beschleunigt. Man nennt die drei übrigen Terme in (2.80) *Scheinkräfte*, die in Kürze genauer untersucht werden. Der Begriff *Scheinkraft* kommt daher, dass sie für einen Beobachter im Inertialsystem nicht auftritt und daher scheinbar nicht existiert.

Scheinkräfte sind reale Kräfte, die durch die Transformation in ein beschleunigtes Bezugssystem auftreten und ihren physikalischen Ursprung in der Trägheitskraft  $-m\ddot{\mathbf{x}}$  haben. Das Auftreten von Scheinkräften zeigt an, dass ein Bezugssystem kein Inertialsystem ist. Alle Scheinkräfte sind proportional zur tragen Masse, während die Schwerkraft proportional zur schweren Masse ist. Wie bereits in Kap. 1 erwähnt, fordert Einsteins Äquivalenzprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie, dass schwere und träge Massen äquivalent sind.

Hierdurch wird deutlich, dass die Gesetze der Mechanik in rotierenden Bezugssystemen zwar formulierbar, aber in der Regel deutlich aufwendiger zu lösen sind, da die Koordinatenachsen selbst zeitabhängig werden. Dennoch hat es für viele Anwendungen Vorteile, die Bewegungsgleichungen in rotierenden Bezugssystemen zu diskutieren, da die Gleichungen dort unter Umständen eine einfachere Form annehmen können. Dies werden wir in Kap. 4 noch ausnutzen.

### Klassifikation der Scheinkräfte

Die Scheinkräfte in (2.80) haben drei Beiträge:

1. Die Kraft  $-m\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times (\mathbf{x}' - \mathbf{b}')$  taucht nur auf, wenn die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}'$  sich in  $\mathcal{B}$  ändert. Die Rotation der Erde wird in guter Näherung durch  $\boldsymbol{\omega}' = \text{const}$  und  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$

beschrieben. Ausnahmen bilden die Präzession und die Polschwankungen. Erstere beschreibt eine Änderung von  $\omega$  im Inertialsystem, letztere eine Änderung von  $\omega'$  im erdfesten System. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts nehmen wir an, dass  $\omega'$  konstant ist.

## 2. Der Term

$$\mathbf{F}'_C := -2m\omega' \times \dot{\mathbf{x}}' \quad (2.81)$$

heißt *Coriolis-Kraft* (nach dem französischen Mathematiker und Physiker Gaspard Gustave de Coriolis, 1792–1843) und führt zu seitlichen Ablenkungen von sich bewegenden Punktmassen in  $\mathcal{B}$ . Diese Kraft steht senkrecht auf  $\omega'$  und  $\dot{\mathbf{x}}'$  und verschwindet für Bewegungen parallel zur Drehachse  $\omega'$ .

## 3. Der dritte Term ist die *Zentrifugalkraft*:

$$\mathbf{F}'_Z := -m\omega' \times [\omega' \times (\mathbf{x}' - \mathbf{b}')] \quad (2.82)$$

## Bedeutung der Zentrifugalkraft und Erdabplattung

Die Zentrifugalkraft  $\mathbf{F}'_Z$  in (2.82) besteht aus zwei Beiträgen. Der zweite kann mit  $\mathbf{b}' = -|\mathbf{b}'| \hat{\mathbf{e}}'_3$  und der Vektoridentität  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  in die Form

$$\begin{aligned} m\omega' \times (\omega' \times \mathbf{b}') &= -m[(\omega' \cdot \omega')\mathbf{b}' - \omega'(\omega' \cdot \mathbf{b}')] \\ &= mb\omega^2 \left[ \hat{\mathbf{e}}'_3 - \frac{\omega'(\omega' \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3)}{\omega^2} \right] \\ &= m\omega^2 l' \end{aligned} \quad (2.83)$$

gebracht werden, wobei  $b = |\mathbf{b}'|$  und  $\omega = |\omega'|$  sind. Hierbei ist  $l'$  der senkrechte Abstand des Ursprungs  $O'$  von der Drehachse  $\omega'$  und erfüllt

$$l' = |\mathbf{l}'| = b \sin \theta = b \cos \vartheta. \quad (2.84)$$

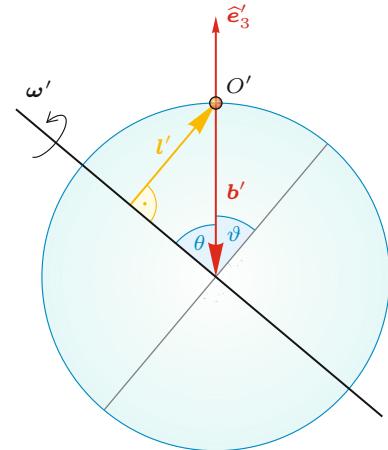
Die beiden Winkel  $\theta$  und  $\vartheta = \pi/2 - \theta$  werden in Abb. 2.9 definiert. Bei  $\vartheta$  handelt es sich um die *geografische Breite*, die vom Äquator aus gemessen wird.

Offensichtlich zeigt  $m\omega^2 l'$  stets senkrecht von der Drehachse fort und ist unabhängig von der Lage  $\mathbf{x}'$  der Punktmasse in  $\mathcal{B}$ , aber proportional zu ihrer Masse  $m$ . Dieser Term lässt sich daher als effektiver Beitrag zur Erdbeschleunigung auffassen, indem man

$$\mathbf{g}'_{\text{eff}} := \mathbf{g}' - \omega^2 \mathbf{l}' \quad (2.85)$$

definiert. Da der Betrag von  $l'$  mit der geografischen Breite  $\vartheta$  variiert, ist die effektive Erdbeschleunigung entlang der Erdoberfläche nicht konstant. Sie ist an den Polen am größten, da sie dort nicht durch die Zentrifugalkraft abgeschwächt wird. Am Äquator wirkt die maximale Zentrifugalkraft, und die effektive Erdanziehung ist kleiner.

Aufgrund der Zentrifugalbeschleunigung  $\omega^2 l'$  hat die Erde eine leicht abgeplattete Form. Der Erdradius ist an den Polen kleiner



**Abb. 2.9** Darstellung der Erddrehung, wie sie ein Beobachter am Punkt  $O'$  auf der Erdoberfläche sieht. Die Zentrifugalkraft ist entlang des Vektors  $l'$  gerichtet, der senkrecht von der Drehachse  $\omega'$  zum Ursprung  $O'$  von  $\mathcal{B}$  zeigt. Somit weist die Richtung der Zentrifugalkraft stets von der Drehachse fort. Die geografische Breite  $\vartheta$  misst den Winkel zwischen dem Ursprung von  $\mathcal{B}$  und dem Äquator

als am Äquator. Der relative Unterschied beträgt nur rund 0,3 %, ist aber für die Geodäsie, d. h. für die Vermessung der Erde, von entscheidender Wichtigkeit. Der Basisvektor  $\hat{\mathbf{e}}'_3$  ist dann so definiert, dass  $\mathbf{g}'_{\text{eff}} = -g_{\text{eff}} \hat{\mathbf{e}}'_3$  gilt. Es sei noch angemerkt, dass der Erdkörper nicht homogen ist (Berge, Erzvorkommen etc.). Dies führt zu einer *Schwereanomalie* an der Erdoberfläche, d. h. der lokalen Abweichung der Erdbeschleunigung vom erwarteten Mittelwert.

### Frage 15

Überlegen Sie sich, dass  $\mathbf{g}'_{\text{eff}}$  im Allgemeinen nicht direkt zum Erdmittelpunkt zeigt. Für viele Anwendungen ist die damit verbundene Abweichung allerdings vernachlässigbar.

Der erste Term der Zentrifugalkraft in (2.82),  $-m\omega' \times (\omega' \times \mathbf{x}')$ , spielt nur eine Rolle, wenn sich die Punktmasse  $m$  nicht im Ursprung von  $\mathcal{B}$  befindet. Ist  $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{b}'|$ , d. h. der Abstand der Punktmasse zum Ursprung von  $\mathcal{B}$ , klein im Vergleich zum Erdradius, so kann dieser Term von  $\mathbf{F}'_Z$  gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden, und es gilt in guter Näherung

$$\mathbf{F}'_Z \approx m\omega' \times (\omega' \times \mathbf{b}') = m\omega^2 l'. \quad (2.86)$$

Dies ist in vielen Anwendungen der Fall.

**Achtung** Befindet sich die Punktmasse  $m$  weit oberhalb der Erdoberfläche, so legt man den Ursprung von  $\mathcal{B}$  häufig nicht auf die Erdoberfläche, sondern direkt an den Ort der Punktmasse. Somit wird per Definition  $\mathbf{x}' = (0, 0, 0)^T$ , und  $|\mathbf{b}'|$  ist der Abstand der Punktmasse zum Erdmittelpunkt. Wir werden diese Wahl von  $\mathcal{B}$  noch verwenden, um Satelliten auf Kreisbahnen zu beschreiben. ▶

## Bedeutung der Coriolis-Kraft und Foucault'sches Pendel

Die Koordinatenachsen im erdfesten System  $\mathcal{B}$  seien so definiert, dass  $\hat{\mathbf{e}}'_1$  nach Süden und  $\hat{\mathbf{e}}'_2$  nach Osten zeigen. Wie vorher festgelegt, weist  $\hat{\mathbf{e}}'_3$  nach oben. Der Ursprung von  $\mathcal{B}$  befindet sich bei der geografischen Breite  $\vartheta$  (Abb. 2.9). Die Winkelgeschwindigkeit lautet dann von  $\mathcal{B}$  aus gesehen

$$\boldsymbol{\omega}' = \omega \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

### Frage 16

Machen Sie sich aus der Geometrie klar, dass (2.87) die Drehachse der Erde in  $\mathcal{B}$  beschreibt. Berücksichtigen Sie dabei, dass sich die Erde „nach Osten“ dreht.

Die Winkelgeschwindigkeit lässt sich in Komponenten senkrecht und tangential zur Erdoberfläche zerlegen:

$$\boldsymbol{\omega}'_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}'_{\parallel} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Folglich hat die Coriolis-Kraft in (2.81) zwei Komponenten:

$$\mathbf{F}'_C = 2m(\dot{\mathbf{x}}' \times \boldsymbol{\omega}_{\perp}) + 2m(\dot{\mathbf{x}}' \times \boldsymbol{\omega}'_{\parallel}). \quad (2.89)$$

Der zweite Term führt bei einer Bewegung auf der Erdoberfläche zu einer aufwärts oder abwärts gerichteten Kraft und schwächt die Gravitationskraft ab oder verstärkt sie. Der erste Term führt bei einer Bewegung auf der Erdoberfläche zu einer seitlichen Ablenkung, auf der Nordhalbkugel stets nach rechts, auf der Südhalbkugel stets nach links relativ zur Richtung von  $\dot{\mathbf{x}}'$ . Diese seitlich gerichtete Kraft ist von wesentlicher Bedeutung für Stürme (Abb. 2.10), Meereströmungen und Ballistik.

### Frage 17

Naiv könnte man annehmen, dass sich Wirbelstürme auf der Nordhalbkugel im Uhrzeigersinn drehen, da dort Massen bei ihrer Bewegung nach rechts abgelenkt werden. Tatsächlich ist der Drehsinn jedoch genau anders herum. Begründen Sie dies. Dazu muss man wissen, dass Stürme durch Tiefdruckgebiete erzeugt werden. Luftmassen bewegen sich anfänglich radial in Richtung des niedrigeren Druckes im Zentrum und werden dabei durch die Coriolis-Kraft zu einer Rotation gezwungen.

Wir haben bereits in (2.85) gesehen, dass die Zentrifugalkraft in eine effektive Erdanziehungskraft absorbiert werden kann. Damit lautet die Bewegungsgleichung (2.80) in vereinfachter Form

$$m\ddot{\mathbf{x}}' + 2m\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}', \quad (2.90)$$

wobei  $\mathbf{F}'$  sowohl externe Kräfte (wie die Gravitation der Erde) als auch die Zentrifugalkraft enthält. Findet die Bewegung in der



**Abb. 2.10** Der Hurrikan Isabel richtete im Jahre 2003 große Schäden im Nordatlantikraum an. Ohne die Drehung der Erde um ihre Achse und die damit verbundene Coriolis-Kraft könnten keine tropischen Wirbelstürme entstehen: Bewegt sich eine Luftmasse von einem Hochdruck- auf ein Tiefdruckgebiet zu, wird sie durch die Coriolis-Kraft seitlich abgelenkt. Auf der Nordhalbkugel führt dies zu einem Wirbel, der sich im Gegenuhrzeigersinn dreht (© NASA)

Ebene der Erdoberfläche statt, so lauten die relevanten Komponenten der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{x}'_1 - 2m\omega\dot{x}'_2 \sin \vartheta &= F'_1, \\ m\ddot{x}'_2 + 2m\omega\dot{x}'_1 \sin \vartheta &= F'_2. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Ist die Punktmasse  $m$  an einem langen Faden der Länge  $l$  aufgehängt und wirkt lediglich die Gravitationsbeschleunigung  $g_{\text{eff}}$  auf  $m$ , so sind die Kräfte durch

$$\begin{aligned} F'_1 &\approx -mg_{\text{eff}}\delta x'_1/l, \\ F'_2 &\approx -mg_{\text{eff}}\delta x'_2/l \end{aligned} \quad (2.92)$$

gegeben. Hier beschreiben  $\delta x'_1$  und  $\delta x'_2$  die seitliche Auslenkung der Masse entlang der  $\hat{\mathbf{e}}'_1$ - und  $\hat{\mathbf{e}}'_2$ -Achsen. Gl. (2.91) und (2.92) bilden zusammen die Bewegungsgleichungen für das Foucault'sche Pendel (nach dem französischen Physiker Jean Bernard Léon Foucault, 1819–1868), dessen Pendelebene sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega \sin \vartheta$  relativ zum Erdboden dreht (Abb. 2.11), wie wir in Kap. 6 sehen werden. Demnach beobachtet man am Äquator keine Drehung der Pendelebene, an den Polen ist sie jedoch maximal. Die Erde dreht sich sozusagen unter der Pendelebene hinweg, was man sich insbesondere an den Polen ( $\vartheta = 90^\circ$ ) leicht vorstellen kann.

### Frage 18

Überprüfen Sie die Gültigkeit von (2.91) und (2.92).

## Freier Fall auf rotierender Erde

Eine Punktmasse  $m$  wird zur Zeit  $t = 0$  von der Höhe  $h$  über der Erdoberfläche fallen gelassen. Ihre Geschwindigkeit ist anfangs



**Abb. 2.11** Foucault-Pendel im Wissenschaftsmuseum in Valencia, Spanien. Die Coriolis-Kraft verursacht eine Drehung der Bahnebene des Pendels. Dadurch werden nach und nach die Stäbe auf dem Holzring umgeworfen (© Ciudad de las Artes y las Ciencias. Generalitat Valenciana)

$\dot{x}' = 0$ . Würde sich die Erde nicht drehen, so würde, ein Fall aus geringer Höhe vorausgesetzt, die Masse mit der konstanten Erdbeschleunigung

$$\mathbf{g}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

nach unten (entlang der  $\hat{\mathbf{e}}_3'$ -Achse) beschleunigt werden. Wir nehmen an, dass die durch die Rotation der Erde verursachte Zentrifugalbeschleunigung bereits in eine effektive Erdbeschleunigung  $g_{\text{eff}}$  absorbiert würde. Die Coriolis-Kraft führt allerdings zu einer seitlichen Ablenkung der Punktmasse, und zwar stets nach Osten.

Dies kann man sich anschaulich so vorstellen, dass die Punktmasse an einem Punkt startet, der sich oberhalb der Erdoberfläche befindet und sich – in  $S$  betrachtet – daher schneller um den Erdmittelpunkt dreht als die Erdoberfläche. Diesen tangentialen Geschwindigkeitsüberschuss nimmt die Punktmasse aufgrund ihrer Trägheit mit, sodass sie – in  $B$  beobachtet – nach Osten, also in die Drehrichtung der Erde, abgelenkt wird (Abb. 2.12). Umgekehrt wird eine Rakete, die nach oben beschleunigt wird, nach Westen abgelenkt.

## 2.4 Kräfte in rotierenden Bezugssystemen

Somit erfährt die Punktmasse während des Falles eine Beschleunigung

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}'_1 \\ \ddot{x}'_2 \\ \ddot{x}'_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\dot{x}'_3 \omega \cos \vartheta \\ g_{\text{eff}} \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

**Achtung** Zur Vereinfachung wurde hierbei vernachlässigt, dass die Beschleunigung der Punktmasse nach Osten und die damit verbundene Geschwindigkeit  $\dot{x}'_2$  ebenfalls eine Coriolis-Kraft hervorruft. Warum können wir das machen? Der Grund ist, dass die Coriolis-Kraft  $F$ , die auf eine sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegende Punktmasse wirkt, von der Größenordnung  $F \sim v\omega$  ist. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Erddrehung ist eine kleine Größe. Wird die Geschwindigkeit  $v$  selbst durch eine Coriolis-Kraft erzeugt (wie es hier bei der Bewegung nach Osten der Fall ist), so ist sie von der Größenordnung  $F \sim \omega^2$ , was gegenüber den anderen wirkenden Kräften (Gravitation, Coriolis-Kraft nach Osten) vernachlässigt werden kann. Dies ist ein typisches Beispiel für eine physikalische Vorgehensweise, bei der unwichtige von wichtigen Effekten getrennt werden. Nur so lassen sich die Gleichungen einfach (wenn auch nicht vollständig exakt) aufintegrieren. ▶

Zunächst lässt sich die  $x'_3$ -Komponente von (2.94) einmal nach der Zeit integrieren. Die Fallgeschwindigkeit

$$\dot{x}'_3 = -g_{\text{eff}} t \quad (2.95)$$

wird in erster Näherung durch die Coriolis-Kraft nicht beeinflusst. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$x'_3(t) = h - \frac{1}{2}g_{\text{eff}} t^2. \quad (2.96)$$

Hier wurden die Anfangsbedingungen  $x'_3(0) = h$  und  $\dot{x}'_3(0) = 0$  verwendet. Zur Vereinfachung führen wir mit  $s := h - x'_3$  die durchfallene Strecke ein. Einsetzen von (2.95) in (2.94) führt auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}'_2 = 2\omega g_{\text{eff}} t \cos \vartheta \quad (2.97)$$

und somit

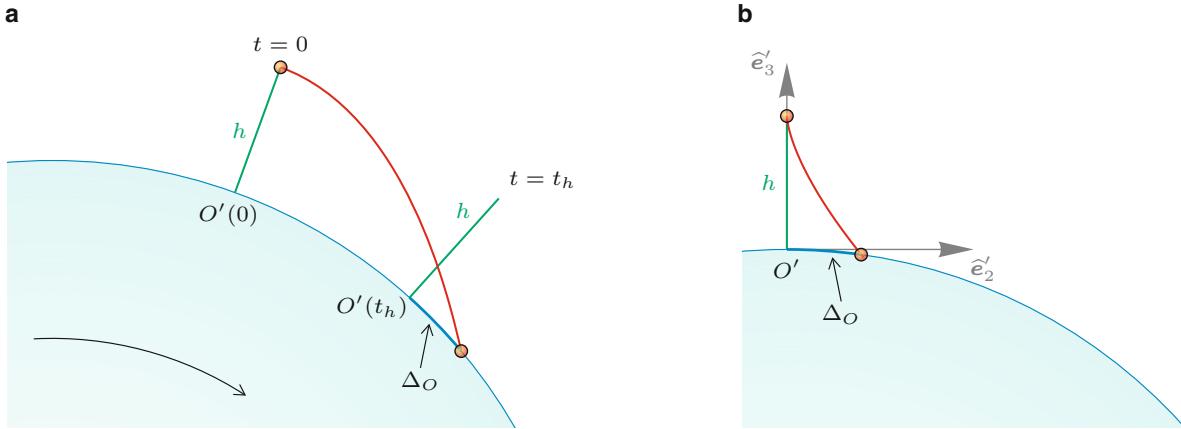
$$x'_2 = \frac{1}{3}\omega g_{\text{eff}} t^3 \cos \vartheta. \quad (2.98)$$

Die Anfangsbedingungen für  $x'_2$  sind  $x'_2(0) = \dot{x}'_2(0) = 0$ . Eliminiert man  $t$  zugunsten von  $s$ , findet man schließlich die östliche Ablenkung als Funktion der durchfallenen Strecke:

$$x'_2 = \frac{2}{3}\omega \sqrt{\frac{2s^3}{g_{\text{eff}}}} \cos \vartheta. \quad (2.99)$$

### Frage 19

Würde eine Masse von der Spitze des Burj Khalifa in Dubai ( $h = 820 \text{ m}$ ,  $\vartheta = 25^\circ$ ) fallen gelassen, wäre die östliche Ablenkung am Erdboden unter Annahme von  $g_{\text{eff}} = 9,8 \text{ m/s}^2$  und  $\omega = 2\pi/86.400 \text{ s}$  etwa 46 cm. Rechnen Sie dies nach.



**Abb. 2.12** Ein Objekt fällt auf der rotierenden Erde von einem Turm der Höhe  $h$ . In a ist die Bahnkurve dargestellt, wie sie im Inertialsystem erscheint. Da die Bahngeschwindigkeit auf dem Turm größer ist als auf der Erdoberfläche, kommt es zu einer Ostabweichung. Dieselbe Situation ist in b aus dem mitrotierenden Bezugssystem gezeigt

### Satellit

Wir betrachten einen Satelliten der Masse  $m$  auf einer Kreisbahn um die Erde und wählen den Ursprung  $O'$  von  $\mathcal{B}$  so, dass  $O'$  mit dem Ort des Satelliten zusammenfällt. Somit sind  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$  und  $\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}$ , d. h., es gibt keine Coriolis-Kraft. Offensichtlich kann der Satellit nur auf der Kreisbahn verweilen, wenn keine Nettokraft in  $\mathcal{B}$  auf ihn wirkt. Dies bedeutet, dass sich die Zentrifugalkraft und die Gravitationskraft stets genau aufheben müssen. Da beide Kräfte in radialer Richtung wirken, ist es ausreichend, den Betrag zu betrachten.

**Achtung** An dieser Stelle rotiert  $\mathcal{B}$  zwar ebenfalls um die Erde, aber nicht mit einem Punkt, der an die Erdoberfläche gebunden ist. Der Satellit könnte prinzipiell in jede beliebige Richtung um die Erde kreisen, unabhängig von der Rotation der Erde. Dennoch bleibt (2.80) gültig, wobei  $\omega'$  durch die Winkelgeschwindigkeit des Satelliten um die Erde ersetzt werden muss. ▶

Die Gravitationskraft im Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt ist

$$F_G = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (2.100)$$

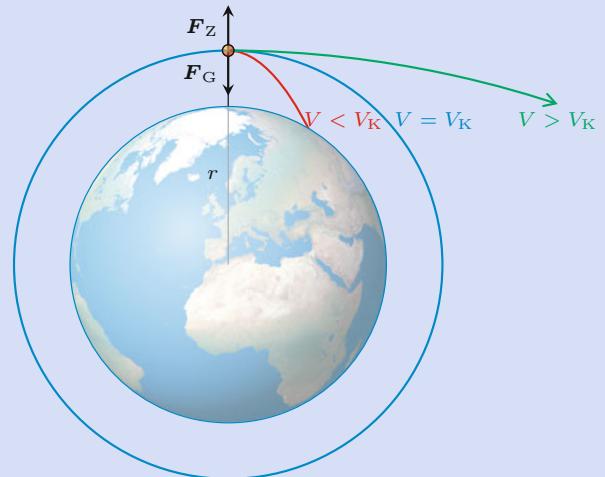
Wie gewohnt sind  $G$  und  $M$  die Gravitationskonstante und die Erdmasse. Die Zentrifugalkraft lautet

$$F_Z = m\omega'^2 r = m\frac{V^2}{r}, \quad (2.101)$$

wobei  $V = \omega r$  die Bahngeschwindigkeit des Satelliten in  $\mathcal{S}$  ist, was aus (2.77) folgt. Aus  $F_G + F_Z = 0$  ergibt sich, dass ein Satellit die Bahngeschwindigkeit

$$V_K = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (2.102)$$

aufweisen muss, damit er auf der Kreisbahn mit Radius  $r$  verweilt. Ist seine Geschwindigkeit kleiner, nähert er sich der Erde. Ist sie größer, entfernt er sich von ihr. Die Satellitenbahnen sind in Abb. 2.13 dargestellt.



**Abb. 2.13** Ein Satellit kann sich auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$  um die Erde bewegen, wenn seine Bahngeschwindigkeit  $V$  gerade  $V_K = \sqrt{GM/r}$  beträgt. In diesem Fall heben sich Zentrifugalkraft und Gravitationskraft auf. Die Drehachse  $\omega$  der Satellitenbahn zeigt senkrecht in die Papierebene hinein und hat nichts mit der Drehachse der Erde zu tun

Die entsprechenden Bewegungsgleichungen werden in Kap. 3 aufgestellt und gelöst. Es wird sich dabei herausstellen, dass die Kreisbahn nur eine von mehreren möglichen Satellitenbahnen ist. In Aufgabe 2.4 wird der geostationäre Satellit behandelt. ▶

## 2.5 Nichtkartesische Koordinatensysteme

In diesem Abschnitt werden weitere mathematische Grundlagen besprochen, die für die theoretische Physik von entscheidender Bedeutung sind: nichtkartesische Koordinatensysteme und ihre Auswirkungen auf die Differenzialoperatoren. Dabei liegt der Schwerpunkt vor allem auf den Zylinderkoordinaten und den sphärischen Polar- bzw. Kugelkoordinaten. Diese Koordinatensysteme werden gewöhnlich verwendet, wenn das zugrunde liegende physikalische Problem eine Zylinder- bzw. eine Kugelsymmetrie aufweist. In der Regel vereinfachen sich in diesen Fällen die Bewegungsgleichungen gegenüber den Gleichungen in ihrer kartesischen Form.

### Krummlinige Koordinatensysteme

Kartesische Koordinatensysteme zeichnen sich dadurch aus, dass alle drei Basisvektoren paarweise orthogonal sind und nicht vom Ort abhängen. In solchen Koordinatensystemen lassen sich drei raumfeste Koordinatenebenen einführen, in denen jeweils eine Koordinate konstant ist ( $x_1$  in der  $x_2$ - $x_3$ -,  $x_2$  in der  $x_1$ - $x_3$ - und  $x_3$  in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene). In einer Vielzahl physikalischer Systeme sind jedoch physikalische Größen auf Flächen konstant, die zylinder- oder kugelförmig sind. Ein Beispiel ist das Gravitationsfeld einer Punktmasse: Dieses ist radialsymmetrisch und hängt nur vom Abstand zu der Punktmasse ab; es hat somit Kugelsymmetrie. Kartesische Koordinaten lassen sich dort für eine Beschreibung zwar verwenden, allerdings ist dies ungeschickt und mathematisch wesentlich aufwendiger.

Koordinatensysteme lassen sich in der folgenden Weise verallgemeinern: Wir stellen uns drei zunächst beliebige Scharen von Koordinatenflächen vor, die der Symmetrie des Problems angepasst sind. Auf jeder dieser Fläche sei ein Parameter  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) konstant. Orte  $\mathbf{x}$  im Raum werden dann dadurch angegeben, dass man drei Koordinatenflächen so wählt, dass sie sich in  $\mathbf{x}$  schneiden, und die zu ihnen gehörenden Parameter ( $q_1, q_2, q_3$ ) als Koordinaten verwendet. Die Einheitsnormalenvektoren der Koordinatenflächen werden als neue Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) verwendet. Obwohl diese für Zylinder- und Kugelkoordinaten paarweise orthogonal sind, muss dies nicht zwangsläufig der Fall sein. Im Allgemeinen sind die  $\hat{\mathbf{e}}'_i$  Funktionen des Ortes.

### Konstanz von räumlichen Abständen

Der Abstand zweier Punkte im Raum ist eine skalare physikalische Größe und darf daher nicht von dem gewählten Koordinatensystem abhängen. Man betrachte zwei infinitesimal voneinander getrennte Punkte im euklidischen Raum mit dem Abstandsvektor

$$\mathbf{ds} = dx_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + dx_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + dx_3 \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (2.103)$$

### 2.5 Nichtkartesische Koordinatensysteme

Hier sind die  $dx_i$  die Abstände entlang der drei Koordinatenachsen. Da das Koordinatensystem kartesisch ist und die Einheitsvektoren paarweise orthogonal sind, ist der quadratische Abstand  $ds^2$  über den Satz von Pythagoras:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (2.104)$$

Was passiert aber, wenn man in ein krummliniges Koordinatensystem übergeht? Nun müssen die drei Koordinaten  $x_i$  als Funktion der neuen Parameter  $q_j$  formuliert werden:  $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$ . Hier und im restlichen Verlauf des Abschnitts beschränken wir uns auf orthogonale Koordinatensysteme, bei denen die Basisvektoren an jedem Punkt paarweise orthogonal sind, d. h.  $\hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}'_j = \delta_{ij}$ . In solchen Fällen gilt lokal wieder der Satz von Pythagoras, und man kann sich überlegen, dass der quadratische Abstand die Form

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \quad (2.105)$$

annimmt. Die drei Größen  $h_i dq_i$  spielen dabei die Rolle des Abstands entlang der drei neuen Koordinatenachsen  $\hat{\mathbf{e}}'_i$ . Es gilt

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)^2 \quad (1 \leq i \leq 3), \quad (2.106)$$

was sich aus dem Kasten „Vertiefung: Die Metrik und ihre Bedeutung in der Physik“ ergibt. Dies hat Auswirkungen auf die Formulierung des Gradienten einer Funktion in den neuen Koordinaten.

#### Gradient in allgemeinen Koordinatensystemen

Der Gradient einer skalaren Funktion  $f$  hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left( \hat{\mathbf{e}}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{e}}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f \\ &= \left( \hat{\mathbf{e}}'_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \hat{\mathbf{e}}'_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \hat{\mathbf{e}}'_3 \frac{\partial}{\partial q_3} \right) f. \end{aligned} \quad (2.107)$$

#### Frage 20

Zeigen Sie, dass sich die rechte Seite von (2.107) im Spezialfall kartesischer Koordinaten auf die bekannte kartesische Form reduziert.

### Zylinderkoordinaten

Als erstes konkretes Beispiel beginnen wir mit Koordinaten  $(q_1, q_2, q_3)$ , die sich für Systeme mit Zylindersymmetrie eignen. Die ursprünglichen kartesischen Koordinaten seien  $(x_1, x_2, x_3)$ . Wir legen den Ursprung auf die Symmetriearchse des physikalischen Systems. Die Symmetriearchse wird willkürlich als

## Vertiefung: Die Metrik und ihre Bedeutung in der Physik

Das Konzept des *metrischen Tensors* oder der *Metrik* spielt immer dann eine große Rolle in der Physik, wenn man es mit nichtkartesischen Räumen zu tun hat. Dies können gekrümmte Räume sein (die in der allgemeinen Relativitätstheorie behandelt werden) oder flache Räume mit krummlinigen Koordinaten (wie Kugel- oder Zylinderkoordinaten). Die Aufgabe der Metrik ist es, Längen- und Winkelberechnungen in dem entsprechenden Raum zur Verfügung zu stellen. Hier beschränken wir uns allerdings nur auf flache Räume.

Um besser zu verstehen, wie uns die Metrik hilft, betrachten wir das quadratische Wegelement in kartesischen Koordinaten  $x$ :

$$ds^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j,$$

wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol ist und die Einstein'sche Summenkonvention verwendet wird. Für allgemeine Koordinatensysteme mit Koordinaten  $q'_i(x_j)$  im flachen Raum schreibt man entsprechend

$$ds^2 = g_{ij} dq_i dq_j.$$

Durch die Kettenregel kann man berechnen, wie die *Metrik*  $g_{ij}$  aussieht, denn das quadratische Wegelement  $ds^2$  ist in beiden Beschreibungen identisch (Längen hängen nicht von der Wahl der Koordinaten ab):

$$g_{ij} dq_i dq_j = g_{ij} \frac{\partial q_i}{\partial x_k} dx_k \frac{\partial q_j}{\partial x_l} dx_l \stackrel{!}{=} \delta_{kl} dx_k dx_l.$$

Also wird die Metrik durch die Transformation von  $x_i$  nach  $q_i$  definiert:

$$g_{ij} \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \frac{\partial q_j}{\partial x_l} = \delta_{kl}.$$

Koordinatenachse  $\hat{e}_3$  des alten kartesischen und  $\hat{e}_z$  des neuen Zylinderkoordinatensystems gewählt, d. h.  $\hat{e}_z = \hat{e}_3$ .

Die entsprechenden planaren Koordinatenebenen ( $q_1$ - $q_2$ -Ebenen) stehen dann senkrecht auf der Symmetriearchse und schneiden diese im Abstand  $z := q_3$  vom Ursprung. Der Abstand eines Punktes in der  $q_1$ - $q_2$ -Ebene vom Schnittpunkt dieser Ebene mit  $\hat{e}_3$  sei  $\varrho := q_1$ .

Die zweite Schar von Koordinatenflächen zeichnet sich durch die Konstanz von  $\varrho$  aus: Die  $q_2$ - $q_3$ -Flächen sind jeweils durch alle Punkte definiert, die den Abstand  $\varrho$  von der Symmetriearchse haben. Somit haben diese Koordinatenflächen Zylinderform. Die dritte Schar von Koordinatenflächen erhalten wir, indem wir die  $x_1$ - $x_3$ -Halbebene um den Winkel  $\varphi := q_2$  um die  $\hat{e}_3$ -Achse drehen. Die somit gewählten Koordinatenflächen sind in Abb. 2.14 dargestellt. Ihr gemeinsamer Schnittpunkt hat die Koordinaten  $(q_1, q_2, q_3) = (\varrho, \varphi, z)$ .

Ist die Koordinatentransformation  $q_i(x_j)$  umkehrbar, d. h., lässt sich  $x_j(q_i)$  angeben, so lautet die Metrik

$$g_{ij} = \delta_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_l}{\partial q_j}.$$

Im dreidimensionalen Raum kann man  $g_{ij}$  offensichtlich durch  $3 \times 3$  Komponenten angeben, und es gilt

$$g_{11} = h_1^2, \quad g_{22} = h_2^2, \quad g_{33} = h_3^2.$$

Die drei Größen  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind in (2.106) definiert.

Für Kugelkoordinaten lauten die nicht verschwindenden Elemente von  $g_{ij}$  beispielsweise

$$g_{11} = g_{rr} = 1, \quad g_{22} = g_{\vartheta\vartheta} = r^2, \quad g_{33} = g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \vartheta.$$

Die Metrik ist somit im Allgemeinen selbst koordinatenabhängig. Darum kann das Wegelement nur in differenzierlicher Form angegeben werden. Um eine endliche Strecke zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  zu berechnen, muss entlang eines spezifizierten Weges integriert werden:

$$\begin{aligned} s_{12} &= \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{ij}(q_i) dq_i dq_j} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{g_{ij}[q_i(t)] \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t)} dt. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Zeit als Bahnpараметer verwendet.

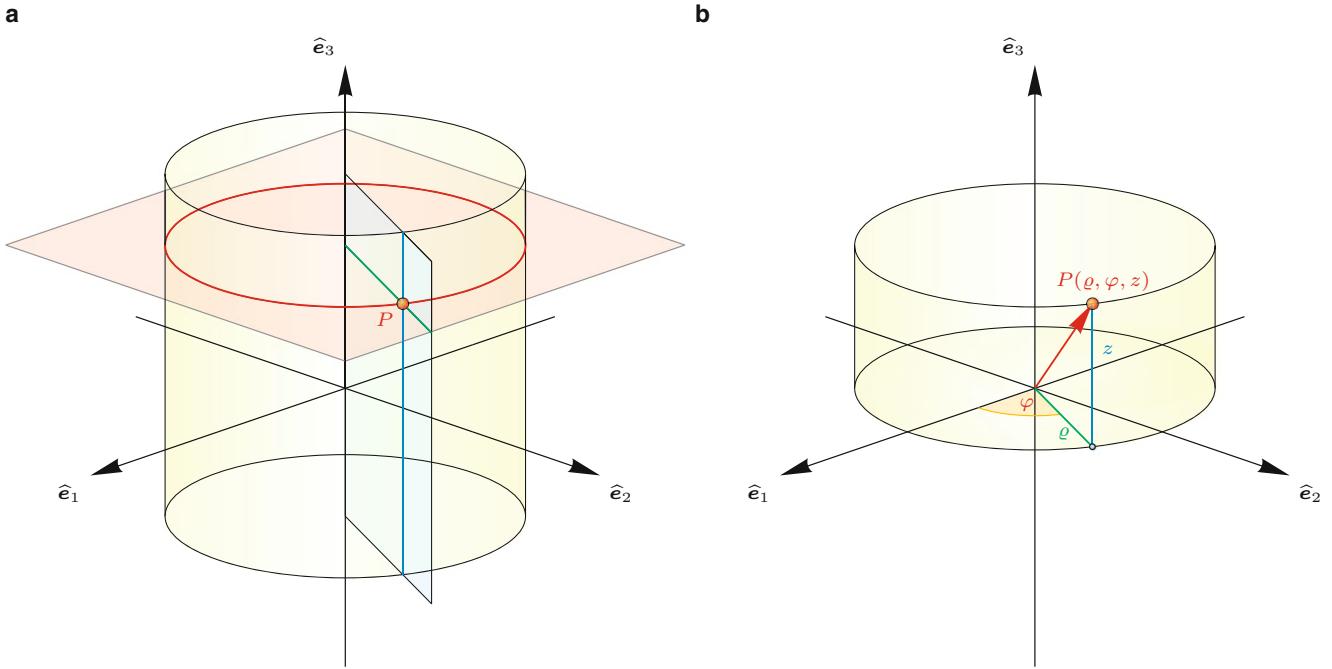
Die drei Koordinatenflächen sind jeweils durch die Konstanz eines Parameters definiert:

1. Zylinderflächen:  $\varrho \in [0, \infty)$
2. gedrehte  $x_1$ - $x_3$ -Halbebenen:  $\varphi \in [0, 2\pi)$
3.  $x_1$ - $x_2$ -Ebenen:  $z \in (-\infty, +\infty)$

Die drei Einheitsnormalenvektoren der Koordinatenflächen bilden die Basis  $\hat{e}_\varrho$ ,  $\hat{e}_\varphi$  und  $\hat{e}_z$ . Ihr Zusammenhang mit den kartesischen Einheitsvektoren lautet

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varrho &= \cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2, \\ \hat{e}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_1, \\ \hat{e}_z &= \hat{e}_3. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Hier wurde zur besseren Lesbarkeit auf gestrichene Einheitsvektoren verzichtet. Anhand der Indizes lassen sich die zylindrischen von den kartesischen Basisvektoren leicht unterscheiden.



**Abb. 2.14** Veranschaulichung und Definition der Zylinderkoordinaten. In **a** sind die Flächen konstanter Zylinderkoordinaten gezeigt (gelb:  $\rho = \text{const}$ , blau:  $\varphi = \text{const}$ , rot:  $z = \text{const}$ ). Jedes Tripel solcher Flächen schneidet sich in einem Punkt  $P$ , der durch die entsprechenden Werte  $(\rho, \varphi, z)$  dargestellt wird. Die Relation (2.109) zwischen Zylinderkoordinaten und kartesischen Koordinaten lässt sich aus **b** ablesen

**Achtung** Die Koordinatenachsen  $\hat{e}_\rho$  und  $\hat{e}_\varphi$  in (2.108) hängen vom Ort ab. Dies hat Auswirkungen auf Ableitungen und Differenzialoperatoren, wenn sie in Zylinderkoordinaten formuliert werden. Wir werden in Kürze darauf zurückkommen. ▶

### Frage 21

Zeigen Sie, dass die drei Basisvektoren in (2.108) paarweise orthogonal sind.

Sind die Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  eines Punktes bekannt, so lauten die entsprechenden kartesischen Koordinaten

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \quad x_3 = z. \quad (2.109)$$

### Frage 22

Machen Sie sich die Gültigkeit von (2.108) und (2.109) anhand von Abb. 2.14 klar.

Aus (2.109) folgt mit (2.106)

$$\begin{aligned} h_\rho^2 &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \\ h_\varphi^2 &= \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2, \\ h_z^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Das Wegelement lautet also

$$\begin{aligned} \mathbf{ds} &= \hat{e}_1 dx_1 + \hat{e}_2 dx_2 + \hat{e}_3 dx_3 \\ &= \hat{e}_\rho d\rho + \hat{e}_\varphi \rho d\varphi + \hat{e}_z dz, \end{aligned} \quad (2.111)$$

und weiterhin gilt

$$ds^2 = \mathbf{ds}^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (2.112)$$

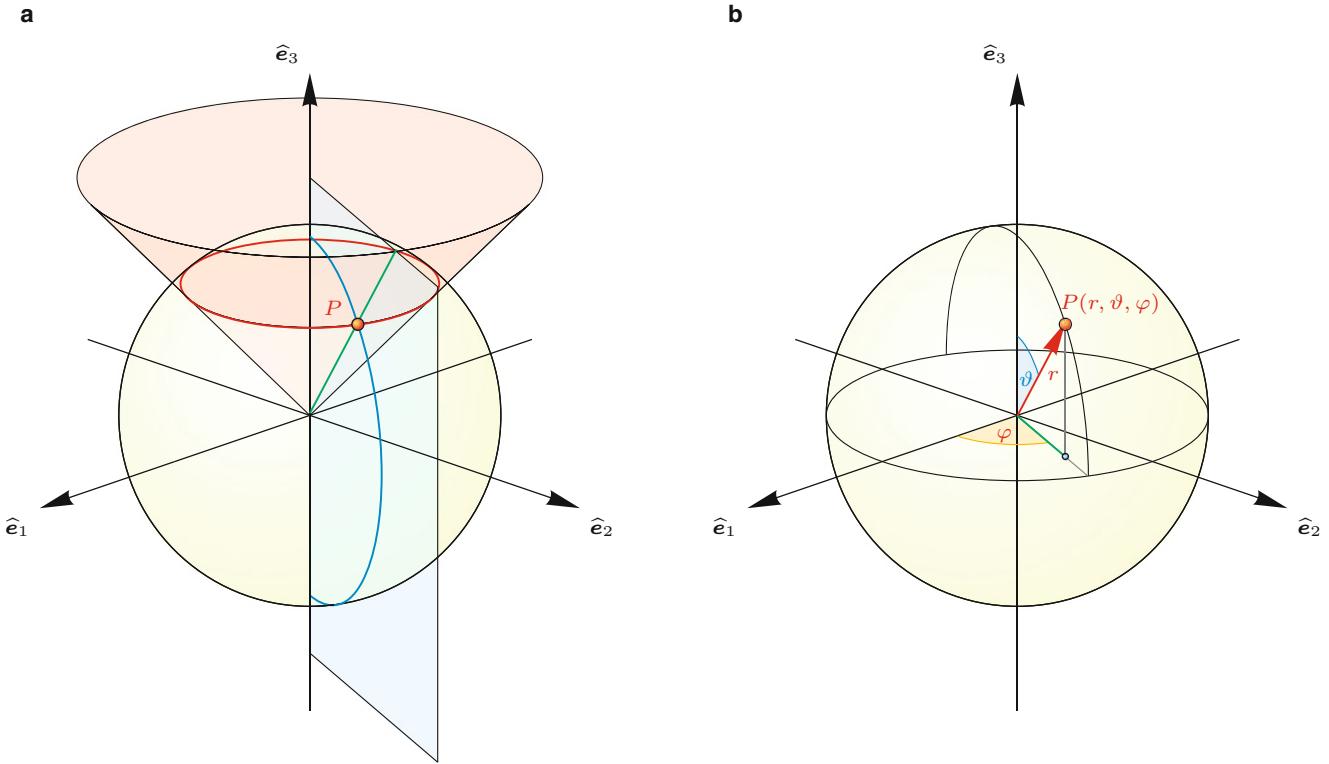
was aus (2.105) und (2.106) folgt. Der Gradient (2.107) wird in Zylinderkoordinaten somit zu

$$\nabla f = \hat{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (2.113)$$

## Sphärische Polarkoordinaten

Ist ein physikalisches Problem kugelsymmetrisch, so bietet sich eine Beschreibung durch sphärische Polar- bzw. Kugelkoordinaten  $(q_1, q_2, q_3)$  an. Die ursprünglichen kartesischen Koordinaten sind wieder  $(x_1, x_2, x_3)$ . Im ersten Schritt wird eine Schar von Kugelflächen mit Radius  $r := q_1$  eingeführt, die konzentrisch um den Ursprung angeordnet sind. Nun wird  $\hat{e}_3$  als beliebige Polachse gewählt. Eine zweite Schar von planaren Koordinatenflächen ergibt sich aus einer Drehung der  $x_1$ - $x_3$ -Halbebene um die Achse  $\hat{e}_3$  um den Winkel  $\vartheta := q_2$ . Als dritte Schar von Koordinatenflächen wählt man Kegelflächen um die  $\hat{e}_3$ -Achse mit Öffnungswinkel  $\varphi := q_3$ . Eine entsprechende Darstellung findet man in Abb. 2.15. Der Flächenschnittpunkt hat die Koordinaten  $(q_1, q_2, q_3) = (r, \vartheta, \varphi)$ .

Wie bereits vorher bei den Zylinderkoordinaten sind die drei Koordinatenflächen jeweils durch die Konstanz eines Parameters definiert:



**Abb. 2.15** Veranschaulichung und Definition der Kugelkoordinaten. In **a** sind die Flächen konstanter Kugelkoordinaten gezeigt (gelb:  $r = \text{const}$ , rot:  $\vartheta = \text{const}$ , blau:  $\varphi = \text{const}$ ). Jedes Tripel solcher Flächen schneidet sich in einem Punkt  $P$ , der durch die entsprechenden Werte  $(r, \vartheta, \varphi)$  dargestellt wird. Die Relation (2.115) zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten lässt sich aus **b** ableSEN

1. Kugelflächen:  $r \in [0, \infty)$
2. Kegelflächen:  $\vartheta \in [0, \pi)$
3. gedrehte  $x_1$ - $x_3$ -Halbebenen:  $\varphi \in [0, 2\pi)$

Man kann zeigen, dass die Einheitsnormalenvektoren über

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_r &= \sin \vartheta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \vartheta \hat{\mathbf{e}}_3, \\ \hat{\mathbf{e}}_\vartheta &= \cos \vartheta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \vartheta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 - \sin \vartheta \hat{\mathbf{e}}_3, \\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi &= \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_1\end{aligned}\quad (2.114)$$

mit den kartesischen Basisvektoren zusammenhängen.

**Achtung** Auch für die Kugelkoordinaten hängen die Koordinatenachsen in (2.114) vom Ort ab. ▶

### Frage 23

Zeigen Sie, dass die drei Basisvektoren in (2.114) paarweise orthogonal sind.

Die Umrechnung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten erfolgt über

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x_2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ x_3 &= r \cos \vartheta,\end{aligned}\quad (2.115)$$

was aus Abb. 2.15 abgeleitet werden kann. Daraus folgt mit (2.106)

$$\begin{aligned}h_r^2 &= \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1, \\ h_\vartheta^2 &= r^2 \cos^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \vartheta = r^2, \\ h_\varphi^2 &= r^2 \sin^2 \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \vartheta\end{aligned}\quad (2.116)$$

und für das Wegelement

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (2.117)$$

Der Gradient in sphärischen Polarkoordinaten lässt sich ausgehend von (2.107) daher in der Form

$$\nabla f = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (2.118)$$

darstellen. Für den speziellen Fall, dass die Funktion  $f$  nur von  $r$  abhängt,  $f = f(r)$ , lautet der Gradient schlicht

$$\nabla f(r) = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{df(r)}{dr}. \quad (2.119)$$

## Ortsabhängigkeit der Einheitsnormalenvektoren

Wir haben bereits in (2.108) und (2.114) gesehen, dass – im Gegensatz zu kartesischen Koordinatensystemen – die Basisvektoren vom Ort abhängen können. Dies hat zur Folge, dass bei der Berechnung von Ableitungen berücksichtigt werden muss, dass die Basisvektoren nicht konstant sind.

**Achtung** Wie in Abschn. 2.3 und 2.4 diskutiert, ist die Zeitabhängigkeit der Basisvektoren in rotierenden Systemen der Grund für das Auftreten von Scheinkräften. Hier sprechen wir allerdings nicht von rotierenden kartesischen, sondern von nicht rotierenden nichtkartesischen Koordinatensystemen. ▶

Wir berechnen zunächst die Ableitungen der Basisvektoren der Zylinderkoordinaten. Man kann sich ausgehend von (2.108) leicht davon überzeugen, dass folgende Zusammenhänge gültig sind:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varrho}{\partial \varrho} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varrho} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial \varrho} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varrho}{\partial \varphi} &= \hat{\mathbf{e}}_\varphi, & \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\hat{\mathbf{e}}_\varrho, & \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial \varphi} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varrho}{\partial z} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial z} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial z} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (2.120)$$

Für die Geschwindigkeit einer Punktmasse gilt wegen (2.111) zunächst

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \dot{\varrho} \hat{\mathbf{e}}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (2.121)$$

Um die zweite Zeitableitung – also die Beschleunigung – zu erhalten, müssen die Zeitableitungen der Basisvektoren berücksichtigt werden. Dabei gilt wegen der Kettenregel beispielsweise

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\varrho}{dt} = \dot{\varrho} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varrho}{\partial \varrho} + \dot{\varphi} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varrho}{\partial \varphi} + \dot{z} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varrho}{\partial z}. \quad (2.122)$$

Nutzt man die Ableitungen in (2.120) aus, so findet man nach kurzer Rechnung

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) \hat{\mathbf{e}}_\varrho + (\varrho \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho} \dot{\varphi}) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (2.123)$$

Der entsprechende Ausdruck für Kugelkoordinaten wird in Aufgabe 2.5 hergeleitet.

### Frage 24

Eine Punktmasse  $m$  bewegt sich in der Ebene  $z = 0$  auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius  $\varrho$  und konstanter Bahngeschwindigkeit  $v = \omega \varrho = \dot{\varphi} \varrho$ . Dann gilt wegen (2.123)

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -m\varrho \dot{\varphi}^2 \hat{\mathbf{e}}_\varrho. \quad (2.124)$$

Dies ist gerade die Kraft, welche die Masse auf der Kreisbahn hält, z. B. die Gravitations- oder die Spannkraft in einem Faden. Zeigen Sie, dass dies genau der negativen Zentrifugalkraft  $m\varrho \omega^2 \hat{\mathbf{e}}_\varrho$  entspricht, die man ausgehend von Abschn. 2.4 für diese Bewegung findet.

## Auswirkungen auf die Differenzialoperatoren

Wir haben in (2.107) bereits gesehen, dass die Darstellung des Gradienten vom gewählten Koordinatensystem abhängt. Auch die Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes haben eine andere Form, wenn das Koordinatensystem gewechselt wird (Großmann 2000). Wir betrachten einen abstrakten Vektor  $\mathfrak{A}$  mit Komponenten  $(A_1, A_2, A_3)$  in kartesischen bzw.  $(A'_1, A'_2, A'_3)$  in krummlinigen Koordinaten. Dann lautet die allgemeine Vorschrift für die Divergenz in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathfrak{A} &= \left( \frac{\hat{\mathbf{e}}'_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}'_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}'_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \cdot \mathfrak{A} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial(h_2 h_3 A'_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 A'_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A'_3)}{\partial q_3} \right),\end{aligned}\quad (2.125)$$

wobei  $\mathfrak{A}$  nach den paarweise orthogonalen Basisvektoren entwickelt wird:

$$\mathfrak{A} = A'_1 \hat{\mathbf{e}}'_1 + A'_2 \hat{\mathbf{e}}'_2 + A'_3 \hat{\mathbf{e}}'_3, \quad A'_i = \mathfrak{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.126)$$

Wir führen an dieser Stelle die Rechnung, die auf die zweite Zeile in (2.125) führt, nicht vor. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um Fleißarbeit ohne tieferen Einblick in die Physik des Problems. Der interessierte Leser kann gerne die Rechenschritte auf eigene Faust nachvollziehen.

Sowohl die drei Komponenten  $A'_i$  als auch die drei Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}'_i$  sind in der Regel eine Funktion der drei Koordinaten  $q_i$ . Mithilfe der Kettenregel müssen dann alle Ableitungen berücksichtigt werden, was im Gegensatz zu einer kartesischen Basis auf Zusatzterme der Form  $\partial \hat{\mathbf{e}}'_i / \partial q_j$  führt, die für Zylinderkoordinaten bereits in (2.120) angegeben wurden.

### Frage 25

Zeigen Sie, dass die Divergenz von  $\mathfrak{A}$  in kartesischen Koordinaten

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \quad (2.127)$$

lautet. Gehen Sie dabei von (2.125) aus.

Die Divergenz in Kugelkoordinaten ist bei vielen Rechnungen in der Elektrodynamik wichtig.

### Divergenz in Kugelkoordinaten

Für einen Vektor  $\mathfrak{A}$  mit der Darstellung  $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$  in Kugelkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathfrak{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta A_\theta)}{\partial \vartheta} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.\end{aligned}\quad (2.128)$$

Die Rotation in nichtkartesischen Koordinatensystemen lautet allgemein

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathfrak{A} &= \left( \frac{\hat{\mathbf{e}}'_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}'_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}'_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \times \mathfrak{A} \\ &= \frac{\hat{\mathbf{e}}'_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(h_3 A'_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 A'_2)}{\partial q_3} \right] \\ &\quad + \frac{\hat{\mathbf{e}}'_2}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial(h_1 A'_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(h_3 A'_3)}{\partial q_1} \right] \\ &\quad + \frac{\hat{\mathbf{e}}'_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 A'_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 A'_1)}{\partial q_2} \right].\end{aligned}\tag{2.129}$$

Es gelten die gleichen Bemerkungen wie bei der Divergenz, insbesondere muss  $\mathfrak{A}$  wie in (2.126) entwickelt werden.

### Rotation in Kugelkoordinaten

Für einen Vektor  $\mathfrak{A}$  mit der Darstellung  $(A_r, A_\vartheta, A_\varphi)$  in Kugelkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathfrak{A} &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial(\sin \vartheta A_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ &\quad + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\vartheta}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \\ &\quad + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r} \left[ \frac{\partial(r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right].\end{aligned}\tag{2.130}$$

Man erkennt an (2.130) direkt, dass die Rotation einer radialsymmetrischen Zentralkraft verschwindet. Solch eine Kraft besitzt die Gestalt  $F(r)\hat{\mathbf{e}}_r$ . Da in (2.130) keine Ableitung von  $A_r$  nach  $r$  auftritt, muss in diesem Fall die Rotation stets null sein. Damit sind all diese Kraftfelder konservativ, was wir bereits in Kap. 1 gefunden haben.

Konkrete Berechnungen von Divergenz und Rotation können sehr langwierig sein. Dies sieht anders aus, wenn das Problem beispielsweise kugelsymmetrisch ist und alle  $\vartheta$ - und  $\varphi$ -Abhängigkeiten verschwinden.

Der *Laplace-Operator*  $\Delta$  ist für die theoretische Physik von entscheidender Bedeutung, da viele physikalische Gleichungen (insbesondere in Feldtheorien) zweite Ortsableitungen in der Form  $\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$  enthalten. Der Laplace-Operator ist äquivalent zur Hintereinanderausführung von Gradient und Divergenz und kann daher mit den Gleichungen, die wir bis hierhin gefunden haben, für allgemeine Koordinatensysteme berechnet

werden:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left( \frac{\hat{\mathbf{e}}'_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}'_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}'_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \\ &\quad \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{e}}'_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}'_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}'_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) f \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \\ &\quad \cdot \left( \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) f.\end{aligned}\tag{2.131}$$

Hier gelten erneut die Anmerkungen wie zu Divergenz und Rotation: Die Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}'_i$  hängen im Allgemeinen von den Koordinaten  $q_j$  ab, werden aber als paarweise orthogonal angenommen.

### Frage 26

Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator, angewandt auf eine skalare Funktion  $f$  in kartesischen Koordinaten,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\tag{2.132}$$

lautet. Gehen Sie dabei von (2.131) aus und nutzen Sie aus, dass die Basisvektoren konstant und paarweise orthogonal sind und vor die Ableitungen gezogen werden können.

Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten wird in Aufgabe 2.6 abgeleitet.

### Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

Der Laplace-Operator, angewandt auf eine skalare Funktion  $f$ , hat in Kugelkoordinaten die Gestalt

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}\tag{2.133}$$

Häufig separiert man den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten in der Form

$$\Delta f = \Delta_r f + \Delta_\Omega f,\tag{2.134}$$

wobei  $\Delta_r$  die Radialableitungen und  $\Delta_\Omega$  alle Winkelableitungen enthält. Ist ein Problem kugelsymmetrisch, d. h., gibt es keine Winkelabhängigkeiten, reduziert sich (2.133) auf

$$\Delta f = \Delta_r f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r}.\tag{2.135}$$

Eine konkrete Anwendung des Laplace-Operators wird in Aufgabe 2.7 diskutiert: Es ist dort das Gravitationsfeld innerhalb und außerhalb der Erde zu berechnen.

# Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- leichte Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
- mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
- anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständen auch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

**2.1 • Orthogonale Transformationen** Zeigen Sie, dass Längen von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren unter orthogonalen Transformationen invariant bleiben. Untersuchen Sie dazu, wie ein Skalarprodukt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$  transformiert. Verwenden Sie hierbei die Einstein'sche Summenkonvention für doppelt auftretende Indizes.

**2.2 •• Galilei-Transformation** Es sind zwei Galilei-Transformationen  $(\mathbf{R}, \mathbf{v}_0, \mathbf{b}_0, t_0)$  und  $(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{v}}_0, \tilde{\mathbf{b}}_0, \tilde{t}_0)$  wie in (2.40) gegeben. Berechnen Sie diejenige Galilei-Transformation, die sich ergibt, wenn beide hintereinander ausgeführt werden. Bestimmen Sie ausgehend von diesem Ergebnis die Inverse einer allgemeinen Galilei-Transformation.

**2.3 •• Umgekehrtes Transformationsverhalten von polaren Vektoren und ihren Zeitableitungen** Zeigen Sie, dass die umgekehrten Transformationsgleichungen in (2.74) aus (2.23), (2.54) und (2.73) folgen. Fangen Sie dabei mit  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{d}'$  an und überlegen Sie sich dann den entsprechenden Zusammenhang für  $\dot{\mathbf{d}}$  und  $\dot{\mathbf{d}'}$ .

**2.4 ••• Geostationärer Orbit** Satelliten im *geostationären* Orbit um die Erde befinden sich in einer kreisförmigen Umlaufbahn über dem Äquator und bewegen sich relativ zur Erdoberfläche nicht.

(a) Leiten Sie die Bedingung für einen geostationären Orbit ab und berechnen Sie den notwendigen Abstand des Satelliten von der Erdoberfläche. Die nötigen Parameter (z. B. Erdmasse) finden sich in der Literatur.

(b) Seit einigen Jahren wird die Möglichkeit diskutiert, einen *Orbitalzug* zu bauen. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um ein Seil, das vom Äquator senkrecht nach oben läuft. Die Gravitations- und die Zentrifugalkraft, die insgesamt auf das Seil wirken, heben sich dabei auf. Das Seil ist sozusagen ein geostationärer Satellit, der allerdings nicht durch eine Punktmasse beschrieben werden kann. Man nehme an, dass das Seil pro Längeneinheit  $dr$  eine konstante Masse hat,

$$dm = \mu dr. \quad (2.136)$$

Stellen Sie eine Integralgleichung auf, die die Kräftebilanz des gesamten Seiles beschreibt. Führen Sie dazu einen zunächst unbekannten Radius  $r_S$  ein, der den Abstand des

oberen Seilendes vom Erdmittelpunkt beschreibt. Wie groß ist  $r_S$ ?

**2.5 •• Beschleunigung in Kugelkoordinaten** Berechnen Sie die Beschleunigung einer Punktmasse in Kugelkoordinaten. Orientieren Sie sich dabei an den Rechnungen, die auf die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten (2.123) geführt haben.

**2.6 •• Laplace-Operator in Kugelkoordinaten** Berechnen Sie den Laplace-Operator (2.131) in Kugelkoordinaten und zeigen Sie somit (2.133). Hierfür sind Teilergebnisse von Aufgabe 2.5 nützlich.

**2.7 ••• Gravitationsfeld der Erde** Es ist das Gravitationsfeld  $\phi(r) = V(r)/m$  ( $m$  ist eine kleine Testmasse) im Innen- und Außenraum der Erde zu berechnen. Wir nehmen hier an, dass das Problem kugelsymmetrisch ist. Verfolgen Sie dazu die beiden folgenden Ansätze unabhängig voneinander.

(a) Man kann zeigen (ohne Beweis an dieser Stelle, aber siehe Bd. 2, Aufgabe 3.11 für ein Analogon in der Elektrodynamik), dass bei einer radialsymmetrischen Massenverteilung das Gravitationsfeld beim Radius  $r$  nur von der Masse abhängt, die sich innerhalb einer Kugel mit ebendiesem Radius  $r$  befindet. Es gilt dann

$$F_r = -\frac{d}{dr}\phi(r) = -\frac{GM_{<}(r)}{r^2}. \quad (2.137)$$

Dabei bezeichnet  $M_{<}(r)$  die Masse, die sich innerhalb einer Kugel mit Radius  $r$  befindet, und  $F_r$  ist die radiale Komponente der Gravitationskraft, die zum Zentrum hin zeigt.

(b) In Bd. 2 werden sogenannte Feldgleichungen diskutiert. Mit den dort besprochenen Hilfsmitteln lässt sich zeigen, dass der Zusammenhang

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}) \quad (2.138)$$

zwischen Massendichte  $\rho(\mathbf{x})$  und Gravitationspotenzial  $\phi(\mathbf{x})$  besteht (siehe Bd. 2, (2.8) für die entsprechende Gleichung für das elektrische Potenzial). Aufgrund der Kugelsymmetrie bietet es sich an, den Laplace-Operator  $\Delta$  in Kugelkoordinaten zu verwenden. Weiterhin gelten dann die Relationen  $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r)$  und  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(r)$ .

Berechnen Sie sowohl aus (2.137) als auch aus (2.138) das Gravitationspotenzial  $\phi(r)$ . Berücksichtigen Sie dabei die geeigneten Randbedingungen, um die Differentialgleichungen vollständig aufzuentwickeln. Zur Vereinfachung nehmen wir weiterhin an, dass die Massendichte der Erde konstant ist:  $\rho(r) = \text{const.}$

## Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

**2.1** Es ist zunächst der Zusammenhang zwischen dem transformierten Skalarprodukt  $a'_i b'_i$  und dem ursprünglichen Skalarprodukt  $a_i b_i$  gesucht. Es sei  $S$  die Matrix, die eine orthogonale Transformation vom ungestrichenen in das gestrichene System darstellt. Dann gelten  $a'_i = S_{ij} a_j$  und  $b'_i = S_{ij} b_j$  und somit

$$a'_i b'_i = S_{ij} a_j S_{ik} b_k. \quad (2.139)$$

Hier muss das zweite Indexpaar  $j$  durch  $k$  ersetzt werden, da Summationsindizes nicht häufiger als zweimal auf einer Seite einer Gleichung auftreten dürfen. Orthogonale Transformationen erfüllen aber gerade  $S_{ij} S_{ik} = \delta_{jk}$ . Es folgt sofort

$$a'_i b'_i = a_j b_k \delta_{jk} = a_j b_j = a_i b_i. \quad (2.140)$$

Im letzten Schritt kann das Indexpaar  $j$  durch  $i$  ersetzt werden. Dies ist möglich, da über diese Indizes summiert wird und sie noch nicht auf dieser Seite der Gleichung verwendet werden. Es dürfen stets nur beide Indizes eines Indexpaars gleichzeitig durch ein anderes Indexpaar ersetzt werden.

Betrachtet man nun den Spezialfall  $b_i = a_i$  und  $b'_i = a'_i$ , so folgt, dass die Länge eines Vektors invariant ist:

$$|\mathbf{a}'|^2 = a'_i a'_i = a_i a_i = |\mathbf{a}|^2. \quad (2.141)$$

Für den Winkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gilt

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}. \quad (2.142)$$

Da sowohl das Skalarprodukt im Zähler als auch die Beträge im Nenner invariant sind, muss auch  $\cos \theta$  und damit der Winkel  $\theta$  zwischen den Vektoren invariant sein. Eine orthogonale Transformation ist daher eine *winkeltreue* und *längentreue Transformation*.

**2.2** Wir schreiben zunächst

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t - \mathbf{b}_0), & t' &= t - t_0, \\ \mathbf{x}'' &= \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x}' - \tilde{\mathbf{v}}_0 t' - \tilde{\mathbf{b}}_0), & t'' &= t' - \tilde{t}_0. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Einsetzen von  $\mathbf{x}'$  und  $t'$  in  $\mathbf{x}''$  und  $t''$  ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' &= \tilde{\mathbf{R}}[\mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t - \mathbf{b}_0) - \tilde{\mathbf{v}}_0(t - t_0) - \tilde{\mathbf{b}}_0], \\ t'' &= t - (t_0 + \tilde{t}_0). \end{aligned} \quad (2.144)$$

Dies vergleicht man mit einer dritten Galilei-Transformation,

$$\mathbf{x}'' = \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{v}}_0 t - \tilde{\mathbf{b}}_0), \quad t'' = t - \tilde{t}_0, \quad (2.145)$$

die direkt vom ungestrichenen zum doppelt gestrichenen System führt. Durch einen Vergleich findet man

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}} &= \bar{\mathbf{R}}\mathbf{R}, \\ \tilde{\mathbf{v}}_0 &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{R}^\top \tilde{\mathbf{v}}_0, \\ \tilde{\mathbf{b}}_0 &= \mathbf{b}_0 + \mathbf{R}^\top (\tilde{\mathbf{b}}_0 - \tilde{\mathbf{v}}_0 t_0), \\ \tilde{t}_0 &= \tilde{t}_0 + t_0. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Eine Galilei-Transformation gefolgt von ihrer inversen Transformation muss als  $(\mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0)$  darstellbar sein. Dies führt zunächst auf

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^\top \quad \text{und} \quad \tilde{t}_0 = -t_0. \quad (2.147)$$

Weiterhin gilt

$$\tilde{\mathbf{v}}_0 = -\mathbf{R}\mathbf{v}_0 \quad (2.148)$$

und schließlich

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = -\mathbf{R}(\mathbf{v}_0 t_0 + \mathbf{b}_0). \quad (2.149)$$

**2.3** Zunächst ist es trivial zu sehen, dass

$$\mathbf{d}' = \mathbf{R}\mathbf{d} \implies \mathbf{d} = \mathbf{R}^\top \mathbf{d}' \quad (2.150)$$

gilt. Im zweiten Schritt soll

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}' &= \mathbf{R}(\dot{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) \\ \implies \dot{\mathbf{d}} &= \mathbf{R}^\top(\dot{\mathbf{d}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{d}') \end{aligned} \quad (2.151)$$

gezeigt werden. Dies ist gleichbedeutend mit der Identität

$$\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{d}' = \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}), \quad (2.152)$$

deren Gültigkeit überprüft werden soll. Da  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}$  ein polarer Vektor ist (denn das Kreuzprodukt eines axialen und eines polaren Vektors ist wieder ein polarer Vektor), ist die Gültigkeit von (2.152) im Grunde schon gezeigt. Wir wollen dies aber hier explizit überprüfen. Dazu schreiben wir die rechte Seite von (2.152) in Komponentenform:

$$r_{ij} \epsilon_{jkl} \omega_k v_l = r_{ij} b_{jl} v_l = -r_{ij} b_{jl} v_l. \quad (2.153)$$

Hier wurden  $\epsilon_{ijk} \omega_k = b_{ij}$  sowie  $b_{ij} = -b_{ji}$  verwendet. An dieser Stelle kann die Identität in der Form  $\delta_{lm} = r_{kl} r_{km}$  eingeführt werden:

$$r_{ij} \epsilon_{jkl} \omega_k v_l = -r_{ij} r_{kl} b_{jl} r_{km} v_m = -b'_{ik} v'_k. \quad (2.154)$$

Im letzten Schritt wurden die Transformationseigenschaften von  $b_{jl}$  und  $v_m$  unter orthogonalen Transformationen ausgenutzt. Schließlich ist

$$-b'_{ik} v'_k = -\epsilon_{ikl} \omega'_l v'_k = \epsilon_{ilk} \omega'_l v'_k, \quad (2.155)$$

was gerade die Komponentenschreibweise von  $\omega' \times \mathbf{d}'$  ist. So mit ist auch der Zusammenhang zwischen  $\dot{\mathbf{d}}$  und  $\dot{\mathbf{d}}'$  gezeigt. Die dritte Gleichung in (2.74) folgt wieder aus der Argumentation, dass jede weitere Zeitableitung durch wiederholtes Anwenden der zweiten Gleichung in (2.74) erhalten werden kann.

## 2.4

- (a) Ein Satellit auf einer Kreisbahn ruht im korotierenden Bezugssystem und erfährt dort keine Kräfte. Dies bedeutet, dass sich die Gravitations- und die Zentrifugalkraft gerade aufheben müssen. Es gibt keine Coriolis-Kraft. Wie bereits in (2.102) gezeigt, lautet die Bahngeschwindigkeit des Satelliten

$$V = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (2.156)$$

Dabei ist  $r$  der Abstand des Satelliten zum **Erdmittelpunkt**. Die Bahngeschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit des Satelliten erfüllen wegen (2.76)

$$V = \omega_E r, \quad (2.157)$$

da  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\mathbf{x}$  senkrecht aufeinander stehen. Somit ist der Radius der geostationären Satellitenbahn durch

$$r_G = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega_E^2}} \quad (2.158)$$

gegeben. Damit der Satellit geostationär ist, muss  $\omega$  der Winkelgeschwindigkeit der Erde entsprechen. Der Wert ist  $\omega_E = 2\pi/86.400 \text{ s}$ . Die Gravitationskonstante und die Erdmasse sind  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  und  $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . Somit ergibt sich ein Bahnradius von rund  $r_G = 42.160 \text{ km}$ . zieht man den Erdradius ( $r_E = 6380 \text{ km}$ ) ab, findet man den Abstand von der Erdoberfläche:  $r_G - r_E = 35.780 \text{ km}$ .

- (b) Das gesamte Seil ruht im korotierenden Bezugssystem. Zentrifugal- und Gravitationskräfte heben sich nicht an jedem Punkt des Seiles, sondern nur integriert über das gesamte Seil auf. Ein kleines Element des Seiles mit Abstand  $r$  zum Erdmittelpunkt erfährt die Kräfte

$$dF_G = \frac{GM\mu dr}{r^2}, \quad dF_Z = \mu\omega_E^2 r dr. \quad (2.159)$$

Die Differenz der Kräfte ist

$$dF_Z - dF_G = \left( \omega_E^2 - \frac{GM}{r^3} \right) \mu r dr. \quad (2.160)$$

Wegen des Ergebnisses in der ersten Teilaufgabe sieht man, dass die Differenz negativ ist, wenn  $r < r_G$  ist. Für kleine Abstände werden die Seilelemente daher in Richtung Erdoberfläche beschleunigt. Für Seilelemente, die weiter von der Erde entfernt sind, überwiegt die Zentrifugalkraft: Sie werden nach außen beschleunigt. Aufgrund der Seilspannung hängen allerdings alle Seilelemente zusammen. Das

Seil kann nur als Ganzes beschleunigt werden. Daraus ergibt sich als Bedingung für das Orbitalseil:

$$\int_{r_E}^{r_S} \left( \omega_E^2 - \frac{GM}{r^3} \right) \mu r dr = 0. \quad (2.161)$$

Nach ausgeführter Integration folgt

$$\begin{aligned} GM \left( \frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_S} \right) &= \frac{1}{2} \omega_E^2 (r_S - r_E)^2 \\ \implies \frac{2GM}{\omega_E^2} &= r_E r_S (r_E - r_S). \end{aligned} \quad (2.162)$$

Diese in  $r_S$  quadratische Gleichung kann direkt gelöst werden:

$$\begin{aligned} r_S &= \frac{r_E}{2} \pm \sqrt{\frac{r_E^2}{4} + \frac{2GM}{\omega_E^2 r_E}} = \frac{r_E}{2} \pm \sqrt{\frac{r_E^2}{4} + \frac{2r_G^3}{r_E}} \\ &= r_E \left( \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \left( \frac{r_G}{r_E} \right)^3} \right). \end{aligned} \quad (2.163)$$

Die negative Lösung ist ungültig, da  $r_S > r_E$  sein muss. Wegen  $r_G/r_E \approx 6,61$  ist der numerische Wert somit ungefähr  $r_S = 24,5r_E = 3,7r_G = 157.000 \text{ km}$ . Anstatt das Seil bis  $r_S$  zu verlängern, ist es auch denkbar, ein „hinreichend schweres Gegengewicht“ an einem Punkt oberhalb von  $r_G$  am Seil zu befestigen. Dem Leser ist es überlassen auszurechnen, wie groß die „Gegenmasse“ sein muss, damit das Seil insgesamt unbeschleunigt bleibt.

## 2.5 Das Wegelement für Kugelkoordinaten lautet, ähnlich wie (2.111):

$$ds = \hat{e}_r dr + \hat{e}_\vartheta r d\vartheta + \hat{e}_\varphi r \sin \vartheta d\varphi. \quad (2.164)$$

Deswegen gilt zunächst für die Geschwindigkeit einer Punktmasse

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\vartheta} \hat{e}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi. \quad (2.165)$$

Es ist sinnvoll, im Folgenden die Ableitungen der Basisvektoren zu berechnen. Diese folgen aus (2.114):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{e}_\vartheta}{\partial r} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial r} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \vartheta} &= \hat{e}_\vartheta, \\ \frac{\partial \hat{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} &= -\hat{e}_r, & \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \vartheta} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} &= \sin \vartheta \hat{e}_\varphi, & \frac{\partial \hat{e}_\vartheta}{\partial \varphi} &= \cos \vartheta \hat{e}_\varphi, \\ \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -(\sin \vartheta \hat{e}_r + \cos \vartheta \hat{e}_\vartheta). \end{aligned} \quad (2.166)$$

Hieraus ergeben sich die Zeitableitungen der Basisvektoren. Für  $\hat{\mathbf{e}}_r$  gilt

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} = \dot{r}\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} + \dot{\vartheta}\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \vartheta} + \dot{\varphi}\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi} = \dot{\vartheta}\hat{\mathbf{e}}_\vartheta + \dot{\varphi}\sin\vartheta\hat{\mathbf{e}}_\varphi. \quad (2.167)$$

Analog hat man

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\vartheta}{dt} &= -\dot{\vartheta}\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{\varphi}\cos\vartheta\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \\ \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{dt} &= -\dot{\varphi}(\sin\vartheta\hat{\mathbf{e}}_r + \cos\vartheta\hat{\mathbf{e}}_\vartheta). \end{aligned} \quad (2.168)$$

Die Beschleunigung ist die Zeitableitung von (2.165):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \ddot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\vartheta}\hat{\mathbf{e}}_\vartheta + \ddot{r}\hat{\mathbf{e}}_\vartheta + \dot{r}\dot{\varphi}\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\vartheta}{dt} \\ &\quad + \dot{r}\sin\vartheta\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + r\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ &\quad + r\sin\vartheta\ddot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Es müssen nun alle Zeitableitungen der Basisvektoren durch die entsprechenden Terme in (2.168) ersetzt werden. Eine etwas mühsame, aber unkomplizierte Sortierung nach den drei Basisvektoren liefert letztlich

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{e}}_r \left[ \ddot{r} - r \left( \dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 \right) \right] \\ &\quad + \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \left[ 2\dot{r}\dot{\vartheta} + r \left( \ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 \right) \right] \\ &\quad + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \left[ (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\vartheta + 2r\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta \right]. \end{aligned} \quad (2.170)$$

Die Terme in (2.170), die nur erste Zeitableitungen erhalten, sind gerade die Coriolis- und die Zentrifugalbeschleunigungen. Dies kann man sich überlegen, wenn man die entsprechenden Kräfte in (2.80) in Kugelkoordinaten formuliert.

**2.6** Für Kugelkoordinaten gilt aufgrund des Wegelements (2.117)

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\varphi = r\sin\vartheta. \quad (2.171)$$

Die Ableitungen der Basisvektoren sind in (2.166) zu finden. Wegen (2.131) sind insgesamt neun Terme zu berücksichtigen. Die Reihenfolge der Ableitungen in diesen Termen kann in der Regel nicht vertauscht werden, da die koordinatenabhängigen Basisvektoren dazwischenstehen. Es können jedoch teilweise Faktoren vor die Ableitungen gezogen werden. Zum Beispiel hängen sämtliche Basisvektoren nicht vom Radius  $r$  ab und können mit  $r$ -Ableitungen vertauscht werden.

Im Folgenden schauen wir uns alle Kombinationen an und vereinfachen zunächst so weit wie möglich. Man beachte, dass alle Basisvektoren senkrecht aufeinander stehen und Skalarprodukte verschiedener Basisvektoren somit identisch verschwinden. Um die Übersichtlichkeit zu verbessern, verzichten wir an dieser Stelle auf die Punkte, die das Skalarprodukt kennzeichnen.

Es ist weiterhin zu beachten, dass der Laplace-Operator auf Funktionen  $f(r, \vartheta, \varphi)$  anzuwenden ist. Um dies zu berücksichtigen, schreiben wir eine beliebige Funktion  $f$  hin. Wir beginnen mit den Termen, bei denen links die  $r$ -Ableitung steht:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} f &= \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} f = \frac{\partial^2}{\partial r^2} f, \\ \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} f &= \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} f = 0, \\ \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} f &= \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} f = 0. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Nun betrachten wir die Terme, bei denen links die  $\vartheta$ -Ableitung steht, und berücksichtigen dabei (2.166), in der die  $\vartheta$ -Ableitungen der Basisvektoren abgelesen werden können:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} f &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f, \\ \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} f &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} f, \\ \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} f &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f = 0. \end{aligned} \quad (2.173)$$

Es verbleiben noch die drei Terme, bei denen links die  $\varphi$ -Ableitungen stehen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} f &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f, \\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} f &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} f = \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} f, \\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} f &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} f = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f. \end{aligned} \quad (2.174)$$

Die Rechnungen sind fast abgeschlossen. Man erkennt, dass keine gemischten Ableitungen auftreten. Der Grund ist, dass alle gemischten Ableitungen mit Skalarprodukten verschiedener Basisvektoren zusammenhängen und somit verschwinden müssen.

Abschließend fassen wir noch die Ableitungen zusammen. Die  $r$ -Ableitungen lauten in kombinierter Form

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} f, \quad (2.175)$$

wie man schnell überprüft. Analog gilt für die  $\vartheta$ -Ableitungen

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) f = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} f. \quad (2.176)$$

Da es nur einen Term mit  $\varphi$ -Ableitungen gibt, muss dort nichts zusammengefasst werden. Die drei verbleibenden Ableitungssterme ergeben das Endergebnis in (2.133).

## 2.7

- (a) Zunächst überlege man sich, dass die Masse, die sich in einer Kugel mit Radius  $r$  und konstanter Massendichte  $\rho$  befindet, durch

$$M_{<}(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 \quad (2.177)$$

gegeben ist. Dies gilt, so lange man sich innerhalb der Erde befindet. Außerhalb ist in jeder Kugel mit Radius  $r > R$  ( $R$  ist der Erdradius)  $M_{<}(r) = M = 4\pi\rho R^3/3$ . Wir integrieren also (2.137) zunächst vom Erdmittelpunkt bis zu einem Punkt  $r < R$  und erhalten

$$\phi(r) = \frac{4\pi}{3} G\rho \int_0^r r' dr' = \frac{2\pi}{3} G\rho r^2 + C_1 \quad (2.178)$$

mit einer Integrationskonstanten  $C_1$ . Im Außenraum,  $r > R$ , gilt offensichtlich

$$\phi(r) = \frac{4\pi}{3} G\rho R^3 \int_R^r \frac{dr'}{r'^2} = -\frac{GM}{r} + C_2 \quad (2.179)$$

mit einer weiteren Integrationskonstanten  $C_2$ , die wir beispielsweise als  $C_2 = 0$  wählen können, indem wir verlangen, dass  $\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  gilt. Es ist nur noch  $C_1$  zu bestimmen. Dies ist möglich, indem man fordert, dass  $\phi(r)$  an der Erdoberfläche stetig ist. Physikalisch bedeutet dies, dass eine Masse nicht plötzlich potentielle Energie gewinnt oder verliert, wenn sie sich gerade durch die Erdoberfläche hindurch bewegt. Es folgt also

$$\frac{2\pi}{3} G\rho R^2 + C_1 = -\frac{GM}{R}, \quad (2.180)$$

was letztlich auf

$$C_1 = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R} \quad (2.181)$$

führt. Die Lösung lautet also

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{GM}{R} \left( \frac{r^2}{R^2} - 3 \right) & r < R, \\ -\frac{GM}{r} & r \geq R. \end{cases} \quad (2.182)$$

Man kann schnell überprüfen, dass auch die Gravitationskraft (wie gefordert) stetig ist. Dazu leitet man  $\phi(r)$  wieder nach  $r$  ab und vergleicht die beiden Terme in (2.182) bei  $r = R$ .

- (b) Für ein kugelsymmetrisches Problem verschwinden sämtliche Winkelableitungen. Der Laplace-Operator kann deshalb in der Form

$$\Delta = \Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.183)$$

geschrieben werden. Dies führt offensichtlich auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = 4\pi G\rho. \quad (2.184)$$

Im Innenraum der Erde ist die Massendichte  $\rho$ , außerhalb 0. Wir beschäftigen uns zunächst mit der Lösung für den Innenraum. Multiplikation mit  $r^2$  und eine erste Integration führen auf

$$r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = \frac{4\pi}{3} G\rho r^3 + C_1. \quad (2.185)$$

Offensichtlich bekommt man nach Division von  $r^2$  und einer erneuten Integration

$$\phi(r) = \frac{2\pi}{3} G\rho r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2. \quad (2.186)$$

Diese Lösung ist fast identisch zu der in (2.178); es existiert allerdings noch ein Term  $C_1/r$ . Die Integrationskonstante  $C_1$  muss verschwinden, damit die Lösung im Innenraum für  $r \rightarrow 0$  regulär ist, also nicht divergiert. Somit ist im Innenraum

$$\phi(r) = \frac{2\pi}{3} G\rho r^2 + C_2, \quad r < R. \quad (2.187)$$

Im Außenraum gilt ebenfalls (2.186), allerdings muss dort  $\rho = 0$  gesetzt werden. Außerdem nennen wir die Integrationskonstanten  $K_1$  und  $K_2$ , um sie von  $C_1$  und  $C_2$  der Innenraumlösung zu unterscheiden. Die Integrationskonstante  $K_2$  kann wieder gleich null gesetzt werden, damit  $\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  geht. Es folgt also

$$\phi(r) = -\frac{K_1}{r}, \quad r > R. \quad (2.188)$$

Nun müssen noch  $C_2$  und  $K_1$  bestimmt werden. Aus der Bedingung, dass das Potenzial bei  $r = R$  stetig differenzierbar ist, folgt zum einen

$$\frac{4\pi}{3} G\rho R = \frac{K_2}{R^2} \quad (2.189)$$

und zum anderen

$$\frac{2\pi}{3} G\rho R^2 + C_2 = -\frac{K_1}{R}. \quad (2.190)$$

Insgesamt führt dies wieder auf (2.182).

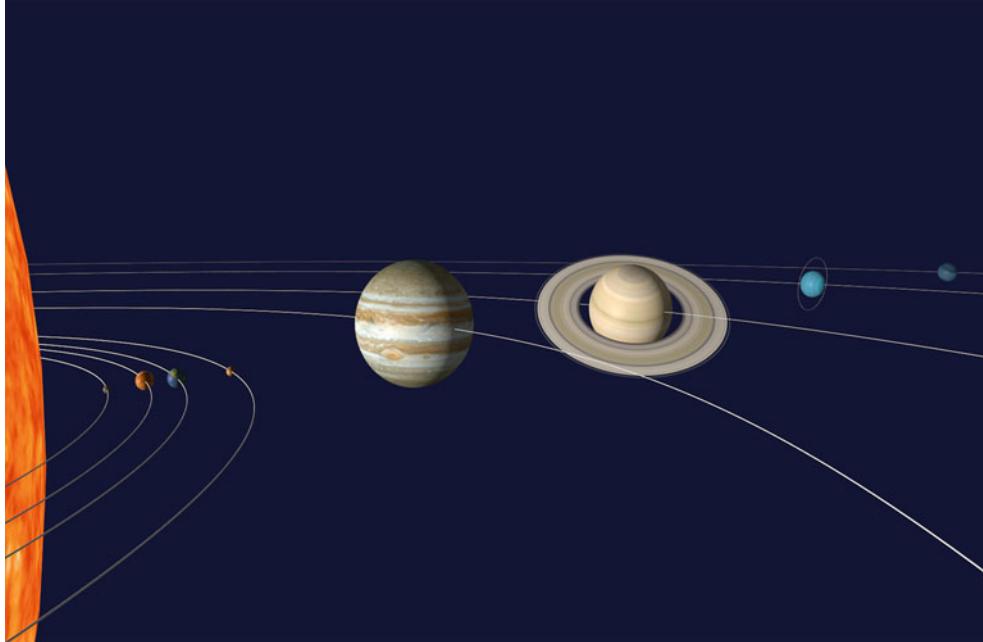
## Literatur

Großmann, S.: Mathematischer Einführungskurs für die Physik.  
Teubner (2000)

Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J.: Mathematical Methods  
For Physics And Engineering. Cambridge University Press  
(2006)

# Systeme von Punktmassen

# 3



Was sind abgeschlossene Systeme?

Welche Größen sind im Zweikörperproblem erhalten?

Welche Arten von Planetenbahnen gibt es?

Welche Bedeutung hat Streuung für die Physik?

Ist das Dreikörperproblem allgemein lösbar?

Was ist die Ursache von Ebbe und Flut?

Was besagt der Virialsatz?

Kapitel 3

3.1	Allgemeine Aussagen und Erhaltungssätze . . . . .	86
3.2	Das Zweikörper-Zentralkraftproblem . . . . .	91
3.3	Das Kepler-Problem . . . . .	95
3.4	Elastische Stöße und Streuung . . . . .	101
3.5	Das reduzierte Dreikörperproblem . . . . .	109
3.6	Gezeitenkräfte . . . . .	112
3.7	Mechanische Ähnlichkeit und der Virialsatz . . . . .	116
	Aufgaben . . . . .	119
	Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	121
	Literatur . . . . .	125

Die beiden vorherigen Kapitel waren hauptsächlich der Ausarbeitung der physikalischen Grundlagen und der fundamentalen mathematischen Hilfsmittel gewidmet. In diesem Kapitel werden diese Methoden angewandt, um einige wichtige mechanische Systeme zu beschreiben und zu verstehen.

Abschn. 3.1 beschäftigt sich mit der Erweiterung der Erhaltungssätze auf Systeme von Punktmassen. Der extrem wichtige Spezialfall zweier Punktmassen unter dem Einfluss einer radialsymmetrischen Zentralkraft wird in Abschn. 3.2 diskutiert. Aufbauend darauf folgt die Lösung der Bewegungsgleichungen des Kepler-Problems in Abschn. 3.3. Damit ist es möglich, die Planetenbahnen zu charakterisieren.

Eine weitere Anwendung von großer Bedeutung sind Stöße zweier Punktmassen und die Streuung von Teilchen. Diese Themen werden in Abschn. 3.4 untersucht.

Es folgen zwei Abschnitte, die häufig nicht in Mechaniklehrbüchern zu finden sind: das reduzierte Dreikörperproblem und die Gezeitenkräfte in Abschn. 3.5 und 3.6. Das Kapitel wird in Abschn. 3.7 mit dem Virialsatz abgeschlossen, der vor allem für die statistische Physik von zentraler Bedeutung ist.

Dieses Kapitel bildet eine wichtige Grundlage für die Quantenmechanik in Bd. 3, wie dort bei der Diskussion des Wasserstoffatoms und der quantenmechanischen Streuung noch deutlich werden wird.

### 3.1 Allgemeine Aussagen und Erhaltungssätze

Viele mechanische Systeme lassen sich durch  $N$  wechselwirkende Punktmassen idealisieren. Dazu gehören beispielsweise die Planeten in unserem Sonnensystem oder Sterne in Kugelsternhaufen (Abb. 3.1). Oftmals ist  $N$  eine sehr große Zahl (einige Tausend für Kugelsternhaufen und viele  $10^{23}$ , wenn man alle Moleküle in einem Kubikmeter Luft zählt). Auch für die spätere Diskussion starrer Körper in Kap. 4 ist das Studium eines Systems von Punktmassen hilfreich.

In diesem Abschnitt werden die Erhaltungssätze für Impuls, Drehimpuls und Energie auf solche Systeme verallgemeinert. Die Bewegungsgleichungen werden dabei allerdings nicht gelöst. Das Zweikörperproblem wird am Ende dieses Abschnitts als Spezialfall  $N = 2$  eingeführt.

#### Innere und äußere Kräfte

Gegeben seien  $N$  Punktmassen  $m_i$  an den Orten  $\mathbf{x}_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ). Im Folgenden werden Summationen stets über alle Teilchen im System verstanden, d.h.  $\sum_i = \sum_{i=1}^N$ , wenn nicht anders



**Abb. 3.1** Der Kugelsternhaufen M11 (Wildentenhaufen) besteht aus fast 3000 Sternen, die gravitativ miteinander wechselwirken und dabei als Punktmassen betrachtet werden können (© NASA)

gekennzeichnet. Auf jede Punktmasse wirke eine Kraft  $\mathbf{F}_i$ , die in zwei Komponenten aufgeteilt werden kann:

1. *Innere Kräfte* sind Wechselwirkungs Kräfte, die paarweise zwischen den Punktmassen innerhalb des Systems wirken. Die Kraft, die  $m_i$  auf  $m_j$  ausübt, sei  $\mathbf{F}_{ji}$ .
2. Kräfte, die von außerhalb des Systems auf die Punktmassen wirken, nennt man *äußere Kräfte*. Dann erfährt jede Punktmasse  $m_i$  zusätzlich eine äußere Kraft  $\mathbf{F}_i^{(a)}$ . Dies kann z.B. die Gravitationskraft eines Körpers sein, der selbst nicht Teil des betrachteten Systems ist. Wirken keine äußeren Kräfte auf das System, so nennt man das System *abgeschlossen*.

Die Bewegungsgleichung für die  $i$ -te Punktmasse lautet daher

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(a)}. \quad (3.1)$$

Der Fall  $i = j$  wird in der Summe ignoriert, könnte aber aufgrund des dritten Newton'schen Axioms,  $\mathbf{F}_{ii} = -\mathbf{F}_{ii}$ , ebenso gut hinzugefügt werden, da  $\mathbf{F}_{ii} = -\mathbf{F}_{ii} = 0$  gilt. Daraus folgt ebenfalls, dass sich alle inneren Kräfte aufheben:

$$\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ji} = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji} = 0. \quad (3.2)$$

#### Frage 1

Machen Sie sich mithilfe des dritten Newton'schen Axioms klar, dass die Summe in (3.2) tatsächlich verschwindet. Teilen Sie dazu die Summe in zwei Teile auf, einen mit  $i < j$  und einen mit  $i > j$ .

## Bewegung des Schwerpunktes

Die *Gesamtmasse* des Systems ist

$$M := \sum_i m_i. \quad (3.3)$$

Der *Schwerpunkt* der Punktmassen wird dann als

$$X := \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \quad (3.4)$$

definiert. Summiert man nun (3.1) über sämtliche Punktmassen,

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i = \sum_i F_i^{(a)}, \quad (3.5)$$

stellt man zunächst fest, dass die inneren Kräfte nicht zur Dynamik des Schwerpunktes beitragen. Der Schwerpunkt bewegt sich so, als wäre die gesamte Masse darin vereinigt. Es unterliegt nur dem Einfluss der Resultierenden aller äußeren Kräfte:

$$M \ddot{X} = \sum_i F_i^{(a)}. \quad (3.6)$$

Wirken keine äußeren Kräfte,  $F_i^{(a)} = 0$ , oder, weniger streng gefordert, verschwindet lediglich ihre Summe,  $\sum_i F_i^{(a)} = 0$ , so ist

$$M \ddot{X} = 0, \quad (3.7)$$

und der Gesamtimpuls des Systems ist erhalten:

$$P := M \dot{X} = \sum_i m_i \dot{x}_i = \sum_i p_i = \text{const.} \quad (3.8)$$

In diesem Fall bewegt sich sein Schwerpunkt geradlinig-gleichförmig entlang der Bahnkurve:

$$X(t) = X_0 + \frac{P}{M}(t - t_0). \quad (3.9)$$

### Impulserhaltung eines Systems von Punktmassen

Der *Impulssatz* eines Systems von Punktmassen lautet

$$\dot{P} = \sum_i F_i^{(a)} = \mathbf{F}^{(a)}. \quad (3.10)$$

Die Bewegung des Schwerpunktes wird nur durch äußere, nicht jedoch durch innere Kräfte beeinflusst. Verschwindet die Summe aller äußeren Kräfte, so ist der Gesamtimpuls erhalten, d. h., der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig-gleichförmig.

### 3.1 Allgemeine Aussagen und Erhaltungssätze

Punktmassen sind daher als Idealisierungen für ausgedehnte Körper geeignet, wenn man sich für die innere Dynamik nicht interessiert. Dazu gehören beispielsweise thermische Schwingungen der Atome (Wärme).

Um eine Transformation in das *Schwerpunktsystem* durchzuführen, werden die alten Koordinaten  $x_i$  durch

$$x'_i = x_i - X \quad (3.11)$$

ersetzt. In diesem Fall liegt der Schwerpunkt im Ursprung, denn

$$\sum_i m_i x'_i = \sum_i m_i x_i - MX = \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Weiterhin verschwindet der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem, denn aus  $\dot{x}'_i = \dot{x}_i - \dot{X}$  folgt direkt

$$P' := \sum_i m_i \dot{x}'_i = \mathbf{0}. \quad (3.13)$$

#### Frage 2

Machen Sie sich klar, dass der Impuls im Schwerpunktsystem tatsächlich verschwindet.

**Achtung** Wir hatten bereits gesehen, dass der Gesamtimpuls des Systems erhalten ist, wenn keine äußeren Kräfte wirken. In diesem Fall ist das Schwerpunktsystem ein Inertialsystem. Für die meisten Anwendungen ist es dann sinnvoll, das Schwerpunktsystem zur Beschreibung zu verwenden. ▶

## Drehimpuls und Drehimpulssatz

Bis auf die Einschränkung durch das dritte Newton'sche Axiom,  $F_{ij} = -F_{ji}$ , wurden die Wechselwirkungskräfte zwischen den Punktmassen des Systems bisher nicht näher festgelegt. Es soll nun weiterhin angenommen werden, dass die inneren Kräfte  $F_{ij}$  Zentralkräfte sind, die also entlang der Verbindungsgeraden zwischen  $m_i$  und  $m_j$  wirken. In diesem Fall hat man

$$F_{ij} \times (x_i - x_j) = 0. \quad (3.14)$$

Dies gilt insbesondere für die Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen oder die Coulomb-Kraft zwischen zwei Punktladungen.

Der Gesamtdrehimpuls eines Systems von Punktmassen ist die Summe der Drehimpulse aller Punktmassen bezüglich des Koordinatenursprungs:

$$\mathbf{L} := \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (3.15)$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}} &= \sum_i m_i \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i}_{=0} + \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \ddot{\mathbf{x}}_i \\ &= \sum_i \mathbf{x}_i \times \sum_j \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ji}) + \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Im letzten Umformungsschritt wurde nur verwendet, dass  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  ist. Wir nutzen nun aus, dass über alle Punktmassen doppelt summiert wird: Es ist dann unerheblich, ob wir Indizes vertauschen, und mit der Hilfsgleichung

$$\sum_{i,j} \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ji} = \sum_{i,j} \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ij} \quad (3.17)$$

folgt

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)} \\ &= \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)},\end{aligned}\quad (3.18)$$

da wir uns auf Zentralkräfte beschränkt haben. In diesem Fall tragen die inneren Kräfte nicht zur Drehimpulsbilanz bei. Der Term

$$\mathbf{M}^{(a)} := \sum_i \mathbf{M}_i^{(a)} = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)} \quad (3.19)$$

kann als das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte bezüglich des Koordinatenursprungs identifiziert werden.

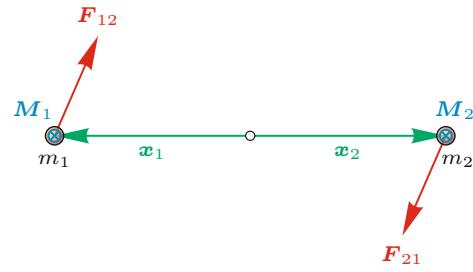
### Drehimpulserhaltung eines Systems von Punktmassen

Der Drehimpulssatz eines Systems von Punktmassen, zwischen denen nur Zentralkräfte wirken, lautet

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{M}_i^{(a)} = \mathbf{M}^{(a)}. \quad (3.20)$$

Der Gesamtdrehimpuls dieses Systems wird lediglich von den äußeren Kräften bzw. äußeren Drehmomenten beeinflusst. Verschwindet das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte, so ist der Gesamtdrehimpuls des Systems erhalten.

Gl. (3.20) wird für die Beschreibung der Rotation starrer Körper in Kap. 4 von entscheidender Bedeutung sein. In Abb. 3.2 ist ein (zugegebenermaßen etwas künstliches) Beispiel für ein nichtzentrales Kräftepaar illustriert, bei dem das Drehmoment nicht verschwindet (dazu bräuchte man Grundgleichungen, die nicht drehinvariant sind).



**Abb. 3.2** Die Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  wechselwirken durch ein nichtzentrales Kräftepaar  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$  (z. B. Lorentz-Kraft). Beide entsprechenden Drehmomente verschwinden nicht und zeigen in die Papierebene hinein. Der Drehimpuls ist wegen  $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \neq 0$  somit nicht erhalten

Durch Einsetzen von (3.11) in (3.15) lässt sich der Drehimpuls im Schwerpunktssystem, d. h. in den Koordinaten  $\mathbf{x}'_i$ , ausdrücken:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{x}_i \times m_i \dot{\mathbf{x}}_i \\ &= X \times M \dot{X} + X \times \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}'_i \\ &\quad + \sum_i m_i \mathbf{x}'_i \times \dot{X} + \sum_i \mathbf{x}'_i \times m_i \dot{\mathbf{x}}'_i.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Aufgrund von (3.12) verschwinden der zweite und der dritte Term. Demnach lässt sich der Drehimpuls als Summe des Drehimpulses des Schwerpunktes um den Ursprung und des gesamten inneren Drehimpulses schreiben:

$$\mathbf{L} = X \times M \dot{X} + \sum_i \mathbf{x}'_i \times m_i \dot{\mathbf{x}}'_i. \quad (3.22)$$

### Energie, konservative und dissipative Kräfte

Um eine Aussage über die Energie des  $N$ -Teilchen-Systems machen zu können, verfahren wir ähnlich wie in (1.136): Die Bewegungsgleichungen der Punktmassen werden mit ihrer Geschwindigkeit multipliziert und aufsummiert:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (3.23)$$

Die linke Seite von (3.23) entspricht der zeitlichen Änderung der kinetischen Energie des Systems:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 \right) = \frac{dT}{dt}. \quad (3.24)$$

Wir fordern nun, dass alle inneren Kräfte aus paarweisen Wechselwirkungspotenzialen  $V_{ij}$  abgeleitet werden können, die nur vom Abstand beider wechselwirkender Punktmassen abhängen:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|). \quad (3.25)$$

Hier wird nicht über  $i$  summiert. Diese Potenziale erfüllen  $V_{ij} = V_{ji}$ . Weiterhin fordern wir, dass Selbstwechselwirkungen ausgeschlossen sind, und setzen  $V_{ii} = 0$ . Hier und im Folgenden gilt die Vektorgleichung

$$\nabla_i := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}. \quad (3.26)$$

Des Weiteren führen wir  $\mathbf{x}_{ij} := \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$  mit  $x_{ij} = |\mathbf{x}_{ij}|$  als Abkürzung ein, sodass die Wechselwirkungspotenziale die Form  $V_{ij}(x_{ij})$  bekommen. Solche Potenziale führen durch (3.25) auf Kräftepaare  $\mathbf{F}_{ij}$  und  $\mathbf{F}_{ji}$ , die das dritte Newton'sche Axiom erfüllen und stets entlang der Verbindungsgeraden  $\mathbf{x}_{ij}$  wirken, also Zentralkräfte sind.

### Frage 3

Man überprüfe, dass Potenziale der Form  $V_{ij}(x_{ij})$  tatsächlich auf Kräftepaare  $\mathbf{F}_{ij}$  und  $\mathbf{F}_{ji}$  führen, die das dritte Newton'sche Axiom und die Bedingung  $\mathbf{F}_{ij} \times \mathbf{x}_{ij} = 0$  erfüllen. Gehen Sie dabei von (3.25) aus und verwenden Sie die Kettenregel. Erweiterung für Enthusiasten: Man konstruiere ein beliebiges Beispiel für ein Potenzial  $V_{ij}$ , das von  $\mathbf{x}_i$  und  $\mathbf{x}_j$  nicht nur in der Form  $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$  abhängt, und vergewissern Sie sich, dass die resultierenden Kräfte im Allgemeinen weder das dritte Newton'sche Axiom erfüllen noch Zentralkräfte sind.

Jedes Paar von Punktmassen trägt zu der potenziellen Energie einmalig durch den Anteil  $V_{ij}(x_{ij})$  bei. Summiert man nun über die Potenziale in der Form  $\sum_i \sum_j V_{ij}$ , so wird jedes Paar von wechselwirkenden Punktteilchen doppelt gezählt, einmal als  $V_{ij}$  und einmal als  $V_{ji}$ . Um dies zu berücksichtigen, kann man entweder die Doppelsumme durch  $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} V_{ij}$  einschränken oder zu  $\sum_{i,j} V_{ij}/2$  abwandeln, da  $V_{ij} = V_{ji}$  gilt.

Zusätzlich sollen auch die äußeren Kräfte Potenzialkräfte sein:

$$\mathbf{F}_i^{(a)} = -\nabla_i V_i^{(a)}(\mathbf{x}_i). \quad (3.27)$$

Somit lässt sich die gesamte potenzielle Energie als

$$V := \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}(x_{ij}) + \sum_i V_i^{(a)}(\mathbf{x}_i) \quad (3.28)$$

definieren, d.h. als Superposition innerer Zweiteilchen- und äußerer Einteilchenpotenziale. Die rechte Seite von (3.23) ist wegen (3.25) und (3.27) somit

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i &= - \sum_i \left( \nabla_i \sum_j V_{ji}(x_{ij}) + \nabla_i V_i^{(a)}(\mathbf{x}_i) \right) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \\ &= - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ji}(x_{ij}) + \sum_i V_i^{(a)}(\mathbf{x}_i) \right) \\ &= - \frac{dV}{dt}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

**Achtung** Der Faktor  $1/2$  taucht in der letzten Umformung auf, da die Ableitung

$$\frac{d}{dt} V_{ji}(x_{ij}) = (\nabla_i V_{ji}(x_{ij})) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + (\nabla_j V_{ji}(x_{ij})) \cdot \dot{\mathbf{x}}_j \quad (3.30)$$

aufgrund der Kettenregel zwei gleiche Beiträge besitzt.  $\blacktriangleleft$

Fasst man die Zwischenergebnisse zusammen, findet man den Energiesatz in der Form

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad E = T + V = \text{const.} \quad (3.31)$$

Alle in diesem Abschnitt betrachteten Kräfte wurden bisher als konservativ angenommen, was auf die Energieerhaltung in (3.31) führt. Der Energiesatz lässt sich jedoch auf Systeme erweitern, in denen dissipative Kräfte wirken. Hierfür ist es lediglich notwendig, die Kräfte in konservative und dissipative Anteile zu zerlegen:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{kons}} + \mathbf{F}_i^{\text{diss}}. \quad (3.32)$$

Dabei ist es unerheblich, ob die dissipativen Anteile zu inneren oder äußeren Kräften gehören. Innere dissipative Kräfte müssen allerdings den Gesamtimpuls und Gesamtdrehimpuls invariant lassen, da die Grundgleichungen translations- und rotationsinvariant sind. Die Einführung von dissipativen Kräften führt direkt auf die modifizierte Energiegleichung, wobei  $T$  und  $V$  ihre alten Bedeutungen behalten.

### Energieerhaltung in einem System von Punktmassen

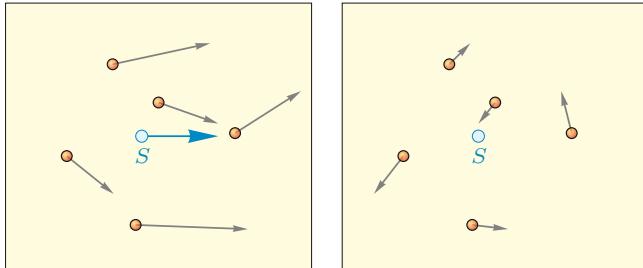
Sind alle Kräfte konservativ, ist die Gesamtenergie in einem System aus  $N$  paarweise wechselwirkenden Punktmassen erhalten. Dissipative Kräfte können die Gesamtenergie ändern:

$$\frac{d}{dt} (T + V) = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (3.33)$$

Die kinetische Energie einer Punktmasse hängt davon ab, in welchem Bezugssystem sie angegeben wird. Dies liegt daran, dass die kinetische Energie eine Funktion der Geschwindigkeit der Punktmasse und diese je nach Wahl des Bezugssystems unterschiedlich ist (Abb. 3.3). Mithilfe der Transformation in (3.11) lässt sich die kinetische Energie eines Systems von Punktmassen in einer anderen Form schreiben. Es lässt sich durch eine kurze Rechnung zeigen, dass

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{\mathbf{x}}_i + \dot{\mathbf{X}})^2 = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{X}}^2 + \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 \quad (3.34)$$

gilt. Die kinetische Energie in einem beliebigen Bezugssystem ist daher die Summe der kinetischen Energie der im Schwer-



**Abb. 3.3** Ein System von  $N = 5$  Punktmassen in einem beliebigen Bezugssystem, in dem sich der Schwerpunkt  $S$  bewegt (links), und im Schwerpunktsystem, in dem der Schwerpunkt ruht (rechts). Im rechten Bild entsprechen die Pfeile den Geschwindigkeiten der Punktmassen relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt. Im Gegensatz dazu zeigen die Pfeile im linken Bild die Überlagerung mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit

punkt konzentrierten Gesamtmasse und der kinetischen Energie der Punktmassen im Schwerpunktsystem.

#### Frage 4

Zeigen Sie, dass die letzte Gleichheit in (3.34) tatsächlich gilt. Nutzen Sie dabei aus, dass der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem verschwindet (3.13).

#### Frage 5

Zeigen Sie ausgehend von  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ , dass  $\nabla_1 V(r) = -\nabla_2 V(r) = (\mathrm{d}V(r)/\mathrm{d}r)(\mathbf{r}/r)$  gilt und daraus (3.37) folgt.

Führt man anstelle der Massen  $m_1$  und  $m_2$  die *reduzierte Masse*

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (3.38)$$

ein, so nimmt (3.37) die Form einer Bewegungsgleichung einer einzelnen Punktmasse in einem äußeren Potenzial  $V$  an:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.39)$$

Sind die beiden Massen identisch,  $m_1 = m_2 =: m$ , ist  $\mu = m/2$ , und der Schwerpunkt liegt in der Mitte zwischen den Punktmassen. Von besonderer Bedeutung ist der Grenzfall  $m_2 \gg m_1$ , bei dem eine Masse sehr groß gegenüber der anderen ist. In diesem Fall ist  $\mu \approx m_1$ , und man kann in guter Näherung sagen, dass sich die Punktmasse  $m_1$  um eine ruhende Punktmasse  $m_2$  bewegt. Der Schwerpunkt liegt dabei in der Nähe der großen Punktmasse,  $X \approx \mathbf{x}_2$  (Abb. 3.4). Dies ist die nachträgliche Begründung dafür, dass wir in Abschn. 1.3 davon ausgegangen sind, dass die Wirkung einer kleinen Masse im freien Fall auf die Erde zu vernachlässigen und die Erde dabei ortsfest ist.

Das Bild einer ortsfesten großen Masse ist sehr hilfreich, da nur die Bewegung der kleinen Masse beschrieben werden muss. Allerdings führt diese Näherung dazu, dass der Gesamtimpuls nicht mehr erhalten ist, da die zweite Bewegungsgleichung in (3.35) durch  $\dot{\mathbf{x}}_2 = 0$  ersetzt wird. Somit ist im Allgemeinen  $m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 \neq 0$ , d.h., das dritte Newton'sche Axiom wird verletzt, und der Gesamtimpuls der beiden Massen ist nicht erhalten. Tatsächlich ist der Impuls erhalten, denn die große Punktmasse  $m_2$  wird in Wirklichkeit stets durch die kleine Punktmasse beschleunigt. Diese Beschleunigung ist allerdings um einen Faktor  $m_1/m_2$  kleiner als die der kleinen Punktmasse  $m_1$ . In Aufgabe 3.1 wird gezeigt, dass die Energie erhalten ist, sogar wenn eine Masse festgehalten wird.

Näherungen sind in der theoretischen Physik unerlässlich, da sich die wenigsten Probleme exakt lösen lassen. Ihre Aufgabe ist es, unwichtige Effekte gegenüber wichtigen zu vernachlässigen. Dabei muss stets darauf geachtet werden, dass die Näherungen zulässig sind, also beispielsweise nicht das Problem so stark reduzieren, dass wichtige Effekte in der Beschreibung verloren gehen. Hier ist auch die endliche Genauigkeit zu erwähnen, der alle Messgrößen unterliegen. Als Beispiel betrachten wir das Urkilogramm in Paris, dessen Masse mit einer relativen Genauigkeit von etwa  $10^{-8}$  angegeben werden kann. Der relative Unterschied der effektiven Masse des Urkilogramms in Bezug auf die Erde ( $m_{\text{Erde}} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ) unterscheidet sich von der Masse des Urkilogramms jedoch nur um etwa  $10^{-23}$  und ist somit nicht messbar. Erst bei Objekten ab etwa  $10^{15} \text{ kg}$  ist der Unterschied zwischen Masse und reduzierter Masse mit der Messgenauigkeit vergleichbar. Dies entspricht einem Wasserrwürfel mit einer Kantenlänge von 10 km.

## Das Zweikörperproblem als Spezialfall

Im Folgenden werden die allgemeinen Aussagen über ein  $N$ -Teilchen-System auf den Spezialfall  $N = 2$  angewandt. Die Lösung der Bewegungsgleichungen des Zweikörperproblems wird allerdings erst in Abschn. 3.3 anhand des Kepler-Problems als Spezialfall diskutiert.

Man betrachte ein System zweier wechselwirkender Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$ . Die Wechselwirkung sei durch ein Potenzial  $V_{12}(r) = V_{21}(r) =: V(r)$  beschrieben, wobei  $\mathbf{r} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  als Abkürzung eingeführt wurde. Die Bewegungsgleichungen lauten

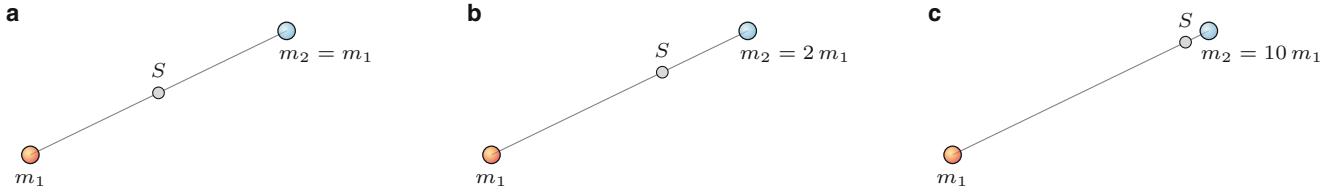
$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -\nabla_1 V(r), \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\nabla_2 V(r). \quad (3.35)$$

Der Ortsvektor des Schwerpunktes ist

$$X = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.36)$$

Er bewegt sich geradlinig-gleichförmig,  $M \ddot{\mathbf{X}} = 0$ , wenn äußere Kräfte abwesend sind. Kombiniert man die beiden Bewegungsgleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}} &= -m_2 \nabla_1 V(r) + m_1 \nabla_2 V(r) \\ &= -(m_1 + m_2) \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned} \quad (3.37)$$



**Abb. 3.4** Veranschaulichung der Schwerpunktslage für  $N = 2$  Punktmassen verschiedener Masse. **a** Beide Massen sind gleich groß,  $m_1 = m_2$ , und der Schwerpunkt  $S$  liegt genau in der Mitte. Je größer die Masse  $m_2$  im Vergleich zu  $m_1$  wird, desto näher liegt der Schwerpunkt an der zweiten Punktmasse (**b** und **c**)

## 3.2 Das Zweikörper-Zentralkraftproblem

In Abschn. 3.1 wurden grundlegende Aussagen über Systeme von  $N$  wechselwirkenden Punktmassen getroffen, ohne die Bewegungsgleichungen zu lösen. Der Spezialfall  $N = 2$  wurde dort bereits vorgestellt. Wir werden die Diskussion in diesem Abschnitt fortsetzen und zunächst allgemeine Aussagen über das Zweikörperproblem im Zentralkraftfeld treffen. Die Ergebnisse und physikalischen Inhalte sind von zentraler Bedeutung für die gesamte theoretische Physik, insbesondere für das Studium der Planetenbahnen (Abschn. 3.3), der Streuung (Abschn. 3.4), der Bremsstrahlung in der Elektrodynamik (Bd. 2, Kap. 9) und des Wasserstoffatoms in der Quantenmechanik (Bd. 3, Kap. 8).

### Impulserhaltung und Separation der Bewegungsgleichungen

Wir betrachten zwei Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  mit reduzierter Masse  $\mu$  (3.38). Die beiden Punktmassen befinden sich an den Orten  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$ , der gemeinsame Schwerpunkt (3.36) am Ort  $\mathbf{X}$ . Auf beide Punktmassen sollen nur die Wechselwirkungskräfte  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  wirken, die aus einem Wechselwirkungspotenzial  $V(\mathbf{r}) = V_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$  mit  $\mathbf{r} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  ableitbar seien. Äußere Kräfte werden ausgeschlossen, d. h., das System sei isoliert. Dies bedeutet, dass wegen (3.9) der Gesamtimpuls erhalten ist und sich der gemeinsame Schwerpunkt geradlinig-gleichförmig bewegt. Die Schwerpunktsbewegung ist unabhängig von der Relativbewegung der beiden Punktmassen.

Letztere muss separat untersucht werden. Ihre Bestimmungsgleichung (3.39) ist

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (3.40)$$

Somit sind Schwerpunkts- und Relativbewegung separiert. Man kann (3.40) als Bewegungsgleichung für eine einzelne Punktmasse  $\mu$  im äußeren Potenzial  $V(\mathbf{r})$  interpretieren. Tatsächlich ergibt sich dieses Bild auch dann, wenn eine der beiden Punktmassen sehr viel größer als die andere ist,  $m_2 \gg m_1$ . In diesem Fall kann  $m_2$  näherungsweise als ortsfest angesehen werden, und  $\mu \approx m_1$ . Gl. (3.40) ist dagegen für beliebige Massenverhältnisse  $m_1/m_2$  gültig.

Die Schwerpunktsbewegung ist mit (3.9) bereits gelöst. Das Ergebnis folgte direkt aus der Erhaltung des Gesamtimpulses, da das System isoliert ist. Die eigentliche Herausforderung ist es, die Lösung für die Relativbewegung von  $m_1$  und  $m_2$  in (3.40) zu finden. Ist schließlich die Lösung  $\mathbf{r}(t)$  bekannt, können die Orte aus

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{X} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{X} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (3.41)$$

berechnet werden.

Da es sich bei den Bewegungsgleichungen für die Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  um insgesamt sechs Differenzialgleichungen zweiter Ordnung handelt (drei für  $\mathbf{x}_1$  und drei für  $\mathbf{x}_2$ ), sind zwölf Integrationskonstanten für die Lösung notwendig. Die ersten sechs wurden bereits mit  $\mathbf{X}_0$  und  $\mathbf{P} = \text{const}$  in (3.9) verwendet. Die übrigen sechs beziehen sich auf die Relativbewegung der beiden Punktmassen und können z. B. in der Form  $\mathbf{r}(t_0)$  und  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  bereitgestellt werden. Wir werden jedoch in Kürze sehen, dass es Integrationskonstanten gibt, die besser für das vorliegende Problem geeignet sind.

#### Frage 6

Zeigen Sie die Gültigkeit von (3.41). Nutzen Sie dazu (3.4) und  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  aus.

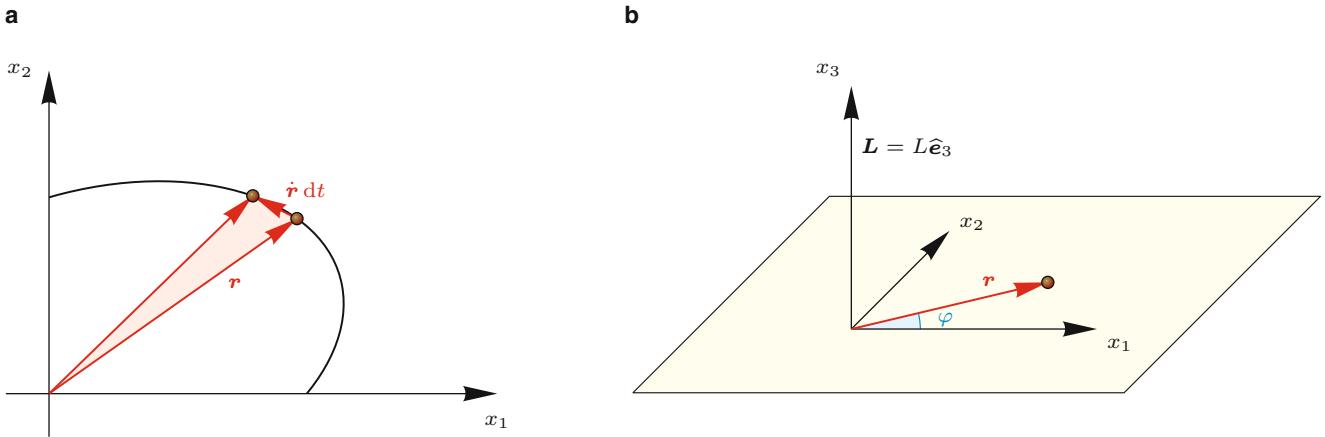
#### Impulserhaltung und Separation der Bewegungsgleichungen

Aus der Gesamtimpulserhaltung des Zweikörperproblems folgt direkt die Separation der Schwerpunkts- und der Relativbewegung. Es müssen nur noch drei anstatt sechs Differenzialgleichungen zweiter Ordnung gelöst werden.

### Drehimpulserhaltung und zweites Kepler'sches Gesetz

Wir beschränken uns im Folgenden auf Potenziale der Form  $V(r)$ . Dies impliziert, dass die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.42)$$



**Abb. 3.5** a Der Fahrstrahl  $\mathbf{r}$  überstreich in einer infinitesimalen Zeit  $dt$  das infinitesimale Flächenelement  $d\mathbf{A} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dt/2$ . Der Betrag  $|d\mathbf{A}|$  entspricht der rot markierten Fläche, die Richtung von  $d\mathbf{A}$  steht senkrecht auf  $\mathbf{r}$  und  $d\mathbf{r}$ . b Die Bewegung findet vollständig in einer Ebene (gelb) statt. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die  $x_3$ -Achse senkrecht auf dieser Ebene steht

## Kapitel 3

eine Zentralkraft ist, die nur vom Abstand  $r$ , nicht aber von der Richtung abhängt. Der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  ist dann wegen (3.20) erhalten. Um den Drehimpuls der beiden Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  relativ zum Schwerpunkt  $X$  anzugeben, schreiben wir zunächst

$$\mathbf{L} = m_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{X}) \times (\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{X}}) + m_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{X}) \times (\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{X}}). \quad (3.43)$$

Wegen (3.38) und (3.41) ist

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mu r) \times \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right) + (\mu r) \times \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right) \\ &= \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Aufgrund der Drehimpulserhaltung zeigt  $\mathbf{L} \neq 0$  stets in eine feste Richtung. Diese legt die *Bahnebene* fest:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0. \quad (3.45)$$

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass  $\mathbf{L} = L \hat{\mathbf{e}}_3$  und damit  $L = L_3 = |\mathbf{L}|$  erfüllt ist. Somit liegt die Bahn in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene.

**Achtung** Für  $\mathbf{L} = 0$  erfolgt die Bewegung entlang einer Geraden, deren Richtung durch  $\mathbf{r}$  festgelegt ist und die durch das Kraftzentrum läuft, da dann  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{v}$  parallel sind. ▶

Betrachten wir nun die Bewegung in der Bahnebene genauer (Abb. 3.5). Im infinitesimalen Zeitintervall  $dt$  überstreich der Ortsvektor  $\mathbf{r}$  das Flächenelement

$$d\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} dt). \quad (3.46)$$

### Frage 7

Machen Sie sich mithilfe von Abb. 3.5 anschaulich klar, dass das Flächenelement durch (3.46) gegeben ist.

Wegen  $\mathbf{L} = 2\mu d\mathbf{A}/dt$  folgt sofort das zweite Kepler'sche Gesetz.

### Zweites Kepler'sches Gesetz

Der *Fahrstrahl*  $\mathbf{r}$  überstreich im Zentralkräftefeld in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Die *Flächengeschwindigkeit*

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (3.47)$$

ist konstant.

Aufgrund der Symmetrie des Problems bieten sich Zylinderkoordinaten an. Wir wählen die Bahnebene  $z = 0$  und schreiben den kartesischen Ortsvektor in der Form

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Offensichtlich lautet die Bahngeschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\varrho} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \varrho \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

### Drehimpulserhaltung für Zentralkräfte

Der Drehimpuls ist im Zentralkräftefeld erhalten. Insbesondere findet die Bewegung in einer Ebene statt:

$$\mathbf{L} = \mu \varrho^2 \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_3 \implies |\mathbf{L}| = L = \mu \varrho^2 |\dot{\varphi}|. \quad (3.50)$$

**Frage 8**

Überprüfen Sie die Gültigkeit von (3.50), indem Sie (3.48) und (3.49) in  $\mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  einsetzen.

Eigentlich sind drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu lösen, je eine für  $\varrho$ ,  $\varphi$  und  $z$ . Die Bewegungsgleichung für  $z$  ist durch die Drehimpulserhaltung und die Wahl des Koordinatensystems bereits trivial gelöst:  $z \equiv 0$ . Dies entspricht wegen  $\dot{z}(t=0) = 0$  und  $\ddot{z}(t=0) = 0$  einer willkürlichen Festlegung von zwei Integrationskonstanten. Mit (3.50) haben wir weiterhin eine Bewegungsgleichung erster Ordnung für  $\varphi$  erhalten. Der Betrag  $L$  des Drehimpulses spielt dabei die Rolle einer weiteren Integrationskonstanten. Es bleiben somit noch drei Integrationskonstanten zu bestimmen.

## Energieerhaltung und reduzierte Bewegungsgleichung

Wir haben in Abschn. 1.6 bereits gefunden, dass die Energie erhalten ist, wenn sich die Kräfte aus Potenzialen ableiten lassen:

$$E = T + V = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \text{const.} \quad (3.51)$$

Ausgehend von (3.49) lässt sich die Energie in der Form

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const} \quad (3.52)$$

schreiben. Wegen  $z = 0$  können wir im Folgenden auch  $\varrho$  durch  $r$  ersetzen.

**Frage 9**

Machen Sie sich klar, dass Zylinderkoordinaten für  $z = 0$  und Kugelkoordinaten für  $\vartheta = \pi/2$  gleichwertig sind und somit  $\varrho = r$  gesetzt werden kann. Vergleichen Sie dazu (2.109) und (2.115).

Aufgrund der Drehimpulserhaltung in (3.50) kann die  $\varphi$ -Abhängigkeit durch eine reine  $r$ -Abhängigkeit ersetzt werden. Statt  $\dot{\varphi}$  schreiben wir also  $L/(\mu r^2)$  und

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{const.} \quad (3.53)$$

Diese Gleichung kann als Bestimmungsgleichung für  $r$  verwendet werden und wird daher als *Radialgleichung* bezeichnet. Genau wie (3.50) ist sie nur noch eine Differentialgleichung erster Ordnung. Die Energie  $E$  spielt dabei die Rolle einer weiteren Integrationskonstanten. Man erkennt, dass sowohl  $L^2/(2\mu r^2)$  als auch  $V(r)$  nur Funktionen von  $r$  sind. Daher werden beide Terme zum effektiven Potenzial

$$U(r) := V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (3.54)$$

## 3.2 Das Zweikörper-Zentralkraftproblem

zusammengefasst. Der zweite Term heißt *Zentrifugalpotenzial*. Es ist abstoßend bzw. repulsiv, da die damit verbundene Kraft

$$\mathbf{F}_Z = -\nabla \frac{L^2}{2\mu r^2} = \frac{L^2}{\mu r^3} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.55)$$

stets von der Drehachse fortzeigt und als Zentrifugalkraft interpretiert werden kann.

Das bisherige Vorgehen ist ein Beispiel dafür, welche wichtige Rolle Symmetrien und Erhaltungsgrößen in der Physik spielen.

1. Aufgrund der Gesamtimpulserhaltung können die Bewegungsgleichungen separiert werden. Es sind nur noch drei statt sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu lösen, und es sind nur noch sechs statt zwölf Integrationskonstanten zu bestimmen.
2. Die Winkelunabhängigkeit der Kraft führt auf eine weitere Erhaltungsgröße, den Drehimpuls  $L$ . Dies entspricht drei weiteren Integrationskonstanten.
3. Aufgrund der Konstanz der Energie erhält man die Differentialgleichung (3.53) erster Ordnung für  $r$ . Somit sind nur noch zwei Integrationen durchzuführen (eine für  $r$ , eine für  $\varphi$ ) und zwei Integrationskonstanten zu bestimmen.

Selbstverständlich könnte man statt der Energie  $E$  und des Drehimpulses  $L$  andere, äquivalente Integrationskonstanten wählen. In der Quantenmechanik spielen die Energie und der Drehimpuls allerdings grundlegende Rollen, sodass es sich bereits hier anbietet,  $E$  und  $L$  zu verwenden.

### Erhaltungsgrößen und Bewegungsgleichungen

Das Ausnutzen von Erhaltungsgrößen vereinfacht in der Regel das Lösen der Bewegungsgleichungen. Der erste Schritt bei der Analyse eines physikalischen Problems sollte daher das Identifizieren von Symmetrien und Erhaltungsgrößen sein.

**Achtung** In der Literatur werden Erhaltungsgrößen auch häufig *Integrale der Bewegung* genannt. Dies liegt daran, dass das Auffinden einer Erhaltungsgröße einer ersten Integration einer der Bewegungsgleichungen entspricht, wie wir in Kap. 5 sehen werden. ▶

## Implizite Lösung der Bewegungsgleichungen, Bahnkurven

Die Radialgleichung (3.53) hat zusammen mit (3.54) die Form einer eindimensionalen Bewegungsgleichung in einem effektiven Potenzial. Ihre Lösung kann daher – wie in (1.91) – implizit

angegeben werden:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{2(E - U(r'))/\mu}}. \quad (3.56)$$

Ist dieses Integral gelöst, folgt zunächst  $r(t)$  durch Umkehrung, falls dies in analytisch geschlossener Form möglich ist. Ansonsten müssen die Gleichungen numerisch behandelt werden. Handelt es sich um eine periodische Funktion, beschränkt man sich bei der Umkehrung auf eine bzw. eine halbe Periode. Anschließend kann der Zeitverlauf des Winkels über

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(t') dt' = \frac{L}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')} \quad (3.57)$$

erhalten werden. Hier sind  $r_0$  und  $\varphi_0$  nun schließlich die beiden letzten Integrationskonstanten. In Aufgabe 3.5 kommen wir auf das Problem zurück, dass sich der zeitliche Verlauf der Bahn im Allgemeinen nicht in geschlossener Form ausdrücken lässt.

In vielen Fällen ist man nicht unmittelbar daran interessiert, die Zeit als Bahnparameter zu verwenden. Anstatt  $r(t)$  und  $\varphi(t)$  zu bestimmen, steht dann eine Diskussion der *Bahnkurve*  $r(\varphi)$  im Mittelpunkt der Bemühungen. Zum Beispiel erkennt man an der Gestalt von  $r(\varphi)$ , ob die Bahnkurve gebunden (endlich) oder ungebunden (unendlich) ist. In der Tat werden wir in Abschn. 3.3 eine Reihe möglicher Bahnkurven im Gravitationspotenzial finden, von denen einige gebunden und einige ungebunden sind. Die Bahnkurve lässt sich über

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\sqrt{2(E - U(r))/\mu}}{L/(\mu r^2)} \quad (3.58)$$

berechnen.

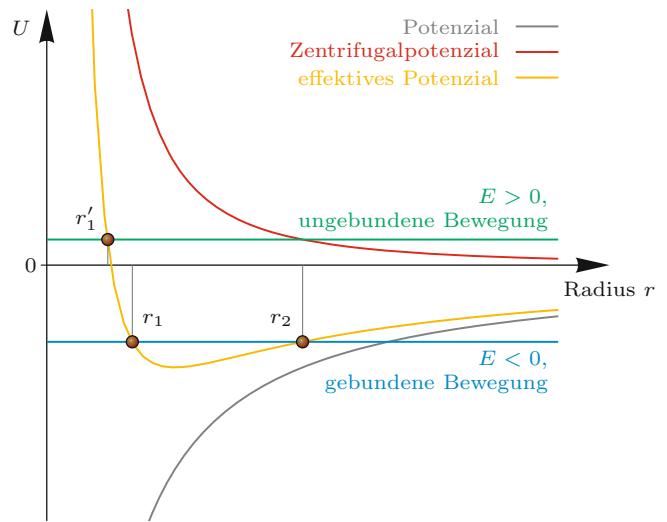
### Bahnkurve im Zentralkraftfeld

Ist das effektive Potenzial  $U(r)$  bekannt, so lautet die Bahnkurve allgemein in impliziter Form

$$\varphi - \varphi_0 = L \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu(E - U(r'))}}. \quad (3.59)$$

Die erhaltene Energie  $E$  und der konstante Drehimpuls  $L$  sowie die Anfangsbedingungen  $r_0$  und  $\varphi_0$  bilden die sechs Integrationskonstanten und legen die Form und Orientierung der Bahnkurve fest.

Die gesamte Information steckt in der Gestalt des effektiven Potenzials  $U(r)$  und den Werten der konstanten Parameter  $E$  und  $L$ . Formal ist somit das Zweikörperproblem für radialsymmetrische Zentralkräfte gelöst. Praktisch hängt es allerdings von dem Potenzial  $V(r)$  ab, ob die Integrale ((3.56), (3.57) und (3.59))



**Abb. 3.6** Potenzial, Zentrifugalpotenzial und zugehöriges effektives Potenzial. Das Potenzial (schwarz) entspricht hier dem Gravitationspotenzial  $\propto -1/r$ . Für negative Energie (blau) sind gebundene Bewegungen zwischen  $r_1$  und  $r_2$  möglich. Für positive Energie (grün) gibt es nur einen Umkehrpunkt bei  $r'_1$  (Streuung)

überhaupt in analytischer Form angegeben werden können. Wir werden in Abschn. 3.3 sehen, dass dies beispielsweise für das Gravitationspotenzial der Fall ist. Die expliziten Lösungen werden dort angegeben und diskutiert.

### Allgemeine Eigenschaften der Bahnkurven

Es lassen sich bereits allgemeine Aussagen über die Form der Bahnkurven machen, indem man sich die Gestalt und das Grenzverhalten ( $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$ ) von  $U(r)$  ansieht. In Abb. 3.6 ist ein Beispiel für ein effektives Potenzial  $U(r)$  gezeigt. Eine Bewegung kann wegen (3.53) und  $\dot{r}^2 \geq 0$  nur in solchen Bereichen stattfinden, für die  $E \geq U(r)$  gilt. Die Differenz  $E - U(r)$  gibt die kinetische Energie der radialen Bewegung und damit die radiale Geschwindigkeit an. Punkte  $r_u$ , für die  $E = U(r_u)$  gilt, sind Umkehrpunkte (Abschn. 1.4). Dort ändert sich das Vorzeichen von  $\dot{r}$  und somit die radiale Bewegungsrichtung.

Die folgenden allgemeinen Aussagen lassen sich anhand der Form von  $U(r)$  treffen (Abb. 3.6):

- Ist die Bewegung in beide Richtungen durch Umkehrpunkte  $r_1$  und  $r_2$ , die sogenannten *Apsiden*, beschränkt,  $r_1 \leq r \leq r_2$ , spricht man von *gebundenen* Bahnen. Die Punktmassen können niemals zusammenstoßen und nicht ins Unendliche davonlaufen. Planetenbahnen (Abschn. 3.3) sind Beispiele für gebundene Bahnen. Für den Spezialfall  $r_1 = r = r_2$  findet man eine Kreisbahn, da dann stets  $\dot{r} = 0$  gelten muss. In diesem Fall besitzt  $U$  ein lokales Minimum bei  $r$ , und die

Energie  $E$  entspricht genau dem Wert des Potenzials in seinem Minimum.

- Falls das Potenzial  $V(r)$  nicht stärker als mit  $-r^{-2}$  am Ursprung divergiert, gibt es aufgrund des Zentrifugalpotenzials für  $L \neq 0$  stets einen Mindestabstand, den die beiden Punktmasse nicht unterschreiten können.
- Gibt es nur eine einzige Potenzialbarriere  $r'_1 < r$ , laufen die Punktmasse bis zum Abstand  $r'_1$  aufeinander zu, wo sie ihre Richtung ändern und ins Unendliche davon laufen. Diese *ungebundene* Bewegung wird als *Streuung* bezeichnet und in Abschn. 3.4 ausführlich besprochen.
- Für  $L = 0$  laufen beide Punktmasse entweder zentral von einander fort oder aufeinander zu. Gibt es im zweiten Fall keine Potenzialbarriere, fallen beide Punktmasse aufeinander zu und stoßen schließlich zusammen.

In Aufgabe 3.2 wird gezeigt, dass

$$\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{dV}{dr} \quad (3.60)$$

die zu (3.53) entsprechende Bewegungsgleichung zweiter Ordnung für  $r$  ist. Weiterhin wird dort gezeigt, dass sich (3.60) in der Form

$$\frac{L^2 u^2}{\mu} \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -F(1/u) \quad (3.61)$$

schreiben lässt, wobei  $u := 1/r$  und  $F(r) = -dV/dr$  sind. Gl. (3.61) kann für die Berechnung der Zentralkraft  $F(r)$  herangezogen werden, wenn die Form der Bahnkurve  $r(\varphi)$  bzw.  $u(\varphi)$  bekannt ist. Umgekehrt kann die Bahnkurve  $r(\varphi)$  aus dem Kraftgesetz  $F(r)$  bestimmt werden. Da der Winkel  $\varphi$  nur in Form einer zweiten Ableitung in (3.61) vorkommt, ist diese Gleichung invariant unter der Substitution  $d\varphi \rightarrow -d\varphi$  und somit symmetrisch gegenüber Spiegelungen an den Umkehrpunkten. Die gesamte Bahn kann daher durch wiederholte Spiegelung an den Umkehrpunkten gefunden werden.

**Achtung** Dies bedeutet, dass man anhand der Bahnform nicht entscheiden kann, in welcher Richtung sie durchlaufen wird. Umgekehrt heißt dies auch, dass die Bahn exakt entgegengesetzt durchlaufen würde, wenn in einem Moment  $\dot{r}$  und  $\dot{\varphi}$  ihr Vorzeichen wechseln würden. ▶

### Geradlinige Bewegung

Für eine Bewegung entlang einer Geraden, die im Abstand  $p$  an einem Kraftzentrum vorbeiführt, gilt zunächst

$$\frac{p}{r} = \cos \varphi. \quad (3.62)$$

Hier wurde ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x_1 = p = \text{const}$  gewählt. Der Winkel  $\varphi = 0$  entspricht dem Punkt der größten Annäherung, d.h.  $r(0) = p$ . Man kann sich mit  $u = 1/r$  sofort davon überzeugen, dass

$d^2u/d\varphi^2 = -u$  gilt und wegen (3.61) somit  $F(r) = 0$  sein muss. Dies ist offensichtlich korrekt: Bewegt sich eine Punktmasse in einem Inertialsystem auf einer Geraden, kann die Kraft höchstens entlang der Bewegungsrichtung wirken, nicht jedoch zu einem Punkt zeigen, der außerhalb der Bahnkurve liegt. ▲

Gl. (3.59) besagt, dass nach einem vollen Umlauf (z. B. von  $r_{\min}$  nach  $r_{\max}$  und weiter nach  $r_{\min}$ ) gerade der Winkel

$$\Delta\varphi = 2L \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U(r))}} \quad (3.63)$$

vom Fahrstrahl überstrichen wird. Dies setzt selbstverständlich voraus, dass  $r_{\max}$  existiert und die Bahn gebunden ist. Für Planetenbahnen nennt man  $\Delta\varphi$  die *Periheldrehung*. Ist  $\Delta\varphi$  ein rationales Vielfaches von  $2\pi$ , d.h. ist  $\Delta\varphi = 2\pi n/m$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$ , so ist die Bahn nach  $m$  Umläufen geschlossen und periodisch. Wir werden in Abschn. 3.3 sehen, dass ideale Planetenbahnen  $\Delta\varphi = 2\pi$  erfüllen und damit periodisch sind.

**Achtung** Eine endliche (d.h. gebundene) Bahn kann periodisch oder aperiodisch sein. Unendliche (d.h. ungebundene) Bahnen sind immer aperiodisch. ▶

## 3.3 Das Kepler-Problem

Wir haben in Abschn. 3.2 einige allgemeine Eigenschaften der Lösungen der Bewegungsgleichungen in einem Zentralpotenzial der Form  $V(r)$  gefunden. Bisher wurde kein konkretes Potenzial  $V(r)$  vorgegeben. Von besonderer Bedeutung für die Physik sind unter anderem die Potenziale  $V(r) \propto 1/r$  (Gravitations- und Coulomb-Potenzial) und  $V(r) \propto r^2$  (Oszillatopotenzial). Auf harmonische Schwingungen im  $r^2$ -Potenzial werden wir in Kap. 6 gründlich eingehen. Im Folgenden wollen wir die Bahnkurven im  $1/r$ -Potenzial untersuchen. Dies führt schließlich auf die wichtigen Planeten- und Kometenbahnen, die als Keegelschnitte identifiziert werden können.

### Umkehrpunkte der Bahnkurven im Gravitationsfeld

Wir betrachten die Bahnen von zwei Punktmasse ( $m_1$  und  $m_2$ ), die sich unter dem Einfluss der Gravitation gegenseitig umlaufen. Hierbei ist das Massenverhältnis  $m_1/m_2$  beliebig. Es ist nicht nötig anzunehmen, dass eine der beiden Massen ortsfest und groß gegenüber der anderen ist.

Mit den Konventionen in Abschn. 3.2 lautet die Gravitationskraft

$$\mathbf{F}_G := \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \alpha := Gm_1m_2 > 0. \quad (3.64)$$

Die Gravitationskraft  $\mathbf{F}_G$  ist stets attraktiv. Obwohl die Coulomb-Kraft  $\mathbf{F}_C$  zwischen zwei Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  dieselbe Radiusabhängigkeit besitzt, kann sie attraktiv oder repulsiv sein. Haben beide Ladungen das gleiche Vorzeichen, ist  $\alpha = -q_1q_2 < 0$  und  $\mathbf{F}_C$  demnach abstoßend. Da bei der Analyse in diesem Abschnitt das Vorzeichen von  $\alpha$  nicht eingeschränkt ist, wird das Coulomb-Problem zweier Ladungen automatisch mitgelöst.

Das Gravitationspotenzial ist

$$V(r) = V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = - \int dr F(r) = -\frac{\alpha}{r} + V_\infty. \quad (3.65)$$

Die Konstante  $V_\infty$  ist beliebig, wird aber so gewählt, dass  $V(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ , d. h.  $V_\infty = 0$ . Das effektive Potenzial aus (3.54) lautet somit

$$U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (3.66)$$

Die Umkehrpunkte  $r_u$  der Bewegung lassen sich aus der Radialgleichung (3.53) bestimmen, indem  $\dot{r} = 0$  gesetzt wird:

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U(r) \implies E = U(r_u). \quad (3.67)$$

Auflösen nach  $r_u$  ergibt zunächst

$$r_u = r_{\pm} = \frac{1}{2E} \left( -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{2L^2E}{\mu}} \right). \quad (3.68)$$

Im Gravitationsfeld gibt es je nach Wert der Integrationskonstanten maximal zwei Abstände, die  $\dot{r} = 0$  erfüllen, da die resultierende Gleichung quadratisch ist. An der Form von (3.68) erkennt man eine Reihe von Eigenschaften (siehe auch Abb. 3.6) für Potenziale mit  $\alpha > 0$ :

- Es gibt keinen Umkehrpunkt, wenn  $\alpha^2 + 2L^2E/\mu$  negativ wird, was nur bei hinreichend niedriger Energie passieren kann,  $E < -\mu\alpha^2/(2L^2)$ . Dies entspricht dem Fall, dass  $E$  niedriger als der absolute Tiefpunkt von  $U(r)$  liegt und somit nicht möglich ist, da  $\dot{r}^2$  stets negativ wäre.
- Es gibt genau einen Umkehrpunkt, wenn  $\alpha^2 + 2L^2E/\mu = 0$  gilt. In diesem Fall entspricht der Umkehrpunkt dem absoluten Tiefpunkt von  $U(r)$ . Entlang der gesamten Bahn ist dann  $\dot{r} = 0$ ; es handelt sich also um eine gebundene Kreisbahn.
- Für  $E > 0$  und  $L^2 > 0$  ist  $r_-$  stets negativ und  $r_+$  stets positiv. Da der Abstand  $r$  nur positive Werte annehmen kann, entspricht dies dem Fall, dass es nur einen Umkehrpunkt bei

$r_+$  gibt. Die Bewegung ist dann auf Bereiche  $r \geq r_+$  eingeschränkt. Bei kleineren Abständen ist  $U(r) > E$ , und das Zentrifugalpotenzial verhindert eine weitere Annäherung der beiden Massen. Diese Bewegung ist ungebunden und wird als Streuung bezeichnet.

- Der Spezialfall  $L = 0$  (keine Drehung,  $\dot{\phi} = 0$ ) entspricht einem direkten Fall der beiden Massen aufeinander. Es gibt dann keinen Umkehrpunkt bei endlichen Abständen und kein Zentrifugalpotenzial, das ein Aufeinandertreffen von  $m_1$  und  $m_2$  verhindern würde. Dies ist eine unphysikalische Situation, da das Potenzial  $V(r)$  bei  $r = 0$  singulär ist. In Wirklichkeit sind die Massen  $m_1$  und  $m_2$  stets ausgedehnt, sodass sie aufeinanderprallen würden, wenn der Mittelpunktsabstand  $r$  noch endlich ist.
- In allen anderen Fällen ist  $E < 0$  und die Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten gebunden,  $r_+ \geq r \geq r_-$ .

### Qualitative physikalische Aussagen

In vielen Fällen lassen sich qualitative physikalische Aussagen treffen, ohne die Bewegungsgleichungen direkt zu lösen. Dazu ist es hilfreich, die Struktur der Gleichungen und gegebenenfalls Grenzfälle zu betrachten.

Handelt es sich um die Bewegung von Planeten oder Kometen um die Sonne, nennt man den sonnennächsten Punkt einer Bahn *Perihel*, den sonnenfernsten *Aphel* (von *helios*, „Sonne“). Bei einer Bewegung um die Erde (z. B. durch einen Satelliten oder den Mond) spricht man von *Perigäum* und *Apogäum* (von *gaia*, „Erde“). Allgemein spricht man von *Periapsis* und *Apoapsis*.

### Frage 10

Wie lautet der funktionale Zusammenhang des Verhältnisses der Bahngeschwindigkeiten an Perihel und Aphel und des Verhältnisses von Perihel- und Aphelabstand? (Die Verhältnisse sind umgekehrt proportional. Dies folgt nach kurzer Überlegung aus dem zweiten Kepler'schen Gesetz.)

### Lösung der Bewegungsgleichung

Die allgemeine Gleichung (3.59) für die Bahnkurve nimmt für das Gravitationspotenzial die Form

$$\varphi - \varphi_0 = L \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{2\mu(E + \frac{\alpha}{r'} - \frac{L^2}{2\mu r'^2})}} \quad (3.69)$$

an. Um diese Gleichung zu lösen, substituieren wir

$$u := \frac{1}{r}, \quad du = -\frac{dr}{r^2}, \quad (3.70)$$

was auf die Form

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2\mu\alpha}{L^2} u' - u'^2}} \quad (3.71)$$

führt. Der Term unter der Wurzel lässt sich mithilfe der quadratischen Ergänzung umformen:

$$\begin{aligned} \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2\mu\alpha}{L^2} u' - u'^2 &= \left[ \frac{2\mu E}{L^2} + \left( \frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2 \right] - \left( u' - \frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2 \\ &= C - (u' - u'_c)^2, \end{aligned} \quad (3.72)$$

wobei  $C$  und  $u'_c$  Konstanten sind. Somit lautet die Bahnkurve in impliziter Form

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{C - (u' - u'_c)^2}}. \quad (3.73)$$

Dieses Integral kann elementar gelöst werden, da

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.74)$$

gilt. Die allgemeine Lösung für die Bahnkurve des Kepler-Problems lautet daher

$$\varphi - \varphi'_0 = - \arcsin \frac{u - u'_c}{\sqrt{C}} = - \arcsin \frac{u - \frac{\mu\alpha}{L^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left( \frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2}}. \quad (3.75)$$

Die Konstante  $\varphi'_0$  enthält  $\varphi_0$  und die Konstante der letzten Integration.

### Frage 11

Überprüfen Sie alle Rechenschritte, die auf (3.75) führen.

Die Lösung liegt noch in einer unpraktischen Form vor. Aus diesem Grund werden zwei konstante Parameter definiert: die *Exzentrizität*

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2} + 1} \geq 0 \quad (3.76)$$

und der *Bahnpараметр*

$$p := \frac{L^2}{\mu\alpha} \geq 0 \quad (\alpha > 0). \quad (3.77)$$

Die Bedeutung dieser beiden Größen wird in Kürze deutlich werden. Man rechnet schnell nach, dass die Bahnkurve somit die Form

$$\varphi - \varphi'_0 = - \arcsin \frac{pu - 1}{\varepsilon} \quad (3.78)$$

annimmt. Wir sind an der Bahnkurve in der Form  $r(\varphi)$  interessiert und finden zunächst

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \sin(\varphi'_0 - \varphi)}. \quad (3.79)$$

Um die Lösung in eine Form zu bringen, die gewöhnlich in der Literatur zu finden ist, ersetzen wir den Term  $\sin(\varphi'_0 - \varphi)$  durch  $\cos(\varphi - \varphi_p)$ , wobei  $\varphi_p = \varphi'_0 - \pi/2$  ist und  $\cos x = \cos(-x)$  ausgenutzt wird.

### Allgemeine Bahnkurve im Gravitationspotenzial

Die Bahnkurve im Gravitationspotenzial lautet allgemein

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_p)}, \quad (3.80)$$

wobei  $p$  der Bahnpараметр,  $\varepsilon$  die Exzentrizität und  $\varphi_p$  eine weitere Integrationskonstante ist.

In Aufgabe 3.5 betrachten wir die Probleme, die sich ergeben, wenn man an der zeitlichen Lösung  $r(t)$  interessiert ist. Diese kann nämlich – im Gegensatz zur Bahnkurve  $r(\varphi)$  – nicht in geschlossener Form angegeben werden.

### Frage 12

Man vergewissern sich ausgehend von (3.80), dass  $\varphi = \varphi_p$  der größten Annäherung der beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  entspricht. Dies erklärt auch die Notation:  $\varphi_p$  für Perihelwinkel.

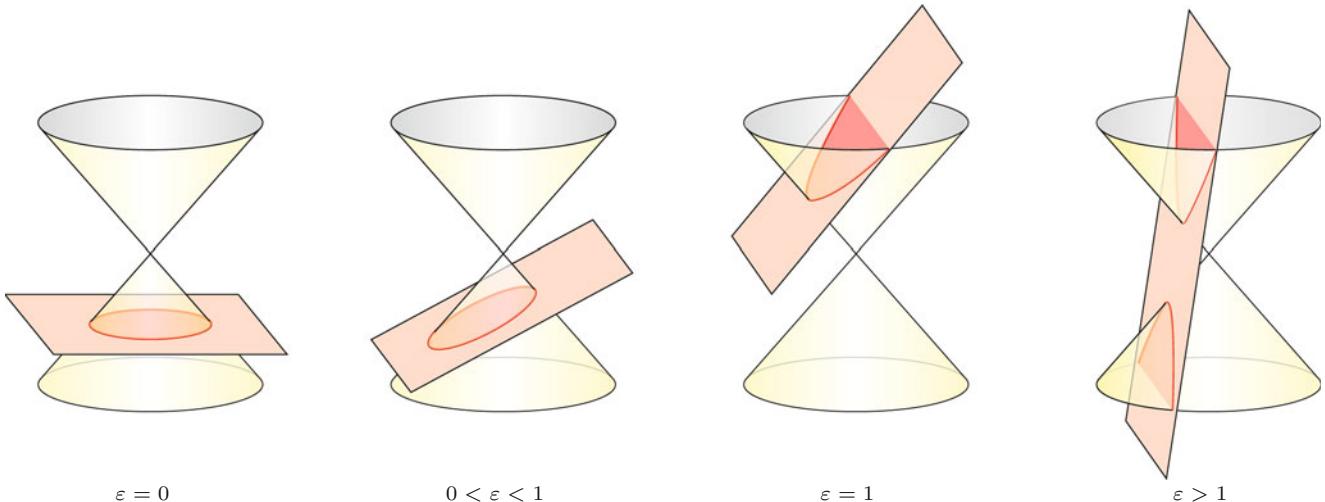
**Achtung** Von den vier Integrationskonstanten, die für die Lösung der Bewegungsgleichungen für  $r$  und  $\varphi$  nötig sind, findet man in (3.80) nur drei in der Form  $p$ ,  $\varepsilon$  und  $\varphi_p$ . Die vierte tritt nicht in Erscheinung, da sie dem Anfangspunkt auf der Bahnkurve zur Zeit  $t_0$  entsprechen würde. Die Bahnkurve selbst enthält allerdings keine Information über den zeitlichen Verlauf. Erst wenn die Lösungen in der Form  $r(t)$  oder  $\varphi(t)$  angegeben werden sollen, muss entweder  $r(t_0)$  oder  $\varphi(t_0)$  spezifiziert werden. Beide Möglichkeiten sind wegen  $r(t_0) = r(\varphi(t_0))$  äquivalent. ▶

Mathematisch handelt sich bei (3.80) um einen *Kegelschnitt* mit der Exzentrizität  $\varepsilon$  und einem Brennpunkt im Ursprung. Die Kegelschnitte werden in Abb. 3.7 klassifiziert. Im Folgenden werden die verschiedenen Bahnkurven genauer diskutiert.

### Kreis- und Ellipsenbahnen

Die einfachste Bahnkurve erhält man für  $\varepsilon = 0$ :

$$r(\varphi) = p. \quad (3.81)$$



**Abb. 3.7** Veranschaulichung der Kegelschnitte. Von links nach rechts: Kreis ( $\varepsilon = 0$ ), Ellipse ( $0 < \varepsilon < 1$ ), Parabel ( $\varepsilon = 1$ ) und Hyperbel ( $\varepsilon > 1$ ). Lassen sich durch geeignete Schnitte eines Doppelkegels mit einer Ebene konstruieren. Der Neigungswinkel der Ebene nimmt von links nach rechts zu. Für einen Kreis ist die Ebene senkrecht zur Symmetriearchse des Kegels. Im Falle einer Parabel ist der Neigungswinkel der Ebene identisch zum Öffnungswinkel des Kegels. Nur für größere Winkel können beide Kegel gleichzeitig geschnitten werden, was auf eine Hyperbel führt.

## Kapitel 3

Wegen der Konstanz von  $p$  entspricht dies offensichtlich einer Kreisbahn. In diesem Fall ist die Energie (siehe (3.76) und (3.77))

$$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} = -\frac{\alpha}{2p}. \quad (3.82)$$

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts beschränken wir uns auf Potenziale mit  $\alpha > 0$ .

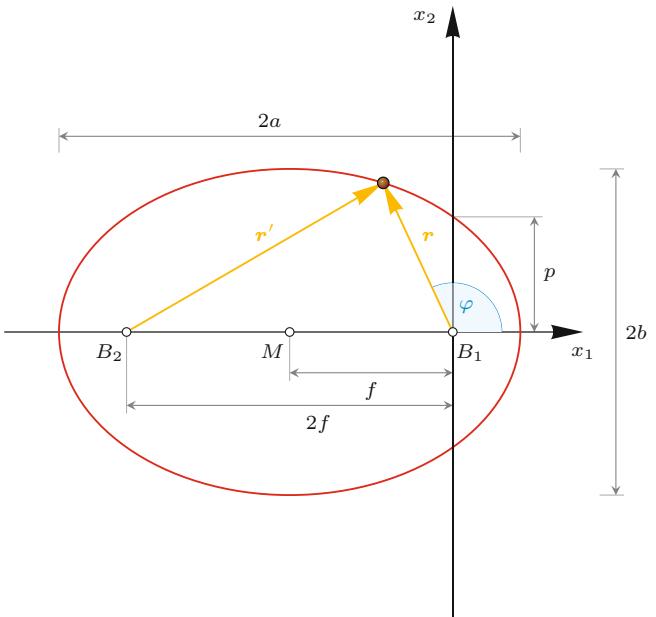
Da sich das effektive Potenzial für  $r \rightarrow \infty$  wie  $U(r) \rightarrow 0$  verhält, können Bahnen nur gebunden sein, wenn  $E < 0$  gilt. Dies entspricht der Bedingung  $\varepsilon < 1$ , wie aus (3.76) zu erkennen ist. Dies sieht man ebenfalls an der Form der Bahnkurve in (3.80): Für  $\varepsilon < 1$  ist der Nenner stets positiv und  $r(\varphi)$  damit endlich.

Wir werden nun zeigen, dass der Fall  $\varepsilon < 1$  tatsächlich eine ellipsenförmige Bahn beschreibt. Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte in einer Ebene, die  $r + r' = 2a = \text{const}$  erfüllen, wobei  $r$  und  $r'$  die Abstände zu den beiden sogenannten Brennpunkten sind (Abb. 3.8). Die Größe  $a$  ist die *große Halbachse* der Ellipse. Die *kleine Halbachse* ist  $b = \sqrt{a^2 - f^2}$ , wobei  $f$  der Abstand eines Brennpunktes zum Mittelpunkt ist. Die Brennweite  $f$  wird auch häufig als *lineare Exzentrizität*  $e$  bezeichnet.

Man definiert die *numerische Exzentrizität* einer Ellipse als

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \\ &\Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Die Exzentrizität ist ein Maß für die Abweichung von der Kreisform und auf das Intervall  $[0, 1]$  beschränkt. Im Grenzfall  $\varepsilon = 0$  findet man wieder einen Kreis. Ein Kreis ist daher eine spezielle



**Abb. 3.8** Zur Definition einer Ellipse. Jeder Punkt auf einer Ellipse hat von den beiden Brennpunkten  $B_1$  und  $B_2$  den gleichen Gesamtabstand ( $|r| + |r'|$ ). Der Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkt  $M$  ist  $f$ , die große und kleine Halbachse sind  $a$  und  $b$ . In diesem Fall ist das Koordinatensystem so gewählt, dass die Brennpunkte auf der  $x_1$ -Achse liegen und  $B_1$  den Ursprung bildet

Ellipse. Definiert man  $f\hat{\mathbf{e}}_1$  als den Vektor, der vom Mittelpunkt der Ellipse zum Brennpunkt  $B_1$  zeigt, so gilt

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -2f\hat{\mathbf{e}}_1 \implies r'^2 = r^2 + 4f^2 + 4fr \cos \varphi. \quad (3.84)$$

Wegen  $r + r' = 2a$  ist weiterhin

$$r^2 = (2a - r)^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar. \quad (3.85)$$

Kombiniert man (3.84) und (3.85), um  $r'$  zu eliminieren, findet man zunächst

$$4r(f \cos \varphi + a) = 4(a^2 - f^2). \quad (3.86)$$

Aufgelöst nach  $r$  hat man

$$r = \frac{a^2 - f^2}{f \cos \varphi + a} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (3.87)$$

Im letzten Schritt wurde  $f = \varepsilon a$  eingesetzt. Identifiziert man nun den Bahnpараметer als  $p = a(1 - \varepsilon^2)$ , findet man die Bahnkurve in (3.80) wieder. Wir können daraus direkt das erste Kepler'sche Gesetz ableiten.

### Das erste Kepler'sche Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

#### Frage 13

Zeigen Sie ausgehend von (3.80), dass der Bahnpараметer  $p$  dem Abstand  $r(\pi/2)$  entspricht, wenn man das in Abb. 3.8 definierte Koordinatensystem zugrunde legt. In diesem Fall steht der Vektor  $\mathbf{r}$  senkrecht auf  $\hat{\mathbf{e}}_1$ . Machen Sie sich anhand derselben Gleichung klar, dass der Winkel zwischen  $r_{\min}$  und  $r_{\max}$  gerade  $\pi$  ist. Überlegen Sie sich dazu, welche Werte  $\varphi$  annehmen muss, damit  $r$  minimal und maximal wird. Die Ellipsenbahn ist nach einem vollen Umlauf geschlossen.

Wegen (3.76) ist die Energie im Falle einer Ellipsenbahn

$$E = -\frac{\mu \alpha^2}{2L^2}(1 - \varepsilon^2) = -\frac{\mu \alpha^2 p}{2L^2 a} = -\frac{\alpha}{2a} < 0. \quad (3.88)$$

Wir wollen nun noch untersuchen, wie lang die Umlaufdauer auf der Ellipsenbahn ist. Aus dem Flächensatz  $\dot{A} = L/(2\mu) = \text{const}$  folgt

$$\dot{A} = \frac{L}{2\mu} T, \quad (3.89)$$

wobei  $A$  die Fläche der Ellipse und  $T$  die Umlaufdauer ist: Während eines Umlaufs wird die Ellipse einmal vollständig überstrichen. Andererseits ist die Fläche einer Ellipse durch  $A = \pi ab$  gegeben. Wegen

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{ap} = \sqrt{\frac{L^2 a}{\mu \alpha}} \quad (3.90)$$

kann man die Ellipsenfläche auch in der Form

$$A = \pi L \sqrt{\frac{a^3}{\mu \alpha}} = \frac{L}{2\mu} T \quad (3.91)$$

schreiben.

### Das dritte Kepler'sche Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Bahnhalbachsen:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{\alpha} a^3. \quad (3.92)$$

Der Term  $4\pi^2 \mu / \alpha$  ist dabei näherungsweise eine Konstante.

Interessanterweise wurden die Kepler'schen Gesetze – aufbauend auf astronomischen Beobachtungsdaten – bereits in den Jahren 1609 und 1618 postuliert. Dies war lange bevor die Newton'sche Mechanik (1687) veröffentlicht und somit nachträglich die mathematische Grundlage für die Kepler'schen Gesetze geschaffen wurde.

#### Frage 14

Zeigen Sie, dass der Term  $\mu/\alpha$  in (3.92) für alle Planeten des Sonnensystems näherungsweise  $1/(Gm_2)$  entspricht. Nehmen Sie dabei an, dass die Sonnenmasse groß gegenüber den Planetenmassen ist,  $m_2 \gg m_1$ .

Streng genommen ist der Proportionalitätsfaktor zwischen  $T^2$  und  $a^3$  somit keine konstante Größe. Für die meisten Anwendungen kann diese Abweichung allerdings vernachlässigt werden.

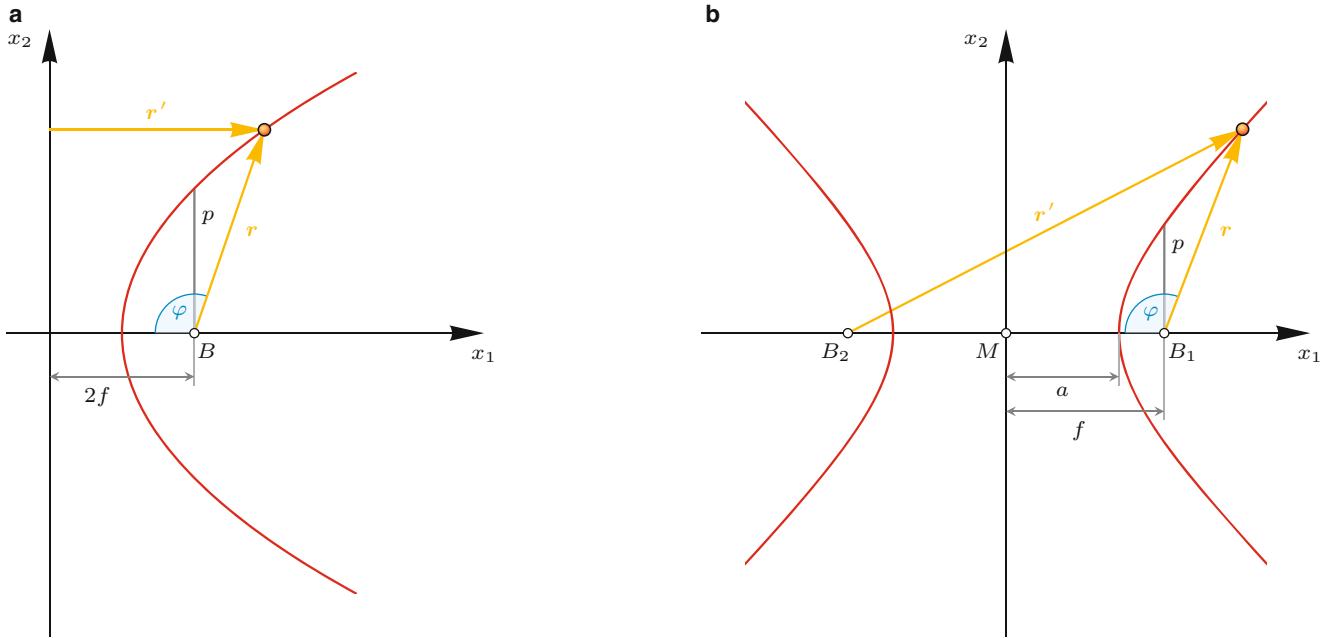
**Achtung** Das erste und dritte Kepler'sche Gesetz sind nur für anziehende Potenziale  $V(r) \propto 1/r$  (z. B. Gravitationspotenzial) gültig. Das zweite Kepler'sche Gesetz ist jedoch für alle Potenziale mit Drehimpulserhaltung erfüllt (d. h. beliebige  $V(r)$ ). ▶

### Parabel- und Hyperbelbahnen

Betrachten wir zunächst den speziellen Fall  $\varepsilon = 1$ , für den aus (3.76)  $E = 0$  folgt. An der Bahnkurve

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \quad (3.93)$$

erkennt man, dass der Radius für  $\varphi = \pm\pi$  divergiert: Die Bahn ist ungebunden. Mathematisch entspricht diese Bahnkurve einer Parabel. Eine Parabel ist die Menge aller Punkte in einer



**Abb. 3.9** Zur Definition einer Parabel (a) und Hyperbel (b). Jeder Punkt auf einer Parabel hat zum Brennpunkt  $B$  und der Leitlinie ( $x_2$ -Achse) den gleichen Abstand ( $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'|$ ). Die Länge  $f$  entspricht dem Abstand vom Brennpunkt zum Scheitelpunkt der Parabel bzw. dem Abstand zwischen Scheitelpunkt und Leitlinie. Bei einer Hyperbel ist für jeden Punkt die Differenz der Abstände zu beiden Brennpunkten eine Konstante. Eine Hyperbel besteht aus zwei getrennten Ästen, einer mit Brennpunkt  $B_1$ , der andere mit Brennpunkt  $B_2$ . Beide gehen durch eine Spiegelung an der Leitlinie ( $x_2$ -Achse) ineinander über. Man beachte die Definition des Winkels  $\varphi$  für eine Parabel und Hyperbel einerseits und für eine Ellipse (Abb. 3.8) andererseits. In allen Fällen entspricht  $\varphi = 0$  dem kleinsten Abstand zum Brennpunkt

Ebene, die zu dem Brennpunkt und der Leitlinie den gleichen Abstand haben (Abb. 3.9). Aus dieser Abbildung erkennt man, dass

$$r = 2f - r \cos \varphi \implies r = \frac{2f}{1 + \cos \varphi} \quad (3.94)$$

gilt. In diesem Fall sind der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie und der Bahnpараметer über  $p = 2f$  verknüpft.

Der letzte verbleibende Fall ist  $\varepsilon > 1$  und damit  $E > 0$ . Dies entspricht einem der beiden Äste einer Hyperbel. Hier divergiert der Abstand  $r$ , wenn  $1 + \varepsilon \cos \varphi = 0$  wird:

$$\varphi_\infty = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) > \frac{\pi}{2}. \quad (3.95)$$

Winkel, die auf negative Abstände führen, sind auszuschließen, da stets  $r \geq 0$  erfüllt sein muss. Daher ist die Bewegung auf Winkel  $|\varphi| \leq \varphi_\infty$  eingeschränkt. Diese Art der Bewegung nennt man *Streuung* (Abschn. 3.4), da die Punktmassen aus dem Unendlichen kommend wechselwirken und daraufhin mit einem Streuwinkel  $2\varphi_\infty$  zurück ins Unendliche laufen.

Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte in einer Ebene, die von zwei Brennpunkten die Abstände  $r'$  und  $r$  besitzen und für die  $r' - r = 2a = \text{const}$  gilt (Abb. 3.9). Ein ähnliches Vorgehen

wie bei der Ellipsengleichung führt schließlich auf

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (3.96)$$

wobei  $\varepsilon = f/a$  die Exzentrizität und  $p = a(\varepsilon^2 - 1)$  der Bahnpараметer einer Hyperbel sind.

### Frage 15

Der interessierte Leser darf die Rechnung, die auf das Zwischenergebnis  $p = a(\varepsilon^2 - 1)$  führt, nachvollziehen. Dazu verwende man die Definitionen und Konventionen für eine Hyperbel in Abb. 3.9 und orientiere sich an der entsprechenden Rechnung für eine Ellipse.

**Achtung** Ist das  $1/r$ -Potenzial abstoßend, z. B. für zwei identische Ladungen, ist  $\alpha < 0$ . Man erkennt sofort, dass die Exzentrizität  $\varepsilon$  der Bahn unabhängig vom Vorzeichen ist, der Stoßparameter  $p$  wird allerdings negativ. Aus (3.80) folgt dann, dass es Werte für  $\varphi$  geben muss, für die  $1 + \varepsilon \cos \varphi$  negativ ist, da stets  $r \geq 0$  erfüllt sein muss. Somit können für das abstoßende Potenzial nur Bahnen mit  $\varepsilon > 1$  und damit keine gebundenen Bahnen existieren. ▶

Genau wie die Kreisbahn findet man die Parabelbahn nur für einen exakt eingestellten Energiewert ( $E = -\alpha/(2p)$ ) für einen

Kreis und  $E = 0$  für eine Parabel). In der Realität beobachtet man in der Regel Ellipsenbahnen bei gebundenen und Hyperbelbahnen bei ungebundenen Himmelskörpern.

## Periheldrehung

Gl. (3.80) besagt, dass bei einem vollen Umlauf auf einer Ellipsenbahn ( $\varepsilon < 1$ ) im Gravitationspotenzial die Bahn geschlossen ist. Das Perihel befindet sich immer am gleichen Ort. Dies gilt nicht, wenn das Potenzial von der  $1/r$ -Form abweicht. In Wirklichkeit gibt es viele Ursachen für geringfügige Korrekturen dieses Potenzials: Einfluss der übrigen Planeten, Abweichung der Sonnenform von der Kugelgestalt, relativistische Effekte. Dies ist besonders bei Merkur zu sehen, dessen Perihel sich pro Erdjahr um 5,74 Bogensekunden verschiebt. Merkur ist der sonnenächste und schnellste Planet und erfährt somit die stärksten Bahnstörungen.

Ist die Störung klein, kann man

$$V(r) = V_0(r) + \delta V(r), \quad \delta V \ll V_0 \quad (3.97)$$

schreiben, d.h., man schreibt das Potenzial als Summe des ungestörten Potenzials und einer kleinen Korrektur. Für das Kepler-Problem ist  $V_0(r) = -\alpha/r$ . In Aufgabe 3.3 wird gezeigt, dass die durch die *Störung* verursachte zusätzliche Periheldrehung nach einem vollen Umlauf

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{2\mu}{L} \int_0^\pi r^2 \delta V(r) d\varphi \right) \quad (3.98)$$

ist. Zur Berechnung von (3.98) muss zunächst das Störpotenzial  $\delta V(r)$  spezifiziert und das Integral unter Berücksichtigung von  $r = r(\varphi)$  gelöst werden. Hierzu verwendet man die ungestörte Bahnkurve, d.h. diejenige, die sich aus dem Potenzial  $V_0(r)$  ergibt.

Der Grund ist, dass  $\delta V(r)$  bereits eine kleine Größe ist. Würde man statt  $r(\varphi)$  die gestörte Bahnkurve  $r(\varphi) + \delta r(\varphi)$  verwenden, würde man mit  $\delta r(\varphi)$  eine weitere kleine Korrektur einbringen, die letztlich von zweiter Ordnung in  $\delta$  und damit vernachlässigbar ist. Im Allgemeinen hängt die Bahnkurve und damit das Integral von  $L$  ab, sodass im letzten Schritt die Ableitung nach  $L$  durchgeführt werden kann. Dies wird anhand eines einfachen Beispiels in Aufgabe 3.3 durchgeführt.

## 3.4 Elastische Stöße und Streuung

Stöße von zwei Teilchen und die Streuung von Teilchen an so genannten Targets spielen eine große Rolle in der Physik. Es zeigt sich, dass allein aufgrund der allgemeinen Impuls- und

Energieerhaltung wichtige Aussagen über Stöße getroffen werden können, die sogar in der Quantenmechanik ihre Gültigkeit behalten.

Bei der Streuung werden die einfallenden Teilchen um einen Winkel, den Streuwinkel, abgelenkt. Wir werden sehen, dass der Streuwinkel eng mit dem Wechselwirkungspotenzial zusammenhängt. Dabei kommt der Wirkungsquerschnitt der Wechselwirkung ins Spiel.

In Experimenten lassen sich durch die Vermessung der Streuwinkel und des Wirkungsquerschnitts Aussagen über die Art der Wechselwirkung zwischen den Teilchen treffen. Dies wurde zwischen 1909 und 1913 von Rutherford zuerst mit der Streuung von Heliumkernen an einer Goldfolie durchgeführt. Dies führte auf das Rutherford'sche Atommodell: Die gesamte positive Ladung des Atomkerns ist in einem sehr kleinen Volumen im Zentrum konzentriert.

## Elastischer Stoß zwischen zwei Teilchen

Wir untersuchen das Verhalten zweier Teilchen (z.B. zweier Elementarteilchen oder Himmelskörper), die, aus dem Unendlichen kommend, miteinander wechselwirken und danach wieder ins Unendliche fortlaufen. Die Wechselwirkung sei *elastisch*, d.h., die mechanische Energie wird nicht in andere Energieformen wie Verformung oder Wärme umgewandelt: Die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie ist erhalten. Der Energieerhaltungssatz ist – zusammen mit dem Impulserhaltungssatz – der zentrale Ausgangspunkt für diesen Abschnitt. Selbstverständlich setzen wir auch stillschweigend voraus, dass die Massen der beiden Teilchen sich nicht ändern. Man bezeichnet die Masse, den Impuls und die Energie auch als *Kollisionsinvarianten* oder *Stoßinvarianten*. In Kap. 10 wird die inelastische Streuung behandelt, wo diese Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind.

Die beiden Teilchen haben die Massen  $m_1$  und  $m_2$  und Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_{i,1}$  und  $\mathbf{v}_{i,2}$  vor dem Stoß und  $\mathbf{v}_{f,1}$  und  $\mathbf{v}_{f,2}$  nach dem Stoß (i für initial und f für final, wie in der Physik üblich). Die Wechselwirkung habe die Eigenschaft, dass im Unendlichen keine Kraft zwischen den beiden Teilchen wirkt. Dies ist beispielsweise für gravitative Wechselwirkungen der Fall, da die Kraft mit  $1/r^2$  für  $r \rightarrow \infty$  gegen null geht. Wir gehen davon aus, dass die beiden Teilchen zusammen ein isoliertes System bilden und die Wechselwirkung dem dritten Newton'schen Axiom gehorcht. Dann ist der Gesamtimpuls erhalten:

$$m_1 \mathbf{v}_{i,1} + m_2 \mathbf{v}_{i,2} = m_1 \mathbf{v}_{f,1} + m_2 \mathbf{v}_{f,2}. \quad (3.99)$$

Aufgrund der bereits verlangten Energieerhaltung gilt weiterhin

$$\frac{m_1}{2} \mathbf{v}_{i,1}^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}_{i,2}^2 = \frac{m_1}{2} \mathbf{v}_{f,1}^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}_{f,2}^2. \quad (3.100)$$

Eine potentielle Energie im Unendlichen ist unerheblich, da sie vor und nach dem Stoß gleich ist und nicht in die Bilanzgleichung eingeht. Außerdem lässt sich die Integrationskonstante

## Vertiefung: Laplace-Runge-Lenz-Vektor Zusammenhang mit Abwesenheit der Periheldrehung

Eng verbunden mit dem idealen Kepler-Problem (d. h. ohne Periheldrehung) ist der sogenannte *Laplace-Runge-Lenz-Vektor* (nach dem französischen Mathematiker und Physiker *Pierre-Simon Laplace*, 1749–1827, dem deutschen Mathematiker *Carl Runge*, 1856–1927 und dem deutschen Physiker *Wilhelm Lenz*, 1888–1957). Er ist definiert als (Goldstein 1975, 1976)

$$\mathbf{Q} := \frac{1}{\alpha}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

und hat folgende Eigenschaften (siehe Aufgabe 3.4):

- Der Vektor  $\mathbf{Q}$  erfüllt im  $1/r$ -Potenzial  $\dot{\mathbf{Q}} = 0$  und ist dort somit eine Erhaltungsgröße.
- Sein Betrag entspricht der Exzentrizität,  $|\mathbf{Q}| = \varepsilon$ .
- Er liegt in der Bahnebene und zeigt vom Ursprung zum Perihel bzw. Perigäum.

Dies bedeutet vor allem, dass es im Newton'schen Gravitationspotenzial keine Periheldrehung gibt, da sonst  $\mathbf{Q}$  dort

nicht erhalten wäre. Dazu muss man anmerken, dass im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie sehr wohl eine Periheldrehung existiert, die nichts mit äußeren Störeffekten zu tun hat, sondern durch die Raumkrümmung verursacht wird, welche die beiden sich umkreisenden Massen erzeugen.

**Achtung** Gelegentlich wird  $\mathbf{Q}$  in der Literatur mit einem abweichenden konstanten Vorfaktor definiert. Bis auf seinen Betrag ändert dies nichts an seinen Eigenschaften. Andere Autoren bezeichnen den Vektor mit  $\mathbf{A}$ . 

## Literatur

- Goldstein, H.: Prehistory of the “Runge-Lenz” Vector. Am. J. Phys. **43**, 737 (1975)
- Goldstein, H.: More on the Prehistory of the Laplace or Runge-Lenz Vector. Am. J. Phys. **44**, 1123 (1976)

der potentiellen Energie stets so wählen, dass  $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \rightarrow 0$  für  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  erfüllt ist. Bereits mit diesen sehr allgemeinen Erhaltungssätzen lassen sich wichtige Aussagen treffen.

Die Untersuchung vereinfacht sich, wenn sie im Schwerpunktssystem  $S'$  durchgeführt wird (mit einem Strich gekennzeichnet). Die Orte der beiden Teilchen ( $i = 1, 2$ ) und des Schwerpunktes sind

$$\mathbf{x}'_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(t) = \frac{m_1 \mathbf{x}_1(t) + m_2 \mathbf{x}_2(t)}{m_1 + m_2}. \quad (3.101)$$

Per Definition ist  $\dot{\mathbf{X}}' = 0$ . Wegen der Impulserhaltung ist das Schwerpunktssystem ein Inertialsystem, und die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen transformieren sich wie

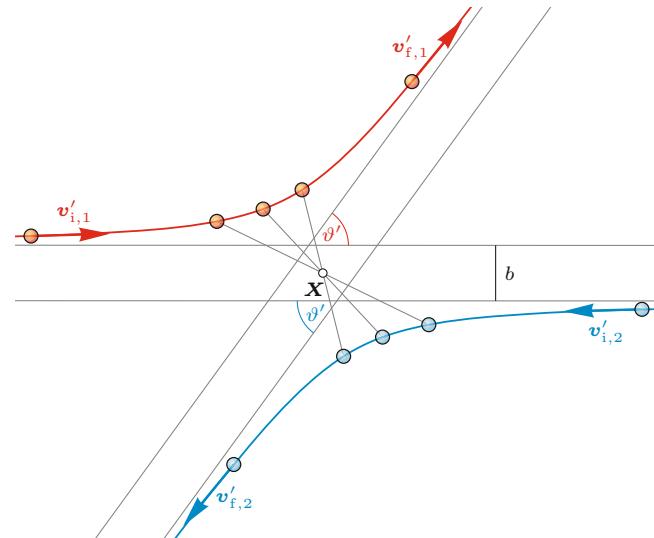
$$\dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{x}}'_i + \dot{\mathbf{X}}, \quad \ddot{\mathbf{x}}_i = \ddot{\mathbf{x}}'_i = -\nabla'_i V(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2). \quad (3.102)$$

Die Erhaltungssätze aus (3.99) und (3.100) lauten im Schwerpunktssystem

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}'_{i,1} + m_2 \mathbf{v}'_{i,2} &= m_1 \mathbf{v}'_{f,1} + m_2 \mathbf{v}'_{f,2} = 0, \\ \frac{m_1}{2} \mathbf{v}'_{i,1}^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}'_{i,2}^2 &= \frac{m_1}{2} \mathbf{v}'_{f,1}^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}'_{f,2}^2. \end{aligned} \quad (3.103)$$

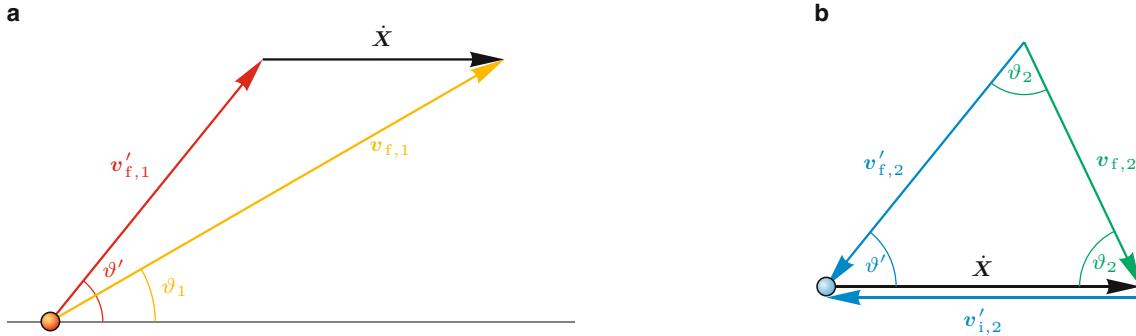
Aus der Impulserhaltung folgt sofort  $m_1 \mathbf{v}'_{i,1} = -m_2 \mathbf{v}'_{i,2}$  und  $m_1 \mathbf{v}'_{f,1} = -m_2 \mathbf{v}'_{f,2}$ . Der Winkel zwischen Einfalls- und Ausfallsrichtung ist der *Streuwinkel*  $\vartheta'$  (Abb. 3.10):

$$\cos \vartheta' = \frac{\mathbf{v}'_{i,1} \cdot \mathbf{v}'_{f,1}}{|\mathbf{v}'_{i,1}| |\mathbf{v}'_{f,1}|} = \frac{\mathbf{v}'_{i,2} \cdot \mathbf{v}'_{f,2}}{|\mathbf{v}'_{i,2}| |\mathbf{v}'_{f,2}|}. \quad (3.104)$$



**Abb. 3.10** Beispiel der Streuung im Schwerpunktssystem  $S'$  für zwei identische Massen ( $m_1 = m_2$ ). Beide Bahnkurven sind zu jedem Zeitpunkt punktsymmetrisch zum Schwerpunkt  $X$ . Durch die Streuung werden die beiden Punktmassen um denselben Streuwinkel  $\vartheta'$  abgelenkt. Die Gleichheit der Streuwinkel gilt für jedes beliebige Massenverhältnis  $m_1/m_2$ . Die Asymptoten der Bahnkurven sind ebenfalls eingezeichnet. Den asymptotischen Abstand  $b$  der Bahnkurven beider Punktmassen nennt man Stoßparameter

**Achtung** Der Streuwinkel ist im Schwerpunktssystem  $S'$  für beide Teilchen gleich, da der Gesamtimpuls dort verschwindet. Dies ist in einem beliebigen Inertialsystem allerdings nicht der Fall. 



**Abb. 3.11** Zum Transformationsverhalten der Streuwinkel  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  im Laborsystem  $S$  und  $\vartheta'$  im Schwerpunktssystem  $S'$ . In **a** wird dargestellt, wie der Streuwinkel  $\vartheta_1$  durch die Schwerpunktsgeschwindigkeit  $\dot{X}$  beeinflusst wird. Das Dreieck, das in **b** durch die Vektoren  $v'_{f,2}$ ,  $v'_{f,1}$  und  $v'_{i,2}$  bzw.  $\dot{X}$  gebildet wird, ist gleichschenklig, da  $|v'_{f,2}| = |v'_{i,2}|$  gilt

### Frage 16

Zeigen Sie durch geeignete Kombination der Gleichungen in (3.103), dass folgende Eigenschaften gelten:

$$|v'_{i,1}| = |v'_{f,1}|, \quad |v'_{i,2}| = |v'_{f,2}|. \quad (3.105)$$

Die Beträge der Geschwindigkeiten im Schwerpunktssystem  $S'$  vor und nach dem Stoß sind also gleich.

## Transformation der Streuwinkel vom Schwerpunkt- ins Laborsystem

Ohne genauere Aussagen über die Form des Potenzials  $V(x_1 - x_2)$  zu machen, ist es nicht möglich, den Streuwinkel  $\vartheta'$  zu berechnen. Bevor wir dies jedoch unternehmen, wollen wir noch untersuchen, wie sich der Streuwinkel beim Übergang in das *Laborsystem S* transformiert. Das Laborsystem ist jenes Koordinatensystem, in dem  $m_2$  anfangs ruht. Der Gesamtimpuls verschwindet daher nicht, und wir werden sehen, dass die Streuwinkel der beiden Teilchen nicht identisch sind und in der Regel nicht dem Schwerpunktstreuwinkel  $\vartheta'$  entsprechen. Die Relevanz der Streuwinkeltransformation vom Schwerpunkt- ins Laborsystem ist direkt ersichtlich: Häufig werden in Experimenten Teilchen auf ruhende *Targets* geschossen. Es ist daher von großer Bedeutung, die Beobachtungen in beiden Bezugssystemen miteinander in Relation zu bringen.

Ruht die Masse  $m_2$  in  $S$  vor dem Stoß,  $v_{i,2} = 0$ , bewegt sich der Schwerpunkt von  $m_1$  und  $m_2$  gemäß

$$\dot{X} = \frac{m_1}{M} v_{i,1}, \quad (3.106)$$

wobei  $M = m_1 + m_2$  die Gesamtmasse ist. Daraus folgt sofort, dass die Geschwindigkeit von  $m_1$  im Schwerpunktssystem  $S'$  vor dem Stoß

$$v'_{i,1} = v_{i,1} - \dot{X} = \frac{m_2}{M} v_{i,1} \quad (3.107)$$

ist. Nach dem Stoß ist die Geschwindigkeit von  $m_1$  im Laborsystem  $S$

$$v_{f,1} = v'_{f,1} + \dot{X} = v'_{f,1} + \frac{m_1}{M} v_{i,1}. \quad (3.108)$$

Aus Abb. 3.11 erkennt man die Relationen zwischen den Streuwinkeln in  $S$  und  $S'$ :

$$\begin{aligned} v_{f,1} \sin \vartheta_1 &= v'_{f,1} \sin \vartheta', \\ v_{f,1} \cos \vartheta_1 &= v'_{f,1} \cos \vartheta' + \frac{m_1}{M} v_{i,1}, \end{aligned} \quad (3.109)$$

wobei (3.106) benutzt und mit  $\vartheta_1$  der Streuwinkel von  $m_1$  im Laborsystem eingeführt wurde. Diese Gleichungen beinhalten die Geschwindigkeiten in beiden Koordinatensystemen. Darum gehen wir einen Schritt weiter und schreiben mit (3.105) und (3.107) den Tangens des Streuwinkels in  $S$ :

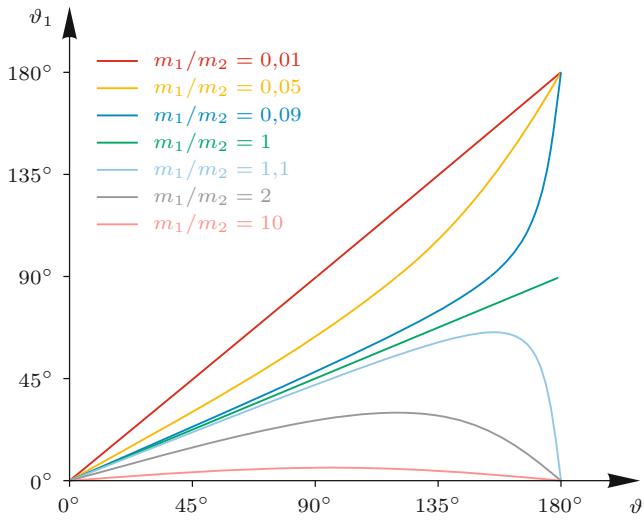
$$\begin{aligned} \tan \vartheta_1 &= \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \vartheta_1} = \frac{v'_{f,1} \sin \vartheta'}{v'_{f,1} \cos \vartheta' + \frac{m_1}{M} v_{i,1}} \\ &= \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + \frac{m_1}{m_2}}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

### Frage 17

Überprüfen Sie das Endergebnis in (3.110).

Gl. (3.110) erlaubt es, nur mit Kenntnis des Massenverhältnisses  $m_1/m_2$ , den Streuwinkel für  $m_1$  zwischen Labor- und Schwerpunktssystem umzurechnen. Aus Abb. 3.12 liest man die folgenden Eigenschaften der Transformation ab:

- Ist  $m_1 \ll m_2$ , sind beide Streuwinkel praktisch identisch,  $\vartheta_1 \approx \vartheta'$ .
- Für  $m_1 \geq m_2$  beobachtet man im Laborsystem keine Rückwärtsstreuung mehr, da  $\vartheta_1 \leq \pi/2$  gilt. Der maximal erreichbare Streuwinkel  $\vartheta_1$  nimmt ab, wenn das Massenverhältnis  $m_1/m_2$  weiter erhöht wird. Die Kurve  $\vartheta_1(\vartheta')$  ist dann nicht mehr monoton.



**Abb. 3.12** Funktionaler Zusammenhang zwischen den Streuwinkeln  $\vartheta'$  im Schwerpunktsystem  $S'$  und  $\vartheta_1$  im Laborsystem  $S$ . Wegen (3.110) hängt  $\vartheta_1(\vartheta')$  vom Massenverhältnis  $m_1/m_2$  ab

Nun suchen wir noch den Streuwinkel  $\vartheta_2$  in  $S$ . Die Geschwindigkeit der Masse  $m_2$  in  $S$  ist anfangs  $\mathbf{v}_{i,2} = 0$ . In  $S'$  gilt daher

$$\mathbf{v}'_{i,2} = -\dot{\mathbf{X}} = -\frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{i,1}. \quad (3.111)$$

In Abb. 3.11 bilden die drei Vektoren  $\mathbf{v}_{f,2}$ ,  $\mathbf{v}'_{f,2}$  und  $\dot{\mathbf{X}}$  ein Dreieck, da  $\mathbf{v}_{f,2} = \mathbf{v}'_{f,2} + \dot{\mathbf{X}}$  gilt. Weiterhin ist wegen (3.105)  $|\mathbf{v}'_{i,2}| = |\mathbf{v}'_{f,2}|$ . Die Vektoren  $\mathbf{v}'_{i,2}$ ,  $\mathbf{v}'_{f,2}$  und  $\dot{\mathbf{X}}$  sind also gleich lang, weshalb das Dreieck gleichschenklig ist. Der Winkel zwischen  $\mathbf{v}_{f,2}$  und  $\dot{\mathbf{X}}$  ist der gesuchte Winkel  $\vartheta_2$ . Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks gilt dies ebenfalls für den Winkel zwischen  $\mathbf{v}_{f,2}$  und  $\mathbf{v}'_{f,2}$ . Der dritte verbleibende Winkel im Dreieck ist  $\vartheta'$ , da  $-\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{v}'_{i,2}$  gilt. Aus der bekannten Winkelsumme im Dreieck folgt

$$\vartheta_2 = \frac{\pi - \vartheta'}{2}. \quad (3.112)$$

### Energieübertrag bei elastischer Streuung im Laborsystem

Da die Geschwindigkeiten der beiden Teilchen laut (3.105) in  $S'$  vor und nach dem Stoß identisch sind, sind auch die kinetischen Energien gleich:

$$T'_{f,1} = T'_{i,1}, \quad T'_{f,2} = T'_{i,1}. \quad (3.113)$$

Diese Aussage ist jedoch nicht in  $S$  gültig. Dort kommt es zu einem Energieübertrag zwischen den beiden Teilchen.

Wir gehen wieder davon aus, dass  $\mathbf{v}_{i,2} = 0$  ist. Dann gilt wegen (3.106)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{f,1}^2 &= (\mathbf{v}'_{f,1} + \dot{\mathbf{X}})^2 = \left( \mathbf{v}'_{f,1} + \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{i,1} \right)^2 \\ &= \mathbf{v}'_{f,1}^2 + \frac{2m_1}{M} |\mathbf{v}'_{f,1}| |\mathbf{v}_{i,1}| \cos \vartheta' + \frac{m_1^2}{M^2} \mathbf{v}_{i,1}^2. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Die Energieerhaltung verlangt, wie bereits erwähnt,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{f,1}^2 &= \mathbf{v}_{i,1}^2 = (\mathbf{v}_{i,1} - \dot{\mathbf{X}})^2 \\ &= \left( \mathbf{v}_{i,1} - \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{i,1} \right)^2 = \mathbf{v}_{i,1}^2 \left( 1 - \frac{m_1}{M} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Kombiniert man (3.114) und (3.115), folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{f,1}^2 &= \mathbf{v}_{i,1}^2 \left[ \left( 1 - \frac{m_1}{M} \right)^2 + \frac{2m_1}{M} \left( 1 - \frac{m_1}{M} \right) \cos \vartheta' + \frac{m_1^2}{M^2} \right] \\ &= \mathbf{v}_{i,1}^2 \left[ 1 + 2 \frac{m_1}{M} \left( 1 - \frac{m_1}{M} \right) (\cos \vartheta' - 1) \right]. \end{aligned} \quad (3.116)$$

### Energieübertrag bei elastischer Streuung im Laborsystem

Die relative Änderung der kinetischen Energie eines im Laborsystem gestreuten Teilchens der Masse  $m_1$  ist

$$\frac{T_{f,1} - T_{i,1}}{T_{i,1}} = 2 \frac{m_1}{M} \left( 1 - \frac{m_1}{M} \right) (\cos \vartheta' - 1) \leq 0 \quad (3.117)$$

mit  $M = m_1 + m_2$ . Für alle Streuwinkel  $\vartheta' > 0$  verliert das Teilchen kinetische Energie, die auf das zweite Teilchen übertragen wird. Der Streuwinkel  $\vartheta'$  im Schwerpunktsystem kann formal mithilfe von (3.110) in den Streuwinkel im Laborsystem überführt werden.

### Frage 18

Unter bestimmten Umständen kann es passieren, dass  $m_1$  in  $S$  seine gesamte kinetische Energie an  $m_2$  abgibt:  $m_1$  ruht dann nach dem Stoß,  $T_{f,1} = 0$ . Machen Sie sich zunächst anschaulich klar, dass dies nur für  $\vartheta' = \pi$  möglich ist. Zeigen Sie dann anhand von (3.117), dass ein Massenverhältnis  $m_1/m_2 = 1$  notwendig ist, um  $T_{f,1} = 0$  zu erreichen. Das Ergebnis erklärt die Funktionsweise des Newton'schen Pendels (Abb. 3.13).

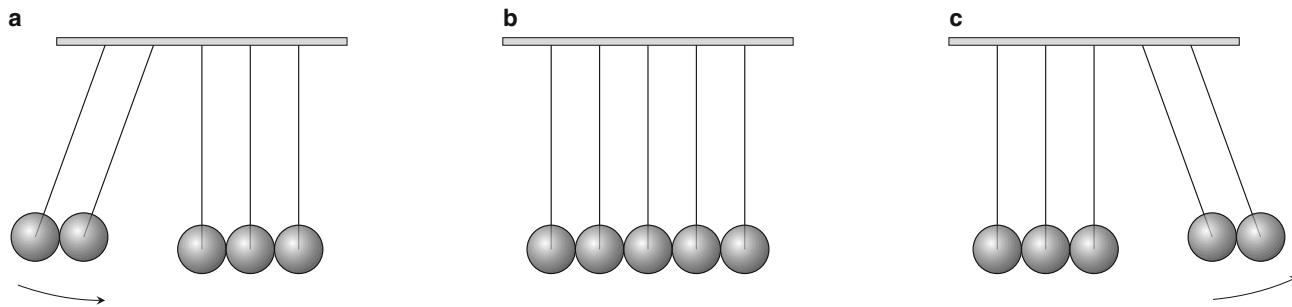
### Fly-by-Manöver

In der Raumfahrt ist das sogenannte *Fly-by-* oder *Swing-by-Manöver* eine wichtige Anwendung der elastischen Streuung. Dabei wird eine Raumsonde an einem Planeten gestreut, um Betrag und Richtung der Geschwindigkeit zu ändern. Der Planet erfährt aufgrund seiner großen Masse dabei keine messbare Geschwindigkeitsänderung. Der

## Anwendung: Neutronenstreuung in Kernreaktoren

### Wahl des Moderators

Werden Neutronen in einem Kernreaktor an Atomen elastisch gestreut, übertragen sie kinetische Energie an die Targetatome und werden dadurch abgebremst. Der Vorfaktor  $y(1-y)$  mit  $y := m_1/M$  in (3.117) wird maximal, wenn  $y = 1/2$  bzw.  $m_1 = M/2$  und somit  $m_1 = m_2$  ist. Die effizienteste Abbremsung eines Neutrons wird daher mit einem Target der gleichen Masse erreicht. Dieser Effekt ist für den Betrieb von Kernreaktoren von großer Bedeutung: Da langsame Neutronen mit einer viel höheren Wahrscheinlichkeit zu einer Kernspaltung führen als schnelle, müssen die schnelleren zunächst abgebremst (*moderiert*) werden. Dazu eignen sich am besten Moderatoren mit einem geringen Atomgewicht. Hierbei muss zusätzlich berücksichtigt werden, dass der Moderator keine Neutronen einfangen soll, da diese sonst der Kettenreaktion entzogen werden. Häufig verwendete Moderatoren sind Deuterium (ein Wasserstoffisotop mit einem Neutron und einem Proton im Kern) oder Kohlenstoff in Form von Grafit.



**Abb. 3.13** Funktionsweise des Newton'schen Pendels. Lenkt man die beiden linken Kugeln aus und lässt sie los (a), stoßen sie mit den übrigen drei Kugeln zusammen, welche anfangs in Ruhe waren (b). Energie und Impuls können nur dann gleichzeitig erhalten werden, wenn die beiden rechten Kugeln nach dem Stoß die Schwingung fortsetzen und die übrigen ruhen (c). Die Aussage ist auch dann gültig, wenn anfangs eine, drei oder vier Kugeln ausgelenkt werden

„Trick“ bei diesem Manöver ist, dass die kinetische Energie der Raumsonde zwar im Schwerpunktssystem vor und nach dem Stoß gleich ist, nicht aber im Bezugssystem der Sonne. Somit lassen sich Raumsonden mit einem geringen Treibstoffbedarf relativ zur Sonne beschleunigen, was beispielsweise die Voyager-Missionen zur Erforschung des äußeren Sonnensystems ermöglichte.

## Stoßparameter und Streuwinkel

Bis zu diesem Punkt wurde nur die Kinematik der Streuung untersucht. Die bisherige Diskussion ist für sämtliche Potenziale der Form  $V(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ , die im Unendlichen verschwinden, gültig und hat zu sehr allgemeinen Ergebnissen geführt. Als Folge davon ist die Betrachtung des Streuwinkels bis zu diesem Punkt rein qualitativ. Für die praktische Anwendung ist es jedoch wichtig zu wissen, wie viele Teilchen eines einfallenden Teilchenstrahles durch ein Target unter einem bestimmten Winkel gestreut werden. Um dieses Ziel zu erreichen, gehen wir schrittweise vor. Zunächst stellen wir einen Zusammenhang her

zwischen dem Streuwinkel und den Bedingungen, unter denen ein Teilchen gestreut wird. Entscheidend dafür sind insbesondere die Form des Wechselwirkungspotenzials, die Energie und der Drehimpuls des einfallenden Teilchens.

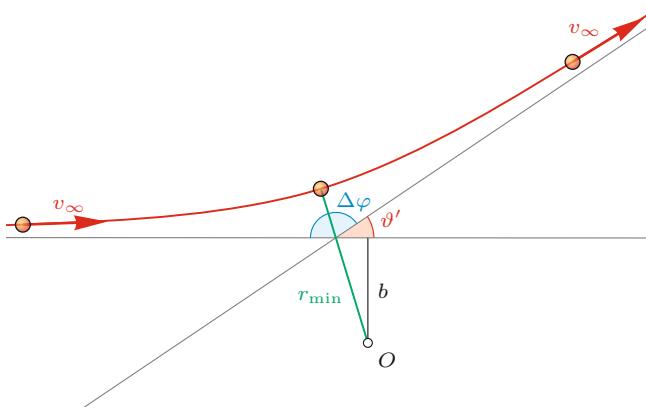
Man stelle sich ein Teilchen der Masse  $m_1$  vor, das aus dem Unendlichen kommend durch ein Target der Masse  $m_2$  gestreut wird. Wir können die Situation durch das äquivalente Einteilchenproblem mit reduzierter Masse  $\mu$  im Schwerpunktssystem beschreiben. Da das Potenzial im Unendlichen verschwinden soll, kann die erhaltene Energie in der Form

$$E = \frac{\mu}{2} v_\infty^2 > 0 \quad (3.118)$$

geschrieben werden. Hier ist  $v_\infty$  die Relativgeschwindigkeit im Unendlichen. Wir beschränken uns nun auf radialsymmetrische Zentralkräfte (d. h. auf Potenziale der Form  $V(r)$ ), sodass der Betrag des Drehimpulses,

$$L = b\mu v_\infty \geq 0, \quad (3.119)$$

erhalten ist. Die Größe  $b$  ist der *Stoßparameter*, der Mindestabstand, mit dem  $m_1$  das Target  $m_2$  passieren würde, wenn es keine Wechselwirkung zwischen beiden gäbe (Abb. 3.14). Die Relativbewegung von  $m_1$  und  $m_2$  ist aufgrund der Annahmen



**Abb. 3.14** Streuung für das effektive Einkörperproblem. Die effektive Masse nähert sich dem Ursprung  $O$  zunächst auf einer Bahn, die mit dem Stoßparameter  $b$  daran vorbeiführen würde. Sie wird jedoch unter einem Winkel  $\vartheta'$  gestreut, nähert sich dem Ursprung bis auf  $r_{\min}$  und entfernt sich wieder. Der Betrag von Einfalls- und Ausfallgeschwindigkeit ist  $v_\infty$ . Der Winkel  $\Delta\varphi$  wird von den asymptotischen Bahnästen eingeschlossen

ungebunden, und  $\mu$  wird unter einem Winkel  $\vartheta'$  gestreut. Dies ist gerade der Streuwinkel im Schwerpunktsystem. Wir werden nun zunächst zeigen, dass der Streuwinkel von der Art des Potenzials, der Energie und dem Stoßparameter abhängt. Gl. (3.59) beschreibt die allgemeine Bahnkurve im radialsymmetrischen Zentralkraftfeld. Da die Bahnkurve symmetrisch bei Spiegelung am Umkehrpunkt (hier: Mindestabstand) ist, gilt

$$\Delta\varphi = 2L \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu(E - U(r'))}}. \quad (3.120)$$

Dies entspricht auch (3.63), wenn  $r_{\max} = \infty$  gesetzt wird. Die Größe  $\Delta\varphi$  ist der Winkel zwischen den asymptotischen Einfall- und Ausfallästen der Bahnkurve.

### Frage 19

Überlegen Sie sich, dass der Mindestabstand  $r_{\min}$  aus der Bedingung  $dr/d\varphi = 0$  folgt, was wegen (3.58) direkt auf  $E = U(r_{\min})$  führt. Diese Ergebnisse haben wir bereits in Abschn. 3.2 gefunden. Der Mindestabstand ist eindeutig durch das effektive Potenzial und die Energie bestimmt.

Der Drehimpuls kann als Funktion von  $b$  und  $E$  geschrieben werden:

$$L = b\sqrt{2\mu E}. \quad (3.121)$$

Der Streuwinkel ist  $\vartheta' = \pi - \Delta\varphi$  (Abb. 3.14), sodass schließlich

$$\vartheta' = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{(1 - b^2/r'^2 - V(r')/E)}} \quad (3.122)$$

gilt, wobei  $U(r) = V(r) + L^2/(2\mu r^2)$  eingesetzt wurde. Wenn das Potenzial  $V(r)$  und die Energie  $E$  bekannt sind, ist der Streuwinkel nur eine Funktion des Stoßparameters  $b$ . Umgekehrt lässt sich auf das Wechselwirkungspotenzial schließen, wenn man den Streuwinkel als Funktion des Stoßparameters misst.

Wie bei der Bestimmung der Bahnkurven hängt es auch hier von der funktionalen Form von  $V(r)$  ab, ob der Streuwinkel  $\vartheta'$  analytisch berechnet werden kann.

Die Streuung eines Teilchens im Gravitations- bzw. Coulomb-Potenzial nennt man *Rutherford'sche Streuung* (nach dem neuseeländischen Physiker Ernest Rutherford, 1871–1937). Dort lässt sich ein einfacher funktionaler Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Streuwinkel in geschlossener Form angeben. Aus der Hyperbelbahn (3.80) des Kepler-Problems folgt

$$\Delta\varphi = 2 \arccos \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (3.123)$$

mit der numerischen Exzentrizität  $\varepsilon$  in (3.76). Der Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Streuwinkel ergibt sich durch Einsetzen von (3.76) in (3.123), Elimination des Drehimpulses mithilfe von (3.119) und anschließendem Auflösen.

### Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Streuwinkel bei der Rutherford'schen Streuung

Wird ein Teilchen im Gravitations- bzw. Coulomb-Potenzial gestreut, lautet die geschlossene Form für den Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Streuwinkel im Schwerpunktsystem

$$b^2 = \left( \frac{1}{\sin^2(\vartheta'/2)} - 1 \right) \frac{\alpha^2}{4E^2}. \quad (3.124)$$

### Frage 20

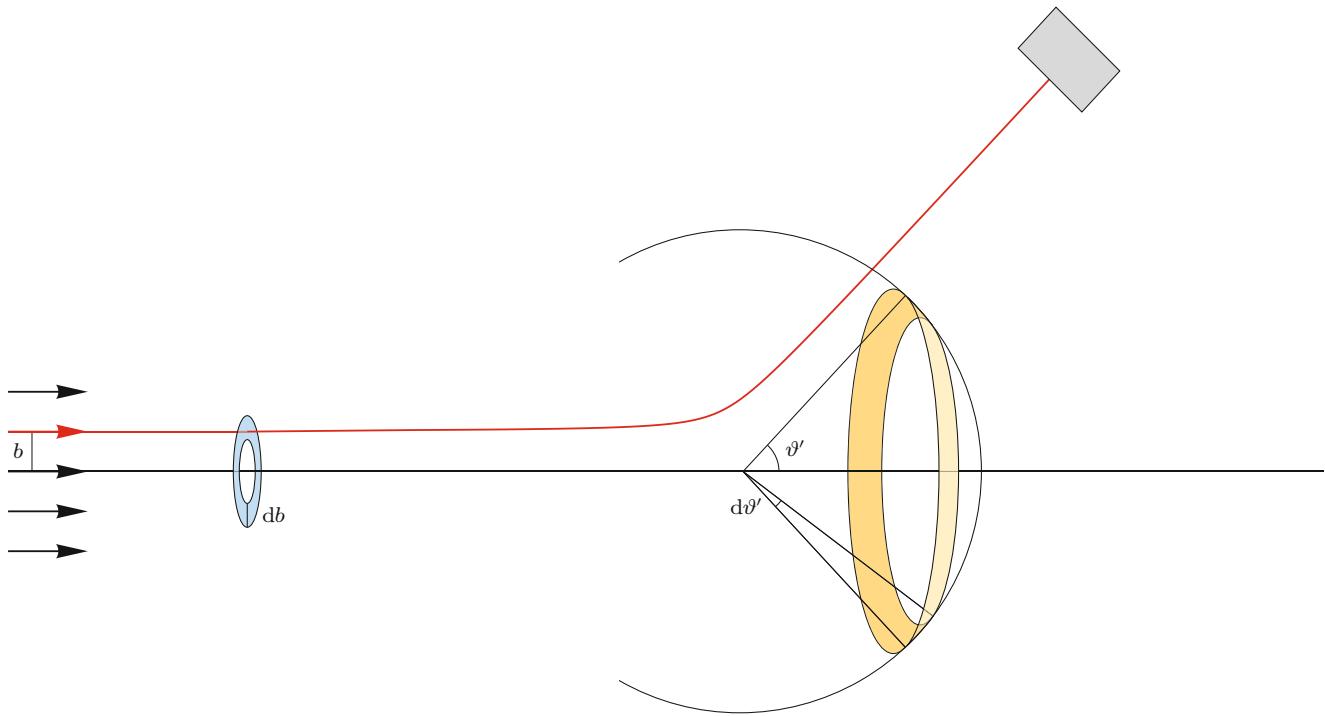
Überzeugen Sie sich von dem Ergebnis in (3.124). Ersetzen Sie dazu den auftretenden Kosinus durch den Sinus, indem Sie  $\vartheta' = \pi - \Delta\varphi$  und  $\sin x = \cos(x - \pi/2)$  ausnutzen. Zeigen Sie weiterhin, dass es für  $b^2$  keine Rolle spielt, ob das Potenzial anziehend oder abstoßend ist. *Tipp:* Überprüfen Sie, welche Folgen die Transformation  $\alpha \rightarrow -\alpha$  hat.

### Differenzieller und totaler Wirkungsquerschnitt

Wir stellen uns nun einen parallelen Strahl von Teilchen mit einer konstanten und homogenen Teilchenstromdichte

$$I = \frac{N}{\Delta t \Delta f} \quad (3.125)$$

vor, d. h., pro Zeiteinheit  $\Delta t$  laufen  $N$  Teilchen durch eine Fläche  $\Delta f$  hindurch. Jedes Teilchen habe die Energie  $E$  (3.118).



**Abb. 3.15** Skizze eines Streuexperiments. Teilchen mit Stoßparameter  $b$  werden durch ein Target gestreut und anschließend unter einem Streuwinkel  $\vartheta'$  mit einem Detektor nachgewiesen. Idealerweise befindet sich der Detektor in einem sehr großen Abstand vom Streuzentrum (hier ist der Abstand nicht maßstäblich eingezeichnet)

Als Koordinatensystem wählen wir Zylinderkoordinaten mit der Symmetriearchse entlang der Einfallsrichtung des Strahles. Wir nehmen an, dass die Teilchen nicht miteinander wechselwirken. Der Strahl sei auf eine Folie gerichtet, in der sich eine große Anzahl von Targets befinden. Die Folie sei allerdings so dünn, dass man annehmen kann, dass jedes einfallende Teilchen höchstens an einem Target gestreut wird. Die Teilchen werden dann statistisch unter verschiedenen Winkeln  $\vartheta'$  gestreut.

Wir legen für die Wechselwirkung mit dem Target ein Potenzial der Form  $V(r)$  zugrunde. Daher ist die Streuung unabhängig vom Azimutwinkel  $\varphi$ . Ein Detektor befindet sich im Abstand  $r$  vom Streuzentrum und im Winkel  $\vartheta'$  zum Teilchentrom. Er habe eine infinitesimale Fläche  $df$  (Abb. 3.15). Die Oberfläche einer Kugel mit Radius  $r$  ist  $4\pi r^2$ . Der Detektor deckt also einen Bruchteil

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{df}{4\pi r^2} \quad (3.126)$$

des gesamten Raumwinkels  $4\pi$  ab. Das Raumwinkelement  $d\Omega$  lässt sich dann in der Form

$$d\Omega = d\varphi \sin \vartheta' d\vartheta' = \frac{df}{r^2} \quad (3.127)$$

schreiben.

#### Frage 21

Man rechne  $\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' = 4\pi$  nach.

Es ist einleuchtend, dass der Detektor pro Zeiteinheit  $\Delta t$  eine Zahl  $n(\vartheta')$  von Teilchen nachweist, die sowohl proportional zum einfallenden Teilchenstrom  $I$  als auch zur Detektorfläche  $d\Omega$  ist. Der entsprechende Proportionalitätsfaktor lautet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} := \frac{n(\vartheta')}{I \Delta t d\Omega} \quad (3.128)$$

und wird *differenzialer Wirkungsquerschnitt* genannt.

#### Frage 22

Der Name *Wirkungsquerschnitt* liegt darin begründet, dass  $d\sigma/d\Omega$  die Dimension einer Fläche hat. Überzeugen Sie sich davon.

Im Experiment lässt sich  $n(\vartheta')$  als Funktion des Streuwinkels vermessen. Dies erlaubt Rückschlüsse auf die Art des streuenden Potenzials, da der differenzielle Wirkungsquerschnitt und das Potenzial eng miteinander verbunden sind, wie wir in Kürze sehen werden.

Der *totale Wirkungsquerschnitt* ist das Raumwinkelintegral des differenziellen Wirkungsquerschnitts:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (3.129)$$

Hier wurde die Integration über  $\varphi$  bereits ausgeführt, da der differenzielle Wirkungsquerschnitt nur vom Winkel  $\vartheta'$  abhängt. Welche Bedeutung hat der totale Wirkungsquerschnitt? Er entspricht der Fläche  $\sigma$ , die  $I\sigma\Delta t = n$  erfüllt, wobei  $n = \int d\Omega n(\vartheta')$  die Gesamtzahl der in der Zeit  $\Delta t$  gestreuten Teilchen ist. Somit ist  $\sigma$  die effektive Fläche, an welcher der einfallende Teilchenstrom gestreut wird.

Mit (3.124) haben wir gesehen, dass der Streuwinkel  $\vartheta'$  vom Stoßparameter  $b$  abhängt. Dies wirkt sich auf den differenziellen Wirkungsquerschnitt aus. Die Teilchen, die mit einem Stoßparameter im Intervall  $[b, b + db]$  einfallen, durchqueren einen Kreisring der Dicke  $db$  und Fläche  $2\pi b db$  (Abb. 3.15). Sie werden daraufhin in ein Winkelintervall  $[\vartheta', \vartheta' + d\vartheta']$  gestreut, wobei allerdings die Zahl der gestreuten Teilchen unverändert bleiben muss, da keine Teilchen zwischen Streuung und Detektion erzeugt werden oder verloren gehen. Aus (3.127) und (3.128) folgt dann

$$I \cdot (2\pi b |db|) = I \cdot \left( 2\pi \sin \vartheta' \frac{d\sigma}{d\Omega} |d\vartheta'| \right). \quad (3.130)$$

Die Beträge sind notwendig, da die Vorzeichen von  $db$  und  $d\vartheta'$  unterschiedlich sein können (und in der Tat in der Regel auch unterschiedlich sind): Für größere Abstände vom Streuzentrum nimmt der Streuwinkel gewöhnlich ab, da die Wechselwirkung schwächer wird.

### Zusammenhang zwischen differenziellem Wirkungsquerschnitt und dem Stoßparameter

Der differenzielle Wirkungsquerschnitt hängt mit dem Stoßparameter und dem Streuwinkel im Schwerpunktssystem zusammen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta')}{\sin \vartheta'} \left| \frac{db(\vartheta')}{d\vartheta'} \right| = \frac{1}{2 \sin \vartheta'} \left| \frac{db^2(\vartheta')}{d\vartheta'} \right|. \quad (3.131)$$

Der Zusammenhang  $b(\vartheta')$  für ein gegebenes Potenzial  $V(r)$  kann aus (3.122) abgeleitet werden.

**Achtung** Es ist anschaulicher, sich vorzustellen, dass der Streuwinkel  $\vartheta'$  eine Funktion des Stoßparameters ist,  $\vartheta' = \vartheta'(b)$ , und nicht umgekehrt. Mathematisch sind beide Betrachtungsweisen völlig äquivalent. Man beachte jedoch, dass die Funktion  $\vartheta'(b)$  eindeutig ist,  $b(\vartheta')$  aber nicht unbedingt: Ein Teilchen, das mit Stoßparameter  $b$  einfällt, wird in eine eindeutige Richtung  $\vartheta'$  gestreut. Teilchen mit verschiedenen Stoßparametern  $b$  können im Prinzip allerdings in gleiche Richtungen  $\vartheta'$  gestreut werden. In diesem Fall ist  $b(\vartheta')$  mathematisch gesehen keine Funktion mehr, sondern eine *Relation*. 

Streuexperimente werden häufig im Laborsystem durchgeführt, in dem  $m_2$  vor dem Stoß ruht. Insbesondere bewegt sich der Detektor nicht mit dem Schwerpunkt von  $m_1$  und  $m_2$  mit. Daher müssen die Streuwinkel  $\vartheta'$  in  $\vartheta_1$  umgerechnet werden. In beiden

Bezugssystemen ( $S$  und  $S'$ ) muss die Anzahl der in einen Raumwinkelbereich gestreuten Teilchen identisch sein. Gl. (3.130) führt dann direkt auf

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_S \sin \vartheta_1 |d\vartheta_1| = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{S'} \sin \vartheta' |d\vartheta'| \quad (3.132)$$

und damit auf

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_S = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{S'} \left| \frac{d \cos \vartheta'}{d \cos \vartheta_1} \right|. \quad (3.133)$$

Die Ableitung  $d \cos \vartheta'/d \cos \vartheta_1$  bzw.  $d \cos \vartheta_1/d \cos \vartheta'$  ist im Prinzip aus (3.110) berechenbar.

### Stoß zweier harter Kugeln

Wir betrachten zwei identische harte Kugeln mit Radius  $R$ . Das Potenzial der Wechselwirkung ist

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > 2R \\ \infty & r \leq 2R \end{cases}. \quad (3.134)$$

Dies bedeutet, dass sich die Kugeln nicht „sehen“, wenn ihre Mittelpunkte weiter als ein Durchmesser  $D = 2R$  voneinander entfernt sind. Ein Überlappen der Kugeln ist verboten, was durch ein unendliches Potenzial ausgedrückt wird. Die Kugeln wechselwirken also genau in dem Moment, in dem  $r = D$  erfüllt ist. Der Streuwinkel im Schwerpunktssystem folgt aus (3.122) (siehe dazu die Rechnung, die auf (3.75) geführt hat):

$$\begin{aligned} \vartheta' &= \pi - 2 \int_D^\infty \frac{b dr'}{r^2 \sqrt{(1 - b^2/r^2)}} \\ &= \pi - 2 \arcsin \left( \frac{b}{D} \right). \end{aligned} \quad (3.135)$$

Es folgt der Stoßparameter als Funktion des Streuwinkels:

$$b = D \cos(\vartheta'/2) \quad (b \leq D). \quad (3.136)$$

Hier ist zu beachten, dass alle Stoßparameter  $b > D$  zu keiner Streuung führen und damit  $\vartheta' = 0$  zur Folge haben. Darum beschränken wir uns im Folgenden nur auf den Bereich  $b \leq D$ . Der differenzielle Wirkungsquerschnitt (3.131) hängt wegen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{D \cos(\vartheta'/2)}{\sin \vartheta'} \frac{D}{2} \sin(\vartheta'/2) = \frac{D^2}{4} \quad (3.137)$$

nicht vom Streuwinkel ab; man sagt, der Wirkungsquerschnitt ist *isotrop*. Im letzten Schritt wurde die Identität

$$\cos(\vartheta'/2) \sin(\vartheta'/2) = \frac{\sin \vartheta'}{2} \quad (3.138)$$

## Anwendung: Rutherford'sche Experimente Entwicklung des Rutherford'schen Atommodells

Historisch wurden im Jahr 1909 zuerst Heliumkerne der Kernladungszahl  $Z_1 = 2$  an einer dünnen Goldfolie mit  $Z_2 = 79$  gestreut. Das Coulomb-Potenzial lautet dann  $V(r) = Z_1 Z_2 e^2 / r$ , wobei  $e$  die Elementarladung ist. Im Gegensatz zum Gravitationspotenzial ist  $\alpha$  negativ und das Potenzial repulsiv. Die Experimente bestätigten letztlich den 1911 berechneten Wirkungsquerschnitt und damit das Rutherford'sche Atommodell. Es besagt, dass der Atomkern nur ein sehr kleines Raumvolumen im Vergleich zur elek-

tronischen Atomhülle einnimmt. Die Wechselwirkung der Heliumkerne mit den Goldelektronen spielt kaum eine Rolle, da ihr Massenverhältnis etwa 7500 ist und der damit verbundene Energieverlust der Heliumkerne vernachlässigt werden kann. Da andererseits das Massenverhältnis  $m_1/m_2$  von Helium- und Goldkernen etwa 1/50 ist, ist  $\vartheta' \approx \vartheta_1$  und die Streuquerschnitte in Schwerpunkt- und Laborsystem sind praktisch identisch.

verwendet. Wir integrieren mit (3.129) noch über alle Streuwinkel, um den gesamten Wirkungsquerschnitt zu erhalten:

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' \frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi D^2. \quad (3.139)$$

Dies entspricht der Querschnittsfläche einer Kugel mit Radius  $D = 2R$ , was man sich leicht veranschaulichen kann. ▶

## Anwendung auf das Coulomb-Potenzial: Rutherford'scher Wirkungsquerschnitt

Das Coulomb-Potenzial  $V(r) = -\alpha/r$  führt zunächst mit (3.124) auf einen geschlossenen (einheitigen) Ausdruck für  $b^2(\vartheta')$ , der direkt nach  $\vartheta'$  abgeleitet werden kann:

$$\left| \frac{db^2(\vartheta')}{d\vartheta'} \right| = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos(\vartheta'/2)}{\sin^3(\vartheta'/2)} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \frac{\sin \vartheta'}{\sin^4(\vartheta'/2)}. \quad (3.140)$$

Die letzte Gleichheit ist wieder wegen (3.138) offensichtlich. Es folgt sofort der differenzielle Wirkungsquerschnitt aus (3.131).

### Rutherford'scher Wirkungsquerschnitt

Für das Coulomb-Potenzial,  $V(r) = -\alpha/r$ , ergibt sich der differenzielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktssystem zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta'/2)}. \quad (3.141)$$

Dieses klassische Ergebnis stimmt mit dem überein, was im Rahmen der Quantenmechanik gefunden wird (Bd. 3, Kap. 12).

Der totale Wirkungsquerschnitt in (3.129) für das Coulomb-Potenzial ist

$$\sigma = 2\pi \left( \frac{\alpha}{4E} \right)^2 \int_0^\pi \frac{d\vartheta' \sin \vartheta'}{\sin^4(\vartheta'/2)} = \infty. \quad (3.142)$$

Er ist unendlich! Der Grund ist, dass das Coulomb-Potenzial ein langreichweitiges Potenzial ist, das auch in beliebiger Entfernung noch Teilchen streut, wenn auch unter sehr kleinen Streuwinkeln. Dies erkennt man daran, dass der Rutherford'sche Wirkungsquerschnitt für  $\vartheta' \rightarrow 0$  divergiert. In der Realität schirmen Elektronen die Ladung des Atomkerns ab. Von außen betrachtet ist das Atom neutral, und der Streuquerschnitt bleibt endlich. Sehr grob geschätzt ist er dann von der Größenordnung der Querschnittsfläche eines Atoms,  $\sigma \sim (10^{-10} \text{ m})^2$ .

### Frage 23

Für kleine Winkel  $\vartheta'$  kann man  $\sin \vartheta' \approx \vartheta'$  schreiben. Machen Sie sich damit klar, dass der totale Wirkungsquerschnitt in (3.142) divergiert.

## 3.5 Das reduzierte Dreikörperproblem

Wir haben in Abschn. 3.3 gefunden, dass die Bewegungsgleichungen des Zweikörperproblems im Gravitationsfeld exakt gelöst werden können. Das Zweikörperproblem ist allerdings eine Idealisierung und für einige Anwendungen, die eine hohe Genauigkeit erfordern, nicht geeignet. So hat beispielsweise der Mond einen Einfluss auf das Zweikörpersystem Sonne–Erde. Doch bereits für drei Körper sind die Bewegungsgleichungen im Gravitationsfeld nicht mehr allgemein integrierbar. In diesem Abschnitt diskutieren wir einen Spezialfall des Dreikörperproblems, der trotz seiner einschränkenden Annahmen von großer Wichtigkeit für das Verständnis der Mechanik des Sonnensystems ist.

## Vertiefung: Lösung des $N$ -Körperproblems

### Perturbative und numerische Zugänge

Das  $N$ -Körperproblem ist für  $N > 2$  nicht allgemein in analytischer Form lösbar. Für praktische Anwendungen bieten sich verschiedene Möglichkeiten an:

- Bei der perturbativen bzw. störungstheoretischen Methode nimmt man an, dass das Problem als Zweikörpersystem angesehen werden kann, wobei der Einfluss einer dritten oder mehrerer anderer Massen in Form von Störungen in die Rechnungen eingeht. So lässt sich das Zweikörperpotenzial  $V_2$  z. B. durch  $V = V_2 + \delta V$  ersetzen, wobei  $\delta V$  eine kleine Störung darstellt,  $\delta V \ll V_2$ . Auf diese Weise lassen sich die Einflüsse der anderen Planeten auf die Erdbahn abschätzen. Ebenso kann diese Methode verwendet werden, um relativistische Effekte

oder die Abweichung der Sonne von der Kugelgestalt zu berücksichtigen.

- Die perturbative Methode ist nur dann zuverlässig, wenn Störungen klein sind. In anderen Fällen, wenn beispielsweise mehrere vergleichbare Massen im System vorkommen, bieten sich numerische Verfahren an (Dehnen & Read 2011). Hier werden z. B. die exakten Bewegungsgleichungen zeitlich diskretisiert und abschnittsweise aufgeintegriert.

### Literatur

- Dehnen, W., Read, J.I.: N-body simulations of gravitational dynamics. Eur. Phys. J. Plus **126**, 55 (2011)

## Definition des Spezialfalles und Aufstellung der Bewegungsgleichungen

Das Dreikörperproblem kann nicht in allgemeiner Form gelöst werden. Näherungslösungen sind allerdings möglich, z. B. wenn man annimmt, dass eine der drei Punktmassen klein gegenüber den anderen beiden ist ( $m_3 \ll m_1, m_2$ ) und dass sich  $m_1$  und  $m_2$  auf Kreisbahnen umeinander bewegen. Dabei wird  $m_3$  als Testmasse betrachtet, die keinen Einfluss auf die Bewegung von  $m_1$  und  $m_2$  nimmt und sich in der Bahnebene von  $m_1$  und  $m_2$  bewegt. Diese Situation wird häufig näherungsweise im Sonnensystem angetroffen, wenn z. B. Asteroiden dem Einfluss der Schwefelder von Sonne und Jupiter unterliegen.

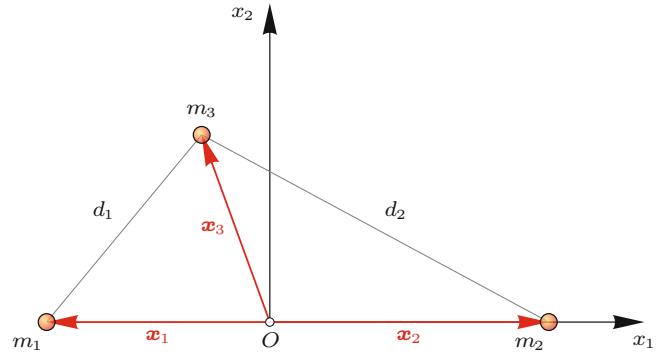
Das eingeführte Koordinatensystem soll den Ursprung  $O$  im gemeinsamen Schwerpunkt von  $m_1$  und  $m_2$  haben und mit ihrem Verbindungsvektor mitrotieren, sodass  $m_1$  und  $m_2$  ortsfest sind (Abb. 3.16). Man spricht daher auch von einem *gleichläufigen* oder *synodischen* Koordinatensystem. Die  $x_1$ -Achse zeige von  $m_1$  zu  $m_2$ , deren Abstand  $d$  ist. Zur Vereinfachung definieren wir

$$q := \frac{m_1}{m_1 + m_2} < 1 \quad \text{und} \quad 1 - q := \frac{m_2}{m_1 + m_2} < 1. \quad (3.143)$$

Die Koordinaten der beiden Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  sind somit

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q-1)d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qd \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.144)$$

Die Umlaufzeit von  $m_1$  und  $m_2$  lässt sich sofort aus dem dritten Kepler'schen Gesetz in (3.92) bestimmen, wobei  $a = d$  entspricht und die reduzierte Masse  $\mu$  durch  $m_1$  und  $m_2$  definiert



**Abb. 3.16** Geometrie des reduzierten Dreikörperproblems. Die beiden Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  befinden sich auf der  $x_1$ -Achse mit ihrem Schwerpunkt im Ursprung  $O$ . Eine dritte Masse  $m_3$  befindet sich in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene mit den Abständen  $d_1$  und  $d_2$  zu  $m_1$  und  $m_2$

wird:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(m_1 + m_2)}. \quad (3.145)$$

Da sich  $m_1$  und  $m_2$  auf Kreisbahnen bewegen, ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}} \quad (3.146)$$

konstant. Hier haben wir die  $x_3$ -Achse so gewählt, dass  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_3$  gilt. Dies ist offensichtlich möglich, da  $\boldsymbol{\omega}$  senkrecht auf der Bahnebene und damit senkrecht auf der  $x_1$ -Achse steht. Folglich ist  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)^\top$  der Koordinatenvektor von  $m_3$  (wir lassen für die Koordinaten von  $m_3$  den hochgestellten Index (3) aus Übersichtsgründen weg). Die Abstände von  $m_3$  zu  $m_1$  und  $m_2$

seien jeweils  $d_1$  und  $d_2$ :

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(x_1 - (q-1)d)^2 + x_2^2}, \\ d_2 &= \sqrt{(x_1 - qd)^2 + x_2^2}. \end{aligned} \quad (3.147)$$

Da das Koordinatensystem rotiert, müssen Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte berücksichtigt werden, die auf die Punktmasse  $m_3$  wirken. Die Winkelgeschwindigkeit ist konstant, sodass Terme mit  $\dot{\omega}$  verschwinden. Weiterhin liegt der Ursprung des Koordinatensystems auf der Drehachse, und man findet  $b' = 0$  in (2.80). Die resultierende Bewegungsgleichung für  $m_3$  lautet demnach

$$\ddot{x} + 2\omega \times \dot{x} + \omega \times (\omega \times x) + \nabla \phi(x) = 0. \quad (3.148)$$

Hier wurde das Potenzial

$$\phi(x) := \frac{V(x)}{m_3} \quad (3.149)$$

eingeführt, wobei

$$V(x) = -\frac{Gm_1m_3}{d_1} - \frac{Gm_2m_3}{d_2} \quad (3.150)$$

die potentielle Energie der Testmasse  $m_3$  in den Gravitationsfeldern der Massen  $m_1$  und  $m_2$  ist. Die Kreuzprodukte in (3.148) ergeben

$$\omega \times \dot{x} = \begin{pmatrix} -\omega \dot{x}_2 \\ \omega \dot{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega \times (\omega \times x) = \begin{pmatrix} -\omega^2 x_1 \\ -\omega^2 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.151)$$

Führt man das effektive Potenzial

$$U(x) := \phi(x) - \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad (3.152)$$

ein, lassen sich die Bewegungsgleichungen (3.148) in der Form

$$\ddot{x}_1 - 2\omega \dot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \ddot{x}_2 + 2\omega \dot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \quad (3.153)$$

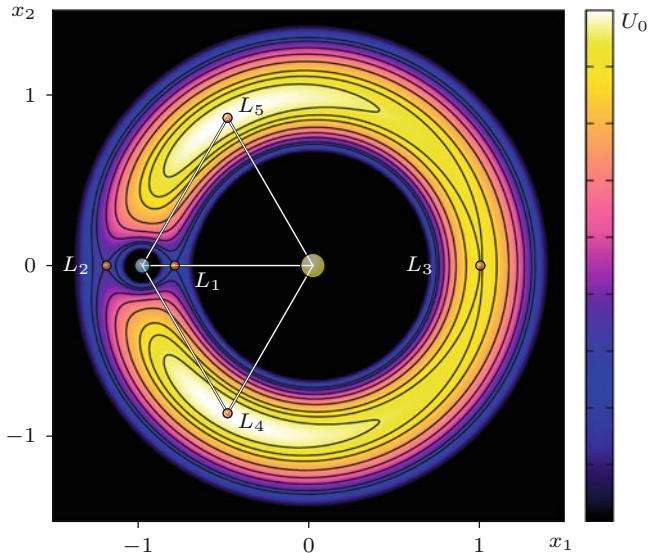
schreiben.

Das effektive Potenzial lässt sich mithilfe von (3.146) auch umformulieren:

$$\frac{U(x)}{G} = -\frac{m_1}{d_1(x_1, x_2)} - \frac{m_2}{d_2(x_1, x_2)} - \frac{m_1 + m_2}{2d^3} (x_1^2 + x_2^2). \quad (3.154)$$

#### Frage 24

Überprüfen Sie, dass  $\phi$  und  $U$  nur Funktionen von  $x_1$  und  $x_2$  sind und zeigen Sie die Gültigkeit von (3.153) und (3.154).



**Abb. 3.17** Darstellung des effektiven Potenzials aus (3.154) für  $m_2/m_1 = 40$  in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene. Bereiche gleicher Farbe entsprechen gleichem effektiven Potenzial. Die Lagrange-Punkte  $L_4$  und  $L_5$  befinden sich in den Maxima (weiß,  $U_0$ ) des effektiven Potenzials. Sie bilden mit den beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  zwei gleichseitige Dreiecke. Einige Äquipotenziallinien sind in Schwarz eingezzeichnet. Sie entsprechen den Hill-Kurven für bestimmte Werte der Jacobi-Konstanten  $C$

#### Hill-Kurve

Anstatt die Bewegungsgleichungen zu lösen, betrachten wir das effektive Potenzial genauer. Multipliziert man die erste Gleichung in (3.153) mit  $\dot{x}_1$ , die zweite mit  $\dot{x}_2$  und addiert beide, so überprüft man schnell, dass

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + U \right] = 0 \quad (3.155)$$

ist. Die somit erhaltene Größe

$$\begin{aligned} C &:= -2U - (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \\ &= \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) - 2V - (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \text{const} \end{aligned} \quad (3.156)$$

ist die *Jacobi-Konstante*, das einzige bekannte Integral des reduzierten Dreikörperproblems.

Die Bewegung von  $m_3$  ist offensichtlich auf solche Bereiche beschränkt, in denen  $C + 2U \leq 0$  erfüllt ist, da  $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \geq 0$  gilt. Die sogenannte *Hill-Kurve* ist die Menge aller Punkte, die  $U(x) = -C/2$  erfüllen. Sie definiert die Grenze des für die Punktmasse  $m_3$  zugänglichen Bereichs (Abb. 3.17).

## Lagrange-Punkte

Im Folgenden wollen wir uns auf einen für die Raumfahrt wichtigen Spezialfall konzentrieren: Wir fragen, ob es Punkte gibt, an denen die Punktmasse  $m_3$  relativ zu  $m_1$  und  $m_2$  in Ruhe bleibt. Solche Punkte heißen *Lagrange-Punkte* und werden durch  $\nabla U = \mathbf{0}$  definiert, was aus (3.153) folgt. Man schreibt zunächst die relevanten Komponenten der Bewegungsgleichung (3.153) für den Spezialfall  $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \omega^2 x_1 - \frac{Gm_1(x_1 - x_{1,1})}{d_1^3} - \frac{Gm_2(x_1 - x_{2,1})}{d_2^3}, \\ 0 &= \omega^2 x_2 - \frac{Gm_1x_2}{d_1^3} - \frac{Gm_2x_2}{d_2^3}. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Hier wurde verwendet, dass sich die Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  auf der  $x_1$ -Achse befinden.

### Frage 25

Überprüfen Sie das Ergebnis in (3.157), indem Sie  $\nabla U$  berechnen. Dazu ist es notwendig,  $d_1$  und  $d_2$  mithilfe der Kettenregel nach  $x_1$  bzw.  $x_2$  abzuleiten.

Nimmt man zunächst an, dass  $x_2 = 0$  gilt, ist die zweite Gleichung in (3.157) trivial erfüllt. Die Untersuchung reduziert sich somit auf eine Kurvendiskussion des effektiven Potenzials  $U$  entlang der  $x_1$ -Achse. Man kann zeigen, dass es drei Lagrange-Punkte ( $L_1, L_2, L_3$ ) auf der  $x_1$ -Achse gibt. Alle drei entsprechen einem lokalen Maximum von  $U(x_1)$  und instabilen Gleichgewichtspunkten. Die Reihenfolge der Lagrange-Punkte ist im Sonne-Erde-System folgendermaßen definiert (Abb. 3.17):

- $L_1$  liegt auf der Verbindungsgeraden zwischen Sonne und Erde.
- $L_2$  befindet sich von der Sonne aus gesehen hinter der Erde.
- $L_3$  befindet sich von der Erde aus gesehen hinter der Sonne.

$L_2$  wurde bisher mehrfach zur Stationierung von Weltraumobservatorien (z.B. WMAP, Planck, Herschel) genutzt, da dieser Punkt durch die Erde von Sonnenstrahlung abgeschirmt ist. Umgekehrt bietet sich  $L_1$  als Punkt zur Sonnenobservation an. Aufgrund der Instabilität von  $L_{1,2,3}$  müssen dort positionierte Satelliten gelegentliche Bahnkorrekturen durchführen.

Es gibt noch zwei weitere Lagrange-Punkte für  $x_2 \neq 0$ . In diesem Fall kann die zweite Gleichung in (3.157) mit  $x_1/x_2$  multipliziert und von der ersten Gleichung abgezogen werden. Dies führt zunächst auf

$$\frac{Gm_1x_{1,1}}{d_1^3} + \frac{Gm_2x_{2,1}}{d_2^3} = 0 \quad (3.158)$$

und wegen (3.143) und (3.5) auf

$$d_1 = d_2 = d. \quad (3.159)$$

Die beiden damit definierten Punkte  $L_4$  und  $L_5$  bilden mit den Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  zwei gleichseitige Dreiecke

(Abb. 3.17). Wir zeigen im Vertiefungskasten „Stabilität der Lagrange-Punkte“, dass die Bahnen von Testmassen in der Nähe von  $L_4$  und  $L_5$  – trotz Abwesenheit lokaler Minima des effektiven Potenzials – stabil sind, wenn die beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  hinreichend unterschiedlich sind ( $m_1/m_2$  bzw.  $m_2/m_1 \gtrsim 25$ , wie es beispielsweise beim Sonne-Jupiter-System der Fall ist). Der Grund ist, dass die Coriolis-Kraft bei der Stabilitätsanalyse berücksichtigt werden muss. In der Tat beobachtet man eine Vielzahl von Asteroiden, die in der Nähe der Punkte  $L_4$  und  $L_5$  Jupiter im festen Abstand voraus- bzw. hinterherlaufen. Sie werden als *Trojaner* bezeichnet. Vor Kurzem wurde sogar ein Trojaner der Erde entdeckt.

### Frage 26

Zeigen Sie: Die Lagrange-Punkte  $L_4$  und  $L_5$  befinden sich an den Orten

$$l_{4,5} = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 2q-1 \\ \pm\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.160)$$

## 3.6 Gezeitenkräfte

Mit Gezeiten sind im alltäglichen Sprachgebrauch Ebbe und Flut gemeint. Physikalisch werden diese zeitlich wiederkehrenden Effekte dadurch erklärt, dass die Gravitationsfelder von Mond und Sonne auf verschiedene Punkte der Erdoberfläche unterschiedlich stark wirken. Dies ist eine direkte Folge der räumlichen Ausdehnung der Erde. In idealisierten Systemen von Punktmassen treten Gezeitenkräfte nicht auf. Dieser Abschnitt liefert einen Überblick über die Ursache der Gezeitenkräfte und ihre Konsequenz für die Erde im Speziellen und Himmelskörper im Allgemeinen.

### Allgemeine Herleitung der Gezeitenkräfte

Zur Vereinfachung nehmen wir einen kugelförmig ausgedehnten Körper mit Radius  $R_1$  und Masse  $m_1$  und einen punktförmigen Körper der Masse  $m_2$  an. Beide Körper sollen sich im Abstand  $d \gg R_1$  umkreisen. Die Gültigkeit der Diskussion in Abschn. 3.2 und 3.3 wird durch die Ausdehnung des ersten Körpers in erster Näherung nicht beeinträchtigt. Der Grund ist, dass der ausgedehnte Körper  $m_1$  als Grenzfall eines  $N$ -Teilchensystems betrachtet werden kann, dessen innere Dynamik keine Rolle spielt (Abschn. 3.1). Die Dynamik von  $m_1$  kann daher durch eine im Schwerpunkt von  $m_1$  konzentrierte Punktmasse ersetzt werden. Entscheidend ist hier die Einschränkung, dass die innere Dynamik von  $m_1$  tatsächlich vernachlässigt werden kann. Wir werden noch sehen, dass die Gezeitenkräfte zu einer inneren Dynamik führen können, was sich wiederum auf die Bahn von  $m_1$  und  $m_2$  umeinander auswirkt.

## Vertiefung: Stabilität der Lagrange-Punkte

Es stellt sich die Frage, unter welchen Umständen eine Testmasse an den Lagrange-Punkten  $L_4$  und  $L_5$  stationär, d.h. im stabilen Gleichgewicht, bleibt. Dazu untersuchen wir das effektive Potenzial in der Nähe dieser Punkte genauer.

Wir haben das effektive Potenzial des reduzierten Dreikörperproblems bereits in (3.154) gefunden:

$$\frac{U(\mathbf{x})}{G} = -\frac{m_1}{d_1(x_1, x_2)} - \frac{m_2}{d_2(x_1, x_2)} - \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad (3.161)$$

wobei  $(x_1, x_2)$  die kartesischen Koordinaten innerhalb der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  mitrotierenden Ebene sind, auf welcher sich alle Massen befinden.

Wir berechnen nun die ersten und zweiten Ableitungen von  $U(\mathbf{x})$  nach dem Ort  $(x_1, x_2)$  und beginnen mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= \frac{Gm_1(x_1 - (q-1)d)}{d_1^3} + \frac{Gm_2(x_1 - qd)}{d_2^3} - \omega^2 x_1, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= \frac{Gm_1 x_2}{d_1^3} + \frac{Gm_2 x_2}{d_2^3} - \omega^2 x_2. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Entsprechend können wir die zweiten Ableitungen berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} &= \frac{Gm_1}{d_1^3} + \frac{Gm_2}{d_2^3} - \frac{3Gm_1(x_1 - (q-1)d)^2}{d_1^5} \\ &\quad - \frac{3Gm_2(x_1 - qd)^2}{d_2^5} - \omega^2, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} &= \frac{Gm_1}{d_1^3} + \frac{Gm_2}{d_2^3} - \frac{3Gm_1 x_2^2}{d_1^5} - \frac{3Gm_2 x_2^2}{d_2^5} - \omega^2, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{3Gm_1(x_1 - (q-1)d)x_2}{d_1^5} - \frac{3Gm_2(x_1 - qd)x_2}{d_2^5}. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Nun müssen die zweiten Ableitungen an den Orten  $L_{4,5}$  (angedeutet durch einen Index L) ausgewertet werden. Dazu setzen wir ihre Koordinaten ein, die wir aus (3.159) und (3.160) bereits kennen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit verwenden wir die positive  $x_2$ -Koordinate aus (3.160). Eine kurze Rechnung führt auf

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right|_L &= -\frac{3\omega^2}{4}, \\ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right|_L &= -\frac{9\omega^2}{4}, \\ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} \right|_L &= \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_L = -\frac{3\sqrt{3}\omega^2}{4}(2q-1). \end{aligned} \quad (3.164)$$

Die Hesse-Matrix (s. den „Mathematischen Hintergrund“ 1.8) des effektiven Potenzials nimmt in  $L_{4,5}$  folglich die Form

$$(U_{ij}) := (\partial_{x_i} \partial_{x_j} U)|_L = -\frac{3\omega^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}(2q-1) \\ \sqrt{3}(2q-1) & 3 \end{pmatrix} \quad (3.165)$$

an. Da die Spur der Matrix  $U_{ij}$  negativ ist, muss mindestens einer ihrer Eigenwerte negativ sein. Somit kann  $U_{ij}$  nicht positiv definit sein und das effektive Potenzial in  $L_{4,5}$  keine Minima besitzen. Die Bewegung in der Nähe dieser Lagrange-Punkte kann also nur durch den Beitrag der Coriolis-Kraft stabilisiert werden.

Im Folgenden führen wir eine Stabilitätsanalyse durch, in die wir die Corioliskraft einbeziehen. Dazu linearisieren wir die Bewegungsgleichungen in der Nähe von  $L_{4,5}$  und untersuchen, unter welchen Umständen eine Testmasse dort gebunden sein kann. Zunächst führen wir die Relativkoordinaten bezüglich der Lagrange-Punkte mit bekannten Koordinaten  $(x_1^L, x_2^L)$  ein:

$$\xi = x_1 - x_1^L, \quad \eta = x_2 - x_2^L. \quad (3.166)$$

Dann entwickeln wir das effektive Potenzial in der Nähe der Lagrange-Punkte bis zur zweiten Ordnung, wobei wir ausnutzen, dass die ersten Ableitungen von  $U$  in  $L_{4,5}$  verschwinden. Es folgt

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} U &= U_{11}\xi + U_{12}\eta, \\ \partial_{x_2} U &= U_{12}\xi + U_{22}\eta, \end{aligned} \quad (3.167)$$

wobei  $U_{21} = U_{12}$  verwendet wurde. Wir können somit den Gradienten von  $U$  in den Bewegungsgleichungen (3.153) ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} + U_{11}\xi + U_{12}\eta &= 0, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + U_{12}\xi + U_{22}\eta &= 0. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Diese Gleichungen sind linear in den Koordinaten  $(\xi, \eta)$  und besitzen nur konstante Koeffizienten  $\omega$  und  $U_{ij}$ .

Um die lineare Stabilität unter dem Einfluss kleiner Störungen zu testen, ist es üblich, einen Ansatz der Form  $(\xi, \eta) = (\xi_0, \eta_0)e^{\lambda t}$  einzusetzen. Das Verhalten der Lösung hängt davon ab, welchen Wert  $\lambda$  annimmt. Ist  $\lambda > 0$ , so wächst die Lösung unbeschränkt und die Testmasse kann ins Unendliche entkommen. Für  $\lambda < 0$  zerfällt eine Störung, und die Lösung konvergiert gegen Null; die Testmasse kommt also schließlich im Lagrange-Punkt zur Ruhe. Wir erwarten nicht,  $\lambda < 0$  zu finden, da wir bereits gezeigt haben, dass das Potenzial in  $L_{4,5}$  kein Minimum besitzt und eine stationäre Lösung nicht stabil sein kann. Ein rein imaginäres  $\lambda$  hingegen führt auf Oszillationen mit endlicher Amplitude und somit auf gebundene Bahnen.

Mit dem Exponentialansatz finden wir zunächst die algebraische Gleichung

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + U_{11} & -2\omega\lambda + U_{12} \\ 2\omega\lambda + U_{12} & \lambda^2 + U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.169)$$

Um nichttriviale Lösungen zu gestatten, muss die Determinante der Koeffizientenmatrix dieser Gleichung verschwinden:

$$(\lambda^2 + U_{11})(\lambda^2 + U_{22}) - (-2\omega\lambda + U_{12})(2\omega\lambda + U_{12}) = 0. \quad (3.170)$$

Wir sortieren nach Potenzen von  $\lambda$ ,

$$\lambda^4 + (U_{11} + U_{22} + 4\omega^2)\lambda^2 + (U_{11}U_{22} - U_{12}^2) = 0, \quad (3.171)$$

und sehen, dass für jede Lösung  $\lambda$  auch  $-\lambda$  Lösung ist. Daher muss  $\lambda$  rein imaginär sein, um unbeschränkte Trajektorien der Testmasse zu vermeiden, wie wir bereits vermutet hatten.

Allgemein besitzt die Gleichung  $\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0$  die Lösungen

$$\lambda_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left( -b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \right). \quad (3.172)$$

Für rein imaginäres  $\lambda$  ist  $\lambda^2$  reell, woraus  $b^2 \geq 4c$  folgt. Konkret führt dies auf

$$(U_{11} + U_{22} + 4\omega^2)^2 \geq 4(U_{11}U_{22} - U_{12}^2). \quad (3.173)$$

Wie bereits in Abschn. 3.5 wählen wir ein Koordinatensystem, das sich mit  $m_1$  und  $m_2$  mitdrehet, sodass die Orte  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  von  $m_1$  und  $m_2$  fest sind. Die Punktmasse  $m_2$  erzeugt ein Gravitationspotenzial, das an einem Ort  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_2$  die Stärke

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|} \quad (3.177)$$

hat. Die potentielle Energie einer Testmasse  $m$  am Ort  $\mathbf{x}$  in diesem Potenzial ist dann einfach  $V(\mathbf{x}) = m\phi(\mathbf{x})$ . Die entsprechende Gravitationskraft, die auf die Testmasse  $m$  am Ort  $\mathbf{x}$  wirkt, ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -m\nabla\phi(\mathbf{x}). \quad (3.178)$$

Wenn man nun berücksichtigt, dass der Körper  $m_1$  ausgedehnt ist, so werden zwei Testmassen an verschiedenen Punkten der Oberfläche oder im Inneren von  $m_1$  allgemein unterschiedliche Gravitationskräfte erfahren, da die Abstände zu  $m_2$  nicht identisch sind (Abb. 3.18).

Im Folgenden nehmen wir die Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1)$  auf eine Testmasse im Schwerpunkt  $\mathbf{x}_1$  von  $m_1$  als Referenz. Für kleine Abstände  $\delta\mathbf{x}$  von  $\mathbf{x}_1$  lautet die Kraft am Ort  $\mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x}$  dann in erster Näherung

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) + (\delta\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{x}_1). \quad (3.179)$$

Setzt man hier die bekannten Terme  $U_{ij}$  ein, ergibt sich die Stabilitätsbedingung

$$1 \geq 27q(1 - q). \quad (3.174)$$

Sie hat die Lösungen  $q \leq q_-$  und  $q \geq q_+$  mit

$$q_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{27}} \right). \quad (3.175)$$

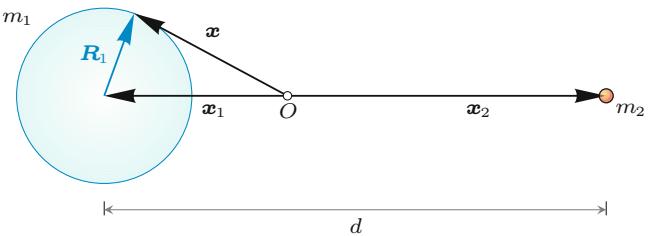
Beschränken wir uns auf den Fall, dass  $m_1$  die kleinere der beiden Massen und damit kleiner als die Hälfte der Gesamtmasse  $m_1 + m_2$  ist, d.h.  $q < 1/2$ , so müssen wir  $q \leq q_-$  verwenden:

$$q = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) \approx \frac{1}{26}. \quad (3.176)$$

Diese Bedingung besagt, dass die Bewegung um die Lagrange-Punkte  $L_{4,5}$  nur dann stabil ist, wenn die kleinere Masse mindestens 26-mal leichter ist als die Gesamtmasse  $m_1 + m_2$ . Vertauscht man in der Analyse die Massen  $m_1$  und  $m_2$ , so erhält man dasselbe Ergebnis, wie man leicht nachrechnet.

### Frage 27

Vollziehen Sie die Schritte in diesem Kasten nach und überprüfen Sie vor allem die Stabilitätsbedingung  $q < 1/26$ .



**Abb. 3.18** Schematische Darstellung der Entstehung der Gezeitenkräfte. Ein ausgedehnter Körper mit Masse  $m_1$  und Radius  $R_1$  befindet sich im Abstand  $d$  von einer Gravitationsquelle  $m_2$ . Beide Massen haben den gemeinsamen Schwerpunkt im Ursprung  $O$ . Verschiedene Punkte  $\mathbf{x}$  an der Oberfläche des Körpers  $m_1$  haben unterschiedliche Abstände zu  $m_2$  und spüren damit verschiedene Gravitationsbeschleunigungen. Dies führt auf die Gezeitenkräfte

Dies sind die ersten beiden Terme einer Taylor-Entwicklung der vektorwertigen Funktion  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , ausgewertet am Ort  $\mathbf{x}_1$ . Weiterhin wissen wir aber aus (3.178), dass die Kraft selbst als Gradient des Potenzials  $\phi(\mathbf{x})$  geschrieben werden kann. Eingesetzt und in Komponentenschreibweise formuliert lautet das Ergebnis dann

$$F_i(\mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}_1) - m \delta x_j \partial_j \partial_i \phi(\mathbf{x}_1). \quad (3.180)$$

Den Term

$$\phi_{ij} := \partial_i \partial_j \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.181)$$

nennt man die *Hesse-Matrix* (nach dem deutschen Mathematiker *Otto Hesse*, 1811–1874) der Funktion  $\phi(\mathbf{x})$ . Wir nehmen hier an, dass  $\phi(\mathbf{x})$  zweimal differenzierbar ist und die Ableitungen vertauscht werden können, d. h.  $\partial_i \partial_j \phi = \partial_j \partial_i \phi$ . In kartesischen Koordinaten lautet die Matrix ausgeschrieben

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}. \quad (3.182)$$

Da der Term  $\phi_{ij}$  für eine Relativkraft (Gezeitenkraft) an den Orten  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}$  verantwortlich ist, nennt man diese Größe auch *Gezeitentensor*. Tensoren und ihre mathematischen Eigenschaften werden in Kap. 4 besprochen. Der zweite Term auf der rechten Seite von (3.180) ist die Gezeitenkraft am Ort  $\mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}$  relativ zum Ort  $\mathbf{x}_1$ . Die zweiten Ableitungen des Gravitationspotenzials und die damit verbundenen Gezeitenkräfte spielen in der allgemeinen Relativitätstheorie im Zusammenhang mit der Raumkrümmung eine zentrale Rolle.

Man beachte, dass das Potenzial  $\phi(\mathbf{x})$  den Einfluss beliebig vieler Gravitationszentren beinhalten kann (Abschn. 3.5). Mit (3.180) lassen sich z. B. die durch Mond, Sonne und andere Planeten verursachten Gezeitenkräfte auf der Erde berechnen. Da es sich um die führenden Terme einer Taylor-Entwicklung handelt, ist die Gültigkeit dieser Gleichung auf Fälle beschränkt, für die  $\delta \mathbf{x}$  klein ist gegenüber den Abständen zu allen Massenzentren.

## Gezeitenkräfte

Wir wollen nun den speziellen Fall betrachten, dass  $\mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}$  auf der Oberfläche von  $m_1$  liegt und genau  $m_2$  zugewandt ist, d. h.  $\delta \mathbf{x} \parallel \mathbf{r}$ , wobei  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ . Es ist direkt offensichtlich, dass die durch  $m_2$  verursachten Gravitationskräfte an den Orten  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}$  parallel sind und in Richtung  $\mathbf{r}$  zeigen (Abb. 3.18). Die auf eine Testmasse  $m$  wirkende Gravitationskraft an diesen beiden Orten ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_1) = \frac{Gmm_2}{d^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}) = \frac{Gmm_2}{(d - R_1)^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad (3.183)$$

da  $R_1 = |\delta \mathbf{x}|$  der Radius der ausgedehnten Masse  $m_1$  ist. Nun gilt weiterhin

$$\frac{1}{(d \pm R_1)^2} = \frac{(1 \pm R_1/d)^{-2}}{d^2} \approx \frac{1}{d^2} \left(1 \mp \frac{2R_1}{d}\right) \quad (3.184)$$

für kleine Verhältnisse  $R_1/d$ , was bereits angenommen wurde. Es ist nun ein leichter Schritt, die Gezeitenkraft an

dem einem Kraftzentrum zugewandten Oberflächenpunkt zu berechnen:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) \approx \frac{2Gmm_2R_1}{d^3} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (3.185)$$

Sie fällt mit der dritten Potenz des Abstands  $d$  und damit wesentlich schneller als die Gravitationskraft selbst ab und weist in Richtung des Kraftzentrums am Ort  $\mathbf{x}_2$ .

**Achtung** Im Allgemeinen zeigt die Gezeitenkraft nicht in Richtung des Kraftzentrums, da  $\phi_{ij}$  eine tensorielle Größe ist.

## Frage 28

Man zeige ausgehend von den Rechnungen im Beispielkasten, dass die Gezeitenkraft auf der von  $m_2$  abgewandten Seite in erster Näherung vom Betrag her auf dasselbe Ergebnis wie (3.185) führt. Allerdings ist die Richtung der Kraft entgegengesetzt. Man verwende dazu den Punkt  $\mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}' = \mathbf{x}_1 - \delta \mathbf{x}$  und berücksichtige, dass (3.184) bereits für beide Vorzeichen aufgeschrieben wurde.

## Einfluss der Gezeiten auf das Erde-Mond-System

Die Erde rotiert mit einer etwa 30-mal größeren Winkelgeschwindigkeit um ihre eigene Achse, als sich Erde und Mond um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen. Testmassen, die sich mit der Erdoberfläche mitdrehen, durchlaufen daher im Laufe der Zeit verschiedene Punkte im Mondgravitationsfeld. Da die Erde kein perfekt starrer Körper ist (Kap. 4), kommt es somit zu zeitabhängigen Verformungen des Planeten. Diese erkennt man besonders gut auf den Meeren, wo sich Ebbe und Flut ausbilden. Aber auch die Landmassen heben und senken sich um bis zu 50 cm am Äquator.

Diese Verformungen führen allerdings zu Reibungseffekten (*Gezeitenreibung*), d. h. zu einer Umwandlung von kinetischer Energie in Wärme. Als Konsequenz wird die Erdrotation permanent abgebremst. Dieser Effekt ist für uns nicht direkt wahrnehmbar, weil die Tageslänge nur um rund 20 s pro Million Jahre zunimmt. Da Erde und Mond in erster Näherung ein isoliertes System darstellen, muss der gemeinsame Drehimpuls von Erde und Mond erhalten sein. Nimmt nun aber der Drehimpuls der Erdrotation ab, muss der Drehimpuls des Mondes um die Erde um den gleichen Betrag zunehmen. Das dazu erforderliche Drehmoment stammt von den Gezeitenkräften. Dies führt dazu, dass sich der Abstand zwischen Erde und Mond stetig vergrößert, gegenwärtig um fast 4 cm pro Jahr.

Dieser Prozess wird so lange fortschreiten, bis die Rotation der Erde und die Drehung von Erde und Mond um ihren ge-

meinsamen Schwerpunkt die gleiche Winkelgeschwindigkeit annehmen. Erst dann verschwindet die Gezeitenreibung auf der Erde. Dies ist übrigens für den Mond längst eingetreten: Die Rotation des Mondes ist gebunden. Aus diesem Grund sieht man von der Erde aus (näherungsweise) nur eine Seite des Mondes. In der Tat kann man zeigen, dass der kleinere der beiden Körper zuerst in eine gebundene Rotation übergeht.

### Frage 29

Man schätzt mithilfe von (3.185) die relative Stärke der durch Sonne und Mond verursachten Gezeitenkräfte ab. Dazu reicht es aus, die Massen- und Abstandsverhältnisse zu kennen: Die Masse der Sonne ist etwa  $3 \cdot 10^7$ -mal größer als die des Mondes, der Abstand etwa 400-mal größer. Man findet damit, dass die durch die Sonne verursachten Gezeitenkräfte auf der Erde etwa halb so groß sind wie die durch den Mond bedingten. Dies ist übrigens die Ursache von Spring- und Nipptiden. Im ersten Fall befinden sich Sonne, Erde und Mond auf einer Geraden. Im zweiten Fall stehen Sonne und Mond von der Erde aus gesehen in einem  $90^\circ$ -Winkel zueinander. Die Effekte schwächen sich gegenseitig ab.

## Stabilität von Planeten, Roche-Grenze

Wir haben in (3.185) gesehen, dass die Gezeitenkräfte größer werden, wenn sich Objekte (z. B. Planeten) einander annähern, da dann  $d$  kleiner wird. Man kann sich anschaulich vorstellen, dass unterhalb eines bestimmten Abstands die Gezeitenkräfte so groß werden, dass eines der Objekte zerrissen wird. Dieses Verhalten ist für das Entstehen von Planetensystemen von großer Bedeutung. Nimmt man an, dass ein Planet oder Asteroid nur durch Gravitationskräfte zusammengehalten wird, so nennt man den Grenzabstand *Roche-Grenze* (nach dem französischen Astronomen und Mathematiker Édouard Albert Roche, 1820–1883). Eine Sonne kann keine Planeten bzw. ein Planet keine Monde innerhalb der Roche-Grenze haben.

Um die Roche-Grenze abzuschätzen, betrachten wir eine Testmasse  $m$  auf der zu  $m_2$  gerichteten Oberfläche von  $m_1$ . Auf sie wirkt eine Gezeitenkraft mit Betrag  $2Gmm_2R_1/d^3$ . Sie wirkt in Richtung der Masse  $m_2$ . Andererseits wird die Testmasse von  $m_1$  selbst angezogen. Der Betrag dieser Kraft ist  $Gmm_1/R_1^2$ . Wird der Planet bzw. Mond oder Asteroid  $m_1$  nur durch Gravitationskräfte zusammengehalten, so wird er zerfallen, wenn

$$\frac{2Gmm_2R_1}{d^3} > \frac{Gmm_1}{R_1^2} \implies d < d_R := \left(\frac{2m_2}{m_1}\right)^{1/3} R_1 \quad (3.186)$$

ist. Man beachte, dass die Roche-Grenze  $d_R$  keine Eigenschaft von  $m_2$  allein ist. Vielmehr spielen auch die Größe und Masse von  $m_1$  eine wichtige Rolle. Diese Abschätzung ist nicht gültig, wenn die Objekte im Inneren durch andere Kräfte als Gravitation zusammengehalten werden, z. B. Raumsonden (Atombindungen, also elektromagnetische Kräfte).

### Frage 30

Häufig wird die Roche-Grenze in Vielfachen der Ausdehnung der Masse  $m_2$  angegeben. Die beiden Objekte sollen die Radien  $R_1$  und  $R_2$  besitzen. Die konstanten Massendichten seien  $\rho_1$  und  $\rho_2$ . Die Massen sind dann  $m_1 = \frac{4}{3}\pi\rho_1R_1^3$  und  $m_2 = \frac{4}{3}\pi\rho_2R_2^3$ , wobei  $R_2$  der Radius von  $m_2$  ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Roche-Grenze in der Gestalt

$$\frac{d_R}{R_2} = \left(\frac{2\rho_2}{\rho_1}\right)^{1/3} \quad (3.187)$$

geschrieben werden kann. Rechnen Sie damit nach, dass für das Erde-Mond-System ( $\rho_{\text{Erde}}/\rho_{\text{Mond}} = \rho_2/\rho_1 \approx 5/3$ ) die Roche-Grenze in etwa 1,5 Erdradien entspricht.

## 3.7 Mechanische Ähnlichkeit und der Virialsatz

In Abschn. 3.2 wurden allgemeine Aussagen über die Bewegung in Zentralkraftpotenzialen getroffen. Dazu wurden die Bewegungsgleichungen und die Gestalt der effektiven Potenziale untersucht. Es ist aber auch möglich, wichtige und sehr allgemeine Aussagen über mechanische Systeme zu treffen, ohne überhaupt die Gestalt der Bahnkurven zu analysieren. Oftmals genügt es bereits, sich das Skalierungsverhalten des Potenzials anzusehen. Weiterhin wird der Virialsatz abgeleitet, der allgemeine Aussagen über das statistische Verhalten mechanischer Systeme erlaubt. Dieser Abschnitt kann beim ersten Lesen übersprungen werden, da er konzeptionell anspruchsvoller ist und häufig nicht im Rahmen einer Einführungsvorlesung behandelt wird.

## Mechanische Ähnlichkeit

Wir definieren: Eine Funktion  $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N)$  heißt *homogen* vom Grad  $k$ , wenn sie die Eigenschaft

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_N) \quad (3.188)$$

besitzt. Zum Beispiel betrachten wir ein vom Grad  $k$  homogenes Potenzial

$$V(ax) = a^k V(x). \quad (3.189)$$

Wir skalieren nun den Ortsvektor und die Zeit wie

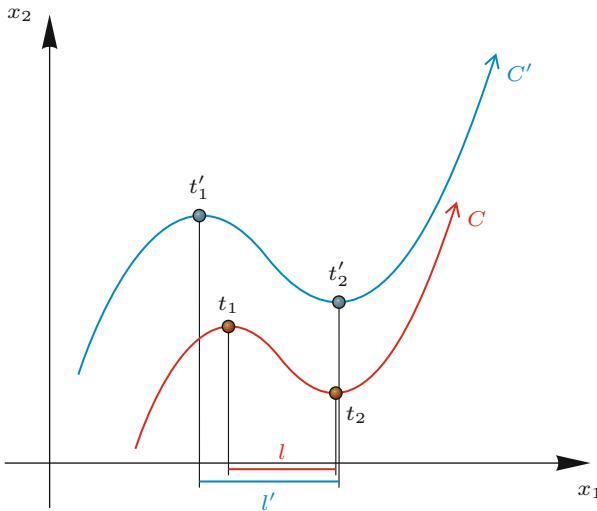
$$\mathbf{x} \rightarrow a\mathbf{x}, \quad t \rightarrow bt. \quad (3.190)$$

Somit folgt für die Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \rightarrow \frac{a}{b}\dot{\mathbf{x}}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \rightarrow \frac{a}{b^2}\ddot{\mathbf{x}}. \quad (3.191)$$

Der Gradient skaliert wie

$$\nabla = \frac{d}{d\mathbf{x}} \rightarrow \frac{1}{a}\nabla. \quad (3.192)$$



**Abb. 3.19** Skizze einer Ähnlichkeitstransformation von Bahnkurven. Die beiden Bahnkurven  $C$  und  $C'$  unterscheiden sich nur durch ihre Längenskalen ( $l$  für  $C$  und  $l'$  für  $C'$ ) und die damit verbundenen Zeitskalen ( $t = t_2 - t_1$  und  $t' = t'_2 - t'_1$ ). Das Verhältnis der Skalen wird durch (3.195) beschrieben, wenn das Potenzial homogen vom Grad  $k$  ist

Die Bewegungsgleichung einer Punktmasse im konservativen Kraftfeld wird somit zu

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x}) \rightarrow m \frac{a}{b^2} \ddot{\mathbf{x}} = -\frac{a^k}{a} \nabla V(\mathbf{x}). \quad (3.193)$$

Sie bleibt daher unverändert, wenn

$$\frac{a}{b^2} = a^{k-1} \implies b = a^{1-k/2} \quad (3.194)$$

gewählt wird.

Welche physikalische Aussage steckt hinter diesen Rechnungen? Wenn  $V(\mathbf{x})$  homogen vom Grad  $k$  in  $\mathbf{x}$  ist, dann lassen die Bewegungsgleichungen Ähnlichkeitstransformationen zu, welche die Form der Bewegungsgleichungen invariant lassen: Stellen wir uns eine beliebige Bahnkurve vor. Man betrachte nun eine andere Bahnkurve, die sich von der ersten nur durch eine Umskalierung der Abmessungen unterscheidet (Abb. 3.19).

Hier soll  $l'/l$  das Verhältnis der Bahnausdehnungen sein, wobei  $l$  die Ausdehnung der ersten und  $l'$  die Ausdehnung der zweiten Bahnkurve ist. Dann sind die Bewegungsgleichungen identisch, wenn man gleichzeitig die Zeitachse um einen Faktor  $b$  wie in (3.194) umskaliert. Die benötigte Zeit zwischen entsprechenden Bahnpunkten verhält sich dann wie

$$\frac{t'}{t} = \left( \frac{l'}{l} \right)^{1-k/2}. \quad (3.195)$$

Dies kann zum Beispiel die Zeit für einen vollen Umlauf sein, falls die Bahnkurve periodisch ist. Überlegungen dieser Art spielen in der Physik eine extrem wichtige Rolle. Da sie recht

### 3.7 Mechanische Ähnlichkeit und der Virialsatz

abstrakt sind, sollen sie kurz an einigen Beispielen verdeutlicht werden.

#### Einige Potenziale

- Der harmonische Oszillator hat das Potenzial  $V(r) \propto r^2$  mit  $k = 2$ . Daraus folgt sofort, dass  $t'/t = 1$  ist. Seine Schwingungsdauer ist daher unabhängig von der Amplitude.
- Im homogenen Gravitationsfeld sind  $V(x_3) \propto x_3$  und  $k = 1$ . Daher ist  $t'/t = (l'/l)^{1/2}$ . Die Quadrate der Fallzeiten verhalten sich wie die Anfangshöhen.
- Für das Kepler-Problem ist  $V(r) \propto r^{-1}$  mit  $k = -1$ . Es folgt daraus sofort das dritte Kepler'sche Gesetz,  $t'/t = (l'/l)^{3/2}$ .

#### Frage 31

Angenommen, es ist bekannt, dass für die periodische Bewegung in einem bestimmten Potenzial  $V(r) \propto r^k$  gerade  $t'/t = (l'/l)^{-1}$  gilt. Die Periodendauer würde sich dann für die doppelte Amplitude halbieren. Man zeige, dass das Potenzial  $V \propto r^4$  erfüllen muss. Die Form der Bahnkurve ist für diese Analyse unerheblich.

#### Der Virialsatz

Für eine beliebige homogene Funktion  $f(\mathbf{x})$  vom Grad  $k$  in  $\mathbf{x}$  gilt

$$\frac{df(a\mathbf{x})}{d(a\mathbf{x})} \cdot \mathbf{x} = \frac{\partial f(a\mathbf{x})}{\partial a} = \frac{\partial [a^k f(\mathbf{x})]}{\partial a} = k a^{k-1} f(\mathbf{x}). \quad (3.196)$$

Da diese Gleichung insbesondere für  $a = 1$  gültig ist, folgt das Euler-Theorem über homogene Funktionen:

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}). \quad (3.197)$$

#### Frage 32

Man überprüfe die Richtigkeit von (3.197) an dem einfachen eindimensionalen Beispiel  $f(x) = cx^k$ , wobei  $\mathbf{x}$  durch  $x$  und  $\nabla$  durch die Ableitung nach  $x$  ersetzt wird.

Betrachten wir nun ein System von Punktmassen  $m_i$  an den Orten  $\mathbf{x}_i$ . Die kinetische Energie  $T = \sum_i T_i$  ist homogen von Grad 2 in den Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}_i$ . Man kann sich schnell davon überzeugen, dass für ein System von Punktmassen

$$\sum_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} = 2T \quad (3.198)$$

gilt. Mit dem Impuls  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{x}}_i$  folgt weiterhin  $\partial T / \partial \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{p}_i$  und

$$2T = \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i) - \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{x}_i. \quad (3.199)$$

Im Folgenden wollen wir das über die Zeit gemittelte, statistische Verhalten der Bewegung genauer untersuchen. Dazu definieren wir zunächst

$$G := \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i. \quad (3.200)$$

Erfolgt die Bewegung stets im Endlichen, so ist  $G$  beschränkt,  $G_{\min} \leq G \leq G_{\max}$ . Damit ist leicht einzusehen, dass

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle_t &:= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{dG}{dt} dt \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{G(\Delta t) - G(0)}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (3.201)$$

wird, wobei  $\langle \dots \rangle_t$  den Zeitmittelwert einer Größe beschreibt. Bei Zeitmittelung verschwindet also der erste Term auf der rechten Seite von (3.199). Weiterhin wissen wir, dass  $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i$  die Kraft ist, die auf die Punktmasse  $m_i$  wirkt. Man nennt die Größe  $\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i \rangle_t$  das *Virial*. Wir haben somit den *Virialsatz* gefunden.

### Virialsatz

Ist die Bewegung eines Systems von Punktmassen endlich, dann gilt bei hinreichend langer Zeitmittelung der folgende Zusammenhang zwischen der mittleren kinetischen Energie und dem Virial:

$$\langle T \rangle_t = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i \right\rangle_t. \quad (3.202)$$

**Achtung** Für periodische Bewegungen reicht es aus, über eine Periode  $T$  zu mitteln, da  $G(T) = G(0)$  gilt. Für nichtpe-

riodische Bewegungen ist es in der Regel nicht möglich, den Zeitmittelwert über einen unendlichen Zeitraum zu betrachten. Allerdings wird der Zeitmittelwert des zweiten Terms in (3.199) beliebig klein, wenn man  $\Delta t$  nur groß genug wählt. ▶

Betrachten wir nun eine einzelne Punktmasse in einem externen Potenzial  $V(\mathbf{x})$ , das homogen vom Grad  $k$  in  $\mathbf{x}$  sein soll. Wegen  $\mathbf{F} = -\nabla V$  und (3.197) kann man den *Virialsatz* in der Form

$$\langle T \rangle_t = \frac{k}{2} \langle V(\mathbf{x}) \rangle_t, \quad (3.203)$$

schreiben.

### Virialsatz für Oszillator und Kepler-Problem

Für den harmonischen Oszillator und das gebundene Kepler-Problem sind die Bahnkurven periodisch. Im ersten Fall ist  $k = 2$  und damit  $\langle T \rangle_t = \langle V \rangle_t$ . Die mittlere kinetische und potenzielle Energie des harmonischen Oszillators sind gleich. Dieses Ergebnis spielt in der Quantenmechanik und der Thermodynamik eine sehr wichtige Rolle. Im zweiten Beispiel ist  $k = -1$  und  $\langle T \rangle_t = -\langle V \rangle_t/2$ , was vor allem in der Astrophysik eine große Bedeutung hat. ◀

### Frage 33

Man zeige, dass der Virialsatz in (3.203) die Form

$$\langle T \rangle_t = \frac{k}{k+2} \langle E \rangle_t \quad (3.204)$$

annimmt, wobei  $E = T + V$  die Gesamtenergie ist.

## Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- leichte Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
- mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
- anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständen auch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

**3.1 • Energieerhaltung** Man zeige, dass die Energie des Zweikörpersystems erhalten ist, selbst wenn man annimmt, dass die Punktmasse  $m_2$  stets ruht:  $\dot{x}_2 = 0$ . Das Wechselwirkungspotenzial  $V = V(r) = V(|x_1 - x_2|)$  hängt dann nur von der Position  $x_1$  ab, da  $x_2$  fest ist. Man beginne mit der Auswertung von  $dV/dt$  und zeige, dass die Summe von potenzieller und kinetischer Energie konstant ist.

### 3.2 ••• Radialgleichung

(a) Überprüfen Sie, dass (3.60),

$$\mu \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{dV}{dr}, \quad (3.205)$$

auf (3.53) führt:

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{const.} \quad (3.206)$$

(b) Leiten Sie (3.61),

$$\frac{L^2 u^2}{\mu} \left( \frac{du}{d\varphi^2} + u \right) = -F(1/u), \quad (3.207)$$

her, wobei  $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$  ist.

(c) Verwenden Sie (3.207) für die weitere Rechnung. Die Bahnkurve des reduzierten Zweikörperproblems sei

$$r(\varphi) = a \cos(3\varphi) \quad (3.208)$$

mit einer Konstanten  $a > 0$ . Zeigen Sie, dass die entsprechende Zentralkraft die Form

$$F(r) = \frac{2L^2}{\mu} \left( \frac{4}{r^3} - \frac{9a^2}{r^5} \right) \quad (3.209)$$

haben muss. In welchem Winkelbereich kann die Bewegung nur stattfinden?

### 3.3 ••• Periheldrehung

(a) Man zeige, dass die durch eine Störung verursachte Periheldrehung  $\delta\varphi$  durch (3.98) gegeben ist. Beginnen Sie mit (3.63) und schreiben Sie die rechte Seite dieser Gleichung zunächst als Ableitung nach dem Betrag des Drehimpulses  $L$ , wodurch die Wurzel aus dem Nenner in den Zähler

geschoben wird. Entwickeln Sie dann das Potenzial in der Form  $V(r) = V_0(r) + \delta V(r)$  und nehmen Sie dabei an, dass  $\delta V$  klein gegenüber allen vorherrschenden Energien ist. Im letzten Schritt wird die Integrationsvariable  $r$  mithilfe der Bahnkurve  $\varphi(r)$  in  $\varphi$  überführt.

(b) Berechnen Sie die Periheldrehung  $\delta\varphi$  für das Störpotenzial  $\delta V(r) = \beta/r^2$ .

**3.4 •• Laplace-Runge-Lenz-Vektor** Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Laplace-Runge-Lenz-Vektors (Abschn. 3.3)

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\alpha} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.210)$$

im Gravitationspotenzial  $V(r) = -\alpha/r$ :

- (a) Es gilt  $\dot{\mathbf{Q}} = 0$ .
- (b) Der Vektor  $\mathbf{Q}$  liegt in der Bahnebene und zeigt vom Ursprung zum Perihel bzw. Perigäum. Der Betrag ist  $|\mathbf{Q}| = \varepsilon$ . Berechnen Sie dazu  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q} = r\mathbf{Q} \cos \varphi$ .

**3.5 •• Exzentrische Anomalie** Gl. (3.56) ist die formale Lösung der Radialgleichung  $t(r)$ . Sie gibt diejenige Zeit an, zu der sich die beiden Punktmassen im Abstand  $r$  voneinander befinden. Für das Kepler-Problem erhält man mit  $t(r = r_0) = 0$

$$t(r) = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2\alpha}} \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{r' - \frac{r'^2}{2a} - \frac{a(1-\varepsilon^2)}{2}}}. \quad (3.211)$$

Das positive Vorzeichen ist zu verwenden, wenn sich die beiden Massen voneinander entfernen ( $dr' > 0$ ), das negative, wenn sie sich annähern ( $dr' < 0$ ). Obwohl sich dieses Integral elementar aufzuführen lässt, kann die Lösung nicht in eine geschlossene Form  $r(t)$  gebracht werden. Dies bedeutet, dass der Abstand  $r$  zu einer gegebenen Zeit  $t$  nicht unmittelbar angegeben werden kann. Ebenso kann  $\varphi(t)$  nicht explizit aufgeschrieben werden.

Mithilfe der *exzentrischen Anomalie*  $\psi$ , die über

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \psi) \quad (3.212)$$

definiert ist, wird das oben genannte Problem teilweise gelöst.

- (a) Zeigen Sie, dass der Polarwinkel  $\varphi$  und die exzentrische Anomalie  $\psi$  die folgende Relation erfüllen:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \psi}. \quad (3.213)$$

Setzen Sie dazu in (3.80)  $\varphi_p = 0$ , was einer speziellen Wahl der Anfangsbedingungen entspricht.

- (b) Zeigen Sie, dass der Bruch auf der rechten Seite von (3.213) für  $\varepsilon < 1$  (Ellipsenbahnen) nur Werte zwischen  $-1$  und  $+1$  annehmen kann. Demnach sind alle Werte  $0 \leq \psi \leq 2\pi$  erlaubt. Zeigen Sie weiterhin, dass  $\varphi = \psi$  für  $\psi = 0$  und  $\psi = \pi$  gilt. Aufgrund der Stetigkeit und des Zwischenwertsatzes folgt dann, dass  $\psi$  alle Werte zwischen  $0$  und  $2\pi$  annehmen kann.  
(c) Zeigen Sie ausgehend von (3.211) und (3.212) den Zusammenhang

$$t(\psi) = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} \int_0^\psi (1 - \varepsilon \cos \psi') d\psi'. \quad (3.214)$$

- (d) Leiten Sie die *Kepler'sche Gleichung*

$$\omega t = \psi - \varepsilon \sin \psi \quad (3.215)$$

ab. Dabei ist  $\omega$  die *mittlere* Winkelgeschwindigkeit,  $\omega = 2\pi/T$ . Diese Gleichung erlaubt für gegebene Zeit  $t$  eine verhältnismäßig leichte numerische Berechnung von  $\psi$ , was mithilfe von (3.212) auf den gesuchten Radius  $r$  zur Zeit  $t$  führt.

### 3.6 •• Streuung

Gegeben sei ein Potenzial  $V(r) = -\beta/r^2$ .

- (a) Berechnen Sie mithilfe von (3.61) die Bahnkurve und zeigen Sie, dass sie in der Form

$$r(\varphi) = \frac{p}{\cos(\gamma\varphi)} \quad (3.216)$$

geschrieben werden kann. Wie lautet der Ausdruck für  $\gamma$ ? Welche Einschränkungen für das Potenzial ergeben sich daraus? Zeigen Sie, dass keine gebundenen Bahnen möglich sind und bestimmen Sie den Streuwinkel im Schwerpunktsystem.

- (b) Berechnen Sie den Zusammenhang  $b^2(\vartheta')$  und schließlich den differenziellen Wirkungsquerschnitt. Beachten Sie dazu, für welche Winkel  $r$  divergiert.

Abb. 3.20 zeigt einige Bahnkurven für verschiedene Parameter  $\gamma$ .

**3.7 ••• Streuung unter kleinen Winkeln** Es soll der Streuwinkel  $\vartheta_1$  für die Streuung einer Punktmasse  $m_1$  unter kleinen Winkeln berechnet werden. In diesem Grenzfall wird angenommen, dass  $\vartheta_1$  sehr klein ist, z. B. weil der Stoßparameter einen großen Wert annimmt. Dabei kann man die Rückwirkung von  $m_1$  auf  $m_2 \rightarrow \infty$  vernachlässigen: Laborsystem und Schwerpunktsystem sind annähernd äquivalent. Die Punktmasse  $m_1$  falle parallel zur  $x$ -Achse ein. Nach der Streuung ist der Betrag der Geschwindigkeit  $v_f = v_\infty$  und die Geschwindigkeit entlang der  $y$ -Achse

$$v_{f,y} = v_f \sin \vartheta_1 = v_\infty \sin \vartheta_1 \approx v_\infty \vartheta_1. \quad (3.217)$$

- (a) Berechnen Sie den Streuwinkel  $\vartheta_1$  in Abhängigkeit vom Stoßparameter, indem Sie von

$$m_1 v_{f,y} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt \quad (3.218)$$

ausgehen, wobei  $F_y = -\partial V/\partial y$  diejenige Kraftkomponente entlang der  $y$ -Achse ist, die  $m_1$  durch  $m_2$  erfährt. Das Potenzial sei von der Form  $V(r)$ . Das Integral in (3.218) soll entlang des ungestörten (also geradlinigen) Weges ausgewertet werden, da  $F_y$  und somit  $\vartheta_1$  klein sind. Das Ergebnis lautet

$$\vartheta_1 = -\frac{2b}{m_1 v_\infty^2} \int_b^\infty \frac{dV}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}. \quad (3.219)$$

- (b) Zeigen Sie, dass – laut des Ergebnisses aus Teilaufgabe (a) – ein Lichtstrahl im Gravitationsfeld um den Winkel

$$\vartheta_1 = \frac{2Gm_2}{c^2 b} \quad (3.220)$$

abgelenkt wird, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie wird gezeigt, dass die tatsächliche Lichtablenkung doppelt so groß ist wie diese nichtrelativistische Abschätzung vorhersagt.

# Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

## 3.1 Die Zeitableitung der potenziellen Energie ist

$$\frac{dV}{dt} = \nabla_1 V \cdot \dot{x}_1 + \nabla_2 V \cdot \dot{x}_2 = \nabla_1 V \cdot \dot{x}_1, \quad (3.221)$$

da die Punktmasse  $m_2$  ortsfest ist. Wegen

$$\nabla_1 V = -F_1 = -m_1 \ddot{x}_1 \quad (3.222)$$

gilt

$$0 = \frac{dV}{dt} + m_1 \ddot{x}_1 \cdot \dot{x}_1 = \frac{dV}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 \right) = \frac{d}{dt} (V + T). \quad (3.223)$$

Hier wurde die kinetische Energie  $T = m_1 \dot{x}_1^2 / 2$  eingeführt. Die Punktmasse  $m_2$  trägt nicht dazu bei, da ihre Geschwindigkeit null ist. Wegen  $E = T + V$  ist die Energie offensichtlich erhalten.

## 3.2

(a) Das Vorgehen ist zunächst identisch zu dem, das bereits aus (1.136) bekannt ist. Man multipliziert (3.205) mit  $\dot{r}$  und sortiert die Differenziale um:

$$\begin{aligned} \mu \ddot{r} \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu} \frac{\dot{r}}{r^3} &= -\frac{dV}{dr} \dot{r} \\ \implies \frac{d}{dt} \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{d}{dt} \frac{L^2}{2\mu r^2} &= -\frac{dV}{dt}. \end{aligned} \quad (3.224)$$

Integriert man nach der Zeit, findet man, dass

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (3.225)$$

eine Konstante ist, die man als Energie identifiziert.

(b) Führt man  $u = 1/r$  ein, gilt

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2} = -u^2. \quad (3.226)$$

Wegen (3.50) kann die Zeitableitung durch eine Winkelableitung ersetzt werden:

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\varphi} = \frac{Lu^2}{\mu} \frac{d}{d\varphi}. \quad (3.227)$$

Es ist die zweite Zeitableitung von  $r$  zu berechnen:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{Lu^2}{\mu} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{Lu^2}{\mu} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{u} \right) = -\frac{L^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\varphi^2}. \quad (3.228)$$

Im letzten Schritt wurde  $d(1/u) = -du/u^2$  verwendet. Setzt man dieses Zwischenergebnis und  $dV/dr = -F(r) = -F(1/u)$  in (3.205) ein, folgt (3.207).

(c) Für die weitere Rechnung schreibt man zuerst

$$u(\varphi) = \frac{1}{a \cos(3\varphi)} \quad (3.229)$$

und berechnet die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{du(\varphi)}{d\varphi} &= \frac{3}{a} \frac{\sin(3\varphi)}{\cos^2(3\varphi)}, \\ \frac{d^2 u(\varphi)}{d\varphi^2} &= \frac{3}{a} \left( 3 \frac{\cos(3\varphi)}{\cos^2(3\varphi)} + 6 \frac{\sin^2(3\varphi)}{\cos^3(3\varphi)} \right) \\ &= \frac{3}{a} \left( 6 \frac{\cos^2(3\varphi) + \sin^2(3\varphi)}{\cos^3(3\varphi)} - \frac{3}{\cos(3\varphi)} \right) \\ &= \frac{3}{a} (6a^3 u^3 - 3au). \end{aligned} \quad (3.230)$$

Eingesetzt in (3.61) ergibt sich

$$\begin{aligned} F(1/u) &= -\frac{L^2 u^2}{\mu} \left( \frac{3}{a} (6a^3 u^3 - 3au) + u \right) \\ &= -\frac{L^2}{\mu} (18a^2 u^5 - 8u^3) \\ &= \frac{2L^2}{\mu} (4u^3 - 9a^2 u^5). \end{aligned} \quad (3.231)$$

Dies führt auf das gesuchte Endergebnis. Da der Radius immer positiv sein muss, folgt aus der Definition des Kosinus  $-\pi/2 < 3\varphi < \pi/2$  bzw.  $|\varphi| < \pi/6$ . Der Fall  $r = 0$  würde einer unphysikalischen Singularität mit unendlicher Geschwindigkeit entsprechen, da  $V(0) = -\infty$  ist.

## 3.3

(a) Gl. (3.63) kann direkt als Ableitung nach dem Betrag des Drehimpulses geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 2L \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V(r)) - L^2/r^2}} \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \sqrt{2\mu(E - V(r)) - L^2/r^2}. \end{aligned} \quad (3.232)$$

Mit dem Ansatz  $V(r) = V_0(r) + \delta V(r)$  folgt zunächst

$$\begin{aligned} &\sqrt{2\mu(E - V) - \frac{L^2}{r^2}} \\ &= \sqrt{\left( 2\mu(E - V_0) - \frac{L^2}{r^2} \right) \left( 1 - \frac{\delta V}{(E - V_0) - \frac{L^2}{2\mu r^2}} \right)}. \end{aligned} \quad (3.233)$$

Die  $r$ -Abhängigkeiten werden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht explizit angegeben. Der Bruch mit  $\delta V$  ist klein gegenüber 1, da  $\delta V$  eine hinreichend kleine Störung sein soll. Die Näherung  $\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} \approx 1 - x/2$  führt dann auf

$$\sqrt{\left(2\mu(E-V_0) - \frac{L^2}{r^2}\right)} \left(1 - \frac{\delta V}{2(E-V_0) - \frac{L^2}{\mu r^2}}\right). \quad (3.234)$$

Wir wissen, dass die Periheldrehung  $\delta\varphi$  für  $\delta V = 0$  verschwindet, da dies dem ungestörten Fall entspricht. Eine Abweichung davon kann also nur vom Bruch mit  $\delta V$  erzeugt werden:

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= 2 \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \delta V \frac{\sqrt{\left(2\mu(E-V_0) - \frac{L^2}{r^2}\right)}}{2(E-V_0) - \frac{L^2}{\mu r^2}} \\ &= 2\mu \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr \delta V}{\sqrt{2\mu(E-V_0) - \frac{L^2}{r^2}}} \\ &= 2\mu \frac{\partial}{\partial L} \int_0^\pi \frac{d\varphi r^2 \delta V}{L}. \end{aligned} \quad (3.235)$$

Im letzten Schritt wurde (3.58) verwendet, um die  $r$ -Integration in eine  $\varphi$ -Integration umzuwandeln. Dabei ist auf die Integrationsgrenzen zu achten: Bei der größten Annäherung ist  $\varphi = 0$ , beim größten Abstand  $\varphi = \pi$ . Außerdem wurde das volle Potenzial  $V$  durch den führenden Term  $V_0$  ersetzt, da der Integrand bereits von der Ordnung  $\delta V$  ist. Es folgt also das Endergebnis mit explizit ausgeschriebener funktionaler Abhängigkeit:

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{2\mu}{L} \int_0^\pi r^2(\varphi) \delta V(r[\varphi]) d\varphi \right). \quad (3.236)$$

Es ist so zu interpretieren, dass das Störpotenzial in der Form  $\delta V(r)$  vorgegeben wird, ebenso die Bahnkurve  $r(\varphi)$ , die sich aus dem ungestörten Potenzial  $V_0(r)$  ergeben würde. Der Integrand ist dann eine reine Funktion von  $\varphi$ , die prinzipiell auf integriert werden kann. Hängt das Ergebnis noch von  $L$  ab, muss dies bei der Ableitung nach  $L$  berücksichtigt werden.

- (b) Am einfachsten ist die Berechnung für das Störpotenzial  $\delta V = \beta/r^2$ . In diesem Fall ist die Integration trivial, und das Ergebnis lautet

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{2\mu}{L} \int_0^\pi \beta d\varphi \right) = \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{2\pi\beta\mu}{L} \right) = -\frac{2\pi\beta\mu}{L^2}. \quad (3.237)$$

### 3.4

- (a) Die Zeitableitung lautet

$$\dot{Q} = \frac{1}{\alpha} (\ddot{r} \times \mathbf{L} + \dot{r} \times \dot{\mathbf{L}}) - \frac{\dot{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} \dot{r}. \quad (3.238)$$

Wegen  $m\ddot{r} = -\alpha r/r^3$  im Gravitationspotenzial und der dortigen Drehimpulserhaltung gilt

$$\dot{Q} = -\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{L}}{mr^3} - \frac{\dot{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} \dot{r} = -\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{r^3} - \frac{\dot{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} \dot{r}. \quad (3.239)$$

Das doppelte Kreuzprodukt kann wie gewohnt umgeschrieben werden und ergibt

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}^2. \quad (3.240)$$

Weiterhin gilt

$$\frac{\mathbf{r}}{r^2} \dot{r} = \frac{\mathbf{r}}{2r^3} \frac{d\mathbf{r}^2}{dt} = \frac{\mathbf{r}}{2r^3} \frac{d\mathbf{r}^2}{dt} = \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^3}. \quad (3.241)$$

Setzt man alle Zwischenergebnisse in (3.238) ein, ergibt sich  $\dot{Q} = 0$ .

- (b) Der Vektor  $\mathbf{Q}$  liegt in der Bahnebene, da

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{L} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) - \frac{1}{r} \mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (3.242)$$

gilt. Hierbei sei an  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  erinnert. Wir fahren fort mit der Berechnung von

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q} = \frac{\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L})}{\alpha} - r. \quad (3.243)$$

Das Spatprodukt kann durch zyklische Permutation umgeformt werden:

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{L^2}{\mu}. \quad (3.244)$$

Somit hat man

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q} = \frac{L^2}{\alpha\mu} - r = rQ \cos\varphi. \quad (3.245)$$

Eine einfache Umformung führt auf

$$r = \frac{L^2/(\alpha\mu)}{1 + Q \cos\varphi} = \frac{p}{1 + Q \cos\varphi}. \quad (3.246)$$

Dies entspricht offenbar der Bahnkurve, wenn man  $Q = \varepsilon$  identifiziert und  $\mathbf{Q}$  in Richtung des Perihels zeigt. Denn nur dann ist  $\varphi_p = 0$  in (3.80).

### 3.5

(a) Wir schreiben (3.212) mit  $p = a(1 - \varepsilon^2)$  zunächst als

$$r = \frac{p(1 - \varepsilon \cos \psi)}{1 - \varepsilon^2} \quad (3.247)$$

und vergleichen dies mit (3.80):

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (3.248)$$

Eliminierung von  $r$  durch Gleichsetzen und Auflösen nach  $\cos \varphi$  führt auf das gesuchte Ergebnis (3.213).

(b) Wir zeigen, dass der Zahlenwert des Bruches auf der rechten Seite von (3.213) für alle  $\psi$  im Intervall  $[-1, +1]$  liegt. Aus der zu überprüfenden Ungleichung

$$1 \geq \frac{\cos \psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \psi} \quad (3.249)$$

folgt wegen  $1 - \varepsilon \cos \psi > 0$  nach kurzer Umformung

$$\cos \psi \leq 1. \quad (3.250)$$

Ausgehend von

$$-1 \leq \frac{\cos \psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \psi} \quad (3.251)$$

folgt analog

$$\cos \psi \geq -1. \quad (3.252)$$

Dies bedeutet, dass der Bruch in der Tat durch  $-1$  und  $+1$  beschränkt ist, egal welchen Wert  $\psi$  annimmt. Somit sind alle Werte zwischen  $0$  und  $2\pi$  für  $\psi$  erlaubt. Für  $\psi = 0$  folgt  $\cos \varphi = 1$ , also  $\varphi = 0$ . Weiterhin führt  $\psi = \pi$  auf  $\cos \varphi = -1$  bzw.  $\varphi = \pi$ . Tatsächlich laufen  $\varphi$  und  $\psi$  bei einem vollen Umlauf beide von  $0$  bis  $2\pi$ .

(c) In das Integral (3.211) wird (3.212) eingesetzt; dabei ist

$$dr' = ae \sin \psi' d\psi' \quad (3.253)$$

zu berücksichtigen. Es folgt zunächst

$$t = \pm \sqrt{\frac{\mu a^3}{2\alpha}} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{(1 - \varepsilon \cos \psi') \varepsilon \sin \psi' d\psi'}{\sqrt{(1 - \varepsilon \cos \psi') - \frac{(1 - \varepsilon \cos \psi')^2}{2} - \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{2}}}. \quad (3.254)$$

Der Nenner im Integral lässt sich vereinfachen zu

$$\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon^2(1 - \cos^2 \psi')} = \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon} |\sin \psi'|. \quad (3.255)$$

Der Sinus kann gekürzt werden. Da die Vorzeichen von  $dr'$  und  $\sin \psi'/|\sin \psi'|$  stets gleich sind, fällt dabei auch das  $\pm$  fort. Das Ergebnis lautet dann

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} \int_0^{\psi} (1 - \varepsilon \cos \psi') d\psi'. \quad (3.256)$$

Es wurde dabei noch  $t(\psi = 0) = 0$  verwendet.

(d) Die Kepler'sche Gleichung (3.215) folgt sofort durch Integration:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}} t = \psi - \varepsilon \sin \psi. \quad (3.257)$$

Hier muss nur noch das dritte Kepler'sche Gesetz (3.92)

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\mu a^3} \quad (3.258)$$

verwendet werden.

### 3.6

(a) Die Kraft, die sich aus dem Potenzial ergibt, ist

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} = -\frac{\beta}{r^3} \implies F(1/u) = -\beta u^3. \quad (3.259)$$

Gl. (3.61) kann dann durch einfache Umformung als

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\left(1 - \frac{\mu\beta}{L^2}\right)u \quad (3.260)$$

geschrieben werden. Wir definieren

$$\gamma^2 := 1 - \frac{\mu\beta}{L^2} \quad (3.261)$$

und sehen, dass die resultierende Differenzialgleichung auf eine Sinusfunktion führt:

$$u(\varphi) = A \sin(\gamma(\varphi - \varphi_0)). \quad (3.262)$$

Die beiden Integrationskonstanten sind die Amplitude  $A$  und ein Phasenwinkel  $\varphi_0$ . Offensichtlich ist  $\gamma$  nur dann reell, wenn  $\gamma^2 \geq 0$  ist. Daher muss  $\beta \leq L^2/\mu$  gelten. Der Koeffizient  $\beta$  kann auch einen beliebigen negativen Wert annehmen. Dann ist das Potenzial  $V(r)$  wie das Zentrifugalpotenzial abstoßend. Selbstverständlich kann auch  $\beta > L^2/\mu$  erfüllt sein, allerdings kann die Bahngleichung dann nicht mehr als eine Sinusfunktion geschrieben werden. Stattdessen handelt es sich um eine Exponentialfunktion:

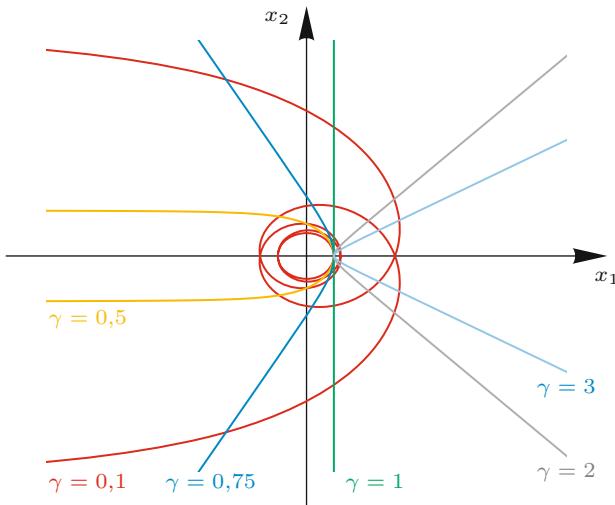
$$u(\varphi) = A \exp(\pm\gamma'(\varphi - \varphi_0)), \quad \gamma'^2 := \frac{\mu\beta}{L^2} - 1. \quad (3.263)$$

Diesen zweiten Fall wollen wir nicht weiter betrachten. Wegen  $\sin x = \cos(x - \pi/2)$  kann  $\varphi_0$  so gewählt werden, dass schließlich

$$r(\varphi) = \frac{p}{\cos(\gamma\varphi)} \quad (3.264)$$

gilt, wobei  $p = 1/A$  substituiert wurde.

Eine gebundene Bewegung ist nur dann möglich, wenn der Radius  $r$  nicht divergiert. Die Bahnkurve divergiert jedoch für alle Werte  $p \neq 0$  und  $\gamma \neq 0$ . Der Fall  $\gamma = 0$  entspricht  $r = p$ , und das Zentrifugalpotenzial und  $V(r)$  heben sich an jedem Punkt genau auf. Dies führt auf eine Kreisbahn, die jedoch nicht stabil ist, da das effektive Potenzial dort kein Minimum aufweist. Für  $p = 0$  folgt  $r = 0$ , was aus physikalischen Gründen ausgeschlossen werden soll. Somit ist keine gebundene Bewegung möglich.



**Abb. 3.20** Verschiedene Bahnkurven im  $1/r^2$ -Potenzial. Die Kurven entsprechen verschiedenen Werten für den Parameter  $\gamma$  aus (3.261). Die Punkte größter Annäherung liegen auf der  $x_1$ -Achse und haben den Abstand  $p$  zum Ursprung. In dieser Abbildung sind alle Bahnpараметer  $p$  identisch. Man erkennt, dass sich die Massen mehrfach umlaufen können (rot) oder gar keine Streuung auftreten kann (grün). Für  $\gamma < 1$  ist die Wechselwirkung attraktiv, jedoch lässt sich keine stabile gebundene Bahn finden

(b) Der Streuwinkel ergibt sich aus der Bedingung, dass der Radius für  $\gamma\varphi = \pm\pi/2$  divergiert. Es folgt  $\Delta\varphi = \pi/\gamma$ . Der Streuwinkel ist  $\vartheta' = \pi - \Delta\varphi = \pi(1 - 1/\gamma)$ . Interessanterweise kann der Streuwinkel für  $\gamma < 1$  (was  $\beta > 0$  und einem anziehenden Potenzial  $V(r)$  entspricht) beliebig negativ werden. In diesem Fall hat die Bahnkurve die Eigenschaft, dass sich  $m_1$  und  $m_2$  während der Bewegung mehrfach gegenseitig umlaufen, bevor sie sich wieder voneinander trennen (Abb. 3.20). Ersetzt man  $\gamma$  durch die Definition in (3.261),  $L$  durch den Stoßparameter  $b = L/(\mu v_\infty)$  und verwendet man die Energie  $E = \mu v_\infty^2/2$ , führt dies zunächst auf

$$\frac{\vartheta'}{\pi} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta}{2b^2 E}}}. \quad (3.265)$$

Diese Gleichung kann nach  $b^2$  aufgelöst werden:

$$b^2 = \frac{\beta/(2E)}{1 - \frac{1}{(1-\vartheta'/\pi)^2}}. \quad (3.266)$$

Den Wirkungsquerschnitt (3.131) erhält man durch Differenziation:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2 \sin \vartheta'} \left| \frac{db^2}{d\vartheta'} \right| \\ &= \frac{\beta}{2\pi E \sin(\pi\theta)} \frac{1}{\left(1 - \theta\right)^3 \left(1 - \frac{1}{(1-\theta)^2}\right)^2} \\ &= \frac{\beta}{2\pi E \sin(\pi\theta)} \frac{|1 - \theta|}{\theta^2 (\theta - 2)^2} \end{aligned} \quad (3.267)$$

mit  $\theta := \vartheta'/\pi$ .

### 3.7

(a) Die streuende Masse  $m_2$  befindet sich im Ursprung, und die Bewegung von  $m_1$  finde in der  $x$ - $y$ -Ebene statt. Der Stoßparameter ist  $b$ . Gl. (3.218) kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} m_1 v_{f,y} &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial V}{\partial y} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} dt. \end{aligned} \quad (3.268)$$

Wegen  $z = 0$  ist  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , und es gilt  $\partial r / \partial y = y/r$ . Weiterhin kann  $dt$  durch  $dx/v_\infty$  ersetzt werden, da die Geschwindigkeit von  $m_1$  entlang der  $x$ -Achse in erster Näherung konstant und daher stets  $v_\infty$  ist. Außerdem kann man  $y = b = \text{const}$  annehmen, da  $\vartheta_1$  klein ist. Man findet somit

$$m_1 v_{f,y} = -\frac{2b}{v_\infty} \int_0^\infty \frac{dV}{dr} \frac{dx}{r}. \quad (3.269)$$

Hier wurde ausgenutzt, dass die Beiträge der Intervalle  $(-\infty, 0]$  und  $[0, +\infty)$  identisch sind. Die  $x$ -Integration kann durch eine  $r$ -Integration ersetzt werden: Da  $r^2 = x^2 + b^2$  ist, gilt  $r dr = x dx$  und schließlich

$$\vartheta_1 = -\frac{2b}{m_1 v_\infty^2} \int_b^\infty \frac{dV}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}, \quad (3.270)$$

was die gesuchte (3.219) ist. Man beachte die untere Grenze der Integration, die nun  $b$  anstatt 0 ist.

(b) Das Gravitationspotenzial lautet

$$V(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r}. \quad (3.271)$$

Nimmt man an, dass ein Lichtstrahl aus einem Strom von Teilchen der Geschwindigkeit  $v_\infty = c$  besteht, lautet der Streuwinkel im Laborsystem

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{2Gm_2 b}{c^2} \int_b^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{r^2 - b^2}} \\ &= \frac{2Gm_2 b}{c^2} \left. \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{b^2 r} \right|_b^\infty = \frac{2Gm_2}{c^2 b}. \end{aligned} \quad (3.272)$$

Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie wird konsistent gezeigt, dass ein Lichtstrahl tatsächlich durch ein Gravitationsfeld abgelenkt wird. Allerdings ist die Lichtablenkung doppelt so groß, wie das Ergebnis in (3.272) voraussagt.

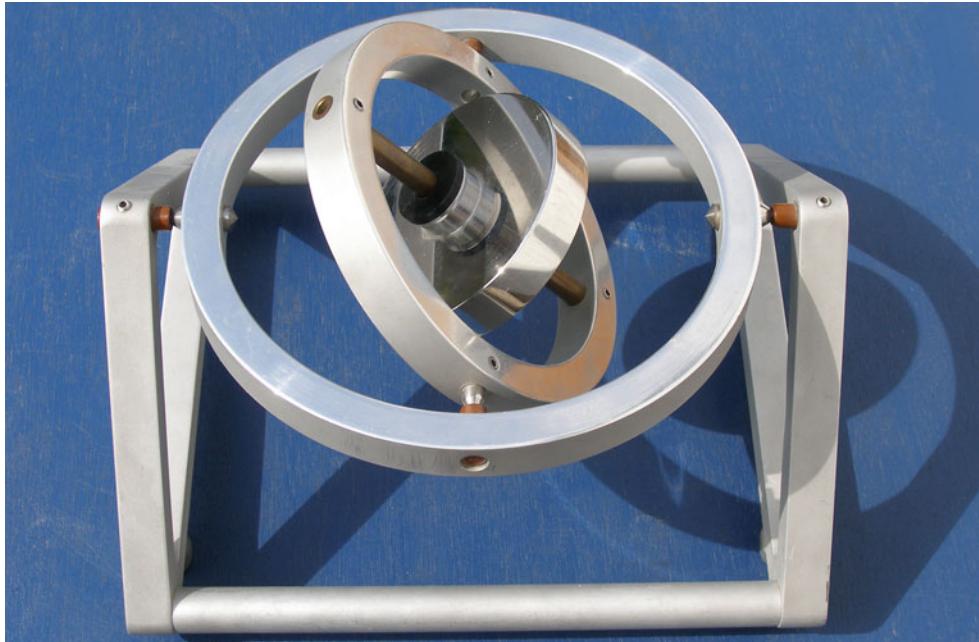
# Literatur

## Weiterführende Literatur

Cornish, N.J.: The Lagrangian Points (1998), <http://map.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf>.  
Zugegriffen: 5. September 2013

# Starre Körper

# 4



Was ist ein starrer Körper?

Was ist der  
Trägheitstensor?

Warum kann man den  
Trägheitstensor  
diagonalisieren?

Wie berechnet man  
Volumenintegrale?

Wie lauten die  
Bewegungsgleichungen  
eines starren Körpers?

Wie stark kann ein Kreisel  
torkeln?

## Kapitel 4

4.1	Freiheitsgrade des starren Körpers . . . . .	128
4.2	Kinetische Energie und Drehimpuls . . . . .	131
4.3	Tensoren . . . . .	133
4.4	Trägheitstensor und Trägheitsmomente . . . . .	137
4.5	Kontinuierliche Massenverteilungen . . . . .	143
4.6	Bewegungsgleichungen des starren Körpers . . . . .	147
4.7	Rotation des Kreisels . . . . .	149
	Aufgaben . . . . .	156
	Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	159
	Literatur . . . . .	164

Starre Körper sind ausgedehnte Objekte ohne innere Freiheitsgrade, die für viele Bereiche der Physik ein wichtiges Modell darstellen. Die in Kap. 2 diskutierten orthogonalen Transformationen führten auf mathematische Gleichungen für die Änderungsgeschwindigkeit eines Vektors in rotierenden Bezugssystemen. Die dort erlernten Methoden werden hier verwendet, um die Dynamik starrer Körper zu beschreiben.

Wir werden sehen, dass die Bewegungsgleichungen starrer Körper zwar eine formale Ähnlichkeit mit dem zweiten Newton'schen Gesetz für Punktmassen aufweisen. Doch sind diese sogenannten Euler-Gleichungen aufgrund des darin auftauchenden Trägheitstensors anspruchsvoller und erlauben eine Vielzahl von Lösungen (z. B. für den symmetrischen oder schweren Kreisel), die teilweise der Intuition zu widersprechen scheinen.

Im Laufe des Kapitels werden Volumenintegrale, Tensoren und die Diagonalisierung von Matrizen diskutiert, die allesamt extrem hilfreiche mathematische Werkzeuge für die gesamte Physik darstellen. Das Gebiet der Kreisel ist sehr weitläufig und kann im Rahmen dieses Lehrbuches nur einführend besprochen werden. So verzichten wir beispielsweise auf eine Diskussion der Dynamik nichtsymmetrischer Kreisel.

## 4.1 Freiheitsgrade des starren Körpers

Nach der Definition des starren Körpers werden seine Freiheitsgrade und Koordinaten diskutiert. Es wird gezeigt, dass man genau sechs Koordinaten benötigt, um Lage und Orientierung eines freien starren Körpers eindeutig festzulegen. Dies können beispielsweise seine drei Schwerpunktskoordinaten und drei Drehwinkel sein. Anschließend werden die meistverwendeten Euler'schen Winkel eingeführt.

### Definition und Gültigkeitsbereich eines starren Körpers

Ein *starrer Körper* ist ein Objekt, das aus  $N$  Punktmassen  $m_a$  besteht, die alle einen zeitlich konstanten Abstand zueinander besitzen,  $r_{ab} = |\mathbf{x}_a(t) - \mathbf{x}_b(t)| = \text{const}$  ( $a, b = 1, \dots, N$ ). Es handelt sich dabei um einen Spezialfall der  $N$ -Teilchen-Systeme in Abschn. 3.1. Insbesondere sind Gesamtmasse  $M$  und Schwerpunkt  $X$  durch (3.3) und (3.4) gegeben.

Beim starren Körper sind die Wechselwirkungspotenziale so, dass die Abstände  $r_{ab}$  allesamt konstant gehalten werden. Die genaue Form dieser Potenziale wird für die Diskussion des starren Körpers allerdings nicht benötigt, da sie nicht an der Dynamik beteiligt sind und nur die konstanten Abstände garantieren. Stattdessen ist es sinnvoller, von *Zwangbedingungen* zu sprechen, auf die wir in Kürze zurückkommen.

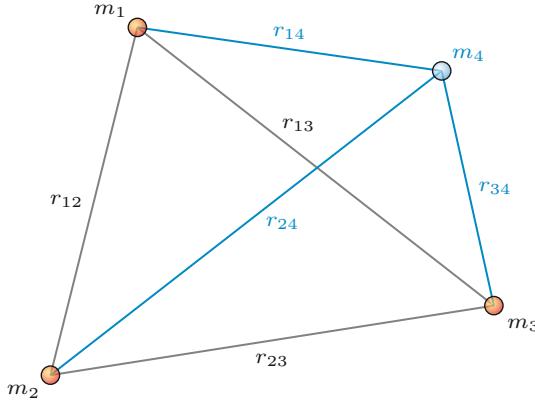
Genau wie eine Punktmasse ist das Konzept eines starren Körpers eine Idealisierung. So wie eine Punktmasse in der täglichen Erfahrungswelt nicht vorkommt, gibt es in der Realität auch keine perfekt starren Körper. Dies wird klar, wenn man sich einen Stab vorstellt. Stößt man an dem einen Ende gegen den Stab, so würde sich jeder seiner Punkte instantan in Bewegung setzen, da die Abstände ja jederzeit konstant sein müssen. Dies steht allerdings im Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie, die besagt, dass sich keine Information schneller ausbreiten kann als das Licht. Außerdem würde ein starrer Körper unendlich große Kräfte zwischen den Molekülen erfordern. Tatsächlich zeigen alle scheinbar starren Körper elastische Eigenschaften: Unter äußeren Einflüssen verformen sie sich, auch wenn diese Verformung häufig für den Menschen nicht wahrnehmbar ist und in vielen Anwendungen vernachlässigt werden kann.

Es kommt auf die Situation an, ob das Modell eines starren Körpers angemessen ist oder nicht. Es bietet sich allerdings als vereinfachte Beschreibung für viele Systeme an, z. B. für die rotierende Erde, einen Kreisel auf der Tischplatte oder ein physikalisches Pendel. Einen Eimer mit Wasser kann man dagegen nicht als starrer Körper ansehen. Als Faustregel gilt, dass starre Körper dann eine gute Näherung sind, wenn man davon ausgehen kann, dass die wirkenden Kräfte keine oder nur eine vernachlässigbare innere Dynamik anregen (wie beispielsweise die Deformation des Körpers).

### Anzahl der Freiheitsgrade

Ein System von  $N$  Punktmassen kann höchstens  $f = 3N$  Freiheitsgrade besitzen (z. B. drei Ortskomponenten in der Form  $\mathbf{x}_a(t)$  für jede Punktmasse). Durch innere Zwangsbedingungen, z. B.  $|\mathbf{x}_a(t) - \mathbf{x}_b(t)| = \text{const}$ , wird deren Anzahl reduziert. Im starren Körper gibt es offensichtlich eine große Anzahl von solchen Zwangsbedingungen. Doch wie viele Freiheitsgrade bzw. voneinander unabhängige Koordinaten bleiben übrig? Für einen starren Körper gibt es stets  $f = 6$  Freiheitsgrade, wenn er nicht zusätzlich äußeren Zwängen unterworfen ist. Ein äußerer Zwang liegt beispielsweise bei einem Kreisel auf einer Tischplatte oder einem Jo-Jo an einer Schnur vor.

Man kann sich leicht überlegen, warum ein starrer Körper maximal sechs Freiheitsgrade haben kann. Eine einzelne Punktmasse  $m_1$  hat drei Freiheitsgrade, z. B. ihre kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x}_1(t)$  in einem beliebigen Bezugssystem. Verbindet man eine zweite Punktmasse  $m_2$  mit der ersten, kommen nicht drei, sondern nur zwei Freiheitsgrade hinzu, da der Abstand  $r_{12}$  konstant ist, was einer Zwangsbedingung entspricht. Eine dritte Punktmasse  $m_3$  mit festem Abstand zu den beiden ersten ( $r_{13}$  und  $r_{23}$ ) führt auf nur noch einen zusätzlichen Freiheitsgrad. Diese drei Punktmassen haben zusammen sechs Freiheitsgrade. Die Lage jeder weiteren Punktmasse ist aber durch Angabe ihrer Abstände zu drei anderen Punktmassen (bis auf das Vorzeichen) festgelegt, solange diese nicht alle auf einer Linie liegen. Die Anzahl der Freiheitsgrade kann somit nicht mehr erhöht werden (Abb. 4.1).



**Abb. 4.1** Die Lage einer Punktmasse  $m_4$  ist (bis auf das Vorzeichen) eindeutig festgelegt, wenn die drei Abstände  $r_{14}$ ,  $r_{24}$  und  $r_{34}$  (blaue Linien) zu den drei Punktmasse  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  bekannt sind

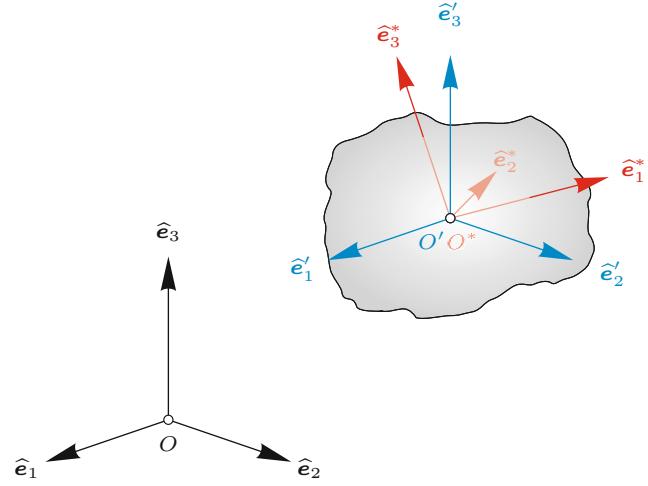
Die sechs Freiheitsgrade eines starren Körpers werden in der Regel in der Form eines Punktes und dreier Winkel angegeben (Lage und Orientierung). Wird ein beliebiger Punkt eines starren Körpers im Raum festgehalten, ergeben sich drei weitere äußere Zwangsbedingungen. Man spricht dann von einem *Kreisel*. Hält man zusätzlich einen weiteren Punkt im Raum fest, bleibt nur noch ein Freiheitsgrad übrig, und der starre Körper ist ein *physikalisches Pendel*.

**Achtung** Da die Zahl der Freiheitsgrade von der Zahl der Punktmasse unabhängig ist, kann man auch den Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  und  $m_a \rightarrow 0$  mit  $M = \text{const}$  betrachten. Dies führt schließlich auf eine kontinuierliche Massenverteilung, auf die wir in Abschn. 4.5 erneut zu sprechen kommen. ▶

## Koordinatensysteme

In diesem Kapitel werden verschiedene Koordinatensysteme benötigt. Da dies auf den ersten Blick verwirrend sein kann, gehen wir hier gründlich vor. Wir führen drei kartesische Koordinatensysteme ein:

1. Das erste,  $S$ , ist raumfest und ein Inertialsystem, also ein Laborsystem. Die Basisvektoren werden ungestrichen dargestellt,  $\hat{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), und sind zeitunabhängig. Der Ursprung ist beliebig.
2. Das Schwerpunktsystem des starren Körpers,  $S'$ , wird mit einem Strich bezeichnet. Der Ursprung liegt im Schwerpunkt des starren Körpers. Die Basisvektoren  $\hat{e}'_i$  sind stets parallel zu den  $\hat{e}_i$ .  $S'$  ist kein Inertialsystem, wenn der Schwerpunkt des starren Körpers beschleunigt wird.
3. Das dritte System,  $S^*$ , sei so gewählt, dass alle Punkte des starren Körpers darin ruhen (Abb. 4.2). Die Basisvektoren werden mit einem Stern markiert und sind zeitabhängig, wenn der starre Körper rotiert:  $\hat{e}^*_i(t)$  (Beispiel Erddrehung in Abschn. 2.4). Die Wahl des Koordinatenursprungs und die genaue Orientierung der Achsen lassen wir zunächst offen.



**Abb. 4.2** Überblick der Koordinatensysteme, die zur Beschreibung des starren Körpers verwendet werden. Das Laborsystem ( $S$ , schwarz) ist raumfest und ein Inertialsystem. Das Schwerpunktsystem ( $S'$ , blau) ist gegenüber  $S$  nicht gedreht, ist aber an den Schwerpunkt des starren Körpers gebunden. Das körperfeste System ( $S^*$ , rot) dreht sich mit dem starren Körper mit

Betrachten wir nun einen beliebigen Punkt des starren Körpers mit Koordinaten  $x_a(t)$  in  $S$ . Ein beliebiger anderer Bezugspunkt des starren Körpers befindet sich am Ort  $x_0(t)$ . Dies kann, muss aber nicht der Schwerpunkt sein. Wir definieren den Verschiebungsvektor  $d_a(t) := x_a(t) - x_0(t)$  und erkennen sofort, dass sein Betrag konstant sein muss,  $|d_a(t)| = \text{const}$ , da es sich um einen starren Körper handelt. In  $S^*$  sind  $x_a^*$ ,  $x_0^*$  und  $d_a^*$  offensichtlich konstant. In  $S$  hingegen ist

$$\dot{x}_a(t) = \dot{x}_0(t) + \dot{d}_a(t) = \dot{x}_0(t) + \Omega(t) \times d_a(t). \quad (4.1)$$

Die letzte Gleichheit gilt, da die zeitliche Änderung des Vektors  $d_a(t)$  nur seine Orientierung, nicht aber seine Länge betreffen kann. Die Änderung von  $d_a(t)$  steht daher senkrecht auf  $d_a(t)$  selbst. Dabei ist  $\Omega(t)$  ein Vektor, den es zu bestimmen gilt. Andererseits haben wir bereits (2.54) abgeleitet:

$$\dot{d}^* = R(\dot{d} - \omega \times d). \quad (4.2)$$

Dies beschreibt das Transformationsverhalten der Zeitableitung eines Verschiebungsvektors  $d$ , wenn man von einem kartesischen Inertialsystem zu einem beliebigen anderen kartesischen Koordinatensystem wechselt, das von  $S$  aus gesehen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert. Dabei ist  $R$  die momentane Drehmatrix, welche die Basisvektoren der beiden Systeme ineinander überführt. Da in unserem Fall  $\dot{d}^* = \mathbf{0}$  ist, muss

$$\dot{d}(t) = \omega(t) \times d(t) \quad (4.3)$$

gelten. Wir können also  $\Omega(t) = \omega(t)$  als die momentane Winkelgeschwindigkeit desjenigen Bezugssystems interpretieren, in dem alle Punkte des starren Körpers ruhen. Da die Wahl der Punkte  $x_a(t)$  und  $x_0(t)$  bei diesen Überlegungen beliebig ist, ist

die Winkelgeschwindigkeit  $\omega(t)$  für alle Punkte des starren Körpers zur Zeit  $t$  identisch und hängt nicht vom Bezugspunkt ab. Ein starrer Körper wird daher durch seine momentane Winkelgeschwindigkeit charakterisiert. Dies entspricht inhaltlich dem *Euler'schen Theorem*.

### Euler'sches Theorem für die Bewegung eines starren Körpers

Wird ein starrer Körper in einem Punkt festgehalten, so ist die allgemeine Bewegung eine Drehung um eine Achse, die durch diesen Punkt läuft.

Man beachte, dass die momentane Winkelgeschwindigkeit von  $S^*$  aus gesehen durch (2.72) gegeben ist:

$$\omega^*(t) = \mathbf{R}(t)\omega(t). \quad (4.4)$$

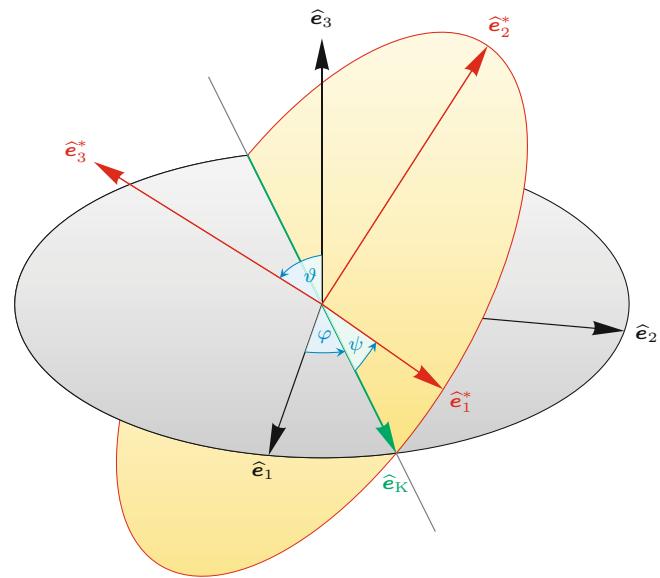
### Satz von Chasles

Wählt man in (4.1)  $x_0(t)$  als den Schwerpunkt des starren Körpers, sieht man, dass die Bewegung des starren Körpers als Summe einer Translation,  $\dot{x}_0(t)$ , und einer Rotation um den Schwerpunkt,  $\omega(t) \times (x_a(t) - x_0(t))$ , geschrieben werden kann. Diese Aussage ist auch als *Satz von Chasles* (nach dem französischen Mathematiker *Michel Chasles*, 1793–1880) bekannt. Als Ursprung von  $S^*$  verwendet man in der Regel den Schwerpunkt. Ist ein Punkt des starren Körpers fixiert, wird dieser normalerweise als Ursprung definiert.

Zwar sind Situationen denkbar, in denen die Schwerpunktsbewegung und Rotation gekoppelt sind. Solche Situationen werden hier nicht besprochen, und wir betrachten die Rotation unabhängig von der Schwerpunktsbewegung. Insbesondere ist wegen (3.10) und (3.20) die Änderung des Gesamtimpulses gleich der Summe aller äußeren Kräfte, und die Änderung des Gesamtdrehimpulses ist die Summe aller äußeren Drehmomente. Zur Erinnerung sei an die entsprechenden Ergebnisse in Abschn. 3.1 verwiesen.

## Euler'sche Winkel als Rotationsfreiheitsgrade

Wir sind bisher davon ausgegangen, dass es irgendein körperfestes Bezugssystem  $S^*$  gibt, das durch eine Drehmatrix  $\mathbf{R}(t)$  aus dem raumfesten System  $S$  hervorgeht (von einer möglichen Verschiebung der Ursprünge einmal abgesehen).  $S^*$  wurde allerdings nicht näher spezifiziert. Zur Beschreibung der Lage im Raum haben sich die drei Euler-Winkel ( $\vartheta(t)$ ,  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$ ) besonders bewährt. Sie werden verwendet, um  $S$  (definiert durch  $\hat{e}_i$ ) in drei Schritten in  $S^*$  (definiert durch  $\hat{e}_i^*(t)$ ) zu überführen. Da die Euler-Winkel auf den ersten Blick wenig anschaulich



**Abb. 4.3** Die relative Orientierung vom Laborsystem ( $S$ , schwarz) und körperfestem System ( $S^*$ , rot) wird durch die drei Euler-Winkel  $\vartheta$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  beschrieben. Zur Vereinfachung wurden hier identische Ursprünge für  $S$  und  $S^*$  gewählt. Die Knotenlinie  $\hat{e}_K$  (grün) ist die Schnittlinie der  $\hat{e}_1\hat{e}_2$ - (schwarz) und  $\hat{e}_1^*\hat{e}_2^*$ -Ebenen (gelb)

sind, betrachten wir zunächst Abb. 4.3. Dort ist die sogenannte *Knotenlinie*  $\hat{e}_K$  definiert. Sie ist die Schnittlinie der  $\hat{e}_1\hat{e}_2$ - und der momentanen  $\hat{e}_1^*(t)\hat{e}_2^*(t)$ -Ebene. Damit ist ihre Richtung durch  $\hat{e}_K(t) = \hat{e}_3 \times \hat{e}_3^*(t)$  festgelegt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir im weiteren Verlauf auf die explizite Angabe der Zeitabhängigkeiten.

Es kann zu der Situation kommen, dass  $\hat{e}_3$  und  $\hat{e}_3^*$  parallel sind. Dann ist die Knotenlinie nicht eindeutig definiert. Diese mathematische Singularität wird in praktischen Anwendungen umgangen, indem nicht die Euler'schen Winkel, sondern die sogenannten *Quaternionen* zur Darstellung verwendet werden, die beispielsweise in Goldstein (1981) diskutiert werden.

Die drei Euler-Winkel sind folgendermaßen definiert (in der Literatur sind – je nach Konvention – allerdings abweichende Definitionen zu finden):

- Winkel zwischen  $\hat{e}_K$  und  $\hat{e}_1$ :  $\varphi$
- Winkel zwischen  $\hat{e}_3$  und  $\hat{e}_3^*$ :  $\vartheta$
- Winkel zwischen  $\hat{e}_K$  und  $\hat{e}_1^*$ :  $\psi$

Mathematisch lassen sich die beiden Koordinatensysteme folgendermaßen ineinander überführen (siehe Abschn. 2.1):

1. Im ersten Schritt wird eine Drehung um  $\hat{e}_3$  um den Winkel  $\vartheta$  durchgeführt. Die damit verbundene Drehmatrix lautet

$$\mathbf{R}_3(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

und führt auf ein Zwischensystem mit den Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_i^{(\varphi)}$ .

2. Im Anschluss wird um den Winkel  $\vartheta$  um den  $\hat{\mathbf{e}}_1^{(\varphi)}$  gedreht. Die Drehmatrix

$$\mathbf{R}_1(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

führt auf ein weiteres Zwischensystem mit den Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_j^{(\vartheta)}$ .

3. Im letzten Schritt erhält man das körperfeste Koordinatensystem mit den Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_i^*$ , indem um die Achse  $\hat{\mathbf{e}}_3^{(\vartheta)}$  um den Winkel  $\psi$  gedreht wird. Die zugehörige Drehmatrix lautet

$$\mathbf{R}_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Selbstverständlich lassen sich die drei Einzeldrehungen zu einer einzigen Operation

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3(\psi) \mathbf{R}_1(\vartheta) \mathbf{R}_3(\varphi) \quad (4.8)$$

zusammenfassen. Man kann mit etwas Aufwand, aber simpler Rechenarbeit zeigen, dass

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \sin \psi \\ -\sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta - \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

gilt. Die Rücktransformation erfolgt mit der Matrix  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top$ , da  $\mathbf{R}$  eine orthogonale Matrix ist. Somit gilt für einen ungebundenen Abstandsvektor mit den Koordinatendarstellungen  $\mathbf{d}$  in  $S$  und  $\mathbf{d}^*$  in  $S^*$ :

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{R}\mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{d}^* \quad (4.10)$$

bzw.

$$d_i^* = r_{ij}d_j, \quad d_i = r_{ji}d_j^*. \quad (4.11)$$

### Frage 1

Rechnen Sie (4.9) nach.

Weiterhin gilt wegen (2.10) die nützliche Relation

$$\hat{\mathbf{e}}_i^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = r_{ij}. \quad (4.12)$$

**Achtung** Die Euler-Winkel werden in der Literatur gelegentlich abweichend definiert. So gibt es beispielsweise eine Konvention, bei der die zweite Drehung stattdessen um die  $\hat{\mathbf{e}}_2^{(\varphi)}$ -Achse ausgeführt wird. Dies ergibt letztlich eine andere Form der Drehmatrix  $\mathbf{R}$ . 

## 4.2 Kinetische Energie und Drehimpuls

Es werden die innere kinetische Energie und der innere Drehimpuls des starren Körpers berechnet. Dies führt auf die Definition des Trägheitstensors, der die charakteristische Größe eines rotierenden starren Körpers ist. Der Trägheitstensor wird physikalisch interpretiert. Seine mathematischen Eigenschaften werden anschließend in Abschn. 4.3 untersucht.

### Kinetische Energie und Trägheitstensor

Um die kinetische Energie des starren Körpers anzugeben, beginnen wir mit (3.34):

$$T = T_S + T'_R = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{X}}^2 + \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\mathbf{x}}_a^2. \quad (4.13)$$

Der erste Term ist die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung im Inertialsystem  $S$ , der zweite die innere kinetische Energie im Schwerpunktssystem  $S'$ , die als *Rotationsenergie* definiert wird. An dieser Stelle können wir wegen (4.3)

$$\dot{\mathbf{x}}_a' = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}_a' \quad (4.14)$$

schreiben, wobei der Vektor  $\mathbf{x}_a'$  vom Schwerpunkt  $X$  zur betrachteten Punktmasse  $m_a$  zeigt. Man beachte, dass sich  $S$  und  $S'$  per Definition nur durch die Wahl des Ursprungs unterscheiden. Die Koordinatenachsen sind nicht gegeneinander gedreht. Insbesondere gilt dann  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$ . Da die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}'$  für alle Punktmassen eines starren Körpers identisch ist, findet man durch Einsetzen von (4.14) in den zweiten Term von (4.13):

$$\begin{aligned} T'_R &= \frac{1}{2} \sum_a m_a [(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}_a') \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}_a')] \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a [\boldsymbol{\omega}'^2 \mathbf{x}_a'^2 - (\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{x}_a')^2]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Geht man in Komponentenschreibweise über, hat man

$$T'_R = \frac{1}{2} \sum_a m_a [\omega'_i \omega'_i \mathbf{x}_a'^2 - \omega'_{i,j} \mathbf{x}'_{a,i} \omega'_{j,a,j}] . \quad (4.16)$$

Nach einer kurzen Umformung sieht man:

$$T'_R = \frac{1}{2} \omega'_i \sum_a m_a [\delta_{ij} \mathbf{x}_a'^2 - \mathbf{x}'_{a,i} \mathbf{x}'_{a,j}] \omega'_j =: \frac{1}{2} \omega'_i \Theta'_{ij} \omega'_j. \quad (4.17)$$

### Frage 2

Führen Sie diese Umformung explizit durch.

### Trägheitstensor

Die Größe  $\Theta'$  mit den neun Komponenten

$$\begin{aligned}\Theta'_{ij} &:= \sum_a m_a (\delta_{ij} x_a'^2 - x_{a,i} x_{a,j}') \\ &= \sum_a m_a \begin{pmatrix} x_{a,2}'^2 + x_{a,3}'^2 & -x_{a,1}' x_{a,2}' & -x_{a,1}' x_{a,3}' \\ -x_{a,1}' x_{a,2}' & x_{a,1}'^2 + x_{a,3}'^2 & -x_{a,2}' x_{a,3}' \\ -x_{a,1}' x_{a,3}' & -x_{a,2}' x_{a,3}' & x_{a,1}'^2 + x_{a,2}'^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.18)$$

ist der *Trägheitstensor* eines starren Körpers in seinem Schwerpunktsystem. Mit seiner Hilfe lässt sich die kinetische Energie (Rotationsenergie) des starren Körpers berechnen, wenn die Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  im Schwerpunktsystem bekannt ist:

$$T'_R = \frac{1}{2} \omega_i' \Theta'_{ij} \omega_j' = \frac{1}{2} \omega'^\top \Theta' \omega'. \quad (4.19)$$

Der Trägheitstensor ist symmetrisch:  $\Theta'_{ij} = \Theta'_{ji}$ . Er besitzt daher nur sechs unabhängige Einträge. Diese wichtige Eigenschaft wird später noch eine große Rolle spielen.

#### Frage 3

Überprüfen Sie dies anhand von (4.18).

Im Folgenden werden wir uns zunächst weiter mit den physikalischen Eigenschaften des Trägheitstensors beschäftigen, bevor wir in Abschn. 4.3 Tensoren als mathematische Objekte definieren und beschreiben.

## Physikalische Eigenschaften des Trägheitstensors

Betrachtet man die Struktur von (4.19), so sieht man, dass sie Ähnlichkeiten mit der kinetischen Energie  $m\dot{x}_i^2/2 = m\dot{x}_i \dot{x}_i/2$  einer Punktmasse hat. Die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  wird durch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  und die Masse  $m$  durch die Komponenten  $\Theta'_{ij}$  des Trägheitstensors ersetzt. Der *Trägheitstensor* übernimmt die Rolle der tragen Masse bei Drehbewegungen. Wir werden allerdings noch sehen, dass die Bewegungsgleichungen des starren Körpers schwieriger zu lösen sind als die einer Punktmasse.

Was bedeutet der Trägheitstensor anschaulich? Ähnlich wie die Masse verknüpft er die kinetische Energie mit der Geschwindigkeit (in diesem Fall: Rotations- oder Winkelgeschwindigkeit). Dabei spielt es allerdings eine Rolle, wie weit die Elemente des starren Körpers von der Drehachse entfernt sind. Der Trägheitstensor ist eine Größe, welche die Massenverteilung des starren

Körpers charakterisiert. Allein dessen Masse reicht für solch eine Beschreibung nicht aus, da seine Form und Ausdehnung die Rotationsenergie beeinflussen. Es ist allerdings auf den ersten Blick erstaunlich, dass nur sechs Zahlen benötigt werden, um das Trägheitsverhalten eines rotierenden starren Körpers vollständig zu erfassen – ganz unabhängig davon, welch komplexe Gestalt er auch besitzt. Physikalisch liegt dies in der großen Anzahl der inneren Zwangsbedingungen begründet.

Die Diagonalelemente des Trägheitstensors nennt man *Trägheitsmomente*. Sie sind nichtnegativ,  $\Theta'_{11}, \Theta'_{22}, \Theta'_{33} \geq 0$ , und haben die Eigenschaft, dass kein Trägheitsmoment größer ist als die Summe der übrigen beiden. Dies wird in Aufgabe 4.1 gezeigt. Die Nebendiagonalelemente nennt man *Deviationsmomente* oder auch *Trägheitsprodukte*.

### Trägheitstensor zweier verbundener Punktmassen

Das einfachste Beispiel für einen starren Körper ist ein System von zwei Punktmassen, die durch eine masselose Stange der Länge  $2l$  verbunden sind. Die beiden Massen  $m_1 = m_2 = M/2$  befinden sich an den Orten  $(-l \cos \varphi, -l \sin \varphi, 0)^\top$  und  $(l \cos \varphi, l \sin \varphi, 0)^\top$ , sodass der Schwerpunkt im Ursprung liegt. Der Trägheitstensor lautet demnach

$$\begin{aligned}(\Theta'_{ij}) &= M \begin{pmatrix} l^2 - l^2 \cos^2 \varphi & -l^2 \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ -l^2 \sin \varphi \cos \varphi & l^2 - l^2 \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & l^2 \end{pmatrix} \\ &= Ml^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Offensichtlich gilt  $\Theta'_{ij} = \Theta'_{ji}$ . ◀

#### Frage 4

Führen Sie die Rechnung, die auf (4.20) führt, explizit aus.

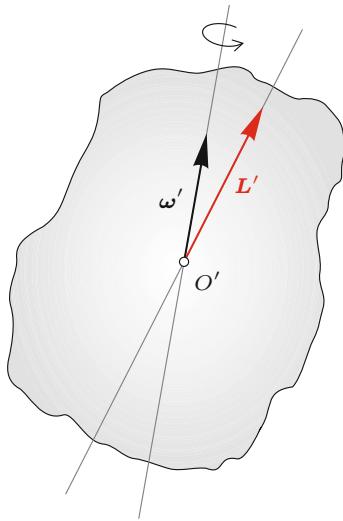
In Abschn. 4.5 werden noch andere konkrete Berechnungen des Trägheitstensors vorgeführt.

## Drehimpuls und Trägheitstensor

Genau wie die kinetische Energie lässt sich auch der Drehimpuls des starren Körpers mittels des Trägheitstensors ausdrücken. Gl. (3.22),

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_S + \mathbf{L}'_R = \mathbf{X} \times M \dot{\mathbf{X}} + \sum_a \mathbf{x}'_a \times m_a \dot{\mathbf{x}}'_a, \quad (4.21)$$

besagt, dass die Drehimpulsanteile von Schwerpunkt und der inneren Bewegung relativ zum Schwerpunkt separat betrachtet



**Abb. 4.4** Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit eines starren Körpers sind in der Regel nicht parallel. Hier sind die Vektoren  $\mathbf{L}'$  und  $\boldsymbol{\omega}'$  im Schwerpunktsystem  $S'$  dargestellt

werden können. Der Anteil der inneren Bewegung lässt sich wegen (4.14) in der Form

$$\mathbf{L}'_R = \sum_a m_a \mathbf{x}'_a \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}'_a) = \sum_a m_a [\mathbf{x}'_a^2 \boldsymbol{\omega}' - \mathbf{x}'_a (\mathbf{x}'_a \cdot \boldsymbol{\omega}')] \quad (4.22)$$

schreiben. Dies führt schließlich auf

$$\mathbf{L}'_R = \Theta' \boldsymbol{\omega}'.$$
 (4.23)

#### Frage 5

Zeigen Sie mithilfe der Indexschreibweise die Gültigkeit von (4.23).

Um die Bedeutung dieser Gleichung hervorzuheben, schreiben wir sie in Komponentenform aus:

$$\begin{aligned} L'_{R,1} &= \Theta'_{11}\omega'_1 + \Theta'_{12}\omega'_2 + \Theta'_{13}\omega'_3, \\ L'_{R,2} &= \Theta'_{21}\omega'_1 + \Theta'_{22}\omega'_2 + \Theta'_{23}\omega'_3, \\ L'_{R,3} &= \Theta'_{31}\omega'_1 + \Theta'_{32}\omega'_2 + \Theta'_{33}\omega'_3. \end{aligned} \quad (4.24)$$

**Achtung** Gl. (4.24) besagt, dass Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit im Allgemeinen *nicht* parallel sind (Abb. 4.4), da  $\Theta'$  eine matrixwertige Größe ist und jede Komponente von  $\mathbf{L}'_R$  im Allgemeinen von *allen* Komponenten von  $\boldsymbol{\omega}'$  abhängt. ◀

Es stellt sich hier die Frage, ob es ein Koordinatensystem gibt, in dem der Trägheitstensor diagonal ist, d.h. in dem alle Deviationsmomente verschwinden. In diesem Fall würden die Gleichungen in (4.24) stark vereinfacht werden. Man kann tatsächlich solch ein Koordinatensystem finden, wie wir später zeigen und ausnutzen werden.

Zwischen kinetischer Energie und Drehimpuls gilt schließlich der Zusammenhang

$$T'_R = \frac{1}{2} \mathbf{L}'_R \cdot \boldsymbol{\omega}', \quad (4.25)$$

wie man schnell anhand von (4.19) überprüft. Da  $T'_R$  immer positiv ist, muss der Winkel zwischen  $\mathbf{L}'_R$  und  $\boldsymbol{\omega}'$  stets kleiner als  $90^\circ$  sein. Man beachte die Ähnlichkeit mit  $T = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}/2$  für die kinetische Energie einer Punktmasse.

## 4.3 Tensoren

In diesem Abschnitt werden Tensoren als mathematische Objekte eingeführt. Sie spielen in der Physik eine grundlegende Rolle; der Trägheitstensor ist eines der wichtigsten Beispiele in der Mechanik. Tensoren lassen sich als multidimensionale Zahlenschemata darstellen. Wir kommen vor allem auf das Transformationsverhalten, das Produkt und die Kontraktion von Tensoren zu sprechen.

### Tensoren in der Physik

Tensoren werden im „Mathematischen Hintergrund“ 4.1 definiert. In diesem Abschnitt soll erläutert werden, wie Tensoren gewöhnlicherweise in der Physik eingesetzt werden und wie man praktisch mit ihnen rechnet. Wir beschränken uns dabei auf Tensoren, die auf Vektoren im  $N$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^N$  wirken.

Bei Tensoren der Stufe  $p$  bzw. vom Rang  $p$  handelt es sich um multilinear Abbildungen, die sich – nach Wahl einer Basis – als ein  $N \times \dots \times N$ -Zahlenschema darstellen lassen. Wie wir in Kürze sehen werden, lassen sich Tensoren erster Stufe als Vektoren mit  $N$  Komponenten, Tensoren zweiter Stufe als  $N \times N$ -Matrizen darstellen usw. Wir beschränken uns im Folgenden zur besseren Anschaulichkeit auf Tensoren zweiter Stufe. Die Ergebnisse sind jedoch für Tensoren jeder Stufe gültig.

Wie findet man nun die Darstellung eines Tensors als  $N \times N$ -Matrix in der gegebenen Basis? Hierzu reicht es zu wissen, wie der Tensor auf die entsprechenden Basisvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_i$  wirkt. Für einen Tensor  $T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir

$$T_{ij} := T(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j) \quad (1 \leq i, j \leq N) \quad (4.26)$$

und nennen diese  $N^2$  Größen die *Komponenten* des Tensors bezüglich der gewählten Basis. Da Tensoren multilinear sind, kann man die Wirkung des Tensors auf beliebige Vektoren dann in der Form

$$T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = T_{ij} a_i b_j \quad (4.27)$$

schreiben.

## 4.1 Mathematischer Hintergrund: Tensoren

Wir wollen uns nun mit Tensoren, einem für die Physik wichtigen Konzept, beschäftigen. Dabei werden wir jedoch Tensoren nicht (wie vielerorts üblich) als Größen mit bestimmtem Transformationsverhalten definieren, sondern die mathematische Definition über Multilinearformen nehmen, aus der das Transformationsverhalten folgt.

**Multilinearformen** Ist  $K$  ein Körper und sind  $V_1, \dots, V_p$   $K$ -Vektorräume, so nennen wir eine Abbildung  $\phi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow K$  *Multilinearform* oder *Tensor*, wenn sie in jedem Argument linear ist. Wir sind hier nur an dem Spezialfall  $K = \mathbb{R}$  mit lauter identischen  $V_i$  interessiert. In diesem Fall schreibt man für den Raum der Multilinearformen auch  $\otimes^p V^*$ , und man nennt solche Tensoren  $p$ -Tensoren.  $\otimes^p V^*$  ist selbst wieder ein reeller Vektorraum.

Man kann zeigen, dass der Raum  $\otimes^p V^*$  die Dimension  $N^p$  hat, wenn  $V$  die Dimension  $N$  hat. Es gilt sogar noch mehr:  $\otimes^p V^*$  ist isomorph (d. h., es existiert eine bijektive Abbildung, die mit der Vektorraumstruktur verträglich ist) zu  $\mathbb{R}^{N^p}$ . Dies gibt uns die Möglichkeit, nach Wahl von Basen von  $V$   $p$ -Tensoren als „ $p$ -dimensionale Matrizen“ darzustellen.

**Beispiele** Die einfachsten und geläufigsten Beispiele sind die Fälle  $p = 1$  und  $p = 2$ . Im ersten Fall haben wir es mit einer aus der Mathematik bekannten Linearform zu tun, im zweiten mit einer Bilinearform. Skalarprodukte sind z. B. Bilinearformen. Außerdem ist das Levi-Civita-Symbol  $\varepsilon_{ijk}$  die Darstellung eines 3-Tensors und die Determinante von  $N \times N$ -Matrizen (wenn man diese als Multilinearform auf den Spalten auffasst) ein  $N$ -Tensor.

**Darstellung** Wählt man nun für den Vektorraum  $V$   $p$ -mal eine Basis (wobei wir den  $i$ -ten Basisvektor des  $j$ -ten Vektorraumes mit  $e_{ij}$  bezeichnen), so entspricht die Komponente  $\phi_{i_1, \dots, i_p}$  genau dem Wert  $\phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ . Ist  $V$   $N$ -dimensional, so hat ein  $p$ -Tensor also  $N^p$  Komponenten. Ist  $\phi$  ein Tensor, so bezeichnen wir seine Komponenten mit  $\phi_{i_1, \dots, i_p}$ , wobei  $1 \leq i_j \leq N$  für jedes  $1 \leq j \leq p$ .

Am wichtigsten ist dies für 2-Tensoren (d. h. Bilinearformen). Ist  $\phi$  ein 2-Tensor und wählt man für den Vektorraum  $V$  eine Basis, so gibt es eine eindeutige Matrix  $M$ , sodass für alle  $x, y \in V$  gilt:

$$\phi(x, y) = x^\top M y.$$

Für  $p = 0$  haben wir dann 0-dimensionale Matrizen, also Skalare; für  $p = 1$  erhalten wir 1-dimensionale Matrizen, also Vektoren.

**Transformationsverhalten** Wie schon bei den Vektoren untersucht, sind wir auch hier daran interessiert, wie sich die Darstellung eines Tensors ändert, wenn eine andere Basis gewählt wird. Dabei erinnern wir nochmals daran, dass wir hier nur Tensoren untersuchen, bei denen die Vektorräume  $V_i$  alle identisch sind.

Seien dafür die  $N$ -dimensionalen Vektorräume  $V_1, \dots, V_p$  gegeben und seien  $\{e_{1i}, \dots, e_{Ni}\}$  und  $\{e'_{1i}, \dots, e'_{Ni}\}$  jeweils Basen von  $V_i$ . Dann lässt sich jeder Basisvektor einer Basis als Linearkombination der Basisvektoren der anderen Basis darstellen, es gelte also

$$e'_{il} = \sum_{ji=1}^N r_{il,jl} e_{jl} \quad (1 \leq l \leq p). \quad (1)$$

Für jeden einzelnen der  $p$  Vektorräume  $V_l$  wird also über die  $N$  Basisvektoren  $e_{jl}$  summiert.

Wenden wir nun einen Tensor  $\phi$  an, so erhalten wir mit dieser Transformation und aufgrund der Multilinearität von  $\phi$

$$\phi'_{i_1, \dots, i_p} = \sum_{j_1} \dots \sum_{j_p} r_{i_1, j_1} \dots r_{i_p, j_p} \phi_{j_1, \dots, j_p}. \quad (2)$$

Eine Herleitung dieser Gleichung für  $p = 2$  (die sich auch auf höhere  $p$  verallgemeinern lässt) ist im Haupttext zu finden.

**Beispiele** Ist  $p = 0$ , so ist die Transformation in (1) von der Form  $\lambda \mapsto r \cdot \lambda$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $r = \pm 1$ . Die Transformation eines 0-Tensors ist nach (2) dann  $\phi' = r \cdot \phi$ , d. h., der Tensor transformiert sich genauso wie ein Skalar. Für  $p = 1$  erhalten wir aus (2)

$$\phi'_i = \sum_j r_{ij} \phi_j.$$

1-Tensoren transformieren sich also wie Vektoren.

**Tensorprodukt** Sind  $\phi$  und  $\psi$  Elemente von  $\otimes^p V^*$  bzw.  $\otimes^q V^*$ , so definiert man das *Tensorprodukt*  $\phi \otimes \psi$  durch

$$(\phi \otimes \psi)(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) := \phi(v_1, \dots, v_p) \psi(w_1, \dots, w_q).$$

Das Tensorprodukt hat folgende Eigenschaften (dabei seien  $\phi, \psi$  und  $\sigma$  Tensoren und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ):

- Das Tensorprodukt ist distributiv, d. h., es gilt
 
$$(\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2) \otimes \psi = \lambda_1 \phi_1 \otimes \psi + \lambda_2 \phi_2 \otimes \psi,$$

$$\phi \otimes (\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2) = \lambda_1 \phi \otimes \psi_1 + \lambda_2 \phi \otimes \psi_2.$$
- Das Tensorprodukt ist assoziativ, d. h., es gilt
 
$$(\phi \otimes \psi) \otimes \sigma = \phi \otimes (\psi \otimes \sigma).$$
- Das Tensorprodukt ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

Für den Fall  $p = q = 1$  nennt man das Produkt auch *dyadiisches Produkt*. Dieses wird im Haupttext näher besprochen.

**Frage 6**

Zeigen Sie die Gültigkeit von (4.27).

Allgemein kann man einen  $p$ -Tensor  $T$  im euklidischen Raum in der folgenden Form darstellen:

$$T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p) = T_{i_1 i_2 \dots i_p} v_{1,i_1} v_{2,i_2} \dots v_{p,i_p}, \quad (4.28)$$

wobei  $v_{j,i_j}$  die  $i_j$ -te Komponente von Vektor  $\mathbf{v}_j$  ist. Die Abbildung  $T$  wirkt also auf  $p$   $N$ -dimensionale Vektoren  $\mathbf{v}_i$ , und man summiert dabei über alle  $p$  auftretenden Indexpaare.

**Matrizen als Darstellung von Tensoren**

Wir halten fest, dass man wegen (4.26) und (4.27) Tensoren zweiter Stufe als Matrizen darstellen kann. Analog können Tensoren erster Stufe als Vektoren dargestellt werden.

**Achtung** Genau wie bei einem Vektor ist prinzipiell streng zwischen einem Tensor zweiter Stufe und seiner darstellenden Matrix zu unterscheiden. Es ist in der Physik dennoch häufig der Fall, dass diese Begriffe als Synonyme verwendet werden. Anstatt von der Trägheitsmatrix (d.h. von derjenigen Matrix, die den Trägheitstensor darstellt) zu sprechen, verzichtet man normalerweise auf diese Unterscheidung und spricht nur noch vom Trägheitstensor. Wir schließen uns hier dieser Konvention an, behalten aber im Hinterkopf, dass es einen konzeptionellen Unterschied zwischen Trägheitstensor und -matrix gibt. 

**Skalarprodukt und Längenprojektion**

Das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$  kann als eine Tensoroperation verstanden werden. Wir betrachten einen 2-Tensor  $S$ , der den zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ihr Skalarprodukt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  zuordnet:  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ . Dies lässt sich auch in der Form

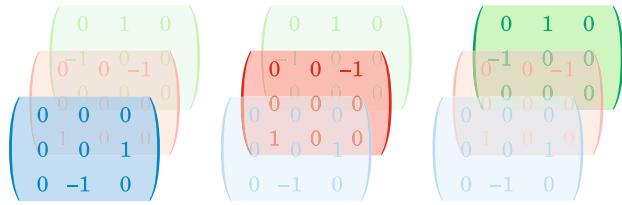
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a_i b_j \quad (4.29)$$

schreiben, wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol ist und über  $i$  und  $j$  summiert wird. Somit ist das Kronecker-Symbol die Darstellung des Skalarprodukt-Tensors  $S$  im gewählten Koordinatensystem.

Möchte man einen Vektor auf eine Koordinatenachse projizieren, so lässt sich dies ebenfalls als eine Tensoroperation auffassen. Sei  $P_n(\mathbf{v}) \mapsto v_n \in \mathbb{R}$  beispielsweise derjenige 1-Tensor, welcher dem Vektor  $\mathbf{v}$  seine projizierte Länge auf die Achse  $\hat{\mathbf{n}}$ , also  $v_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}$ , zuordnet. Dann ist wegen

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = \hat{n}_i v_i \quad (4.30)$$

$\hat{n}_i$  gerade die entsprechende Darstellung dieses Tensors  $P_n$  im gewählten Koordinatensystem. 



**Abb. 4.5** Das Levi-Civita-Symbol  $\epsilon_{ijk}$  ist die Darstellung eines Tensors der Stufe 3. Man kann es sich als mehrdimensionale Matrix vorstellen, die aus mehreren „Lagen“ besteht (blau, rot, grün). Die ersten beiden Indizes von  $\epsilon_{ijk}$  werden durch die Einträge einer zweidimensionalen Matrix erfasst, der dritte Index entspricht einer der drei Farben

3-Tensoren lassen sich nicht als Matrizen darstellen, aber man kann, wie in Abb. 4.5 gezeigt, ihre Komponenten in einem dreidimensionalen Schema anordnen.

Wir sehen nun, dass (4.19) die Darstellung eines Tensors ist. Der Trägheitstensor  $\Theta'$  ordnet der Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  (neben einem Faktor  $\frac{1}{2}$ ) die kinetische Energie  $T'_R$  zu:

$$T'_R = \frac{1}{2} \Theta'(\omega', \omega') = \frac{1}{2} \omega'^\top \Theta' \omega'. \quad (4.31)$$

Hier ist  $\Theta'$  der eigentliche Tensor und  $\Theta'$  seine Matrixdarstellung.

**Transformationsverhalten von Tensoren**

Zunächst wollen wir über das Transformationsverhalten von Tensoren sprechen. Betrachten wir zwei kartesische Koordinatensysteme  $S$  und  $S'$  mit Basisvektoren  $(\hat{\mathbf{e}}_i)$  und  $(\hat{\mathbf{e}}'_j)$ . Die Komponenten eines Vektors, der in beiden Systemen dargestellt wird, transformieren gemäß

$$v'_i = r_{ij} v_j, \quad (4.32)$$

wobei  $R = (r_{ij})$  diejenige orthogonale Matrix ist, die  $S$  in  $S'$  überführt. Wie lautet nun eine Tensordarstellung in  $S'$ , wenn sie in  $S$  bekannt ist? Zunächst ist

$$T'(\mathbf{v}', \mathbf{w}') = T'(R\mathbf{v}, R\mathbf{w}). \quad (4.33)$$

In Darstellungsform lautet dies

$$T'_{ij} v'_i w'_j = T'_{ij} r_{ik} v_k r_{jl} w_l = T_{kl} v_k w_l \quad (4.34)$$

bzw.

$$\mathbf{v}'^\top \mathbf{T}' \mathbf{w}' = \mathbf{v}^\top \mathbf{T} \mathbf{w}. \quad (4.35)$$

Wir fordern diese Gleichung, da es sich bei dem Ergebnis einer Tensorabbildung um einen Skalar aus  $\mathbb{R}$  handelt, der in jedem Koordinatensystem identisch sein muss. Da die Wahl der Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  beliebig ist, kann man den Zusammenhang

$$T'_{ij} r_{ik} r_{jl} = T_{kl} \quad (4.36)$$

ablesen. Durch Invertierung folgt

$$T'_{ij} = r_{ik} r_{jl} T_{kl}. \quad (4.37)$$

Man transformiert einen Tensor daher, indem man jede seiner Komponenten wie einen Vektor transformiert. Dies lässt sich direkt auf Tensoren höherer Stufe erweitern.

### Frage 7

Überprüfen Sie die Invertierung, indem Sie  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top$  für orthogonale Matrizen verwenden. Zeigen Sie weiterhin, dass das Kronecker-Symbol, das auch als Darstellung des *Einheits-tensors* bezeichnet wird, invariant unter orthogonalen Transformationen ist. Erinnern Sie sich dabei an die Invarianz des Skalarprodukts unter orthogonalen Transformationen.

Wir wollen noch explizit das Transformationsverhalten des Trägheitstensors überprüfen. Dazu betrachten wir den Übergang von  $S'$  in ein anderes, durch einen Doppelstrich bezeichnetes kartesisches Koordinatensystem  $S''$ , das gegenüber  $S$  und  $S'$  gedreht ist. Die Drehung werde durch eine orthogonale Matrix  $\mathbf{R}' = (r'_{ij})$  dargestellt:

$$r'_{ik} r'_{jk} = r'_{ik} r'_{jl} \delta_{kl} = \delta_{ij}. \quad (4.38)$$

Wir wissen bereits, dass das Skalarprodukt unter solchen Transformationen invariant ist, d. h.  $\mathbf{x}_a^2 = \mathbf{x}'_a^2$ . Als Konsequenz gilt

$$\Theta''_{ij} = \sum_a m_a [r'_{ik} r'_{jl} \delta_{kl} \mathbf{x}_a^2 - r'_{ik} r'_{jl} x'_{a,k} x'_{a,l}] = r'_{ik} r'_{jl} \Theta'_{kl}. \quad (4.39)$$

Der Trägheitstensor  $\Theta'$  transformiert also genau so, wie man es von einem Tensor zweiter Stufe erwartet.

## Tensorprodukt, Dyaden und Kontraktion

Weiterhin ist es wichtig, über das sogenannte *Tensorprodukt* Bescheid zu wissen. Man kann Tensoren  $T_1$  und  $T_2$  der Stufen  $p_1$  und  $p_2$  miteinander verbinden, um einen Tensor  $T$  der Stufe  $p = p_1 + p_2$  zu erhalten. Dies ist im „Mathematischen Hintergrund“ 4.1 erläutert.

Betrachten wir dazu ein für die Physik wichtiges Beispiel. Wir gehen aus von zwei Vektoren  $v$  und  $w$  als jeweilige Darstellung eines Tensors erster Stufe ( $v$  und  $w$ ). Man kann nun aufgrund der Multilinearität die Darstellung des Tensors  $T = v \otimes w$  erhalten:

$$T_{ij} = v_i w_j. \quad (4.40)$$

Das Tensorprodukt zweier 1-Tensoren nennt man auch *dyadisches Produkt* oder kurz *Dyade*. Es ist in der Regel nicht kommutativ, da im Allgemeinen  $T_{ij} \neq T_{ji}$  ist.

Man kann auch Tensoren *kontrahieren*, indem man jeweils paarweise über Indizes ihrer Darstellung summiert. Hat man es beispielsweise mit der Darstellung eines Tensors dritter Stufe,  $T_{ijk}$ , zu tun, so sind

$$u_i = T_{ijj} \quad \text{oder} \quad v_i = T_{iji} \quad \text{oder} \quad w_i = T_{jji} \quad (4.41)$$

Darstellungen von Tensoren erster Stufe. Allgemein gilt, dass die Kontraktion eines  $p$ -Tensors ebenfalls ein Tensor ist, allerdings mit Ordnung  $p - 2$ .

### Dydisches Produkt

Das dydische Produkt zweier Vektoren  $\mathbf{a} = (a_i)$  und  $\mathbf{b} = (b_j)$  wird auch häufig in der Vektorform

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} := (a_i b_j) = a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \quad (4.42)$$

geschrieben. Stellt man sich  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  als Spaltenvektoren (und demnach  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$  als Matrix) vor, so entspricht  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$  genau  $\mathbf{a} \mathbf{b}^\top$ .

Wir zeigen, dass für drei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  die Identitäten

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^\top (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \quad (4.43)$$

gelten. Auf den linken Seiten ist jeweils das Matrixprodukt auszuführen, d. h.,  $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})$  wird wie eine gewöhnliche Matrix mit dem Vektor  $\mathbf{c}$  multipliziert. Dazu gehen wir in Komponentenschreibweise über. Die erste Gleichung lautet

$$(a_i b_j) c_j = a_i (b_j c_j) = a_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (4.44)$$

Analog lässt sich die zweite Gleichung überprüfen:

$$c_i (a_i b_j) = (c_i a_i) b_j = b_j (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}). \quad (4.45)$$

Gelegentlich benutzt man auch ein anderes Symbol für die vollständige Kontraktion  $a_{ij} b_{ij}$  zweier Matrizen  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  und  $\mathbf{B} = (b_{ij})$ :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} := a_{ij} b_{ij}. \quad (4.46)$$

Die vollständige Kontraktion ist von der Matrixmultiplikation  $\mathbf{AB}$  bzw.  $a_{ij} b_{jk}$  zu unterscheiden! Letztere ergibt wieder eine Matrix. Analog zur Matrixkontraktion schreibt man auch für dyadische Produkte

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \circ \mathbf{d}) &= (a_i b_j)(c_i d_j) \\ &= (a_i c_i)(b_j d_j) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

oder für Kontraktionen von Matrizen und dyadischen Produkten

$$\mathbf{A} : (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) = a_{ij} b_i c_j. \quad (4.48)$$

Die *Spur* eines Tensors  $T$  zweiter Stufe ist definiert als die Spur seiner Darstellungsmatrix  $\mathbf{T}$

$$\text{Sp}(T) = \text{Sp}(\mathbf{T}) = T_{ii}. \quad (4.49)$$

Sie ist eine Kontraktion und entspricht der Summe der Diagonalelemente.

### Matrixmultiplikation und Kontraktion

Das Matrixprodukt  $C = AB = (a_{ij}b_{jk}) = (c_{ik})$  lässt sich auch anders ausdrücken. Dazu bildet man zunächst das Produkt der beiden Matrizen:

$$D = A \circ B = (a_{ij}b_{kl}) = (d_{ijkl}). \quad (4.50)$$

Dies ist die Darstellung eines Tensors vierter Stufe. Im Anschluss kontrahiert man die beiden mittleren Indizes:

$$(d_{ijil}) = (a_{ij}b_{jl}) = (c_{il}) = C. \quad (4.51)$$

### Forminvarianz

Tensor- und Vektorgleichungen wie (4.41), (4.49) oder (4.51) sind forminvariant unter orthogonalen Transformationen. So gilt beispielsweise die Form von (4.19) in allen Inertialsystemen. Wie wir bereits in Kap. 2 gesehen haben, spielt Forminvarianz bzw. Kovarianz eine zentrale Rolle in der theoretischen Physik.

## 4.4 Trägheitstensor und Trägheitsmomente

Für viele praktische Anwendungen (z. B. Rad auf Achse) benötigt man das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer gegebenen Drehachse. Der Steiner'sche Satz setzt die Trägheitstensoren eines starren Körpers in zueinander verschobenen Koordinatensystemen in Relation. Der Trägheitstensor kann durch eine geeignete Koordinatentransformation, die sogenannte Hauptachsentransformation, in Diagonalform gebracht werden. Es zeigt sich, dass in solch einem Koordinatensystem die Gleichungen für die kinetische Energie und den Drehimpuls besonders einfach werden. Die für die Diagonalisierung notwendigen mathematischen Konzepte der Eigenwerte und Eigenvektoren werden erläutert und an Beispielen vertieft.

### Vorbemerkungen zum gewählten Koordinatensystem

Wir haben in (4.39) bereits gesehen, wie die Matrixdarstellung des Trägheitstensors unter Drehungen transformiert. Die funktionale Form von (4.19) bleibt davon unberührt. Tatsächlich

## 4.4 Trägheitstensor und Trägheitsmomente

lässt sich der Trägheitstensor in jedem Koordinatensystem wie in (4.19) berechnen, wenn die  $x'_a$  entsprechend durch die Ortsvektoren in dem gewählten Koordinatensystem ersetzt werden. Dies gilt auch für beschleunigte Bezugssysteme, auch wenn der Schwerpunkt und der Koordinatenursprung nicht zusammenfallen. Es ist leicht einzusehen, dass dabei die Tensorelemente im Allgemeinen andere Werte annehmen.

Die Komponenten der Trägheitsmatrix eines starren Körpers können zeitabhängig sein. Dies ist dann der Fall, wenn sich der starre Körper im gewählten Bezugssystem dreht. Beispielsweise kann der Winkel  $\varphi$  in (4.20) von der Zeit abhängen. Dies ist ein entscheidender Unterschied zur Masse eines Körpers, die – in der nichtrelativistischen Mechanik – nicht von der Wahl des Bezugssystems abhängt und zeitunabhängig ist.

### Frage 8

Machen Sie sich klar, dass die Komponenten der Trägheitsmatrix zeitabhängig sein können.

## Trägheitsmoment für Drehung um eine Achse

Für viele Anwendungen ist die Orientierung der Drehachse relativ zum starren Körper fest. Dies gilt z. B. für einen Autoreifen oder ein Windrad. Es stellt sich die Frage, ob zur Beschreibung solcher Objekte der gesamte Trägheitstensor bekannt sein muss. Um dies zu beantworten, nehmen wir an, dass die Drehung um eine Achse mit Einheitsnormalenvektor  $\hat{n} = \text{const}$  stattfindet. Wir führen die Untersuchung im raumfesten System  $S$  durch, könnten dies aber genauso gut im körperfesten System  $S^*$  tun. Den Ursprung  $O$  legen wir auf die Drehachse. Es gilt  $\omega = \omega \hat{n}$ . In diesem Fall lautet die kinetische Energie der Drehung aus (4.19)

$$T_R = \frac{1}{2} \hat{n}_i \Theta_{ij} \hat{n}_j \omega^2 =: \frac{1}{2} \Theta_n \omega^2. \quad (4.52)$$

Hier ist

$$\Theta_n \equiv \hat{n}_i \Theta_{ij} \hat{n}_j = \hat{n}^\top \boldsymbol{\Theta} \hat{n} = \sum_a m_a \left[ \mathbf{x}_a^2 - (\mathbf{x}_a \cdot \hat{n})^2 \right] \quad (4.53)$$

das *Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse  $\hat{n}$* .

### Frage 9

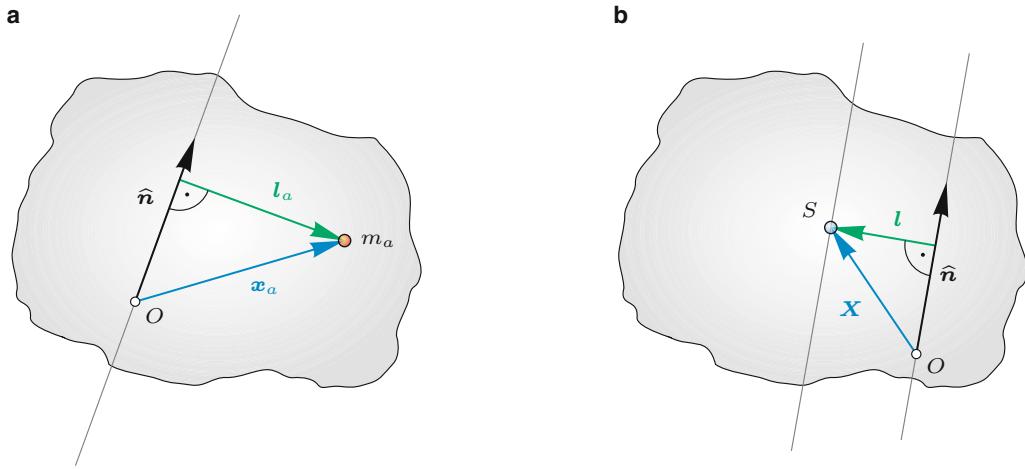
Rechnen Sie die Projektion des Trägheitstensors auf die Drehachse nach.

Aus Abb. 4.6 erkennt man, dass

$$l_a^2 = \mathbf{x}_a^2 - (\mathbf{x}_a \cdot \hat{n})^2 \quad (4.54)$$

der quadratische Abstand der Punktemasse  $m_a$  am Ort  $\mathbf{x}_a$  von der Drehachse  $\hat{n}$  ist. Vereinfacht kann das Trägheitsmoment dann in der Form

$$\Theta_n = \sum_a m_a l_a^2 \quad (4.55)$$



**Abb. 4.6** **a** Ein Massenelement  $m_a$  am Ort  $\boldsymbol{x}_a$  hat einen Abstandsvektor  $\boldsymbol{l}_a$  zur Drehachse  $\hat{\boldsymbol{n}}$ . **b** Der Steiner'sche Satz beschreibt, wie sich der Trägheitstensor ändert, wenn der Koordinatenursprung verschoben wird. Hier ist  $S$  der Schwerpunkt und  $O$  der gewählte Ursprung des raumfesten Systems

geschrieben werden. Verfährt man so mit dem Drehimpuls in (4.23), findet man analog

$$L_{R,n} = \Theta_n \omega, \quad (4.56)$$

wobei  $L_{R,n} = \mathbf{L}_R \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$  die Projektion des Drehimpulses auf die Drehachse ist.

#### Frage 10

Überprüfen Sie, dass die Diagonalelemente des Trägheitstensors  $\Theta_{ij}$  die Trägheitsmomente bezüglich der Koordinatenachsen ( $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ ) sind.

nehmen wir an, dass der Schwerpunkt  $S$  sich am Ort  $\boldsymbol{X}$  befindet. Der Trägheitstensor bezüglich des Ursprungs  $O$  ist dann

$$\begin{aligned} \Theta_{ij} &= \sum_a m_a (\boldsymbol{x}_a^2 \delta_{ij} - \boldsymbol{x}_{a,i} \boldsymbol{x}_{a,j}) \\ &= \sum_a m_a \left[ (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{x}'_a)^2 \delta_{ij} - (\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{x}'_{a,i})(\boldsymbol{X}_j + \boldsymbol{x}'_{a,j}) \right], \end{aligned} \quad (4.58)$$

wobei die Schwerpunktskoordinaten wieder durch einen Strich bezeichnet werden. Es ist leicht zu sehen, dass beim Ausmultiplizieren sämtliche Terme der Form  $\sum_a \boldsymbol{x}'_{a,i}$  wegen der Definition des Schwerpunktes verschwinden.

#### Frage 11

Überprüfen Sie diese Aussage.

Es bleibt daher nur der folgende Ausdruck übrig:

$$\Theta_{ij} = \sum_a m_a (\boldsymbol{x}'_a^2 \delta_{ij} - \boldsymbol{x}'_{a,i} \boldsymbol{x}'_{a,j}) + M (\boldsymbol{X}^2 \delta_{ij} - \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_j). \quad (4.59)$$

Der erste Term liefert gerade den Trägheitstensor  $\Theta'$  im Schwerpunktsystem. Im zweiten Term wurde  $\sum_a m_a = M$  ausgenutzt. Gl. (4.59) ist die Transformationsgleichung für den Trägheitstensor bei Verschiebung des Koordinatenursprungs. Wir definieren weiterhin

$$l^2 = \boldsymbol{X}^2 - (\boldsymbol{X} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2 \quad (4.60)$$

als den quadratischen Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse  $\hat{\boldsymbol{n}}$ . Dann ist das Gesamtdrehmoment bezüglich dieser Drehachse (Abb. 4.6)

$$\Theta_n = \Theta'_n + M l^2. \quad (4.61)$$

## Steiner'scher Satz

Bisher haben wir stillschweigend ignoriert, welche Konsequenzen sich ergeben, wenn der Schwerpunkt eines starren Körpers nicht im Koordinatenursprung liegt. Um dies zu untersuchen,

### Steiner'scher Satz

Der Steiner'sche Satz (nach dem Schweizer Mathematiker *Jakob Steiner*, 1796–1863) besagt: Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit der Masse  $M$  um eine beliebige Drehachse im Abstand  $l$  von seinem Schwerpunkt ist gleich dem Trägheitsmoment um die parallele Drehachse, die durch den Schwerpunkt verläuft, plus  $Ml^2$ .

Der Steiner'sche Satz erlaubt eine Zerlegung des Trägheitsmoments. Dies ist insbesondere bei der Berechnung von Trägheitsmomenten aus einfachen Formen zusammengesetzter Objekte hilfreich. Hierbei ist zu betonen, dass die Definition des Trägheitstensors additiv ist. Der Trägheitstensor eines starren Körpers ist somit die Summe der Trägheitstensoren seiner Teile bezüglich des gleichen Ursprungs.

**Achtung** Für einen freien starren Körper verwendet man in der Regel den Schwerpunkt als Koordinatenursprung, da dann die kinetische Energie und der Drehimpuls in jeweils zwei separate Anteile zerfallen (Schwerpunktsbeitrag und Beitrag relativ zum Schwerpunkt; siehe (4.13) und (4.21)). Ist der starre Körper in einem Punkt fixiert (d. h., darf sich der starre Körper nur so bewegen, dass der besagte Punkt ortsfest ist), so dient dieser Punkt normalerweise als Koordinatenursprung, und der Steiner'sche Satz findet Verwendung. ▶

### Frage 12

Überlegen Sie sich, dass das Trägheitsmoment  $\Theta_n$  bezüglich einer Achse  $\hat{\mathbf{n}}$  minimal wird, wenn diese durch den Schwerpunkt läuft.

## Diagonalform des Trägheitstensors

Wir haben gesehen, dass die Komponenten des Trägheitstensors zeitabhängig sein können. Wählt man allerdings ein mit dem starren Körper korotierendes Koordinatensystem, tritt die Zeitabhängigkeit nicht auf. Dennoch ist das Koordinatensystem durch diese Wahl noch nicht eindeutig festgelegt, denn die Ausrichtung der Achsen relativ zum starren Körper ist zunächst beliebig.

Der Trägheitstensor hat lauter reelle Einträge und ist symmetrisch,  $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ . In der linearen Algebra wird gezeigt (siehe auch den „Mathematischen Hintergrund“ 4.2), dass man unter diesen Umständen ein Koordinatensystem finden kann, in dem der Trägheitstensor Diagonalform annimmt. Hier und im Folgenden bezeichnet der Stern Größen in demjenigen körperfesten Koordinatensystem  $S^*$ , in dem der Trägheitstensor diagonal ist:

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Die drei Einträge  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$  und  $\Theta_3$  sind dann reell; sie werden *Eigenwerte* der Matrix  $\Theta$  genannt. Man überführt den Trägheitstensor  $\Theta$  durch eine *Ähnlichkeitstransformation* in Diagonalform, d. h.

$$\Theta^* = \mathbf{R}^\top \Theta \mathbf{R} \quad \text{oder} \quad \Theta_{ij}^* = r_{ki} r_{lj} \Theta_{kl}, \quad (4.63)$$

wobei  $\mathbf{R}$  eine geeignete orthogonale Matrix ist. Letztlich handelt es sich bei (4.63) um eine durch  $\mathbf{R}$  vermittelte Drehung des Koordinatensystems.

**Achtung** Eine allgemeine Ähnlichkeitstransformation erfordert keine orthogonale, sondern nur eine invertierbare Matrix. Da wir aber in der Physik in der Regel an längen- und winkeltreuen Koordinatentransformationen interessiert sind, beschränken wir uns auf orthogonale Matrizen. ◀

Die Koordinatenachsen, bezüglich derer die Matrix diagonal ist, bezeichnet man als *Hauptträgheitsachsen* oder *Hauptachsen*. Die Trägheitsmomente bezüglich der Hauptachsen, also die Eigenwerte des Trägheitstensors, bezeichnet man als *Hauptträgheitsmomente*.

### Diagonalform des Trägheitstensors

Da der Trägheitstensor als reellwertige, symmetrische Matrix zweiter Ordnung dargestellt werden kann, hat der Trägheitstensor stets drei reelle Eigenwerte, die Hauptträgheitsmomente. Es gibt ein Koordinatensystem, in dem der Trägheitstensor diagonal ist. Man nennt diejenige Transformation, die auf das Diagonalsystem führt, *Hauptachsentransformation*.

Doch welchen praktischen Vorteil bietet die Diagonalisierung des Trägheitstensors? Wie wird sie erreicht? Und welche physikalische Bedeutung hat sie? Diesen Fragen wollen wir uns im folgenden Abschnitt widmen.

## Diagonalisierung von Matrizen

Die Frage nach dem praktischen Vorteil der Diagonalisierung lässt sich leicht beantworten, indem man sich die Ausdrücke (4.19) und (4.23) für die kinetische Energie und den Drehimpuls im Diagonalsystem anschaut:

$$T_R^* = \frac{1}{2} \Theta_1 \omega_1^{*2} + \frac{1}{2} \Theta_2 \omega_2^{*2} + \frac{1}{2} \Theta_3 \omega_3^{*2}, \quad (4.64)$$

$$L_{R,1}^* = \Theta_1 \omega_1^*, \quad L_{R,2}^* = \Theta_2 \omega_2^*, \quad L_{R,3}^* = \Theta_3 \omega_3^*. \quad (4.65)$$

Insbesondere der Ausdruck für die Komponenten des Drehimpulses wird wesentlich vereinfacht, da  $L_{R,1}^*$  nun nur von  $\omega_1^*$  usw. abhängt. Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit sind parallel, wenn die Drehung um eine der drei Hauptachsen erfolgt.

## 4.2 Mathematischer Hintergrund: Diagonalisierbarkeit

**Einführung** Wir wissen, dass lineare Abbildungen bezüglich verschiedener Basen unterschiedliche Matrixdarstellungen haben. Nun stellen wir uns die Frage, ob wir eine Basis finden können, für die diese Form möglichst einfach ist. Die einfachste Gestalt ist die einer Diagonalmatrix, denn dann können wir das Ergebnis der linearen Abbildung (d. h. der Matrix-Vektor-Multiplikation) sofort hinschreiben:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 v_1 \\ \vdots \\ a_N v_N \end{pmatrix}.$$

Wir identifizieren hier lineare Abbildungen mit ihren zugehörigen Matrizen und umgekehrt.

**Eigenwerte und Eigenvektoren** Ist  $\phi$  eine lineare Abbildung eines  $K$ -Vektorraumes  $V$  in sich selbst, dann heißt  $\lambda \in K$  *Eigenwert* von  $\phi$ , wenn es ein  $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$  gibt mit  $\phi(v) = \lambda v$ . Jedes  $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ , für das die Gleichung  $\phi(v) = \lambda v$  gilt, heißt *Eigenvektor* von  $\phi$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Für Matrizen  $A$  lautet die entsprechende Gleichung dann  $Av = \lambda v$ . Anschaulich bedeutet dies, dass  $\phi$  nur die Länge, nicht aber die Richtung eines Eigenvektors ändert.

Nicht jede lineare Abbildung hat Eigenvektoren. Betrachten wir z. B. eine Drehung im  $\mathbb{R}^2$  um  $90^\circ$ . Es gibt keinen Vektor, bei dem sich nur die Länge ändert, also hat diese Abbildung keine Eigenvektoren. Hier muss man jedoch aufpassen: Betrachtet man dieselbe Abbildung im  $\mathbb{C}^2$ , so gibt es Eigenvektoren.

Zu einem Eigenwert kann es mehrere linear unabhängige Eigenvektoren geben (Beispiel: Einheitsmatrix). Gibt es genau  $m$  linear unabhängige Eigenvektoren zu einem Eigenwert, so heißt dieser Eigenwert  $m$ -fach *entartet*.

**Diagonalisierbarkeit** Eine lineare Abbildung  $\phi$  eines  $K$ -Vektorraumes  $V$  in sich selbst heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis von  $V$  gibt, die aus lauter Eigenvektoren von  $\phi$  besteht.

Eine Matrix  $A$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix  $S$  gibt, sodass

$$S^{-1}AS = D$$

gilt, wobei  $D$  eine Diagonalmatrix ist. In diesem Fall stehen in der Diagonale von  $D$  genau die Eigenwerte von  $A$ , und in den Spalten der Matrix  $S$  stehen die zugehörigen Eigenvektoren von  $A$  zum jeweiligen Eigenwert. Man spricht hier von einer *Ähnlichkeitstransformation* und sagt, dass  $A$  und  $D$  zueinander ähnliche Matrizen sind.

Da nicht jede Matrix Eigenvektoren hat, ist auch nicht jede Matrix diagonalisierbar. Auch wenn eine Matrix Eigenwerte

hat, so ist sie nicht zwingend diagonalisierbar. Zum Beispiel hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte 1 und 2, ist aber nicht diagonalisierbar.

Hat eine  $N \times N$ -Matrix  $N$  verschiedene Eigenvektoren, so ist sie auf jeden Fall diagonalisierbar. Dieses Kriterium ist aber nur hinreichend und nicht notwendig. Zum Beispiel hat die Einheitsmatrix nur den Eigenwert 1, ist aber diagonalisierbar (denn sie ist ja in Diagonalfom).

Ein wichtiges Resultat ist, dass jede symmetrische Matrix  $A$  mit reellen Einträgen diagonalisierbar ist. In diesem Fall ist die Matrix  $S$  orthogonal, und die Eigenwerte von  $A$  sind alle reell.

**Charakteristisches Polynom** Es ist im Allgemeinen recht mühsam, die Eigenwerte einer Matrix zu bestimmen. Dafür verwendet man üblicherweise das charakteristische Polynom.

Ist  $A$  eine  $N \times N$ -Matrix, so nennen wir

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

das *charakteristische Polynom* von  $A$ . Betrachtet man eine Matrix bezüglich einer anderen Basis, so erhält man dasselbe charakteristische Polynom.

Für eine Matrix ist nun  $\lambda$  genau dann ein Eigenwert, wenn es Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

**Beispiel: Drehungen im  $\mathbb{R}^2$**  Wir betrachten als Beispiel eine Drehung um den Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi]$  im  $\mathbb{R}^2$ :

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Anschaulich kann es nur Eigenvektoren für  $\varphi = 0$  (identische Abbildung) oder  $\varphi = \pi$  (jedem Vektor  $v$  wird gerade  $-v$  zugeordnet) geben. Das charakteristische Polynom ist

$$P_{A_\varphi}(\lambda) = (\lambda - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1$$

und besitzt die Nullstellen  $\lambda_{1,2} = \cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi - 1}$ . Das Polynom hat also nur dann reelle Nullstellen, wenn  $\cos \varphi = \pm 1$ . Dies gilt wie erwartet dann, wenn  $\varphi = 0$  oder  $\varphi = \pi$ . In dem Fall liegt  $A_\varphi$  bereits in Diagonalfom mit zweifach entarteten Eigenwerten vor.

### Literatur

- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., SpringerSpektrum (2014)
- Fischer, G.: Lineare Algebra. 15. Aufl., Vieweg (2005)

**Frage 13**

Zeigen Sie (4.64) und (4.65), indem Sie von den allgemeinen Ausdrücken in (4.19) und (4.23) ausgehen und den diagonalen Trägheitstensor aus (4.62) verwenden.

Das Rechnen mit dem diagonalisierten Trägheitstensor bietet in erster Linie Rechenvereinfachungen im Vergleich zu einem nichtdiagonalen Trägheitstensor. Physikalisch sind beide Wege aber völlig äquivalent, da man dieselben Gleichungen nur in verschiedenen Koordinatensystemen betrachtet. Dies wurde bereits in Kap. 2 im Zusammenhang mit den passiven Koordinatentransformationen erläutert.

Doch wie findet man nun das Koordinatensystem  $S^*$ , in dem der Trägheitstensor diagonal ist? Dazu greift man auf Methoden aus der linearen Algebra zurück. Im „Mathematischen Hintergrund“ 4.2 werden Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix eingeführt: Man nennt  $\lambda$  einen Eigenwert und  $v$  den zugehörigen Eigenvektor einer diagonalisierbaren Matrix  $A$ , wenn

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0 \quad (4.66)$$

erfüllt ist. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die Diagonalelemente einer diagonalen Matrix den Eigenwerten entsprechen. Kennt man daher alle Eigenwerte einer diagonalisierbaren  $N \times N$ -Matrix  $A$ , so kann man direkt

$$A^* = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (4.67)$$

aufschreiben. Die Spalten der zugehörigen Transformationsmatrix  $R$ , die mittels  $A^* = R^\top AR$  die Matrix  $A$  in ihre Diagonalform  $A^*$  überführt, sind gerade die den Eigenwerten  $\lambda_i$  zugehörigen Eigenvektoren  $v_i$ . Die Diagonalform  $\Theta^*$  des Trägheitstensors lässt sich also direkt aufschreiben, wenn die drei Eigenwerte (d. h. Hauptträgheitsmomente  $\Theta_i$ ) bekannt sind. Ist man zusätzlich an dem speziellen Koordinatensystem interessiert, in dem der Trägheitstensor diagonal ist, muss man außerdem die Eigenvektoren (d. h. die Hauptachsen) kennen.

Dies führt uns nun auf die wichtige Frage, wie man zum einen die Eigenwerte und zum anderen die Eigenvektoren konkret erhält. Offenbar ist der Nullvektor  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^\top$  stets Eigenvektor, da  $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$  immer erfüllt ist. Wir suchen daher nach nichttrivialen Eigenvektoren, also solchen, die nicht null sind. Die Eigenwerte lassen sich dann ausgehend von der sogenannten *Eigenwertgleichung* (gelegentlich auch *Säkulargleichung* genannt) bestimmen:

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (4.68)$$

Hier wird ausgenutzt, dass (4.66) nur dann nichttriviale Lösungen für  $v$  haben kann, wenn die Determinante der Matrix  $(A - \lambda I)$  verschwindet.

Jeder Eigenwert  $\lambda$  einer diagonalisierbaren Matrix  $A$  erfüllt (4.68) und ist somit Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $\det(A - \lambda I)$  (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 4.2). Der

Trägheitstensor  $\Theta$  wird durch eine  $3 \times 3$ -Matrix dargestellt und führt somit auf ein Polynom dritter Ordnung in  $\lambda$ . Gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra hat ein charakteristisches Polynom der Ordnung  $N$  stets  $N$  Lösungen, die jedoch komplex sein können (komplexe Zahlen werden in Kap. 6 diskutiert). Jedoch sind die Eigenwerte symmetrischer Matrizen stets reell. Aufgrund seiner Symmetrie hat  $\Theta$  also immer drei reelle Eigenwerte  $\Theta_i$  (wie es für alle physikalischen Beobachtungsgrößen gefordert wird).

Die Eigenwerte von  $\Theta$  können *entartet* sein. Entweder sind alle Eigenwerte  $\Theta_i$  unterschiedlich (keine Entartung), oder zwei oder sogar drei Eigenwerte sind identisch (Entartung). Dies wird durch ein Beispiel klar:

**Trägheitsmomente zweier Punktmassen**

In (4.20) haben wir bereits einen nichtdiagonalen Trägheitstensor gefunden. Nach einer kurzen Rechnung findet man das charakteristische Polynom

$$\det(\Theta I - \Theta) = (\Theta - Ml^2)(\Theta^2 - \Theta Ml^2) \quad (4.69)$$

als Bestimmungsgleichung für die drei Hauptträgheitsmomente  $\Theta_i$ .

Überprüfen Sie (4.69).

Es müssen nun alle drei Lösungen der Gleichung

$$\Theta(\Theta - Ml^2)^2 = 0 \quad (4.70)$$

bestimmt werden. Offensichtlich sind die Eigenwerte  $\Theta_1 = \Theta_2 = Ml^2$  und  $\Theta_3 = 0$ . Somit lautet der diagonalisierte Trägheitstensor

$$\Theta^* = Ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Der Eigenwert  $Ml^2$  ist zweifach entartet. Dies liegt daran, dass es eine Symmetriearchse gibt. Dies ist die Achse, auf der beide Punktmassen liegen. Die Existenz von Symmetriearchsen ist stets ein Indikator für entartete Eigenwerte des Trägheitstensors. Weiterhin ist einer der Eigenwerte null, da alle Massenelemente bezüglich der Symmetriearchse den Abstand null besitzen und das entsprechende Trägheitsmoment verschwindet. Dies kann bei realen dreidimensional ausgedehnten Objekten niemals der Fall sein. ▶

Ist ein Eigenwert  $\lambda$  bekannt, lässt sich der entsprechende Eigenvektor  $v$  ausgehend von

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (4.72)$$

berechnen. In drei Dimensionen erhält man ausgeschrieben drei Gleichungen für die Komponenten des Vektors  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 &= 0, \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + a_{23}v_3 &= 0, \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + (a_{33} - \lambda)v_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Es ist nun ein Vektor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$  zu finden, der alle drei Gleichungen simultan erfüllt. Eigenvektoren sind allgemein nur bis auf ihre Länge festgelegt.

#### Frage 14

Zeigen Sie, dass der Vektor  $\alpha\mathbf{v}$  (mit einer beliebigen Zahl  $\alpha$ ) ein Eigenvektor der Matrix  $\mathbf{A}$  mit Eigenwert  $\lambda$  ist, falls  $\mathbf{v}$  ein Eigenvektor von  $\mathbf{A}$  mit demselben Eigenwert ist.

Die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind paarweise orthogonal (Aufgabe 4.2). Sind Eigenwerte jedoch entartet, sind die entsprechenden Eigenvektoren nicht automatisch paarweise orthogonal. Allerdings können Eigenvektoren stets paarweise orthogonal gewählt werden, wie das folgende Beispiel zeigt. Dies wird in Bd. 3, Kap. 3 wieder aufgegriffen.

#### Hauptachsen zweier Punktmasse

Wir führen das Auffinden der Eigenvektoren anhand von (4.20) und den bekannten Eigenwerten aus (4.71) vor. Wir beginnen mit dem nichtentarteten Eigenwert: Für  $\Theta_3 = 0$  folgt

$$\begin{aligned} (\sin^2 \varphi - 0)v_x - \sin \varphi \cos \varphi v_y &= 0, \\ -\sin \varphi \cos \varphi v_x + (\cos^2 \varphi - 0)v_y &= 0, \\ (1 - 0)v_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Die ersten beiden Gleichungen sind für  $\sin \varphi \neq 0$  und  $\cos \varphi \neq 0$  identisch und lauten  $v_x \sin \varphi - v_y \cos \varphi = 0$ . Die dritte besagt, dass  $v_z = 0$  sein muss. Offensichtlich erfüllt der Vektor

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

alle Anforderungen. Der zum Eigenwert  $\Theta_3$  gehörige Eigenvektor  $\mathbf{v}_3$  entspricht somit erwartungsgemäß gerade derjenigen Achse, die durch die Lage der beiden Punktmasse definiert ist.

Für den entarteten Eigenwert  $\Theta_1 = \Theta_2 = Ml^2$  ergibt sich die folgende Situation:

$$\begin{aligned} (\sin^2 \varphi - 1)v_1 - \sin \varphi \cos \varphi v_2 &= 0, \\ -\sin \varphi \cos \varphi v_1 + (\cos^2 \varphi - 1)v_2 &= 0, \\ (1 - 1)v_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Wieder sind die ersten beiden Gleichungen identisch und lauten  $v_x \cos \varphi - v_y \sin \varphi = 0$ . Die dritte Gleichung ist stets gültig; die Komponente  $v_z$  ist damit nicht eingeschränkt und kann beliebig gewählt werden. Da der Eigenwert zweifach entartet ist, sind zwei Vektoren  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  so zu konstruieren, dass sie zum einen (4.76) erfüllen und zum anderen zum ersten gefundenen Eigenvektor  $\mathbf{v}_3$  paarweise orthogonal sind. Hierzu wählen wir einen ersten Vektor  $\mathbf{v}_1$ , der senkrecht auf  $\mathbf{v}_3$  steht und (4.76) erfüllt. Dies ist beispielsweise der Vektor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.77)$$

Der verbleibende Vektor muss senkrecht auf den beiden ersten stehen. Man findet ihn beispielsweise über das Kreuzprodukt

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Insgesamt sind nun alle Forderungen erfüllt. Genauso gut hätte man auch mit einem anderen Vektor  $\mathbf{v}_2$  beginnen können, der senkrecht auf  $\mathbf{v}_3$  steht. ▶

Man kann starre Körper anhand der Entartung ihrer Hauptträgheitsmomente unterscheiden. Hat der Trägheitstensor drei gleiche Eigenwerte, spricht man von einem *Kugelkreisel*, da diese Eigenschaft auch für eine Kugel gilt (Abschn. 4.5). Sind nur zwei Eigenwerte identisch, nennt man den starren Körper einen *symmetrischen Kreisel*. Im Gegensatz dazu hat man es mit einem *unsymmetrischen Kreisel* zu tun, wenn alle Hauptträgheitsmomente unterschiedlich sind.

#### Vorgehen zum Auffinden des diagonalisierten Trägheitstensors

1. Berechnen Sie den Trägheitstensor mit (4.19).
2. Stellen Sie die Eigenwertgleichung (4.68) auf und lösen Sie diese.
3. Falls benötigt oder erwünscht, können die Hauptachsen mittels (4.73) bestimmt werden. Sind Eigenwerte entartet, müssen die entsprechenden Eigenvektoren so gewählt werden, dass alle drei paarweise orthogonal sind.

**Achtung** Für viele einfache starre Körper sind bereits am Anfang die Symmetrieachsen offensichtlich. Diese Achsen sollten als Koordinatenachsen definiert werden. Der Trägheitstensor ist dann automatisch diagonal, wie wir noch am Beispiel eines Quaders in (4.90) sehen werden. ▶

Der Trägheitstensor ist immer diagonal, wenn alle drei Eigenwerte identisch sind. Zum einen ist dann jede Achse eine Symmetriearchse. Zum anderen ist der Trägheitstensor ein Vielfaches der Einheitsmatrix, die unter orthogonalen Transformationen immer diagonal bleibt,  $\mathbf{R}^\top \mathbf{I} \mathbf{R} = \mathbf{I}$ . Somit gibt es kein Koordinatensystem, in dem solch ein Trägheitstensor nicht diagonal ist.

Sind die drei Eigenwerte  $\Theta_k$  und normierten Eigenvektoren  $\hat{\mathbf{v}}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) des Trägheitstensors in einem Koordinatensystem bekannt, kann er in der Form

$$\Theta_{ij} = \sum_{k=1}^3 \hat{v}_{k,i} \Theta_k \hat{v}_{k,j} \quad (4.79)$$

dargestellt werden. Ist das gewählte Koordinatensystem gerade das Hauptachsensystem (d. h. gilt  $\hat{\mathbf{v}}_k = \hat{\mathbf{e}}_k$ ), so folgt hieraus (4.62).

## 4.5 Kontinuierliche Massenverteilungen

Für kontinuierliche Massenverteilungen wird die Summation über Punktmassen durch eine Integration über Massenelemente ersetzt. Die dazu benötigten Volumenintegrale werden eingeführt. Um solche Integrationen in krummlinigen Koordinatensystemen durchführen zu können, benötigt man die sogenannte Jacobi-Determinante. Es werden die Trägheitstensoren einiger einfacher Massenverteilungen berechnet.

### Übergang zu einer kontinuierlichen Massenverteilung

Bisher wurden nur diskrete Systeme mit  $N$  Punktmassen  $m_a$  betrachtet. In Kap. 3 wurden zwar bereits ausgedehnte Körper verwendet, ihre Zusammensetzung und der Einfluss auf das Rotationsverhalten jedoch nicht näher untersucht. Wie berechnet man nun den Trägheitstensor für solch ein kontinuierliches Objekt? Es ist unpraktisch, ihn sich als Ansammlung von  $N$  Punktmassen vorzustellen, die gegenseitig feste Abstände haben. Man mache sich beispielsweise klar, dass allein ein faustgroßer Stein aus etwa  $10^{24}$  Atomen besteht. In solchen Fällen führt man einen Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$ ,  $m_a \rightarrow 0$  durch, sodass die Gesamtmasse  $M$  konstant bleibt. Der starre Körper besteht dann aus lauter infinitesimalen Massen- bzw. Volumenelementen am Ort  $\mathbf{x}$  mit Masse

$$dm = \mu(\mathbf{x}) dV, \quad (4.80)$$

wobei  $\mu(\mathbf{x})$  die Massendichte am Ort  $\mathbf{x}$  und  $dV$  ein infinitesimales Volumenelement ist.

Im einfachsten Fall ist die Massendichte im gesamten Körper konstant; sie kann generell aber variieren (wie z. B. beim Erdkörper). Die Summation wird durch ein *Volumenintegral* ersetzt,

hier am Beispiel der Gesamtmasse verdeutlicht:

$$M = \sum_a m_a \rightarrow \iiint dx_1 dx_2 dx_3 \mu(\mathbf{x}) =: \int dV \mu(\mathbf{x}). \quad (4.81)$$

Die Integrationsgrenzen sind dabei so zu wählen, dass sie dem Rand des Körpers entsprechen. Wie solch eine Integration konkret durchgeführt werden kann, werden wir in Kürze an einem Beispiel vorführen. Vorher notieren wir jedoch noch die Definition des Trägheitstensors für eine kontinuierliche Massenverteilung.

### Trägheitstensor einer kontinuierlichen Massenverteilung

Die Komponenten des Trägheitstensors für eine kontinuierliche Massenverteilung  $\mu(\mathbf{x})$  lauten

$$\Theta_{ij} = \int dV \mu(\mathbf{x}) (x^2 \delta_{ij} - x_i x_j). \quad (4.82)$$

### Frage 15

Überlegen Sie sich, dass (4.82) aus (4.18) folgt, wenn man den in (4.81) dargestellten Übergang als Vorlage verwendet. Der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  mit den drei Komponenten  $x_i$  ist dabei die Integrationsvariable.

**Achtung** Alle Ergebnisse, die für einen aus diskreten Punktmassen zusammengesetzten starren Körper gelten, können ohne Einschränkung auf einen kontinuierlichen starren Körper übertragen werden, da sie für eine beliebige Anzahl  $N$  und daher auch für  $N \rightarrow \infty$  gelten.

### Volumen und Trägheitstensor eines Quaders

Im Allgemeinen haben Volumenintegrale die Form

$$I = \iiint dx_1 dx_2 dx_3 f(x_1, x_2, x_3). \quad (4.83)$$

Die skalare Funktion  $f$  kann auch durch vektor- oder tensorwertige Funktionen ersetzt werden; die Integration ist dann für jede Komponente einzeln auszuführen. Ein wichtiger Aspekt bei der Integration ist die korrekte Handhabung der Integrationsgrenzen.

Betrachten wir zunächst das einfache Beispiel eines homogenen Quaders, dessen Volumen wir berechnen wollen. Der Quader habe die Kantenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  und sei entlang der Achsen  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$  und  $\hat{\mathbf{e}}_3$  ausgerichtet. Der Mittelpunkt liege im Ursprung. Dann läuft die  $x_1$ -Integration über das Intervall  $[-a/2, +a/2]$

und analog für die beiden übrigen Achsen. Das Volumen erhält man für  $f(\mathbf{x}) = 1$  innerhalb des Quaders:

$$V = \int dV = \int_{-a/2}^{+a/2} dx_1 \int_{-b/2}^{+b/2} dx_2 \int_{-c/2}^{+c/2} dx_3. \quad (4.84)$$

Hier wurde ausgenutzt, dass man ein Mehrfachintegral als ein Produkt von Einfachintegralen schreiben kann. In diesem Fall sind die Integrationen voneinander unabhängig, und man kann z. B. zuerst die Integration über  $x_3$  ausführen:

$$\int_{-c/2}^{+c/2} dx_3 = c. \quad (4.85)$$

Die beiden übrigen Integrationen ergeben  $b$  und  $a$ , und das Volumen ist – wenig überraschend –  $V = abc$ .

Für den Trägheitstensor eines homogenen Quaders setzt man  $f(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})(x^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$ , wobei  $\mu(\mathbf{x}) = \mu = \text{const}$  ist. Wir beginnen mit der Komponente  $\Theta_{11}$  des Trägheitstensors und schreiben wegen  $\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ :

$$\Theta_{11} = \mu \int_{-a/2}^{+a/2} dx_1 \int_{-b/2}^{+b/2} dx_2 \int_{-c/2}^{+c/2} dx_3 (x_2^2 + x_3^2). \quad (4.86)$$

Die  $x_1$ -Integration ist trivial und ergibt einen Faktor  $a$ . Die  $x_2$ -Integration liefert den Faktor  $(b^3/12 + x_3^2 b)$ . Dieser Faktor wird durch die noch fehlende  $x_3$ -Integration zu  $(b^3 c/12 + bc^3/12)$ . Verwendet man das Volumen  $V = abc$  und die Gesamtmasse  $M = \mu V$ , ergibt sich somit

$$\Theta_{11} = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2). \quad (4.87)$$

### Frage 16

Machen Sie sich klar, dass wegen Symmetrieverlegungen die beiden restlichen Diagonalelemente

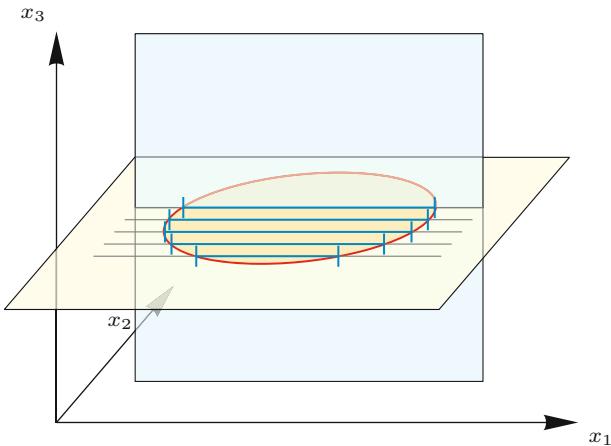
$$\Theta_{22} = \frac{1}{12} M (a^2 + c^2), \quad \Theta_{33} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \quad (4.88)$$

lauten müssen.

Wir berechnen noch das Deviationsmoment

$$\Theta_{12} = -\mu \int_{-a/2}^{+a/2} dx_1 \int_{-b/2}^{+b/2} dx_2 \int_{-c/2}^{+c/2} dx_3 x_1 x_2. \quad (4.89)$$

Man sieht schnell, dass sowohl die  $x_1$ - als auch die  $x_2$ -Integration auf einen Faktor null führen, da  $x_1$  bzw.  $x_2$  ungerade Funktionen sind. Somit ist  $\Theta_{12} = 0$ . Eine ähnliche Argumentation wie bei den Trägheitsmomenten führt auf das Ergebnis,



**Abb. 4.7** Zur Integration des Kugelvolumens in kartesischen Koordinaten. Für einen festgehaltenen Wert  $x_3$  (gelbe Ebene) erhält man einen Kreis (rot) als Schnittkurve von Ebene und Kugel (zur besseren Übersicht nicht dargestellt). Man erkennt, dass die Grenzen für die  $x_1$ -Integration (blaue Striche) vom gewählten Wert  $x_3$  (blaue Ebene und parallele graue Linien) abhängen. Der Radius des Schnittkreises wiederum hängt von der Wahl von  $x_3$  ab. Somit sind die Integrationsgrenzen nicht unabhängig und müssen parametrisiert werden

dass alle anderen Deviationsmomente ebenfalls verschwinden. Der gesamte Trägheitstensor des Quaders lautet damit

$$(\Theta_{ij}) = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (4.90)$$

**Achtung** Gl. (4.90) gilt nur für das gewählte Achsensystem. Ist der Quader nicht parallel zu den Koordinatenachsen ausgerichtet oder liegt der Schwerpunkt nicht im Ursprung, ist der Trägheitstensor verschieden. Die Deviationsmomente sind dann nicht zwangsläufig null (sie sind sogar in den meisten Fällen ungleich null). ◀

## Volumen einer Kugel in kartesischen Koordinaten

Schwieriger wird es, wenn das Volumen einer Kugel mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $M$  im Ursprung  $O$  bestimmt werden soll. In diesem Fall sind die Integrationsgrenzen nämlich voneinander abhängig, da der Innenbereich der Kugel durch

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq R \quad (4.91)$$

definiert ist (Abb. 4.7). Angenommen,  $x_1$  und  $x_2$  sind bereits gegeben, dann kann  $x_3$  nur zwischen  $-(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}$  und  $+(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}$  liegen. Ist  $x_1$  vorgegeben, muss  $x_2$  aus dem

Intervall  $[-(R^2 - x_1^2)^{1/2}, +(R^2 - x_1^2)^{1/2}]$  stammen. Wir berechnen zunächst das  $x_3$ -Integral:

$$\int_{-\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}^{+\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_3 = 2\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}. \quad (4.92)$$

Bei der  $x_2$ -Integration muss dieses Ergebnis berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} 2 & \int_{-\sqrt{R^2 - x_1^2}}^{+\sqrt{R^2 - x_1^2}} \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} dx_2 \\ &= \left[ x_2 \sqrt{R^2 - x_2^2} + R^2 \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{R^2}} \right]_{-\sqrt{R^2 - x_1^2}}^{+\sqrt{R^2 - x_1^2}} \\ &= \pi R^2 = \pi (R^2 - x_1^2). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Im zweiten Schritt wurde zur Vereinfachung  $R^2 := R^2 - x_1^2$  als Abkürzung verwendet. Dies ist kein Problem, da  $x_2$  die Integrationsvariable ist und  $R$  und  $x_1$  diesbezüglich Konstanten sind.

### Frage 17

Rechnen Sie (4.93) nach. Suchen Sie dazu gegebenenfalls nach einer geeigneten Stammfunktion in der mathematischen Literatur.

Nun muss noch die  $x_1$ -Integration ausgeführt werden:

$$\pi \int_{-R}^{+R} (R^2 - x_1^2) dx_1 = \pi \left[ R^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3} \right]_{-R}^{+R} = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (4.94)$$

Dies lässt sich anschaulich interpretieren: Das Volumen der Kugel ergibt sich als unendliche Summe über Kreiszylinder mit jeweiligem Radius  $R^2 - x_1^2$ . Auch dieses Ergebnis war zu erwarten. Allerdings überrascht die Komplexität der Rechnung. Die Ursache dafür ist, dass kartesische Koordinaten für kugelsymmetrische Probleme schlecht geeignet sind. Zwar lässt sich das Ergebnis berechnen, doch ist der Aufwand unverhältnismäßig groß. Im Folgenden wird eine angepasste Methode vorgestellt, mit der sich Rechnungen dieser Art erheblich vereinfachen lassen.

## Koordinatentransformationen und die Jacobi-Determinante

Es hat sich bereits in Abschn. 2.5 herausgestellt, dass an das gegebene Problem angepasste Koordinaten Berechnungen erheblich vereinfachen können. Beispielsweise sollten für kugelsymmetrische Systeme in der Regel Kugelkoordinaten verwendet werden. Es stellt sich die Frage, ob dieses Vorgehen nicht auch

bei der Volumenintegration hilfreich ist. Und tatsächlich ist dies der Fall.

Betrachten wir wie in Abschn. 2.5 einen Satz allgemeiner Koordinaten  $q_i(x_j)$ , die von den kartesischen Koordinaten  $x_j$  abhängen. Ihre totale Ableitung lautet

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial x_j} dx_j = (\partial_{x_j} q_i) dx_j. \quad (4.95)$$

Es gilt die Einstein'sche Summenkonvention, und die Terme  $\partial_{x_j} q_i$  bilden die Komponenten der Matrix  $\bar{J} = (\bar{J}_{ij}) = (\partial_{x_j} q_i)$ , sodass

$$dq = \bar{J} dx \quad (4.96)$$

gilt. Ist diese Matrix invertierbar, d. h., gilt  $\det(\bar{J}) \neq 0$ , folgt mit  $J := \bar{J}^{-1} = (J_{ij}) = (\partial_{q_i} x_j)$

$$dx = J dq. \quad (4.97)$$

### Jacobi-Matrix

Die durch

$$J_{ij} := \partial_{q_i} x_j \quad (4.98)$$

definierte Matrix einer Koordinatentransformation  $q_i(x_j)$  mit Umkehrung  $x_i(q_j)$  heißt *Jacobi-Matrix* der Koordinatentransformation. Häufig schreibt man auch

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}. \quad (4.99)$$

### Frage 18

Die Berechnung einer Jacobi-Matrix lässt sich am einfachen Beispiel der Zylinderkoordinaten in (2.109) veranschaulichen. Man zeige, dass das Ergebnis

$$J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

ist. Verwenden Sie dazu  $q_1 = \varrho$ ,  $q_2 = \varphi$  und  $q_3 = z$ .

Wie kann man dieses Zwischenergebnis ausnutzen, um die Volumenintegration zu vereinfachen? Hierzu drückt man das kartesische Volumenelement  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  mithilfe der Differenziale  $dq_i$  aus. Wir greifen dazu auf den *Transformationssatz* aus der höheren Analysis zurück (Arens et al. 2012).

### Volumenelemente unter Koordinatentransformationen, Jacobi-Determinante

Beim Übergang von kartesischen Koordinaten  $x_i$  zu allgemeinen Koordinaten  $q_j$  erfüllt das Volumenelement

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 = \det(J) dq_1 dq_2 dq_3, \quad (4.101)$$

wobei  $\mathbf{J}$  die zugehörige Jacobi-Matrix ist. Die Größe  $\det(\mathbf{J})$  nennt man die *Jacobi-Determinante* oder *Funktionaldeterminante* mit der häufigen Schreibweise

$$\det(\mathbf{J}) = \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right). \quad (4.102)$$

Aus (4.101) folgt sofort für das Volumenintegral einer Funktion  $f(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{x}) dV &= \iiint f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \iiint f[\mathbf{x}(\mathbf{q})] \det(\mathbf{J}(\mathbf{q})) dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (4.103)$$

### Jacobi-Determinante für Kugelkoordinaten

Wir berechnen nun das Volumen einer Kugel mit Radius  $R$  in sphärischen Polarkoordinaten. Aus (2.115) folgt zunächst die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.104)$$

was man schnell durch partielle Ableiten überprüft. Die zugehörige Jacobi-Determinante ist

$$\det(\mathbf{J}) = r^2 \sin \vartheta. \quad (4.105)$$

Somit lautet das Volumenintegral

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \vartheta \\ &= \frac{2\pi}{3} R^3 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Offensichtlich ist diese Rechnung wesentlich einfacher als die für kartesische Koordinaten.

### Frage 19

Zeigen Sie ausgehend von (4.100), dass die Jacobi-Determinante für Zylinderkoordinaten  $\det(\mathbf{J}) = \varrho$  lautet. Veranschaulichen Sie sich dies grafisch und berechnen Sie damit auch das Volumen eines Zylinders.

### Jacobi-Determinanten für Zylinder- und Kugelkoordinaten

Die Jacobi-Determinanten für Zylinder- und Kugelkoordinaten braucht man selbstverständlich nur einmal auszurechnen. Die Ergebnisse

$$\det(\mathbf{J}) = \varrho \quad (4.107)$$

für Zylinderkoordinaten und

$$\det(\mathbf{J}) = r^2 \sin \vartheta \quad (4.108)$$

für Kugelkoordinaten kann man dann für alle entsprechenden Rechnungen direkt verwenden.

### Trägheitstensor einer Kugel

Betrachten wir nun den für viele physikalische und ingenieurtechnische Anwendungen wichtigen Fall einer Kugel mit Radius  $R$  und konstanter Massendichte  $\mu(\mathbf{x}) = \mu = \text{const}$  für  $r \leq R$ . Zunächst ist es sofort ersichtlich, dass die Gesamtmasse

$$M = \frac{4\pi}{3} \mu R^3 \quad (4.109)$$

ist. In Kugelkoordinaten lauten die Komponenten des Trägheitstensors aus (4.82)

$$\Theta_{ij} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \mu (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) r^2 \sin \vartheta. \quad (4.110)$$

Eine Kugel ist ein Körper hoher Symmetrie. Keine Achse ist ausgezeichnet. Dies bedeutet, dass alle drei Trägheitsmomente identisch sein müssen,  $\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33}$ . Dasselbe gilt auch für alle Deviationsmomente, d. h.  $\Theta_{12} = \Theta_{23}$  usw.

Wir wollen zunächst explizit zeigen, dass die Nebendiagonalelemente verschwinden, und betrachten dazu  $\Theta_{12}$ . Es ist

$$\Theta_{12} = -\mu \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^4 \sin^3 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi. \quad (4.111)$$

Die Stammfunktion von  $\cos \varphi \sin \varphi$  ist  $(\sin^2 \varphi)/2$ . Da  $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$  gilt, verschwindet der gesamte Ausdruck für  $\Theta_{12}$ . Eine ähnliche Rechnung gilt für die restlichen Deviationsmomente.

Es verbleibt nur noch die Berechnung für eines der Diagonalelemente des Trägheitstensors. Da der Ausdruck für  $x_3$  am

**Tab. 4.1** Trägheitsmomente bezüglich ihrer Hauptsymmetriechse (und damit auch bezüglich ihres Schwerpunktes) einiger einfacher Objekte mit Gesamtmasse  $M$ . Die Trägheitsmomente von Kugel- und Zylinderschale erhält man, indem man eine kleinere Kugel bzw. einen kleineren Zylinder im Innenraum abzieht (Additivität von Trägheitsmomenten)

Objekt	Trägheitsmoment
Kugel (Radius $R$ )	$2MR^2/5$
Kugelschale (Radien $R_1 < R_2$ )	$2M(R_2^2 - R_1^2)/5$
Hohlkugel (Radius $R$ )	$2MR^2/3$
Zylinder (Radius $R$ )	$MR^2/2$
Zylinderschale (Radien $R_1 < R_2$ )	$M(R_2^2 - R_1^2)/2$
Hohlzylinder (Radius $R$ )	$MR^2$
Quader entlang $a$ -Achse (Seiten $a, b, c$ )	$M(b^2 + c^2)/12$
Kegel (Basisradius $R$ )	$3MR^2/10$

einfachsten ist, berechnen wir  $\Theta_{33}$ :

$$\Theta_{33} = \mu \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi (1 - \cos^2 \vartheta) r^4 \sin \vartheta. \quad (4.112)$$

Wir führen zunächst die  $r$ - und  $\varphi$ -Integrationen aus und erhalten für diese Integrale  $2\pi R^5/5$ . Weiterhin ist

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi d\vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \\ &= \int_{-1}^{+1} d\cos \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) = \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

#### Frage 20

Überprüfen Sie die Rechnung in (4.113), indem Sie  $u = \cos \vartheta$  substituieren (was ein häufiger Trick ist). Als Zwischenergebnis findet man, dass  $d \cos \vartheta = du = -\sin \vartheta d\vartheta$  gilt.

Fügt man alle Zwischenergebnisse zusammen, erhält man das wichtige Ergebnis

$$(\Theta_{ij}) = \frac{2}{5} MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} MR^2 \mathbf{I} \quad (4.114)$$

für den Trägheitstensor einer Kugel. Hier wurde die Gesamtmasse der Kugel aus (4.109) verwendet.

In Aufgabe 4.3 werden einige weitere Trägheitstensoren einfacher Objekte berechnet. In Tab. 4.1 sind die Trägheitsmomente einiger wichtiger Objekte bezüglich ihrer Hauptsymmetriechse zusammengefasst.

## 4.6 Bewegungsgleichungen des starren Körpers

Ausgehend von der Drehmomentgleichung werden die allgemeinen Bewegungsgleichungen für die Rotation des starren Körpers abgeleitet. Im körperfesten System nehmen diese Gleichungen die einfachste Form an, da dort der Trägheitstensor konstant ist. Dies führt auf die Euler-Gleichungen. Anschließend wird die Winkelgeschwindigkeit durch die Zeitableitung der Euler-Winkel ausgedrückt.

### Euler-Gleichungen für die Rotation eines starren Körpers

Es wurde bereits gefunden, dass die Translations- und die Rotationsbewegung des starren Körpers in den meisten Fällen getrennt beschrieben werden können. Im Folgenden interessieren wir uns nur für die Rotation. Die Änderung des Drehimpulses im raumfesten System  $S$  entspricht laut (3.20) dem gesamten äußeren Drehmoment:

$$\mathbf{M}^{(a)} = \dot{\mathbf{L}}. \quad (4.115)$$

Diese Gleichung gilt sowohl für einen frei beweglichen Kreisel (ohne Stützpunkt) als auch für einen Kreisel, der in einem beliebigen Punkt gelagert ist. Der Drehimpuls und das Drehmoment sind dann bezüglich des gestützten Punktes anzugeben, ansonsten bezüglich des Schwerpunktes. Zur Vereinfachung lassen wir den Index des Drehmoments fort und drücken den Drehimpuls durch den Trägheitstensor und die Winkelgeschwindigkeit aus:

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}). \quad (4.116)$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen für die Rotation eines starren Körpers in kompakter (aber für viele konkrete Rechnungen unpraktischer) Form.

#### Frage 21

Machen Sie sich klar, dass der Trägheitstensor  $\boldsymbol{\Theta}$  in (4.116) wie  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{L}$  ebenfalls bezüglich eines möglichen Stützpunktes definiert sein muss.

Gl. (4.116) nimmt in  $S$  ausgeschrieben eine eher ungünstige Form an, da der Trägheitstensor dort allgemein eine Funktion der Zeit ist. Stattdessen nutzt man aus, dass der Trägheitstensor im körperfesten System  $S^*$  konstant ist. Die Zeitableitung wirkt dann nur auf die Winkelgeschwindigkeit. Wir wollen (4.116) daher in  $S^*$  formulieren, wobei wir annehmen, dass beide Ursprünge zusammenfallen (ansonsten lässt sich der Steiner'sche Satz anwenden). Es gilt dann wegen (2.74)

$$\mathbf{R}^\top \mathbf{M}^* = \mathbf{R}^\top (\dot{\mathbf{L}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{L}^*). \quad (4.117)$$

Hier ist  $\mathbf{R}$  die Drehmatrix (4.9), die  $S$  in  $S^*$  überführt. Multiplikation mit  $\mathbf{R}$  von links führt auf

$$\mathbf{M}^* = \dot{\mathbf{L}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{L}^*. \quad (4.118)$$

Es ist zu beachten, dass  $\mathbf{L}^*$  auch für  $\mathbf{M}^* = \mathbf{0}$  im Allgemeinen nicht erhalten ist, da  $S^*$  kein Inertialsystem ist.

### Euler-Gleichungen für die Rotation eines starren Körpers

Die Bewegungsgleichungen für die Rotation eines starren Körpers im körperfesten System lauten

$$\mathbf{M}^* = \boldsymbol{\Theta}^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times (\boldsymbol{\Theta}^* \boldsymbol{\omega}^*). \quad (4.119)$$

Sie entsprechen den Newton'schen Bewegungsgleichungen für die Translation einer Punktmasse.

Die Komponentenform von (4.119) erfüllt im Hauptachsensystem

$$\begin{aligned} M_1^* &= \Theta_1 \dot{\omega}_1^* + \omega_2^* \omega_3^* (\Theta_3 - \Theta_2), \\ M_2^* &= \Theta_2 \dot{\omega}_2^* + \omega_1^* \omega_3^* (\Theta_1 - \Theta_3), \\ M_3^* &= \Theta_3 \dot{\omega}_3^* + \omega_1^* \omega_2^* (\Theta_2 - \Theta_1). \end{aligned} \quad (4.120)$$

Eine Beschreibung in einem anderen körperfesten System ist zwar möglich, aber mathematisch wesentlich aufwendiger, da der Trägheitstensor dort nicht diagonal ist und Zusatzerme berücksichtigt werden müssen.

#### Frage 22

Zeigen Sie (4.120).

Die Formulierung in  $S^*$  hat allerdings den Nachteil, dass alle äußeren Drehmomente  $\mathbf{M}$ , die in der Regel in  $S$  gegeben sind, zunächst in  $S^*$  (in Form von  $\mathbf{M}^*$ ) umgerechnet werden müssen.

In Aufgabe 4.5 werden die Euler-Gleichungen verwendet, um die Bewegung des physikalischen Pendels zu beschreiben.

## Bewegungsgleichungen mit Euler-Winkel

Die Winkelgeschwindigkeit lässt sich durch die Euler-Winkel ausdrücken. Dazu überlegen wir uns, welche Rolle die Euler-Winkel bei der Drehung des starren Körpers spielen. So haben wir in Abschn. 4.1 gesehen, dass  $\varphi$  für eine Drehung um  $\hat{\mathbf{e}}_3$ ,  $\vartheta$  für eine Drehung um  $\hat{\mathbf{e}}_K$  (Knotenlinie) und  $\psi$  für eine Drehung um  $\hat{\mathbf{e}}_3^*$  zuständig ist. Die drei Euler-Winkel sind unabhängige Koordinaten, d. h., eine beliebige infinitesimale Drehung lässt sich eindeutig durch eine Hintereinanderausführung von Einzeldrehungen  $\hat{\mathbf{e}}_3 d\varphi$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_K d\vartheta$  und  $\hat{\mathbf{e}}_3^* d\psi$  ausdrücken. Somit ist

die *instantane* Winkelgeschwindigkeit die Superposition dieser Einzeldrehungen um diese Achsen, also

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) \hat{\mathbf{e}}_3 + \dot{\vartheta}(t) \hat{\mathbf{e}}_K(t) + \dot{\psi}(t) \hat{\mathbf{e}}_3^*(t). \quad (4.121)$$

Es sei daran erinnert, dass  $\boldsymbol{\omega}$  der abstrakte (physikalische) Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist und dass es sich bei  $\boldsymbol{\omega} dt$  um eine infinitesimale Drehung handelt. Wir erinnern uns an Abschn. 2.3, wo betont wurde, dass infinitesimale Drehungen aufgrund ihrer Linearisierung stets superponiert werden können, endliche Drehungen jedoch nicht.

Um die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit in  $S$  bzw.  $S^*$  zu erhalten, muss  $\boldsymbol{\omega}$  auf die entsprechenden Koordinatenachsen projiziert werden. Wir beginnen mit  $S^*$ . Dazu müssen wir

$$\omega_i^* = \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \quad (4.122)$$

berechnen, wobei  $\boldsymbol{\omega}$  durch (4.121) gegeben ist. Hierzu müssen wir die Vektoren  $\hat{\mathbf{e}}_3$  und  $\hat{\mathbf{e}}_K$  als Linearkombination der  $\hat{\mathbf{e}}_i^*$  schreiben. Aus Abb. 4.3 sieht man zunächst, dass die Knotenlinie

$$\hat{\mathbf{e}}_K = \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1^* - \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2^* \quad (4.123)$$

erfüllt. Aus (4.12) folgt  $\hat{\mathbf{e}}_i^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = r_{ij}$ . Die Entwicklungskoeffizienten liest man aus (4.9) ab:

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \sin \psi \sin \vartheta \hat{\mathbf{e}}_1^* + \cos \psi \sin \vartheta \hat{\mathbf{e}}_2^* + \cos \vartheta \hat{\mathbf{e}}_3^*. \quad (4.124)$$

Die Projektionen sind nun leicht durchzuführen, und man findet

$$\begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \vartheta \\ \cos \psi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

für die Komponenten in  $S^*$ . In Aufgabe 4.6 wird gezeigt, dass die Winkelgeschwindigkeit in  $S$  die Komponenten

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (4.126)$$

besitzt.

Setzt man (4.125) in (4.120) ein, erhält man die Bewegungsgleichungen des starren Körpers ausgedrückt durch die Euler-Winkel. Es handelt sich dabei um drei gewöhnliche Differenzialgleichungen zweiter Ordnung für die drei Winkelkoordinaten  $\varphi$ ,  $\vartheta$  und  $\psi$ .

#### Frage 23

Wir benötigen diese Bewegungsgleichungen nicht, aber sie können als Übung abgeleitet werden.

Die kinetische Energie der Rotation eines starren Körpers ergibt sich durch Einsetzen von (4.125) in (4.64). Für den für uns wich-

tigen Spezialfall eines symmetrischen Kreisels ( $\Theta = \Theta_1 = \Theta_2$ ) erhält man

$$T_R = \frac{\Theta}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2. \quad (4.127)$$

#### Frage 24

Überprüfen Sie die Gültigkeit von (4.127).

Das Herunterrollen eines Zylinders auf einer schiefen Ebene (was ebenfalls die Kenntnis der Trägheitsmomente erfordert) wird in Aufgabe 4.4 behandelt.

## 4.7 Rotation des Kreisels

Das Lösen der Bewegungsgleichungen eines Kreisels ist im Allgemeinen sehr aufwendig. Es gibt allerdings einige verhältnismäßig einfache Fälle, die in diesem Abschnitt diskutiert werden. Dies sind die freien Rotationen um jeweils eine der Hauptachsen einschließlich einer Stabilitätsanalyse und die freie Rotation eines symmetrischen Kreisels. An diesen Beispielen lassen sich bereits die wesentlichen Eigenschaften der Kreiselbewegung verdeutlichen, ohne die Mathematik zu sehr zu strapazieren. Dazu gehört die Präzession, die in der Astronomie eine Rolle spielt.

Weiterhin wird die Rotation eines schweren symmetrischen Kreisels im homogenen Gravitationsfeld angesprochen. Auf eine allgemeine Diskussion unsymmetrischer Kreisel verzichten wir an dieser Stelle. Sie ist für eine Einführung nicht geeignet und wird in Fachbüchern oder -artikeln behandelt (z. B. Klein & Sommerfeld 1965; Gebelein 1932).

### Stabilität der Rotation des kräftefreien Kreisels um seine Hauptachsen

Hier und im Folgenden konzentrieren wir uns auf die Untersuchung der Rotation. Wir nehmen an, dass die Translationsbewegung entweder entkoppelt oder der Kreisel an einem Punkt unterstützt ist. Beide Fälle führen auf die gleichen Bewegungsgleichungen.

Es gibt drei triviale Lösungen für die Rotation eines kräftefreien Kreisels ( $M^* = \mathbf{0}$ ). Offensichtlich erlauben die Bewegungsgleichungen in (4.120) die drei Lösungen

$$\omega_1^* = \text{const}, \quad \omega_2^* = \omega_3^* = 0 \quad (4.128)$$

und zyklisch permuiert. Dies entspricht jeweils einer reinen Drehung um eine der Hauptachsen. In der Realität wird eine Kreiselrotation niemals exakt um eine der Hauptachsen erfolgen.

Wir werden nun sehen, dass eine dieser Lösungen instabil sein kann. Stellvertretend für die beiden anderen Lösungen betrachten wir eine Rotation, die näherungsweise um  $\hat{\mathbf{e}}_1^*$  erfolgt. Die Winkelgeschwindigkeit lautet also  $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)^\top$  mit  $\omega_2^* \ll \omega_1^*$  und  $\omega_3^* \ll \omega_1^*$ . Aus der ersten Gleichung in (4.120) folgt dann, dass die Änderung von  $\omega_1^*$  klein ist, da sie proportional zu  $\omega_2^*$  und  $\omega_3^*$  ist, die beide kleine Größen sind. Wir vernachlässigen alle Terme, die quadratisch in einer kleinen Größe sind. Dies entspricht einer Linearisierung der Bewegungsgleichungen, d. h. einer Taylor-Entwicklung, die nach der linearen Ordnung abgebrochen wird. Man kann daher davon ausgehen, dass die Drehachse für eine gewisse Zeit fast parallel zur ersten Hauptachse ausgerichtet bleibt. Ob die durch  $\omega_2^*$  und  $\omega_3^*$  definierte „Störung“ der Drehachse klein bleibt oder anwächst, entscheidet schließlich darüber, was mit der Drehachse geschehen wird. Dies kann man an den übrigen beiden Bewegungsgleichungen erkennen.

Man kann für  $M^* = \mathbf{0}$  die zweite und dritte Gleichung in (4.120) durch einmaliges Ableiten zu

$$\ddot{\omega}_2^* = -\Omega^2 \omega_2^* \quad (4.129)$$

kombinieren (analog ist auch ein Ausdruck für  $\omega_3^*$  möglich).

#### Frage 25

Zeigen Sie (4.129). Nehmen Sie dabei an, dass  $\dot{\omega}_1^*$  vernachlässigbar klein ist, was anfangs der Fall ist. Es gilt dabei

$$\Omega^2 = \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2 \Theta_3} \omega_1^{*2}. \quad (4.130)$$

Die Lösung von (4.129) ist eine Oszillation, wenn  $\Omega^2$  positiv ist (siehe (1.101)). In diesem Fall ist die Störung periodisch und die Bewegung des starren Körpers stabil. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass  $\Omega^2 > 0$  erfüllt ist, falls  $\Theta_1$  das größte oder das kleinste Trägheitsmoment ist. Ist hingegen  $\Theta_1$  das mittlere Trägheitsmoment, so ist  $\Omega^2 < 0$ , und die Lösung von (4.129) ist eine Exponentialfunktion der Form  $\omega_2^* = A_+ e^{+\Omega|t|} + A_- e^{-\Omega|t|}$ . Dies wird im Allgemeinen zu einer exponentiell wachsenden Störung führen, sodass die Bewegung letztlich instabil ist. Man kann dies leicht mit einem Buch (besser nicht mit diesem!) ausprobieren, das man mit einem Drall in die Luft wirft.

### Stabilität der Rotation eines kräftefreien Kreisels

Die Rotation eines kräftefreien Kreisels ist stabil, wenn sie um die Hauptachse mit dem kleinsten oder größten Trägheitsmoment erfolgt. Im anderen Fall ist die Bewegung instabil.

Stabilitätsanalysen dieser Art sind sehr wichtig; man findet sie häufig in der Physik. Dabei werden die Bewegungsgleichungen

zunächst vereinfacht (z. B. linearisiert) und näherungsweise gelöst. Auf diese Weise lassen sich physikalische Systeme besser verstehen, selbst wenn ihre Bewegungsgleichungen nicht vollständig gelöst werden können.

**Achtung** Es ist dabei zu beachten, dass die Näherungslösungen nur anfangs gültig sind, solange die Linearisierungsannahmen gerechtfertigt sind.

## Der kräftefreie symmetrische Kreisel

Die einfachste nichttriviale Lösung der Euler-Gleichungen erhält man für einen kräftefreien symmetrischen starren Körper. Im körperfesten System  $S^*$  folgt aus (4.120) wegen  $\mathbf{M}^* = \mathbf{0}$  und mit der Wahl  $\Theta = \Theta_1 = \Theta_2$  (Symmetriearchse  $\hat{\mathbf{e}}_3^*$ ):

$$\begin{aligned}\Theta \dot{\omega}_1^* &= \omega_2^* \omega_3^* (\Theta - \Theta_3), \\ \Theta \dot{\omega}_2^* &= \omega_1^* \omega_3^* (\Theta_3 - \Theta), \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3^* &= 0.\end{aligned}\quad (4.131)$$

Man nennt die Symmetriearchse  $\hat{\mathbf{e}}_3^*$  auch die *Figurenachse* eines symmetrischen Kreisels.

Zunächst stellen wir fest, dass  $\omega_3^*$  eine Konstante ist. Ähnlich wie bei der Argumentation, die auf (4.129) geführt hat, findet man hier

$$\ddot{\omega}_1^* = -\left(\frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta}\omega_3^*\right)^2 \omega_1^* \quad (4.132)$$

und einen analogen Ausdruck für  $\ddot{\omega}_2^*$ . Dies führt offensichtlich auf eine harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz

$$\Omega = \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta} \omega_3^*. \quad (4.133)$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\omega_1^* = \omega_{\perp}^* \sin(\Omega t + \phi_0) \quad (4.134)$$

mit den Anfangsbedingungen  $\omega_{\perp}^*$  (Amplitude) und  $\phi_0$  (Phasenwinkel). Je nach Vorzeichen von  $\Omega$  erfolgt die Drehung in die eine oder andere Richtung. Die Bewegung der Figurenachse eines kräftefreien symmetrischen Kreisels ist also immer stabil.

### Frage 26

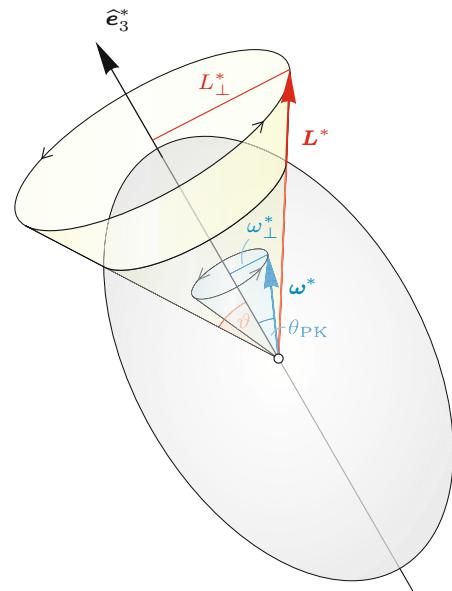
Zeigen Sie, indem Sie (4.134) in (4.131) einsetzen, dass

$$\omega_2^* = \omega_{\perp}^* \cos(\Omega t + \phi_0) \quad (4.135)$$

gilt.

Es folgt direkt, dass die Winkelgeschwindigkeit dem Betrag nach konstant ist:

$$\omega^{*2} = \omega_1^{*2} + \omega_2^{*2} + \omega_3^{*2} = \omega_{\perp}^{*2} + \omega_3^{*2} = \text{const.} \quad (4.136)$$



**Abb. 4.8** Im körperfesten System des kräftefreien symmetrischen Kreisels präzidiert sowohl der Drehimpuls  $\mathbf{L}^*$  als auch die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}^*$  um die Figurenachse  $\hat{\mathbf{e}}_3^*$ . Der durch  $\boldsymbol{\omega}^*$  gebildete Kegel ist der Polkegel, der durch  $\mathbf{L}^*$  gebildete Kegel der Präzessionskegel. Beide haben in der Regel verschiedene Öffnungswinkel

Allerdings präzidiert der Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}^*$  in  $S^*$  mit der Frequenz  $\Omega$  um  $\hat{\mathbf{e}}_3^*$  (Abb. 4.8), d. h.,  $\boldsymbol{\omega}^*$  dreht sich auf einem Kegel, dem sogenannten *Polkegel* oder auch *Gangpolkegel*, um die Figurenachse. Hier ist  $\omega_{\perp}^*$  der konstante Betrag des Anteils der Winkelgeschwindigkeit, der senkrecht auf der Figurenachse steht. Wir wählen nun  $S^*$  so, dass  $\phi_0 = 0$  ist. Dies ist aufgrund der Symmetrie des Kreisels (Invarianz unter Drehungen in der  $\hat{\mathbf{e}}_1^*-\hat{\mathbf{e}}_2^*$ -Ebene) stets möglich.

### Frage 27

Machen Sie sich anhand von Abb. 4.8 klar, dass der Öffnungswinkel des Polkegels durch

$$\theta_{PK} = \arctan \frac{\omega_{\perp}^*}{\omega_3^*} \quad (4.137)$$

gegeben ist.

Der Drehimpuls in  $S^*$  erfüllt  $L_i^* = \Theta_i \omega_i^*$  für jede seiner drei Komponenten  $i$ . Somit präzidiert der Drehimpuls ebenfalls in  $S^*$  um die Figurenachse, und zwar mit der gleichen Frequenz  $\Omega$  wie die Winkelgeschwindigkeit. Der Betrag des Drehimpulses ist

$$L^{*2} = L_1^{*2} + L_2^{*2} + L_3^{*2} = \Theta^2 \omega_{\perp}^{*2} + \Theta_3^2 \omega_3^{*2}. \quad (4.138)$$

Der Winkel  $\vartheta$  ist gerade der Winkel zwischen Drehimpuls und der Figurenachse. Wir wissen, dass der Drehimpuls in  $S^*$  um  $\hat{\mathbf{e}}_3^*$

präzidiert, also muss  $\vartheta$  konstant sein bzw.  $\dot{\vartheta} = 0$ . Aus Abb. 4.8 folgt

$$\vartheta = \arctan \frac{L_{\perp}^*}{L_3^*} = \arctan \frac{\Theta \omega_{\perp}^*}{\Theta_3 \omega_3^*}, \quad (4.139)$$

wobei  $L_{\perp}^*$  der Anteil des Drehimpulses ist, der senkrecht auf der Figurennachse steht. Der Euler-Winkel  $\vartheta$  definiert somit den Öffnungswinkel des sogenannten *Präzessionskegels*. Die Winkel, die  $\omega^*$  und  $L^*$  jeweils mit der  $\hat{e}_3^*$ -Achse einschließen ( $\theta_{PK}$  und  $\vartheta$ ), sind nicht identisch, was man an einem Vergleich von (4.137) und (4.139) erkennt.

Bis zu diesem Punkt haben wir untersucht, wie sich die Drehachse in  $S^*$  verhält. Doch wie sieht die Kreiselbewegung vom raumfesten System  $S$  aus gesehen aus? In  $S$  ist der Drehimpuls  $L$  eine Erhaltungsgröße, nicht jedoch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Wir beginnen zunächst mit der willkürlichen Festlegung, dass der Drehimpulsvektor des Kreisels entlang  $\hat{e}_3$  zeigt, also  $L = L \hat{e}_3 = \text{const}$ .

### Frage 28

Machen Sie sich klar, dass aus  $L = \text{const}$  wegen  $L = \Theta \omega$  im Allgemeinen  $\omega \neq \text{const}$  folgt.

Es bleibt noch die Zeitabhängigkeit der beiden übrigen Euler'schen Winkel zu bestimmen. Ausgehend von (4.125) und  $\dot{\vartheta} = 0$  sieht man zunächst

$$\begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \vartheta \\ \cos \psi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{\perp}^* \sin(\Omega t) \\ \omega_{\perp}^* \cos(\Omega t) \\ \text{const} \end{pmatrix}. \quad (4.140)$$

Die ersten beiden Komponenten dieser Gleichung können wegen der Konstanz von  $\vartheta$  nur dann zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein, wenn

$$\psi = \Omega t \implies \dot{\psi} = \Omega = \text{const} \quad (4.141)$$

und

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_{\perp}^*}{\sin \vartheta} = \text{const} \quad (4.142)$$

sind. Damit ist auch die Gleichung für die dritte Komponente automatisch erfüllt.

### Frage 29

Zeigen Sie mithilfe von (4.139), dass man (4.142) in der Form

$$\varphi(t) = \Omega' t + \varphi_0 \quad (4.143)$$

schreiben kann, wobei

$$\Omega' = \frac{\Theta_3 \omega_3^*}{\Theta \cos \vartheta} \quad (4.144)$$

gilt. Nutzen Sie dabei  $\tan \vartheta = \sin \vartheta / \cos \vartheta$  aus.

### Euler-Winkel des kräftefreien symmetrischen Kreisels

Ein kräftefreier symmetrischer Kreisel erlaubt die Lösung

$$\vartheta(t) = \vartheta_0, \quad \psi(t) = \Omega t + \psi_0, \quad \varphi(t) = \Omega' t + \varphi_0 \quad (4.145)$$

für die Euler-Winkel.

In Aufgabe 4.6 wird außerdem gezeigt, dass

$$\Omega' = \frac{L}{\Theta} \quad (4.146)$$

ist, wobei  $L = |L|$  der Betrag des Drehimpulses ist.

Aus Abb. 4.3 erkennt man, dass sich die Knotenlinie  $\hat{e}_K$  mit einer festen Frequenz  $\dot{\varphi} = \Omega'$  in der durch  $\hat{e}_1$  und  $\hat{e}_2$  aufgespannten Ebene und damit um  $\hat{e}_3$  dreht. Wegen  $\hat{e}_K(t) = \hat{e}_3 \times \hat{e}_3^*(t)$  muss sich daher  $\hat{e}_3^*$  mit derselben Frequenz  $\Omega'$  um  $\hat{e}_3$  auf dem Präzessionskegel bewegen.

### Präzession der Figurennachse im raumfesten System

Die Figurennachse (Symmetriechse) des kräftefreien Kreisels präzidiert im raumfesten System  $S$  mit der Frequenz

$$\Omega' = \frac{\Theta_3 \omega_3^*}{\Theta \cos \vartheta} = \frac{L}{\Theta} \quad (4.147)$$

um die Drehimpulsachse.

Dies ist scheinbar ein Widerspruch zu dem vorherigen Ergebnis, dass sich der Drehimpuls in  $S^*$  (parallel zu  $\hat{e}_3$ ) mit der Frequenz  $\Omega$  (und nicht  $\Omega'$ ) um die Figurennachse (parallel zu  $\hat{e}_3^*$ ) dreht. Tatsächlich sind beide Ergebnisse korrekt. Dies wird in Aufgabe 4.6 noch genauer betrachtet.

Abschließend stellen wir fest, dass in  $S$  der Vektor der Winkelgeschwindigkeit um die Drehimpulsachse ( $\hat{e}_3$ -Achse) präzidiert und sich dabei auf dem *Spurkegel* (auch *Rastpolkegel* genannt) bewegt. Aus (4.126) kann man ablesen, dass diese Präzession mit der Frequenz  $\dot{\varphi} = \Omega'$  erfolgt und dass der Öffnungswinkel

$$\theta_{SK} = \arctan \frac{\dot{\psi} \sin \vartheta}{\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta} = \arctan \frac{\Omega \sin \vartheta}{\Omega' + \Omega \cos \vartheta} \quad (4.148)$$

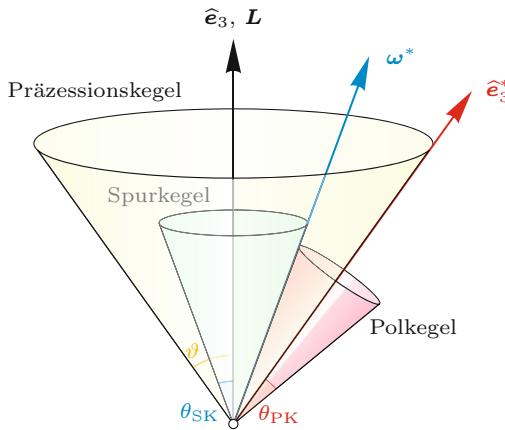
ist. Die gefundenen Präzessionsbewegungen sind in Tab. 4.2 zusammengefasst und in Abb. 4.9 grafisch dargestellt.

### Erde als Kreisel: Polbewegung

Die Erde kann in erster Näherung als ein leicht abgeplatteter, kräftefreier symmetrischer Kreisel betrachtet

**Tab. 4.2** Zusammenfassung der Präzessionsbewegungen des kräftefreien symmetrischen Kreisels. Jede Präzession beschreibt die Bewegung einer Achse auf einem Kegel mit gegebenem Öffnungswinkel um eine andere Achse mit einer festen Frequenz. Der Drehimpuls zeigt in Richtung von  $\hat{e}_3$ , die Figurenachse in Richtung von  $\hat{e}_3^*$ . Das Koordinatensystem ( $S$  oder  $S^*$ ) gibt an, in welchem System diese Präzession beobachtet wird

Beschreibung	Winkel	Achsen	Frequenz	System
Präzessionskegel	$\vartheta$	$\hat{e}_3^*$ um $\hat{e}_3$	$\Omega'$	$S$
Präzessionskegel	$\vartheta$	$\hat{e}_3$ um $\hat{e}_3^*$	$\Omega$	$S^*$
Polkegel	$\theta_{PK}$	$\omega^*$ um $\hat{e}_3^*$	$\Omega$	$S^*$
Spurkegel	$\theta_{SK}$	$\omega$ um $\hat{e}_3$	$\Omega'$	$S$



**Abb. 4.9** Übersicht der Präzessionsbewegungen des kräftefreien symmetrischen Kreisels. Die Figurenachse  $\hat{e}_3^*$  präzidiert auf dem Präzessionskegel mit Öffnungswinkel  $\vartheta$  um die Drehimpulsachse  $\hat{e}_3$ . Im raumfesten System  $S$  präzidiert außerdem die Achse der Winkelgeschwindigkeit auf dem Spurkegel mit Öffnungswinkel  $\theta_{SK}$  um die Drehimpulsachse. Gleichzeitig präzidiert sie im körperfesten System  $S^*$  auf dem Polkegel mit Öffnungswinkel  $\theta_{PK}$  um die Figurenachse. Anschaulich rollt der Polkegel auf dem Spurkegel ab, wobei die Kontaktlinie beider Kegel gerade der Achse der Winkelgeschwindigkeit entspricht

tionstechniken wichtig ist und darin begründet liegt, dass die Erde kein perfekter starrer Körper ist, sondern sich ihre Massenverteilung ständig ändert (z. B. durch Gezeiten oder geologische Aktivität).

Tatsächlich ist die Erde jedoch kein kräftefreier Kreisel. Letztlich üben Sonne und Mond auf die Erde Drehmomente aus. Dies führt zu einer seit der Antike bekannten Präzession der Erdachse, die wesentlich stärker als die hier beschriebene Polbewegung ist, aber eine deutlich längere Periode besitzt. Dies wird in Aufgabe 4.7 vertieft. ▶

## Der schwere symmetrische Kreisel

Abschließend betrachten wir den sogenannten *Lagrange-Kreisel* (nach dem italienischen Mathematiker und Astronomen *Joseph-Louis Lagrange*, 1736–1813). Dies ist ein symmetrischer starrer Körper, der in einem Punkt auf seiner Symmetriechse unterstützt ist und sich in einem homogenen Gravitationsfeld befindet. Er stellt ein einfaches, aber recht realitätsnahes Modell für den Kinderkreisel und den Kreiselkompass dar, der bei der Schifffahrt eine wichtige Rolle spielt. Im Allgemeinen sind die vollen Bewegungsgleichungen in (4.120) zu lösen, wobei das Drehmoment  $M^*$  zu spezifizieren ist.

Die Euler'schen Bewegungsgleichungen gelten im körperfesten System  $S^*$ . Äußere, im raumfesten System  $S$  bekannte Drehmomente müssen daher zunächst in  $S^*$  berechnet werden, um die Bewegungsgleichungen in (4.120) lösen zu können.

Beim schweren symmetrischen Kreisel gibt es drei Erhaltungsgrößen. Nutzt man diese aus, ist es gar nicht erforderlich, die Euler-Gleichungen selbst zu bemühen. Da eine vollständige Lösung des Problems auf elliptische Integrale führt, die an dieser Stelle nicht besprochen werden sollen, beschränken wir uns auf eine qualitative Diskussion der Bewegungsgleichungen.

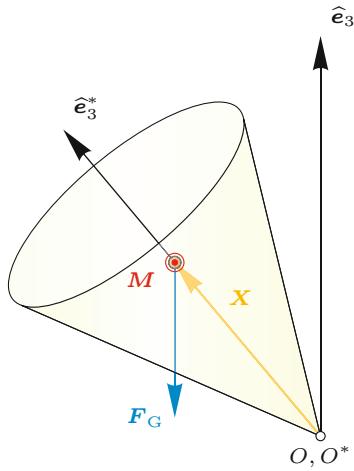
Der Kreisel ist schematisch in Abb. 4.10 gezeigt. Als Ursprünge  $O$  und  $O^*$  von  $S$  und  $S^*$  verwenden wir den Unterstützungs punkt, der sich vom Schwerpunkt unterscheiden soll. Die Figurenachse sei wieder entlang  $\hat{e}_3^*$  ausgerichtet. In  $S^*$  befindet sich der Schwerpunkt am Ort  $X^* = R\hat{e}_3^*$ , in  $S$  am Ort  $X$ . Die Trägheitsmomente  $\Theta = \Theta_1 = \Theta_2$  und  $\Theta_3$  seien bezüglich des Unterstützungs punktes definiert (und weiterhin bezüglich  $S^*$ ). Die Masse des Kreisels sei  $m$ .

### Frage 30

Rufen Sie sich den Steiner'schen Satz in Erinnerung und überlegen Sie sich, wie die Trägheitsmomente bezüglich des Schwerpunktes aussehen. ( $\Theta_3$  bleibt unverändert, und  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  (mit  $\Theta_1 = \Theta_2$ ) sind im Schwerpunktsystem jeweils um  $mR^2$  kleiner.)

Die Gravitationskraft zeige in  $S$  senkrecht nach unten:

$$\mathbf{F} = -mg\hat{e}_3. \quad (4.150)$$



**Abb. 4.10** Schwerer Kreisel betrachtet im Laborsystem  $S$ . Der schwere Kreisel ist an einem Punkt unterstützt, der sowohl dem Ursprung  $O$  von  $S$  als auch dem Ursprung  $O^*$  des körperfesten Systems  $S^*$  entspricht. Der Schwerpunkt befindet sich am Ort  $X$ . Auf ihn wirkt die Gravitationskraft  $\mathbf{F}_G$  entlang der negativen  $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Achse. Dies führt zu einem Drehmoment  $M$ , das aus der Papierebene hinauszeigt. Die Figurenachse des Kreisels ist  $\hat{\mathbf{e}}_3^*$

Daraus ergibt sich das Drehmoment

$$\mathbf{M} = \mathbf{X} \times \mathbf{F} = -mgR\hat{\mathbf{e}}_3^* \times \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (4.151)$$

Das Drehmoment steht somit senkrecht auf der Figurenachse und der Wirkungsrichtung der Gravitationskraft. Offensichtlich sind dann die Projektionen

$$L_3 = \mathfrak{L} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \quad \text{und} \quad L_3^* = \mathfrak{L} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3^* \quad (4.152)$$

konstant, wobei  $\mathfrak{L}$  der abstrakte Drehimpulsvektor ist. Wir haben also zwei Konstanten der Bewegung gefunden. Da das homogene Gravitationsfeld konservativ ist, ist auch die Gesamtenergie  $E$  des Kreisels konstant. Sie ist die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie. Die potenzielle Energie ist

$$V = mg\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{X} = mgR\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3^*. \quad (4.153)$$

Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2}\Theta(\omega_1^{*2} + \omega_2^{*2}) + \frac{1}{2}\Theta_3\omega_3^{*2}. \quad (4.154)$$

### Erhaltungsgrößen des schweren Kreisels

Für einen unterstützten symmetrischen Kreisel im homogenen Schwerefeld findet man drei Erhaltungsgrößen: die Projektion des Drehimpulses auf die Figurenachse und auf die Achse, entlang der das Schwerefeld wirkt, sowie die Gesamtenergie.

**Achtung** Der aufmerksame Leser könnte hier fragen, ob wir den Beitrag der Schwerpunktsbewegung vergessen haben. Dies

ist nicht der Fall, da die kinetische Energie, die in der Rotation steckt, bezüglich des ruhenden Unterstützungspunktes angegeben wurde. Offensichtlich kann dies nur korrekt sein, wenn der Trägheitstensor bezüglich dieses Punktes verwendet wird. Genau das hatten wir am Anfang allerdings verlangt. ◀

Wir geben nun die drei gefundenen Erhaltungsgrößen als Funktion der Euler-Winkel an. Gl. (4.125) führt direkt auf

$$L_3^* = \Theta_3\omega_3^* = \Theta_3(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}) = \text{const.} \quad (4.155)$$

Für die Komponente  $L_3$  des Drehimpulses in  $S$  findet man zunächst wegen (4.12)

$$L_3 = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathfrak{L} = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_i^* L_i^* = r_{i3} L_i^*. \quad (4.156)$$

Dies lässt sich umschreiben in

$$\begin{aligned} L_3 &= \Theta(r_{13}\omega_1^* + r_{23}\omega_2^*) + \Theta_3 r_{33}\omega_3^* \\ &= \Theta(r_{13}\omega_1^* + r_{23}\omega_2^* + r_{33}\omega_3^*) + (\Theta_3 - \Theta)r_{33}\omega_3^* \\ &= \Theta\omega_3 + (\Theta_3 - \Theta)r_{33}\omega_3^* = \Theta\omega_3 + (\Theta_3 - \Theta)\omega_3^* \cos\vartheta. \end{aligned} \quad (4.157)$$

In der dritten Zeile wurde  $r_{ij}\omega_i^* = \omega_j$ , d. h.  $\mathbf{R}^{-1}\omega^* = \omega$ , und im letzten Schritt  $r_{33} = \cos\vartheta$  ausgenutzt. Es lassen sich schließlich noch  $\omega_3$  und  $\omega_3^*$  mit (4.125), (4.126) und (4.155) ersetzen:

$$L_3 = \Theta\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + L_3^* \cos\vartheta = \text{const.} \quad (4.158)$$

### Frage 31

Rechnen Sie alle Schritte nach, die auf (4.158) führen.

Die Energie ist wegen (4.127) und  $\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3^* = \cos\vartheta$

$$\begin{aligned} E &= \frac{\Theta}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta) + \frac{\Theta_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta)^2 + mgR\cos\vartheta \\ &= \text{const.} \end{aligned} \quad (4.159)$$

Man kann sowohl  $\dot{\varphi}$  als auch  $\dot{\psi}$  aus der Energie eliminieren und durch die konstanten Drehimpulse ersetzen. Dies führt auf die Differenzialgleichung

$$E = \frac{\Theta}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{(L_3 - L_3^*\cos\vartheta)^2}{2\Theta\sin^2\vartheta} + \frac{L_3^{*2}}{2\Theta_3} + mgR\cos\vartheta \quad (4.160)$$

erster Ordnung für  $\vartheta$ . Hier bietet sich eine Substitution mit

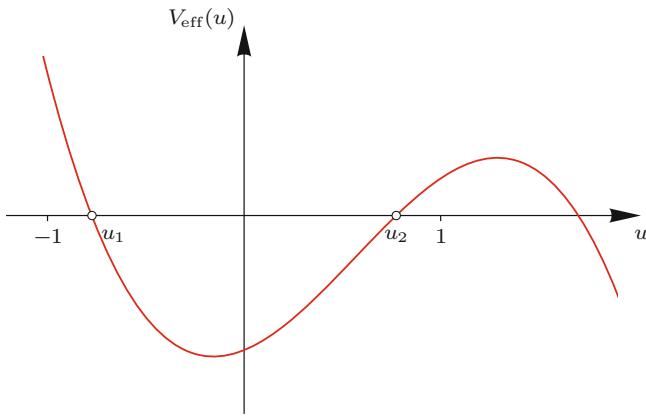
$$u = \cos\vartheta \quad (4.161)$$

an. Man erhält die Differenzialgleichung

$$\dot{u}^2 + V_{\text{eff}}(u) = 0 \quad (4.162)$$

mit

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(u) &= \frac{2}{\Theta} \left( \frac{L_3^{*2}}{2\Theta_3} + mgRu - E \right) (1 - u^2) + \left( \frac{L_3 - L_3^*u}{\Theta} \right)^2 \\ &= (C_1 + C_2u)(1 - u^2) + (C_3 - C_4u)^2, \end{aligned} \quad (4.163)$$



**Abb. 4.11** Die Funktion  $V_{\text{eff}}(u)$  für die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels ist im Intervall  $-1 < u_1 \leq u_2 < 1$  negativ. Die Figurenachse kann sich nur im Bereich  $u_1 \leq \cos \vartheta \leq u_2$  aufhalten; sie oszilliert zwischen diesen beiden Umkehrpunkten (Nutation)

wobei die vier Größen  $C_1, \dots, C_4$  Konstanten sind. Die implizite Lösung von (4.162) lässt sich sofort hinschreiben:

$$t - t_0 = \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{(C_1 + C_2 u') (u'^2 - 1) - (C_3 - C_4 u')^2}}. \quad (4.164)$$

Eine allgemeine analytische Untersuchung führt auf die sogenannten elliptischen Integrale (die auftreten, da  $V_{\text{eff}}(u)$  ein Polynom dritter Ordnung in  $u$  ist). Wir wollen an dieser Stelle darauf verzichten. Allerdings erinnern wir uns, dass wir bereits (z. B. in Abschn. 3.2) Gleichungen der Form (4.162) betrachtet haben. Man kann  $\dot{u}^2$  als die kinetische Energie und  $V_{\text{eff}}(u)$  als

die potentielle Energie der Variablen  $u$  auffassen und die möglichen Bewegungen von  $u$  qualitativ bzw. grafisch untersuchen.

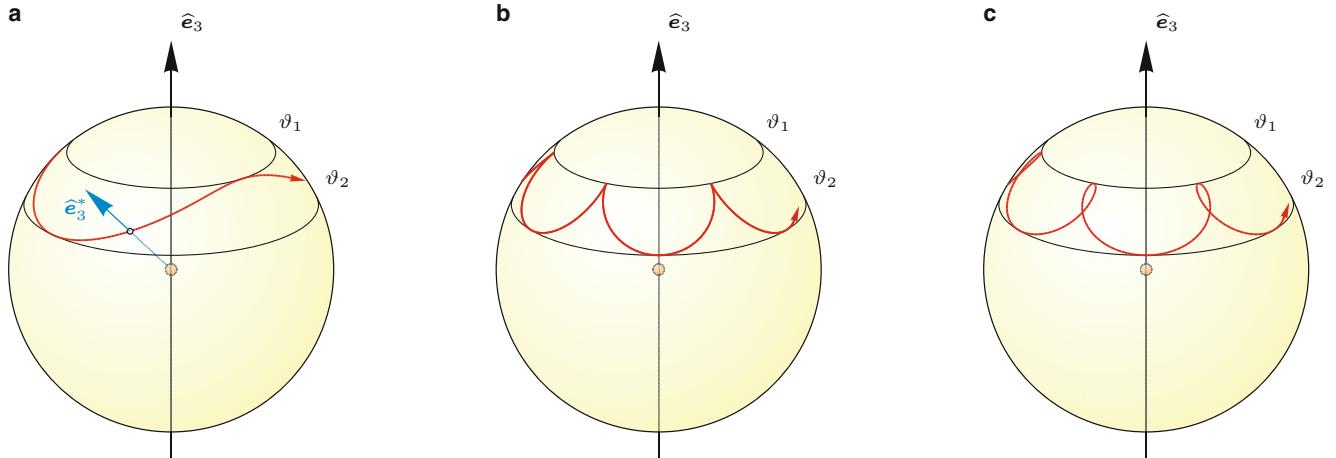
### Frage 32

Schauen Sie sich die grafische Diskussion der Bewegung im effektiven Potenzial in Abschn. 3.2 erneut an. Wie kann man die dortigen Ergebnisse auf das Problem hier anwenden?

Offensichtlich muss  $V_{\text{eff}}(u)$  nichtpositiv sein, um eine physikalische Lösung zu gestatten. Wegen (4.161) kann  $u$  nur aus dem Intervall  $[-1, 1]$  stammen. Das kubische Polynom  $V_{\text{eff}}(u)$  muss daher irgendwo in diesem Intervall negative Werte annehmen, damit es eine physikalische Lösung gibt. Weiterhin erkennt man, dass  $V_{\text{eff}}(u)$  für  $u = \pm 1$  positiv ist. Daher muss es dann zwei Nullstellen  $-1 < u_1 \leq u_2 < 1$  geben. Die Bewegung des Systems ist auf das Intervall  $[u_1, u_2]$  beschränkt. Die dritte Nullstelle erfüllt  $u_3 > 1$  und ist für uns nicht von Interesse. Die Funktion  $V_{\text{eff}}(u)$  ist in Abb. 4.11 qualitativ dargestellt. Sind die Werte  $u_1$  und  $u_2$  verschieden, pendelt die Figurenachse zwischen  $\vartheta_1 = \arccos u_1$  und  $\vartheta_2 = \arccos u_2$  hin und her. Diese Bewegung nennt man *Nutation* des schweren Kreisels.

Legt man eine gedachte Einheitskugel um den Kreisel, so wird sie an einem Punkt, dem *Durchstoßpunkt*, von der Figurenachse durchstoßen (Abb. 4.12). Seine Lage auf der Einheitskugel wird durch die Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  festgelegt. Die Kurve, die der Durchstoßpunkt im Laufe der Zeit durchläuft, ist der *Locus der Figurenachse*. Man nennt die Bewegung von  $\varphi$  die *Präzession des schweren Kreisels*. Im Allgemeinen ist die Bewegung des schweren Kreisels eine Überlagerung von Präzession und Nutation. Aus (4.158) folgt die Bewegungsgleichung

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3 - L_3^* \cos \vartheta}{\Theta \sin^2 \vartheta}. \quad (4.165)$$



**Abb. 4.12** Nutation des schweren symmetrischen Kreisels. Der Schnittpunkt der Figurenachse  $\hat{e}_3^*$  (blau) mit der Einheitskugel um den Unterstützungs punkt (gelb) bewegt sich im Laufe der Zeit und bildet den Locus (rot). Je nach Wahl der Anfangsbedingungen sind verschiedene Bewegungsformen möglich. Die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  ändert ihr Vorzeichen in a nicht. In b verschwindet  $\dot{\varphi}$  für  $\vartheta = \vartheta_1$ . In c ändert  $\dot{\varphi}$  das Vorzeichen während der Nutation

Wir definieren  $u_L := L_3/L_3^* = \cos \vartheta_L$  und haben damit

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3^*}{\Theta \sin^2 \vartheta} (\cos \vartheta_L - \cos \vartheta). \quad (4.166)$$

Nun unterscheiden wir drei Fälle:

1.  $\vartheta_L < \vartheta_1 < \vartheta_2$  oder  $\vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta_L$ : Hier ändert sich das Vorzeichen von  $\dot{\varphi}$  niemals, und der Locus bewegt sich gemäß Abb. 4.12a.
2.  $\vartheta_L = \vartheta_1$  oder  $\vartheta_L = \vartheta_2$ : Dies führt auf eine Bewegung wie in Abb. 4.12b, bei der periodisch  $\dot{\vartheta}$  und  $\dot{\varphi}$  gleichzeitig verschwinden.
3.  $\vartheta_1 < \vartheta_L < \vartheta_2$ : In diesem Fall ändert  $\dot{\varphi}$  während der Nutation das Vorzeichen. Der Locus hat dann eine ähnliche Gestalt wie in Abb. 4.12c.

Die Anfangsbedingungen lassen sich so wählen, dass  $u_1 = u_2$  gilt. Dann sind  $\vartheta$  und  $\dot{\varphi}$  beide konstant, und man spricht von *regulärer Präzession*. In Aufgabe 4.7 wird untersucht, welchen

Einfluss die durch Sonne und Mond verursachten Drehmomente auf die Erdachse haben.

Man könnte naiv erwarten, dass der Kreisel aufgrund der Gravitation umfällt. Dies kann aber wegen der Drehimpulserhaltung nicht geschehen. Ein schwerer Kreisel, der im Idealfall keinen Reibungskräften ausgesetzt ist, fällt niemals um. Stattdessen weicht die Figurenachse seitlich aus, und es kommt zur Präzession.

Die Dynamik von  $\psi$  ist weniger wichtig, da sie nur die Rotation des Kreisels um seine eigene Achse beschreibt und keinen Einfluss auf den Locus nimmt. Falls gewünscht, folgt die Bewegung von  $\psi$  aus (4.155) und (4.158).

### Frage 33

Man hätte statt des hier vorgestellten Lösungsweges direkt die Euler-Gleichungen aufintegrieren können. Warum ist dies nicht zu empfehlen? Denken Sie dabei daran, welcher Ordnung die entsprechenden Differenzialgleichungen sind und was dies für ihre Handhabbarkeit bedeutet.

## Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- leichte Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
- mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
- anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständen auch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

**4.1 • Eigenschaften des Trägheitstensors** Man zeige, dass ein beliebiger Trägheitstensor folgende Eigenschaften besitzt:

- Alle Trägheitsmomente (Diagonalelemente) sind nichtnegativ.
- Kein Trägheitsmoment ist größer als die Summe der übrigen beiden.

**Lösungshinweis:** Am besten verwendet man zur Lösung der Aufgabe entweder (4.18) oder (4.82).

**4.2 • Orthogonalität der Eigenvektoren** Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren zu nichtentarteten (ungleichen) Eigenwerten einer symmetrischen Matrix  $A$  orthogonal sind.

**Lösungshinweis:** Zeigen Sie zunächst, dass für zwei Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$  immer  $(Av_1) \cdot v_2 = (Av_2) \cdot v_1$  gilt. Weitere Eigenschaften von symmetrischen Matrizen werden in Bd. 3, Kap. 3 besprochen.

**4.3 •• Berechnung von Trägheitstensoren** Um die Anwendung von Volumenintegralen zu vertiefen, bietet es sich an, die Trägheitstensoren einiger einfacher Objekte mit homogener Massendichte zu bestimmen. Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunktes für

- eine Kugelschale mit Radius  $R$  (Masse  $M$  verteilt auf der unendlich dünnen Kugeloberfläche),
- einen Zylinder mit Höhe  $H$  und Radius  $R$ ,
- einen Hohlzylinder mit Höhe  $H$  und Radius  $R$  (Masse  $M$  verteilt auf der unendlich dünnen Mantelfläche),
- einen Kreiskegel mit Höhe  $H$  und Basisradius  $R$ .

Für welches Verhältnis  $H/R$  handelt es sich bei den letzten drei Beispielen um Kugelkreisel?

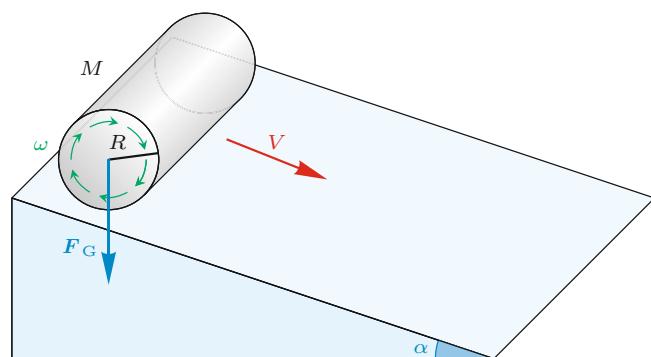
**Lösungshinweis:** Verwenden Sie jeweils das auf das Problem angepasste Koordinatensystem. Zur Behandlung der Kugelschale und des Hohlzylinders ist es ratsam, die Massendichte durch eine Oberflächenmassendichte  $\sigma(x) = \text{const}$  zu ersetzen. In der Integration ist dann statt des Volumenintegrals ein Oberflächenintegral bei konstantem Radius  $R$  zu berechnen. Legen

Sie für die Berechnung des Kegels den Ursprung zunächst in die Spitze des Kegels. Sie dürfen weiterhin verwenden, dass der Schwerpunkt des Kegels von der Spitze ( $z = 0$ ) aus gesehen bei  $z = 3H/4$  liegt.

**4.4 •• Rollender Zylinder** Ein anfänglich ruhender Zylinder rolle eine schiefe Ebene hinunter (Abb. 4.13). Seine Drehachse sei dabei exakt quer zur Neigung ausgerichtet. Der Neigungswinkel der Ebene ist  $\alpha$ . Der Zylinder hat eine homogene Dichte, Masse  $M$  und Radius  $R$ .

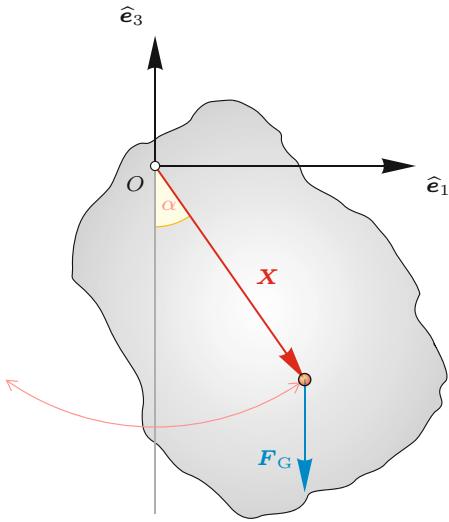
- Wenn man annimmt, dass der Zylinder rollt und nicht gleitet, welche Relation gilt dann zwischen der Geschwindigkeit  $V$ , mit der sich der Schwerpunkt bewegt, und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Zylinders um den Schwerpunkt?
- Bestimmen Sie die kinetische Energie des Zylinders, die sich aus der Translations- und Rotationsenergie ergibt.
- Wie groß ist die Komponente der nach unten zeigenden Gravitationskraft  $|F_G| = Mg$  entlang der schiefen Ebene?
- Wie stark wird der Schwerpunkt des Zylinders entlang der schiefen Ebene beschleunigt? Nutzen Sie dazu die Energieerhaltung aus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

**Lösungshinweis:** Das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich seiner Symmetriechse ist  $MR^2/2$ .



**Abb. 4.13** Ein Zylinder (Radius  $R$  und Masse  $M$ ) rollt unter dem Einfluss der Gravitationskraft  $F_G$  eine schiefe Ebene mit Neigung  $\alpha$  hinunter. Dabei bewegt sich sein Schwerpunkt mit Geschwindigkeit  $V$ , und der Mantel dreht sich mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

**4.5 •• Physikalisches Pendel** Im Gegensatz zu einem *mathematischen Pendel* (Punktmasse an masselosem Stab oder Schnur) beschreibt ein *physikalisches Pendel* einen ausgedehnten starren Körper, der an einem Punkt fixiert ist und nur um eine vorgegebene Achse schwingen kann (Abb. 4.14). Man stelle sich einen beliebigen starren Körper mit Trägheitstensor  $\Theta$  bezüglich seines Schwerpunktes vor. Der Fixpunkt liege im Ursprung  $O$  des raumfesten Systems  $S$ , und der Schwerpunkt befindet sich am Ort  $X(t)$ . Die Drehachse sei  $\hat{e}_2$  in  $S$ . Es wirke die Schwerkraft  $F_G = -mg\hat{e}_3$ , wobei  $m$  die Gesamtmasse des starren Körpers ist. Der Winkel zwischen  $-\hat{e}_3$  und  $X$  ist  $\alpha$ , sodass  $\alpha = 0$  der Ruhelage entspricht.



**Abb. 4.14** Physikalisches Pendel aus dem Laborsystem  $S$  beobachtet. Das Pendel ist an einem Punkt  $O$  (Ursprung von  $S$ ) aufgehängt, der Schwerpunkt befindet sich am Ort  $X$ . Durch die Gravitationskraft  $F_G$  kommt es zu einer Schwingung in der  $\hat{e}_1$ - $\hat{e}_3$ -Ebene

- (a) Wie groß ist das Trägheitsmoment des starren Körpers bezüglich der Drehachse und des Fixpunktes?
- (b) Wie lautet die Drehmomentengleichung in diesem Fall?
- (c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter der Annahme, dass der Winkel  $\alpha$  klein ist und deshalb die auftretende trigonometrische Funktion linearisiert werden kann.
- (d) Würde es die Schwingungsdauer beeinflussen, wenn der starre Körper durch einen anderen starren Körper aus einem anderen Material ersetzt wird, der jedoch exakt dieselbe Form besitzt? Nehmen Sie dabei an, dass die jeweiligen Körper homogen sind.

**4.6 ••• Kräftefreier symmetrischer Kreisel** Die Rotation des kräftefreien symmetrischen Kreisels soll genauer untersucht werden.

- (a) Entwickeln Sie die Figurenachse  $\hat{e}_3^*$  nach den Basisvektoren  $\hat{e}_i$  im raumfesten System  $S$  und die Drehimpulsachse  $\hat{e}_3$  nach den Basisvektoren  $\hat{e}_i^*$  im körperfesten System  $S^*$ . Verwenden Sie dazu die Transformationsmatrix  $R$  in (4.9).

- (b) Zeigen Sie, dass sowohl  $\hat{e}_3^*$  in  $S$  als auch  $\hat{e}_3$  in  $S^*$  präzidiert, und geben Sie jeweils die Präzessionsfrequenz an. Beachten Sie dabei die Lösung der Euler-Winkel in (4.145).
- (c) Begründen Sie anhand der Struktur der Matrix  $R$ , dass beide Frequenzen nicht identisch sind. Wie groß ist ihr Verhältnis? Wie lautet die Bedingung, dass beide Frequenzen identisch sind?
- (d) Scheinbar kann die Frequenz  $\Omega'$  beliebig groß werden, wenn  $\cos \vartheta \rightarrow 0$ . Zeigen Sie, dass  $\Omega' = L/\Theta$  ist, und begründen Sie damit, warum  $\Omega'$  stets endlich bleibt.
- (e) Mit den erhaltenen Zwischenergebnissen ist es relativ leicht, die Gültigkeit von (4.126) zu zeigen: Berechnen Sie die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in  $S$ . Gehen Sie dabei von (4.121) aus.

**4.7 •• Erde als schwerer Kreisel** Hätte die Erde eine perfekt kugelförmige (d. h. isotrope) Massenverteilung, so könnten weder Mond noch Sonne ein Drehmoment auf die Erde ausüben. Allerdings ist die Erde ein abgeflachtes Ellipsoid mit

$$\Delta\Theta = \Theta - \Theta_3 > 0, \quad \frac{\Delta\Theta}{\Theta} \approx \frac{1}{300}. \quad (4.167)$$

Die Erde erfährt daher Drehmomente aufgrund der Gravitationskräfte von Sonne und Mond. Diese lassen sich näherungsweise durch

$$\mathbf{M}_i = \frac{3GM_i}{2d_i^3} \cos \vartheta_0 \Delta\Theta (\hat{e}_3^* \times \hat{e}_3) \quad (4.168)$$

beschreiben. Das ungestrichene Inertialsystem sei das des Sonnensystems. Der Index  $i$  steht für „Sonne“ oder „Mond“. Der Winkel  $\vartheta_0 = 23,5^\circ$  ist die Neigung der Erdachse bezüglich ihrer Umlaufebene um die Sonne, in welcher sich in guter Näherung auch der Mond befindet. Die restlichen Größen sind die Gravitationskonstante  $G$ , die Abstände  $d_i$  zu Sonne bzw. Mond sowie die Massen  $M_i$  von Sonne bzw. Mond. Wir nehmen hier an, dass die Figurenachse der Erde mit der Drehimpulsachse zusammenfällt, d. h.

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}\hat{e}_3. \quad (4.169)$$

Der Richtungsvektor  $\hat{e}_3$  steht senkrecht auf der Umlaufebene; somit ist  $\vartheta_0$  auch der Winkel zwischen  $\hat{e}_3$  und  $\hat{e}_3^*$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die beiden Drehmomente (4.168) den Betrag des Drehimpulses der Erde nicht beeinflussen.
- (b) Zeigen Sie

$$L_3 = \mathbf{L} \cdot \hat{e}_3 = L \cos \vartheta_0 = \text{const.} \quad (4.170)$$

Da aus der ersten Teilaufgabe  $L = \text{const}$  folgt, muss der Neigungswinkel  $\vartheta_0$  ebenfalls konstant sein.

- (c) Wir wollen nun untersuchen, wie schnell die Figurenachse der Erde im Raum (d. h. im ungestrichenen Inertialsystem) präzidiert. Finden Sie dazu einen Ausdruck für  $\frac{d\hat{e}_3^*}{dt}$  und bringen Sie ihn in die Form

$$\frac{d\hat{e}_3^*}{dt} = \boldsymbol{\omega}_P \times \hat{e}_3^*. \quad (4.171)$$

Hier ist  $\omega_p$  gerade die gesuchte Präzessionsfrequenz der Erdachse aufgrund der Drehmomente, die von Sonne und Mond erzeugt werden. Bestimmen Sie den funktionalen Ausdruck für  $\omega_p$ . Ermitteln Sie die Beiträge von Sonne und

Mond einzeln. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse qualitativ mit den Gezeitenkräften in Abschn. 3.6.

- (d) Welcher numerische Wert von  $\omega_p = |\omega_p|$  ergibt sich dadurch?

## Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

**4.1** Für die Lösung benutzen wir (4.82), was die Gültigkeit nicht einschränkt.

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\Theta_{11} &= \int dV \mu(\mathbf{x}) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2) \\ &= \int dV \mu(\mathbf{x}) (x_2^2 + x_3^2), \\ \Theta_{22} &= \int dV \mu(\mathbf{x}) (x_1^2 + x_3^2), \\ \Theta_{33} &= \int dV \mu(\mathbf{x}) (x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}\quad (4.172)$$

Offensichtlich müssen die Trägheitsmomente positiv sein, da alle  $x_i^2$  und  $\mu(\mathbf{x})$  stets positiv sind.

(b) Mit dem Teilergebnis aus der ersten Aufgabe findet man

$$\Theta_{11} + \Theta_{22} = \int dV \mu(\mathbf{x}) (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \Theta_{33}. \quad (4.173)$$

Dieses Ergebnis ist ohne Einschränkung auf die anderen Trägheitsmomente übertragbar.

**4.2** Wir betrachten eine symmetrische Matrix  $\mathbf{A}$  und zwei ihrer Eigenwerte ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) und dazugehörigen Eigenvektoren ( $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ). Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 &= \lambda_1\mathbf{v}_1, \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_2 &= \lambda_2\mathbf{v}_2.\end{aligned}\quad (4.174)$$

Wir multiplizieren nun die erste Gleichung mit  $\mathbf{v}_2$  und die zweite mit  $\mathbf{v}_1$  und berechnen die Differenz der resultierenden Gleichungen. Dabei nutzen wir aus, dass die Matrix symmetrisch ist, d. h.

$$(\mathbf{A}\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = A_{\alpha\beta} v_{1,\beta} v_{2,\alpha} = A_{\beta\alpha} v_{2,\alpha} v_{1,\beta} = (\mathbf{A}\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1. \quad (4.175)$$

Es folgt

$$0 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \lambda_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2. \quad (4.176)$$

Da die Eigenwerte nicht entartet sind, müssen die Eigenvektoren orthogonal sein.

### 4.3

(a) Wie bei einer Kugel sind auch bei einer Kugelschale die Deviationsmomente allesamt null. Aufgrund der Symmetrie ist es außerdem nur notwendig, eines der Trägheitsmomente zu bestimmen; die beiden restlichen sind identisch. Wir berechnen erneut die Komponente  $\Theta_{33}$ . Da die gesamte Masse auf

eine Kugelschale mit Radius  $R$  konzentriert ist, lautet das Integral in Kugelkoordinaten

$$\Theta_{33} = \sigma \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi (1 - \cos^2 \vartheta) R^4 \sin \vartheta. \quad (4.177)$$

Wie bereits im Text gesehen ist das Integral für die  $\vartheta$ -Integration

$$\begin{aligned}\int_0^\pi d\vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \\ = \int_{-1}^{+1} d\cos \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) = \frac{4}{3}.\end{aligned}\quad (4.178)$$

Die  $\varphi$ -Integration liefert einen Faktor  $2\pi$ . Somit lautet das Ergebnis

$$\Theta_{33} = \frac{8\pi}{3} \sigma R^4 = \frac{2}{3} M R^2. \quad (4.179)$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass die Gesamtmasse  $M$  auf einer Kugelschale mit Oberfläche  $4\pi R^2$  verteilt ist:

$$M = 4\pi\sigma R^2. \quad (4.180)$$

Die Trägheitsmomente einer Kugelschale sind also um einen Faktor 5/3 größer als die einer Vollkugel mit gleichen  $M$  und  $R$ . Der Grund ist, dass bei der Kugelschale die Massenelemente im Mittel weiter vom Mittelpunkt entfernt sind.

(b) Für einen Zylinder bieten sich Zylinderkoordinaten an. Legt man den Ursprung in den Schwerpunkt und die  $z$ - bzw.  $x_3$ -Achse entlang der Zylinderachse, verschwinden alle Deviationsmomente. Dies liegt daran, dass diese Koordinatenwahl bereits den Hauptachsen angepasst ist. Wir verzichten daher auf eine Berechnung der Deviationsmomente; der interessierte Leser kann dies aber gerne überprüfen. Aufgrund der Symmetrie sind zwei Trägheitsmomente identisch,  $\Theta_{11} = \Theta_{22}$ . Das dritte,  $\Theta_{33}$ , wird sich im Allgemeinen davon unterscheiden. Wir beginnen mit der Berechnung von  $\Theta_{11}$ :

$$\Theta_{11} = \mu \int_0^R dq \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} dz q (\varrho^2 \sin^2 \varphi + z^2). \quad (4.181)$$

Hier wurde die Jacobi-Determinante der Zylinder-Koordinaten verwendet ( $\det(J) = q$ ). Wir führen zunächst die  $q$ -Integration durch:

$$\Theta_{11} = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} dz \left( \frac{1}{4} R^4 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} z^2 R^2 \right). \quad (4.182)$$

Die  $z$ -Integration liefert

$$\Theta_{11} = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{1}{4} R^4 H \sin^2 \varphi + \frac{1}{24} R^2 H^3 \right). \quad (4.183)$$

Eine Stammfunktion von  $\sin^2 \varphi$  ist  $(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)/2$ . Der zweite Term darin trägt nicht zum Integral bei, da er sowohl für  $\varphi = 0$  als auch für  $\varphi = 2\pi$  verschwindet. Daher ist

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \mu \left( \frac{\pi}{4} R^4 H + \frac{\pi}{12} R^2 H^3 \right) \\ &= M \left( \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} H^2 \right), \end{aligned} \quad (4.184)$$

wobei  $M = \pi \mu R^2 H$  für die Zylindermasse eingesetzt wurde. Für das dritte Trägheitsmoment gilt

$$\begin{aligned} \Theta_{33} &= \mu \int_0^R d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} dz \varrho^3 \\ &= \frac{\pi}{2} \mu R^4 H = \frac{1}{2} MR^2. \end{aligned} \quad (4.185)$$

Offensichtlich ist ein Zylinder ein Kugelkreisel ( $\Theta_{11} = \Theta_{33}$ ), wenn  $H^2 = 3R^2$  erfüllt ist.

(c) Die Berechnung für einen Hohlzylinder erfordert erneut eine Oberflächenmassendichte. Für das erste Trägheitsmoment gilt

$$\Theta_{11} = \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} dz R (R^2 \sin^2 \varphi + z^2). \quad (4.186)$$

Die  $z$ -Integration führt auf

$$\Theta_{11} = \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi R \left( R^2 H \sin^2 \varphi + \frac{1}{12} H^3 \right), \quad (4.187)$$

die  $\varphi$ -Integration auf

$$\Theta_{11} = \sigma R \left( \pi R^2 H + \frac{\pi}{6} H^3 \right) = M \left( \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{12} H^2 \right). \quad (4.188)$$

Die Gesamtmasse ist hierbei  $M = 2\pi\sigma RH$ . Das dritte Trägheitsmoment ist

$$\Theta_{33} = \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} dz R^3 = 2\pi\sigma R^3 H = MR^2. \quad (4.189)$$

Ein Hohlzylinder mit  $H^2 = 6R^2$  ist demnach ein Kugelkreisel.

(d) Um den Trägheitstensor eines Kreiskegels zu berechnen, muss man zunächst ein wenig nachdenken. Offenbar haben wir kein Koordinatensystem kennengelernt, das der Kegelform direkt angepasst ist. Allerdings kann man mit relativ wenig Aufwand und Zylinderkoordinaten das Problem lösen. Hierzu legt man den Ursprung zunächst in die Spitze des Kegels und denkt ihn sich sozusagen auf den Kopf gestellt. Dann ist die Höhe eine Funktion des Radius bzw. umgekehrt. In diesem Fall parametrisieren wir den Radius als

$$R(z) = \frac{R}{H} z. \quad (4.190)$$

Man sieht daran sofort, dass am Boden des Zylinders ( $z = H$ ) der Radius  $\varrho = R$  erreicht wird. Ansonsten ist die Berechnung ähnlich wie beim Zylinder, allerdings sind die Grenzen der  $z$ -Integration andere:

$$\Theta_{11} = \mu \int_0^H dz \int_0^{R(z)} d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \varrho (\varrho^2 \sin^2 \varphi + z^2). \quad (4.191)$$

Wir führen wie gewohnt die  $\varrho$ - und  $\varphi$ -Integrationen durch:

$$\Theta_{11} = \mu \int_0^H dz \left( \frac{\pi}{4} R^4(z) + \pi z^2 R^2(z) \right). \quad (4.192)$$

Nun setzen wir die Parametrisierung für  $R(z)$  ein und finden zunächst

$$\Theta_{11} = \mu \int_0^H dz \left( \frac{\pi}{4} \frac{R^4}{H^4} z^4 + \pi \frac{R^2}{H^2} z^4 \right). \quad (4.193)$$

Das Endergebnis lautet

$$\Theta_{11} = \mu \left( \frac{\pi}{20} R^4 H + \frac{\pi}{5} R^2 H^3 \right). \quad (4.194)$$

Mit der Gesamtmasse  $M = \pi \mu R^2 H / 3$  folgt schließlich

$$\Theta_{11} = \frac{3}{5} M \left( \frac{1}{4} R^2 + H^2 \right). \quad (4.195)$$

Analog ist

$$\Theta_{33} = \mu \int_0^H dz \int_0^{R(z)} d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \varrho^3 = \frac{\pi}{2} \mu \int_0^H dz R^4(z). \quad (4.196)$$

Dies führt auf

$$\Theta_{33} = \frac{\pi}{2} \mu \int_0^H dz \frac{R^4}{H^4} z^4 = \frac{\pi}{10} \mu R^4 H = \frac{3}{10} M R^2. \quad (4.197)$$

Man beachte, dass der Trägheitstensor bezüglich der Spitze und nicht des Schwerpunktes berechnet wurde. Mit dem Steiner'schen Satz lässt sich der Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunktes angeben. Da der Schwerpunkt genau wie die Spitze ebenfalls auf der  $x_3$ -Achse liegt, ändert sich das Trägheitsmoment  $\Theta_{33}$  dabei nicht. Der Schwerpunkt eines Kegels liegt von der Spitze ( $z = 0$ ) aus gesehen bei  $z = 3H/4$ . Daher muss  $\Theta_{11}$  um den Term  $9MH^2/16$  verkleinert werden. Dies führt auf

$$\Theta_{11} = \frac{3}{20}M\left(R^2 + \frac{1}{4}H^2\right). \quad (4.198)$$

Für  $H = 2R$  ist ein Kreiskegel ein Kugelkreisel.

#### 4.4

- (a) Der Zylinderschwerpunkt legt in einem infinitesimalen Zeitintervall die Strecke  $ds = V dt$  zurück. Dies muss gleichzeitig der abgerollten Bogenlänge entsprechen. In der gleichen Zeit muss er sich um einen Winkel  $d\varphi = \omega dt$  drehen. Winkel und Bogenlänge sind über  $ds = R d\varphi$  verknüpft. Daher folgt

$$V = R\omega. \quad (4.199)$$

- (b) Die kinetische Energie der Translation ist

$$T_S = \frac{1}{2}MV^2. \quad (4.200)$$

Für die Rotation gilt

$$T_R = \frac{1}{2}\Theta\omega^2, \quad (4.201)$$

wobei  $\Theta$  das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes für eine Drehung um die Symmetriearchse ist. Aus der vorherigen Aufgabe bzw. aus der Literatur wissen wir, dass

$$\Theta = \frac{1}{2}MR^2 \quad (4.202)$$

ist. Insgesamt gilt also

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 = \frac{3}{4}MV^2. \quad (4.203)$$

Der Zylinder hat daher eine um den Faktor  $3/2$  höhere kinetische Energie als eine Punktmasse  $M$  mit der gleichen Geschwindigkeit  $V$ .

- (c) Die auf den Zylinder wirkende Kraft lässt sich in zwei Anteile zerlegen. Eine Komponente wirkt senkrecht auf die schiefe Ebene und trägt nicht zur Beschleunigung bei. Die andere wirkt parallel zur schiefen Ebene. Dies führt auf eine Kraft

$$F = -Mg \sin \alpha. \quad (4.204)$$

- (d) Unter Vernachlässigung von Reibungskräften entspricht die Abnahme der potentiellen Energie beim Herabrollen gerade der Zunahme der kinetischen Energie. Der Potenzialnullpunkt kann beliebig verschoben werden, sodass wir

$$0 = E = \frac{3}{4}MV^2 + Mgh \quad (4.205)$$

für die Energie  $E$  schreiben können, wobei  $h < 0$  die Höhe des Schwerpunktes bezüglich der Anfangslage ist. Aufgrund der Geometrie ist die zurückgelegte Strecke entlang der Ebene

$$s = \frac{h}{\sin \alpha}. \quad (4.206)$$

Dabei gilt außerdem

$$v = \dot{s} < 0 \quad (4.207)$$

und somit

$$\frac{3}{4}\dot{s}^2 + gs \sin \alpha = 0. \quad (4.208)$$

Einmaliges Ableiten nach der Zeit ergibt

$$\frac{3}{2}\ddot{s}s = -g\dot{s} \sin \alpha \quad (4.209)$$

und schließlich

$$\ddot{s} = -\frac{2}{3} \sin \alpha g < 0. \quad (4.210)$$

Die Beschleunigung ist dem Betrage nach aus zwei Gründen geringer als die beim freien Fall: Zum einen wirkt aufgrund der schiefen Ebene nur ein Teil der Gewichtskraft entlang der Ebene. Andererseits beansprucht die Drehbewegung einen Teil der kinetischen Energie, welcher der Schwerpunktsbewegung fehlt.

#### 4.5

- (a) Zunächst berechnen wir das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse  $\hat{\mathbf{e}}_2$ . Offensichtlich ist

$$\Theta_{\hat{\mathbf{e}}_2} = \hat{\mathbf{e}}_2^\top \boldsymbol{\Theta} \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (4.211)$$

Der Steiner'sche Satz erlaubt die Berechnung des Trägheitsmoments bezüglich des Fixpunktes,

$$\Theta_F = \Theta_{\hat{\mathbf{e}}_2} + mR^2, \quad (4.212)$$

wobei  $R = |\mathbf{X}|$  ist. Das Trägheitsmoment  $\Theta_F$  ist in  $S$  konstant, da  $R^2$  konstant ist.

- (b) Das wirkende Drehmoment ist

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_G = -mg\mathbf{R} \times \hat{\mathbf{e}}_3 = -mgR \sin \alpha \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (4.213)$$

Die relevante Komponente der Drehmomentgleichung lautet dann

$$-mgR \sin \alpha = \frac{d}{dt}(\Theta_F \omega_2). \quad (4.214)$$

Wir nutzen aus, dass  $\Theta_F$  konstant ist, und identifizieren  $\dot{\omega}_2 = \ddot{\alpha}$ . Damit folgt schließlich

$$-mgR \sin \alpha = \Theta_F \ddot{\alpha}. \quad (4.215)$$

(c) Für kleine Winkel  $\alpha$  ist

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad (4.216)$$

eine gute Näherung. Damit erhält man die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators,

$$\ddot{\alpha} = -\Omega^2 \alpha \quad (4.217)$$

mit

$$\Omega^2 = \frac{mgR}{\Theta_F} \quad (4.218)$$

Die Lösung ist

$$\alpha(t) = \hat{\alpha} \sin(\Omega t + \phi_0). \quad (4.219)$$

Die Integrationskonstanten (maximale Auslenkung  $\hat{\alpha}$  und Phasenwinkel  $\phi_0$ ) sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

(d)  $\Omega$  (und damit auch die Schwingungsdauer) würde unverändert bleiben, da das Trägheitsmoment proportional zur Gesamtmasse ist,  $\Theta_F \propto m$ .

## 4.6

(a) Wir beginnen mit (4.12), was auf unser Problem angewandt

$$\hat{e}_i^* \cdot \hat{e}_3 = r_{i3} \quad \text{und} \quad \hat{e}_3^* \cdot \hat{e}_j = r_{3j} \quad (4.220)$$

ergibt. Dies bedeutet, dass die Entwicklungskoeffizienten von  $\hat{e}_3$  in der Basis von  $S^*$  gerade durch die drei Matrixelemente  $r_{i3}$  gegeben sind. Daher kann man die Entwicklung

$$\hat{e}_3 = \sin \vartheta \sin \psi \hat{e}_1^* + \sin \vartheta \cos \psi \hat{e}_2^* + \cos \vartheta \hat{e}_3^* \quad (4.221)$$

direkt aus der Matrix  $R$  ablesen. Analog findet man

$$\hat{e}_3^* = \sin \varphi \sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \varphi \sin \vartheta \hat{e}_2 + \cos \vartheta \hat{e}_3. \quad (4.222)$$

Diese Gleichungen sind für Kreisel aller Art gültig, da bisher keinerlei Annahmen gemacht wurden.

(b) Für den kräftefreien symmetrischen Kreisel ist insbesondere  $\vartheta$  eine Konstante. Dies bedeutet, dass die Zeitabhängigkeit von  $\hat{e}_3$  in  $S^*$  und von  $\hat{e}_3^*$  in  $S$  nur in  $\psi$  bzw.  $\varphi$  enthalten ist. Hier wissen wir, dass  $\dot{\psi}$  und  $\dot{\varphi}$  Konstanten sind. Wir hatten im Text

$$\dot{\psi} = \Omega = \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta} \omega_3^*, \quad \dot{\varphi} = \Omega' = \frac{\Theta_3 \omega_3^*}{\Theta \cos \vartheta} \quad (4.223)$$

gefunden. Anhand von (4.221) und (4.222) sieht man somit, dass die Projektionen von  $\hat{e}_3^*$  auf  $\hat{e}_3$  und von  $\hat{e}_3$  auf  $\hat{e}_3^*$  konstant sind. Doch  $\hat{e}_3^*$  führt in der  $\hat{e}_1$ - $\hat{e}_2$ -Ebene eine Oszillation mit Frequenz  $\dot{\varphi} = \Omega'$  aus, denn es gilt  $\varphi = \Omega' t + \varphi_0$ . Gleichzeitig oszilliert  $\hat{e}_3$  in der  $\hat{e}_1$ - $\hat{e}_2$ -Ebene mit Frequenz  $\dot{\psi} = \Omega$ , da überdies  $\psi = \Omega t + \psi_0$  erfüllt ist. Es ist dabei allerdings

zu beachten, dass beide Oszillationen gegenläufig sind, da in (4.222) ein Minuszeichen auftritt.

(c) Offensichtlich unterscheiden sich die beiden Oszillationsfrequenzen  $\dot{\psi}$  und  $\dot{\varphi}$  dem Betrag nach. Dies liegt daran, dass die Matrix  $R$  nicht symmetrisch ist. Im einen Fall wird die dritte Zeile, im anderen die dritte Spalte für die Transformation verwendet. Das Verhältnis der beiden Frequenzen lautet

$$\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} = \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta_3} \cos \vartheta. \quad (4.224)$$

Je nach der Art des Kreisels (*oblat*,  $\Theta < \Theta_3$ , oder *prolat*,  $\Theta > \Theta_3$ ) und der Neigung  $\vartheta$  der Figurennachse zur Drehimpulsachse kann der Quotient beliebige positive oder negative Werte annehmen. Beide Frequenzen sind dem Betrag nach identisch, wenn

$$\cos \vartheta = \frac{\Theta_3}{\Theta - \Theta_3} \quad (4.225)$$

gilt.

(d) Die Frequenz  $\Omega'$  lässt sich in der Form

$$\Omega' = \frac{L_3^*}{\Theta \cos \vartheta} \quad (4.226)$$

schreiben. Der Drehimpuls ist entlang  $\hat{e}_3$  ausgerichtet,  $L = L \hat{e}_3$ . Der Grenzfall  $\cos \vartheta \rightarrow 0$  entspricht  $\vartheta \rightarrow 90^\circ$ . Andererseits folgt aus (4.221), dass die Projektion von  $L$  auf die Figurennachse  $\hat{e}_3^*$  ebenfalls  $\cos \vartheta$  ist:

$$L_3^* = L \cdot \hat{e}_3^* = L \cos \vartheta \quad (4.227)$$

Somit ist

$$\Omega' = \frac{L}{\Theta} \quad (4.228)$$

völlig unabhängig vom Winkel  $\vartheta$  zwischen Figurennachse und Drehimpuls.

(e) Die Winkelgeschwindigkeit erfüllt

$$\omega = \dot{\varphi} \hat{e}_3 + \dot{\vartheta} \hat{e}_K + \dot{\psi} \hat{e}_3^*. \quad (4.229)$$

Um ihre Komponenten in  $S$  zu berechnen, muss sie auf die Vektoren  $\hat{e}_i$  projiziert werden. Der erste Term in (4.229) ist trivial. Der letzte wurde bereits in (4.222) bestimmt. Die Knotenlinie lässt sich direkt aus Abb. 4.3 zu

$$\hat{e}_K = \cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2 \quad (4.230)$$

ablesen. Nach einer kurzen Sortierung folgt das Endergebnis

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (4.231)$$

## 4.7

- (a) Die Änderung des Drehimpulses aufgrund des Drehmoments von Sonne oder Mond lautet

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{Sonne}} + \mathbf{M}_{\text{Mond}}. \quad (4.232)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $\mathbf{L}$ , so erhalten wir

$$\frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L})}{dt} = L(\mathbf{M}_{\text{Sonne}} + \mathbf{M}_{\text{Mond}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3^* = 0, \quad (4.233)$$

denn das Kreuzprodukt im Drehmoment steht senkrecht auf  $\hat{\mathbf{e}}_3^*$ . Es kann sich also nur die Richtung von  $\mathbf{L}$  ändern.

- (b) Multiplikation von (4.232) mit  $\hat{\mathbf{e}}_3$  ergibt

$$\frac{d(\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3)}{dt} = (\mathbf{M}_{\text{Sonne}} + \mathbf{M}_{\text{Mond}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = 0. \quad (4.234)$$

Der Richtungsvektor  $\hat{\mathbf{e}}_3$  lässt sich in die Zeitableitung ziehen, da er konstant ist (das ungestrichene System ist in guter Näherung ein Inertialsystem). Das Skalarprodukt mit den Drehmomenten verschwindet, da diese senkrecht auf  $\hat{\mathbf{e}}_3$  stehen. Somit muss  $L_3 = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3$  konstant sein.

- (c) Ausgehend von (4.232) findet man zunächst mithilfe von (4.169):

$$\frac{d(L\hat{\mathbf{e}}_3^*)}{dt} = - \sum_i \frac{3GM_i}{2d_i^3} \cos \vartheta_0 \Delta\Theta (\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_3^*), \quad (4.235)$$

wobei über die Beiträge von Sonne und Mond summiert wird. Es ist nun leicht, die Präzessionsfrequenz durch einen Vergleich aufzuschreiben:

$$\begin{aligned} \omega_P &= -\frac{1}{L} \sum_i \frac{3GM_i}{2d_i^3} \cos \vartheta_0 \Delta\Theta \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= -\sum_i \frac{3GM_i}{2d_i^3} \cos \vartheta_0 \frac{\Delta\Theta}{\Theta\omega} \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (4.236)$$

Im letzten Schritt wurde

$$L = \Theta\omega \quad (4.237)$$

ausgenutzt, wobei  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist.

- (d) Mit den bekannten bzw. in der Literatur zu findenden Werten

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Theta}{\Theta} &= \frac{1}{300}, \\ \cos \vartheta_0 &= 0,917, \\ G &= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\text{Sonne}} &= 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \\ M_{\text{Mond}} &= 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}, \end{aligned} \quad (4.238)$$

$$d_{\text{Sonne}} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

$$d_{\text{Mond}} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{86.400 \text{ s}}$$

berechnet man, dass die durch Sonne und Mond verursachten Präzessionsfrequenzen

$$\begin{aligned} \omega_{P,\text{Sonne}} &= 2,48 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}, \\ \omega_{P,\text{Mond}} &= 5,46 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (4.239)$$

sind. Der Beitrag des Mondes zur Präzession ist etwa doppelt so groß wie derjenige der Sonne.

Dies ist übrigens qualitativ dasselbe Ergebnis, das wir bereits bei der Abschätzung der Gezeitenkräfte in Abschn. 3.6 gefunden haben. Der Grund ist, dass sowohl die Gezeitenkräfte als auch die Drehmomente auf die Erde proportional zu  $M_i/d_i^3$  sind und  $(M_{\text{Mond}}/d_{\text{Mond}}^3)/(M_{\text{Sonne}}/d_{\text{Sonne}}^3) \approx 2,2$  gilt.

Insgesamt ergibt sich

$$\omega_P = 7,94 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1} \quad (4.240)$$

und damit eine Präzessionsperiode

$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_P} = 25.100 \text{ Jahre}. \quad (4.241)$$

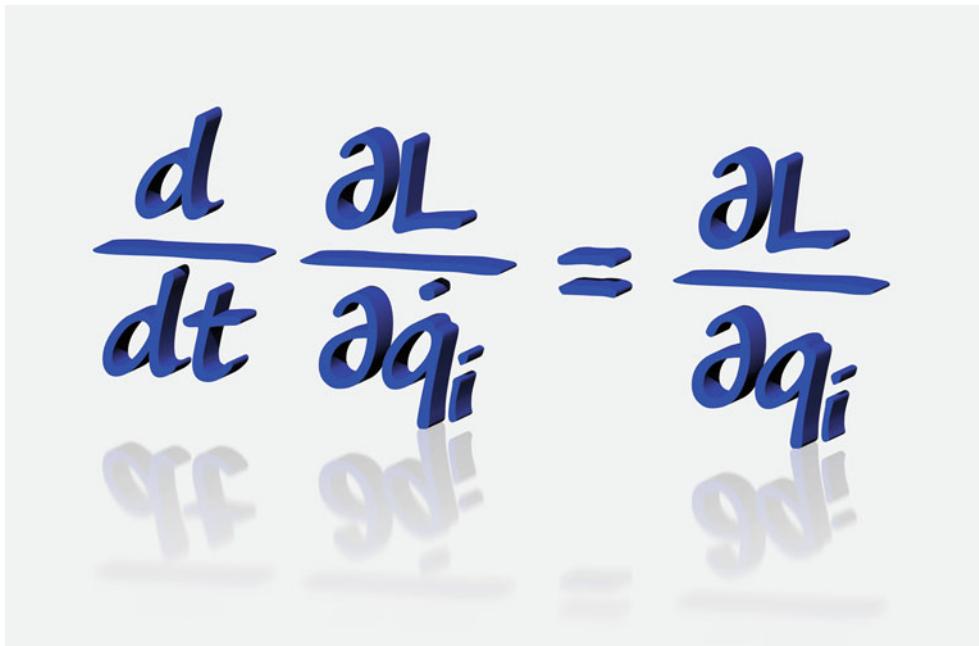
Dieses Ergebnis liegt sehr nahe an dem durch astronomische Beobachtungen ermittelten Wert von 25.800 Jahren.

## Literatur

- Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H.: Mathematik. 2. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2012)
- Goldstein, H.: Klassische Mechanik. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1981)

# Lagrange-Formalismus und Variationsrechnung

# 5



Was sind Zwangskräfte?

Wie löst man die Bewegungsgleichungen unter Zwangsbedingungen?

Welche Bedeutung haben generalisierte Koordinaten?

Was sind die Vorteile des Lagrange-Formalismus?

Was sind Variationsprinzipien, und welche Bedeutung haben sie für die Mechanik?

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen?

5.1 Systeme mit Zwangsbedingungen . . . . .	166
5.2 Lagrange-Gleichungen erster Art . . . . .	171
5.3 Lagrange-Gleichungen zweiter Art . . . . .	176
5.4 Beispiele zur Anwendung des Lagrange-Formalismus . . . . .	181
5.5 Variationsrechnung . . . . .	185
5.6 Symmetrien und Erhaltungssätze . . . . .	194
Aufgaben . . . . .	200
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	202
Literatur . . . . .	208

In alltäglichen Situationen sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen in ihrer bisherigen Form praktisch unbrauchbar, denn so genannte Zwangsbedingungen (z. B. Bewegung auf einer schiefen Ebene) führen auf zunächst unbekannte Zwangskräfte, die nicht ohne Weiteres in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden können (Abschn. 5.1). In diesem Kapitel werden Methoden entwickelt, diese Zwangsbedingungen mathematisch zu behandeln. Dies führt zunächst auf Erweiterungen der Newton'schen Gleichungen (Abschn. 5.2). Im Anschluss wird mit den Lagrange-Gleichungen eine koordinatenunabhängige Formulierung der Bewegungsgleichungen hergeleitet (Abschn. 5.3). Sie sind von entscheidender Wichtigkeit für die gesamte theoretische Physik und bilden die Grundlage für die modernen Feldtheorien wie Elektrodynamik oder Quantenfeldtheorie. In Abschn. 5.4 werden konkrete Beispiele zum Lagrange-Formalismus diskutiert.

Weiterhin werden Variationsprinzipien besprochen, mit denen eine äußerst kompakte und elegante Formulierung vieler physikalischer Gesetze erreicht werden kann (Abschn. 5.5). Symmetrien und Erhaltungssätze spielen eine zentrale Rolle in der Physik. Ihre systematische Untersuchung bildet den Abschluss dieses Kapitels (Abschn. 5.6).

Das vorliegende Kapitel ist wohl das wichtigste im Mechanik-Teil. Es ist auch das anspruchsvollste und erfordert vom Leser eine konzentrierte Mitarbeit und viel Übung.

## 5.1 Systeme mit Zwangsbedingungen

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lassen sich auf freie Punktmasse oder Punktmasse unter dem Einfluss bekannter Kräfte anwenden. Häufig unterliegen mechanische Systeme aber sogenannten Zwangsbedingungen, die nicht direkt in Form von äußeren Kräften formuliert werden können. Beispiele hierfür sind die Bewegung einer Kugel auf einer schiefen Ebene oder ein Pendel, das sich nur innerhalb einer Koordinatenebene bewegen kann. Dieser Abschnitt liefert eine Einführung in die Formulierung von Zwangsbedingungen. Anhand eines Beispiels (sphärisches Pendel) wird vorgeführt, wie sich die Bewegungsgleichungen in Anwesenheit von Zwangsbedingungen prinzipiell aufstellen und lösen lassen.

### Zwangsbedingungen

In Kap. 4 wurden starre Körper diskutiert, deren innere Massenelemente durch innere *Zwangsbedingungen* (oder auch *Nebenbedingungen*) paarweise konstante Abstände besitzen. Die mathematische Form dieser Zwangsbedingungen wurde bisher allerdings nicht näher spezifiziert. Dies soll im Folgenden nachgeholt werden. Zwangsbedingungen treten in der Bewegungsgleichung in der Form von zunächst unbekannten *Zwangskräften*  $\mathbf{Z}$  auf, welche die Bewegung einschränken.

#### Kugel auf Tisch

Eine unter dem Einfluss der Schwerkraft ( $\mathbf{F}_G = -mg\hat{\mathbf{e}}_3$ ), aber auf einem waagerechten Tisch rollende Kugel ist ein Beispiel für ein System mit einer Zwangsbedingung ( $x_3 = \text{const}$ ). Die Zwangskraft wirkt in diesem Fall der Gravitationskraft entgegen,

$$\mathbf{Z} = -\mathbf{F}_G, \quad (5.1)$$

sodass die Gesamtkraft auf die Kugel  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{Z} = \mathbf{0}$  ist. Andernfalls würde die Kugel nach unten beschleunigt werden, was aufgrund der Tischplatte aber nicht möglich ist. Die Zwangskraft wird in diesem Fall vom Tisch auf die Kugel ausgeübt, die Gravitationskraft hingegen von der Erde auf die Kugel. ▶

Uns sind bereits äußere Zwangsbedingungen begegnet, z. B. in der Form einer schiefen Ebene, auf der ein Zylinder rollt (Aufgabe 4.4), oder eine festgelegte Drehachse, welche die Bewegung eines Pendels einschränkt. Es wurde außerdem bereits erwähnt, dass Zwangsbedingungen die Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems reduzieren. Beispielsweise besitzt ein starrer Körper, wenn er keinen äußeren Zwängen unterliegt, sechs Freiheitsgrade (drei für die Schwerpunktsbewegung, drei für die Rotation). Ein physikalisches Pendel (Aufgabe 4.5) besitzt allerdings nur einen Freiheitsgrad, nämlich den Auslenkungswinkel. Weitere Beispiele für Zwangsbedingungen sind zwei durch eine Stange verbundene Punktmasse (Abschn. 4.2) oder eine an einem Faden herumgeschleuderte Punktmasse.

Ohne Zwangsbedingungen hat ein System mit  $N$  Punktmasse  $F = 3N$  Freiheitsgrade: Jede der  $N$  Punktmasse wird durch einen dreidimensionalen kartesischen Koordinatenvektor  $\mathbf{x}_i$  dargestellt. Mathematisch werden Freiheitsgrade durch *unabhängige* Parameter beschrieben, die zur vollständigen Charakterisierung der Lage des Systems notwendig sind. Zwangsbedingungen führen Abhängigkeiten dieser Parameter ein, sodass die Anzahl der unabhängigen Parameter abnimmt. So ist die Forderung, dass zwei Punktmasse einen konstanten Abstand  $l_{12}$  haben, eine Zwangsbedingung  $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = l_{12} = \text{const}$ , und es bleiben nur fünf von sechs Freiheitsgraden übrig.

Doch wie lassen sich Zwangsbedingungen nun mathematisch formulieren?

#### Holome Zwangsbedingungen

In vielen Fällen lassen sich Zwangsbedingungen in der Form

$$f_a(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = 0 \quad (1 \leq a \leq r) \quad (5.2)$$

schreiben, wobei  $r$  die Anzahl der Zwangsbedingungen ist. Man nennt Zwangsbedingungen der Form (5.2) *holonom*.

Wir verlangen, dass die holonomen Zwangsbedingungen mindestens zweimal differenzierbare Funktionen der  $N$  Koordinatenvektoren  $\mathbf{x}_i$  sind. Die Anzahl der Freiheitsgrade bei  $r$  Zwangsbedingungen ist

$$F = 3N - r. \quad (5.3)$$

### Frage 1

Zeigen Sie, dass die zuvor erwähnte Zwangsbedingung eines festen Abstands zweier Punktmassen als

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 - l_{12}^2 = 0 \quad (5.4)$$

notiert werden kann. Diese Funktion ist problemlos differenzierbar.

### Bewegung auf Ebene und Kugel

Ist die Bewegung einer Punktmasse auf eine Ebene mit Normalenvektor  $\hat{\mathbf{n}}$  eingeschränkt, so lautet die Zwangsbedingung

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (5.5)$$

Hier wurde angenommen, dass der Koordinatenursprung in der Ebene liegt. Kann sich eine Punktmasse nur auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius  $R$  bewegen, kann die Zwangsbedingung als

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - R^2 = 0 \quad (5.6)$$

formuliert werden, wenn der Ursprung im Kugelmittelpunkt liegt. ▶

### Frage 2

Machen Sie sich klar, dass keine Freiheitsgrade mehr übrig bleiben, wenn  $r = 3N$  ist. In diesem Fall ist das System vollständig durch die Zwangsbedingungen bestimmt, und es findet keine Dynamik mehr statt.

### Nichtholome, rheone und sklerome Zwangsbedingungen

Alle Zwangsbedingungen, die sich nicht in der Form (5.2) schreiben lassen, heißen *nichtholonom*. Dazu gehören insbesondere (aber nicht ausschließlich) Zwangsbedingungen, die sich nur als Ungleichung formulieren lassen.

Man unterscheidet außerdem zeitabhängige bzw. *rheonome* und zeitunabhängige bzw. *sklerome* Zwangsbedingungen. Diese Begriffe stammen aus dem Griechischen (*rheos*: fließend, *skleros*: starr).

Beispielsweise wird die Bewegung einer Punktmasse im Inneren einer Hohlkugel durch die nichtholome Zwangsbedingung

$$\mathbf{x}^2 - R^2 \leq 0 \quad (5.7)$$

beschrieben. Im Folgenden werden überwiegend holonome Zwangsbedingungen diskutiert.

**Achtung** Durch die Zwangsbedingungen sind nicht nur die Koordinaten eingeschränkt. Auch die Anfangsbedingungen, die zur Lösung mechanischer Probleme nötig sind, müssen mit den Zwangsbedingungen vereinbar sein. Dies wird in Kürze an einem Beispiel verdeutlicht. ▶

### Verallgemeinerte Koordinaten

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels soll überwiegend auf die Vektorschreibweise  $\mathbf{x}_i$  verzichtet werden. Anstatt über  $N$  Vektoren  $\mathbf{x}_i$  zu sprechen, schreiben wir vorzugsweise  $x_i$  ( $1 \leq i \leq 3N$ ). Dies ändert nichts am physikalischen Inhalt, reduziert aber die Anzahl der Indizes, die verwendet werden müssen.

Die  $3N$  Koordinaten  $x_i$  eines Systems von Punktmassen spannen einen  $3N$ -dimensionalen Parameterraum auf. Zwangsbedingungen verhindern, dass alle Punkte dieses Raumes erreicht werden können. Der *Konfigurationsraum* ist jener Teil des  $3N$ -dimensionalen Raumes, der von den Koordinaten der  $N$  Punktmassen erreicht werden kann. Man spricht hier von einer  $(3N - r)$ -dimensionalen *Untermannigfaltigkeit* (Forster 2012), die durch die  $r$  Zwangsbedingungen definiert wird.

Mannigfaltigkeiten werden im „Mathematischen Hintergrund“ 5.1 erläutert. Das komplette Verständnis des Konzepts ist an dieser Stelle nicht erforderlich, wird aber in vielen anderen Bereichen der Physik (insbesondere bei der Behandlung von Lie-Gruppen im „Mathematischen Hintergrund“ Bd. 3, (7.1) und in der allgemeinen Relativitätstheorie) benötigt.

### Kugelschale und Torus

Der Konfigurationsraum einer einzelnen freien Punktmasse ist der dreidimensionale reelle Raum  $\mathbb{R}^3$ . Durch die Zwangsbedingung  $\mathbf{x}^2 - R^2 = 0$  wird eine Kugelschale als zweidimensionale Untermannigfaltigkeit definiert. Ein weiteres Beispiel ist eine Torusoberfläche im dreidimensionalen Raum wie in Abb. 5.2 gezeigt.

Man kann die Torusoberfläche durch die holonome Bedingung

$$\begin{aligned} f &= (R^2 - r^2)^2 + 2R^2(x_3^2 - x_1^2 - x_2^2) \\ &\quad - 2r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

ausdrücken.

## 5.1 Mathematischer Hintergrund: Mannigfaltigkeiten

### Eine Verallgemeinerung euklidischer Räume

Mannigfaltigkeiten treten in der Physik meistens dann auf, wenn in irgendeiner Weise gekrümmte Flächen oder gekrümmte Räume betrachtet werden. Insbesondere in der allgemeinen Relativitätstheorie treten Mannigfaltigkeiten ganz natürlich auf und sind dort auch unumgänglich. Lose gesprochen, handelt es sich bei einer  $n$ -dimensionalen *Mannigfaltigkeit*  $M$  um einen Raum, der nur lokal so aussieht wie ein  $n$ -dimensionaler euklidischer Raum, global aber gekrümmmt sein kann.

Um mit Mannigfaltigkeiten physikalisch umgehen zu können, müssen sie genügend zusammenhängend und glatt sein. Mathematisch präzisiert man diese Eigenschaften auf die folgende Weise.

Zunächst fordert man, dass die Mannigfaltigkeit ein *topologischer Raum* mit einer höchstens abzählbaren Basis sein soll. Das bedeutet, dass eine Mannigfaltigkeit  $M$  mit einem System aus höchstens abzählbar vielen offenen Teilmengen  $T_i \subset M$  ausgestattet ist, deren Durchschnitte und Vereinigungen selbst alle wieder offene Teilmengen von  $M$  sind. Entscheidend ist hier, dass die Teilmengen *offen* sind. Durch diese zunächst sehr abstrakt wirkende Forderung erreicht man, dass Abbildungen von  $M$  in den  $\mathbb{R}^n$  stetig sind.

Weiterhin verlangt man, dass sich zwei beliebige Punkte in  $M$  mit offenen Teilmengen von  $M$  umgeben lassen, die nicht überlappen. Damit erfüllt ein solcher topologischer Raum das Hausdorff'sche Trennungsaxiom und wird auch *topologischer Hausdorff-Raum* genannt. Damit ist die Mannigfaltigkeit für physikalische Anwendungen genügend zusammenhängend.

Nun bleibt noch zu klären, was es bedeuten soll, dass eine Mannigfaltigkeit lokal wie ein  $n$ -dimensionaler euklidischer Raum „aussehen“ soll. Dazu wird festgelegt, dass es zu jedem Punkt der Mannigfaltigkeit eine offene Umgebung gibt, die durch eine bijektive, stetige Abbildung mit ebenfalls stetiger Umkehrabbildung in eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  abgebildet werden kann. Eine solche Abbildung heißt *Homöomorphismus*.

Zusammenfassend definiert man eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit also als einen topologischen Hausdorff-Raum mit endlicher Basis der Topologie, der lokal homöomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist.

Sei nun  $D \subset M$  und  $h$  ein Homöomorphismus, der  $D$  in  $U \subset \mathbb{R}^n$  abbildet,

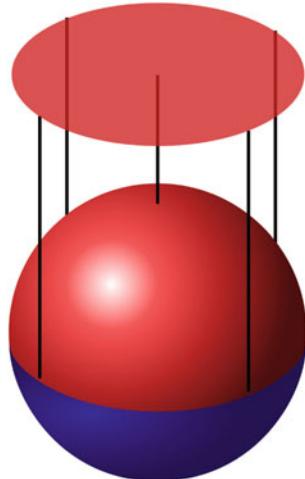
$$h : D \rightarrow U, \quad p \mapsto h(p) = (x_1, \dots, x_n),$$

wobei  $D$  und  $U$  offen seien. Der Homöomorphismus  $h$  ordnet demnach jedem Punkt  $p \in D$  ein  $n$ -Tupel reeller Zahlen aus

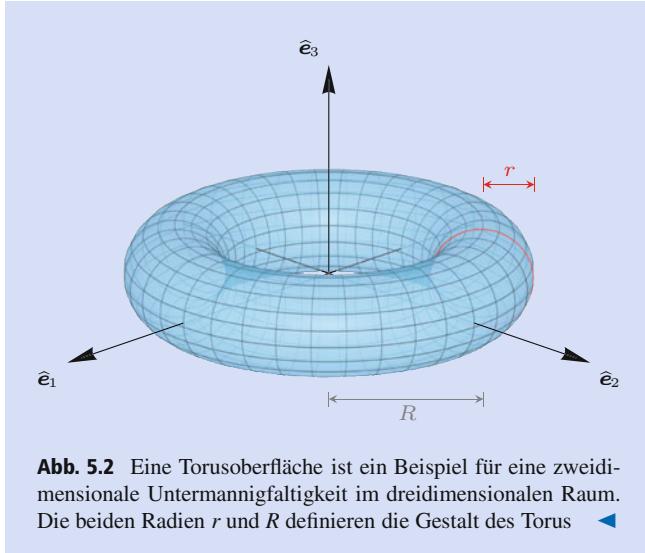
$U$  zu. Er wird als *Karte* bezeichnet und definiert ein lokales Koordinatensystem auf der offenen Teilmenge  $D$ .

Eine Menge von Karten  $\{h_i\}$  bildet einen *Atlas* der Mannigfaltigkeit, wenn die Definitionsbereiche  $D_i$  der Karten die Mannigfaltigkeit vollständig überdecken. Sei ein solcher Atlas gegeben und seien ferner zwei teilweise überlappende Definitionsbereiche  $D_i$  und  $D_j$  herausgegriffen, die von den Karten  $h_i$  und  $h_j$  auf offene Teilmengen  $U_i$  und  $U_j$  des  $\mathbb{R}^n$  abgebildet werden. Dann heißt die Abbildung  $h_j \circ h_i^{-1}$  *Kartenwechsel* auf der Schnittmenge der Definitionsbereiche  $D_i \cap D_j$ . Er entspricht einem Wechsel des Koordinatensystems. Da es sich bei einem Kartenwechsel um eine Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^n$  handelt, ist aus der reellen Analysis bekannt, was Differenzierbarkeit bedeutet. Wenn alle Kartenwechsel eines Atlas differenzierbar sind, heißt der Atlas selbst differenzierbar. Eine Mannigfaltigkeit heißt differenzierbar, wenn sie mit einem differenzierbaren Atlas ausgestattet ist.

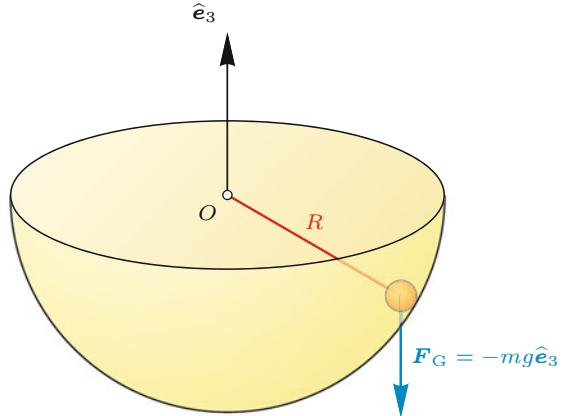
Das vielleicht nächstliegende Beispiel einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ist die Oberfläche einer Kugel, die 2-Sphäre  $S^2$ . In einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Punktes kann sie homöomorph in den  $\mathbb{R}^2$  abgebildet werden, wie jede Landkarte der Erdoberfläche belegt. Auf einer Halbkugel lässt sich beispielsweise eine Karte dadurch einführen, dass alle Punkte der Halbkugel längs ihrer Polachse auf die Tangentialebene an den Pol projiziert werden (Abb. 5.1). Sechs solcher Karten, salopp gesprochen je eine für die obere, untere, vordere, hintere, rechte und linke Halbkugel, bilden zusammen einen differenzierbaren Atlas der 2-Sphäre.



**Abb. 5.1** Ein Beispiel für eine Mannigfaltigkeit ist die Kugeloberfläche in zwei Dimensionen. Hier ist eine Karte angedeutet, welche die obere Halbkugel auf eine Tangentialebene an den Nordpol der Kugel projiziert



**Abb. 5.2** Eine Torusoberfläche ist ein Beispiel für eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im dreidimensionalen Raum. Die beiden Radien  $r$  und  $R$  definieren die Gestalt des Torus



**Abb. 5.3** Das sphärische Pendel kann man sich als eine Punktmasse vorstellen, die zu einem Aufhängepunkt (Ursprung  $O$ ) den konstanten Abstand  $R$  besitzt. Das Pendel kann unter dem Einfluss der Schwerkraft schwingen

### Verallgemeinerte Koordinaten

Anstelle der  $3N$  abhängigen Parameter  $x_i$  kann man  $F = 3N - r$  unabhängige Parameter  $q_j$  ( $1 \leq j \leq F$ ) definieren, die nicht durch die Zwangsbedingungen eingeschränkt werden. Diese werden als neue, *verallgemeinerte Koordinaten* verwendet. Man spricht auch von *generalisierten Koordinaten*.

Sind die  $r$  Zwangsbedingungen holonom, kann man die  $3N$  abhängigen Parameter  $x_i$  als Funktion der  $F$  unabhängigen Parameter  $q_j$  darstellen:

$$x_i = x_i(t, q_1, \dots, q_F) \quad (1 \leq i \leq 3N). \quad (5.9)$$

Im Fall von zeitabhängigen Zwangsbedingungen hängen die  $x_i$  nicht nur implizit über die  $q_j$ , sondern auch noch zusätzlich direkt von  $t$  ab, was durch das erste Argument ausgedrückt wird.

### Bewegung auf einer Kugeloberfläche

Für die Bewegung auf einer Kugeloberfläche mit Radius  $R$  lauten die drei kartesischen Koordinaten einer Punktmasse

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x_2 &= R \sin \vartheta \sin \varphi, \\ x_3 &= R \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Da  $R$  konstant ist, gilt  $x_i = x_i(\vartheta, \varphi)$ , und die beiden unabhängigen Parameter können als  $q_1 = \vartheta \in [0, \pi]$  und  $q_2 = \varphi \in [0, 2\pi]$  repräsentiert werden. Offensichtlich werden  $q_1$  und  $q_2$  nicht durch die Zwangsbedingung eingeschränkt. Sie eignen sich daher als generalisierte Koordinaten für das Problem.

**Achtung** In der Regel lassen sich die generalisierten Koordinaten nicht zu Vektoren wie  $\mathbf{x}_i$  zusammenfassen. Man behandelt dann die  $3N - r$  generalisierten Koordinaten wie skalare Größen.

Wir führen die symbolische Abkürzung  $x$  für die Menge aller Parameter  $x_i$  sowie  $q$  für die Menge aller Parameter  $q_j$  ein. Wir schreiben daher in Kurzform  $x = x(q)$ . Die verallgemeinerten Koordinaten werden in diesem Kapitel und darüber hinaus eine wichtige Rolle spielen.

### Das sphärische Pendel

Anhand des *sphärischen Pendels* lässt sich die Problematik der Zwangsbedingungen und Zwangskräfte sowie eines Lösungsverfahrens anschaulich darstellen. Beim sphärischen Pendel handelt es sich um eine Punktmasse  $m$ , die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft  $\mathbf{F}_G = mg = -mg\hat{\mathbf{e}}_3$  auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius  $R$  bewegt (Abb. 5.3). Man kann sich beispielsweise vorstellen, dass die Punktmasse an einer masselosen Stange der Länge  $R$  befestigt ist oder sich in einer halbkugelförmigen Schüssel befindet. Der Ursprung  $O$  liege im Mittelpunkt der Kugel, daher lautet die holonome Zwangsbedingung

$$f(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^2(t) - R^2 = 0. \quad (5.11)$$

Hier wurde berücksichtigt, dass die Bahnkurve  $\mathbf{x}(t)$  eine Funktion der Zeit ist. Da die Zeitabhängigkeit nur implizit über die Bahnkurve  $\mathbf{x}(t)$  in (5.11) eingeht, handelt es sich um eine skleronome Zwangsbedingung. Eine rheonome Zwangsbedingung läge beispielsweise vor, wenn der Kugelradius bzw. die Stangenlänge selbst eine Funktion der Zeit wäre, also  $R = R(t)$ . Dies wird in Aufgabe 5.4 aufgegriffen.

## Vertiefung: Nichtholome Zwangsbedingungen

Einige nichtholome Zwangsbedingungen können in der differenziellen Form

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{a,i} dx_i = A_{a,0} dt \quad (1 \leq a \leq r)$$

angegeben werden. Dies schließt allerdings holome Zwangsbedingungen mit ein, indem man

$$A_{a,i} = \frac{\partial f_a}{\partial x_i}, \quad A_{a,0} = -\frac{\partial f_a}{\partial t}$$

schreibt. Im Fall holonomer Zwangsbedingungen handelt es sich um ein totales Differenzial, das direkt aufintegriert wer-

den kann. Dies führt wieder auf die Form  $f_a(t, x) = 0$  in (5.2). Ansonsten ist eine Integration erst nach Lösung des Problems möglich, und es handelt sich um eine *nichtintegrierbare* Zwangsbedingung.

Ein Beispiel für eine nichtholome Zwangsbedingung ist die Bewegung eines Schlittschuhs auf einer ebenen Eisfläche. Der Schlittschuh kann sich nur in Kufenrichtung bewegen, d. h.  $v \times l = 0$ , wobei  $v$  die momentane Geschwindigkeit und  $l$  der Vektor entlang des Schlittschuhs ist. Dies ist eine Zwangsbedingung an die Geschwindigkeit und nicht die Position des Schlittschuhs. Man kann zeigen, dass sie nichtintegrierbar und damit nichtholonom ist.

Im Folgenden schreiben wir die Zeitabhängigen nicht mehr explizit an. Die ersten beiden Zeitableitungen der Zwangsbedingung lauten

$$\dot{f}(x) = 2x \cdot \dot{x} = 0, \quad \ddot{f}(x) = 2\dot{x}^2 + 2x \cdot \ddot{x} = 0. \quad (5.12)$$

Da die Zwangsbedingungen zu allen Zeiten gelten, erfüllen die Anfangsbedingungen

$$x_0^2 - R^2 = 0, \quad x_0 \cdot v_0 = 0, \quad (5.13)$$

wobei  $v = \dot{x}$  die Geschwindigkeit ist. Wir wissen, dass die Bewegung einer freien Punktmasse durch drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben wird, deren vollständige Integration sechs Parameter (z. B. in Form von Anfangsbedingungen) benötigt. Wegen (5.13) bleiben davon allerdings nur vier unabhängige übrig.

### Frage 3

Überlegen Sie sich anhand von (5.13), dass die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  tangential zur Kugeloberfläche verläuft.

Offensichtlich steht die Zwangsbedingung (5.11) im Widerspruch zur Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung einer Punktmasse im Schwerefeld:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0. \quad (5.14)$$

Wir müssen daher eine Zwangskraft  $Z$  einführen, um die Bewegungsgleichung mit der Zwangsbedingung kompatibel zu machen; wir schreiben

$$m\ddot{x} = mg + Z. \quad (5.15)$$

Diese Zwangskraft kann nur von der Stange bzw. von der Schüsse auf die Punktmasse ausgeübt werden und muss entlang der

Stange wirken. Da wir allerdings noch nicht wissen, welchen Betrag die Zwangskraft hat, notieren wir

$$Z = 2\lambda x. \quad (5.16)$$

Man nennt den Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  einen *Lagrange-Multiplikator*. Der Grund für den zusätzlichen Faktor 2 wird später erläutert. Wir werden nun sehen, dass  $\lambda = \lambda(t, x, \dot{x})$  eine unbekannte Funktion ist, die so zu bestimmen ist, dass (5.15), also

$$m\ddot{x} = mg + 2\lambda x, \quad (5.17)$$

mit den Zwangsbedingungen vereinbar ist.

### Frage 4

An dieser Stelle kann man sich bereits überlegen, dass  $\lambda$  negativ sein muss. Fragen Sie sich dazu, in welche Richtung die Zwangskraft zeigen muss, um die Punktmasse auf der Kugeloberfläche zu halten.

Um den Lagrange-Multiplikator zu finden, multiplizieren wir die Bewegungsgleichung skalar mit  $x$ :

$$mx \cdot \ddot{x} = mx \cdot g + 2\lambda x^2. \quad (5.18)$$

Wegen (5.12) und  $x^2 = R^2$  können wir

$$-m\dot{x}^2 = mx \cdot g + 2\lambda R^2 \quad (5.19)$$

schreiben. Schließlich erhält man

$$2\lambda = -\frac{m}{R^2} (\dot{x}^2 + x \cdot g), \quad (5.20)$$

weswegen die Zwangskraft

$$Z = -\frac{m}{R^2} (\dot{x}^2 + x \cdot g) x \quad (5.21)$$

lautet. Wie ist dies zu interpretieren? Die Zwangskraft kompensiert zum einen die Komponente  $m(g \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r$  der Schwerkraft in Stangenrichtung. Außerdem wirkt sie der Zentrifugalkraft  $m\dot{x}^2\hat{r}/R$  entgegen. Selbstverständlich ist genau dies notwendig, um die Punktmasse auf der Kugeloberfläche zu halten.

### Zwangskräfte

Wir sehen, dass hier die Zwangskraft, wie auch in allgemeineren Fällen, vom momentanen Bewegungszustand (z. B. der Geschwindigkeit) abhängt. Da dieser bei der Formulierung des Problems in der Regel unbekannt ist, lassen sich die Newton'schen Bewegungsgleichungen in Anwesenheit von Zwangsbedingungen nicht direkt in herkömmlicher Weise lösen.

Wir wollen noch untersuchen, ob die Zwangskraft Arbeit am System verrichtet. Offenbar zeigt die Zwangskraft immer in radialer Richtung, während eine Bewegung,  $d\mathbf{x} = v dt$ , nur tangential zur Kugeloberfläche möglich ist, d. h.

$$A_Z = \mathbf{Z} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (5.22)$$

Tatsächlich ist es eine Eigenschaft der skleronomen Zwangskräfte, dass sie keine Arbeit am System verrichten. Wir werden in Kürze wieder darauf zurückkommen.

Abschließend können wir noch die resultierende Bewegungsgleichung ohne Lagrange-Multiplikator angeben:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g} - \frac{1}{R^2} (\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{x}. \quad (5.23)$$

Diese Gleichung kann noch vereinfacht werden, indem die Energieerhaltung berücksichtigt wird. Dies wird dem interessierten Leser überlassen.

## 5.2 Lagrange-Gleichungen erster Art

Es wird im Folgenden ein allgemeiner Formalismus hergeleitet, mit dem sich mechanische Systeme in Anwesenheit von holonomen Zwangskräften beschreiben lassen. Das Ergebnis sind die Lagrange-Gleichungen erster Art. Diese Formulierung erlaubt eine Berechnung der Zwangskräfte, die dann physikalisch interpretiert werden können. Es wird weiterhin die Energieerhaltung in Anwesenheit von Zwangskräften untersucht.

### Zwangskräfte und Lagrange-Multiplikatoren

Im vorherigen Abschnitt haben wir anhand eines Spezialfalls gesehen, wie wir mithilfe eines Lagrange-Multiplikators die

Zwangskraft berechnen können. Wir wollen uns nun überlegen, wie dies bei allgemeinen Problemen bewerkstelligt werden kann.

Eine Zwangsbedingung für eine Punktmasse in der Form  $f(t, \mathbf{x}) = 0$  lässt sich geometrisch interpretieren: Sie definiert eine (zeitabhängige) Fläche im Raum, auf der sich die Punktmasse bewegen kann. Entlang dieser Fläche ist  $f$  identisch null und somit konstant. Darum muss der Gradient  $\nabla f(t, \mathbf{x})$  senkrecht auf der Fläche stehen. Andererseits kann die Zwangskraft  $\mathbf{Z}$  nur senkrecht zu  $f(t, \mathbf{x}) = 0$  sein, da sie die Tangentialbewegung nicht beeinflussen darf. Allgemein können wir also

$$\mathbf{Z} = \lambda \nabla f \quad (5.24)$$

schreiben. Dies ist der zentrale Punkt, der die Berücksichtigung von Zwangsbedingungen in den Bewegungsgleichungen ermöglicht. Im Falle des sphärischen Pendels erhalten wir wegen (5.11)

$$\mathbf{Z} = \lambda \nabla f = 2\lambda \mathbf{x}, \quad (5.25)$$

was identisch mit (5.16) ist. Dies erklärt auch, warum zuvor noch ein Faktor 2 eingeführt wurde.

### Lagrange-Gleichungen erster Art für eine Punktmasse unter dem Einfluss einer Zwangsbedingung

Gibt es eine holonome Zwangsbedingung

$$f(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (5.26)$$

so führt dies auf eine Zwangskraft

$$\mathbf{Z} = \lambda \nabla f \quad (5.27)$$

mit einem Lagrange-Multiplikator  $\lambda$ . Die *Lagrange-Gleichungen erster Art* lauten dann

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \lambda \nabla f \quad (5.28)$$

mit der angewandten Kraft  $\mathbf{F}$  aus den Newton'schen Bewegungsgleichungen.

Die Lagrange-Gleichungen erster Art sind eine Erweiterung der Newton'schen Bewegungsgleichungen. Sie ermöglichen die Berücksichtigung von a priori unbekannten Zwangskräften, die aus geometrischen Zwangsbedingungen hervorgehen. Gibt es  $N$  Punktmassen und  $r < 3N$  unabhängige Zwangsbedingungen  $f_a(t, \mathbf{x})$ , wird jede einzelne durch einen eigenen Lagrange-Multiplikator  $\lambda_a$  beschrieben. Die einzelnen Zwangskräfte können superponiert werden, sodass die Summe aller Zwangskräfte

$$\mathbf{Z}_i = \sum_{a=1}^r \lambda_a \nabla_i f_a \quad (1 \leq i \leq N) \quad (5.29)$$

lauten. Hier ist  $\nabla_i$  der Gradient bezüglich der Koordinaten der  $i$ -ten Punktmasse. Gehen wir wieder zur komponentenweisen Darstellung über, schreiben wir stattdessen

$$Z_i = \sum_{a=1}^r \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \quad (1 \leq i \leq 3N). \quad (5.30)$$

### Lagrange-Gleichungen erster Art für Systeme von Punktmassen

Für ein System von  $N$  Punktmassen unter dem Einfluss von  $r$  unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen  $f_a(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  lauten die Lagrange-Gleichungen erster Art

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{a=1}^r \lambda_a \nabla_i f_a \quad (1 \leq i \leq N) \quad (5.31)$$

bzw.

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{a=1}^r \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \quad (1 \leq i \leq N) \quad (5.32)$$

in der komponentenweisen Darstellung.

Es handelt sich bei den Lagrange-Gleichungen erster Art um  $3N$  Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung sowie  $r$  Zwangsbedingungen in Form von algebraischen Gleichungen. Sind die entsprechenden Anfangsbedingungen und die angewandten Kräfte  $\mathbf{F}_i$  bekannt, können damit im Prinzip die  $r$  Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_a$  und die  $N$  Bahnkurven  $\mathbf{x}_i$  berechnet werden.

Man unterscheidet *äußere* und *innere Zwangsbedingungen*. Äußere führen auf Zwangskräfte, die nur auf einzelne Punktmassen wirken. Innere hingegen führen Zwangskräfte zwischen Paaren von Punktmassen ein. Beispiele sind  $\mathbf{x}_1^2 - R^2 = 0$  für eine äußere und  $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 - l_{12}^2 = 0$  für eine innere Zwangsbedingung. Letztere entspricht zwei Punktmassen an einer Stange. Als weiteres Beispiel kann wieder der starre Körper herangezogen werden, für den alle Punktmassen paarweise konstante Abstände besitzen. Aufgrund der normalerweise großen Zahl der Punktmassen im starren Körper wird anstelle der Lagrange-Gleichungen erster Art jedoch der Formalismus aus Kap. 4 bevorzugt.

## Energiesatz in Anwesenheit von Zwangsbedingungen

Nachdem nun besprochen wurde, wie Zwangsbedingungen in den Newton'schen Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden können, untersuchen wir den Energiesatz in solch einem

System. Zunächst nehmen wir an, dass alle angewandten Kräfte  $\mathbf{F}_i$  aus einem Potenzial abgeleitet werden können:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V. \quad (5.33)$$

Wir unterscheiden hier nicht zwischen äußeren und inneren Kräften, da dies für die Diskussion an dieser Stelle belanglos ist. Wie aus Abschn. 3.1 bekannt, gilt zunächst in Abwesenheit von Reibungs- und Zwangskräften

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0, \quad (5.34)$$

wobei  $T$  die kinetische Energie ist. Nun müssen wir allerdings zusätzlich noch den Einfluss der Zwangskräfte  $Z_i$  betrachten. Wiederholte man unter Berücksichtigung der Zwangskräfte die Rechnungen, die auf (3.33) geführt haben, taucht zunächst ein Zusatzterm

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{a=1}^r \sum_{i=1}^N \lambda_a (\nabla_i f_a) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \quad (5.35)$$

auf. Die Nebenbedingungen erfüllen  $f_a = 0$ , daher muss auch ihre totale Zeitableitung verschwinden:

$$0 = \frac{df_a}{dt} = \sum_{i=1}^N (\nabla_i f_a) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial f_a}{\partial t}. \quad (5.36)$$

An dieser Stelle erlauben wir auch rheonome holonome Zwangsbedingungen. Dies wird an einem Beispiel in Aufgabe 5.4 verdeutlicht. Gl. (5.35) und (5.36) führen schließlich auf den Energiesatz unter Berücksichtigung von Zwangsbedingungen.

### Energiesatz unter Berücksichtigung von Zwangsbedingungen

Sind die angewandten Kräfte  $\mathbf{F}_i$  konservativ, lautet der Energiesatz in Anwesenheit von holonomen Zwangsbedingungen

$$\frac{d}{dt}(T + V) = - \sum_{a=1}^r \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial t}. \quad (5.37)$$

Die Energie ist erhalten, wenn die Zwangsbedingungen skleronom sind, d. h. ihre partiellen Zeitableitungen verschwinden.

### Frage 5

Überprüfen Sie die Rechenschritte, die auf den Energiesatz (5.37) führen.

## Vertiefung: Virtuelle Verrückungen und das d'Alembert'sche Prinzip

Historisch spielten die von d'Alembert eingeführten *virtuellen Verrückungen* eine wichtige Rolle. Diesen Zugang verfolgen wir hier zwar nicht, er soll aber der Vollständigkeit halber kurz vorgestellt werden.

Eine virtuelle Verrückung  $\delta\mathbf{x}_i$  der Punktmasse  $m_i$  ist eine nichtreale infinitesimale Verschiebung bei fester Zeit  $t$ , die mit den Zwangsbedingungen  $f_a$  zur Zeit  $t$  verträglich ist. So kann beispielsweise eine virtuelle Verrückung beim sphärischen Pendel nur tangential zur Kugeloberfläche erfolgen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} 0 &= f_a(\mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N + \delta\mathbf{x}_N) \\ &= f_a(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) + \sum_{i=1}^N (\nabla_i f_a) \cdot \delta\mathbf{x}_i. \end{aligned}$$

Wegen  $f_a(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = 0$  folgt zunächst  $\sum_i (\nabla_i f_a) \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0$ . Die virtuellen Verrückungen liegen also auf den durch  $f_a$  festgelegten Oberflächen. Wir multiplizieren mit  $\lambda_a$ , summieren über alle  $r$  Zwangsbedingungen und schreiben wegen (5.29)

$$\sum_{a=1}^r \sum_{i=1}^N \lambda_a (\nabla_i f_a) \cdot \delta\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^N Z_i \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0.$$

Die Zwangskräfte leisten also keine Arbeit bei virtuellen Verrückungen. Dies wird als das *d'Alembert'sche Prinzip* bezeichnet. Aus  $m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{Z}_i$  folgt dann direkt

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{x}}_i) \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0.$$

Die Zwangskräfte treten in dieser Formulierung nicht mehr explizit auf; sie sind allerdings indirekt enthalten, da die virtuellen Verrückungen nicht unabhängig voneinander sind. Wir sehen, dass die Summe der angewandten Kräfte  $\mathbf{F}_i$  und der Trägheitskräfte  $-m_i \ddot{\mathbf{x}}_i$  unter virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten. Dies trifft wegen (5.37) bei realen Verrückungen  $\delta\mathbf{x}_i$  nur auf skleronome Zwangsbedingungen zu.

Als Beispiel betrachten wir zwei Massen, die durch einen starren Stab miteinander verbunden sind. Es gibt daher eine Zwangsbedingung  $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 - l_{12}^2 = 0$  mit einem Lagrange-Multiplikator  $\lambda$ . Die beiden Massen können offenbar beliebig mit  $\delta\mathbf{x}_1$  und  $\delta\mathbf{x}_2$  verrückt werden, solange die Differenz  $\delta\mathbf{x}_1 - \delta\mathbf{x}_2$  keine Komponente entlang des Stabes hat, denn der Stab muss auch unter virtuellen Verrückungen gleich lang bleiben. Also ist

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot (\delta\mathbf{x}_1 - \delta\mathbf{x}_2) = 0.$$

Andererseits erfüllen die Zwangskräfte das dritte Newton'sche Axiom,  $\mathbf{Z}_1 = -\mathbf{Z}_2$ , und sie wirken entlang des Stabes. Damit muss

$$\mathbf{Z}_1 \cdot (\delta\mathbf{x}_1 - \delta\mathbf{x}_2) = \mathbf{Z}_1 \cdot \delta\mathbf{x}_1 + \mathbf{Z}_2 \cdot \delta\mathbf{x}_2 = 0$$

gelten.

## Allgemeines Lösungsverfahren durch Eliminierung der Lagrange-Multiplikatoren

Anhand des Beispiels des sphärischen Pendels haben wir bereits gesehen, wie sich der Lagrange-Multiplikator und die damit verbundene Zwangskraft berechnen lassen. Nun wollen wir ein allgemeines Lösungsverfahren der Bewegungsgleichungen in Anwesenheit holonomer Zwangsbedingungen angeben, in dessen Verlauf die Lagrange-Multiplikatoren eliminiert werden. Für nichtholonom Zwangsbedingungen lässt sich kein generelles Verfahren angeben.

Der erste Schritt nach der Aufstellung der Bewegungsgleichungen (5.31) und der  $r$  holonomen Zwangsbedingungen  $f_a(t, x) = 0$  ist die Berechnung der zweiten Zeitableitung aller Zwangsbedingungen. Ausgehend von

$$0 = \dot{f}_a = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_a}{\partial t} \quad (5.38)$$

erhält man demnach die  $r$  Gleichungen

$$0 = \ddot{f}_a = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \ddot{x}_i - g_a(t, x, \dot{x}), \quad (5.39)$$

welche die Beschleunigungen  $\ddot{x}_i$  nur linear enthalten. Die Größen  $g_a$  fassen pauschal alle übrigen Terme zusammen, die bei den Ableitungen durch die Kettenregel entstehen.

**Achtung** Der Punkt über einer Größe, die neben der Zeit noch von anderen Größen abhängt, bezeichnet in der Regel die *vollständige* und nicht die *partielle* Zeitableitung, sofern es nicht anders definiert wird. ▶

### Frage 6

Überlegen Sie sich, dass die Terme  $g_a$  nur von der Zeit  $t$  sowie den Orten  $x_i$  und Geschwindigkeiten  $\dot{x}_i$  abhängen. Sie enthalten jedoch nicht die Beschleunigungen  $\ddot{x}_i$ . Wie sehen die  $g_a$  aus?

Durch Einsetzen der Bewegungsgleichungen (5.32) in (5.39) lassen sich alle Beschleunigungen eliminieren:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \sum_{b=1}^r \lambda_b \frac{\partial f_b}{\partial x_i} = g_a - \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_a}{\partial x_i} F_i. \quad (5.40)$$

Dies ist ein lineares, inhomogenes Gleichungssystem mit  $r$  Gleichungen für die  $r$  Lagrange-Multiplikatoren. Die Koeffizienten der  $\lambda_b$  hängen dabei nicht mehr von den Beschleunigungen  $\ddot{x}_i$  ab. Die Lösung dieses Gleichungssystems sind die Lagrange-Multiplikatoren in der Gestalt

$$\lambda_a = \lambda_a(t, x, \dot{x}) \quad (1 \leq a \leq r). \quad (5.41)$$

Die gefundenen  $\lambda_a$  können dann in die Bewegungsgleichungen (5.32) eingesetzt werden:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{a=1}^r \lambda_a(t, x, \dot{x}) \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \quad (1 \leq i \leq 3N). \quad (5.42)$$

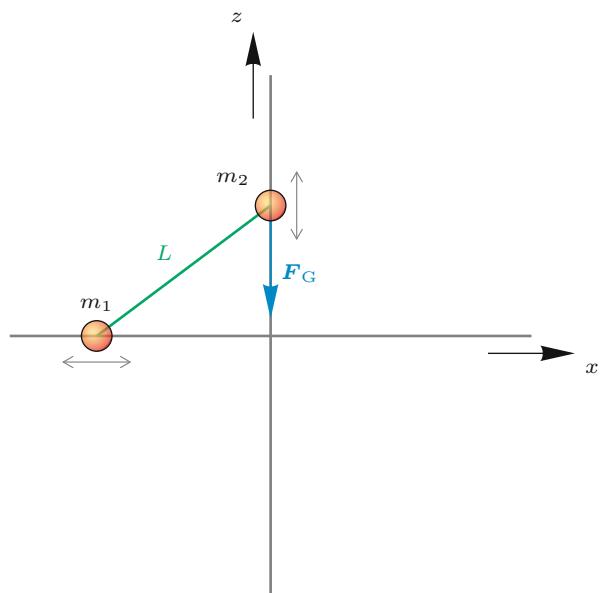
Diese Gleichungen werden mit den üblichen Methoden gelöst, denen wir im Verlauf des Buches bereits begegnet sind. Insbesondere wird dieses Vorgehen durch das Auffinden von Erhaltungsgrößen (z. B. der Energie oder des Drehimpulses) vereinfacht. Es muss allerdings beachtet werden, dass die Anfangsbedingungen zur Zeit  $t_0$  mit den Zwangsbedingungen verträglich sein müssen:

$$0 = f_a(t, x)|_{t=t_0}, \quad 0 = \dot{f}_a(t, x, \dot{x})|_{t=t_0}. \quad (5.43)$$

Sind die Bewegungsgleichungen gelöst, d. h. alle Bahnkurven bekannt, lassen sich die Lagrange-Multiplikatoren (5.41) in expliziter Form angeben. Falls gewünscht, können weiterhin die Zwangskräfte mithilfe von (5.29) berechnet und anschließend physikalisch interpretiert werden.

### Frage 7

Nachdem nun das allgemeine Lösungsverfahren bekannt ist, schauen Sie sich das sphärische Pendel in Abschn. 5.1 unter diesen Gesichtspunkten erneut an.



**Abb. 5.4** Zwei Punktmassen können sich zusammen auf einer Kreuzschiene bewegen. Ihr Abstand  $L$  wird dabei festgehalten. Zusätzlich wirkt die Gravitationskraft  $F_G$

Insgesamt gibt es die fünf Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^2 + z_2^2 - L^2 = 0, \\ f_2 &= x_2 = 0, \quad f_3 = z_1 = 0, \\ f_4 &= y_1 = 0, \quad f_5 = y_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Dies würde auf fünf Lagrange-Multiplikatoren und ein lineares Gleichungssystem mit fünf Unbekannten führen. Offensichtlich ist die Bewegung auf die  $x$ - $z$ -Ebene eingeschränkt. Man kann das System daher von vornherein in zwei Dimensionen formulieren und benötigt dann nur noch drei Zwangsbedingungen.

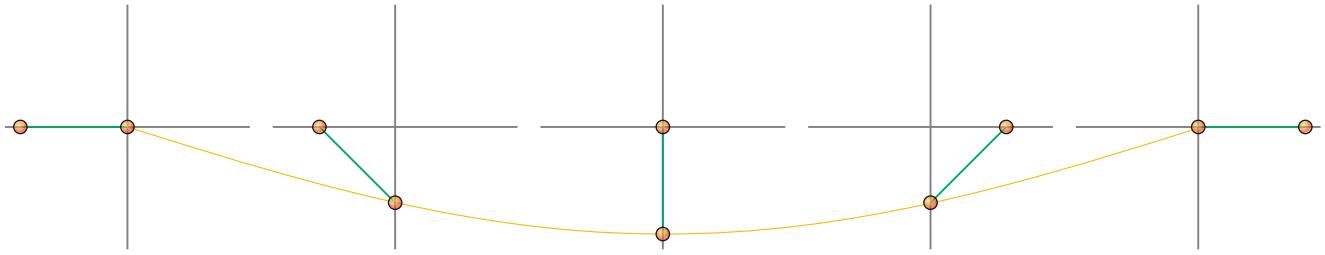
Die beiden Zwangsbedingungen  $f_4$  und  $f_5$  führen auf

$$\begin{aligned} \dot{f}_4 &= \dot{y}_1 = 0, \quad \ddot{f}_4 = \ddot{y}_1 = 0, \\ \dot{f}_5 &= \dot{y}_2 = 0, \quad \ddot{f}_5 = \ddot{y}_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Es gibt daher keine Dynamik entlang der  $y$ -Achse. Etwaige Kräfte in  $y$ -Richtung werden vollständig durch die entsprechenden Zwangskräfte kompensiert.

### Einschränkung der Bewegung auf eine Koordinatenebene

Wird die Bewegung des gesamten Systems auf eine Koordinatenebene beschränkt, so lässt sich das System direkt im zweidimensionalen Raum formulieren. Dies reduziert die Anzahl der Zwangsbedingungen und Lagrange-Multiplikatoren. Dies gilt entsprechend auch, wenn die Bewegung auf eine einzige Koordinatenachse eingeschränkt wird.



**Abb. 5.5** Löst man die Bewegungsgleichungen für die Kreuzschiene ohne Gravitation und für zwei gleiche Massen, findet man eine einfache Bewegungsform: Beide Massen schwingen um den Mittelpunkt, die eine waagerecht, die andere senkrecht. Die Bildsequenz entspricht dem zeitlichen Verlauf. Beide Schwingungen sind um 90° phasenverschoben, und der Abstand der Punktmassen bleibt stets konstant

Wir fahren daher nur mit den Zwangsbedingungen  $f_1$  bis  $f_3$  fort und beschränken uns auf die vier Koordinaten  $x_1, z_1$  sowie  $x_2$  und  $z_2$ . Nur ein Freiheitsgrad kann übrig bleiben.

Die Ableitungen der Zwangsbedingungen nach den Koordinaten, die nicht identisch verschwinden, lauten

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = 2z_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z_1} = 1. \quad (5.46)$$

Wir erhalten die vier Bewegungsgleichungen (5.32)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= 2\lambda_1 x_1, & m_1 \ddot{z}_1 &= -m_1 g + \lambda_3, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= \lambda_2, & m_2 \ddot{z}_2 &= -m_2 g + 2\lambda_1 z_2. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Hier wurde die Gravitationskraft berücksichtigt. Die zweiten Zeitableitungen der Zwangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{f}_1 = 2(\dot{x}_1^2 + x_1 \ddot{x}_1 + \dot{z}_2^2 + z_2 \ddot{z}_2), \\ 0 &= \ddot{f}_2 = \ddot{x}_2, \\ 0 &= \ddot{f}_3 = \ddot{z}_1, \end{aligned} \quad (5.48)$$

in die wir die Bewegungsgleichungen (5.47) einsetzen. Das resultierende Gleichungssystem ist diagonal, und man kann jede Gleichung direkt nach einem der Lagrange-Multiplikatoren auflösen:

$$\lambda_1 = -\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{z}_2^2 - z_2 g}{2(x_1^2/m_1 + z_2^2/m_2)}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = m_1 g. \quad (5.49)$$

Einsetzen der Lagrange-Multiplikatoren in (5.47) führt auf

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{z}_2^2 - z_2 g}{x_1^2/m_1 + z_2^2/m_2} x_1, & m_1 \ddot{z}_1 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= 0, & m_2 \ddot{z}_2 &= -\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{z}_2^2 - z_2 g}{x_1^2/m_1 + z_2^2/m_2} z_2 - m_2 g. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Die Gleichungen für  $z_1$  und  $x_2$  führen mit den Anfangsbedingungen auf die bereits bekannten Ergebnisse

$$z_1 = 0, \quad x_2 = 0. \quad (5.51)$$

Die beiden übrigen Gleichungen lösen wir nur für den Spezialfall  $m_1 = m_2 = m$  und  $g = 0$  (d. h. in Abwesenheit von Gravitation):

$$m \ddot{x}_1 = -\frac{2E}{L^2} x_1, \quad m \ddot{z}_2 = -\frac{2E}{L^2} z_2. \quad (5.52)$$

Hier wurde  $f_1 = 0$ , also  $x_1^2 + z_2^2 = L^2$  ausgenutzt. Weiterhin wurde berücksichtigt, dass die Energie

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_2^2) \quad (5.53)$$

erhalten ist, da die Zwangsbedingungen skleronom sind. Die Bewegungsgleichungen führen beide auf harmonische Schwingungen

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t - \phi_1), \quad z_2 = A_2 \cos(\omega t - \phi_2) \quad (5.54)$$

mit der Frequenz

$$\omega^2 = \frac{2E}{mL^2}. \quad (5.55)$$

Die Zwangsbedingung  $f_1$  verlangt

$$A_1^2 \cos^2(\omega t - \phi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega t - \phi_2) = L^2 = \text{const}, \quad (5.56)$$

die linke Seite der Gleichung muss also konstant sein. Dies kann nur für  $A_1^2 = A_2^2 = L^2$  und  $\phi_2 = \phi_1 \pm 90^\circ$  erfüllt werden, da

$$\begin{aligned} \cos^2(\omega t - \phi_1) + \cos^2(\omega t - \phi_1 \pm 90^\circ) \\ = \cos^2(\omega t - \phi_1) + \sin^2(\omega t - \phi_1) = 1 \end{aligned} \quad (5.57)$$

gilt. Beide Punktmassen schwingen daher mit einer gegenseitigen Phasenverschiebung von 90° und einer Amplitude  $L$  um den Ursprung. Dies ist in Abb. 5.5 dargestellt. Für diesen Spezialfall ist nur ein Lagrange-Multiplikator ungleich null:

$$\lambda_1 = -\frac{E}{L^2}. \quad (5.58)$$

Dies führt auf die Zwangskräfte

$$Z_{x,1} = -\frac{2E}{L^2} x_1, \quad Z_{z,2} = -\frac{2E}{L^2} z_2, \quad (5.59)$$

die man auch direkt aus (5.52) ablesen kann, da keine angewandten Kräfte auf die beiden Punktmassen wirken. Die Zwangskräfte sind gerade die für die Schwingung verantwortlichen Rückstellkräfte.

## 5.3 Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Die Lagrange-Gleichungen erster Art umfassen einen Satz von  $3N$  Gleichungen für die Koordinaten  $x_i$  sowie  $r$  algebraische Gleichungen für die Zwangsbedingungen. Dies führt auf insgesamt  $3N - r$  Freiheitsgrade. Es stellt sich nun die Frage, ob es nicht eine einfachere Möglichkeit gibt, nur die Bewegungsgleichungen der unabhängigen Freiheitsgrade direkt aufzustellen. Dies ist insbesondere dann von Vorteil, wenn man an den Lagrange-Multiplikatoren und Zwangskräften gar nicht interessiert ist. Tatsächlich kann man dies erreichen, indem man von vornherein generalisierte (und damit unabhängige) Koordinaten einführt, was schließlich auf die Lagrange-Gleichungen zweiter Art führt.

### Einführung der generalisierten Koordinaten und Eliminierung der Zwangsbedingungen

Die  $F$  generalisierten Koordinaten und die  $3N$  kartesischen Koordinaten erfüllen den Zusammenhang

$$x_i = x_i(t, q_1, \dots, q_F) \quad (1 \leq i \leq 3N). \quad (5.60)$$

Die Unabhängigkeit der Zwangsbedingungen von den generalisierten Koordinaten kann mathematisch als

$$\frac{\partial f_a}{\partial q_j} = 0 \quad (5.61)$$

geschrieben werden. Aufgrund der Kettenregel wird dies zu

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0. \quad (5.62)$$

#### Frage 8

Überlegen Sie sich, dass die Zwangsbedingungen  $f_a$  unabhängig von den generalisierten Koordinaten  $q_j$  sein müssen. Ansonsten wären die  $q_j$  durch diese Zwangsbedingungen eingeschränkt und damit voneinander abhängig, was genau der Definition der generalisierten Koordinaten widerspricht.

Im nächsten Schritt multiplizieren wir die Lagrange-Gleichungen erster Art mit den partiellen Ableitungen  $\partial x_i / \partial q_j$  und summieren über  $i$ :

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{a=1}^r \lambda_a \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (5.63)$$

Der letzte Term verschwindet aber wegen (5.62). Die  $F$  resultierenden Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (5.64)$$

hängen nun nicht mehr explizit von den Zwangsbedingungen ab. Man nennt die Terme

$$Q_j := \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (5.65)$$

die *generalisierten Kräfte*, da sie für die generalisierten Koordinaten  $q_j$  eine ähnliche Rolle spielen wie die Kräfte  $F_i$  für die kartesischen Koordinaten  $x_i$ .

**Achtung** An dieser Stelle wurden die holonomen Zwangsbedingungen bereits verwertet: Obwohl sie nicht direkt in den Rechnungen auftreten, sind sie durch eine geeignete Wahl der generalisierten Koordinaten berücksichtigt worden. Als Ergebnis erhält man nun  $F$  (anstatt  $3N$ ) Gleichungen der Form (5.64) für  $F$  unabhängige Koordinaten. Die Zwangskräfte treten also überhaupt nicht mehr auf. Die eigentliche problemabhängige Aufgabe besteht darin,  $F$  geeignete, generalisierte (d. h. unabhängige) Koordinaten  $q_j$  zu finden. ▶

### Herleitung der Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Die  $F$  Gleichungen (5.64) liegen noch in einer unpraktischen Form vor. Wir schreiben zunächst die linke Seite um:

$$m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (5.66)$$

Die Zeitableitung im zweiten Term auf der rechten Seite von (5.66) lässt sich durch Vertauschen der partiellen Ableitungen umformen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^F \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{k=1}^F \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Im letzten Schritt wurde

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^F \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (5.68)$$

ausgenutzt, was auch auf den Zusammenhang

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (5.69)$$

führt, denn die kartesischen Koordinaten  $x_i$  hängen nur von den  $q_j$ , nicht aber von ihren Ableitungen  $\dot{q}_j$  ab. Man nennt die  $\dot{q}_j$  auch

die *generalisierten Geschwindigkeiten*. Die Zwischenergebnisse aus (5.67) und (5.69) werden in (5.66) eingesetzt:

$$m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}. \quad (5.70)$$

Nun verwenden wir die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \quad (5.71)$$

und schreiben damit

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (5.72)$$

Wegen (5.64) und (5.65) erhalten wir schließlich die Lagrange-Gleichungen zweiter Art.

### Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Für holonome Zwangsbedingungen lauten die Bewegungsgleichungen der generalisierten Koordinaten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (1 \leq j \leq F). \quad (5.73)$$

**Achtung** Es wurden bisher keinerlei Bedingungen an die generalisierten Kräfte  $Q_j$  gestellt. So können diese konservative und auch dissipative Anteile enthalten. Wir kommen in Kürze darauf zurück. 

Bevor die Lagrange-Gleichungen zweiter Art angewandt werden können, muss man sich überlegen, wie die kinetische Energie  $T$ , die eigentlich eine Funktion der Geschwindigkeiten  $\dot{x}_i$  ist, durch die  $q_j$  und  $\dot{q}_j$  ausgedrückt werden kann. Wegen (5.60) gilt

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(t, q_1, \dots, q_F, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_F) \quad (1 \leq i \leq 3N), \quad (5.74)$$

d.h., die Zeitableitungen der kartesischen Koordinaten sind im Allgemeinen Funktionen der generalisierten Koordinaten und ihrer Zeitableitungen. Ist dieser Zusammenhang bekannt, können die Ableitungen in (5.73) berechnet werden. Um zwischen beiden Formulierungen zu unterscheiden, schreibt man häufig auch  $T(\dot{x})$  bzw.  $T(t, q, \dot{q})$ . Obwohl beide Funktionen mathematisch unterschiedlich sind, ist die physikalische Größe, die kinetische Energie, dieselbe.

### Kugelkoordinaten

In (5.10) wurden bereits generalisierte Koordinaten für die Bewegung einer Punktmasse auf einer Kugeloberfläche angegeben. Da der Kugelradius  $R$  konstant und keine

generalisierte Koordinate ist, gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= R\dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - R\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \dot{x}_2 &= R\dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + R\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \dot{x}_3 &= -R\dot{\vartheta} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Durch Einsetzen und eine einfache Rechnung überzeugt man sich davon, dass

$$T = \frac{1}{2} m_i \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 = \frac{mR^2}{2} \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) \quad (5.76)$$

gilt.

Zeigen Sie dies.

Dies ist die kinetische Energie für die Bewegung einer Punktmasse in Kugelkoordinaten für festen Radius  $R$ . Die beiden Lagrange-Gleichungen zweiter Art lauten somit

$$\begin{aligned} mR^2 \frac{d}{dt} \dot{\vartheta} &= Q_\vartheta, \\ mR^2 \left[ \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta) - \dot{\varphi}^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \right] &= Q_\varphi. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Diese beiden Bewegungsgleichungen für  $\vartheta$  und  $\varphi$  sind für gegebene generalisierte Kräfte  $Q_\vartheta$  und  $Q_\varphi$  zu lösen. Sind die Kräfte nur in kartesischer Form bekannt, kann man die  $Q_j$  mit (5.65) berechnen. Man beachte, dass die Zwangsbedingung (Bewegung auf der Kugeloberfläche) nur bei der Wahl der generalisierten Koordinaten eingegangen ist, nicht aber bei den expliziten Rechnungen.

Die allgemeine Bewegung in Kugelkoordinaten wird in Aufgabe 5.3 besprochen. 

### Lagrange-Funktion für konservative Kräfte

Wir spalten die Kräfte  $F_i$  nun in zwei Anteile auf: einen konservativen,  $F_i^{(k)}$ , und einen dissipativen,  $F_i^{(d)}$  (siehe Abschn. 1.6). Analog schreiben wir

$$Q_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(k)} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad Q_j^{(d)} = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(d)} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (5.78)$$

Die konservativen Kräfte lassen sich aus einem Potenzial ableiten:

$$F_i^{(k)} = -\frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i}. \quad (5.79)$$

Wir finden somit

$$Q_j^{(k)} = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V(t, x(t, q))}{\partial q_j}. \quad (5.80)$$

Dies verdeutlicht, warum wir die  $Q_j$  anfangs als generalisierte Kräfte bezeichnet haben.

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art lassen sich nun umformulieren. Wir definieren die *Lagrange-Funktion*

$$L := T - V = T(t, q, \dot{q}) - V(t, q) \quad (5.81)$$

und schreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(d)}. \quad (5.82)$$

Dies ist möglich, da das Potenzial  $V$  nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}$  abhängt. Beschränkt man sich auf konservative Systeme, findet man die wichtigen Lagrange-Gleichungen zweiter Art für konservative Systeme.

### Lagrange-Gleichungen zweiter Art für konservative Systeme

Für konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen lauten die Bewegungsgleichungen der generalisierten Koordinaten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq F). \quad (5.83)$$

Hier ist

$$L(t, q, \dot{q}) := T(t, q, \dot{q}) - V(t, q) \quad (5.84)$$

die Lagrange-Funktion des Systems.

Man nennt (5.83) auch kurz die *Lagrange-Gleichungen* (oder Euler-Lagrange-Gleichungen, wie später noch begründet wird).

Bei den Lagrange-Gleichungen handelt es sich um  $F$  Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, zu deren vollständiger Lösung  $2F$  Integrationskonstanten (z. B. in Form von Anfangsbedingungen) benötigt werden.

Der Lagrange-Formalismus, der im Wesentlichen aus dem Konzept der generalisierten Koordinaten und den Bewegungsgleichungen (5.83) besteht, stellt einen entscheidenden Schritt in der Entwicklung der Mechanik im Speziellen und der gesamten theoretischen Physik im Allgemeinen dar und ist daraus nicht mehr wegzudenken. Dies wird sich noch in den weiteren Teilen dieses Buches (vor allem in Bd. 2, Kap. 10) zeigen.

Während die Newton'schen Gesetze für kartesische Koordinaten formuliert wurden, ist der Lagrange-Formalismus koordinatenunabhängig: Die Wahl der generalisierten Koordinaten ist beliebig, so lange sie mit den Zwangsbedingungen vereinbar ist.

Wie später noch erarbeitet wird, ergeben sich aus dem Lagrange-Formalismus die Erhaltungsgrößen eines Systems in natürlicher Weise. Ein weiterer Vorteil ist, dass es sich bei der Lagrange-Funktion um eine skalare Größe handelt, die in der Regel leichter als die vektoriellen Kraftgleichungen aufgestellt werden kann.

### Newton'sche Bewegungsgleichungen

Generalisierte Koordinaten können natürlich auch für Systeme ohne Zwangsbedingungen verwendet werden. In diesem Fall entspricht die Anzahl der generalisierten Koordinaten  $q_j$  der Anzahl der ursprünglichen kartesischen Koordinaten  $x_i$ .

Als einfachstes Beispiel betrachten wir die kartesischen Koordinaten  $q_j = x_j$  einer Punktmasse  $m$ . Die kinetische Energie und das Potenzial lauten

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2, \quad V = V(x). \quad (5.85)$$

Dies führt wegen (5.81) und (5.83) direkt auf die bekannten Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{x}_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (1 \leq i \leq 3), \quad (5.86)$$

die selbstverständlich im allgemeineren Lagrange-Formalismus enthalten sind. Diese Aussage lässt sich leicht auf Systeme von Punktmassen ausweiten. ▶

Eine weitere Anwendung der Lagrange-Gleichungen ohne Zwangsbedingungen ist das Aufstellen der Bewegungsgleichungen in nichtkartesischen Koordinaten. So können die Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten mit nur wenigen Rechenschritten aus (5.83) hergeleitet werden. Dies wird in Aufgabe 5.3 an einem Beispiel durchgeführt.

Die Anwendung des Lagrange-Formalismus auf eine Punktladung im elektromagnetischen Feld wird in der Literatur vielfach bereits in der Mechanik vorgestellt. Wir verschieben diese Diskussion stattdessen auf Bd. 2, Abschn. 10.1.

### Zyklische Koordinaten und generalisierte Impulse

#### Kanonisch konjugierter Impuls als Erhaltungsgröße

Man bezeichnet

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.87)$$

als den *generalisierten Impuls* zur Koordinate  $q_j$  oder auch den *kanonisch konjugierten Impuls*. Der Name „Impuls“ ist gerechtfertigt, wie sich später noch zeigen wird.

Dieser erlaubt oft eine rasche Identifizierung von Erhaltungsgrößen des betrachteten Systems: Eine Koordinate  $q_j$  heißt *zyklisch*, wenn die Lagrange-Funktion nicht von ihr abhängt. In diesem Fall lautet die entsprechende Bewegungsgleichung (5.83) einfach

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j = 0. \quad (5.88)$$

Dies bedeutet, dass der kanonische Impuls  $p_j$  eine Erhaltungsgröße ist.

Ist eine generalisierte Koordinate  $q_j$  zyklisch, so ist ihr konjugierter Impuls  $p_j$  eine Erhaltungsgröße. Jede zyklische Koordinate führt daher auf einen Erhaltungssatz, was einer ersten Integration der Bewegungsgleichung entspricht.

Unabhängigkeit von einer Koordinate bedeutet Symmetrie bezüglich Verschiebungen, Drehungen usw.; also deutet sich hier ein Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen an. Dies vereinfacht die mathematische Behandlung der Bewegungsgleichungen wesentlich.

Die generalisierten Koordinaten sollten so gewählt werden, dass möglichst viele von ihnen zyklisch sind. Verallgemeinerte Koordinaten werden daher geschickterweise so gewählt, dass sie der Symmetrie des Problems angepasst sind.

Die Lagrange-Gleichungen nehmen eine anschauliche Form an, falls die kinetische Energie nicht von  $q_i$  abhängt. Dann ist  $-\partial L/\partial q_i$  die Ableitung der potenziellen Energie nach der generalisierten Koordinate  $q_i$ , d. h. die generalisierte Kraft  $Q_i$ . Da  $\partial L/\partial q_i$  weiterhin der generalisierte Impuls  $p_i$  ist, drücken die Lagrange-Gleichungen letztlich „nur“ das zweite Newton'sche Axiom in verallgemeinerten Koordinaten aus:  $\dot{p}_i = Q_i$ .

### Frage 9

Überlegen Sie sich die Form der Lagrange-Funktion einer freien Punktmasse in kartesischen Koordinaten. Sind die Koordinaten  $x_i$  zyklisch? Welche Konsequenz hat dies für die verbundenen Impulse

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i? \quad (5.89)$$

Ohne Beweis halten wir noch einen nützlichen Zusammenhang fest. Handelt es sich bei  $q_j$  um eine Winkelkoordinate, die eine Drehung um die Achse  $\hat{n}$  beschreibt, so ist der dazu konjugierte Impuls  $p_j$  gerade der Drehimpuls um diese Achse. Ist also eine Winkelkoordinate zyklisch, ist der damit verbundene Drehimpuls erhalten. Wir werden dies in Kürze am Beispiel des schweren Kreisels sehen.

## Energieerhaltung

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass erhaltene konjugierte Impulse direkt von der Lagrange-Funktion abgelesen werden können. Gilt dies auch für die Energie? In der Tat kann man der Lagrange-Funktion direkt ansehen, ob die Energie erhalten ist. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Wir werden sehen, dass die Energieerhaltung eng mit der Invarianz unter Zeitverschiebungen verknüpft ist.

Wir untersuchen zunächst die Zeitableitung der Lagrange-Funktion:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.90)$$

Sind nun alle Kräfte im System konservativ, d. h. kann man alle Kräfte aus einem Potenzial  $V$  ableiten, so gelten die Bewegungsgleichungen (5.83):

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (5.91)$$

Man kann daher

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \left( \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.92)$$

oder auch

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( L - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (5.93)$$

schreiben.

Wir beschränken uns nun auf Systeme, deren Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt,  $\partial L/\partial t = 0$ . Dies sind Systeme, deren holome Zwangsbedingungen skleronom sind. Eine Zeitverschiebung  $t \rightarrow t + t_0$  lässt die Lagrange-Funktion dann invariant. Solche Systeme heißen *zeitlich homogen* (ein Fadenpendel mit variabler Fadenlänge beispielsweise würde auf einen nichtverschwindenden Term  $\partial L/\partial t$  führen; Aufgabe 5.3).

Offensichtlich folgt dann

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0, \quad (5.94)$$

und die Größe

$$H := \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (5.95)$$

ist eine Erhaltungsgröße, falls  $\partial L/\partial t = 0$  ist. Die Größe  $H$  ist die sogenannte *Hamilton-Funktion*. In Kap. 7 kommen wir ausführlicher auf sie zu sprechen. Nun soll aber noch gezeigt werden, dass  $H$  der Gesamtenergie des Systems entspricht.

Für geschwindigkeitsunabhängige Systeme, also Systeme mit  $\partial V/\partial \dot{q}_i = 0$ , die wir hier betrachten, ist

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \quad (5.96)$$

An dieser Stelle müssen wir einen kleinen Exkurs vornehmen und uns die Struktur der kinetischen Energie  $T$  genauer anschauen. Wir hatten bereits gesehen, dass die Zwangsbedingungen in der Gestalt (5.60) formuliert werden können. Dies führte auf die Geschwindigkeiten (5.68). Die partielle Zeitableitung  $\partial x_i/\partial t$  verschwindet dort nur dann nicht, wenn die Zwangsbedingungen rheonom sind, also explizit von der Zeit abhängen. Wir beschränken uns nun auf skleronome Zwangsbedingungen, für die dann

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^F \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (5.97)$$

erfüllt ist. Die kinetische Energie lautet damit

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \sum_{j=1}^F \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2. \quad (5.98)$$

Die kinetische Energie ist somit eine homogene quadratische Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$ , wenn alle Zwangsbedingungen skleronom sind. Hier kann man das Euler-Theorem über homogene Funktion (3.197) anwenden. Es führt auf die Identität

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T. \quad (5.99)$$

### Frage 10

Frischen Sie Ihre Erinnerungen an das Euler-Theorem auf und überlegen Sie sich, wie es auf (5.99) führt.

Die Hamilton-Funktion erfüllt somit

$$H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V = E; \quad (5.100)$$

sie entspricht der Gesamtenergie des Systems.

### Hamilton-Funktion und Gesamtenergie

Die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (5.101)$$

ist gleich der erhaltenen Gesamtenergie des Systems, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Das System ist konservativ; alle Kräfte lassen sich aus  $V$  ableiten.
- Das Potenzial  $V$  ist geschwindigkeitsunabhängig.
- Alle Zwangsbedingungen sind skleronom.

### Schwerer symmetrischer Kreisel

Der schwere symmetrische Kreisel ist ein Beispiel für ein System, dessen Bewegung unter Verwendung des Lagrange-Formalismus einfacher studiert werden kann als der Zugang, der in Abschn. 4.7 verfolgt wurde.

Wir erinnern uns, dass ein Kreisel mit einem festen Unterstützungspunkt noch drei Rotationsfreiheitsgrade besitzt. Die Euler-Winkel eignen sich in diesem Fall für die benötigten generalisierten Koordinaten, d. h., wir schreiben  $(q_1, q_2, q_3) = (\vartheta, \varphi, \psi)$ .

Die Energie des schweren symmetrischen Kreisels wurde bereits in (4.159) als Funktion der Euler-Winkel angegeben. Man kann also direkt die Lagrange-Funktion  $L = T - V$  hinschreiben:

$$L = \frac{\Theta}{2} \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + \frac{\Theta_3}{2} \left( \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \right)^2 - MgR \cos \vartheta. \quad (5.102)$$

Hierbei sind  $\Theta$  und  $\Theta_3$  die Hauptträgheitsmomente bezüglich des Stützpunktes, und  $R$  ist der Abstand des Schwerpunktes vom Stützpunkt. Man sieht sofort, dass sowohl  $\varphi$  als auch  $\psi$  zyklische Koordinaten sind. Ihre konjugierten Impulse,

$$p_\varphi = \Theta \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + \Theta_3 \cos \vartheta (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta), \quad (5.103)$$

$$p_\psi = \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta),$$

sind somit erhalten. Wegen (4.155) und (4.158) können wir  $p_\psi$  als  $L_3^*$  und  $p_\varphi$  als  $L_3$  identifizieren. Die erhaltenen konjugierten Impulse entsprechen daher den Projektionen des Drehimpulses auf die Figurennachse und auf die Wirkungssachse der Gravitationskraft. Weiterhin sehen wir, dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, weswegen die Energie  $E = T + V$  erhalten ist:

$$E = \frac{\Theta}{2} \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + \frac{\Theta_3}{2} \left( \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \right)^2 + MgR \cos \vartheta = \text{const.} \quad (5.104)$$

Die drei Erhaltungsgrößen des schweren symmetrischen Kreisels lassen sich also direkt an der Lagrange-Funktion ablesen.

Die Lagrange-Gleichungen des schweren symmetrischen Kreisels wurden hier gar nicht benötigt, da die drei Erhaltungsgrößen ( $E, p_\psi$  und  $p_\varphi$ ) auf drei einfachere Gleichungen geführt haben. Es bleibt dem interessierten Leser überlassen, die entsprechenden Lagrange-Gleichungen als Übung abzuleiten. ▶

## 5.4 Beispiele zur Anwendung des Lagrange-Formalismus

Dieser Abschnitt enthält einige Anwendungen des Lagrange-Formalismus, die vom Identifizieren der Zwangsbedingungen bis hin zum (näherungsweisen) Lösen der Bewegungsgleichungen reichen. Nach den ersten recht theoretischen und abstrakten Abschnitten wird hier das explizite Rechnen geübt. Weitere Beispiele finden sich in Aufgabe 5.1 und 5.2.

### Schiefe Ebene

Die schiefe Ebene ist ein häufig verwendetes und sehr einfaches Beispiel zur Anwendung des Lagrange-Formalismus. Man betrachte eine Punktmasse  $m$ , die unter dem Einfluss der Gravitationskraft ( $\mathbf{F}_G = -mg\hat{\mathbf{e}}_3$ ) reibungsfrei auf einer Ebene gleiten kann. Der Normalenvektor der Ebene sei  $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)^\top$  und damit um einen Winkel  $\alpha$  gegen die Senkrechte ( $\hat{\mathbf{e}}_3$ ) gekippt. Außerdem soll der Ursprung in der Ebene liegen. Wie lauten die Bewegungsgleichungen der Punktmasse auf dieser Ebene?

Man könnte natürlich den klassischen Weg gehen und die Bewegungsgleichungen für  $(x_1, x_2, x_3)$  aufzustellen. Hier wollen wir aber mit  $x_2$  und  $d$  angepasste Koordinaten einführen. Neben der kartesischen Koordinate  $x_2$  verwenden wir  $d$  als diejenige Koordinate, die in der Ebene liegt und senkrecht zu  $x_2$  verläuft:

$$\hat{\mathbf{e}}_d = -\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \alpha + \hat{\mathbf{e}}_3 \sin \alpha = (-\cos \alpha, 0, \sin \alpha)^\top. \quad (5.105)$$

Die Koordinaten hängen über

$$x_1 = -d \cos \alpha, \quad x_3 = d \sin \alpha, \quad d^2 = x_1^2 + x_3^2 \quad (5.106)$$

miteinander zusammen. Die beiden kartesischen Koordinaten  $x_1$  und  $x_3$  sind wegen  $x_3/x_1 = -\tan \alpha$  nicht unabhängig. Die kinetische Energie ist offensichtlich

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{d}^2), \quad (5.107)$$

und die potentielle Energie der Punktmasse im Gravitationsfeld, ausgedrückt durch  $d$ , lautet

$$V = mgx_3 = mgd \sin \alpha. \quad (5.108)$$

Die Lagrange-Funktion ist somit

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{d}^2) - mgd \sin \alpha. \quad (5.109)$$

### Frage 11

Überprüfen Sie diese Überlegungen und Rechenschritte.

Wir haben es mit zwei Freiheitsgraden zu tun und erhalten zwei Lagrange-Gleichungen. Über

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\ddot{x}_2 \quad (5.110)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial d} = -mg \sin \alpha, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{d}} = m\ddot{d} \quad (5.111)$$

folgen also die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_2 = 0, \quad \ddot{d} = -g \sin \alpha. \quad (5.112)$$

Die Gleichung für  $x_2$  war zu erwarten, da die Projektion der Gravitationsbeschleunigung auf die  $x_2$ -Achse null ist. Allerdings gibt es, je nach Wert von  $\alpha$ , einen Anteil der Gravitationsbeschleunigung, der entlang der  $d$ -Achse zeigt. Mithilfe von (5.106) kann man bei Bedarf wieder auf die drei ursprünglichen (und abhängigen) Koordinaten zurücktransformieren.

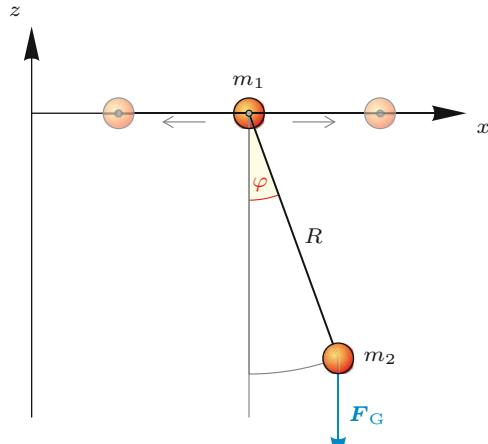
### Rollpendel

Das *Rollpendel* (Abb. 5.6) besteht aus einer Masse  $m_1$ , die sich nur entlang der  $x$ -Achse auf einer Schiene reibungsfrei bewegen kann, sowie einer Masse  $m_2$ , die sich nur in der  $x$ - $z$ -Ebene bewegen darf und dabei einen festen Abstand  $R$  zur Masse  $m_1$  besitzen soll. Zusätzlich wirkt die homogene Scherebeschleunigung  $g$  entlang der negativen  $z$ -Achse. Die vier holonomen Zwangsbedingungen lauten also

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z_1 = 0 \quad (5.113)$$

und

$$(x_1 - x_2)^2 + z_2^2 - R^2 = 0. \quad (5.114)$$



**Abb. 5.6** Beim Rollpendel kann die Masse  $m_1$  reibungsfrei auf einer Schiene rollen. Eine zweite Masse  $m_2$  ist daran mit einem masselosen Stab der Länge  $R$  befestigt und kann unter dem Einfluss der Schwerkraft schwingen

## Übersicht: Lagrange-Formalismus

### Zusammenfassung der Schritte zur Problemlösung

Im Lagrange-Formalismus kann der typische Lösungsweg für ein Problem mit konservativen Kräften folgendermaßen zusammengefasst werden:

- Überlegen Sie sich für ein gegebenes System mit  $N$  Punktmassen, dass die  $r$  Zwangsbedingungen holonom sind. Dies führt auf  $F = 3N - r$  Freiheitsgrade. Die funktionale Form  $f_a(x)$  der Zwangsbedingungen muss dabei gar nicht bekannt sein.
- Suchen Sie  $F$  generalisierte Koordinaten  $q_j$ , die nicht durch die Zwangsbedingungen eingeschränkt sind. Die ursprünglichen kartesischen Koordinaten erfüllen dabei  $x_i(t, q_1, \dots, q_F) \quad (1 \leq i \leq 3N)$ .
- Stellen Sie die Lagrange-Funktion  $L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) - V(t, q)$  auf.

- Suchen Sie nach zyklischen Koordinaten. Für sie sind die damit verbundenen generalisierten Impulse

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

erhalten.

- Verwenden Sie für die nichtzyklischen Koordinaten die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.

- Lösen Sie die resultierenden Bewegungsgleichungen und diskutieren Sie gegebenenfalls die Ergebnisse.

Sie führen auf  $F = 2$  Freiheitsgrade. Wir wählen die beiden generalisierten Koordinaten  $q_1 = x_1$  und  $q_2 = \varphi$  (wie in Abb. 5.6 definiert). Weiterhin gilt

$$x_2 = x_1 + R \sin \varphi, \quad z_2 = R \cos \varphi \quad (5.115)$$

für die abhängigen Koordinaten von  $m_2$ .

Die kinetische Energie ist

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (R^2 \dot{\varphi}^2 + 2R \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi), \end{aligned} \quad (5.116)$$

die potentielle Energie

$$V = -m_2 g R \cos \varphi. \quad (5.117)$$

Die Lagrange-Funktion lautet

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (R^2 \dot{\varphi}^2 + 2R \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) \\ &\quad + m_2 g R \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Es gibt mit  $x_1$  eine zyklische Variable. Der damit verbundene erhaltene Impuls,

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 R \dot{\varphi} \cos \varphi = \text{const}, \quad (5.119)$$

entspricht dem Gesamtimpuls entlang der  $x$ -Achse. Wir nutzen diese Erhaltungsgröße aus und lösen zunächst nach  $\dot{x}_1$  auf, wobei wir  $M := m_1 + m_2$  verwenden:

$$\dot{x}_1 = \frac{p_1}{M} - \frac{m_2}{M} R \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (5.120)$$

Diese Gleichung kann direkt aufintegriert werden:

$$x_1(t) - x_1(0) = \frac{p_1}{M} t - \frac{m_2}{M} R [\sin \varphi(t) - \sin \varphi(0)]. \quad (5.121)$$

Offensichtlich muss noch eine Aussage über die Zeitabhängigkeit  $\varphi(t)$  getroffen werden. Dazu schreiben wir die entsprechende Lagrange-Gleichung auf. Nach kurzer Rechnung findet man

$$R \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos \varphi + g \sin \varphi = 0. \quad (5.122)$$

#### Frage 12

Verwenden Sie die Lagrange-Gleichung, um diese Bewegungsgleichung für  $\varphi$  zu erhalten.

Dies kann für kleine Auslenkungen vereinfacht werden, indem man

$$\cos \varphi \approx 1, \quad \sin \varphi \approx \varphi \quad (5.123)$$

und damit

$$R \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 + g \varphi = 0 \quad (5.124)$$

schreibt. Wir eliminieren  $\ddot{x}_1$  aus der Bewegungsgleichung für  $\varphi$ , indem wir (5.120) einmal nach der Zeit ableiten, nachdem wir die Näherung (5.123) verwendet haben. Dies führt wegen

$$\ddot{x}_1 \approx -\frac{m_2}{M} R \ddot{\varphi} \quad (5.125)$$

auf

$$\ddot{\varphi} \approx -\frac{g}{R} \frac{M}{m_1} \varphi. \quad (5.126)$$

Bei (5.126) handelt es sich um eine harmonische Schwingungsgleichung, die zu

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t - \phi_0), \quad \omega^2 = \frac{g}{R m_1} \quad (5.127)$$

aufintegriert werden kann, wobei  $A$  und  $\phi_0$  die Amplitude und ein Phasenwinkel sind, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Damit ist auch die Zeitabhängigkeit von  $x_1$  in (5.121) gegeben.

### Frage 13

Überlegen Sie sich, dass die zwei Freiheitsgrade des Problems mit vier Anfangsbedingungen für  $p_1$  und  $x(0)$  sowie  $A$  und  $\phi_0$  versehen sind.

Sind alle vier Anfangsbedingungen bekannt, sind die beiden Bewegungsgleichungen vollständig gelöst, jedenfalls solange die Näherung (5.123) erfüllt ist. Andernfalls ist das Problem nicht analytisch, wohl aber mit numerischen Methoden lösbar.

Mit der zusätzlichen Zwangsbedingung  $x_1 = \text{const}$  reduziert sich das Rollpendelproblem auf das einfache Stangenpendel. In diesem Fall gibt es mit  $\varphi$  nur eine generalisierte Koordinate und keine zyklische Koordinate. Interessierte Leser können diesen Spezialfall schnell ableiten, indem  $x_1$  in der Lagrange-Funktion als konstant behandelt wird.

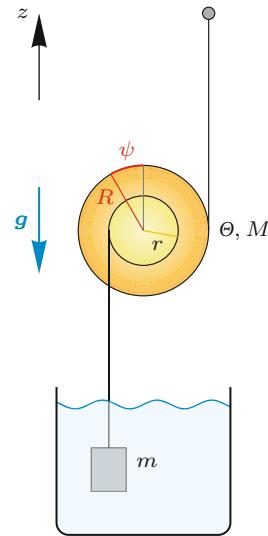
## Doppeltes Jo-Jo mit Reibung

Wie in Abb. 5.7 dargestellt, stellen wir uns ein Jo-Jo (Masse  $M$  und Trägheitsmoment  $\Theta$  bezüglich der Drehachse) vor, das an einem Faden abrollt. Der Faden ist an einem Punkt oberhalb des Jo-Jos befestigt und mit einem Radius  $R$  um das Jo-Jo gewickelt. Das Jo-Jo ist so gebaut, dass ein zweiter Faden an ihm befestigt ist, an welchem eine Punktmasse  $m$  hängt. Dieser zweite Faden ist mit einem Radius  $r$  um das Jo-Jo gewickelt. Rollt das Jo-Jo vom oberen Faden ab, so wickelt sich gleichzeitig der untere Faden ab.

Der Drehwinkel  $\psi$  des Jo-Jos ist so definiert, dass er beim Abrollen anwächst. Wir legen den Koordinatenursprung in den Aufhängepunkt des oberen Fadens. Die  $x_3$ -Achse zeigt nach oben; die Gravitationsbeschleunigung erfüllt demnach  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$ . Alle linearen Bewegungen können nur entlang der  $x_3$ -Achse stattfinden. Wir verwenden daher jeweils die Koordinaten  $z$  und  $Z$  sowie die Geschwindigkeiten  $\dot{z}$  und  $\dot{Z}$  für die Punktmasse und das Jo-Jo. Weiterhin befindet sich die Punktmasse  $m$  in einem Behälter mit Wasser, sodass  $m$  eine dissipative Reibungskraft

$$F^{(d)} = -K\dot{z} \quad (5.128)$$

erfährt (siehe (1.30)) beim Fall mit Stokes'scher Reibung).



**Abb. 5.7** Das doppelte Jo-Jo besteht aus einem starren Körper (Masse  $M$ , Trägheitsmoment  $\Theta$ ), das unter dem Einfluss der Schwerkraft von einem Faden abrollt. Gleichzeitig rollt ein weiterer Faden mit einer Masse  $m$  ab, die in einem Gefäß mit Wasser eingetaucht und damit einer Reibungskraft unterworfen ist

**Achtung** Man beachte, dass (5.128) keine Zwangsbedingung darstellt, da sie nicht die Unabhängigkeit der Koordinaten einschränkt. ▶

Zunächst überlegt man sich, wie viele Freiheitsgrade das System ohne Zwangsbedingungen hätte und wie viele Zwangsbedingungen zu berücksichtigen sind. Das Jo-Jo als starrer Körper hat ursprünglich sechs, die Punktmasse drei Freiheitsgrade. Die folgenden Zwangsbedingungen sind zu berücksichtigen (in Klammern steht die Anzahl der damit verbundenen unabhängigen Zwangsbedingungen):

- Schwerpunktsbewegung des Jo-Jos entlang einer Achse (2),
- feste Rotationsachse des Jo-Jos (2),
- Abrollbedingung für das Jo-Jo (1),
- Bewegung der Punktmasse entlang einer Achse (2),
- Abrollbedingung für Punktmasse (1).

Es gibt acht Zwangsbedingungen und damit nur einen Freiheitsgrad.

### Frage 14

Überlegen Sie sich, dass alle Zwangsbedingungen holonom sind. Ansonsten wären die Lagrange-Gleichungen zweiter Art gar nicht anwendbar!

Die vier Bedingungen, welche die Bewegungen auf die  $x_3$ -Achse einschränken, sind offensichtlich holonom. Die Abrollbedingungen sind in diesem Fall ebenfalls holonom, da sie als

Relationen zwischen den Koordinaten dargestellt werden können, wie wir in (5.131) und (5.132) sehen werden. Die Fixierung der Drehachse kann durch eine geeignete Festlegung der Euler-Winkel erreicht werden ( $\vartheta = 90^\circ$  und  $\varphi = 0^\circ$ ; siehe Abb. 4.3) und ist deshalb ebenfalls holonom.

Es bieten sich im Wesentlichen drei Koordinaten zur Beschreibung des letzten Freiheitsgrades an:  $\psi$ ,  $z$  oder  $Z$ . Wir entscheiden uns für den Rollwinkel  $\psi$ . Man könnte alternativ eine der anderen beiden verwenden.

Es müssen nun die gesamte kinetische und potenzielle Energie als Funktion von  $\psi$  und  $\dot{\psi}$  aufgeschrieben werden. Die Reibungskraft der Punktmasse wird als generalisierte, dissipative Kraft  $Q_\psi^{(d)}$  (5.78) berücksichtigt.

Die kinetische Energie des Jo-Jos besteht aus einem Schwerpunkts- und einem Rotationsanteil. Der konservative Anteil der Kräfte, die Gewichtskraft, kann in Form eines Potenzials berücksichtigt werden. Wir schreiben

$$T_M = \frac{1}{2}M\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}\Theta\dot{\psi}^2, \quad V_M = MgZ. \quad (5.129)$$

Für die Punktmasse gilt

$$T_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2, \quad V_m = mgz. \quad (5.130)$$

Es sind nun  $Z$ ,  $z$  sowie  $\dot{Z}$  und  $\dot{z}$  zu eliminieren und durch  $\psi$  und  $\dot{\psi}$  zu ersetzen. Man kann sich leicht überlegen, dass für das Jo-Jo

$$Z = Z_0 - R\psi \quad (5.131)$$

gilt, denn es bewegt sich beim Abrollen nach unten. Hier ist  $Z_0$  eine konstante Referenzhöhe, die in den Bewegungsgleichungen nicht auftreten wird. Es ist zu beachten, dass  $\psi$  beliebige reelle Werte annehmen kann und nicht auf das Intervall  $[0, 2\pi]$  eingeschränkt ist.

Für die Punktmasse gilt

$$z = z_0 - R\psi - r\dot{\psi}, \quad (5.132)$$

denn die Bewegung der Punktmasse wird durch das Abrollen beider Fäden beeinflusst. Analog verwenden wir eine konstante Referenzhöhe  $z_0$ . Da die Radien  $R$  und  $r$  konstant sind, folgt

$$\dot{Z} = -R\dot{\psi}, \quad \dot{z} = -(R + r)\dot{\psi}. \quad (5.133)$$

Man findet schnell die Lagrange-Funktion, in der nur noch  $\psi$  und  $\dot{\psi}$  auftreten:

$$\begin{aligned} L &= T_M + T_m - V_M - V_m \\ &= \frac{1}{2} [MR^2 + \Theta + m(R + r)^2] \dot{\psi}^2 \\ &\quad + g[MR + m(R + r)]\psi - C \\ &= \frac{1}{2}\mu_1\dot{\psi}^2 + \mu_2g\psi - C. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Die Konstante  $C$  hängt von  $Z_0$  und  $z_0$  ab und fällt beim Ableiten der Lagrange-Funktion weg. Dies entspricht der freien Wahl des Referenzpunktes der potenziellen Energie. Es wurden weiterhin die Abkürzungen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  eingeführt. Gl. (5.134) hat dieselbe Form wie die Lagrange-Funktion einer Punktmasse im freien Fall.

### Frage 15

Überlegen Sie sich, dass die Lagrange-Funktion für eine frei fallende Punktmasse als

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz \quad (5.135)$$

geschrieben werden kann.

Wir erwarten daher ein qualitativ ähnliches Verhalten für  $\psi$  in (5.134) und  $z$  in (5.135), allerdings sind die Koeffizienten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  im Falle des Doppeljojos nicht identisch.

Die Bewegungsgleichung für das Jo-Jo folgt aus (5.82):

$$\mu_1\ddot{\psi} - \mu_2g = Q_\psi^{(d)}. \quad (5.136)$$

Es muss noch die generalisierte Reibungskraft aufgestellt werden. Die Reibungskraft (5.128) wirkt nur auf die Punktmasse  $m$  und nur in  $x_3$ -Richtung. Daher gibt es lediglich den Beitrag

$$F_z^{(d)} = -K\dot{z}. \quad (5.137)$$

Wegen (5.78) gilt

$$Q_\psi^{(d)} = F_z^{(d)} \frac{\partial z}{\partial \psi} = -K(R + r)^2\dot{\psi}. \quad (5.138)$$

Schließlich lautet die Bewegungsgleichung

$$\mu_1\ddot{\psi} - \mu_2g = -\mu_3K\dot{\psi}, \quad (5.139)$$

wobei  $\mu_3 = (R + r)^2$  als weitere Abkürzung eingeführt wurde. Gl. (5.139) ist mit dem Ausdruck (1.31) der Stokes'schen Reibung zu vergleichen. Ist (5.139) gelöst, können die Bewegungen von  $z$  und  $Z$  aus (5.131) und (5.132) gewonnen werden. Es handelt sich bei (5.139) um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung in  $\dot{\psi}$ . Hier bietet sich der Ansatz

$$\dot{\psi} = \omega_\infty [1 - e^{-\lambda(t-t_0)}] \quad (5.140)$$

an.  $\omega_\infty = \dot{\psi}|_{t \rightarrow \infty}$  ist die Endwinkelgeschwindigkeit, und  $\lambda$  ist ein Parameter, der vom Reibungskoeffizienten  $K$  abhängt. Dieser Ansatz beruht auf den beiden Annahmen, dass zu Beginn ( $t = t_0$ ) das System in Ruhe ist und der Endzustand  $\dot{\psi} = \omega_\infty$  asymptotisch erreicht wird.

### Frage 16

Zeigen Sie, dass der Ansatz (5.140) auf die Gleichung

$$(\mu_3K\omega_\infty - \mu_2g) + \omega_\infty (\mu_1\lambda - \mu_3K) e^{-\lambda(t-t_0)} = 0 \quad (5.141)$$

führt.

Damit diese Gleichung zu allen Zeiten  $t$  erfüllt ist, müssen

$$\mu_3 K \omega_\infty - \mu_2 g = 0 \quad (5.142)$$

und

$$\mu_1 \lambda - \mu_3 K = 0 \quad (5.143)$$

separat gelten. Die erste Gleichung führt auf die Endwinkelgeschwindigkeit

$$\omega_\infty = \frac{\mu_2 g}{\mu_3 K} = \frac{(MR + mR + mr)g}{(R + r)^2 K}, \quad (5.144)$$

die zweite auf den noch fehlenden Parameter

$$\lambda = \frac{\mu_3 K}{\mu_1} = \frac{(R + r)^2 K}{MR^2 + \Theta + (R + r)^2}. \quad (5.145)$$

Es ist trivial, (5.140) noch einmal aufzuentwickeln. Dies erfordert noch eine Anfangsbedingung für den Winkel. Somit ist das Problem des doppelten Jo-Jos mit Reibung exakt und vollständig gelöst.

## Rotierende Bezugssysteme

In Kap. 2 wurden die Bewegungsgleichungen einer Punktmasse in rotierenden Bezugssystemen aufgestellt. Wir können dies jedoch mithilfe des Lagrange-Formalismus mit weniger Aufwand durchführen. Man erinnere sich dabei an (2.74):

$$\dot{x} = R^\top [\dot{x}' + \omega' \times (x' - b')]. \quad (5.146)$$

Diese Gleichung verknüpft die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  in einem Inertialsystem (ungestrichen) mit der Geschwindigkeit  $\dot{x}'$  in einem dazu mit  $\omega'$  rotierenden System (gestrichen).

### Frage 17

Rufen Sie sich die Bedeutung der restlichen Symbole in Erinnerung.

Im Inertialsystem formuliert lautet die Lagrange-Funktion

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x). \quad (5.147)$$

Wir wollen allerdings die Bewegungsgleichungen für die gestrichenen Koordinaten aufstellen. Dazu müssen  $x$  und  $\dot{x}$  durch Ort und Geschwindigkeit im gestrichenen System ( $x'$  und  $\dot{x}'$ ) ersetzt werden. Die Lagrange-Funktion lautet dann (Striche bezeichnen hier keine Ableitungen, sondern lediglich das gewählte Koordinatensystem)

$$\begin{aligned} L'(x', \dot{x}') &= \frac{1}{2} m [\dot{x}' + \omega' \times (x' - b')]^2 - V(x') \\ &= \frac{m}{2} \dot{x}'^2 + m \dot{x}' \cdot [\omega' \times (x' - b')] \\ &\quad + \frac{m}{2} [\omega' \times (x' - b')]^2 - V'(x'). \end{aligned} \quad (5.148)$$

Es ist wieder zu beachten, dass die Lagrange-Funktionen  $L(x, \dot{x})$  und  $L'(x', \dot{x}')$  sowie die Potenziale  $V(x)$  und  $V'(x')$  zwar jeweils dieselbe Größe beschreiben, aber im Allgemeinen unterschiedliche Funktionen ihrer Argumente sind. Die genaue Form des Potenzials spielt hier keine Rolle. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  und die Verschiebung  $b'$  sind vorgegeben und verhalten sich bei der Differenzierung nach  $x'$  und  $\dot{x}'$  wie Konstanten.

Die Ableitung nach den Koordinaten lautet

$$\frac{dL'}{dx'} = m \dot{x}' \times \omega' + m [\omega' \times (x' - b')] \times \omega' - \frac{dV'(x')}{dx'}. \quad (5.149)$$

### Frage 18

Überprüfen Sie dies mithilfe der Komponentenschreibweise.

Weiterhin ist

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'} = m \dot{x}' + m \omega' \times (x' - b'). \quad (5.150)$$

Wir berechnen noch

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'} = m \ddot{x}' + m \dot{\omega}' \times (x' - b') + m \omega' \times \dot{x}', \quad (5.151)$$

wobei wir  $\dot{b}' = 0$  angenommen haben (Ausschluss einer relativen linearen Geschwindigkeit zwischen den Bezugssystemen). Die Bewegungsgleichung (5.83) lautet dann

$$\begin{aligned} -\frac{dV'(x')}{dx'} &= m \ddot{x}' + m \dot{\omega}' \times (x' - b') + 2m \omega' \times \dot{x}' \\ &\quad + m \omega' \times [\omega' \times (x' - b')] \end{aligned} \quad (5.152)$$

und entspricht somit genau der Lösung (2.79), die wir bereits gefunden haben.

Dieses Beispiel zeigt die Mächtigkeit des Lagrange-Formalismus. Auch bei Problemen ohne Zwangsbedingungen ist er extrem nützlich, wie hier bei Koordinatentransformationen. Der Übergang von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten wird in Aufgabe 5.3 durchgeführt.

## 5.5 Variationsrechnung

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der Variationsrechnung diskutiert. Mit ihrer Hilfe lassen sich Integralprinzipien, wie das Fermat'sche oder das Hamilton'sche Prinzip formulieren. Wir werden sehen, dass sich aus dem Hamilton'schen Prinzip die Bewegungsgleichungen der Mechanik ableiten lassen. Dazu wird die sogenannte Wirkung als das Zeitintegral der Lagrange-Funktion eingeführt. Die Wirkung ist in vielen Bereichen der Physik von zentraler Bedeutung (siehe auch Bd. 2, Kap. 10). Aufgrund seiner Kompaktheit und Eleganz ist das Hamilton'sche Prinzip von großer Bedeutung für die Physik. Anschließend wird gezeigt, wie sich die Variationsrechnung auf Probleme mit Nebenbedingungen anwenden lässt.

## Mathematische Grundlagen und physikalische Bedeutung

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen und die Lagrange-Gleichungen sind Differenzialgleichungen. Ist der Zustand eines Systems zu einer gegebenen Zeit  $t$  bekannt, so kann man daraus den Zustand zur Zeit  $t + dt$  berechnen. Im Idealfall lässt sich die gesamte Bahnkurve des Systems durch Integration der Bewegungsgleichungen in geschlossener Form angeben. Dieser Zugang kann als *Differenzialprinzip* bezeichnet werden.

Es ist allerdings möglich, die Bewegungsgleichungen aus einem Prinzip abzuleiten, das die gesamte Bahnkurve – und nicht einen infinitesimalen Abschnitt – als Grundlage nimmt. Hier spricht man auch von dem *Integralprinzip*. Was hat es mit dieser Aussage auf sich?

Um dies genauer zu verstehen, müssen wir ein wenig ausholen und einige mathematische Grundlagen bereitstellen. Im Rahmen der Differentialrechnung ist es eine leichte Übung, *stationäre Punkte* einer Funktion  $y(x)$  zu finden: Diese Punkte erfüllen  $dy/dx|_{x=a} = 0$ . Dabei kann es sich um ein Maximum, Minimum oder einen Sattelpunkt handeln. Die *Variationsrechnung* hingegen macht es sich zur Aufgabe, Funktionen  $y(x)$  zu finden, die ein bestimmtes Integral über eine Funktion dieser Funktion extremal machen. Funktionen von Funktionen nennt man *Funktionale* (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 5.2). Dies führt auf die *Extremalprinzipien*, die in der Physik eine wichtige Rolle spielen.

### Fermat'sches Prinzip

Ein eingängiges Beispiel für ein Extremalprinzip kommt aus der geometrischen Optik: Das *Fermat'sche Prinzip* besagt, dass längs eines tatsächlich realisierten Lichtstrahles die Lichtlaufzeit extremal wird. Betrachten wir zwei Halbräume mit unterschiedlichen Brechungssindizes  $n_1$  (links) und  $n_2$  (rechts), wie in Abb. 5.8 dargestellt.

Der Lichtstrahl laufe von einem Punkt  $x_1$  im linken zu einem Punkt  $x_2$  im rechten Halbraum, wobei wir zur Vereinfachung  $z = 0$  setzen. In beiden Halbräumen folgt das Licht jeweils einer Geraden. Der Übergang zwischen den Halbräumen findet per Definition im Punkt  $(0, y, 0)$  statt. Die gesamte Lichtlaufzeit ist

$$\tau = \frac{n_1}{c} \sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{x_2^2 + (y_2 - y)^2}. \quad (5.153)$$

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  ist in den Halbräumen jeweils um den Faktor  $n_1$  bzw.  $n_2$  vermindert. Das Fermat'sche Prinzip lautet

$$\delta\tau = 0, \quad (5.154)$$

denn die Lichtlaufzeit soll extremal (in diesem Fall minimal) sein. Eine Störung von  $\tau$  entspricht einer kleinen

Verschiebung  $\delta y$ . Die Anfangs- und Endpunkte  $x_1$  und  $x_2$  bleiben unverändert. Es folgt

$$\delta\tau = \frac{d\tau}{dy} \delta y = 0 \quad (5.155)$$

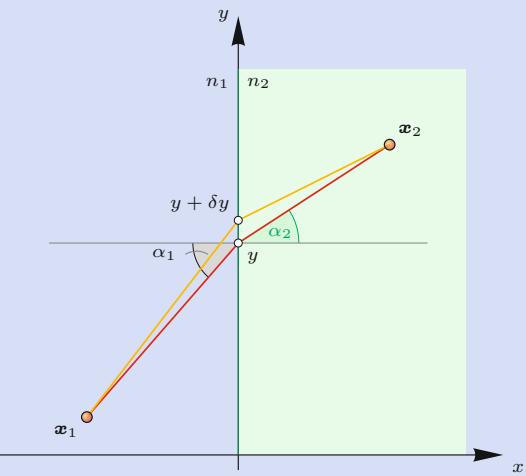
und somit

$$\frac{n_1}{c} \frac{y - y_1}{\sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2}} = \frac{n_2}{c} \frac{y_2 - y}{\sqrt{x_2^2 + (y_2 - y)^2}}. \quad (5.156)$$

Dies lässt sich durch die Winkel der Lichtstrahlen darstellen (Abb. 5.8). Man findet mit

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (5.157)$$

das *Brechungsgesetz*.



**Abb. 5.8** Zur Lichtbrechung: Das Licht wählt denjenigen Weg, der die gesamte Laufzeit zwischen zwei Punkten minimiert. Dies führt auf das Brechungsgesetz

In diesem Abschnitt wird das folgende von Euler aufgeworfene Problem sehr wichtig werden: Man finde diejenige Funktion  $y(x)$ , für die das Integral

$$F[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \quad (5.158)$$

extremal ist. Ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt, hängt vom gegebenen Problem ab und muss gegebenenfalls zusätzlich untersucht werden. Hier und im weiteren Verlauf ist  $y' := dy/dx$  die Ableitung von  $y(x)$  nach  $x$ . Des Weiteren ist  $f$  eine vorgegebene skalare Funktion der Funktion  $y(x)$ , ihrer Ableitung  $y'(x)$  sowie des unabhängigen Parameters  $x$ . Die Endpunkte  $x_0$  und  $x_1$  sind vorgegeben, ebenso die Werte  $y(x_0)$  und  $y(x_1)$ .

Man kann sich leicht vorstellen, dass das Integral  $F$  von der Gestalt von  $y(x)$  abhängt. Wir nehmen nun an, dass  $F$  für eine

## 5.2 Mathematischer Hintergrund: Funktionale

Die Variationsrechnung verallgemeinert die Extremwertbestimmung von „gewöhnlichen“ Funktionen: Sie fragt nämlich nach stationären Punkten (Maximum, Minimum, Sattelpunkt) von sogenannten *Funktionalen*. Wir müssen daher zunächst verstehen, was Funktionale sind. Ein Funktional ist grob gesprochen eine Funktion auf Funktionen.

**Definition** Genauer sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum ( $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ). Dann ist ein Funktional  $T$  eine Abbildung

$$T : V \rightarrow K.$$

Man unterscheidet zwischen *linearen* und *nichtlinearen Funktionalen*, wobei in der Literatur mit einem Funktional oft ein lineares Funktional gemeint ist. Ein lineares Funktional ist eine lineare Abbildung. Dabei ist die Menge der linearen Funktionale wieder ein Vektorraum über  $K$ , da man für  $T_1, T_2 \in V$  und  $\alpha \in K$

$$(T_1 + T_2)(x) := T_1(x) + T_2(x) \quad \text{und} \quad (\alpha T_1)(x) := \alpha(T_1(x))$$

definieren kann. Entsprechend heißt ein Funktional, das die obigen Eigenschaften nicht erfüllt, nichtlinear.

### Beispiele

■ Die *Dirac-Distribution* (Distributionen werden in Bd. 2, Kap. 1 genauer betrachtet) ist ein erstes einfaches Beispiel für ein Funktional. Dazu sei  $V$  der Vektorraum aller Funktionen der Form  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann definiert

$$\delta : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \delta[f] = f(0)$$

ein lineares Funktional, d. h., der Funktion  $f$  wird ihr Wert an der Stelle 0 zugewiesen. Von der Dirac-Distribution wird in der theoretischen Physik reger Gebrauch gemacht. Sie wird in Bd. 2, Kap. 1 gründlich diskutiert.

Funktion  $y(x)$  extremal ist. Wodurch unterscheiden sich jedoch alle anderen möglichen Funktionen  $\tilde{y}(x)$  von  $y(x)$ ?

### Funktionale

Wir betrachten als Beispiel die Funktion  $y(x) = x^2$  im Intervall  $[0, 1]$ . Wir wählen  $f(x, y, y') = y - y'x$ , was auf das Funktional

$$\begin{aligned} F[y] &= \int_0^1 [y(x) - y'(x)x] \, dx = \int_0^1 (x^2 - 2x^2) \, dx \\ &= -\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} \end{aligned} \tag{5.159}$$

- Ein weiteres Beispiel sind die bestimmten Integrale der auf dem Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  stetigen Funktionen  $C^0([a, b], \mathbb{R})$ . Betrachten wir konkret die bekannten Integralregeln

$$\int_a^b f_1(x) \, dx + \int_a^b f_2(x) \, dx = \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) \, dx$$

und

$$\alpha \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b (\alpha f(x)) \, dx,$$

so sehen wir, dass das durch die Integration definierte Funktional  $I : C^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  linear ist.

- Anders verhält es sich bei dem *Bogenlängenfunktional*. Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetig differenzierbare Kurve im  $\mathbb{R}^3$ . Dann definiert die Abbildung

$$L : C^1([a, b], \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\| \, ds$$

ebenfalls ein Funktional, das die Bogenlänge der Kurve im Intervall  $[a, b]$  ergibt. Da die Norm  $\|\dot{\gamma}(s)\|$  wegen  $\|\dot{\gamma}_1(s)\| + \|\dot{\gamma}_2(s)\| \geq \|\dot{\gamma}_1(s) + \dot{\gamma}_2(s)\|$  i. A. nicht linear ist, handelt es sich um ein nichtlineares Funktional.

### Literatur

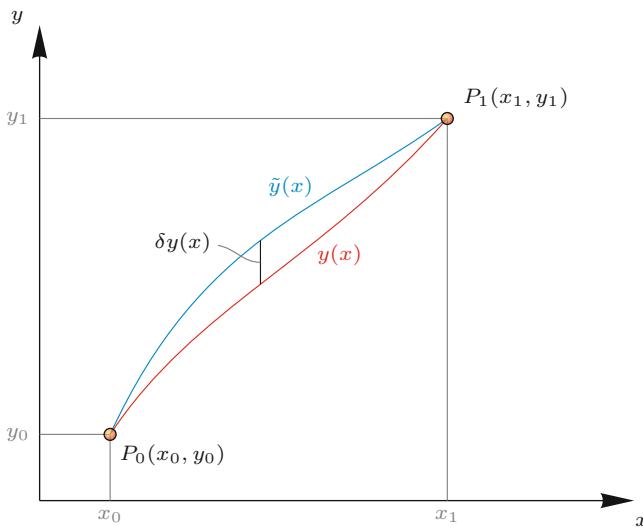
- Arens, T., et al.: *Mathematik*. 2. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag, 2012

führt. Nehmen wir nun eine weitere Funktion  $\tilde{y}(x) = x$ , die  $\tilde{y}(0) = y(0)$  und  $\tilde{y}(1) = y(1)$  erfüllt.

Überprüfen Sie, dass dies  $F[\tilde{y}] = 0$  ergibt.

Offensichtlich ergeben beide Funktionen unterschiedliche Integrale. ◀

Historisch wurde die Variationsrechnung im Jahre 1696 durch den Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli (1667–1748) begründet, der das Problem der *Brachistochrone* löste. Dabei ging es darum, diejenige Kurve zu finden, auf der sich eine



**Abb. 5.9** Eine kleine Störung  $\delta y(x)$  führt von  $y(x)$  auf eine alternative Funktion. Die beiden Endpunkte  $P_0(x_0, y_0)$  und  $P_1(x_1, y_1)$  bleiben dabei fest

Punktmasse reibungsfrei am schnellsten von einem Punkt zu einem anderen bewegt (Aufgabe 5.5).

So wie man bei Funktionen extremale Punkte durch die Betrachtung von Tangenten diskutieren kann, betrachten wir nun eine infinitesimale Störung um die gesuchte Funktion  $y$ . Dazu führen wir eine weitere Funktion  $\tilde{y}$  ein, die sich für alle  $x \in [x_0, x_1]$  nur um eine infinitesimale Funktion  $\delta y$  von  $y$  unterscheidet (Abb. 5.9):

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \delta y(x). \quad (5.160)$$

Dabei muss  $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$  erfüllen, da die Endpunkte festgehalten werden. Genau wie  $y(x)$  soll  $\delta y(x)$  differenzierbar sein. Die *Variation* von  $f$  ist dann definiert als

$$\begin{aligned} \delta f &= f(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - f(x, y, y') \\ &= f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y'). \end{aligned} \quad (5.161)$$

Man vergleicht also  $f(x, y, y')$  mit  $f(x, \tilde{y}, \tilde{y}')$  bei gleichen Werten  $x$ , sodass  $\delta x = 0$  gilt. Es lässt sich leicht zeigen, dass die Ableitung nach  $x$  und die Variation  $\delta$  vertauschen:

$$\delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(y + \delta y)}{dx} - \frac{d(y)}{dx} = \frac{d(\delta y)}{dx}. \quad (5.162)$$

Aufgrund der Kettenregel kann man die Variation (5.161) auch in der Form

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta \left( \frac{dy}{dx} \right) \quad (5.163)$$

schreiben.

Der entscheidende Gedanke ist nun, dass für  $y(x)$  das Integral extremal (stationär) ist, wenn das Integral längs  $y(x)$  in erster

Näherung gleich demjenigen längs  $\tilde{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$  ist. Mathematisch schreiben wir

$$0 = \delta F = \int_{x_0}^{x_1} \delta f \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d(\delta y)}{dx} \right] \, dx, \quad (5.164)$$

wobei (5.162) verwendet wurde. Mithilfe einer partiellen Integration lässt sich der zweite Summand umformen. Man schreibt

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d(\delta y)}{dx} \, dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \, dx \quad (5.165)$$

und sieht, dass der Randterm verschwindet, da  $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$  gilt.

### Frage 19

Vergewissern Sie sich, dass Sie die partielle Integration verstanden haben.

Daher muss also

$$0 = \delta F = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \delta y(x) \, dx \quad (5.166)$$

gelten, wenn  $F$  stationär ist. Wir haben nun fast das Ziel erreicht. Es wurden bislang keinerlei Anforderungen an die Variation  $\delta y(x)$  gestellt (abgesehen davon, dass sie infinitesimal sein soll). Das Ergebnis in (5.166) muss also für alle infinitesimalen Variationen gelten. Daher muss der Integrand selbst verschwinden.

### Euler-Gleichung der Variationsrechnung

Das Integral

$$F[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') \, dx \quad (5.167)$$

wird bei festgehaltenen Randpunkten  $y(x_0)$  und  $y(x_1)$  extremal, wenn die Funktion  $y(x)$  die Euler-Gleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (5.168)$$

erfüllt. Diese Gleichung ist also die notwendige Bedingung an  $y(x)$ . Eine Funktion  $y(x)$ , die (5.168) erfüllt, heißt *Extremale*.

Die Euler-Gleichung ist eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung, die linear in  $y''$  ist (dies folgt aus der Kettenregel, wenn  $f$  in (5.168) höchstens von der ersten Ableitung  $y'$  abhängt, da die Ableitung nach  $x$  dann eine innere Ableitung  $y''$  erzeugt,

die nur linear vorkommt). Um sie zu lösen, sind zwei Integrationskonstanten notwendig. Dies können entweder die Endpunkte  $y(x_0)$  und  $y(x_1)$  sein oder aber die „Anfangsbedingungen“  $y(x_0)$  und  $y'(x_0)$ . Denkbar sind auch andere unabhängige Kombinationen wie  $y(x_0)$  und  $y'(x_1)$ . Mathematisch sind diese Zugänge äquivalent. Es hängt vom physikalischen Problem ab, welche Randbedingungen vorgegeben werden.

### Kürzeste Verbindung zweier Punkte

Wie verläuft die kürzeste Verbindung zweier Punkte  $x_0$  und  $x_1$  im Raum? Wir werden bei der folgenden Rechnung keine Überraschung erleben: Es handelt sich selbstverständlich um eine Gerade.

Dazu müssen wir zunächst das Wegintegral zwischen den beiden festen Endpunkten  $x_0$  und  $x_1$  formulieren. Zur Vereinfachung legen wir die beiden Punkte (und die gesamte Kurve) in die  $x$ - $y$ -Ebene und schreiben zunächst das Wegelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (5.169)$$

Die Länge einer Kurve zwischen  $x_0$  und  $x_1$  ist

$$l = \int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x(s_0)}^{x(s_1)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (5.170)$$

Da die Länge minimal sein soll, fordern wir  $\delta l = 0$ . Weiterhin lässt sich die Funktion

$$f(y') = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (5.171)$$

einführen. Offensichtlich lässt sich dann die Euler-Gleichung (5.168) anwenden:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (5.172)$$

Da  $f$  nicht von  $y$ , sondern nur von  $y'$  abhängt, folgt

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \implies \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} \quad (5.173)$$

Diese Gleichung ist nur für  $y' = m = \text{const}$  erfüllbar und führt auf die Lösung

$$y = mx + c. \quad (5.174)$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden in der  $x$ - $y$ -Ebene mit Steigung  $m$ . Die Steigung und die Integrationskonstante  $c$  sind so zu bestimmen, dass die Gerade durch die beiden Punkte  $x_0$  und  $x_1$  läuft.

Streng genommen müsste man noch zeigen, dass die Gerade tatsächlich auf eine *minimale* und nicht bloß eine *extreme* Länge führt.

In Aufgabe 5.6 wird die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche bestimmt. ▶

### Frage 20

Schauen Sie sich erneut das Fermat'sche Prinzip an und denken Sie sich die Laufzeit des Lichtes als eine Funktion  $\tau(y)$ . Die Anwendung der Euler-Gleichung (5.168) mit  $f(y) = \tau(y)$  führt dann sofort auf (5.156).

Die Variationsrechnung wird in Aufgabe 5.5 verwendet, um die Brachistochrone zu finden, also diejenige Kurve, auf der eine Punktmasse im Gravitationsfeld am schnellsten reibungsfrei gleitet.

### Verallgemeinerung der Euler-Gleichung auf mehrere abhängige Variablen

Für viele Probleme reicht es aus, die Variation mit nur einer abhängigen Funktion  $y(x)$  durchzuführen. Wir werden allerdings in Kürze eine Erweiterung auf beliebig viele abhängige Funktionen  $y_i(x)$  ( $1 \leq i \leq N$ ) benötigen.

Das Integral (5.158) lautet dann zunächst

$$F[y_1, \dots, y_N] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \dots, y_N, y'_1, \dots, y'_N) dx \quad (5.175)$$

oder in Kurzform wieder

$$F[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx, \quad (5.176)$$

wobei wir  $y$  und  $y'$  stellvertretend für alle  $y_i$  und  $y'_i$  schreiben. Wir nehmen hier nun schon vorweg, dass in der Mechanik die  $y_i$  und  $y'_i$  später durch die voneinander unabhängigen, generalisierten Koordinaten  $q_i$  und ihre Zeitableitungen  $\dot{q}_i$  sowie  $x$  durch die Zeit  $t$  ersetzt werden. Die Anzahl  $N$  der von  $x$  bzw.  $t$  abhängigen Parametern entspricht dann gerade der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems.

Gesucht ist nun der Satz von Funktionen  $y_i(x)$  ( $1 \leq i \leq N$ ), für die das Funktional  $F[y]$  mit den festen Randbedingungen  $y_i(x_0) = y_{i,0}$  und  $y_i(x_1) = y_{i,1}$  stationär wird. Die Variation  $\delta F$  lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_N} \delta y_N + \frac{\partial f}{\partial y'_1} \delta y'_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y'_N} \delta y'_N \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i \right). \end{aligned} \quad (5.177)$$

Sie muss erneut

$$0 = \delta F = \int_{x_0}^{x_1} \delta f dx \quad (5.178)$$

## Vertiefung: Variationsrechnung

### Praktische Rechenvereinfachung für die Stationaritätsbedingung

In (5.160) wurde die Variation der Funktion  $y(x)$  eingeführt. Im Allgemeinen ist die Variationsrechnung mit Funktionen schwieriger zu handhaben als die Kurvendiskussion einer Funktion. Der Grund ist, dass das Argument eines Funktions eine Funktion ist – und keine einfache Zahl.

Hier werden im Prinzip dieselben Rechnungen wie im Haupttext durchgeführt, allerdings mathematisch stringenter als dort.

Für unsere Zwecke lässt sich eine formale Vereinfachung anwenden, bei der das Funktional in eine Funktion umgewandelt werden kann. Betrachten wir dazu ein Funktional

$$F[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx.$$

Gesucht ist diejenige Funktion  $y(x)$ , die  $F[y]$  für feste Endpunkte  $y(x_0)$  und  $y(x_1)$  stationär macht. Der Strich steht hier und im Folgenden für die Ableitung nach  $x$ .

Nun schreiben wir, ausgehend von (5.160):

$$y(x, \epsilon) := y(x) + \delta y(x, \epsilon) = y(x, 0) + \epsilon v(x).$$

Wir parametrisieren die Variation von  $y(x)$  also mit einem Parameter  $\epsilon$  und führen eine beliebige Funktion  $v(x)$  ein, deren Gestalt hier keine Rolle spielt. Es wird lediglich verlangt, dass sie bei  $x_0$  und  $x_1$  verschwindet. Die Funktion  $y(x) = y(x, 0)$  ist noch unbekannt; wir wissen allerdings, dass sie sich für  $\epsilon = 0$  aus  $y(x, \epsilon)$  ergibt. Wir halten in Gedanken  $y(x)$  und  $v(x)$  fest und definieren nun die *Funktion*

$$F(\epsilon) := F[y + \epsilon v],$$

die dann nur noch von  $\epsilon$  abhängt. Entscheidend ist nun, dass die Funktion  $F(\epsilon)$  für  $\epsilon = 0$  einen stationären Punkt hat, denn für  $\epsilon = 0$  ergibt sich die Funktion  $y(x)$ , von der wir wissen, dass sie das Funktional stationär macht. Die Stationaritätsbedingung lautet nun

$$\frac{dF}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0$$

erfüllen. Es ist nun wieder eine partielle Integration durchzuführen, diesmal allerdings für  $N$  Terme. Die Berechnung ist jedoch vollständig analog zum vorherigen Fall mit nur einer abhängigen Variablen, da für jeden Term die Randterme aufgrund der

und kann mit den üblichen Methoden der Differentialrechnung behandelt werden. Dies soll im Folgenden ausgenutzt werden.

Unter der *Variation* von  $F$  versteht man nun den Ausdruck

$$\delta F = \frac{dF}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} d\epsilon.$$

Analog ist

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} d\epsilon$$

die Variation von  $y$ .

Kommen wir nun zurück zum Problem der unbekannten Funktion  $y(x)$ . Zunächst ist

$$0 = \frac{dF}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right) dx.$$

Mithilfe der üblichen partiellen Integration und der Bedingung, dass die Variation von  $y$  an den Rändern verschwindet, folgt

$$0 = \frac{dF}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \epsilon} dx.$$

Multipliziert man beide Seiten mit  $d\epsilon$  und betrachtet den Grenzfall  $\epsilon = 0$ , erhalten wir offensichtlich die Gleichung

$$0 = \delta F = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx,$$

in der  $\epsilon$  nicht mehr auftritt. An dieser Stelle kommt die Beliebigkeit der Variation  $\delta y$  bzw. von  $v$  ins Spiel: Die Variation von  $F$  kann nur dann allgemein verschwinden, wenn der Ausdruck in den Klammern null ist. Dies führt wieder unmittelbar auf die Euler-Gleichung (5.168) für  $y(x)$  – analog zu dem im Haupttext vorgestellten Vorgehen.

festen Randbedingungen verschwinden. Dies führt zunächst auf

$$0 = \delta F = \int_{x_0}^{x_1} \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i(x) dx. \quad (5.179)$$

**Frage 21**

Zeigen Sie, aufbauend auf der partiellen Integration für eine einzelne abhängige Funktion  $y(x)$ , dass (5.178) auf (5.179) führt.

Da die Variationen  $\delta y_i(x)$  erneut beliebig wählbar sind, folgen die Euler-Gleichungen für mehrere abhängige Variablen.

**Euler-Gleichungen für mehrere abhängige Variablen**

Gibt es  $N$  abhängige Variablen  $y_i(x)$ , so lautet die Erweiterung von (5.168):

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq N). \quad (5.180)$$

Es sind also  $N$  partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung unter Berücksichtigung der  $2N$  Randbedingungen  $y_i(x_0) = y_{i,0}$  und  $y_i(x_1) = y_{i,1}$  zu lösen.

**Das Hamilton'sche Prinzip der stationären Wirkung**

Nach diesem mathematischen Exkurs kommen wir zurück zur Mechanik. Wir stellen uns zunächst ein mechanisches System mit  $F$  Freiheitsgraden und den generalisierten Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_F)$  vor. Es soll daran erinnert werden, dass der durch alle Parameter  $q$  aufgespannte Raum *Konfigurationsraum* genannt wird. Jeder mögliche Systemzustand  $q$  entspricht genau einem Punkt in diesem Konfigurationsraum, der als  $\mathbb{R}^F$  dargestellt werden kann. Der Konfigurationsraum ist in der Regel kein Vektorraum, wie man sich am Beispiel der Euler-Winkel schnell klarmachen kann.

Der Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^F$  entspricht im Allgemeinen *nicht* dem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$ , sondern kann eine Mannigfaltigkeit sein. Es gibt jedoch Ausnahmen, wie beispielsweise eine Punktmasse, deren drei kartesische Koordinaten  $x$  als generalisierte Koordinaten  $q = (x_1, x_2, x_3)$  verwendet werden.

**Kreisel im Konfigurationsraum**

Ein freier Kreisel hat sechs Freiheitsgrade, z.B. drei Schwerpunkts- und drei Orientierungskoordinaten,  $X$  und  $\vartheta, \varphi, \psi$ . Man kann diese sechs Koordinaten als die generalisierten Koordinaten verwenden:  $q = (q_1, \dots, q_6) = (X_1, X_2, X_3, \vartheta, \varphi, \psi)$ . Alle erdenklichen Konfigurationen dieses Kreisels werden durch genau einen Punkt  $q$  in einem sechsdimensionalen Konfigurationsraum beschrieben. ▶

Die Zeitentwicklung dieses Systems wird dann durch eine Kurve  $q(t)$  im Konfigurationsraum beschrieben, wobei die Zeit ein geeigneter Bahnpараметer ist. Man nennt  $q(t)$  die Bahn des Systems. Im Folgenden soll die Bahn zwischen zwei festen Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1$  betrachtet werden.

Angenommen, die Bewegungsgleichungen eines konservativen Systems können aus einer Lagrange-Funktion  $L(t, q, \dot{q})$  hergeleitet werden. Dies führt (bei gegebenen Anfangsbedingungen) auf eine Bahn  $q(t)$ . Wir wollen uns im Folgenden auf ein beliebiges Zeitintervall  $t_0 \leq t \leq t_1$  konzentrieren. Wodurch unterscheidet sich diese Bahnkurve von allen anderen Bahnkurven  $\tilde{q}(t)$ , welche die Punkte  $q(t_0)$  und  $q(t_1)$  verbinden, in Wirklichkeit aber nicht beobachtet werden? Dazu führt man zunächst die sogenannte *Wirkung* als Funktional

$$S[q] := \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt \quad (5.181)$$

ein. Sie ist nichts weiter als das Zeitintegral der Lagrange-Funktion entlang der tatsächlichen Bahn  $q(t)$ . Die physikalische Einheit der Wirkung ist Energie mal Zeit. Man erkennt sofort die Äquivalenz mit (5.176). Mithilfe der Wirkung lässt sich nun ein Integralprinzip postulieren.

**Hamilton'sches Prinzip der stationären Wirkung**

Entlang der tatsächlichen Bahn  $q(t)$  zwischen den Zeiten  $t_0$  und  $t_1$  wird die Wirkung (5.181) extremal. Es gilt also

$$0 = \delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(t, q, \dot{q}) dt \quad (5.182)$$

für eine infinitesimale Variation der Wirkung. Diese Aussage wird auch als das *Wirkungsprinzip* oder *Prinzip der stationären Wirkung* bezeichnet.

Das Wirkungsprinzip ist sehr abstrakt und hat auf den ersten Blick mit den Bewegungsgleichungen der Mechanik nichts zu tun. Tatsächlich aber ist die Wichtigkeit des Wirkungsprinzips für die theoretische Physik nicht hoch genug einzustufen. So wird im Anschluss gezeigt, wie sich die Lagrange-Gleichungen zweiter Art aus (5.182) herleiten lassen.

**Achtung** Da in den meisten mechanischen Problemen die Wirkung entlang der tatsächlichen Bahn minimal wird, spricht man auch vom *Prinzip der kleinsten Wirkung*. Da aber nicht in allen Fällen die Wirkung minimal ist, handelt es sich um eine sprachliche Ungenauigkeit, und man sollte besser vom Prinzip der extremalen Wirkung sprechen. ▶

## Vertiefung: Variationsrechnung

### Höhere Ableitungen und mehrere unabhängige Parameter

Bei bestimmten Problemen nimmt das zu variierende Integral die Gestalt

$$F[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'') dx$$

an (beispielsweise bei der Balkenbiegung, die wir hier allerdings nicht besprechen). Auch hier sollen an den Randpunkten die Werte von  $y$ , aber auch die von  $y'$  festgehalten werden. Man kann dann durch zweifache partielle Integration zeigen, dass die entsprechenden Euler-Gleichungen

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq N)$$

lauten und somit Differenzialgleichungen vierter Ordnung sind. Es sind also weitere Randbedingungen zu spezifizieren, um die Gleichungen lösen zu können.

Was passiert, wenn man  $n$  unabhängige Parameter  $x_j$  zu berücksichtigen hat? In diesem Fall ist

$$F[y] = \int_{x_{1,0}}^{x_{1,1}} dx_1 \dots \int_{x_{n,0}}^{x_{n,1}} dx_n f \left( x_1, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right).$$

Wieder werden festgehaltene Randpunkte  $y(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$  und  $y(x_{1,1}, \dots, x_{1,n})$  betrachtet. Die resultierenden Euler-Gleichungen lauten

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial (\partial y_i / \partial x_j)} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq N).$$

Anwendungen mit mehreren unabhängigen Parametern findet man vor allem in Feldtheorien (s. Abschn. 8.4 und Bd. 2, Kap. 10).

## Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem Hamilton'schen Prinzip

Im Grunde wurde mit der Bereitstellung von (5.180) bereits alles gesagt, was nötig ist, um die Lagrange-Gleichungen zweiter Art aus dem Hamilton'schen Prinzip abzuleiten. Dazu muss man lediglich erkennen, dass die Funktion  $f(x, y, y')$  durch die Lagrange-Funktion  $L(t, q, \dot{q})$  ersetzt wird. Die Wirkung  $S[q]$  übernimmt die Rolle des Funktional  $F[y]$ . Der unabhängige Parameter  $x$  wird zur Zeit  $t$ . Es ist zu beachten, dass die Anfangs- und Endpunkte der Bahn, also  $q(t_0)$  und  $q(t_1)$ , wieder festgehalten werden. Das Ergebnis lautet also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq F) \quad (5.183)$$

für die  $F$  generalisierten Koordinaten  $q_i(t)$ . Diese Gleichungen nennt man daher auch die *Euler-Lagrange-Gleichungen*.

### Äquivalenz von Hamilton'schem Prinzip und Lagrange-Gleichungen

Alle Rechenschritte, die vom Hamilton'schen Prinzip auf (5.183) führen, sind umkehrbar. Daher sind das Hamilton'sche Prinzip (5.182) und die Euler-Lagrange-Gleichungen (5.183) äquivalent.

Warum ist das Hamilton'sche Prinzip nun so wichtig? In Abschn. 5.3 wurden die Lagrange-Gleichungen aus den Newton'schen Axiomen hergeleitet. Die Newton'schen Axiome haben allerdings den großen Nachteil, dass sie nicht invariant unter Koordinatentransformationen sind, die keine Galilei-Transformationen sind. So gelten die Newton'schen Axiome in ihrer ursprünglichen Form beispielsweise nicht in Kugelkoordinaten oder beschleunigten Bezugssystemen; die Lagrange-Gleichungen sind von dieser Einschränkung nicht betroffen. Das Hamilton'sche Prinzip stellt die Bewegungsgleichungen und damit die Dynamik auf ein tieferes Fundament.

Wir werden weiterhin in Bd. 2, Kap. 10 sehen, dass das Wirkungsprinzip äußerst fruchtbar für die Formulierung von Feldtheorien ist. Tatsächlich lässt sich das Variationsprinzip in fast allen Bereichen der theoretischen Physik anwenden, um verallgemeinerte Bewegungsgleichungen zu erhalten. Dies zeigt letztlich, dass viele Gebiete der Physik in ihrer zugrunde liegenden Struktur sehr ähnlich sind, selbst wenn völlig unterschiedliche Systeme betrachtet werden (wie z. B. Punktmassen, elektromagnetische Felder und Kosmologie). Die Wirkung  $S$  spielt insbesondere eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik. Dies kommt bei der Pfadintegralquantisierung eines physikalischen Systems (Bd. 3, Abschn. 5.5) besonders klar zum Ausdruck.

Das Hamilton'sche Prinzip führt im Gegensatz zum Lagrange-Formalismus nicht zu einer weiteren Vereinfachung von konkreten Berechnungen der Bewegungsgleichungen. Vielmehr ist es ein fundamentales Prinzip, das koordinatenunabhängig ist. Es bietet eine äußerst elegante und kompakte Formulierung der mechanischen Gesetze.

## Berücksichtigung von isoperimetrischen und holonomen Nebenbedingungen

Bisher wurde nur die Variationsrechnung ohne Nebenbedingungen vorgestellt. Dieses Werkzeug stößt allerdings schnell an seine Grenzen. Betrachten wir dazu folgende Problemstellung: Eine Konservenfabrik möchte die Kosten reduzieren. Schnell kommt man auf die Idee, die Materialmenge für die Konserven zu verringern, also ihre Oberfläche zu minimieren. Offensichtlich ist die Oberfläche minimal, wenn die Konserven sehr klein wird. Dies ist allerdings eine unbrauchbare Lösung, da das Konservenvolumen dabei ebenfalls abnimmt. Mathematisch muss man stattdessen fragen: Wie lässt sich die Oberfläche einer Konservendose bei konstantem Volumen minimieren? Dies führt auf *isoperimetrische Nebenbedingungen*, bei denen ein Integral (in diesem Fall das Volumen) bei der Variation festgehalten wird.

Eine andere typische Problemstellung ist, den kürzesten Weg auf einer bestimmten Oberfläche zu finden. Der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten ist, wie wir bereits gefunden hatten, eine Gerade. Allerdings können Flugzeuge nie ihren Zielflughafen direkt ansteuern, da sie sonst durch die Erde hindurch fliegen müssten. Diese und ähnliche Probleme lassen sich unter Berücksichtigung von *holonomen Nebenbedingungen* lösen. Eine kürzeste Verbindung entlang einer vorgegebenen Fläche nennt man *Geodäte* oder *geodätische Linie*. Sie spielen in der allgemeinen Relativitätstheorie (die gekrümmte Räume beschreibt) eine fundamentale Rolle.

Anstatt die technischen Herleitungen im Detail vorzuführen, wollen wir uns in diesem Abschnitt auf die Ergebnisse konzentrieren, um einen Geschmack davon zu vermitteln, wie realistische Probleme behandelt werden können. Für eine gründlichere Herleitung soll auf die Literatur verwiesen werden (Fließbach 2015).

Betrachten wir zunächst isoperimetrische Probleme. Gesucht sind diejenigen Kurven  $y_i(x)$  ( $1 \leq i \leq N$ ), die das Funktional (5.176) extremal machen, wobei aber gleichzeitig  $r$  Nebenbedingungen

$$F_j = \int_{x_0}^{x_1} f_j(x, y, y') dx = C_j = \text{const} \quad (1 \leq j \leq r) \quad (5.184)$$

erfüllt sein sollen. Hier ist darauf zu achten, dass für das Funktional  $F$  als auch für alle Nebenbedingungen  $F_j$  dieselben Integrationsgrenzen ( $x_0$  und  $x_1$ ) zu verwenden sind. Man kann dann zeigen, dass das Funktional

$$F^* := F - \sum_{j=1}^r \lambda_j F_j \quad (5.185)$$

ebenfalls stationär ist, wobei  $r$  konstante Lagrange-Multiplikatoren eingeführt wurden. Daraus lassen sich die Euler-Gleichungen für isoperimetrische Nebenbedingungen ableiten.

### Euler-Gleichungen für isoperimetrische Nebenbedingungen

Die  $N$  Funktionen  $y_i(x)$  lassen sich aus

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f^*}{\partial y'_i} - \frac{\partial f^*}{\partial y_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq N) \quad (5.186)$$

bestimmen, wobei

$$f^* := f - \sum_{j=1}^r \lambda_j f_j \quad (5.187)$$

ist.

Wir haben es mit  $N$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu tun, die mit den  $2N$  Randbedingungen  $y_i(x_0)$  und  $y_i(x_1)$  gelöst werden können. Es treten dabei noch die  $r$  Lagrange-Multiplikatoren auf, die sich mithilfe der Nebenbedingungen eliminieren lassen.

### Größte eingeschlossene Fläche

Ein klassisches Beispiel ist das Auffinden derjenigen geschlossenen Kurve  $r(\varphi)$  in einer Ebene, die – bei festem Umfang – die größte Fläche einschließt. Es ist also die Fläche

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) d\varphi \quad (5.188)$$

zu maximieren, wobei der Umfang

$$U = \int_{\partial A} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \quad (5.189)$$

mit  $r' = dr/d\varphi$  konstant ist. Es ist

$$f^* = \frac{r^2}{2} - \lambda \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad (5.190)$$

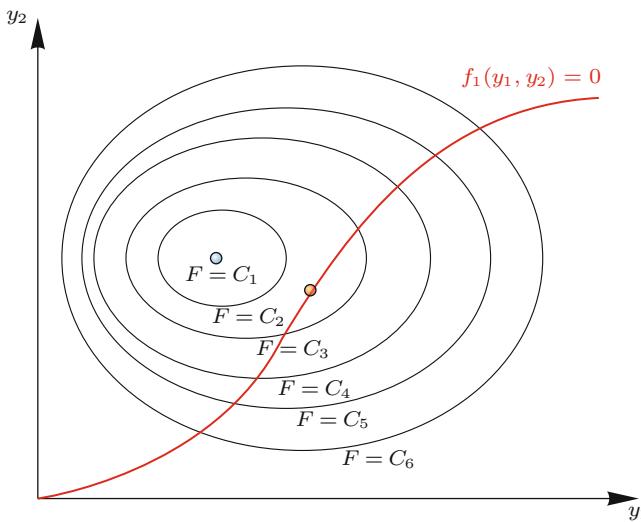
was auf die Euler-Gleichung

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\lambda r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) + \left( r - \frac{\lambda r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) = 0 \quad (5.191)$$

führt. Nach einer kurzen Rechnung folgt daraus

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{r^2 - 2r'^2 - r''r}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \text{const.} \quad (5.192)$$

Diese Differentialgleichung wird unter anderem von  $r = \lambda = \text{const}$  gelöst, wie man durch Einsetzen schnell sieht. Es handelt sich also um einen Kreis mit Radius  $\lambda$ . Man kann mithilfe von (1.122) und ein wenig Geduld auch direkt zeigen, dass der Ausdruck in (5.192) die (hier konstante) Krümmung der Kurve  $r(\varphi)$  in Polarkoordinaten beschreibt. ▲



**Abb. 5.10** In diesem Beispiel soll  $F(y_1, y_2)$  unter der Nebenbedingung  $f_1(y_1, y_2) = 0$  minimiert werden (holonome Nebenbedingung). Das absolute Minimum von  $F$  ist als blauer Punkt markiert. Die schwarzen Linien entsprechen „Höhenlinien“ mit konstanten Werten für  $F$ , wobei  $C_1 < C_2 < \dots < C_6$  ist. Die Nebenbedingung  $f_1$  entspricht einer Kurve in der  $y_1$ - $y_2$ -Ebene. Der rote Punkt ist dann das Minimum von  $F$  auf der Kurve  $f_1$

Im Gegensatz zu isoperimetrischen Nebenbedingungen lassen sich holonome Nebenbedingungen (Abb. 5.10) folgendermaßen berücksichtigen: Erneut soll das Funktional (5.176) extremal werden. Diesmal sollen allerdings  $r < N$  holonome Nebenbedingungen

$$f_j(x, y) = 0 \quad (1 \leq j \leq r) \quad (5.193)$$

vorliegen. Für diese Situation lassen sich die Euler-Gleichungen für holonome Nebenbedingungen herleiten.

#### Euler-Gleichungen für holonome Nebenbedingungen

Die  $N$  Funktionen  $y_i(x)$  lassen sich aus

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = - \sum_{j=1}^r \lambda_j(x) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (1 \leq i \leq N) \quad (5.194)$$

bestimmen.

Erneut hat man es mit  $N$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu tun. Die  $r$  Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_j(x)$ , die nun Funktionen des Parameters  $x$  sein dürfen, lassen sich aus den Nebenbedingungen bestimmen.

Man kann sich anschaulich klarmachen, warum für holonome Nebenbedingungen – im Gegensatz zu den isoperimetrischen Nebenbedingungen – die Lagrange-Multiplikatoren Funktionen von  $x$  sein können. Isoperimetrische Nebenbedingungen sind

Integralbedingungen: Es muss lediglich ein gegebenes Integral über ein Intervall erfüllt sein. Holonome Nebenbedingungen sind wesentlich stärker, denn sie erzwingen an jedem Ort  $x$  eine Nebenbedingung.

Im Grunde lassen sich die holonomen Nebenbedingungen von Anfang an umgehen, indem man unabhängige Koordinaten wählt, die an das Problem angepasst sind (siehe dazu auch Aufgabe 5.3 und 5.6). Isoperimetrische Nebenbedingungen können allerdings nicht als holonome Nebenbedingungen geschrieben werden; sie lassen sich also nicht durch geschickte Koordinatenwahl absorbieren, denn die Lagrange-Gleichungen zweiter Art sind nur mit holonomen Nebenbedingungen kompatibel.

Aus (5.194) folgen unmittelbar die Lagrange-Gleichungen erster Art (5.32), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Die abhängigen Parameter  $y_i$  beschreiben kartesische Koordinaten  $x_i$ , der unabhängige Parameter  $x$  ist die Zeit  $t$ , und die Lagrange-Funktion lautet

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - V(t, x). \quad (5.195)$$

#### Frage 22

Überprüfen Sie diese Aussage.

## 5.6 Symmetrien und Erhaltungssätze

Symmetrien spielen in der Physik eine grundlegende Rolle. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass Symmetrien – Transformationen, welche die Dynamik invariant lassen – auf Erhaltungsgrößen führen. Zyklische Koordinaten sind nur ein einfaches Beispiel dafür. Diese Überlegungen führen auf das wesentlich allgemeinere Noether-Theorem, das jeder kontinuierlichen Symmetrie einen Erhaltungssatz zuordnet. Dabei kommen wir wieder auf die Galilei-Transformationen zu sprechen; es wird gezeigt, dass sie eng mit der Homogenität von Raum und Zeit sowie der Isotropie des Raumes verflochten sind.

#### Unbestimmtheit der Lagrange-Funktion und Galilei-Invarianz

Die Lagrange-Funktion ist nicht eindeutig: Es können beliebig viele Lagrange-Funktionen angegeben werden, die auf dieselben Bewegungsgleichungen führen. Hier beschränken wir uns allerdings auf den Spezialfall, dass zur Lagrange-Funktion eine totale Zeitableitung addiert wird. Man betrachte dazu eine beliebige Funktion  $f(t, q)$  und die Transformation

$$L \rightarrow L' = L + \frac{df(t, q)}{dt}. \quad (5.196)$$

Am schnellsten sieht man, dass der Zusatzterm keinen Einfluss auf die Bewegungsgleichungen hat, indem man das Hamilton'sche Prinzip (5.182) anwendet. Die Wirkung wird nur durch eine Konstante geändert,

$$S \rightarrow S' = S + f(q(t_1), t_1) - f(q(t_0), t_0), \quad (5.197)$$

welche bei der Variation keine Rolle spielt. Die Lagrange-Funktionen  $L$  und  $L'$  führen daher auf ununterscheidbare Bewegungsgleichungen.

### Freiheit in der Wahl der Lagrange-Funktion

Die Bewegungsgleichungen bleiben invariant, wenn zu der Lagrange-Funktion die totale Zeitableitung einer Funktion  $f(t, q)$  addiert wird.

Die Invarianz der Bewegungsgleichungen unter der Transformation (5.196) lässt sich auch direkt, aber mit ein wenig mehr Aufwand zeigen (Aufgabe 5.7).

**Achtung** Diese Unbestimmtheit der Lagrange-Funktion wird gelegentlich als Eichinvarianz der klassischen Mechanik bezeichnet, ist aber von der Eichinvarianz, wie sie in Feldtheorien eine bedeutende Rolle spielt (siehe Bd. 2, Kap. 1 und Bd. 2, 10) zu unterscheiden. Im Falle der Eichinvarianz von Feldtheorien geht es um eine Redundanz der dynamischen Variablen, während auch in Feldtheorien ohne Eichinvarianz eine analoge Unbestimmtheit der Lagrange-Funktion vorliegt. ▶

### Frage 23

Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen auch invariant bleiben, wenn man die gesamte Lagrange-Funktion mit einer Konstanten multipliziert. Diese Art von Invarianz interessiert uns im Folgenden jedoch nicht.

Wir werden in Kap. 7 außerdem noch sehen, dass die Lagrange-Gleichungen ihre Form (5.83) behalten, wenn man von einem Satz generalisierter Koordinaten zu einem anderen wechselt,  $q_i \rightarrow Q_i(t, q)$ .

In Abschn. 2.2 wurden die Galilei-Transformationen diskutiert. Sie beschreiben den Übergang zwischen beliebigen Inertialsystemen, in denen dasselbe physikalische System beobachtet wird. Es handelt sich also um passive Koordinatentransformationen. Wir wissen bereits, dass unter Galilei-Transformationen die Newton'schen Bewegungsgleichungen invariant bleiben. Dies führt auf die Frage, was mit der Lagrange-Funktion geschieht, wenn die Koordinaten einer solchen Transformation unterworfen werden.

Dazu betrachten wir ein System mit  $N$  Punktmasse, deren Bewegungsgleichungen sich aus einer Lagrange-Funktion  $L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  ableiten lassen. Wir haben bereits gesehen, dass eine allgemeine Galilei-Transformation von einem ungestrichenen zu einem gestrichenen Inertialsystem durch (2.36) und (2.37),

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{b}), \quad t' = t - t_0, \quad (5.198)$$

beschrieben wird. Sie enthält eine Verschiebung des Zeitnullpunktes um  $t_0 = \text{const}$  sowie des Koordinatenursprungs um  $\mathbf{b}$  (mit  $\dot{\mathbf{b}} = \text{const}$ ) und eine Drehung der Koordinatenachsen (mit Drehmatrix  $\mathbf{R} = \text{const}$ ). Eine zeitabhängige Drehmatrix würde auf Scheinkräfte und damit modifizierte Bewegungsgleichungen führen. Aus dem gleichen Grund muss  $\dot{\mathbf{b}}$  konstant sein. Eine konstante Verschiebung des Zeitnullpunktes wirkt sich nicht auf Zeitableitungen aus.

Die Lagrange-Funktion im gestrichenen Inertialsystem lautet, ausgedrückt durch die ungestrichenen Koordinaten:

$$\begin{aligned} L(t', \mathbf{x}', \dot{\mathbf{x}}') &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i'^2 - V'(\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - V(\mathbf{x}(\mathbf{x}')) \\ &\quad + \dot{\mathbf{b}} \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\dot{\mathbf{b}}^2}{2} \sum_i m_i \\ &= L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \dot{\mathbf{b}} \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\dot{\mathbf{b}}^2}{2} \sum_i m_i. \end{aligned} \quad (5.199)$$

Hier ist  $V'(\mathbf{x}')$  eine andere Funktion als  $V(\mathbf{x})$ , die aber dasselbe Potenzial beschreibt.

### Frage 24

Führen Sie diese Rechnung explizit durch. Arbeiten Sie dazu am besten mit der Indexschreibweise.

Man sieht, dass die Transformation Zusatzterme in  $L$  erzeugt. Wir zeigen nun, dass es eine Funktion  $f$  gibt, deren totale Zeitableitung die Form der Zusatzterme in (5.199) annimmt:

$$\begin{aligned} \frac{df(t, \mathbf{x})}{dt} &= \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial f(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial f(t, \mathbf{x})}{\partial t} \\ &= \dot{\mathbf{b}} \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\dot{\mathbf{b}}^2}{2} \sum_i m_i. \end{aligned} \quad (5.200)$$

Offensichtlich erfüllt

$$f(t, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{b}} \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\dot{\mathbf{b}}^2}{2} t \sum_i m_i \quad (5.201)$$

diese Gleichung, wobei benutzt wurde, dass  $\dot{\mathbf{b}}$  konstant ist.

### Frage 25

Überprüfen Sie dies.

Für  $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$  sind sowohl die Bewegungsgleichungen als auch die Lagrange-Funktion selbst invariant unter Galilei-Transformationen. Ist  $\dot{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}$ , d. h. sind beide Inertialsysteme relativ zueinander bewegt, bleibt die Lagrange-Funktion nicht invariant. Allerdings können die Zusatzterme als totale Zeitableitung geschrieben werden. Wir kommen am Ende dieses Kapitels nochmals auf diesen Punkt zurück.

## Das Noether-Theorem

Wir kommen nun zu einer allgemeineren Betrachtung von Symmetrien und Erhaltungsgrößen. Dieser Abschnitt ist konzeptionell und technisch anspruchsvoller als die vorherigen. Er kann beim ersten Lesen übersprungen werden.

Es wurde bereits in Abschn. 5.3 gefunden, dass zyklische Koordinaten auf erhaltene konjugierte Impulse führen. Anders formuliert bedeutet diese Aussage: Ist die Lagrange-Funktion (und damit die Wirkung) eines mechanischen Systems unter der Verschiebung einer Koordinate  $q_i$  invariant, so ist der zugehörige konjugierte Impuls  $p_i$  erhalten. In diesem Fall ist  $q_i$  zyklisch, tritt also in der Lagrange-Funktion überhaupt nicht auf. Dies kann auch durch

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \implies \frac{dL}{d\epsilon} = 0 \quad (5.202)$$

ausgedrückt werden. Dabei ist  $\epsilon$  ein kontinuierlicher Parameter. Ist  $q_i$  zyklisch, muss die Lagrange-Funktion auch unabhängig von  $\epsilon$  sein; daher muss die Ableitung in (5.202) verschwinden. In anderen Worten: Die Lagrange-Funktion ist invariant unter der Transformation (5.202), egal welchen Wert  $\epsilon$  auch annimmt. Man spricht hier von einer kontinuierlichen *Symmetrie* der Lagrange-Funktion.

Im Alltag wird der Begriff „Symmetrie“ meist in Bezug auf Spiegelungen verwendet. Physikalisch und mathematisch bedeutet er, dass ein System unter einer bestimmten Transformation (Spiegelung, Drehung, Verschiebung, Vertauschung von Variablen usw.) sich nicht ändert.

### Frage 26

Denken Sie über Symmetrien nach. Ein Quadrat ist symmetrisch unter Drehungen um einen Winkel, der ein ganzzahliges Vielfaches von  $90^\circ$  ist. Dies ist eine *diskrete Symmetrie*. Ein Kreis kann um jeden beliebig kleinen Winkel gedreht werden und ändert sich dabei nicht. Dies ist eine *kontinuierliche Symmetrie*. Machen Sie sich klar, dass Spiegelsymmetrien in einer Koordinate (wie z. B. bei einer Gitarre) immer diskret sind und man nicht kontinuierlich spiegeln kann. Denken Sie dabei an die Determinante der entsprechenden Transformationen.

Der Ansatz in (5.202) wird nun verallgemeinert. Betrachten wir eine *infinitesimale Transformation*

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \tilde{q}_i(t, q, \dot{q}), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon \tilde{t}(t, q, \dot{q}). \quad (5.203)$$

Hier ist  $\epsilon$  erneut ein kontinuierlicher, aber infinitesimaler Parameter. Die endlichen Größen  $\tilde{q}_i$  und  $\tilde{t}$  dürfen selbst Funktionen der Koordinaten, Geschwindigkeiten und der Zeit sein. Die Produkte  $\epsilon \tilde{q}_i$  und  $\epsilon \tilde{t}$  sind insgesamt wieder infinitesimale Größen. Höhere Terme in  $\epsilon$  können vernachlässigt werden. Für  $\epsilon = 0$  ist die Transformation die Identität.

Die Bewegungsgleichungen bleiben dann invariant, wenn sich die Wirkung  $S$  unter dieser Transformation höchstens um eine

Konstante ändert:

$$\int_{t'_0}^{t'_1} dt' L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(t, q, \dot{q}) + \epsilon \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{df}{dt}. \quad (5.204)$$

Da die Transformation (5.203) infinitesimal ist, muss auch der zweite Term auf der rechten Seite von (5.204) infinitesimal sein. Genau wie  $\tilde{q}_i$  und  $\tilde{t}$  ist  $f$  endlich, das Produkt  $\epsilon f$  aber infinitesimal. Hier und im Folgenden bedeuten Punkte die Ableitung nach  $t$ ; die Ableitung nach  $t'$  wird explizit aufgeschrieben, um Verwechslungen zu vermeiden.

Unser Ziel ist es nun, die Invarianzbedingung (5.204) so umzuformen, dass wir eine klare Aussage daraus herleiten können. Zunächst lässt sich das erste Integral in (5.204) umformen:

$$\int_{t'_0}^{t'_1} dt' L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) = \int_{t_0}^{t_1} dt L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \frac{dt'}{dt}. \quad (5.205)$$

Die Invarianzbedingung (5.204) verlangt dann für die Integranden

$$\epsilon \frac{df}{dt} = L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \dot{t}' - L(t, q, \dot{q}), \quad (5.206)$$

da die Zeitpunkte  $t_0$  und  $t_1$  beliebig sind.

Man kann die transformierte Lagrange-Funktion mit  $\epsilon$  als Entwicklungsparameter um  $\epsilon = 0$  entwickeln:

$$\begin{aligned} & L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \dot{t}' \\ &= L(t, q, \dot{q}) + \epsilon \frac{d}{d\epsilon} \left[ L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \dot{t}' \right] \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned} \quad (5.207)$$

Es wurde dabei ausgenutzt, dass  $L(t', q', dq'/dt') \dot{t}'|_{\epsilon=0} = L(t, q, \dot{q})$  ist. Setzt man (5.207) in (5.206) ein, findet man die neue Invarianzbedingung.

### Invarianzbedingung

Die Bewegungsgleichungen sind dann unter einer infinitesimalen Transformation (5.203) invariant, wenn

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \dot{t}' \right] \Big|_{\epsilon=0} = \frac{df}{dt} \quad (5.208)$$

für eine beliebige Funktion  $f$  gilt.

Praktisch bedeutet dies, dass für eine gegebene Lagrange-Funktion und eine gegebene Transformation (5.203) überprüft werden muss, ob der Term auf der linken Seite von (5.208) als totale Zeitableitung einer Funktion  $f$  geschrieben werden kann. Ist dies nicht der Fall, sind die Bewegungsgleichungen nicht invariant. Verschwindet die rechte Seite von (5.208), so ist die Wirkung selbst invariant.

Es fehlt noch ein wichtiger Zusammenhang: Da zyklische Koordinaten auf erhaltene Impulse führen, stellt sich die Frage, ob eine Symmetrie der Form (5.208) nicht auch mit einer entsprechenden Erhaltungsgröße zusammenhängt. Dies ist tatsächlich der Fall, und es wird im Folgenden hergeleitet, wie diese Erhaltungsgröße direkt berechnet werden kann.

Um (5.208) weiter umzuformen, benötigen wir einige Hilfsgleichungen. Zum einen gilt

$$\dot{q}'_i = \dot{q}_i + \epsilon \ddot{\tilde{q}}_i, \quad \dot{t}' = \dot{t} + \epsilon \ddot{\tilde{t}} = 1 + \epsilon \ddot{\tilde{t}}. \quad (5.209)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{dq'_i}{dt'} &= \frac{dt}{dt'} \dot{q}'_i = \frac{\dot{q}_i + \epsilon \ddot{\tilde{q}}_i}{1 + \epsilon \ddot{\tilde{t}}} = (1 - \epsilon \ddot{\tilde{t}}) (\dot{q}_i + \epsilon \ddot{\tilde{q}}_i) \\ &= \dot{q}_i + \epsilon \ddot{\tilde{q}}_i - \dot{q}_i \epsilon \ddot{\tilde{t}}. \end{aligned} \quad (5.210)$$

Die letzten beiden Umformungen sind zulässig, da  $\epsilon$  infinitesimal ist. Wir schreiben (5.208) als

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{d}{d\epsilon} \left[ L(t + \epsilon \ddot{\tilde{t}}, q + \epsilon \ddot{\tilde{q}}, \dot{q} + \epsilon \ddot{\tilde{q}} - \dot{q}_i \epsilon \ddot{\tilde{t}}) (1 + \epsilon \ddot{\tilde{t}}) \right] \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial (q_i + \epsilon \ddot{\tilde{q}}_i)} \dot{q}_i (1 + \epsilon \ddot{\tilde{t}}) \Big|_{\epsilon=0} \\ &\quad + \sum_i \frac{\partial L}{\partial (\dot{q}_i + \epsilon \ddot{\tilde{q}}_i - \dot{q}_i \epsilon \ddot{\tilde{t}})} (\dot{\tilde{q}}_i - \dot{q}_i \ddot{\tilde{t}}) (1 + \epsilon \ddot{\tilde{t}}) \Big|_{\epsilon=0} \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial (t + \epsilon \ddot{\tilde{t}})} \ddot{\tilde{t}} (1 + \epsilon \ddot{\tilde{t}}) \Big|_{\epsilon=0} + L \dot{\tilde{t}} \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned} \quad (5.211)$$

Hier wurden bisher nur die Kettenregel und die Produktregel verwendet. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{\tilde{q}}_i - \dot{q}_i \ddot{\tilde{t}}) + \frac{\partial L}{\partial t} \ddot{\tilde{t}} + L \dot{\tilde{t}} \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i \right) + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \ddot{\tilde{t}} + \frac{\partial L}{\partial t} \ddot{\tilde{t}}. \end{aligned} \quad (5.212)$$

Im ersten Schritt wurde  $\epsilon = 0$  ausgeführt, im zweiten wurden die Terme sortiert. Es ist zu beachten, dass die Lagrange-Funktion nun wieder eine Funktion  $L(t, q, \dot{q})$  ist und somit das ursprüngliche, nichttransformierte System beschreibt. Insbesondere bedeutet dies, dass die Lagrange-Gleichungen (5.83) und das damit hergeleitete Ergebnis (5.93) verwendet werden können, um mit der Umformung fortzufahren:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \ddot{\tilde{t}} + \frac{\partial L}{\partial t} \ddot{\tilde{t}} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \ddot{\tilde{t}} \right]. \end{aligned} \quad (5.213)$$

### Frage 27

Rechnen Sie (5.213) nach, indem Sie alle Zwischenschritte überprüfen.

Wir haben nun das Ziel erreicht: Die linke und die rechte Seite von (5.213) sind totale Zeitableitungen. Ihre Differenz hat daher eine verschwindende totale Zeitableitung und stellt somit eine erhaltene Größe dar.

#### Noether-Theorem (nach Amalie Emmy Noether, 1882–1935)

Sind die Bewegungsgleichungen unter der infinitesimalen Koordinatentransformation (5.203) invariant, d. h. gilt (5.208), so ist die Größe

$$I(t, q, \dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \ddot{\tilde{t}} - f \quad (5.214)$$

eine Erhaltungsgröße. Dies bedeutet: Zu jeder infinitesimalen Transformation, welche die Wirkung höchstens um eine Konstante ändert, gibt es eine Erhaltungsgröße.

Man verwendet zunächst (5.208), um zu überprüfen, ob eine kontinuierliche Symmetrie vorliegt. Dabei erhält man automatisch die Funktion  $f$ . Die damit verbundene Erhaltungsgröße lässt sich dann mithilfe von (5.214) bestimmen.

**Achtung** Diskrete Symmetrien wie Spiegelungen können mit dieser Methode nicht erfasst werden. ▶

#### Energieerhaltung aus Symmetrie

Welche Erhaltungsgröße folgt aus einer Invarianz unter konstanter Verschiebung des Zeitnullpunktes? Hierzu betrachtet man eine infinitesimale Transformation (5.203) mit  $\tilde{q}_i = 0$ . Eine infinitesimale Verschiebung der Zeitkoordinate ist durch  $\ddot{\tilde{t}} = \text{const}$  gegeben. Es gilt zunächst  $dL/d\epsilon = 0$  und  $d\dot{t}/d\epsilon = \ddot{\tilde{t}} = 0$ . Aus (5.208) folgt dann  $df/dt = 0$ , d. h.,  $f$  ist eine Konstante, die keine Rolle spielt und gleich null gesetzt werden kann. Das Noether-Theorem (5.214) besagt dann, dass

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (5.215)$$

erhalten ist. Dies ist gerade die Gesamtenergie des Systems, siehe (5.95). ▶

#### Zeitranslationsinvarianz und Energieerhaltung

Ist die Wirkung invariant unter einer konstanten Verschiebung des Zeitnullpunktes, so ist die Gesamtenergie des Systems erhalten.

**Frage 28**

Eine zyklische Koordinate  $q_i$  ist ein Spezialfall mit der Transformation  $q'_i = q_i + \epsilon$ ,  $t' = t$ , d. h.  $\dot{q}_i = \text{const}$  und  $\ddot{t} = 0$ . Alle anderen Koordinaten  $q_j$  bleiben unverändert,  $\ddot{q}_j = 0$  ( $j \neq i$ ). Zeigen Sie, dass die entsprechende Invariante dann der zu  $q_i$  konjugierte Impuls ist:

$$I(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i. \quad (5.216)$$

Verfahren Sie dabei ähnlich wie im vorherigen Beispiel.

In Aufgabe 5.8 wird der Zusammenhang zwischen der Isotropie des Raumes und der Drehimpulserhaltung hergeleitet.

### Isotropie und Homogenität des Raumes, Homogenität der Zeit, Relativitätsprinzip

Dieser sehr theoretische Abschnitt wird nun mit einigen wichtigen Aussagen über Symmetrien in physikalischen Systemen abgeschlossen.

Es ist streng zu unterscheiden zwischen offenen und abgeschlossenen Systemen. Offene Systeme sind z. B. solche, bei denen äußere Kräfte (wie Gravitation) oder Zwangskräfte auf Teile des Systems wirken. Es wird dabei allerdings nicht danach gefragt, welche Effekte dies auf die Teile außerhalb des physikalischen Systems hat.

Betrachten wir beispielsweise eine Masse, die mit einem Faden an einem Nagel an der Zimmerdecke befestigt ist. Dies ist nichts weiter als das sphärische Pendel (Abschn. 5.1). Wir haben gelernt, wie man die Lagrange-Funktion für die unter dem Einfluss der Schwerkraft schwingende Masse aufstellen und die Bewegungsgleichungen ableiten kann. Doch wird dabei der Nagel, die Wand, ja alles andere im Universum ignoriert.

Durch die Position des Nagels und die Richtung der Gravitationskraft sind ein Punkt und eine Richtung ausgezeichnet. Man findet schnell, dass keine Komponente des Impulses der Masse erhalten ist. Allerdings sind der Drehimpuls um die senkrechte Achse (Richtung der Gravitationskraft) und die Energie erhalten. Dies hängt mit den Symmetrieeigenschaften der Lagrange-Funktion zusammen.

Stellen wir uns nun ein *abgeschlossenes* System von  $N$  Punktmasse vor, auf das keine äußeren Kräfte irgendeiner Art wirken. Alle inneren Kräfte sollen durch nicht näher bestimmte Paarwechselwirkungen beschrieben werden können. Dies soll ebenfalls für mögliche Zwangskräfte gelten. Die Lagrange-Funktion lautet dann, in kartesischen Koordinaten formuliert:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|). \quad (5.217)$$

Welche allgemeinen Erhaltungsgrößen ergeben sich daraus?

Zunächst sieht man, dass  $L$  nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängt. Die Lagrange-Funktion beschreibt also ein System, das invariant unter Zeitverschiebungen ist. In diesem Zusammenhang spricht man von der *Homogenität der Zeit*: Es spielt keine Rolle, wann das System betrachtet wird. Es ergibt sich immer die gleiche Dynamik, unabhängig davon ob diese gestern, heute oder morgen studiert wird. Wir haben bereits gesehen, dass dies auf die Energieerhaltung führt.

Eine Verschiebung aller  $N$  Punktmasse um einen Vektor  $\epsilon \mathbf{b}$ , d. h.  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + \epsilon \mathbf{b}$  mit  $\mathbf{b} = \text{const}$ , ändert weder die Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}_i$  noch die relativen Abstände  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ . Daher ist  $L$  unter solch einer Verschiebung invariant. Das Noether-Theorem (5.214) besagt dann, dass die Größe

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \cdot \mathbf{b} = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{b} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} \quad (5.218)$$

erhalten ist. Hier ist  $\mathbf{p}_i$  der Impuls der Punktmasse  $m_i$  und  $\mathbf{P}$  der Gesamtimpuls des Systems. Da die Invarianz für jede beliebige Verschiebung  $\mathbf{b}$  gilt, muss  $\mathbf{P}$  selbst eine Erhaltungsgröße sein. Man nennt diese Unabhängigkeit von räumlichen Verschiebungen die *Homogenität des Raumes*: Das System als Ganzes kann beliebig verschoben werden. Die Dynamik des Systems ist unabhängig davon, an welchem Ort sie stattfindet. Dies ist selbstverständlich nur für abgeschlossene Systeme der Fall. Beispielsweise herrscht auf dem Mond ein anderes Gravitationsfeld als auf der Erde. Fallexperimente gehen deshalb an beiden Orten unterschiedlich aus. Allerdings sind solche Systeme offen, da die Gravitation dann eine äußere Kraft ist.

Eine ähnliche Argumentation gilt für Drehungen des gesamten Systems. Die Drehung soll durch eine beliebige Drehmatrix  $\mathbf{R}$  beschrieben werden. Wir wissen bereits, dass Beträge und Abstände unter Drehungen invariant sind, d. h., Drehungen haben auf die Terme  $\dot{\mathbf{x}}_i^2$  und  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  keinen Einfluss. Es muss also eine Erhaltungsgröße mit solch einer Drehung verbunden sein. In Aufgabe 5.8 wird gezeigt, dass dann der Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L}$  erhalten ist. Diese Invarianz unter Drehungen ist die *Isotropie des Raumes*. Für ein abgeschlossenes System spielt also seine Orientierung keine Rolle. Für Fallexperimente gilt dies nicht, da mit der Gravitationskraft eine Richtung ausgezeichnet ist.

**Achtung** Ist ein System nur invariant unter Verschiebung in eine bestimmte Richtung  $\mathbf{b}_0$ , so ist nur der Impuls in ebendieser Richtung erhalten. Genauso ist nur der Drehimpuls um eine bestimmte Achse  $\hat{\mathbf{n}}_0$  erhalten, falls das System nur invariant gegenüber Drehungen um ebendiese Achse ist. Dies entspricht jeweils dem Fall, dass nur eine generalisierte Koordinate (und nicht drei) zyklisch ist. ▶

**Frage 29**

Ein Elektron befindet sich in einem (unendlich ausgedehnten) Plattenkondensator. Die elektrischen Feldlinien stehen dabei senkrecht auf den Platten. Welche Erhaltungsgröße ergibt sich hieraus für das Elektron? (Das System ist invariant unter Verschiebungen parallel zu den Platten, aber nicht senkrecht zu den Platten. Somit ist die parallele Impulskomponente, nicht jedoch die senkrechte, erhalten.)

Es gibt mit dem Relativitätsprinzip noch eine weitere Symmetrie, die auf eine Erhaltungsgröße führt. In Abschn. 2.2 wurden die Galilei-Transformationen diskutiert. Sie beschreiben den Übergang zwischen beliebigen Inertialsystemen; dabei bleiben die Newton'schen Bewegungsgleichungen invariant. Allerdings handelt es sich dabei um passive Koordinatentransformationen, bei denen das physikalische System unverändert bleibt, aber das Koordinatensystem transformiert wird.

An dieser Stelle fragen wir allerdings nach aktiven Transformationen, d. h. nach einer Translation oder Drehung des eigentlichen Systems innerhalb desselben Koordinatensystems. Welche Auswirkungen hat es nun, wenn wir das System in einen Zustand versetzen, bei dem sich jede Punktmasse  $m_i$  mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{b}}$  bezüglich ihrer ursprünglichen Position bewegt?

Dazu betrachten wir die Änderung, welche die Ersetzung  $t \rightarrow t' = t, \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + \epsilon \dot{\mathbf{b}} t$  und  $\dot{\mathbf{x}}_i \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_i + \epsilon \dot{\mathbf{b}}$  in der Lagrange-Funktion verursacht. Die Lagrange-Funktion wird zu

$$\begin{aligned} L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \\ &\quad + \epsilon \dot{\mathbf{b}} \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\epsilon^2 \dot{\mathbf{b}}^2}{2} \sum_i m_i. \end{aligned} \quad (5.219)$$

Es ist nun die Ableitung (5.208) zu berechnen. Dies führt auf

$$\frac{df}{dt} = \dot{\mathbf{b}} \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{b}} \cdot \sum_i m_i \mathbf{x}_i \right), \quad (5.220)$$

wobei verwendet wurde, dass  $\dot{\mathbf{b}}$  konstant ist. Dies bedeutet, dass wir eine Symmetrie gefunden haben, unter der zwar nicht die Wirkung, wohl aber die Bewegungsgleichungen invariant bleiben. Verwendet man die Gesamtmasse  $M$  und die Lage des Schwerpunktes  $\mathbf{X}$ , so hat man zunächst

$$f = M \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{b}}. \quad (5.221)$$

Wir berechnen die damit verbundene Erhaltungsgröße aus dem Noether-Theorem (5.214). Dazu benötigen wir noch den Term

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \dot{\mathbf{b}} t = \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{b}} t = M \dot{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{b}} t. \quad (5.222)$$

Demnach muss

$$I = M \dot{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{b}} t - M \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{b}} = M (\dot{\mathbf{X}} t - \mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{b}} \quad (5.223)$$

die gesuchte Erhaltungsgröße sein. Da  $\dot{\mathbf{b}}$  beliebig gewählt werden kann, besagt dieser Erhaltungssatz nichts anderes, als dass sich der Schwerpunkt geradlinig-gleichförmig bewegt. Dies entspricht dem bekannten Äquivalenzprinzip: Die Bewegungsgleichungen der Mechanik sind invariant unter Transformationen zwischen Inertialsystemen, die konstante Relativgeschwindigkeiten mit einschließen.

### Isotropie und Homogenität des Raumes, Homogenität der Zeit, Relativitätsprinzip

Für abgeschlossene physikalische Systeme mit einer Lagrange-Funktion der Form (5.217) gelten die folgenden vier wichtigen Prinzipien, die man umgekehrt benutzen kann, um die erhaltenen Größen zu definieren:

- *Homogenität der Zeit*: Die Bewegungsgleichungen sind invariant unter einer willkürlichen Verschiebung des Zeitnullpunktes. Man definiert allgemein die Energie als diejenige erhaltene Größe, die sich aus der Homogenität der Zeit ergibt.
- *Homogenität des Raumes*: Eine willkürliche Verschiebung aller Punktmassen hat keinen Einfluss auf die Bewegungsgleichungen. Man definiert allgemein den Gesamtimpuls als diejenige erhaltene Größe, die sich aus der Homogenität des Raumes ergibt.
- *Isotropie des Raumes*: Auch unter willkürlichen Drehungen des Systems bleiben die Bewegungsgleichungen invariant. Es ist keine Richtung ausgezeichnet. Allgemein wird der Gesamtdrehimpuls als diejenige Erhaltungsgröße definiert, die sich aus der Isotropie des Raumes ergibt.
- *Relativitätsprinzip*: Die Bewegungsgleichungen sind invariant unter Transformationen, bei denen der Schwerpunkt mit einer konstanten Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{b}}$  bewegt wird.

### Frage 30

Man vergleiche diese zehn Symmetrien und Erhaltungsgrößen mit den Parametern einer allgemeinen Galilei-Transformation.

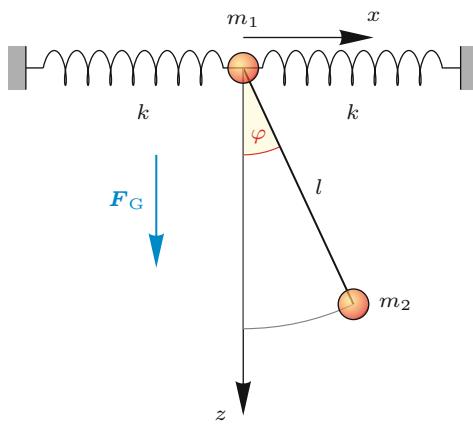
## Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- leichte Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
- mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
- anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständen auch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

**5.1 •• Perle auf rotierendem Stab** Eine Perle gleite reibungsfrei und ohne angewandte Kräfte auf einem Stab, der mit einem Ende im Ursprung fixiert ist und sich in der  $x$ - $y$ -Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht.

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mithilfe der Lagrange-Gleichungen erster Art auf. Lösen Sie die Bewegungsgleichung. Führen Sie die Rechnungen in Zylinderkoordinaten durch. Wie lautet die Zwangskraft? Welche Bedeutung hat sie? Ist die Energie erhalten?
- (b) Verwenden Sie die Lagrange-Gleichungen zweiter Art für dasselbe Problem, um die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Wie sieht es mit der Energieerhaltung aus?



**Abb. 5.11** Die Massen  $m_1$  und  $m_2$  sind durch einen Stab der Länge  $l$  verbunden. Während  $m_1$  über zwei Federn an zwei Wänden befestigt ist, kann  $m_2$  an  $m_1$  unter dem Einfluss der Gravitationskraft  $F_G$  schwingen

**5.2 •• Pendel an Federn** Eine Punktmasse  $m_1$  ist wie in Abb. 5.11 durch zwei Federn an zwei Wänden befestigt. Die Ruhelänge der Federn entspricht gerade dem Fall, dass  $m_1$  sich in der Mitte zwischen den Wänden befindet. Beide Federn haben die gleiche Federkonstante  $k$ , d.h., die Rückstellkraft ist jeweils dem Betrag nach  $|F| = k|x|$ . Die Punktmasse  $m_1$  darf sich nur waagerecht (entlang der  $x$ -Achse) bewegen. Es ist eine weitere Punktmasse  $m_2$  mit einem masselosen Stab der Länge  $l$

an  $m_1$  befestigt. Die zweite Punktmasse kann in der  $x$ - $z$ -Ebene unter dem Einfluss der homogenen Schwerkraft  $F_G = -m_2 g \hat{e}_z$  schwingen. Der Auslenkungswinkel des Pendels ist  $\varphi$ .

- (a) Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf.  
 (b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.  
 (c) Nehmen Sie nun an, dass der Auslenkungswinkel  $\varphi$  klein ist. Zeigen Sie, dass sich beide Bewegungsgleichungen jeweils in der Form

$$a\ddot{q} + b q = f(q', \dot{q}', \ddot{q}') \quad (5.224)$$

schreiben lassen. Hier sind  $a$  und  $b$  konstante Koeffizienten,  $q$  ist die eine und  $q'$  die andere verallgemeinerte Koordinate. Beide Bewegungsgleichungen beschreiben eine erzwungene Schwingung. Dies wird in Kap. 6 genauer diskutiert.

### 5.3 •• Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten aus dem Lagrange-Formalismus

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen einer Punktmasse in Kugelkoordinaten auf. Nutzen Sie dazu den Lagrange-Formalismus. Das Potenzial soll dabei eine allgemeine Funktion  $V(r, \vartheta, \varphi)$  sein.  
 (b) Eine Punktmasse bewege sich in einem radialsymmetrischen Potenzial  $V(r)$ . Allerdings ist ihre Bewegung durch eine Zwangsbedingung nur auf einer Kegeloberfläche mit Öffnungswinkel  $\vartheta = \vartheta_0$  möglich. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für dieses Problem auf. Zeigen Sie, dass die Radialgleichung in der Form

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r} \quad (5.225)$$

geschrieben werden kann. Wie lautet das effektive Potenzial  $V_{\text{eff}}$ ? Für welchen Wert  $\vartheta_0$  ergibt sich das Zweikörper-Zentralkraftproblem aus Abschn. 3.2 als Spezialfall?

- (c) Überlegen Sie sich den Fall, dass die Zwangsbedingung nicht zu einer Bewegung auf einem Kegel führt, sondern zu einer Bewegung auf einer Ebene mit  $\varphi = \varphi_0$ . Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie sie für die kräftefreie Bewegung in der Form  $r(\vartheta)$ . Welche Gestalt hat die resultierende Bahnkurve? (Diese letzte Frage lässt sich auch direkt durch Nachdenken beantworten.)

**Lösungshinweis:** Die gesuchten Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta\right) &= -\frac{\partial V}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\vartheta}\right) - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta &= -\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta\right) &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi}.\end{aligned}\quad (5.226)$$

**5.4 • Pendel mit variabler Fadenlänge** Erweitern Sie das Problem des sphärischen Pendels in Abb. 5.3 in folgender Weise: Die Fadenlänge sei eine vorgegebener Funktion der Zeit,  $R = R(t)$ .

- (a) Wie lautet die Lagrange-Funktion in Kugelkoordinaten? Nutzen Sie dazu die Ergebnisse aus Aufgabe 5.3. Was ist bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen zu beachten (denken Sie dabei an die Anzahl der Freiheitsgrade)? Wie lauten die Bewegungsgleichungen?
- (b) Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion nicht der Energie entspricht. Was ist die Ursache? Zeigen Sie, dass die Energie erhalten ist, wenn  $R(t)$  konstant ist. Wie lautet die Änderung der Energie mit der Zeit?

**5.5 ••• Brachistochrone** Finden Sie die Kurve  $y(x)$ , entlang der eine Punktmasse im homogenen Gravitationsfeld reibungsfrei am schnellsten von einem Punkt  $(x_0, 0)$  zu einem Punkt  $(x_1, y_1)$  mit  $x_1 \neq x_0$  und  $y_1 > 0$  gleitet. Dabei stellt  $y(x)$  eine Zwangsbedingung dar. Die  $y$ -Achse zeigt hier ebenso wie die Gravitationskraft nach unten.

Die Punktmasse soll zu Beginn bei  $y = 0$  ruhen. Die resultierende Kurve nennt man *Brachistochrone*. Gehen Sie von der Energieerhaltung aus: Die Zunahme der kinetischen Energie entspricht der durchfallenen Potenzialdifferenz:

$$mgy = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(x^2 + y^2). \quad (5.227)$$

Stellen Sie zunächst einen Ausdruck für die benötigte Zeit auf und formen Sie ihn so um, dass er die Gestalt (5.158) annimmt. Stellen Sie die Differenzialgleichung für  $y(x)$  auf.

**Lösungshinweis:** Die umständlich lange Rechnung ausgehend von der Euler-Gleichung lässt sich umgehen, wenn man nach Erhaltungsgrößen Ausschau hält.

Überprüfen Sie anschließend, dass die Differenzialgleichung durch die Parametrisierung

$$x(\alpha) = x_0 + C(\alpha - \sin \alpha), \quad y(\alpha) = C(1 - \cos \alpha) \quad (5.228)$$

gelöst werden kann, wobei  $\alpha$  der Bahnpараметр und  $C$  eine geeignete zu wählende Konstante ist. Die damit beschriebene Kurve ist eine *Zykloide* (Abb. 5.12a). Überlegen Sie sich, wie Sie den Parameter  $C$  für gegebene Anfangs- und Endpunkte bestimmen können.

## 5.6 •• Kürzeste Verbindung auf Kugeloberfläche

Was ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche mit Radius  $R$ ? Hier könnte man das Verfahren der holonomen Nebenbedingungen in Kugelkoordinaten verwenden, um die gesuchte Kurve auf  $r - R = 0$  einzuschränken. Dies führt allerdings zu aufwendigen Rechnungen. Einfacher ist es, direkt eine Parametrisierung auf der Kugeloberfläche zu verwenden.

- (a) Wie lautet das Linienelement  $ds$  auf der Kugeloberfläche?
- (b) Stellen Sie die Euler-Gleichung für die gesuchte Funktion  $\varphi(\vartheta)$  auf. Zeigen Sie, dass

$$\varphi = C_1 - \arcsin(C_2 \cot \vartheta) \quad (5.229)$$

diese Differenzialgleichung löst ( $C_1$  und  $C_2$  sind Integrationskonstanten).

- (c) Schreiben Sie die Lösung (5.229) in kartesischen Koordinaten. Verwenden Sie dazu das trigonometrische Additionstheorem  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ . Interpretieren Sie das Ergebnis.

## 5.7 • Unbestimmtheit der Lagrange-Funktion

Zeigen Sie durch Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichung, dass eine Eichtransformation

$$L'(t, q, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q}) + \frac{df(t, q)}{dt} \quad (5.230)$$

keinen Einfluss auf die Bewegungsgleichungen hat. Hier reicht es aus, nur eine generalisierte Koordinate  $q$  zu berücksichtigen. Das Ergebnis lässt sich direkt auf mehrere generalisierte Koordinaten verallgemeinern.

## 5.8 •• Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung

Im Text wurde gezeigt, dass die Lagrange-Funktion (5.217) invariant ist, wenn alle Punktmassen mit derselben beliebigen Drehmatrix  $\mathbf{R}$  um den Ursprung gedreht werden. Schreiben Sie diese Drehung in Form einer infinitesimalen Transformation (5.203) auf. Verwenden Sie dazu infinitesimale Drehungen, wie sie in Abschn. 2.3 eingeführt wurden. Benutzen Sie die Indexschreibweise, anstatt mit Vektoren zu arbeiten. Welches Ergebnis liefert (5.208)? Wie lautet die damit verbundene Erhaltungsgröße?

# Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

## 5.1

- (a) Die Perle kann sich nur entlang des Stabes bewegen; sie besitzt also nur einen Freiheitsgrad. Die beiden Zwangsbedingungen lauten

$$f_1 = \varphi - \omega t = 0, \quad f_2 = z = 0. \quad (5.231)$$

Hier ist  $\varphi$  der Polarwinkel in der  $x$ - $y$ -Ebene. Es ist für das Endergebnis unerheblich, ob die Rechnungen in Zylinder- oder kartesischen Koordinaten durchgeführt werden; Zylinderkoordinaten sind aber aufgrund der Rotationssymmetrie einfacher. Da die Bewegung vollständig in einer Ebene stattfindet, kann das äquivalente zweidimensionale Problem behandelt werden. Es ist daher nur eine Zwangsbedingung mit einem Lagrange-Multiplikator  $\lambda$  nötig:

$$m\ddot{x} = \lambda \nabla f, \quad z = 0. \quad (5.232)$$

Der Gradient in Zylinderkoordinaten lautet wegen der Unabhängigkeit von  $z$  und (2.113):

$$\nabla f = \hat{e}_\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{e}_\varrho \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho}. \quad (5.233)$$

Der Ortsvektor liegt in der  $x$ - $y$ -Ebene und zeigt in radiale Richtung. Daher kann er als

$$\mathbf{x} = \varrho \hat{e}_\varrho \quad (5.234)$$

geschrieben werden. Glücklicherweise wurde die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten bereits in (2.123) angegeben. Wegen  $z = 0$  ist zunächst

$$\ddot{x} = (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\varrho + (\varrho \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi. \quad (5.235)$$

Die Koeffizienten der Basisvektoren  $\hat{e}_\varrho$  und  $\hat{e}_\varphi$  müssen die Bewegungsgleichung erfüllen. Dies führt auf das Zwischenergebnis

$$m\ddot{\varrho} - m\varrho\dot{\varphi}^2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varrho}, \quad m\varrho\ddot{\varphi} + 2m\dot{\varrho}\dot{\varphi} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi}. \quad (5.236)$$

Offensichtlich ist  $\partial f / \partial \varrho = 0$  und  $\partial f / \partial \varphi = 1$ . Die zweite Zeitableitung der Zwangsbedingung lautet

$$\ddot{f} = \ddot{\varphi} = 0 \quad (5.237)$$

und führt nach Einsetzen in (5.236) auf

$$\lambda = 2m\varrho\dot{\varphi}\ddot{\varphi}. \quad (5.238)$$

Die resultierenden Bewegungsgleichungen sind also

$$m\ddot{\varrho} - m\varrho\dot{\varphi}^2 = 0, \quad m\varrho\ddot{\varphi} = 0. \quad (5.239)$$

Hier sind wir einen kleinen Umweg gegangen, um das Schema zum allgemeinen Lösen der Lagrange-Gleichungen erster Art einzuhalten. Wegen  $\varphi = \omega t$  mit konstantem  $\omega$  hätte man aber auch direkt  $\ddot{\varphi} = 0$  hinschreiben können. Die Zeitableitung  $\dot{\varphi} = \omega$  ist also konstant. Dies liefert die endgültige Form der Bewegungsgleichung für  $\varrho$ :

$$\ddot{\varrho} = \omega^2 \varrho. \quad (5.240)$$

Nehmen wir an, dass  $\varrho \neq 0$  erfüllt ist, so lautet die allgemeine Lösung

$$\varrho(t) = \varrho_+ e^{+\omega t} + \varrho_- e^{-\omega t}. \quad (5.241)$$

Wie zu erwarten gibt es für die Bewegung von  $\varrho$  zwei Integrationskonstanten, die durch die Anfangsbedingungen gegeben sind. Die Perle wird sich langfristig immer nach außen bewegen, wenn nicht gerade  $\varrho_+ = 0$  gilt.

Die Zwangskraft lautet

$$\mathbf{Z} = \lambda \nabla f = 2m\dot{\varrho}\omega \hat{e}_\varphi. \quad (5.242)$$

Dies ist die Kraft, welche die Perle auf dem Stab hält; sie entspricht *nicht* der Zentrifugalkraft. Da sich die Perle frei in radialer Richtung bewegen kann, wird die Zentrifugalkraft durch keine Zwangskraft kompensiert.

Die Energiegleichung (5.37) führt wegen  $V = 0$  auf

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial t} = 2m\dot{\varrho}\dot{\varphi}\omega = 2m\varrho\dot{\varphi}\omega^2. \quad (5.243)$$

Die Energie nimmt daher stark zu, wenn sich die Perle radial nach außen bewegt.

(b) Die Lagrange-Funktion lautet wegen  $V = 0$  in Zylinderkoordinaten

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \omega^2). \quad (5.244)$$

Es gibt nur einen Freiheitsgrad und mit  $\varrho$  nur eine verallgemeinerte Koordinate. Die Bewegungsgleichung kann direkt hingeschrieben werden:

$$m\ddot{\varrho} = m\varrho\omega^2. \quad (5.245)$$

Dies entspricht bereits (5.240) aus dem ersten Aufgabenteil. Die Lösung der Bewegungsgleichung muss selbstverständlich nicht wiederholt werden.

Wie sieht es aber mit der Energieerhaltung im Formalismus der Lagrange-Gleichungen zweiter Art aus? Hier soll

an (5.101) erinnert werden. Da die Zwangsbedingung  $f = \varphi - \omega t = 0$  nicht skleronom ist,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\omega \neq 0, \quad (5.246)$$

entspricht die Hamilton-Funktion nicht der Energie. Dennoch ist die Hamilton-Funktion (5.101) eine Erhaltungsgröße, da die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängt. Wir haben im ersten Aufgabenteil schon gesehen, dass die Energie nicht erhalten wird, da die Zwangskraft Arbeit am System leistet.

## 5.2

- (a) Wir wählen die Koordinaten so, dass die Punktmasse  $m_1$  im Gleichgewicht  $x = 0$  und  $z = 0$  erfüllt. Die  $y$ -Koordinate spielt hier für beide Punktmassen keine Rolle. Es gibt mit  $x$  und  $\varphi$  zwei Freiheitsgrade. Die Koordinaten der beiden Punktmassen lauten

$$x_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} x + l \sin \varphi \\ -l \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (5.247)$$

Daraus ergeben sich die Geschwindigkeiten

$$\dot{x}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (5.248)$$

Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi). \quad (5.249)$$

Die Auslenkung  $x$  der ersten Punktmasse hängt mit der in den Federn gespeicherten potentiellen Energie zusammen:

$$V_1 = \frac{k}{2} (-x)^2 + \frac{k}{2} x^2 = kx^2. \quad (5.250)$$

Die zweite Punktmasse bewegt sich im homogenen Schwerkraftfeld und hat die potentielle Energie

$$V_2 = -m_2 g l \cos \varphi. \quad (5.251)$$

Es ergibt sich die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l (\dot{x} \dot{\varphi} + g) \cos \varphi - kx^2. \quad (5.252)$$

- (b) Aus der Lagrange-Funktion (5.252) folgen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi] + 2kx = 0 \quad (5.253)$$

und

$$\frac{d}{dt} [m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x} \cos \varphi] + m_2 l (\dot{x} \dot{\varphi} + g) \sin \varphi = 0. \quad (5.254)$$

Nach Ausführung der Zeitableitung verbleiben die Gleichungen

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2kx = 0 \quad (5.255)$$

und

$$l \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0. \quad (5.256)$$

- (c) Kleine Winkel bedeuten, dass die trigonometrischen Funktionen entwickelt werden können:

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1. \quad (5.257)$$

Die Bewegungsgleichung für  $x$  nimmt dann die folgende Form an:

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + 2kx = m_2 l (\dot{\varphi}^2 \varphi - \ddot{\varphi}). \quad (5.258)$$

Entsprechend erhält man für  $\varphi$

$$l \ddot{\varphi} + g \varphi = -\ddot{x}. \quad (5.259)$$

Beide Gleichungen haben die Form (5.224). Die Bewegungsgleichungen sind nicht einfach zu lösen, da sie eng miteinander gekoppelt sind: Die Argumente auf den rechten Seiten von (5.258) und (5.259) erhalten jeweils die andere Koordinate, (5.258) sogar den nichtlinearen Term  $\dot{\varphi}^2 \varphi$ .

## 5.3

- (a) Die Koordinaten der Punktmasse in Kugelkoordinaten lauten gemäß (2.115)

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x_2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ x_3 &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (5.260)$$

Es gibt keine Zwangsbedingungen; es müssen also alle drei Koordinaten  $(r, \vartheta, \varphi)$  berücksichtigt werden. Um die kinetische Energie  $T$  in Kugelkoordinaten zu erhalten, müssen die ersten Zeitableitungen bestimmt werden. Dabei hängen sowohl  $r$ ,  $\vartheta$  als auch  $\varphi$  von der Zeit ab. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \dot{x}_3 &= \dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (5.261)$$

Die kinetische Energie lautet

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) \\ &= \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta)]. \end{aligned} \quad (5.262)$$

Der Umformungsschritt besteht vor allem aus Fleißarbeit und mehrfacher Anwendung der Identität  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , bereitet aber keine konzeptionellen Schwierigkeiten. Man

erkennt, dass keine gemischten Terme wie  $\dot{r}\dot{\vartheta}$  oder  $\dot{\vartheta}\dot{\varphi}$  auftreten.

Die Lagrange-Gleichungen für  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$  sind

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) &= -\frac{\partial V}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\vartheta}) - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta &= -\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta) &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5.263)$$

Diese Berechnung ist wesentlich einfacher, als den ursprünglichen Weg über zeitabhängige Basisvektoren (Abschn. 2.5) zu gehen.

(b) Die Zwangsbedingung ist holonom und lautet

$$f = \vartheta - \vartheta_0 = 0. \quad (5.264)$$

Glücklicherweise ist sie mit den Kugelkoordinaten verträglich. Deswegen gibt es nur noch zwei unabhängige Parameter: den Radius  $r$  und den Azimutwinkel  $\varphi$ . Da  $\vartheta$  nicht mehr zu den generalisierten Koordinaten gehört, sind einfach alle Terme  $\dot{\vartheta}$  aus der Lagrange-Funktion zu streichen, und  $\vartheta$  ist durch die Konstante  $\vartheta_0$  zu ersetzen. Dies führt auf

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta_0) - V(r). \quad (5.265)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten demnach

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta_0) &= -\frac{\partial V}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta_0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.266)$$

Der konjugierte Impuls  $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta_0$  (hier also der Drehimpuls) ist erhalten und kann verwendet werden, um  $\dot{\varphi}$  aus der Bewegungsgleichung für  $r$  zu eliminieren:

$$m\ddot{r} - \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2 \vartheta_0} = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (5.267)$$

Wir schreiben diese Gleichung als

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r} \quad (5.268)$$

mit dem effektiven Potenzial

$$V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \vartheta_0}. \quad (5.269)$$

Für  $\vartheta_0 = 90^\circ$  reduzieren sich die Gleichungen genau auf diejenigen in Abschn. 3.2. Die Bewegungsgleichungen sind bis auf konstante Vorfaktoren identisch zu denen, die in Abschn. 3.2 diskutiert wurden. Daher unterscheiden sich die Lösungsverfahren nicht von denen, die in Kap. 3 besprochen wurden.

(c) Für die Zwangsbedingung

$$f = \vartheta - \vartheta_0 = 0 \quad (5.270)$$

und die kräftefreie Bewegung ist die Lagrange-Funktion

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2). \quad (5.271)$$

Hier sind  $r$  und  $\vartheta$  die beiden unabhängigen Koordinaten. Entsprechend findet man schnell die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\vartheta}^2 &= 0, \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\vartheta}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.272)$$

Hier ist  $\vartheta$  zyklisch und der konjugierte Impuls  $p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}$  erhalten. Die Radialgleichung vereinfacht sich zu

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2}. \quad (5.273)$$

Nach Multiplikation mit  $\dot{r} = dr/dt$  lässt sich dies zu

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = -\frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} + C \quad (5.274)$$

aufintegrieren. Dies ist genau die Radialgleichung (3.53) für  $V = 0$  bzw. (3.66) für  $\alpha = 0$ . Es ist nur  $\varphi$  durch  $\vartheta$  zu ersetzen. Die Lösung ist daher mit (3.75) schon bekannt:

$$\vartheta - \vartheta'_0 = -\arcsin \frac{p_\vartheta / r}{\sqrt{2mC}}. \quad (5.275)$$

Hier ist  $\vartheta'_0$  eine zweite Integrationskonstante. Leicht umgeformt lautet die allgemeine Lösung also

$$r \cos(\vartheta - \vartheta_p) = \frac{p_\vartheta}{\sqrt{2mC}}, \quad (5.276)$$

wobei  $\vartheta_p$  der Winkel ist, bei dem die Punktmasse den kleinsten Abstand vom Ursprung besitzt. Anhand von Abb. 2.15 sieht man, dass (5.276) eine Gerade in Kugelkoordinaten beschreibt. Sie liegt in der Ebene, die durch  $\varphi = \varphi_0$  festgelegt ist, und läuft im Abstand  $p_\vartheta / \sqrt{2mC}$  am Ursprung vorbei. Dass es sich um eine Gerade handelt, liegt auf der Hand: Die kräftefreie Bewegung einer Punktmasse in einer Ebene kann nur entlang einer Geraden erfolgen.

## 5.4

(a) Es kann zunächst direkt die Lagrange-Funktion in Kugelkoordinaten aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{m}{2} [\dot{R}^2 + R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta)] - mgr \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (5.277)$$

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung ist zu beachten, dass nur  $\vartheta$  und  $\varphi$  Freiheitsgrade sind. Es gibt daher nur zwei Lagrange-Gleichungen. Obwohl der Radius und seine Zeitableitung in der Lagrange-Funktion auftreten, handelt es sich dabei um eine vorgegebene Funktion ohne Freiheit. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$mR^2\ddot{\vartheta} + 2mR\dot{R}\dot{\vartheta} = mR^2\dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + mgR \sin \vartheta \quad (5.278)$$

und

$$\begin{aligned} mR^2\ddot{\varphi} \sin^2 \vartheta + 2mR^2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ + 2mR\dot{R}\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (5.279)$$

(b) Die Energie lautet

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{m}{2} \left[ \dot{R}^2 + R^2 \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) \right] + mgR \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (5.280)$$

Im Gegensatz dazu berechnet sich die Hamilton-Funktion aus (5.95):

$$\begin{aligned} H &= \dot{\vartheta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L \\ &= mR^2\dot{\vartheta}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta - (T - V) \\ &= T - m\dot{R}^2 + V = E - m\dot{R}^2. \end{aligned} \quad (5.281)$$

Die Hamilton-Funktion unterscheidet sich von der Energie, da die Zwangsbedingung  $r - R(t) = 0$  rheonom ist. Es ist die Zeitableitung der Energie gesucht:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m \left[ \dot{R}\ddot{R} + mR\dot{R} \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) \right] \\ &\quad + mR^2 \left( \dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + \dot{\varphi}\ddot{\varphi} \sin^2 \vartheta + \dot{\varphi}^2\dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \right) \\ &\quad + mg(\dot{R}\cos \vartheta - R\dot{\vartheta} \sin \vartheta). \end{aligned} \quad (5.282)$$

Durch Ausnutzen der Bewegungsgleichungen lassen sich die zweiten Ableitungen  $\ddot{\vartheta}$  und  $\ddot{\varphi}$  eliminieren; der Ausdruck reduziert sich nach kurzer Rechnung auf

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{R} \left( \ddot{R} + g \cos \vartheta - R\dot{\vartheta}^2 - R\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta \right). \quad (5.283)$$

Ist die Fadenlänge  $R$  konstant, so ist  $\dot{R} = 0$ ; dies führt auf den Spezialfall einer skleronomen Zwangsbedingung mit Energieerhaltung. Die Hamilton-Funktion entspricht dann der Energie.

**5.5** Die benötigte Zeit ist

$$\tau = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{v}, \quad (5.284)$$

wobei  $s$  der Bahnpараметer ist. Er erfüllt

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}. \quad (5.285)$$

Die Bahngeschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (5.286)$$

Folglich lautet das zu minimierende Integral

$$\tau = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}. \quad (5.287)$$

Die „Lagrange-Funktion“ des Problems,

$$L = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}, \quad (5.288)$$

hängt nicht vom Parameter  $x$  ab. Dieser ist analog zur Zeit  $t$ . Somit muss die „Energie“

$$E = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L \quad (5.289)$$

erhalten sein. Dies ist eine Differenzialgleichung erster Ordnung, die anstelle der Euler-Gleichung verwendet werden kann. Eine kurze Rechnung führt auf

$$E\sqrt{2g} = -\frac{1}{\sqrt{y(1+y^2)}} = \text{const.} \quad (5.290)$$

Separiert man die Veränderlichen, lautet die Differenzialgleichung schließlich

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2C/y - 1}} \quad (5.291)$$

mit  $C = 1/(4gE^2)$ .

Wir berechnen die Ableitungen der Parametrisierung (5.228):

$$\frac{dx}{d\alpha} = C(1 - \cos \alpha), \quad \frac{dy}{d\alpha} = C \sin \alpha. \quad (5.292)$$

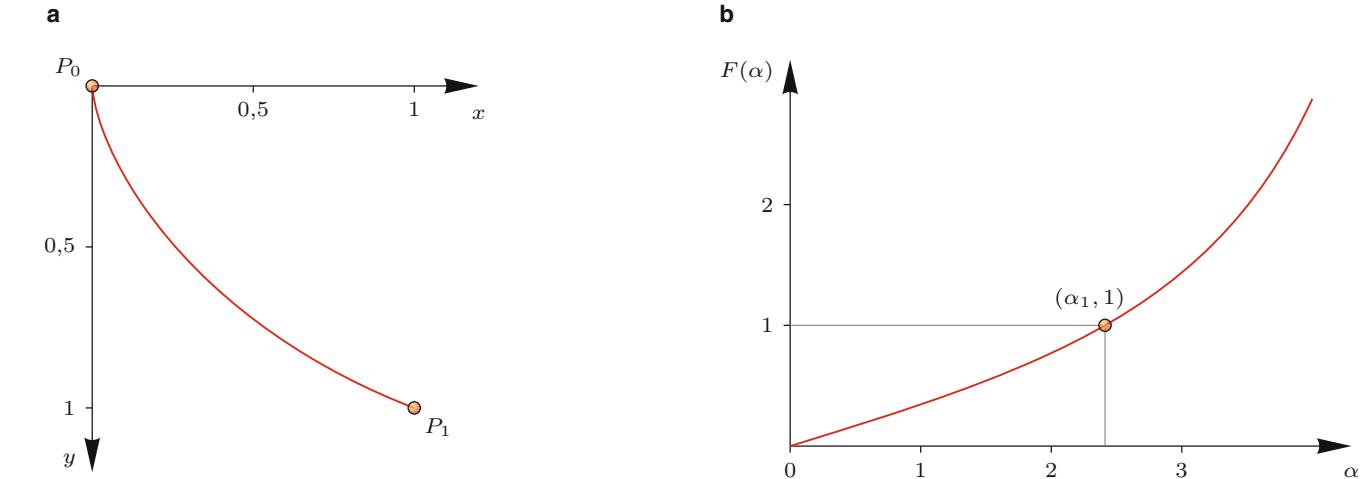
Dies führt auf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (5.293)$$

Andererseits ist

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2C}{y} - 1} = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \alpha} - 1}. \quad (5.294)$$

Man kann nun durch eine kurze Umformung (auf einen Bruchstrich bringen, dann mit  $1 - \cos \alpha$  erweitern) zeigen, dass (5.293) und (5.294) äquivalent sind.



**Abb. 5.12** Die Brachistochrone in **a** ist die Kurve, auf der eine Punktmasse reibungsfrei am schnellsten vom Punkt  $P_0$  nach  $P_1$  gleitet. Hier wurde der Endpunkt  $(1, 1)^T$  willkürlich gewählt. Die Funktion  $F(\alpha)$  in **b** wird benötigt, um die Gestalt der Brachistochrone festzulegen. Für einen gegebenen Wert  $F(\alpha_1)$  (die gewählten Punkte  $P_0$  und  $P_1$  führen auf  $F(\alpha_1) = 1$ ) lässt sich der Parameter  $\alpha_1$  ablesen oder numerisch berechnen

Um die Zykloide für zwei gegebene Punkte  $(x_0, 0)$  und  $(x_1, y_1)$  zu bestimmen, muss  $C$  so gewählt werden, dass die Kurve durch beide Punkte läuft. Man sieht direkt, dass der Anfangspunkt  $\alpha = 0$  entspricht. Der Endpunkt erfüllt wegen (5.228)

$$\frac{x_1(\alpha_1) - x_0(0)}{y(\alpha_1) - y(0)} = \frac{\alpha_1 - \sin \alpha_1}{1 - \cos \alpha_1} =: F(\alpha_1). \quad (5.295)$$

Hier ist  $\alpha_1$  der Wert des Bahnpараметers, für den die Kurve den Endpunkt  $(x_1, y_1)$  erreicht. Die linke Seite von (5.295) ist bekannt, wenn die Punkte gegeben sind. Die Funktion  $F(\alpha)$  ist im Intervall  $[0, 2\pi]$  streng monoton steigend und kann numerisch invertiert werden, um  $\alpha_1$  zu bestimmen (Abb. 5.12b). Der Wert für  $C$  ist dann aus (5.228),

$$C = \frac{1 - \cos \alpha_1}{y_1}, \quad (5.296)$$

zu berechnen.

## 5.6

(a) Das Linienelement in Kugelkoordinaten (2.117) ist

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2}. \quad (5.297)$$

Beschränkt man sich auf die Kugeloberfläche, so ist  $dr = 0$ . Außerdem ist unser Ziel, eine Parametrisierung  $\varphi(\vartheta)$  mit  $\varphi' = d\varphi/d\vartheta$  zu erhalten:

$$ds = R \sqrt{1 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta. \quad (5.298)$$

(b) Die resultierende Euler-Gleichung ist

$$\frac{d}{d\vartheta} \frac{\varphi' \sin^2 \vartheta}{(1 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2}} = 0. \quad (5.299)$$

Demnach muss

$$\frac{\varphi' \sin^2 \vartheta}{(1 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2}} = K \quad (5.300)$$

eine Konstante sein.

Es werden folgende Ableitungen benötigt:

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (5.301)$$

Daher ist

$$\varphi' = \frac{C_2}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{\sqrt{1 - C_2^2 \cot^2 \vartheta}}. \quad (5.302)$$

Durch Einsetzen in (5.300) und elementares Umformen erhält man zunächst

$$\begin{aligned} K &= \frac{C_2 \frac{1}{\sqrt{1 - C_2^2 \cot^2 \vartheta}}}{\sqrt{1 + \frac{C_2^2}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{1 - C_2^2 \cot^2 \vartheta}}} \\ &= C_2 \sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta - C_2^2 \cos^2 \vartheta + C_2^2}}. \end{aligned} \quad (5.303)$$

Eine weitere kurze Rechnung führt auf

$$K = \frac{C_2}{\sqrt{1 + C_2^2}}. \quad (5.304)$$

Da sowohl  $K$  als auch  $C_2$  Konstanten sind, löst (5.229) tatsächlich die Euler-Gleichung.

(c) Die Lösung (5.229) schreiben wir als

$$RC_2 \cot \vartheta = R \sin(C_1 - \varphi) \quad (5.305)$$

bzw.

$$\begin{aligned} RC_2 \cos \vartheta &= R \sin(C_1 - \varphi) \sin \vartheta \\ &= R \sin \vartheta (\sin C_1 \cos \varphi - \cos C_1 \sin \varphi). \end{aligned} \quad (5.306)$$

In kartesischen Koordinaten lautet dies

$$\begin{pmatrix} \sin C_1 \\ -\cos C_1 \\ -C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.307)$$

Es handelt sich dabei um die Schnittgleichung einer Ebene mit Normalenvektor  $\mathbf{n} = (\sin C_1, -\cos C_1, -C_2)^\top$  mit einer Kugel mit Radius  $R$  und Mittelpunkt im Ursprung. Die Ebene  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$  läuft durch den Ursprung. Daher handelt es sich bei den Schnitten um Großkreise. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugeloberfläche ist also ein Segment desjenigen Großkreises, auf dem die Punkte liegen.

### 5.7 Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (5.308)$$

Durch die Funktion  $f(t, q)$  werden die Beiträge

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{df(t, q)}{dt} - \frac{\partial}{\partial q} \frac{df(t, q)}{dt} \stackrel{?}{=} 0 \quad (5.309)$$

hinzugefügt. Es ist zu untersuchen, ob sie tatsächlich verschwinden. Zunächst ist

$$\frac{df(t, q)}{dt} = \frac{\partial f(t, q)}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f(t, q)}{\partial t}. \quad (5.310)$$

Der erste Beitrag in (5.309) lautet damit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{df(t, q)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f(t, q)}{\partial q} = \frac{\partial^2 f(t, q)}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 f(t, q)}{\partial t \partial q}, \quad (5.311)$$

der zweite ist

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{df(t, q)}{dt} = \frac{\partial^2 f(t, q)}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 f(t, q)}{\partial q \partial t}. \quad (5.312)$$

Sind die Ableitungen vertauschbar, heben sich die Terme paarweise auf, und die Bewegungsgleichungen sind tatsächlich invariant.

**5.8** Um Verwechslungen zu vermeiden, verwenden wir die Indizes  $i, j, k$  für die Koordinaten und  $a, b$  für Punktmassen.

Die  $i$ -te Komponente des Ortsvektors der Punktmasse  $a$  ist  $x_{a,i}$ . Die Transformation  $x'_{a,i} = r_{ij}x_{a,j}$  muss zunächst in die Form  $x'_{a,i} = x_{a,i} + \epsilon \tilde{x}_{a,i}$  gebracht werden. Für eine infinitesimale Drehung gilt

$$r_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} d\phi_k = \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \epsilon \phi n_k. \quad (5.313)$$

Dabei ist  $d\phi_k$  ein infinitesimaler Drehwinkel, und  $\phi$  zeigt in Richtung der Drehachse  $\hat{\mathbf{n}}$ . Alternativ können wir dafür  $\epsilon \phi n_k$  schreiben, wobei  $\epsilon$  infinitesimal und der konstante Winkel  $\phi$  endlich ist. Das Levi-Civita-Symbol  $\varepsilon_{ijk}$  und der infinitesimale Parameter  $\epsilon$  sind dabei streng voneinander zu unterscheiden. Ein Vergleich zeigt

$$\tilde{x}_{a,i} = \varepsilon_{ijk} \phi n_k x_{a,j}, \quad (5.314)$$

d.h., die Änderung von  $x_{a,i}$  hängt von  $x_{a,j}$  ab. Dies ist bei Drehungen nicht anders zu erwarten. Wegen  $\tilde{t} = 0$  und  $t' = t$  folgt zunächst

$$\dot{\tilde{x}}_{a,i} = \varepsilon_{ijk} \phi n_k \dot{x}_{a,j}. \quad (5.315)$$

Die folgende Rechnung dient lediglich der Übung, liefert aber keine neuen Erkenntnisse: Wir berechnen nun

$$\dot{x}'_{a,i} \dot{x}'_{a,i} = \dot{x}_{a,i} \dot{x}_{a,i} + 2\epsilon \varepsilon_{ijk} \dot{x}_{a,i} \dot{x}_{a,j} \phi n_k, \quad (5.316)$$

wobei die Einstein'sche Summenkonvention die Summation über  $i, j, k$  impliziert und der  $\epsilon^2$ -Term vernachlässigt wurde. Wegen der Eigenschaften des Levi-Civita-Symbols ist  $\varepsilon_{ijk} \dot{x}_{a,i} \dot{x}_{a,j} = 0$  und somit  $\dot{x}'_{a,i}^2 = \dot{x}_a^2$ .

Ganz analog findet man, dass  $|x_a - x_b|$  invariant ist. Somit tritt  $\epsilon$  in der Lagrange-Funktion überhaupt nicht auf:

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ L \left( t', q', \frac{dq'}{dt'} \right) \right]_{\epsilon=0} = 0. \quad (5.317)$$

Wir haben eine Symmetrie gefunden.

Mit dem Noether-Theorem (5.214) lässt sich die zugehörige Erhaltungsgröße bestimmen. Wegen  $\tilde{t} = 0$  und  $f = 0$  folgt

$$\begin{aligned} I &= \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{a,i}} \tilde{x}_{a,i} = \sum_a p_{a,i} \varepsilon_{ijk} \phi n_k x_{a,j} \\ &= \varepsilon_{ijk} n_k \sum_a p_{a,i} x_{a,j} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (5.318)$$

Es ist also die Projektion des Gesamtdrehimpulses  $\mathbf{L}$  auf die Achse  $\hat{\mathbf{n}}$  erhalten. Da  $\hat{\mathbf{n}}$  aber beliebig ist, ist der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  selbst eine Erhaltungsgröße.

## Literatur

Fließbach, T.: Mechanik: Lehrbuch zur Theoretischen Physik I. **Weiterführende Literatur**  
SpringerSpektrum, Wiesbaden (2015)

Forster, O.: Analysis 3: Maß- und Integrationstheorie, Integral-  
sätze im  $\mathbb{R}^n$  und Anwendungen (Aufbaukurs Mathematik).  
SpringerSpektrum, Wiesbaden (2012)

Goldstein, H.: Klassische Mechanik. Akademische Verlagsge-  
sellschaft, Wiesbaden (1981)

# Schwingungen

# 6



Was sind kleine Schwingungen, und warum sind sie so wichtig?

Wie werden schwingende Systeme durch Dämpfung beeinflusst?

Was ist Resonanz, und wann spielt sie eine Rolle?

Wie beschreibt man Systeme gekoppelter Oszillatoren?

Bei welchen Systemen sind Schwingungen wichtig?

6.1	Freie Schwingungen . . . . .	210
6.2	Gedämpfte Schwingungen . . . . .	217
6.3	Erzwungene Schwingungen und Resonanz . . . . .	220
6.4	Kleine Schwingungen gekoppelter Systeme . . . . .	223
6.5	Anwendungen gekoppelter Oszillatoren . . . . .	229
	Aufgaben . . . . .	235
	Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	237

Dieses Kapitel beschäftigt sich genauer mit den für die Physik extrem wichtigen harmonischen Schwingungen. Sie sind deshalb von so grundlegender Bedeutung, da sich fast alle Kräfte lokal linearisieren lassen. Harmonische Schwingungen spielen beispielsweise auch in der Akustik und der Spektroskopie eine große Rolle.

In Abschn. 6.1 werden freie Schwingungen eines Systems mit nur einem einzigen Freiheitsgrad gründlicher untersucht. Die Erweiterung auf ein System mit Dissipation wird in Abschn. 6.2 besprochen. Von außen erzwungene Schwingungen werden anschließend in Abschn. 6.3 diskutiert. Dabei ist die sogenannte Resonanz ein wichtiger Effekt. In Abschn. 6.4 kommen wir auf Systeme zu sprechen, bei denen mehrere gekoppelte Freiheitsgrade gleichzeitig schwingen können. Dies erlaubt die Berechnung einiger realistischer Systeme mit vielen Freiheitsgraden (Abschn. 6.5).

## 6.1 Freie Schwingungen

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf Systeme mit einem einzigen Freiheitsgrad. Dies kann beispielsweise die Auslenkung eines Fadenpendels sein, bei der die generalisierte Koordinate der Auslenkungswinkel ist. Es kann sich aber auch um die Auslenkung eines Federpendels handeln, die als kartesische Koordinate gewählt werden kann. In jedem Fall soll es mit Ausnahme einer konservativen Rückstellkraft keine weiteren Kräfte geben. Insbesondere werden Reibungskräfte und äußere treibende Kräfte erst in späteren Abschnitten berücksichtigt. Wir werden feststellen, dass die komplexen Zahlen zur Beschreibung harmonischer Schwingungen sehr nützlich sind.

### Allgemeine Bewegungsgleichung und Gleichgewicht

Für einen einzigen Freiheitsgrad  $q$  in Abwesenheit dissipativer Kräfte lautet die Lagrange-Funktion allgemein

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q). \quad (6.1)$$

Hat man es nur mit einer Punktmasse  $m$  und einem Freiheitsgrad  $q$  zu tun und sind alle eventuell auftretenden Zwangsbedingungen skleronom (zeitunabhängig), lautet die kinetische Energie (5.98)

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m h(q) \dot{q}^2. \quad (6.2)$$

Hier ist  $h(q) > 0$  eine reine Funktion der generalisierten Koordinate  $q$ , nicht jedoch ihrer Ableitung  $\dot{q}$ .

#### Frage 1

Zeigen Sie, dass (6.2) aus (5.98) folgt und dass  $h(q) > 0$  ist.

Ob die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \implies m \frac{d}{dt} h(q) \dot{q} = \frac{m \dot{q}^2}{2} \frac{dh}{dq} - \frac{dV}{dq} \quad (6.3)$$

analytisch lösbar ist und wie ihre Lösung aussieht, hängt von der Gestalt der Funktion  $h(q)$  und der potenziellen Energie  $V(q)$  ab.

#### Frage 2

In Abschn. 1.4 wurde der harmonische Oszillator mit Potenzial (1.93) behandelt. Welche Funktionen  $h(q)$  und  $V(q)$  entsprechen einem harmonischen Oszillator? Erinnern Sie sich auch, dass die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators mit (1.101) analytisch gelöst werden kann.

Man sagt, dass das System im Gleichgewicht ist, wenn die Gesamtkraft verschwindet. Dies bedeutet, dass sich die Punktmasse an einem stationären Punkt  $q_0$  des Potenzials befinden muss, an dem  $dV/dq|_{q=q_0} = 0$  gilt.

#### Mechanisches Gleichgewicht

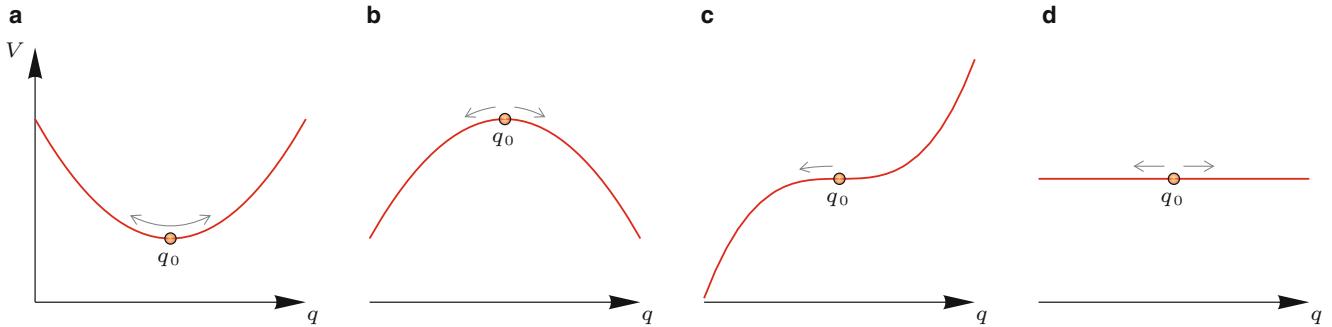
Eine Punktmasse befindet sich im *Gleichgewicht* am stationären Ort  $q_0$ , wenn die Summe aller auf sie wirkenden generalisierten Kräfte verschwindet:

$$Q = - \left. \frac{dV}{dq} \right|_{q=q_0} = 0. \quad (6.4)$$

Dieser stationäre Punkt kann ein Minimum, ein Maximum oder ein Sattelpunkt des Potenzials sein (Abb. 6.1). Im ersten Fall ist das Gleichgewicht stabil, da eine kleine Auslenkung auf eine Kraft führt, welche die Punktmasse zurück zum stationären Punkt treibt. In den beiden anderen Fällen ist das Gleichgewicht instabil: Eine Auslenkung führt auf eine Kraft, welche die Punktmasse weg vom stationären Punkt beschleunigt. Man kann sich dies gut an einem Ball vorstellen, der in einer Mulde bzw. auf einem Hügel liegt und leicht angestoßen wird.

### Entwicklung der kinetischen Energie und des Potenzials

Die Funktion  $h(q)$  und das Potenzial  $V(q)$  können im Allgemeinen alle möglichen Gestalten annehmen. In vielen Fällen ist jedoch die folgende Situation relevant: Das Potenzial besitzt ein lokales Minimum bei  $q_0$ , und die Auslenkung aus dem stabilen Gleichgewicht,  $x := q - q_0$ , ist klein. Man kann dann  $h(x)$  und  $V(x)$  um  $x = 0$  bzw.  $q = q_0$  entwickeln und Terme höherer Ordnung in  $x$  vernachlässigen (eigentlich sind  $h(x)$ ,  $V(x)$  und  $h(q)$ ,  $V(q)$  jeweils unterschiedliche Funktionen ihrer Argumente, beschreiben aber die gleiche Physik). Wir werden sehen,



**Abb. 6.1** Mögliche stationäre Punkte eines Potenzials  $V(q)$ . **a** Ein Minimum bei  $q_0$  bildet ein *stabiles Gleichgewicht*, bei dem Auslenkungen auf Rückstellkräfte führen. **b** Das Gleichgewicht ist instabil, wenn es sich um ein Maximum handelt, da Auslenkungen in jede Richtung auf Kräfte führen, welche die Auslenkung vergrößern. **c** Sattelpunkte führen ebenfalls auf instabile Gleichgewichte. Nicht alle Auslenkungen führen auf Rückstellkräfte. **d** Hängt das Potenzial gar nicht von  $q$  ab, ist das Gleichgewicht *indifferent*. Es treten keine Kräfte beim Auslenken auf

dass die Entwicklung letztlich auf eine Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung führt, die wesentlich leichter zu handhaben ist als die allgemeine Bewegungsgleichung (6.3). Man spricht deshalb auch von *kleinen Schwingungen*, da die vereinfachte Bewegungsgleichung nur für kleine Auslenkungen  $x$  gültig ist.

Wir entwickeln das Potenzial um das Minimum bei  $x = 0$  und schreiben:

$$\begin{aligned} V(x) &= V(0) + \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2} \frac{d^2V(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} x^2 \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^nV(x)}{dx^n} \Big|_{x=0} x^n. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist der konstante Wert des Potenzials im Minimum. Er spielt in den Bewegungsgleichungen keine Rolle. Der zweite Term ist der lineare Beitrag der Entwicklung und verschwindet per Konstruktion, da das Potenzial um sein Minimum entwickelt wird. Beschränkt man sich auf kleine Schwingungen, ist  $x$  klein, und Terme höherer Ordnung in  $x$  können vernachlässigt werden. In vielen Anwendungen spielt nur der quadratische Term eine wichtige Rolle, und alle Terme  $x^n$  mit  $n \geq 3$  werden ignoriert. Dies führt offensichtlich auf das Potenzial einer harmonischen Schwingung.

**Achtung** Selbstverständlich kann nicht in allen Situationen davon ausgegangen werden, dass die Auslenkungen klein sind. Dann muss man entweder das Potenzial  $V(q)$  vollständig berücksichtigen oder aber weitere Terme der Entwicklung mitnehmen. Schwingungen, bei denen höhere Terme von  $x$  eingehen, sind *anharmonisch*, da sie nicht durch einfache Sinus- oder Kosinusfunktionen beschrieben werden können.

Es ist noch die kinetische Energie zu entwickeln. Hier ist

$$T(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} \left[ h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n h(x)}{dx^n} \Big|_{x=0} x^n \right]. \quad (6.6)$$

Da der Vorfaktor bereits von zweiter Ordnung in  $\dot{x}$  ist, muss aus der Reihenentwicklung in der Klammer nur der konstante Bei-

trag  $h(0)$  berücksichtigt werden. Kombinationen wie  $\dot{x}^2 x$  sind bereits von höherer Ordnung und können vernachlässigt werden. Die Voraussetzung hier ist, dass  $\dot{x}$  und  $x$  beide von derselben Ordnung sind.

### Frage 3

Überlegen Sie sich, dass  $\dot{x}$  und  $x$  von der gleichen Ordnung sind. Dazu betrachte man die Lösung (1.101) der harmonischen Schwingung und berechne die erste Zeitableitung: Die maximale Geschwindigkeit ist proportional zur Auslenkung,  $\dot{x} \propto x$ .

Im Grenzfall kleiner Schwingungen lautet die Lagrange-Funktion also

$$L = T(\dot{x}) - V(x) = \frac{1}{2} \tilde{m} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \tilde{V} x^2, \quad (6.7)$$

wobei die Konstanten  $\tilde{m} := mh(0)$  und  $\tilde{V} := d^2V(x)/dx^2|_{x=0}$  zur Abkürzung eingeführt wurden.

### Frage 4

Überlegen Sie sich, dass  $\tilde{V}$  positiv sein muss, wenn das Potenzial bei  $q_0$  ein Minimum besitzt.

## Eigenfrequenz der freien kleinen Schwingung

Aus (6.7) folgt die Bewegungsgleichung für die freie kleine Schwingung eines einzelnen Freiheitsgrads:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.8)$$

Wir haben dabei

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{\tilde{V}}{\tilde{m}}} \quad (6.9)$$

definiert. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit fordern, dass  $\omega_0 > 0$  ist.

## 6.1 Mathematischer Hintergrund: Lineare Differentialgleichungen

### Homogene und inhomogene Differentialgleichungen, Fundamentalsystem

Wir haben bereits im „Mathematischen Hintergrund“ 1.4 gelernt, was man allgemein unter einer (gewöhnlichen) Differentialgleichung (DGL) versteht. Wir wollen uns hier genauer mit einer speziellen Art, nämlich den *linearen Differentialgleichungen*, beschäftigen.

**Lineare Differentialgleichung** Eine DGL für die Funktion  $y(x)$  heißt *linear*, wenn  $y(x)$  und all ihre Ableitungen höchstens linear vorkommen:

$$C_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + C_1(x)y^{(1)}(x) + C_0(x)y(x) = f(x).$$

$y^{(n)}$  bezeichnet die  $n$ -te Ableitung von  $y(x)$  nach  $x$ . Alle  $C_i(x)$ ,  $y(x)$  und  $f(x)$  sind reellwertige Funktionen. Ist  $y^{(n)}(x)$  die höchste auftretende Ableitung, so ist die DGL von  $n$ -ter Ordnung. Die Gleichung heißt *homogen*, falls  $f(x) = 0$ , und ansonsten *inhomogen*. Man spricht von einer DGL mit *konstanten Koeffizienten*, wenn alle  $C_i$  nicht von  $x$  abhängen und somit Konstanten sind.

Betrachtet man vektorwertige Funktionen  $y(x)$  und  $f(x)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^k$ , so hat die Gleichung die Form

$$\mathbf{C}_n(x)\mathbf{y}^{(n)}(x) + \cdots + \mathbf{C}_1(x)\mathbf{y}^{(1)}(x) + \mathbf{C}_0(x)\mathbf{y}(x) = \mathbf{f}(x),$$

wobei die  $\mathbf{C}_i(x)$  matrixwertige Funktionen sind (d. h., für jedes  $x$  ist  $\mathbf{C}_i(x)$  eine quadratische  $k \times k$ -Matrix). Diese Gleichung kann man auch als ein System von  $k$  reellwertigen eindimensionalen Gleichungen ansehen. Deswegen spricht man hier auch von einem *Differentialgleichungssystem*.

Die Lösung  $y(x)$  einer DGL muss nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sein, selbst wenn die vorkommenden Funktionen  $C_i(x)$  und  $f(x)$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind. Wir bezeichnen im Folgenden mit  $I$  das Intervall (das auch ganz  $\mathbb{R}$  sein kann), auf dem Lösungen der DGL definiert sind.

**Lösungsraum im homogenen Fall** Ist eine DGL  $n$ -ter Ordnung homogen und sind  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  zwei ihrer Lösungen, so ist für alle  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  auch die Linearkombination  $a_1y_1(x) + a_2y_2(x)$  eine Lösung, d. h., die Lösungen bilden einen reellen Vektorraum. Dieser hat die Dimension  $n$ , es gibt also  $n$  linear unabhängige Lösungen. Dabei sind Funktionen  $g_i(x)$  linear unabhängig, wenn aus  $\sum_{i=1}^n a_i g_i(x) = 0$  für alle  $x \in I$  schon  $a_i = 0$  für alle  $i$  folgt. Eine Basis des Lösungsraumes, d. h.  $n$  linear unabhängige Lösungen, bezeichnet man auch als *Fundamentalsystem*. Jede der  $n$  Lösungen ist dann eine *Fundamentallösung*.

**Wronski-Determinante** Wenn man herausfinden möchte, ob  $n$  Lösungen  $y_i(x)$  einer linearen DGL linear unabhängig sind, so kann man dies mit der *Wronski-Determinante*

überprüfen. Diese ist definiert als

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \cdots & y_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Gilt nun  $W(x) \neq 0$  für ein  $x \in I$ , so sind die Funktionen  $y_i(x)$  linear unabhängig. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, d. h., aus  $W(x) = 0$  für alle  $x \in I$  folgt nicht die lineare Unabhängigkeit.

Im Falle einer linearen DGL zweiter Ordnung ist also der Term  $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$  zu überprüfen.

**Lösung der inhomogenen Gleichung** Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DGL erhält man durch Addition der allgemeinen Lösung der dazugehörigen homogenen Gleichung zu einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung (auch *partikuläre Lösung*  $y_p(x)$  genannt). Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$y(x) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(x) + y_p(x),$$

wobei  $a_i$  reelle Zahlen sind und die  $y_i(x)$  ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bilden.

**Eindeutigkeit von Lösungen** DGL der Ordnung  $n$  haben  $n$  linear unabhängige Lösungen; es gibt also insbesondere keine eindeutige Lösung. Will man eine eindeutige Lösung erhalten, so muss man weitere Bedingungen an die DGL stellen. Dies wird üblicherweise in der Form von *Anfangs(wert)bedingungen* getan. Dabei gibt man beispielsweise für einen Wert  $x_0$  im Lösungsintervall  $I$  die Anfangswerte  $y^{(k)}(x_0)$  für  $k = 0, \dots, n-1$  vor. Durch Vorgabe dieser  $n$  unabhängigen Bedingungen erhält man eine eindeutige Lösung im  $n$ -dimensionalen Lösungsraum. Diese kann man berechnen, indem man die Anfangswerte in die allgemeine Lösung der DGL einsetzt und das entstehende Gleichungssystem löst.

Ein einfaches Beispiel ist die Schwingungsgleichung

$$C_2 y''(x) + C_0 y(x) = 0.$$

Da dies eine homogene lineare DGL zweiter Ordnung ist, gibt es ein Fundamentalsystem mit zwei unabhängigen Lösungen. Diese sind z. B.  $y_1(x) = \sin(\sqrt{C_0/C_2}x)$  und  $y_2(x) = \cos(\sqrt{C_0/C_2}x)$ . Die allgemeine Lösung hat die Form  $y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$ . Erst durch Angabe zweier Anfangswerte werden  $a_1$  und  $a_2$  festgelegt; die Lösung wird dann eindeutig.

## Fadenpendel

Betrachten wir erneut das mathematische Fadenpendel der Masse  $m$  und Länge  $l$ , das sich nur in der  $x$ - $z$ -Ebene bewegen kann. Die Gravitationskraft zeigt in die negative  $z$ -Richtung. Der einzige Freiheitsgrad ist der Auslenkungswinkel  $\phi$  aus der Ruhelage (Gleichgewicht). Für die kinetische und die potenzielle Energie gilt

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2, \quad V = -mgl \cos \phi. \quad (6.10)$$

Die kinetische Energie muss nicht entwickelt werden, da  $T$  nicht von  $\phi$  abhängt. Wegen  $\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$  folgt jedoch für das Potenzial

$$V \approx \frac{1}{2}mgl\phi^2. \quad (6.11)$$

Der konstante Term wurde dabei bereits ignoriert. Mit  $\tilde{m} = ml^2$  und  $\tilde{V} = mgl$  folgt das bekannte Ergebnis

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{V}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (6.12)$$

Analog kann man das physikalische Pendel diskutieren, das bereits in Aufgabe 4.5 untersucht wurde. ▶

Bei (6.8) handelt es sich um eine gewöhnliche lineare homogene Differenzialgleichung (DGL) zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten („Mathematischer Hintergrund“ 6.1). Um sie zu lösen, benötigt man ein Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ . Wir wissen bereits, dass (1.101) die allgemeine Lösung dieser DGL ist. Wie schon in Aufgabe 1.7 gezeigt, kann man (1.101) alternativ als Linear-kombination der beiden fundamentalen Lösungen  $\sin(\omega_0 t)$  und  $\cos(\omega_0 t)$  ausdrücken:

$$x(t) = a_1 \sin(\omega_0 t) + a_2 \cos(\omega_0 t). \quad (6.13)$$

Man kann mithilfe der Wronski-Determinante schnell zeigen, dass die beiden Fundamentallösungen linear unabhängig sind („Mathematischer Hintergrund“ 6.1):

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \\ \omega_0 \cos(\omega_0 t) & -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{vmatrix} = -\omega_0 \neq 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die Anfangsbedingungen legen die Werte der beiden Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  fest. Sind die Anfangsauslenkung  $x_0 = x(t=0)$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = \dot{x}(t=0)$  gegeben, folgt durch Einsetzen (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 6.3)

$$a_1 = \frac{v_0}{\omega_0}, \quad a_2 = x_0. \quad (6.15)$$

Die *Kreisfrequenz*  $\omega_0$  ist die *Eigenfrequenz* der harmonischen Schwingung, die nur durch die Eigenschaften des Systems (Masse und Form des Potenzials), nicht aber durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist. (Streng genommen ist die Eigenfrequenz zwar  $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ , doch wird diese Unterscheidung im physikalischen Sprachgebrauch häufig unterschlagen.)

## Kepler-Problem

Zur Anwendung betrachten wir nochmals das Kepler-Problem aus Abschn. 3.3. Wir wissen bereits, dass die radiale Bewegung durch (3.66) und (3.67) beschrieben wird. Man kann dies so interpretieren: Der Freiheitsgrad  $r$  hat eine kinetische Energie

$$T(\dot{r}) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 \quad (6.16)$$

und bewegt sich in einem Potenzial

$$V(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}, \quad (6.17)$$

wobei  $L$  der Drehimpuls der Punktmasse (und nicht die Lagrange-Funktion) ist.

**Achtung** Beim Kepler-Problem gibt es mehr als nur einen Freiheitsgrad. Allerdings ist die Bewegung des Freiheitsgrades  $r$  von denen der anderen entkoppelt. Seine Bewegungsgleichung kann also als die eines Systems mit nur einem Freiheitsgrad angesehen werden. Dabei ist der Drehimpuls  $L$  eine von außen vorgegebene Konstante. ▶

Bewegt sich die Punktmasse nahezu auf einer Kreisbahn, kann die radiale Bewegung durch eine kleine Schwingung approximiert werden. Dies ist möglich, da das Potenzial  $V(r)$  ein Minimum hat, dessen Lage  $r_0$  gerade dem Radius der Kreisbahn entspricht.

### Frage 5

Wie lautet die Bedingung, dass das Kepler-Problem eine kreisförmige Bahn erlaubt? In diesem Fall ist der Gleichgewichtsradius

$$r_0 = \frac{L^2}{\mu\alpha}. \quad (6.18)$$

Berechnen Sie diesen, indem Sie nach stationären Punkten von  $V(r)$  suchen.

Wir erlauben nun nur kleine Abweichungen von diesem Radius und schreiben

$$x = r - r_0 = r - \frac{L^2}{\mu\alpha}. \quad (6.19)$$

## 6.2 Mathematischer Hintergrund: Komplexe Zahlen

### Definition und Rechenregeln

Durch die Einführung von negativen Zahlen wurde es ermöglicht, Lösungen für beliebige lineare Gleichungen angeben zu können. Quadratische Gleichungen wie  $x^2 = -1$  haben dagegen keine Lösung über den reellen Zahlen. Die komplexen Zahlen wurden im 16. Jahrhundert von dem italienischen Mathematiker *Gerolamo Cardano* (1501–1576) eingeführt, als er merkte, dass er kubische Gleichungen lösen konnte, indem er mit fiktiven Lösungen von über den reellen Zahlen unlösbaren quadratischen Gleichungen weiterrechnete. Leonhard Euler führte dazu im 18. Jahrhundert die *imaginäre Einheit*  $i$  ein, dessen Quadrat  $-1$  ist, also  $i^2 = -1$ .

**Definition** Eine komplexe Zahl wird definiert als eine Zahl der Form  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Zwei komplexe Zahlen  $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$  lassen sich dann folgendermaßen addieren und multiplizieren:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

**Algebraische Abgeschlossenheit** Die große Bedeutung der komplexen Zahlen liegt nun unter anderem darin begründet, dass jede algebraische Gleichung vom Grad größer null über den komplexen Zahlen eine Lösung besitzt (Fundamentalsatz der Algebra).

**Körpereigenschaften**  $\mathbb{C}$  ist mit den obigen Operationen ein Körper mit null  $0 + i0$  und eins  $1 + i0$ :

$$\begin{aligned} (x + iy) + (0 + i0) &= (x + 0) + i(y + 0) = x + iy, \\ (x + iy) \cdot (1 + i0) &= (x \cdot 1 - y \cdot 0) + i(x \cdot 0 + y \cdot 1) \\ &= x + iy. \end{aligned}$$

Das multiplikative Inverse  $z^{-1} = z' = x' + iy'$  zu einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  erhalten wir, indem wir

$$(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx') = 1 + i0$$

lösen, was  $xx' - yy' = 1$  und  $xy' + yx' = 0$  bzw.  $x' = x/(x^2 + y^2)$  und  $y' = -y/(x^2 + y^2)$  erfordert und für  $z \neq 0$  definiert ist.

**Komplexe Konjugation und Division** Die *komplex konjugierte Zahl*  $z^*$  einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  erhält man durch Multiplikation ihres Imaginärteils mit  $-1$ :  $z^* = x - iy$ . Es gilt dann

$$|z|^2 := zz^* = z^*z = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

Dieses *Betragsquadrat* von  $z$  lässt sich ausnutzen, um die Division zweier komplexer Zahlen zu definieren, indem man sie

auf die Division durch eine reelle Zahl reduziert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

**Darstellungen** Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig als Punkt in einer zweidimensionalen Zahlebene (*Gauß'sche Zahlebene*; Abb. 6.2) mit Koordinaten  $(x, y)$  interpretieren. Man nennt  $x$  den *Realteil* und  $y$  den *Imaginärteil*. Die Addition zweier komplexer Zahlen entspricht dann der Vektoraddition in der Gauß'schen Zahlebene. Dabei ist der Betrag einer komplexen Zahl der Abstand  $r = |z|$  dieses Punktes vom Ursprung.

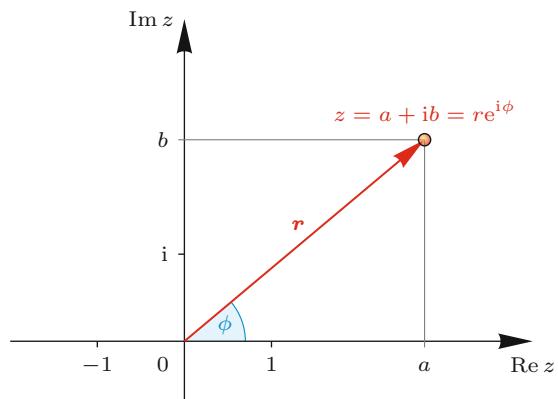
In Aufgabe 6.1 wird gezeigt, dass man die komplexe Exponentialfunktion als

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

schreiben kann. Diese sogenannte *Euler'sche Formel* ist extrem hilfreich und wird in der Physik häufig eingesetzt. Daraus ergibt sich der wichtige, in Abb. 6.2 illustrierte Zusammenhang

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Hier ist  $\varphi$  eine reelle Phase, die  $\tan \varphi = y/x$  erfüllt.

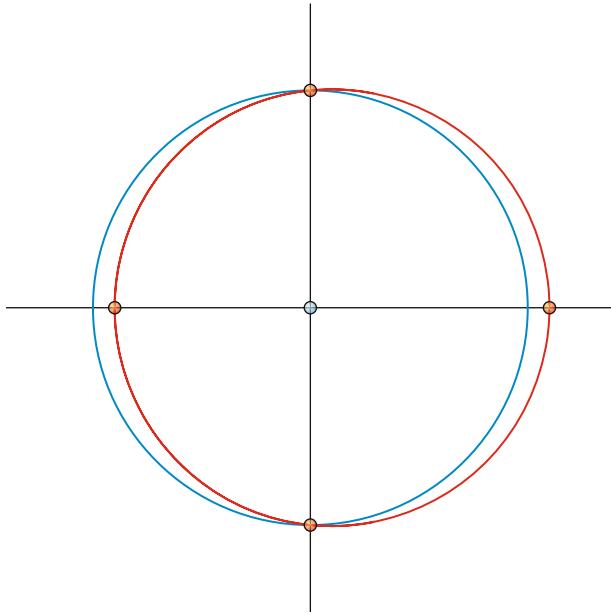


**Abb. 6.2** Jede komplexe Zahl  $z = x + iy$  lässt sich als Punkt in der komplexen Zahlebene mit Koordinaten  $(x, y)$  darstellen. In der Polardarstellung ordnet man der komplexen Zahl das eindeutige Tupel  $(r, \varphi)$ , d. h. Betrag (Abstand vom Ursprung) und Phase (Winkel zur reellen Achse) zu:  $z = re^{i\varphi}$ . Beide Darstellungen sind äquivalent

Somit lassen sich die Kosinus- und Sinusfunktionen durch die komplexe Exponentialfunktion ausdrücken:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Diese Identitäten erlauben es, häufig verwendete Beziehungen der trigonometrischen Funktionen bequem abzuleiten (Aufgabe 6.1).



**Abb. 6.3** Gebundene Kepler-Bahnen, die nur geringfügig von der Kreisbahn (blau) abweichen, lassen sich wegen (6.22) als radiale Schwingung (rot) um die Kreisbahn auffassen. Dabei ist die Oszillationsperiode exakt identisch mit der Umlaufdauer, und die Bahn ist nach einem Umlauf geschlossen. Die roten Punkte markieren die Orte, an denen das Argument des Kosinus die Werte 0,  $\pi/2$ ,  $\pi$  und  $3\pi/2$  annimmt

Damit ist es möglich,  $V(x)$  zu formulieren. Wir berechnen die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 \\ &= \left[ 3 \frac{L^2}{\mu r^4} - 2 \frac{\alpha}{r^3} \right] \Big|_{x=0} x^2 \\ &= \left[ \frac{3L^2}{\mu \left(\frac{L^2}{\mu\alpha}\right)^4} - \frac{2\alpha}{\left(\frac{L^2}{\mu\alpha}\right)^3} \right] x^2 = \alpha \left( \frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^3 x^2. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Damit finden wir für die radiale Schwingung die Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{V}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu} \left( \frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^3} = \frac{\mu\alpha^2}{L^3}. \quad (6.21)$$

Die Bahngleichung lautet

$$r(\varphi) = r_0 + \delta r \cos(\omega_0 t - \delta_0) \quad (6.22)$$

## Literatur

- Arens, T., et al.: Mathematik. 2. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag (2012)
- Freitag, E., Busam, R.: Funktionentheorie 1. 4. Aufl., Springer Verlag (2006)

mit Amplitude  $\delta r \ll r_0$  und Phasenverschiebung  $\delta_0$ , die beide aus den Anfangsbedingungen folgen. Andererseits lautet das dritte Kepler'sche Gesetz für die Umlauffrequenz

$$\omega_U = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu r_0^3}}, \quad (6.23)$$

wobei die große Halbachse  $a$  durch den Radius  $r_0$  ersetzt wurde, da die Bewegung näherungsweise auf einer Kreisbahn erfolgen soll. Wir nutzen noch die Relation (6.18) zwischen Radius und Drehimpuls aus und finden nach kurzer Rechnung für das Verhältnis der Frequenzen

$$\frac{\omega_0}{\omega_U} = 1. \quad (6.24)$$

Was bedeutet dies? Ist die Schwingung für die radiale Bewegung klein, dauert sie genauso lang wie ein Umlauf (Abb. 6.3). Dies ist in Übereinstimmung mit der allgemeinen Lösung des Kepler-Problems, die auch gültig ist, wenn die radiale Bewegung keine kleine Schwingung mehr ist: Im Allgemeinen sind die gebundenen Bahnen Ellipsenbahnen. Pro Umlauf gibt es genau ein Perihel und ein Aphel, und das Perihel ist fest. Dies entspricht exakt einer radialen Schwingung pro Umlauf.

In Aufgabe 6.2 wird dies auf beliebige Potenzpotenziale verallgemeinert.

## Darstellung harmonischer Schwingungen mit komplexen Zahlen

Schwingungen lassen sich mithilfe der komplexen Zahlen („Mathematischer Hintergrund“ 6.2) elegant beschreiben. Dazu multiplizieren wir (6.8) mit  $2\dot{x}$  und schreiben

$$2\ddot{x} + 2\omega_0^2 \dot{x}x = 0 \implies \frac{d\dot{x}^2}{dt} + \omega_0^2 \frac{dx^2}{dt} = 0. \quad (6.25)$$

Eine erste Integration führt auf

$$\dot{x}^2 = -\omega_0^2 x^2 \implies \frac{\dot{x}}{x} = \pm i\omega_0, \quad (6.26)$$

wobei die imaginäre Einheit  $i$  (mit  $i^2 = -1$ ) verwendet wurde. Wir ignorieren hier Integrationskonstanten, um die einfachste mögliche Lösung zu finden.

### 6.3 Mathematischer Hintergrund: Lineare Differentialgleichungen Lösungsstrategien

Im „Mathematischen Hintergrund“ 6.1 wurden lineare Differentialgleichungen (DGL) definiert. Hier beschäftigen wir uns damit, wie man einige Klassen solcher Gleichungen lösen kann.

**Lösungsansätze** Es gibt kein Lösungsverfahren, das man für jede lineare DGL anwenden kann. Für relativ einfache Formen gibt es aber Lösungsverfahren, von denen wir hier zwei vorstellen wollen:

- **Exponentialansatz: (Euler-Ansatz)** Haben wir es mit einer linearen DGL mit konstanten Koeffizienten und einer exponentiellen Inhomogenität, d. h. einer DGL der Form

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) + c_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + c_0y(x) \\ = e^{(a+ib)x} (a_lx^l + \cdots + a_1x + a_0) \end{aligned}$$

mit  $c_i, a_i \in \mathbb{C}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ , zu tun, so kann man den Exponentialansatz benutzen, der auf Euler zurückgeht. Wir betrachten das sogenannte *charakteristische Polynom* der DGL, das durch

$$p(t) := t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_0$$

gegeben ist. Bezeichnet dann  $m$  die *Nullstellenordnung* von  $p$  in  $a + ib$ , d. h.

$$m = \min \{k \in \mathbb{N}_0 : p^{(k)}(a + ib) \neq 0\},$$

so gibt es eine partikuläre Lösung der Form

$$y_p(x) = e^{(a+bi)x} \sum_{j=m}^{m+l} b_j x^j$$

mit  $b_j \in \mathbb{C}$ . Dieser Ansatz funktioniert auch, wenn  $a + ib$  keine Nullstelle von  $p$  ist; in diesem Fall ist  $m = 0$ . Die Koeffizienten  $b_j$  lassen sich berechnen, indem man die partikuläre Lösung in die DGL einsetzt, Koeffizienten vergleicht und das resultierende lineare Gleichungssystem löst.

- **Variation der Konstanten:** Hat die DGL die Form

$$y'(x) + c(x)y(x) = f(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

d. h., handelt es sich um eine lineare DGL erster Ordnung mit einer Anfangswertbedingung, so ist die Lösung gegeben durch

$$y(x) = \left[ \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^t c(s) ds} f(t) dt + y_0 \right] e^{-\int_{x_0}^x c(s) ds}.$$

Diese Methode hat ihren Namen daher, dass die Lösung der homogenen Gleichung (d. h. für  $f = 0$ ) gegeben ist durch  $y(x) = K \cdot \exp \left( - \int_{x_0}^x c(s) ds \right)$  mit einer Konstanten  $K$ . Im inhomogenen Fall variiert man nun diese Konstante  $K$ , d. h., man erlaubt eine  $x$ -Abhängigkeit und schreibt  $K(x)$ . Dies führt auf die obige Lösung.

**Beispiel** Wir wollen mithilfe des Exponentialansatzes eine spezielle Lösung der DGL

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = x^2 e^{(1+i)x}$$

mit  $l = 2$  bestimmen. Das charakteristische Polynom ist  $p(t) = t^2 - 2t + 2$ , und  $1 + i$  ist einfache Nullstelle von  $p$  (d. h.  $m = 1$ ). Also gibt es eine partikuläre Lösung der Form

$$y_p(x) = e^{(1+i)x} (b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3).$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= e^{(1+i)x} [b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 \\ &\quad + (1+i)(b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y''_p(x) &= e^{(1+i)x} [2b_2 + 6b_3 x + 2(1+i)(b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2) \\ &\quad + (1+i)^2 (b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)]. \end{aligned}$$

Setzt man nun  $y_p(x)$  und die beiden Ableitungen in die ursprüngliche DGL ein, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} e^{(1+i)x} [(2b_2 + 2b_1 i) + (6b_3 + 4b_2 i)x + (6b_3 i)x^2] \\ = x^2 e^{(1+i)x}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$2b_2 + 2b_1 i = 0, \quad 6b_3 + 4b_2 i = 0, \quad 6b_3 i = 1.$$

Die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems ist  $b_1 = i/4$ ,  $b_2 = 1/4$ ,  $b_3 = -i/6$ , eine spezielle Lösung ist also gegeben durch

$$y_p(x) = \left( \frac{i}{4}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{i}{6}x^3 \right) e^{(1+i)x}.$$

Man kann nun eine zweite Integration durchführen. Mit

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{d \ln x}{dt} = \pm i\omega_0 \quad (6.27)$$

folgt

$$x(t) = e^{\pm i\omega_0 t}, \quad (6.28)$$

wobei wir erneut eine mögliche Integrationskonstante ignoriert haben. Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = A e^{\pm i(\omega_0 t - \phi)} \quad (6.29)$$

mit den reellen Konstanten  $A$  (Amplitude) und  $\phi$  (Phasenverschiebung).

**Achtung** Da physikalische Größen stets reell sind, kann die komplexe Lösung in der Form (6.28) nicht die physikalische Lösung sein. Allerdings sind sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von (6.28) reelle Größen, welche die beiden Fundamentallösungen ergeben.

Es gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Im} x = \operatorname{Im} (e^{\pm i\omega_0 t}) = \sin(\pm\omega_0 t), \\ x_2 &= \operatorname{Re} x = \operatorname{Re} (e^{\pm i\omega_0 t}) = \cos(\pm\omega_0 t). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Die verschiedenen Vorzeichen ergeben keine neuen Lösungen: Beim Kosinus führen beide wegen  $\cos(+\phi) = \cos(-\phi)$  auf dasselbe Ergebnis, beim Sinus wegen  $\sin(+\phi) = -\sin(-\phi)$  lediglich auf einen Vorfaktor, der sowieso frei wählbar ist. Für die Rechnungen bieten sich wegen (6.30) komplexe Zahlen an; bei der Interpretation der Lösung müssen Real- und Imaginärteil allerdings separat untersucht werden. In Aufgabe 6.1 wird das Rechnen mit komplexen Zahlen vertieft.

## 6.2 Gedämpfte Schwingungen

Bis zu diesem Punkt wurden die freien kleinen Schwingungen eines einzelnen Freiheitsgrades untersucht. In vielen Anwendungen treten jedoch dissipative Kräfte auf, die zu einer Dämpfung der Schwingung führen. In diesem Abschnitt wird der Einfluss einer linearen Dämpfung untersucht. Man unterscheidet die drei Fälle der schwachen, starken und kritischen Dämpfung. Weiterhin wird mithilfe der erarbeiteten Methoden die Lösung der Bewegungsgleichungen des Foucault'schen Pendels gefunden, die bereits in Abschn. 2.4 aufgestellt wurden.

### Lineare Reibungskraft

Die Bewegung des Freiheitsgrades  $q$  soll gedämpft sein. Die dabei auftretende Reibungskraft lässt sich wie in (5.82) in der Lagrange-Gleichung für  $q$  berücksichtigen. Wir nehmen an, dass die generalisierte dissipative Kraft linear in  $\dot{q}$  ist (siehe

auch Stokes'sche Reibung in Abschn. 1.3). Anstatt jedoch wieder beim Lagrange-Formalismus für  $q$  zu starten, gehen wir von der Näherung (6.8) aus und addieren eine in  $\dot{x}$  lineare Reibungskraft:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.31)$$

Der Reibungskoeffizient  $\lambda > 0$  ist vorgegeben.

Reibungsterme, die quadratisch in  $\dot{x}$  sind, machen die mathematische Behandlung wesentlich komplizierter, da die Bewegungsgleichung dann nichtlinear ist. Wir beschränken uns auf den einfacheren, linearen Fall, der oftmals eine gute Beschreibung der Realität darstellt (beispielsweise die Reibung eines Pendels in einem Wassergefäß).

Es ist zu beachten, dass  $\lambda$  dieselbe Einheit besitzt wie  $\omega_0$ , nämlich  $s^{-1}$ . Damit kann  $1/\lambda$  als die Zeitspanne interpretiert werden, nach der die Oszillation stark abgedämpft ist.

### Lösung mit komplexen Zahlen

Genau wie bei (6.8) handelt es sich bei (6.31) um eine gewöhnliche lineare homogene DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Es werden wieder zwei linear unabhängige Lösungen benötigt, deren Linearkombination die vollständige Lösung bildet. Für derartige Probleme kann man stets den auf Euler zurückgehenden Exponentialansatz

$$z(t) = e^{i\omega t} \in \mathbb{C}, \quad \omega \in \mathbb{C} \quad (6.32)$$

machen („Mathematischer Hintergrund“ 6.3). Mithilfe der komplexen Zahlen kann die allgemeine Lösung schnell erhalten werden. Dazu schreiben wir zunächst

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (6.33)$$

da bei einer komplexen Lösung  $z$  auch Real-  $x_1(t) = \operatorname{Re} z$  und Imaginärteil  $x_2(t) = \operatorname{Im} z$  jeweils Lösungen sind.

Die komplexe Bewegungsgleichung lautet

$$(-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2) e^{i\omega t} = 0. \quad (6.34)$$

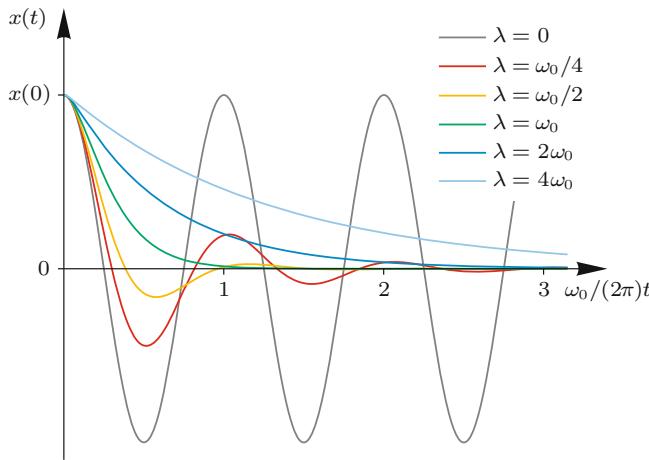
#### Frage 6

Zeigen Sie dies, indem Sie die Zeitableitungen der Ansatzfunktion berechnen.

Die Bewegungsgleichung ist für alle Zeiten  $t$  zu erfüllen, was nur möglich ist, wenn der zeitunabhängige Term in der Klammer identisch verschwindet:

$$-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2 = 0. \quad (6.35)$$

Es soll daran erinnert werden, dass  $\lambda$  und  $\omega_0$  die ursprünglichen Eigenschaften des Systems sind und  $\omega$  bisher nicht bekannt ist.



**Abb. 6.4** Bahnkurven für verschiedene Dämpfungscoefficienten  $\lambda$ . Alle Bahnkurven haben die Anfangsbedingungen  $\dot{x}(0) = 0$ . Die ungedämpfte Schwingung,  $\lambda = 0$ , hat die Oszillationsfrequenz  $\omega_0$ . Für  $\lambda < \omega_0$  ist die Dämpfung schwach, und die Frequenz ist kleiner als  $\omega_0$ . Der Spezialfall  $\lambda = \omega_0$  entspricht der kritischen Dämpfung. Größere Dämpfungscoefficienten führen auf starke Dämpfung, bei der es – wie bei der kritischen Dämpfung – keine Oszillation mehr gibt.

Man kann die in  $\omega$  quadratische Gleichung (6.35) nach  $\omega$  auflösen und findet die beiden Lösungen

$$\omega_{\pm} = i\lambda \pm \sqrt{(i\lambda)^2 + \omega_0^2} = i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = i\lambda \pm \tilde{\omega}. \quad (6.36)$$

Zur Abkürzung wurde die Größe

$$\tilde{\omega} := \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (6.37)$$

eingeführt. Da das Argument der Wurzel in (6.37) negativ, positiv oder null sein kann, müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen.

## Schwache Dämpfung

Man nennt die Dämpfung schwach, wenn  $\lambda < \omega_0$  ist. Das Argument der Wurzel in (6.37) ist dann positiv, und  $\tilde{\omega}$  ist reell. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $\tilde{\omega} > 0$  annehmen. Dies führt auf die Lösung

$$z_{\pm}(t) = e^{-\lambda t} e^{\pm i\tilde{\omega}t}. \quad (6.38)$$

Aus dem Real- und Imaginärteil ergeben sich zwei linear unabhängige, reelle Lösungen:

$$x_1(t) = e^{-\lambda t} \cos(\tilde{\omega}t), \quad x_2(t) = e^{-\lambda t} \sin(\tilde{\omega}t). \quad (6.39)$$

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination.

## Allgemeine Lösung des schwach gedämpften Oszillators

Die Auslenkung des schwach gedämpften Oszillators ( $\lambda < \omega_0$ ) ist

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda t} [a_1 \sin(\tilde{\omega}t) + a_2 \cos(\tilde{\omega}t)] \\ &= \tilde{A} e^{-\lambda t} \cos(\tilde{\omega}t - \tilde{\delta}) \end{aligned} \quad (6.40)$$

mit  $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ .

Man sieht, dass die schwache Dämpfung zu einer Schwingung führt, deren Amplitude exponentiell abklingt. Nach der Zeit  $t = 1/\lambda$  ist aufgrund der Reibungskraft die Amplitude auf  $e^{-1/\lambda} \approx 0,37$  des Anfangswertes abgefallen. Man nennt die Zeit  $1/\lambda$  auch die *Relaxationszeit* der Schwingung. Die Schwingungsfrequenz  $\tilde{\omega}$  ist gegenüber der Eigenfrequenz  $\omega_0$  reduziert:  $\tilde{\omega} < \omega_0$ . Die beiden Integrationskonstanten (entweder als  $a_1$  und  $a_2$  oder als  $\tilde{A}$  und  $\tilde{\delta}$ ) werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Typische Lösungen  $x(t)$  sind in Abb. 6.4 gezeigt.

## Starke Dämpfung

Von starker Dämpfung spricht man, wenn  $\lambda > \omega_0$  ist. In diesem Fall ist  $\tilde{\omega}$  imaginär:

$$\tilde{\omega} = i\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = i\bar{\omega}, \quad \bar{\omega} \in \mathbb{R}. \quad (6.41)$$

Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = a_1 e^{-(\lambda+\bar{\omega})t} + a_2 e^{-(\lambda-\bar{\omega})t}. \quad (6.42)$$

Somit gibt es keine Oszillation, und die Bewegung klingt exponentiell ab, wie in Abb. 6.4 dargestellt. Die beiden Integrationskonstanten  $a_1$  und  $a_2$  werden wieder durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

## Kritische Dämpfung

Der Spezialfall  $\lambda = \omega_0$  trennt die schwache und die starke Dämpfung. Dies bedeutet, dass wir nur noch eine Fundamentallösung

$$x_1(t) = e^{-\lambda t} \quad (6.43)$$

kennen, da  $\tilde{\omega} = 0$  ist. Wir benötigen allerdings eine zweite Fundamentallösung, um die DGL (6.31) allgemein zu lösen (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 6.1). In solchen Situationen

lässt sich die *d'Alembert-Reduktion* anwenden: Hat man eine lineare DGL  $n$ -ter Ordnung und kennt eine Fundamentallösung  $x_1(t)$ , so kann man durch den Ansatz

$$x_2(t) = f(t)x_1(t) \quad (6.44)$$

das Problem auf eine DGL  $(n - 1)$ -ter Ordnung reduzieren. In unserem Fall führt dies zunächst auf

$$(\ddot{x}_1 + 2\dot{f}\dot{x}_1 + f\ddot{x}_1) + 2\lambda(\dot{f}x_1 + f\dot{x}_1) + \omega_0^2fx_1 = 0. \quad (6.45)$$

### Frage 7

Überprüfen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung.

Da aber laut Bedingung

$$\ddot{x}_1 + 2\lambda\dot{x}_1 + \omega_0^2x_1 = 0 \quad (6.46)$$

gilt und außerdem aus (6.43) folgt, dass  $\dot{x} = -\lambda x$  ist, bleibt  $\ddot{f} = 0$ . Dies wird durch  $f = t$  gelöst. Die zweite Fundamentallösung lautet also

$$x_2 = te^{-\lambda t}. \quad (6.47)$$

Tatsächlich kann man immer einen Ansatz der Art (6.44) probieren. Ob man damit auf eine handhabbare Bestimmungsgleichung für  $f(t)$  stößt, ist eine ganz andere Frage. In diesem Fall führt dieser Ansatz jedenfalls zum Erfolg.

### Frage 8

Überprüfen Sie mithilfe der Wronski-Determinante, dass  $x_1$  und  $x_2$  linear unabhängig sind.

Der sogenannte *aperiodische Grenzfall* hat dann die allgemeine Lösung

$$x(t) = (a_1 + a_2t)e^{-\lambda t} \quad (6.48)$$

mit den Integrationskonstanten  $a_1$  und  $a_2$  (Abb. 6.4). In Aufgabe 6.4 wird gezeigt, wie man dies auch durch den Grenzfall  $\tilde{\omega} \rightarrow 0$  aus (6.40) erhalten kann.

### Foucault'sches Pendel

In Abschn. 2.4 wurden die Bewegungsgleichungen des Foucault'schen Pendels abgeleitet, aber noch nicht gelöst. Dies wollen wir an dieser Stelle nachholen. Gl. (2.91) und (2.92) können in der Form

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega'\dot{y} + \omega_0^2x &= 0, \\ \ddot{y} + 2\Omega'\dot{x} + \omega_0^2y &= 0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

geschrieben werden (wobei wir vereinfachend bloß  $x$  und  $y$  verwenden). Hier ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_{\text{eff}}}{l}} \quad (6.50)$$

die Eigenfrequenz des Pendels mit Fadenlänge  $l$  im homogenen Schwerefeld mit effektiver Beschleunigung  $g_{\text{eff}}$ . Zur Abkürzung wurde  $\Omega' = \Omega \sin \vartheta$  eingeführt. Für die Winkelgeschwindigkeit der Erde schreiben wir hier  $\Omega$  (anstatt  $\omega$  wie in Abschn. 2.4), und  $\vartheta$  ist die geografische Breite. Wir kombinieren beide Gleichungen in (6.49), indem die zweite mit  $i$  multipliziert und zur ersten addiert wird:

$$\ddot{z} + 2i\Omega'\dot{z} + \omega_0^2z = 0, \quad z = x + iy. \quad (6.51)$$

Gl. (6.51) hat die Form einer gedämpften Schwingung mit imaginärer Dämpfung  $\lambda = i\Omega'$ .

Überlegen Sie sich, dass die „Dämpfung“ schwach ist. Dazu vergleicht man die typische Schwingungsdauer eines Pendels (einige Sekunden) mit der Rotationsperiode der Erde (fast  $10^5$  Sekunden). Also ist  $\Omega' \ll \omega_0$  und  $\tilde{\omega} \approx \omega_0$ .

Die Lösung der Bewegungsgleichung (6.49) ist bereits bekannt:

$$z(t) = e^{-i\Omega't}e^{\pm i\omega_0 t}. \quad (6.52)$$

Hier ist allerdings zu beachten, dass der Term  $\exp(-i\Omega't)$  wegen des imaginären Exponenten keine Dämpfung beschreibt, sondern eine weitere Oszillation mit der Frequenz  $\Omega'$ , denn  $|\exp(-i\Omega't)| = 1$ . Wir schreiben (6.52) um:

$$x(t) + iy(t) = e^{-i\Omega't}(x_0(t) + iy_0(t)). \quad (6.53)$$

Dabei wurden mit  $x_0(t)$  und  $y_0(t)$  die Lösungen, die man für  $\Omega' = 0$  erhalten würde, verwendet.

Zeigen Sie, dass man (6.53) in der Matrixform

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega't) & \sin(\Omega't) \\ -\sin(\Omega't) & \cos(\Omega't) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

schreiben kann. Berechnen Sie dazu jeweils den Real- und Imaginärteil von (6.53).

Die Matrix in (6.54) beschreibt offensichtlich eine Drehung in der  $x$ - $y$ -Ebene. Die Drehfrequenz  $\Omega' = \Omega \sin \vartheta$  hängt dabei von der geografischen Breite  $\vartheta$  ab. Am Äquator verschwindet sie vollständig, und die Schwingungsebene des Pendels ist für einen erdgebundenen Beobachter fest. ◀

## 6.3 Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Bisher wurden nur Schwingungen untersucht, die sich für ein System ergeben, das einmalig ausgelenkt und dann sich selbst überlassen wird. Hier betrachten wir nun das Verhalten eines schwingenden Freiheitsgrades, der kontinuierlich von außen angeregt wird.

Hat die Anregung eine sinusförmige Zeitabhängigkeit, findet man Resonanzverhalten: Die Amplitude der Schwingung hängt stark von der Frequenz der Anregung ab und wird in einem schmalen Frequenzbereich maximal.

Resonanzen sind für die gesamte Physik wichtig: Die natürliche Breite von Spektrallinien lässt sich verstehen, wenn man einen einfachen Resonanzeffekt zugrunde legt. In der Kern- und Elementarteilchenphysik spielen Resonanzen fundamentale Rollen. Für die Bauphysik ist das Verständnis von Resonanzeffekten entscheidend, da der Wind als äußere Anregung wirkt und Gebäude in Schwingungen versetzen kann. Auch aus der Akustik und Elektrotechnik sind Resonanzen nicht wegzudenken.

### Allgemeine Lösung für periodischen Antrieb

Sei  $x$  die Koordinate eines Freiheitsgrades. Dieser soll nun eine äußere periodische Kraft

$$F_e(t) = \tilde{m}c \cos(\omega t) \quad (6.55)$$

erfahren, sodass die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = c \cos(\omega t) \quad (6.56)$$

lautet. Es wird erneut ein Lösungsansatz in der komplexen Zahlebene verwendet, daher schreiben wir zunächst

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = c e^{i\omega t}. \quad (6.57)$$

Aus  $z(t) \in \mathbb{C}$  ist später die reelle Lösung  $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$  zu bestimmen. Im Gegensatz zu (6.31) handelt es sich bei (6.57) um eine gewöhnliche *inhomogene* lineare DGL zweiter Ordnung. Zu ihrer vollständigen Lösung benötigt man die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 6.1). Die homogene Lösung ist mit (6.38) bereits bekannt:

$$z_h(t) = e^{-\lambda t} e^{\pm i\tilde{\omega}t}. \quad (6.58)$$

Wie erhalten wir nun eine partikuläre Lösung? Erneut versuchen wir den Euler-Ansatz (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 6.3)

$$z_p(t) = z_0 e^{i\omega t}, \quad z_0 = \text{const.} \quad (6.59)$$

Man beachte, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  im Exponenten derjenigen der äußeren Kraft  $F_e$  entspricht. Im Allgemeinen ist  $\omega \neq \omega_0$  und  $\omega \neq \tilde{\omega}$  ((6.9) und (6.37)).

Es ist nun also die Amplitude  $z_0$  zu bestimmen. Einsetzen von (6.59) in (6.57) ergibt zunächst

$$(-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2) z_0 = c, \quad (6.60)$$

was sich leicht nach  $z_0$  auflösen lässt:

$$z_0 = \frac{c}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}. \quad (6.61)$$

Für  $\lambda \neq 0$  ist  $z_0$  offensichtlich eine komplexe Zahl. Unser Ziel ist es jetzt,  $z_0$  in die Polardarstellung

$$z_0 = A e^{-i\delta} = |z_0| e^{-i\delta} \quad (6.62)$$

zu überführen (das Minuszeichen wird eingeführt, um am Ende auf eine gebräuchliche Darstellung zu kommen). Es ist dazu am einfachsten, zunächst die Form

$$z_0 = \operatorname{Re} z_0 + i \operatorname{Im} z_0 \quad (6.63)$$

zu erhalten.

### Frage 9

Zeigen Sie, dass sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_0 &= \frac{c (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}, \\ \operatorname{Im} z_0 &= \frac{-2c\omega\lambda}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} \end{aligned} \quad (6.64)$$

ergibt. Dabei ist  $c$  reell, da die äußere Kraft  $F_e$  eine physikalische (und damit reelle) Größe ist.

Es ist nun eine arithmetische Übung, die Amplitude  $A$  und die Phase  $\delta$  zu bestimmen:

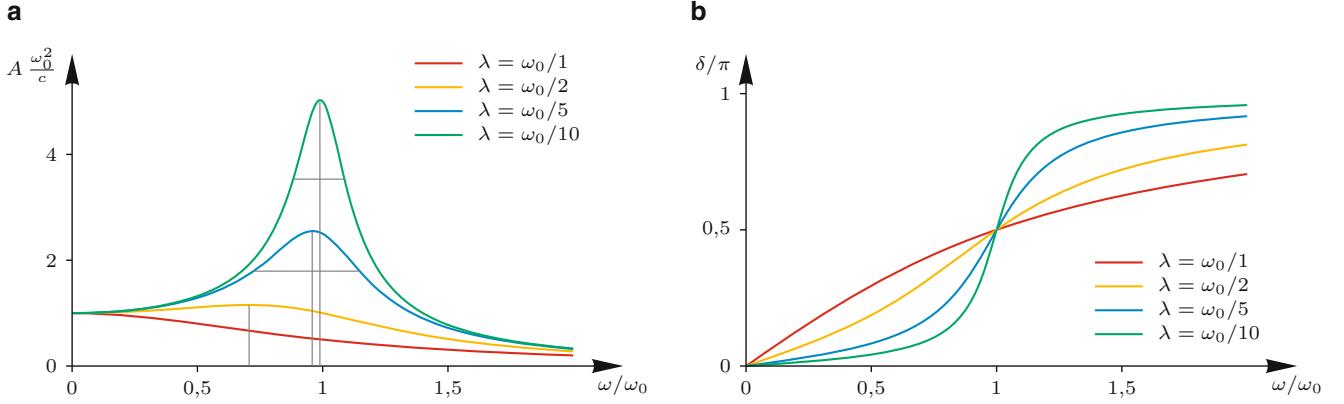
$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\operatorname{Re}^2 z_0 + \operatorname{Im}^2 z_0} = \frac{c}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}, \\ \tan \delta(\omega) &= -\frac{\operatorname{Im} z_0}{\operatorname{Re} z_0} = \frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Wir haben mit

$$x_p(t) = \operatorname{Re} z_p(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \delta(\omega)) \quad (6.66)$$

eine partikuläre Lösung von (6.56) gefunden. Die allgemeine Lösung von (6.56) für  $\lambda < \omega_0$  ist also

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \delta(\omega)) + \tilde{A} e^{-\lambda t} \cos(\tilde{\omega}t - \tilde{\delta}). \quad (6.67)$$



**Abb. 6.5** Amplitude (a) und Phasenverschiebung (b) der Schwingung mit periodischem Antrieb. Für schwache Dämpfung,  $\lambda \ll \omega_0$ , besitzt die Amplitude ein ausgeprägtes Maximum mit Breite  $\Gamma \approx 2\lambda$  nahe der Eigenfrequenz  $\omega_0$ . Die Phasenverschiebung  $\delta$  gibt an, wie stark die Schwingung relativ zur Anregung verzögert ist. Für  $\omega = \omega_0$  schwingt der Oszillatator genau mit  $90^\circ$  Phasenverschiebung, unabhängig von der Dämpfung  $\lambda$

Die Amplitude  $A(\omega)$  und Phasenverschiebung  $\delta(\omega)$  hängen von der äußeren Anregungsfrequenz  $\omega$  ab und sind durch (6.65) festgelegt. Mit  $\tilde{A}$  und  $\tilde{\delta}$  stehen zwei Integrationskonstanten zur Verfügung, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Für große Zeiten,  $t \gg 1/\lambda$ , bleibt aufgrund der Dämpfung  $\exp(-\lambda t)$  nur die partikuläre Lösung übrig. Nach einer *Einschwingung* schwingt der Oszillatator also mit derselben Frequenz wie die äußere Kraft, und der Schwingungszustand hängt nicht mehr von den Anfangsbedingungen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{\delta}$  ab. Die Phase ist im eingeschwungenen Zustand gegenüber der Anregung um  $\delta(\omega)$  verschoben.

Während des Einschwingens kann es zu einer *Schwebung* kommen, da (6.67) für  $t \ll 1/\lambda$  aus zwei Schwingungsanteilen mit Frequenzen  $\tilde{\omega}$  und  $\omega$  besteht. Wir kommen in Aufgabe 6.3 auf Schwebungen zurück.

## Resonanz und Halbwertsbreite

Für gegebene Eigenfrequenz  $\omega_0$  und Dämpfung  $\lambda$  ist die Amplitude  $A(\omega)$  in (6.65) eine Funktion der Anregungsfrequenz  $\omega$ . In Abb. 6.5 sind einige Funktionen  $A(\omega)$  dargestellt. Man erkennt das typische *Resonanzverhalten*: Die Kurvenschar  $A(\omega)$  besitzt ein Maximum

$$A_{\max} = \frac{c}{2\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad (6.68)$$

bei der Anregungsfrequenz

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}, \quad (6.69)$$

der sogenannten *Resonanzfrequenz*.

### Frage 10

Zeigen Sie (6.68) und (6.69), indem Sie von  $dA(\omega)/d\omega = 0$  ausgehen.

Man definiert die *Halbwertsbreite*  $\Gamma$  der Resonanz durch die Bedingung

$$A^2(\omega_{\pm}) = \frac{1}{2}A_{\max}^2, \quad (6.70)$$

d.h., man bestimmt die beiden Werte  $\omega_{\pm}$ , die (6.70) erfüllen, und berechnet

$$\Gamma := \omega_+ - \omega_-. \quad (6.71)$$

Nach kurzer Rechnung findet man

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_{\max}^2 \pm 2\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \quad (6.72)$$

Zwei Halbwertsbreiten sind ebenfalls in Abb. 6.5 eingezzeichnet. In (6.70) verwendet man das Quadrat der Amplitude, da die Intensität einer Schwingung (d. h. die mit der Schwingung verbundenen Energie) proportional zum Amplitudenquadrat ist.

### Frage 11

Rechnen Sie (6.72) nach.

Für sehr große Anregungsfrequenzen,  $\omega \rightarrow \infty$ , wird wegen  $A \rightarrow 0$  die Schwingungsanregung sehr klein. Dies liegt an der Trägheit des Oszillators, der auf die hohe Anregungsfrequenz nicht mehr reagieren kann. Außerdem sehen wir, dass für  $\omega \rightarrow 0$  gerade  $A \rightarrow c/\omega_0^2 = \tilde{m}c/\tilde{V} = F_{\max}/\tilde{V}$  folgt. Die Amplitude des schwingenden Systems wird dann also direkt durch die Amplitude der Kraft bestimmt.

Genau wie die Amplitude  $A(\omega)$  ist auch die Phasenverschiebung  $\delta(\omega)$  für gegebene Eigenfrequenz  $\omega_0$  und Dämpfung  $\lambda$

## Vertiefung: Allgemeine Lösung für erzwungene Schwingungen Suszeptibilität und Fourier-Transformation

Bisher kennen wir mit (6.67) nur die allgemeine Lösung für getriebene Oszillationen, wenn die Anregung  $F_e(t)$  periodisch ist. Was passiert jedoch, wenn die Anregung eine beliebige Funktion der Zeit ist? In diesem Fall kann man zeigen, dass die partikuläre Lösung

$$x_p(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{F}_e(\omega)}{\tilde{m}} \chi(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right)$$

lautet, wobei

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}$$

die sogenannte *Suszeptibilität* (siehe auch (6.61)) und

$$\tilde{F}_e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_e(t) e^{-i\omega t} dt$$

die *Fourier-Transformierte* von  $F_e(t)$  ist.

Die mathematischen Methoden, um mit diesen Gleichungen arbeiten zu können, werden erst in Bd. 2, Kap. 3 ausführlich besprochen. Anschaulich wird die Kraft  $F_e(t)$  zunächst als lineare Überlagerung von harmonischen Schwingungen geschrieben; dies ist gerade die Idee hinter der Fourier-Transformation. Die Funktion  $\tilde{F}_e(\omega)$  gibt dann an, wie stark der Anteil der Schwingung  $e^{i\omega t}$  mit Frequenz  $\omega$  zu  $F_e(t)$  beiträgt. Da die Schwingungsgleichung eine lineare DGL ist, können Lösungen linear überlagert werden; in diesem Fall wird die Überlagerung durch Integration über alle  $\omega$ -Beiträge erreicht.

eine Funktion der Anregungsfrequenz  $\omega$ . In Abb. 6.5 sind einige Kurven der Schar  $\delta(\omega)$  gezeigt. Die Phasenverschiebung ist eine monoton ansteigende Funktion von  $\omega$  und nähert sich in den Grenzfällen  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  jeweils den Werten  $\delta \rightarrow 0$  und  $\delta \rightarrow \pi$  an. Wird das System gerade mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$  angeregt, ist die Phasenverschiebung stets  $\pi/2$  und damit unabhängig von  $\lambda$ .

Eine positive Phasenverschiebung bedeutet, dass die Schwingung der Anregung „hinterher läuft“. Bei sehr kleinen Anregungsfrequenzen  $\omega \rightarrow 0$  ist die Phasenverschiebung  $\delta$  klein, und die Schwingung folgt der Anregung fast instantan. Bei hohen Anregungsfrequenzen ist die Phasenverschiebung  $\delta \approx \pi$ , und die Schwingung ist gegenphasig zur Anregung.

Es ist noch erwähnenswert, dass es auch *parametrische Resonanz* gibt, bei der nicht ein inhomogener Term (d. h. eine Kraft) in der Gleichung auftaucht, sondern ein Systemparameter zeit-abhängig gemacht wird (z. B. eine Oszillation der Länge eines Fadenpendels).

## Schwache Dämpfung

Im Grenzfall schwacher Dämpfung,  $\lambda \ll \omega_0$ , vereinfachen sich die Resonanzgleichungen. Zunächst gilt

$$A_{\max} \approx \frac{c}{2\lambda\omega_0}, \quad \omega_{\max} \approx \omega_0 - \frac{\lambda^2}{\omega_0} \approx \omega_0, \quad (6.73)$$

d. h., die Resonanzfrequenz ist nur geringfügig kleiner als die Eigenfrequenz  $\omega_0$ . Wegen  $\lambda \ll \omega_0$  ist  $A_{\max} \gg c/\omega_0^2 = A(\omega = 0)$ .

Man kann den Ausdruck (6.72) für die Halbwertsbreite  $\Gamma$  entwickeln und findet nach kurzer Rechnung

$$\omega_{\pm} \approx \omega_{\max} \pm \lambda \quad (6.74)$$

und somit

$$\Gamma \approx 2\lambda. \quad (6.75)$$

### Frage 12

Entwickeln Sie  $\omega_{\pm}$  in (6.72), indem Sie ausnutzen, dass  $\lambda/\omega_0$  eine kleine Größe ist.

Somit wird der Resonanzbereich des Oszillators bei schwacher Dämpfung sehr schmal.

**Achtung** Man darf nicht vergessen, dass wir im Allgemeinfall noch immer kleine Schwingungen betrachten, bei denen nur die führende Ordnung in  $x$  bzw.  $\dot{x}$  mitgenommen wird. Resonanzen bei schwacher Dämpfung führen allerdings auf sehr große Amplituden, bei denen die Näherung einer kleinen Schwingung unter Umständen nicht mehr gültig ist. Eine exakte Lösung ist daher stark problemspezifisch und kann wesentlich aufwendiger sein als das hier vorgestellte Vorgehen. ▶

## Energieumsatz

Aufgrund der Reibungskraft

$$F_R = -2\lambda\ddot{m}\dot{x} \quad (6.76)$$

geht dem mechanischen System Energie in Form von Wärme verloren. Es soll nun bestimmt werden, wie viel Energie im eingeschwungenen Zustand pro Periode dissipiert wird und entsprechend auch wieder von außen zugeführt werden muss. Dazu muss die Verlustleistung  $P = F_R \dot{x}$  über eine Periode gemittelt werden, indem zuvor für  $\dot{x}$  die Zeitableitung der partikulären Lösung (6.66) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= -\langle 2\lambda \tilde{m} \dot{x}^2 \rangle = -2\lambda \tilde{m} A^2(\omega) \omega^2 \langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle \\ &= -\lambda \tilde{m} A^2(\omega) \omega^2. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Es wurde dabei ausgenutzt, dass der über eine Periode gemittelte Wert von  $\langle \sin^2(\omega t) \rangle$  gerade  $\frac{1}{2}$  ergibt. Wegen  $A(\omega)$  ist die dissipierte Leistung stark von der Anregungsfrequenz  $\omega$  abhängig.

### Frage 13

Zeigen Sie, dass  $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$  ist, wenn über eine Periode gemittelt wird.

In der Praxis können Resonanzeffekte vor allem bei schwacher Dämpfung verheerende Auswirkungen haben. So sind in der Vergangenheit mehrere Brücken durch *Resonanzkatastrophen* (verursacht durch Wind oder im Gleichschritt marschierende Soldaten) eingestürzt. Einigen Menschen wird nachgesagt, dass sie ein Weinglas durch ihre Stimme zum Zerspringen bringen können. Dies ist jedoch schon aufgrund der geringen Anregungsleistung der menschlichen Stimme nicht möglich. Eine wichtige Maßnahme gegen Resonanzkatastrophen ist die Vergrößerung der Dämpfung  $\lambda$ .

## 6.4 Kleine Schwingungen gekoppelter Systeme

Häufig hat man es in realistischen Anwendungen mit Systemen  $F$  gekoppelter Freiheitsgrade zu tun. Es sind dann die Bewegungsgleichungen der Freiheitsgrade simultan zu lösen. Dies erfordert im Allgemeinen ein stark vom Problem abhängiges Vorgehen. Befindet sich das System allerdings in einem Zustand nahe des Gleichgewichts, kann man einen relativ einfachen Formalismus ableiten, mit dem sich die Bewegungsgleichungen dieser Systeme lösen lassen. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich die Bewegungsgleichungen entkoppeln lassen, indem geeignete Koordinaten (Normalkoordinaten) eingeführt werden. Als Ergebnis erhält man  $F$  einfache Schwingungsgleichungen, eine für jede Normalkoordinate. Die Lösungen der entkoppelten Gleichungen sind aus Abschn. 6.1 bereits bekannt.

### Bewegungsgleichungen

Als Verallgemeinerung von (6.1) betrachten wir nun ein gekoppeltes System von  $F$  Freiheitsgraden mit Koordinaten  $q_i$

( $1 \leq i \leq F$ ). In Anwesenheit von  $r$  holonomen Zwangsbedingungen ist  $F = 3N - r$ . Dämpfungseffekte berücksichtigen wir nicht, da sie im Allgemeinen zu sehr aufwendigen Rechnungen führen. Äußere Kräfte, die nicht im betrachteten Potenzial enthalten sind, werden zunächst ignoriert, aber in Aufgabe 6.7 hinzugefügt. Ein einfaches Beispiel sind die sechs Freiheitsgrade zweier Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$ , die durch eine elastische Feder miteinander verbunden sind.

Alle Kräfte sollen aus einem Potenzial  $V(q)$  ableitbar sein, wobei wieder  $q$  stellvertretend für alle  $F$  generalisierten Koordinaten  $q_i$  geschrieben wird.

Das Potenzial  $V(q)$  ist nun eine mehrdimensionale Abbildung  $\mathbb{R}^F \rightarrow \mathbb{R}$ . Das System ist dann im Gleichgewicht am Punkt  $q_0 = (q_{1,0}, \dots, q_{F,0})$ , wenn alle  $F$  generalisierten Kräfte verschwinden:

$$Q_i = \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q=q_0} = 0 \quad (1 \leq i \leq F). \quad (6.78)$$

Genau wie in (6.5) wird das Potenzial um dieses Gleichgewicht entwickelt und nur der in den Koordinaten  $\xi_i := q_i - q_{i,0}$  quadratische Term mitgenommen:

$$V(\xi) \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^F \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{\xi=0} \xi_i \xi_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^F V_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (6.79)$$

Man beachte, dass  $\dot{\xi}_i = \dot{q}_i$  wegen  $q_{i,0} = \text{const}$  gilt.

Das Potenzial  $V$  wird in der Regel Terme beinhalten, die der Kopplung zweier Freiheitsgrade entsprechen. Eine häufige Form ist  $\propto (\xi_i - \xi_j)^2$  (*elastische Kopplung*). Wirken äußere Kräfte, kommen auch Terme  $\propto \dot{\xi}_i^2$  vor. Dies werden wir beispielweise in (6.116) sehen.

### Frage 14

Schauen Sie sich erneut die allgemeine Taylor-Entwicklung für mehrdimensionale Funktionen  $V(\xi) = V(\xi_1, \dots, \xi_F)$  an und vergewissern Sie sich, dass (6.79) die Verallgemeinerung des quadratischen Terms in (6.5) ist.

Auch die kinetische Energie wird wie in (6.6) entwickelt. Man findet

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^F T_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j. \quad (6.80)$$

Die Elemente  $T_{ij}$  ergeben sich aus der kinetischen Energie. Hat man es insgesamt mit  $N$  Punktmassen mit kartesischen Koordinaten  $x_k$  zu tun, dann ist wegen (5.98):

$$T_{ij} := \sum_{k=1}^N m_k \left( \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_j} \right) \Big|_{\xi=0}. \quad (6.81)$$

Die  $F^2$  Größen  $T_{ij}$  sind konstant.

## Anwendung: Spektrallinien Zusammenhang mit angeregten Elektronenschwingungen

Elektronen in der Atomhülle, die von einer einfallenden elektromagnetischen Welle angeregt werden, können als schwingende Dipole beschrieben werden. Das anregende elektrische Feld soll eine ebene, monochromatische Welle sein:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t).$$

Die auf das Elektron mit Ladung  $q$  und Masse  $m$  wirkende Lorentz-Kraft ist

$$F_e(t) = m\ddot{x} = qE(t) = qE_0 \cos(\omega t).$$

Zusätzlich führt das Elektron eine durch den Atomkern bedingte harmonische Schwingung mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$  aus.

Beschleunigte Ladungen strahlen sogenannte Bremsstrahlung ab; sie verlieren also Energie, und die Schwingung ist gedämpft. In Bd. 2, Kap. 9 wird gezeigt, dass der Dämpfungskoeffizient

$$\lambda = \frac{q^2 \omega_0^2}{3mc^3}$$

ist, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Elektronenladung wird hier in cgs-Einheiten angegeben:  $q = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}$ . Demzufolge ist die Resonanzkurve

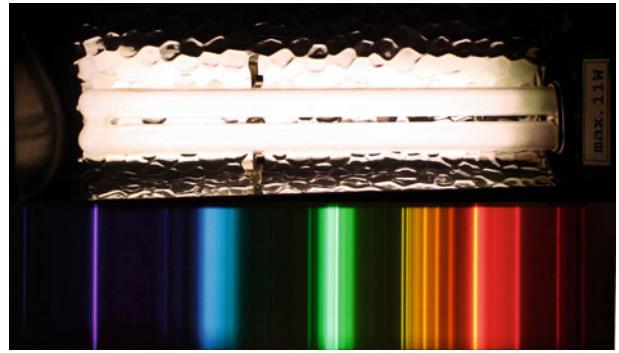
$$A(\omega) = \frac{qE_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}.$$

Wird das Elektron durch elektromagnetische Strahlung mit kontinuierlichem Spektrum beleuchtet, absorbiert es Anteile

dieser Strahlung. Es entsteht eine *Absorptionslinie* mit einem Profil  $A^2(\omega)$ . Dieses wird als *Lorentz-Profil* bezeichnet. Weegen  $\lambda \ll \omega_0$  ist die Dämpfung schwach, und die *natürliche Linienbreite* ist

$$\Gamma = 2\lambda = \frac{2q^2\omega_0^2}{3mc^3}.$$

Typische Breiten von Spektrallinien sind  $\Gamma \approx 10^8 \text{ s}^{-1}$ . Dies ist mit dem Frequenzbereich des sichtbaren Lichtes zu vergleichen, der sich von  $3,7 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$  (rot) bis  $7,5 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$  (blau) erstreckt. Eine Spektrallinie ist also etwa eine Million mal schmäler als der sichtbare elektromagnetische Spektralbereich. Abb. 6.6 zeigt das *Emissionsspektrum* einer Leuchtstofflampe.



**Abb. 6.6** Emissionsspektrum des Lichtes einer Leuchtstofflampe. Ein Emissionsspektrum entsteht dadurch, dass eine Lichtquelle nur Licht bestimmter Frequenzen emittiert. Im Gegensatz dazu wird ein Absorptionsspektrum erzeugt, indem Licht mit einer kontinuierlichen Frequenzverteilung durch ein optisches Medium läuft, das bestimmte Frequenzen absorbiert (© Sheevar)

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^F T_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^F V_{ij} \xi_i \dot{\xi}_j. \quad (6.82)$$

Bei  $V$  und  $T$  handelt es sich um *quadratische Formen*. Beide können durch symmetrische  $F \times F$ -Matrizen dargestellt werden. Wir definieren

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1F} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{F1} & \cdots & T_{FF} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} := \begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1F} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{F1} & \cdots & V_{FF} \end{pmatrix}. \quad (6.83)$$

Die Symmetrie von  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{V}$ , also  $\mathbf{T}^\top = \mathbf{T}$  und  $\mathbf{V}^\top = \mathbf{V}$ , ergibt sich offensichtlich direkt aus ihren Definitionen.

Wegen  $\mathbf{T} = \text{const}$  folgen mit dem Koordinatenvektor  $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_F)^\top$  aus (6.82) die Bewegungsgleichungen in Matrixform:

$$\mathbf{T}\ddot{\xi} + \mathbf{V}\dot{\xi} = \mathbf{0}. \quad (6.84)$$

Es handelt sich dabei um ein gekoppeltes System von  $F$  linearen und homogenen DGL zweiter Ordnung und mit konstanten Koeffizienten. Gl. (6.84) ist die Verallgemeinerung der harmonischen Schwingungsgleichung (6.8) auf mehrere Freiheitsgrade.

Die kinetische Energie kann niemals negativ werden. Daher muss für beliebige  $\dot{\xi}$  der Zusammenhang  $\dot{\xi}^\top \mathbf{T} \dot{\xi} \geq 0$  gelten.

**Frage 15**

Zeigen Sie, dass dies hier gilt, indem Sie sich zunächst überlegen, dass

$$\dot{\xi}^\top T \dot{\xi} = \sum_{k=1}^N m_k \left( \sum_{i=1}^F \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 \quad (6.85)$$

erfüllt ist.

Die Matrix  $T$  muss also positiv-semidefinit sein. Im Rahmen der quadratischen Näherung muss die kinetische Energie  $T > 0$  erfüllen, wenn mindestens eine Geschwindigkeit  $\dot{\xi}_i \neq 0$  ist. Wenn wir den trivialen Fall ignorieren, in dem alle  $\dot{\xi}_i$  null sind, muss die Matrix  $T$  daher sogar positiv-definit sein.

## Einführung von Normalkoordinaten und Diagonalisierung der Matrizen

Die Gestalt der Matrizen  $T$  und  $V$  hängt von der Problemstellung ab. Im Allgemeinen werden die Bewegungsgleichungen verschiedener Freiheitsgrade allerdings gekoppelt sein, d. h., die Bewegungsgleichung für  $\dot{\xi}_i$  enthält generell andere  $\dot{\xi}_j$  und  $\ddot{\xi}_j$ . Dies ist dann der Fall, wenn  $T$  und  $V$  nicht diagonal sind.

Wir werden in Kürze sehen, dass sich die Bewegungsgleichungen dank ihrer Linearität entkoppeln lassen. Dazu müssen  $F$  sogenannte *Normalkoordinaten*  $\xi'_i(\xi_1, \dots, \xi_F)$  eingeführt werden; es ist also eine Koordinatentransformation notwendig. Als Ergebnis erhält man  $F$  Bewegungsgleichungen für jeweils eine Normalkoordinate, die nicht von den  $F - 1$  anderen Normalkoordinaten abhängen. Normalkoordinaten beschreiben somit die Eigenschwingungen bzw. *Eigenmoden* des Systems. Solch ein Gleichungssystem ist wesentlich einfacher zu untersuchen und zu interpretieren als ein gekoppeltes System.

Das Ziel ist es, die beiden Matrizen  $T$  und  $V$  simultan zu diagonalisieren, denn dann sind die Bewegungsgleichungen (6.84) entkoppelt. Wir werden nun zunächst  $T$  diagonalisieren und anschließend zeigen, dass durch eine geschickte Wahl der Koordinatentransformation gleichzeitig  $V$  diagonalisiert werden kann. Für die folgenden Rechnungen werden einige Ergebnisse der linearen Algebra benötigt.

Auch in der Quantenmechanik spielt die simultane Diagonalisierung von Matrizen eine entscheidende Rolle, wie in Bd. 3, Kap. 3 noch deutlich werden wird.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass sich jede symmetrische reelle Matrix diagonalisieren lässt und alle Eigenwerte reell sind. Daher gilt

$$T = R^\top D R \quad (6.86)$$

mit einer orthogonalen Matrix  $R$  und der diagonalen Matrix  $D = \text{diag}(t_1, \dots, t_F)$ . Aufgrund der Positiv-Definitheit von  $T$  sind alle  $F$  Zahlen  $t_i$  positiv. Wir definieren nun die Matrix

$$B' := \text{diag}(\sqrt{t_1}, \dots, \sqrt{t_F}) R \quad (6.87)$$

und schreiben damit

$$T = B'^\top B'. \quad (6.88)$$

**Frage 16**

Überlegen Sie sich, dass

$$\det(B') > 0 \quad (6.89)$$

ist (dies gilt jedenfalls dann, wenn  $\det(R) = +1$  erfüllt ist, worauf wir uns hier beschränken wollen).

Wir werden bald ausnutzen, dass die Matrix  $B'$  nur bis auf eine orthogonale Transformation  $S$  festgelegt ist, denn die Matrix

$$B \equiv SB' \quad (6.90)$$

erfüllt ebenfalls

$$T = B^\top B, \quad (6.91)$$

wie man schnell nachrechnet. Wir führen nun die *Normalkoordinaten*  $\xi'$  als Linearkombination der ursprünglichen Koordinaten  $\xi$  ein:

$$\xi' := B\xi. \quad (6.92)$$

Wegen  $\det(B) \neq 0$  ist die Koordinatentransformation invertierbar:

$$\xi = A\xi', \quad A = B^{-1}. \quad (6.93)$$

**Frage 17**

Zeigen Sie, dass sich die kinetische Energie  $T = \dot{\xi}^\top T \dot{\xi} / 2$  in der Form

$$T = \frac{1}{2} \dot{\xi}'^\top \dot{\xi}' \quad (6.94)$$

schreiben lässt.

Die potenzielle Energie lautet, ausgedrückt durch die Normalkoordinaten  $\xi'$ :

$$V = \frac{1}{2} \xi^\top V \xi = \frac{1}{2} \xi'^\top A^\top V A \xi'. \quad (6.95)$$

Bisher wurde die Freiheit der Wahl von  $S$  nicht ausgenutzt. Mit

$$B \equiv SB' \implies A = B^{-1} = B'^{-1}S^{-1} =: A'S^\top \quad (6.96)$$

lässt sich daher (wegen  $S^{-1} = S^\top$ ) die Matrix  $A'$  definieren und es gilt:

$$A^\top V A = S (A'^\top V A') S^\top. \quad (6.97)$$

Der eingeklammerte Term ist eine symmetrische und daher diagonalisierbare Matrix. Man kann nun die Transformation  $S$  so wählen, dass sie den eingeklammerten Term in (6.97) diagonalisiert und somit

$$A^\top V A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_F) \quad (6.98)$$

ist.

Da alle Eigenwerte  $t_i$  positiv sind, sind alle  $\sqrt{t_i}$  reell. Daher sind auch die Matrizen  $A, A'$ ,  $B$  und  $B'$  reell. Weiterhin ist die Matrix  $V$  symmetrisch, und all ihre Eigenwerte  $\lambda_i$  sind ebenfalls reell (aber nicht zwangsläufig positiv).

Zusammengefasst lauten die kinetische und potenzielle Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^F \dot{\xi}_i'^2, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^F \lambda_i \xi_i'^2, \quad (6.99)$$

wenn sie durch die Normalkoordinaten ausgedrückt werden. Die  $F$  entkoppelten Bewegungsgleichungen für die unabhängigen Koordinaten  $\xi'_i$  lauten schließlich

$$\ddot{\xi}'_i + \lambda_i \xi'_i = 0 \quad (1 \leq i \leq F). \quad (6.100)$$

Die Bewegungsgleichung für  $\xi'_i$  ist unabhängig von allen anderen Normalkoordinaten  $\xi'_j$  und ihren Ableitungen  $\dot{\xi}'_j$ . Die  $F$  Zahlen  $\lambda_i$  sind eng verknüpft mit den Eigenwerten der Matrix  $V$ . Ein Vergleich mit (6.8) zeigt, dass  $\lambda_i$  die quadratische Eigenfrequenz der Koordinate  $\xi'_i$  ist:

$$\lambda_i =: \omega_{i,0}^2. \quad (6.101)$$

Im Gegensatz zu den  $t_i$  kann man allgemein nichts über die Vorzeichen der  $\lambda_i$  sagen. Sie hängen vom Potenzial  $V(q)$  ab. Insbesondere kann  $\lambda_i$  negativ und die entsprechende Eigenfrequenz imaginär sein. Wir kommen später wieder darauf zurück. Vorher soll allerdings noch beantwortet werden, wie man die hier beschriebene Diagonalisierung praktisch durchführt und wie die Normalkoordinaten erhalten werden können.

## Bestimmung der Normalkoordinaten

Um das Problem zu diagonalisieren und aus den Koordinaten  $\xi$  die Normalkoordinaten  $\xi'$  zu erhalten, benötigt man die  $F$  Eigenwerte  $\lambda_i$  und die Matrix  $B$  bzw.  $A = B^{-1}$ . Es wird nun ein Verfahren vorgestellt, wie man beides gewinnen kann.

Zunächst gehen wir von (6.98) aus und schreiben wegen  $B^\top = (A^\top)^{-1}$ ,  $B^\top = B^\top BB^{-1}$  und  $B^\top B = T$ :

$$VA = B^\top \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_F) = TA \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_F). \quad (6.102)$$

### Frage 18

Vollziehen Sie diese Zwischenschritte nach.

Die gesuchte reelle Matrix  $A$  wird in  $F$  Spaltenvektoren  $a_i$  zerlegt:

$$A = (a_1, \dots, a_F), \quad a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Fi} \end{pmatrix}, \quad (6.103)$$

wobei die  $a_{ij}$  die Matrixelemente von  $A$  sind. Es folgt mit (6.102) und (6.103) die Eigenwertgleichung

$$Va_i = \lambda_i Ta_i \quad (1 \leq i \leq F). \quad (6.104)$$

Es ist zu beachten, dass  $a_i$  kein 3-, sondern ein  $F$ -Tupel ist und damit im Allgemeinen keinen kartesischen Vektor darstellt.

**Achtung** Im Gegensatz zu den Eigenwertgleichungen, die uns bisher begegnet sind, ist hier die Einheitsmatrix durch die Matrix  $T$  ersetzt worden. Man sagt,  $T$  ist der *metrische Tensor* des Eigenwertproblems. Alle Sätze über das gewöhnliche Eigenwertproblem sind vollständig auf das vorliegende Eigenwertproblem übertragbar, wobei  $T$  die Rolle der Einheitsmatrix übernimmt. Die mathematischen Methoden sind dabei identisch zu denen, die bei der Diagonalisierung des Trägheitstensors in Kap. 4 besprochen wurden, wobei hier die Matrizen  $F$ -dimensional sind. ▶

Um die  $F$  Eigenvektoren  $a_i$  zu bestimmen, ist zunächst die charakteristische Gleichung

$$\det(V - \lambda T) = 0 \quad (6.105)$$

zu lösen. Als Ergebnis erhält man die  $F$  reellen Eigenwerte  $\lambda_i$ , die teilweise oder vollständig entartet sein können. Für nicht-entartete Eigenwerte sind die zugehörigen Eigenvektoren  $a_i$  automatisch orthonormal bezüglich der Matrix  $T$ :

$$A^\top TA = A^\top B^\top BA = I_F \implies a_i^\top Ta_j = \delta_{ij}. \quad (6.106)$$

Hier ist  $I_F$  die  $F \times F$ -Einheitsmatrix. Sind Eigenwerte entartet, so sind die entsprechenden Eigenvektoren so zu wählen, dass sie paarweise orthonormal sind. Gl. (6.106) beschreibt eine *verallgemeinerte Orthonormalitätsrelation*.

## Allgemeine Lösung und Stabilität

Die Diskussion der  $F$  Gleichungen (6.100) ist vollständig analog zu der in Abschn. 6.1. Insbesondere kann man den komplexen Ansatz  $\exp(i\omega_i t)$  mit  $\omega_i^2 = \lambda_i$  für die Lösung von (6.100) verfolgen und anschließend die allgemeine Lösung als Linearkombination der Real- und Imaginärteile konstruieren. Man unterscheidet dabei die folgenden Fälle:

- Sind alle Eigenwerte  $\lambda_i > 0$ , dann sind alle Eigenfrequenzen  $\omega_{i,0} = \sqrt{\lambda_i}$  reell und alle Lösungen harmonische Schwingungen,

$$\xi'_i(t) = C_i \cos(\omega_{i,0} t - \delta_i), \quad (6.107)$$

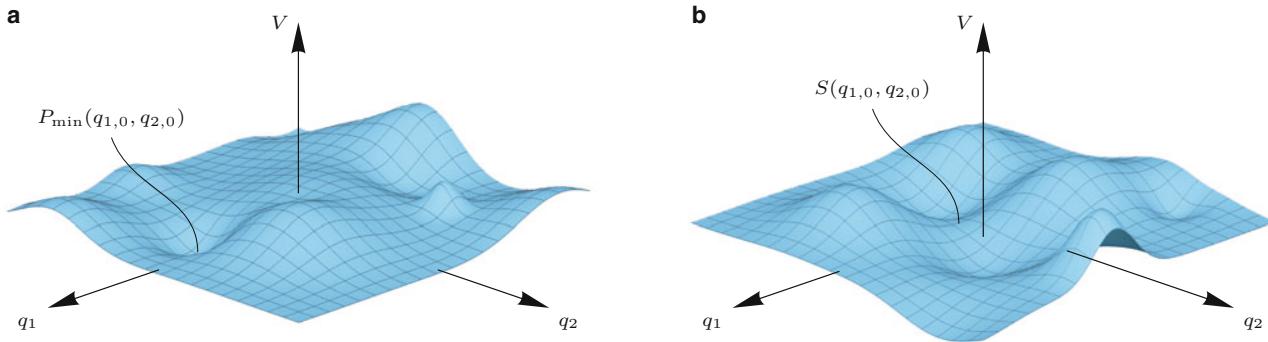
mit reellen Integrationskonstanten  $C_i$  und  $\delta_i$ . In diesem Fall besitzt das Potenzial  $V(q)$  in  $q_0$  ein striktes Minimum, d. h., für jede kleine Auslenkung  $\delta q$  aus dem Gleichgewicht ist  $V(q_0 + \delta q) > V(q_0)$ , und das System ist stabil (Abb. 6.7).

## Übersicht: Lösung der gekoppelten Bewegungsgleichungen

Zusammenfassend geht man folgendermaßen vor:

1. Stellen Sie für das vorliegende Problem die Matrizen  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{V}$  auf.
2. Finden Sie die Lösungen der charakteristischen Gleichung  $\det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T}) = 0$ . Somit sind die  $F$  Eigenwerte  $\lambda_i$  bekannt.

3. Bestimmen Sie die  $F$  Eigenvektoren  $\mathbf{a}_i$ , die  $\mathbf{V}\mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{T}\mathbf{a}_i$  erfüllen und der Orthonormalitätsrelation  $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{T}\mathbf{a}_j = \delta_{ij}$  genügen. Dies führt auf die Transformationsmatrix  $\mathbf{A}$ .
4. Falls gewünscht, lassen sich die Normalkoordinaten über  $\xi = \mathbf{A}\xi'$  bestimmen.



**Abb. 6.7** Stabilität von Gleichgewichten am Beispiel  $F = 2$ . **a** Der Punkt  $P_{\min}(q_{1,0}, q_{2,0})$  ist ein lokales Minimum der Potenziallandschaft  $V(q_1, q_2)$ . Das Gleichgewicht ist sowohl für  $q_1$  als auch für  $q_2$  stabil. **b** Der Punkt  $S(q_{1,0}, q_{2,0})$  ist ein Sattelpunkt, der für  $q_1$  ein lokales Minimum, für  $q_2$  aber ein lokales Maximum darstellt. So ist zwar das Gleichgewicht von  $q_1$  stabil, nicht aber das für  $q_2$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für das Gesamtsystem ist dann die lineare Überlagerung

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^F \mathbf{a}_i \xi'_i(t) = \sum_{i=1}^F \mathbf{a}_i C_i \cos(\omega_{i,0} t - \delta_i). \quad (6.108)$$

Man nennt die Eigenfrequenzen  $\omega_{i,0}$  auch *Normalfrequenzen*.

2. Ist mindestens ein Eigenwert  $\lambda_i \leq 0$ , dann kann  $\xi'_i$  im Rahmen der harmonischen Näherung unbegrenzt wachsen. Insbesondere kann es für  $\lambda_i < 0$  zum exponentiellen Wachstum von  $\xi'_i$  kommen:

$$\xi'_i \propto e^{\pm \sqrt{|\lambda_i|}t}. \quad (6.109)$$

Für  $\lambda_i < 0$  ist das System also instabil, da keine kleinen Schwingungen um den vermeintlichen Gleichgewichtspunkt möglich sind. Für eine genauere Analyse solcher Systeme müssen allerdings Terme höherer Ordnung hinzugezogen werden, was auf äußerst problemspezifische Rechnungen führt. Für  $\lambda_i = 0$  löst

$$\xi'_i = \xi'_{i,0} + \dot{\xi}'_{i,0}t, \quad \dot{\xi}'_{i,0}, \ddot{\xi}'_{i,0} = \text{const} \quad (6.110)$$

die Bewegungsgleichung. Diese Situation wird als *indifferentes Gleichgewicht* bezeichnet, da das Potenzial entlang  $\xi'_i$  konstant ist und mit einer Auslenkung von  $\xi'_i$  keine

Kraft verbunden ist. Wir werden in Abschn. 6.5 noch sehen, dass dieser Fall typisch für Systeme ist, die keinen äußeren Kräften unterworfen sind und deren Schwerpunkt sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen kann (Impulserhaltung des Schwerpunktes).

Die Integrationskonstanten  $C_i$  und  $\delta_i$  lassen sich folgendermaßen bestimmen: Zur Zeit  $t = 0$  ist

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^F \mathbf{a}_i C_i \cos \delta_i, \quad \dot{\xi}_0 = \sum_{i=1}^F \mathbf{a}_i C_i \omega_{i,0} \sin \delta_i. \quad (6.111)$$

Aus der Orthonormalität der Eigenvektoren  $\mathbf{a}_i$  bezüglich der Matrix  $\mathbf{T}$  folgt

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{T} \xi_0 = C_i \cos \delta_i, \quad \mathbf{a}_i^\top \mathbf{T} \dot{\xi}_0 = C_i \omega_{i,0} \sin \delta_i. \quad (6.112)$$

Dies erlaubt die Berechnung der gesuchten Integrationskonstanten.

Man spricht von *Normalschwingungen* oder *Eigenschwingungen*, wenn nur genau eine Normalkoordinate angeregt ist:

$$\xi(t) = \mathbf{a}_i C_i \cos(\omega_{i,0} t - \delta_i), \quad C_j = 0 \quad (j \neq i). \quad (6.113)$$

Im Allgemeinen ist die Lösung (6.108) eine lineare Superposition von Normalschwingungen. Die Vektoren  $\mathbf{a}_i$  geben die

relativen Amplituden der Eigenschwingungen der gekoppelten Punktmassen für die  $i$ -te Eigenmode an. Insbesondere bedeutet  $\mathbf{a}_i \propto (1, 1, \dots, 1)^\top$ , dass die Amplituden aller Punktmassen für die  $i$ -te Eigenmode gleich sind.

In Aufgabe 6.7 wird gezeigt, wie sich äußere Kräfte, die nicht in  $\mathbf{V}$  enthalten sind, in den Formalismus der Normalkoordinaten einbinden lassen.

### Frage 19

Überlegen Sie sich, dass die Bahnkurve  $\xi(t)$  im  $F$ -dimensionalen Parameterraum periodisch ist, wenn alle  $F$  Eigenfrequenzen  $\omega_{i,0}$  in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Ansonsten ist die Bahnkurve  $\xi(t)$  nicht geschlossen und kehrt niemals in ihren Anfangszustand zurück.

### Zwei elastisch gekoppelte Punktmassen

Der in diesem Abschnitt vorgestellte Formalismus soll hier an einem einfachen Beispiel verdeutlicht werden: Zwei Punktmassen der Masse  $m$  hängen jeweils an ebenen Pendeln der Länge  $l$ . Die beiden Aufhängepunkte haben einen Abstand  $x_0$ . Die Pendel seien durch eine Feder mit der Federkonstanten  $D$  und der Ruhelänge  $x_0$  miteinander gekoppelt. Beide Pendel sollen nur in der gemeinsamen Ebene schwingen können. Somit gibt es mit den beiden Auslenkungswinkeln  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  nur zwei Freiheitsgrade. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2). \quad (6.114)$$

Beiträge zur potenziellen Energie kommen vom homogenen Schwerefeld und der Feder:

$$\begin{aligned} V &= -mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \\ &+ \frac{D}{2} \left[ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - x_0 \right]^2. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Sind die Auslenkungen klein, können die Auslenkungen  $y_1$  und  $y_2$  gegenüber  $x_1$  und  $x_2$  vernachlässigt werden. Weiterhin verwenden wir die Näherungen  $x_1 = l \sin \varphi_1 \approx l\varphi_1$ ,  $x_2 \approx x_0 + l\varphi_2$  und  $\cos \varphi_{1,2} \approx 1 - \varphi_{1,2}^2/2$ . Ignoriert man den konstanten Term, lautet die potenzielle Energie

$$V \approx \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{Dl^2}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (6.116)$$

Der Gravitationsbeitrag entspricht einem äußeren Potenzial, der Federbeitrag einer Kopplung der Freiheitsgrade (Wechselwirkung, innere Kräfte). Wir notieren die beiden Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V} &= mgl \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + Dl^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.117)$$

Hier ist zu beachten, dass  $\mathbf{V}$  symmetrisch formuliert werden muss. Dazu haben wir den Mischterm  $\propto \varphi_1 \varphi_2$  durch zwei dividiert und ihn auf die beiden Nebendiagonalelemente verteilt.

Die charakteristische Gleichung  $\det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T}) = 0$  lautet

$$l^2 [(mg + Dl - ml\lambda)^2 - D^2 l^2] = 0, \quad (6.118)$$

und die beiden Lösungen sind

$$\lambda_1 = \frac{g}{l} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{g}{l} + 2\frac{D}{m} > 0. \quad (6.119)$$

In jedem Fall handelt es sich also um stabile Schwingungen beider Freiheitsgrade. Es sind nun die Eigenvektoren zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} mgl + Dl^2 - \lambda_1 ml^2 & -Dl^2 \\ -Dl^2 & mgl + Dl^2 - \lambda_1 ml^2 \end{pmatrix} \mathbf{a}_i = \mathbf{0}. \quad (6.120)$$

Für den ersten Eigenwert folgt

$$\begin{pmatrix} Dl^2 & -Dl^2 \\ -Dl^2 & Dl^2 \end{pmatrix} \mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \implies \mathbf{a}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.121)$$

Der zweite Eigenwert führt auf

$$\begin{pmatrix} -Dl^2 & -Dl^2 \\ -Dl^2 & -Dl^2 \end{pmatrix} \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \implies \mathbf{a}_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (6.122)$$

Es sollen noch beide Eigenvektoren bezüglich  $\mathbf{T}$  normiert werden, d.h., wir fordern  $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{T} \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$ . Zunächst sieht man schnell, dass  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  bezüglich  $\mathbf{T}$  orthogonal zueinander sind. Dies muss so sein, da die beiden Eigenwerte nicht entartet sind. Die noch fehlende Normierung führt auf

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (6.123)$$

Dies entspricht im Wesentlichen (bis auf Vorfaktoren) einer Zerlegung in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten der beiden Punktmassen. Die beiden Normalschwingungen haben die folgenden Bedeutungen:

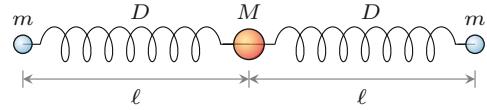
1. Die beiden Punktmassen schwingen gleichphasig ( $\mathbf{a}_1$ ), d.h.  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$ .
2. Die beiden Punktmassen schwingen gegenphasig ( $\mathbf{a}_2$ ), d.h.  $\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$ .

Beide Normalschwingungen haben mit  $\omega_{1,0} = \sqrt{\lambda_1}$  und  $\omega_{2,0} = \sqrt{\lambda_2}$  verschiedene Eigenfrequenzen. Dies liegt daran, dass die Feder bei der gleichphasigen Normalschwingung keine Rolle spielt und die Rückstellkraft

(d. h. diejenige Kraft, die der Auslenkung entgegenwirkt) nur aufgrund der Gravitation zustande kommt. Bei der gegenphasigen Normalschwingung wird die Feder gedehnt und gestaucht, und die Federkonstante  $D$  geht in die Schwingungsfrequenz ein. Die allgemeine Lösung  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^\top$  ist eine lineare Überlagerung dieser Schwingungen,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_1 C_1 \cos(\omega_{1,0} t - \delta_1) + \mathbf{a}_2 C_2 \cos(\omega_{2,0} t - \delta_2), \quad (6.124)$$

und die Amplituden und Phasenverschiebungen der beiden Normalschwingungen sind durch die (hier nicht gegebenen) Anfangsbedingungen festgelegt. In Aufgabe 6.3 wird gezeigt, dass bei gekoppelten Pendeln Schwingungen auftreten können. 



**Abb. 6.8** Modell des hier betrachteten linearen dreiatomigen Moleküls

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2} \dot{x}_2^2, \quad (6.125)$$

$$V = \frac{D}{2} [(x_2 - x_1 - \ell)^2 + (x_3 - x_2 - \ell)^2].$$

Alle Terme sind bereits höchstens quadratisch in den Koordinaten und ihren Ableitungen;  $T$  und  $V$  müssen also nicht entwickelt werden.

Für  $x_2 - x_1 = \ell$  und  $x_3 - x_2 = \ell$  besteht Gleichgewicht. Offensichtlich ist das Problem translationsinvariant: Wird das gesamte Molekül entlang der  $x$ -Achse verschoben, ändert sich die Lagrange-Funktion  $L = T - V$  nicht. Das Noether-Theorem besagt hier demnach, dass der Gesamtimpuls entlang der  $x$ -Achse erhalten ist. Dies wird uns später bei der Diskussion der Eigenwerte wieder begegnen. Außerdem ist wegen der Zeitunabhängigkeit von  $L$  die Energie erhalten.

### Frage 20

Vergewissern Sie sich, dass für  $x_2 - x_1 = \ell$  und  $x_3 - x_2 = \ell$  Gleichgewicht besteht.

Es bietet sich an, auf einen anderen Koordinatensatz  $\xi_i$  zu wechseln, der die Auslenkung aus den Gleichgewichtslagen beschreibt:

$$\xi_1 = x_1 + \ell, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3 - \ell. \quad (6.126)$$

Daraus ergeben sich die Energieterme

$$T = \frac{1}{2} (m \dot{\xi}_1^2 + M \dot{\xi}_2^2 + m \dot{\xi}_3^2), \quad (6.127)$$

$$V = \frac{D}{2} [(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\xi_3 - \xi_2)^2].$$

Die Matrizen  $T$  und  $V$  können direkt abgelesen werden:

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} D & -D & 0 \\ -D & 2D & -D \\ 0 & -D & D \end{pmatrix}. \quad (6.128)$$

Die Nebendiagonalelemente von  $V$  beschreiben die Potenzialkopplung der Koordinaten. Zum Beispiel erkennt man an der Matrix, dass  $\xi_1$  und  $\xi_3$  nicht miteinander gekoppelt sind, da die 13- und 31-Komponenten null sind.

Der zweite Schritt ist die Bestimmung der drei Eigenwerte  $\lambda_i$ . Die charakteristische Gleichung  $\det(V - \lambda T) = 0$  lautet

$$\det \begin{pmatrix} D - \lambda m & -D & 0 \\ -D & 2D - \lambda M & -D \\ 0 & -D & D - \lambda m \end{pmatrix} = 0 \quad (6.129)$$

oder durch Entwickeln nach der ersten Spalte oder Zeile

$$(D - \lambda m) [(2D - \lambda M)(D - \lambda m) - D^2] - D^2(D - \lambda m) = 0. \quad (6.130)$$

Die erste Lösung findet man sofort durch Ausklammern:

$$\lambda_1 = \frac{D}{m} > 0. \quad (6.131)$$

Die übrige Gleichung ist

$$(2D - \lambda M)(D - \lambda m) - 2D^2 = 0 \\ \Rightarrow \lambda(\lambda Mm - MD - 2mD) = 0 \quad (6.132)$$

und wird durch

$$\lambda_2 = \left( \frac{D}{m} + \frac{2D}{M} \right) > 0 \quad (6.133)$$

und

$$\lambda_3 = 0 \quad (6.134)$$

gelöst. Zwei Eigenwerte sind positiv und führen auf Eigenschwingungen. Der andere ist null und hängt mit der Translationssymmetrie des Systems zusammen. Die Eigenfrequenzen sind

$$\omega_{1,0} = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad \omega_{2,0} = \sqrt{\frac{D}{m} \left( 1 + \frac{2m}{M} \right)}, \quad \omega_{3,0} = 0. \quad (6.135)$$

Im dritten Schritt sind die drei Eigenvektoren  $\mathbf{a}_i$  zu berechnen. Sie erlauben die physikalische Interpretation der Eigenschwingungen. Wir beginnen mit dem ersten Eigenwert und schreiben

$$\begin{pmatrix} 0 & -D & 0 \\ -D & D(2 - M/m) & -D \\ 0 & -D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.136)$$

Es folgt  $a_{12} = 0$  und  $a_{13} = -a_{11}$ . Der Eigenvektor  $\mathbf{a}_1$  ist somit bis auf einen Faktor festgelegt. Aus der Orthonormalitätsrelation  $\mathbf{a}_1^\top \mathbf{T} \mathbf{a}_1 = 1$  erhalten wir

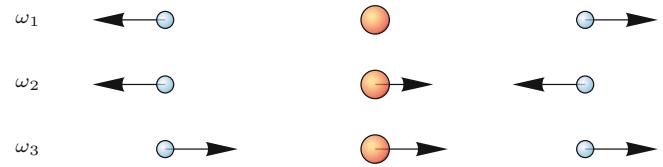
$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (6.137)$$

Aus dem zweiten Eigenwert folgt

$$\begin{pmatrix} -D\frac{2m}{M} & -D & 0 \\ -D & -D\frac{M}{m} & -D \\ 0 & -D & -D\frac{2m}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.138)$$

Dies verlangt  $a_{21} = a_{23}$  und  $a_{22} = -2a_{21}m/M$ . Schließlich lautet der zweite normierte Eigenvektor

$$\mathbf{a}_2 = \sqrt{\frac{M}{2m(2m+M)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.139)$$



**Abb. 6.9** Gezeigt sind die drei möglichen Eigenmoden des linearen dreiatomigen Moleküls ( $\omega_1$ : gegenphasige Schwingung der beiden kleinen Massen;  $\omega_2$ : gegenphasige Schwingung der großen Masse gegenüber den beiden gleichphasig schwingenden kleinen Massen;  $\omega_3$ : Translation des gesamten Moleküls)

### Frage 21

Rechnen Sie die Normierung explizit nach.

Der dritte Eigenwert ergibt zunächst das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} D & -D & 0 \\ -D & 2D & -D \\ 0 & -D & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.140)$$

Es erfordert  $a_{31} = a_{32} = a_{33}$ . Die Orthonormalitätsrelation führt anschließend auf

$$\mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.141)$$

Welche physikalische Bedeutung haben die drei Eigenvektoren? Der Vektor  $\mathbf{a}_1$  entspricht einer gegenphasigen Schwingung der beiden äußeren Atome. Das mittlere ruht dabei. Dies sieht man an dem Vektor  $(1, 0, -1)^\top$ , der die Schwingungsamplituden beschreibt: Die Amplitude des mittleren Oszillators ist null, die anderen sind vom Betrag gleich, aber entgegengesetzt. Die Eigenschwingung  $\mathbf{a}_2$  beschreibt eine Bewegung, bei der das mittlere Atom gegenphasig gegen die beiden äußeren gleichphasig schwingenden Atome schwingt. Der Eigenwert  $\lambda_3 = 0$  führt auf eine Bewegung, bei der sich alle Atome mit gleicher Geschwindigkeit entlang der  $x$ -Achse bewegen. Darin zeigt sich gerade die Gesamtimpulserhaltung entlang der  $x$ -Achse.

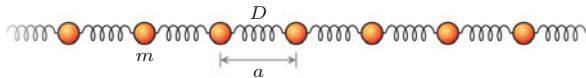
### Frage 22

Machen Sie sich klar, dass wegen  $\lambda_3 = 0$  keine Schwingung, sondern eine Translation vorliegt. Die Geschwindigkeiten der Punktmassen sind dann proportional zu den Einträgen des Vektors  $\mathbf{a}_3$  (und in diesem Fall somit alle gleich).

In diesem System gibt es daher zwei Schwingungs- und einen Translationsfreiheitsgrad (und nicht drei Schwingungsfreiheitsgrade). Abb. 6.9 veranschaulicht die drei Eigenmoden. Die allgemeine Lösung ist

$$\xi(t) = \mathbf{a}_1 C_1 \cos(\omega_{1,0} t - \delta_1) + \mathbf{a}_2 C_2 \cos(\omega_{2,0} t - \delta_2) + \mathbf{a}_3 (\xi_{3,0} + \dot{\xi}_{3,0} t) \quad (6.142)$$

mit den sechs Integrationskonstanten  $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2, \xi_{3,0}, \dot{\xi}_{3,0}$ .



**Abb. 6.10** Die lineare Kette besteht aus lauter identischen Punktmasse mit Masse  $m$  und Gleichgewichtsabstand  $a$ . Alle Punktmasse sind über jeweils eine Feder der Stärke  $D$  mit den beiden nächsten Nachbarn verbunden

### Frage 23

Zeigen Sie, dass jede der drei Normalschwingungen (und damit auch jede beliebige Überlagerung) die Impulserhaltung erfüllt. Berechnen Sie dazu den Impuls

$$p_x = m\dot{x}_1 + M\dot{x}_2 + m\dot{x}_3, \quad (6.143)$$

der sich durch Einsetzen der jeweiligen Lösungen  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) ergibt.

Weitere Beispiele gekoppelter Oszillatoren werden in den Aufgaben 6.5 und 6.6 behandelt.

## Lineare Kette

Zum Abschluss betrachten wir ein für die Festkörperphysik wichtiges Modell: die lineare Kette als Approximation eines eindimensionalen Kristalls (Abb. 6.10).

Im Gleichgewicht befinden sich lauter identische Punktmassen  $m_j$  an den Orten

$$x_j = aj \quad (j \in \mathbb{Z}). \quad (6.144)$$

Hier ist  $a$  der *Gitterabstand*, d. h. der Gleichgewichtsabstand benachbarter Punktmassen. Jede Punktmasse ist mit ihren beiden Nachbarn durch jeweils eine Feder mit Elastizitätskonstante  $D$  verbunden. Die Auslenkung aus der Ruhelage der Punktmasse  $j$  ist  $\xi_j$ . Damit folgt für die kinetische und die potenzielle Energie

$$T = \frac{m}{2} \sum_j \dot{\xi}_j^2, \quad V = \frac{D}{2} \sum_j (\xi_{j+1} - \xi_j)^2. \quad (6.145)$$

### Frage 24

Zeigen Sie, ausgehend von den Lagrange-Gleichungen, dass die Bewegungsgleichung für  $\xi_j$

$$m\ddot{\xi}_j = -D[(\xi_j - \xi_{j+1}) + (\xi_j - \xi_{j-1})] \quad (6.146)$$

lautet. Dabei ist zu berücksichtigen, dass jede Koordinate  $\xi_j$  in zwei Summanden des Potenzials vorkommt.

Mit (6.146) haben wir ein gekoppeltes System von Oszillatoren vorliegen. Wir werden nun in zwei Schritten die Gleichungen entkoppeln. Im ersten lösen wir die Zeitabhängigkeit der Oszillatoren. Mit dem zweiten Schritt werden die verbleibenden Gleichungen entkoppelt. Wir stellen also nicht die Matrizen  $V$  und  $T$  auf, wie wir es bisher getan haben.

Wir beginnen mit dem Ansatz

$$\xi_j = \operatorname{Re}(A_j e^{-i\omega t}), \quad (6.147)$$

wobei  $\omega$  identisch für alle Oszillatoren ist. Über die komplexen Amplituden  $A_j$  der individuellen Oszillatoren wird an dieser Stelle noch nichts gesagt. Wir erlauben jedoch, dass sie für jeden Oszillator verschieden sein können. Daraus ergibt sich folgendes System von zeitunabhängigen komplexen Gleichungen:

$$m\omega^2 A_j = D(2A_j - A_{j+1} - A_{j-1}). \quad (6.148)$$

Sind die  $A_j$  erst bestimmt, liefert der Realteil (6.147) die Bahnkurven der Oszillatoren.

Offensichtlich sind die Gleichungen (6.148) noch gekoppelt. Der nächste Schritt besteht also darin, zu „raten“, wie  $A_j$  mit  $A_{j\pm 1}$  zusammenhängt. Der einfachste Ansatz lautet

$$A_{j+1} = cA_j \implies A_j = c^j A_0, \quad (6.149)$$

wobei  $c$  ein komplexer, aber konstanter Faktor ist, der selbst nicht von  $j$  abhängt. Somit bekommt man entkoppelte Gleichungen der Gestalt

$$m\omega^2 = D(2 - c - c^{-1}). \quad (6.150)$$

Ohne weitere Angaben können wir nicht fortfahren. Es fehlen nun *Randbedingungen*, die das Gleichungssystem schließen. Eine solche Randbedingung (*periodische Randbedingung*) soll im Folgenden vorgerechnet werden; die Randbedingung *eingespannter Enden* wird in Aufgabe 6.8 behandelt.

Periodische Randbedingungen werden häufig in der Festkörperphysik oder der Fluidynamik, aber auch in anderen Disziplinen der Physik verwendet. Im vorliegenden Fall bedeuten sie mathematisch notiert

$$\xi_{j+N} = \xi_j. \quad (6.151)$$

Hier ist  $N$  eine natürliche Zahl (die in der Anwendung hinreichend groß sein muss), die angibt, nach wie vielen Punktmassen das System sich periodisch wiederholt. Dies bedeutet wegen (6.149)

$$c^N = 1 \implies c = e^{2\pi i n/N} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (6.152)$$

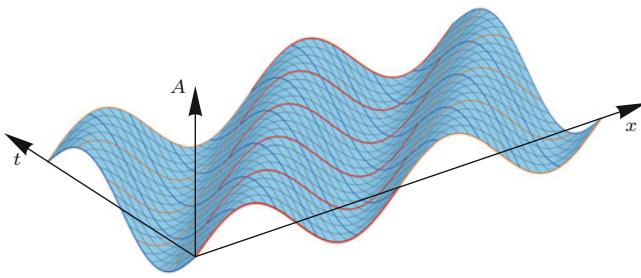
Da sich das System nach  $N$  Punktmassen wiederholt, schränkt man  $n$  normalerweise auf das Intervall  $[-N/2, +N/2]$  ein. Periodische Randbedingungen sind mathematische Idealisierungen, die offensichtlich in der Realität nicht existieren. Dennoch erlauben sie häufig überhaupt erst eine elegante Lösung, die für große  $N$  als hinreichend genau angenommen werden kann.

Man definiert die *Wellenzahl* für dieses Problem,

$$k := \frac{2\pi n}{aN}, \quad (6.153)$$

und schreibt alternativ:

$$c = e^{ika}. \quad (6.154)$$



**Abb. 6.11** Veranschaulichung der räumlich-zeitlichen Welle in (6.157). An einem festen Ort  $x$  beobachtet man eine Schwingung in der Zeit, während zu einer festen Zeit  $t$  eine räumliche Welle vorliegt

Die Wellenzahl kann wegen  $n \in \mathbb{Z}$  nur diskrete Werte und  $k$  nur Werte zwischen  $\pm\pi/a$  annehmen. Gl. (6.154) beschreibt eine Welle (siehe unten) entlang der Kette. Sie hat die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \implies c = e^{2\pi i a / \lambda}. \quad (6.155)$$

Aus (6.153) folgt, dass die „Kettenlänge“  $aN$  ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$  ist:

$$\lambda = \frac{aN}{n}. \quad (6.156)$$

Dies ist eine direkte Folge der angesetzten Periodizität.

Insgesamt erhalten wir als Lösung

$$\xi_j = \operatorname{Re} (A e^{i(kaj - \omega t)}), \quad (6.157)$$

wobei willkürlich  $A = A_0$  verwendet wurde. (Man könnte auch jede andere Punktmasse als Referenz verwenden und die  $j$ -Verschiebung durch eine Phase in der Exponentialfunktion berücksichtigen.)

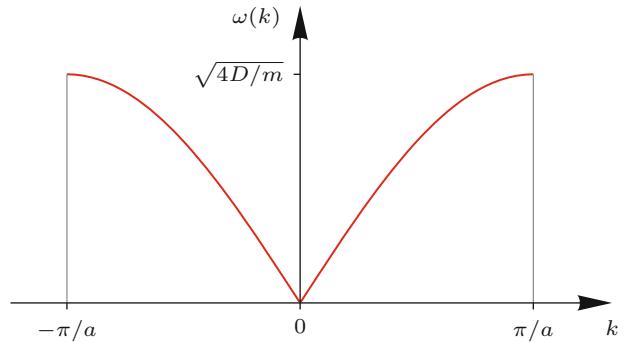
Die Exponentialfunktion beschreibt eine Welle in Raum und Zeit, wie in Abb. 6.11 illustriert. Für eine festgehaltene Punktmasse  $j$  bedeutet eine Welle eine Oszillation in der Zeit mit Frequenz  $\omega$ . Betrachtet man im Gegensatz dazu das Gesamtsystem zu einer festen Zeit  $t$ , hat man es mit einer räumlich ausgedehnten Welle mit Wellenzahl  $k$  zu tun.

Aufgrund der Linearität der Bewegungsgleichung (6.146) sind Linearkombinationen von Lösungen (6.157) mit verschiedenen  $k$  und  $\omega$  wieder Lösungen. Man kann eine allgemeine Schwingung also als Superposition von Fundamentalwellen mit bestimmter Wellenlänge zerlegen. Die dabei erlaubten Wellenzahlen sind durch (6.153) gegeben. Allerdings stehen auch  $k$  und  $\omega$  in enger Beziehung. Wie wir sofort sehen werden, können  $k$  und  $\omega$  nicht unabhängig voneinander gewählt werden.

Gl. (6.150) nimmt zunächst die Form

$$m\omega^2 = D(2 - e^{ika} - e^{-ika}) \quad (6.158)$$

an. Diese Gleichung heißt *Dispersionsrelation* und legt fest, wie sich die Frequenz  $\omega$  in Abhängigkeit von der Wellenzahl  $k$  ver-



**Abb. 6.12** Dispersionsrelation der longitudinal schwingenden linearen Kette. Für große Wellenlängen (kleine Wellenzahlen  $k$ ) ist das Verhalten linear. Ist die Wellenlänge in der Nähe der Gitterkonstanten  $a$ , flacht  $\omega(k)$  ab und erreicht schließlich den Wert  $\sqrt{4D/m}$

hält. Nach kurzer Rechnung findet man

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4D}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|. \quad (6.159)$$

Dieser Zusammenhang ist in Abb. 6.12 grafisch gezeigt.

### Frage 25

Zeigen Sie (6.159), indem Sie die Identitäten  $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$  und  $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$  verwenden.

Wegen  $n \in \mathbb{Z}$  erlaubt man hier negative und positive  $k$ . Je nach Vorzeichen läuft die Welle entweder nach rechts oder nach links. Für  $|ka| \ll 1$  (d. h.  $\lambda \gg a$ ) lässt sich die Dispersionsrelation linearisieren:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{D}{m}} |ka|. \quad (6.160)$$

In diesem Grenzfall „sieht“ die Welle das Gitter nicht, da der Abstand benachbarter Punktmassen sehr viel kleiner als die Wellenlänge ist, und die Frequenz  $\omega$  ist proportional zur Wellenzahl  $k$ . Je größer  $k$  wird (d. h., je kleiner  $\lambda$  wird), desto mehr weicht die Dispersionsrelation von einem linearen Verhalten ab.

### Frage 26

Überlegen Sie sich, dass es eine kleinste sinnvolle Wellenlänge gibt. Sie werden finden, dass die kleinste Wellenlänge  $2a$  ist. Dies entspricht genau dem Fall, dass alle geraden Punktmassen gemeinsam gegenphasig zu allen ungeraden Punktmassen schwingen.

Wellen, die – wie in diesem Beispiel – entlang ihrer Ausbreitungsrichtung schwingen, nennt man *Longitudinalschwingungen*. Beispiele dafür sind Schallwellen in Luft und Wasser. Für elastische Materialien (im Wesentlichen Festkörper) sind auch *Transversalwellen* möglich, bei denen die Oszillationen rechtwinklig zur Ausbreitungsrichtung stattfinden. Wir kommen in Kap. 8 darauf zurück.

## Anwendung: Akustischer Doppler-Effekt

Wir betrachten den akustischen Doppler-Effekt mit beliebig bewegtem Sender und Empfänger in einem ruhenden Medium.

Da sich Schallwellen relativ zum akustischen Medium stets mit der konstanten Schallgeschwindigkeit  $c_s$  ausbreiten, beschreiben wir den Doppler-Effekt im Ruhesystem des Mediums. Es könnte sich dabei um Luft an einem windstillen Tag handeln. Wir nehmen an, dass es einen Schallsender S gibt, der sich am Ort  $\mathbf{x}_S(t)$  befindet und sich mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_S(t) = \dot{\mathbf{x}}_S(t)$  bewegt. Dementsprechend gibt es einen Empfänger E am Ort  $\mathbf{x}_E(t)$  mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_E(t) = \dot{\mathbf{x}}_E(t)$ . S soll isotrop Schallwellen mit der Frequenz  $f_0$  abstrahlen.

Bewegt sich S relativ zum Medium nicht, so wird ein ruhender Empfänger stets Schallwellen der Frequenz  $f_0$  messen. Ein sich bewegender Sender erzeugt allerdings Schallwellen, deren Frequenz davon abhängen, wie schnell sich S bewegt und in welche Richtung sie sich bezüglich der Bewegungsrichtung von S ausbreiten. Außerdem verändert die Geschwindigkeit des Empfängers die gemessene Frequenz, wie wir nun berechnen werden.

S strahlt Wellen ab, deren Wellenberge von S aus betrachtet stets denselben zeitlichen Abstand  $T = 1/f_0$  aufweisen. Nehmen wir nun an, S befände sich beim Senden eines Wellenberges zur Zeit  $t-T$  am Ort  $\mathbf{x}_S(t-T)$  und beim Senden des folgenden Wellenberges zur Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{x}_S(t)$ . Ein Empfänger am zunächst festen Ort  $\mathbf{x}_E$  wird den ersten Wellenberg zur Zeit  $t - T + |\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t-T)|/c_s$  messen, da die Schallwelle die Distanz  $|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t-T)|$  gerade mit Geschwindigkeit  $c_s$  überwindet. Der zweite Wellenberg wird den Empfänger zur Zeit  $t + |\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t)|/c_s$  erreichen. Beide Wellenberge haben daher für E den zeitlichen Abstand

$$T' = \left( t + \frac{|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t)|}{c_s} \right) - \left( t - T + \frac{|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t-T)|}{c_s} \right) = T + \frac{|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t)| - |\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t-T)|}{c_s}, \quad (6.161)$$

der sich im Allgemeinen von  $T$  unterscheidet.

Wir können nun den Projektionssatz verwenden, um den Ausdruck für  $T'$  handlicher zu gestalten. Für ein Dreieck mit Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$ , sowie den jeweils gegenüber liegenden Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  (s. Abb. 6.13) gilt

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta. \quad (6.162)$$

Wir identifizieren

$$\begin{aligned} a &= |\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t-T)|, & b &= |\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t)|, \\ c &= |\mathbf{x}_S(t) - \mathbf{x}_S(t-T)|. \end{aligned} \quad (6.163)$$

Für sehr kleine Wellenperioden  $T$  und hinreichend große Abstände zwischen Sender und Empfänger ist die Seite  $c$  wesentlich kürzer als die beiden anderen. Daher ist der Winkel  $\gamma$  fast Null und  $\cos \gamma \approx 1$ . Wir finden damit

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t)| - |\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t-T)| &= b - a \approx -c \cos \beta \\ &= -|\mathbf{x}_S(t) - \mathbf{x}_S(t-T)| \cos \beta. \end{aligned} \quad (6.164)$$

$\beta$  ist hier der Winkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S(t-T)$  und  $\mathbf{c} = \mathbf{x}_S(t) - \mathbf{x}_S(t-T)$ .

Da  $T$  eine kurze Zeit sein soll, können wir den Quotienten aus der Ortsdifferenz und der Zeit  $T$  durch die Geschwindigkeit ersetzen:

$$\frac{\mathbf{x}_S(t) - \mathbf{x}_S(t-T)}{T} = \mathbf{v}_S(t). \quad (6.165)$$

Wir erhalten somit schließlich

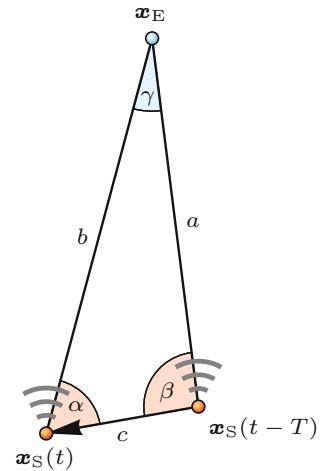
$$T' \approx T \left( 1 - \frac{\mathbf{v}_S(t) \cdot \hat{\mathbf{a}}(t)}{c_s} \right), \quad (6.166)$$

wobei  $\hat{\mathbf{a}}(t)$  derjenige Einheitsvektor ist, der von  $\mathbf{x}_S(t-T)$  nach  $\mathbf{x}_E$  zeigt, also vom Sender zur Zeit der Abstrahlung zum Empfänger. Umgeschrieben als Empfangsfrequenz  $f' = 1/T'$  haben wir also

$$f' = f_0 \frac{c_s}{c_s - \mathbf{v}_S(t) \cdot \hat{\mathbf{a}}(t)}. \quad (6.167)$$

Dies ist der Doppler-Effekt für bewegten Sender und ruhenden Empfänger. Hier ist zu beachten, dass die Zeit  $t$  die Abstrahlung der Schallwelle bezeichnet; E wird sie aber erst zur Zeit  $t + a/c_s$  empfangen.

**Abb. 6.13** Veranschaulichung des Doppler-Effekts für bewegten Sender S mit Bahnkurve  $\mathbf{x}_S(t)$  und ruhenden Empfänger E am Ort  $\mathbf{x}_E$ . Während der Periode  $T$  zwischen der Abstrahlung zweier Wellenberge bewegt sich der Sender gerade um die Strecke  $c$  und überstreicht dabei vom Empfänger aus gesehen einen kleinen Winkel  $\gamma$



Betrachten wir drei Spezialfälle:

1. Tangentiale Bewegung,  $v_S(t) \cdot \hat{a}(t) = 0$ : In diesem Fall misst der Empfänger gerade die Originalfrequenz  $f_0$ .
2. Annäherung,  $v_S(t) \cdot \hat{a}(t) > 0$ : Die gemessene Frequenz  $f'$  ist vergrößert, da durch die Annäherung des Senders die Wellenberge in Richtung des Empfängers gestaucht werden.
3. Entfernung,  $v_S(t) \cdot \hat{a}(t) < 0$ : Hier ist die Frequenz  $f'$  verringert, da der Sender mit zunehmender Zeit weiter entfernt ist und die Wellenberge damit weiter auseinander liegen.

Spezialfälle 2 und 3 kennt man aus dem Alltag: Die Sirene eines sich nähernenden Krankenwagens erklingt höher; für einen sich entfernenden Krankenwagen erscheint sie jedoch tiefer. Im Grenzfall  $v_S(t) \cdot \hat{a}(t) \rightarrow c_s$  divergiert die gemessene Frequenz, da der Sender sich genau so schnell wie die Wellenberge auf den Empfänger zubewegt und somit alle Wellenberge gleichzeitig beim Empfänger ankommen. Für  $|v_S| > c_s$  kommt es zum „Überschallknall“.

Wir können eine ähnliche Analyse durchführen, wenn S ruht, E sich aber bewegt. Es folgt dann

$$f' = f_0 \frac{c_s - v_E(t) \cdot \hat{a}(t)}{c_s - v_S(t) \cdot \hat{a}(t)}, \quad (6.168)$$

wobei  $\hat{a}(t)$  seine obige Bedeutung behält. Dies ist nun der Doppler-Effekt für bewegten Empfänger und ruhenden Sender. Wieder ist  $t$  die Zeit der Abstrahlung und  $t + a/c_s$  die Zeit des Empfangs.

Die drei Spezialfälle verhalten sich ähnlich wie zuvor. Bei tangentialer Bewegung tritt keine Frequenzänderung auf. Nähert sich der Empfänger dem Sender ( $v_E(t) \cdot \hat{a}(t) < 0$ ), erhöht sich die Frequenz, ansonsten verringert sie sich. Der Unterschied zum bewegten Sender besteht darin, dass hier keine Divergenz von  $f'$  auftreten kann; die gemessene Frequenz verschwindet allerdings für  $v_E(t) \cdot \hat{a}(t) = c_s$ . In diesem Fall entfernt sich der Empfänger vom Sender gerade mit Schallgeschwindigkeit und Wellenberge können E nicht mehr erreichen.

Abschließend kann man noch beide Gleichungen verbinden, um gleichzeitig bewegte Sender und Empfänger zuzulassen:

$$f' = f_0 \frac{c_s - v_E(t) \cdot \hat{a}(t)}{c_s - v_S(t) \cdot \hat{a}(t)}. \quad (6.169)$$

Im Spezialfall, dass sich S und E mit identischer Geschwindigkeit  $< c_s$  relativ zum Medium bewegen, misst E stets die Ausgangsfrequenz  $f_0$ .

# Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- leichte Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
- mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
- anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständen auch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

## 6.1 •• Die Euler'sche Formel

Es soll das Rechnen mit den komplexen Zahlen geübt werden.

- (a) Schreiben Sie die Taylor-Reihe (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 1.8) der Exponentialfunktion  $e^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) um  $x = 0$  auf und ersetzen Sie danach  $x$  durch das komplexe Argument  $ix$ . Sortieren Sie die Reihe nach reellen und imaginären Termen. Zeigen Sie damit, dass

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (6.170)$$

gilt und damit

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (6.171)$$

- (b) Zeigen Sie die Identität

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \quad (6.172)$$

mithilfe der komplexen Exponentialfunktion.

## 6.2 •• Potenzpotenziale

Das radiale Schwingungsverhalten einer Punktmasse im Kepler-Potenzial (siehe (6.17)) wird hier auf beliebige Potenzpotenziale verallgemeinert. Gegeben sei das kugelsymmetrische Potenzial

$$V(r) = \alpha r^\beta \quad (6.173)$$

mit zunächst beliebigen reellen Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ .

- (a) Wie lautet das effektive Potenzial  $U(r)$ , das in (3.54) definiert wurde? Unter welchen Umständen existiert für dieses Potenzial eine stabile Gleichgewichtslage  $r_0$ ?  
 (b) Entwickeln Sie das effektive Potenzial um seine Gleichgewichtslage für die in Teilaufgabe (a) ermittelten möglichen Werte der Parameter. Verwenden Sie dazu die Variable  $x = r - r_0$  und gehen Sie bis zur zweiten Ordnung in  $x$ . Zeigen Sie, dass sich das Ergebnis in der Gestalt

$$U(x) = \frac{1}{2} \frac{(\beta+2)L^2}{\mu r_0^4} x^2 \quad (6.174)$$

schreiben lässt.

- (c) Wie lautet die Oszillationsfrequenz der Punktmasse in dem Potenzial (6.174)? Drücken Sie die Umlauffrequenz ebenfalls durch  $L$ ,  $\mu$  und  $r_0$  aus. Bestimmen Sie das Verhältnis dieser Frequenzen und zeigen Sie, dass es lediglich von  $\beta$  abhängt. Was bedeutet das Ergebnis für das Potenzial eines harmonischen Oszillators ( $\beta = 2$ )?

## 6.3 •• Schwebung

Gl. (6.124) beschreibt die Bewegung eines Doppelpendels.

- (a) Betrachten Sie die Anfangsbedingungen, bei denen das erste Pendel maximal ausgelenkt ist und das zweite sich am tiefsten Punkt befindet. Die Anfangsgeschwindigkeiten beider Pendel seien null. Wie lauten dann die Bahnkurven für die beiden Pendel?  
 (b) Die Bahnkurven liegen noch als Überlagerung zweier Kosinusfunktionen vor. Formen Sie jeweils die Summe in ein Produkt von trigonometrischen Funktionen um.  
 (c) Die resultierenden Gleichungen beschreiben eine *Schwebung*. Setzen Sie dazu die Oszillationsfrequenzen ein und gehen Sie vom Fall einer schwachen Kopplung der Oszillatoren aus ( $D/m \ll g/l$ ). Skizzieren Sie die Bewegungen der beiden Massen.  
 (d) Was bedeutet diese Bewegung für die Energiebilanz?

### Lösungshinweis:

- (b) Verwenden Sie geeignete trigonometrische Additionstheoreme.

## 6.4 •• Kritische Dämpfung

Es ist die zweite Fundamentallösung (6.47) für die kritische Dämpfung,

$$x_2 = te^{-\lambda_1 t}, \quad (6.175)$$

als Grenzfall aus der schwachen Dämpfung abzuleiten. Betrachten Sie dazu die allgemeine Lösung (6.40) der schwachen Dämpfung:

$$x(t) = e^{-\lambda_1 t} [C_1 \sin(\tilde{\omega}t) + C_2 \cos(\tilde{\omega}t)]. \quad (6.176)$$

Wählen Sie die Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$ . Wie lautet die Bahnkurve? Führen Sie den Grenzfall  $\tilde{\omega} \rightarrow 0$  durch und zeigen Sie damit (6.175).

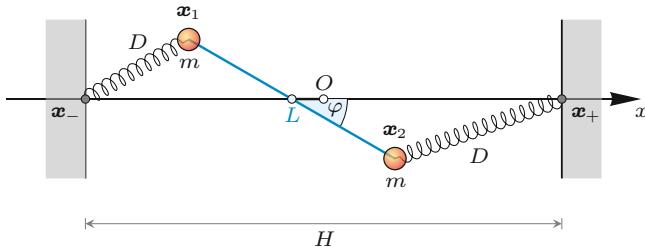
**Lösungshinweis:** Denken Sie an die Regel von L'Hospital aus der Analysis.

**6.5 •• Drehbar gekoppelte Oszillatoren** Zwei Punktmassen  $m$  sind mit einer masselosen Stange der Länge  $L$  miteinander verbunden (Abb. 6.14). Beide Massen sind außerdem noch über eine Feder (Federkonstante  $D$ , Gleichgewichtslänge  $l$ ) an je einer Wand befestigt. Der Abstand der Wände ist  $H$ , und die Fixpunkte der Federn sind auf der  $x$ -Achse an den Orten  $x_{\pm} = \pm H/2$ . Die Massen dürfen sich so bewegen, dass sich ihr gemeinsamer Mittelpunkt entlang der  $x$ -Achse, aber nicht entlang der  $y$ -Achse verschieben kann. Außerdem ist die Stange in der  $x$ - $y$ -Ebene drehbar. Gravitationskräfte sind zu vernachlässigen.

- (a) Führen Sie  $x$  und  $\varphi$  als unabhängige generalisierte Koordinaten ein, wobei  $x$  die Verschiebung der Stange entlang der  $x$ -Achse und  $\varphi$  der Drehwinkel der Stange ist. Im Gleichgewicht soll  $x = 0$  und  $\varphi = 0$  gelten. Wie lauten die kinetische und die potenzielle Energie des Systems?
- (b) Entwickeln Sie beide Energien, sodass sie höchstens quadratisch in den Koordinaten  $x$  und  $\varphi$  sind. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$V \approx \frac{D}{2} \left[ 2x^2 + LH \left( \frac{1}{2} - \frac{l}{H-L} \right) \varphi^2 \right]. \quad (6.177)$$

- (c) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtskonfiguration  $(x, \varphi) = (0, 0)$  nur dann stabil ist, wenn  $l < (H - L)/2$  gilt. Wie ist dies anschaulich zu begründen?
- (d) Stellen Sie die Matrizen  $T_{ij}$  und  $V_{ij}$  auf. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Problems. Letztere müssen nicht normiert werden. Welche physikalische Bedeutung haben die Normalkoordinaten?



**Abb. 6.14** Gekoppelte Oszillatoren. Zwei Punktmassen  $m$  sind über eine masselose Stange der Länge  $L$  verbunden. Die beiden Punktmassen sind über Federn der Stärke  $D$  an den Wänden befestigt. Das Pendel hat einen Rotationsfreiheitsgrad  $\varphi$  (in der  $x$ - $y$ -Ebene) und einen Translationsfreiheitsgrad  $x$  bezüglich des Ursprungs  $O$ .

**Lösungshinweis:** Entwickeln Sie bei der potenziellen Energie zuerst die Terme innerhalb der Wurzeln, dann die Wurzeln selbst.

**6.6 •• Kreisförmig gekoppelte Oszillatoren** Man betrachte drei identische Punktmassen  $m$ , die sich auf einem Kreisring mit Radius  $R$  bewegen können (dies entspricht einer linearen Kette mit periodischen Randbedingungen). Jede Masse ist jeweils mit ihren beiden Nachbarn durch identische Federn mit Federkonstante  $D$  gekoppelt. Nehmen Sie für das Potenzial einer Feder, welche die Massen  $m_i$  und  $m_j$  verbindet, die Form

$$V = \frac{D}{2} (\phi_i - \phi_j)^2 \quad (6.178)$$

an, wobei die drei Freiheitsgrade  $\phi_i$  die Winkel der Punktmassen bezüglich eines beliebigen Referenzpunktes auf dem Kreis sind.

Stellen Sie die dynamischen Matrizen  $T$  und  $V$  auf und lösen Sie das dadurch definierte Eigenwertproblem. Berechnen Sie die drei Eigenvektoren (sie müssen nicht normiert werden) und interpretieren Sie das Ergebnis.

**Lösungshinweis:** Um die charakteristische Gleichung zu lösen, sollten Sie zuvor das charakteristische Polynom faktorisieren.

**6.7 • Kräfte auf gekoppelte Oszillatoren** Bei der Diskussion kleiner Schwingungen gekoppelter Systeme in Abschn. 6.4 wurden bisher nur Kräfte berücksichtigt, die sich aus dem gegebenen Potenzial ableiten lassen. Angenommen jeder Freiheitsgrad  $\xi_i$  erfährt zusätzlich eine generalisierte äußere Kraft  $Q_i$  (egal, ob aus einem Potenzial ableitbar oder nicht), wie gehen diese dann in die entkoppelten Gleichungen für die Normalkoordinaten  $\xi'_i$  ein? Verwenden Sie dazu die Matrizen  $A$  und  $B$  aus (6.93).

**6.8 • Lineare Kette mit eingespannten Enden** Im Gegensatz zur linearen Kette mit periodischen Randbedingungen in Abschn. 6.5 betrachten wir eine Kette der Länge  $N + 2$  mit zwei eingespannten Enden. Dies bedeutet, dass

$$A_0 = A_{N+1} = 0 \quad (6.179)$$

gilt. Welche Schwingungsform hat dies zur Folge?

**Lösungshinweis:** Verfolgen Sie statt (6.149) den Ansatz

$$A_j = c^j A_+ + c^{-j} A_- \quad (A_+, A_- \neq 0) \quad (6.180)$$

mit Konstanten  $A_+$  und  $A_-$  und schreiben Sie  $c$  in der Form  $e^{ika}$ .

# Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

## 6.1

(a) Die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion lautet

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}. \quad (6.181)$$

Ersetzt man  $x$  durch  $ix$ , sind alle ungeraden Potenzen von  $ix$  imaginär und alle geraden Potenzen reell. Daher ist

$$e^{ix} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad (6.182)$$

wobei die erste Summe reell, die zweite imaginär ist. Ein Vergleich mit Aufgabe 1.7 zeigt, dass diese beiden Summen gerade den Entwicklungen von Kosinus und Sinus entsprechen:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2j}}{(2j)!} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} = \cos x, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2j+1}}{(2j+1)!} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} = i \sin x. \end{aligned} \quad (6.183)$$

Daraus folgt (6.170). Um (6.171) zu zeigen, nutzen wir aus, dass  $\cos x$  symmetrisch,  $\sin x$  antisymmetrisch unter der Spiegelung  $x \rightarrow -x$  ist. Wir schreiben zunächst

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (6.184)$$

und sehen dann unmittelbar:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x, \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x. \quad (6.185)$$

Auflösen nach  $\cos x$  bzw.  $\sin x$  führt auf (6.171).

(b) Um (6.172) abzuleiten, schreibt man den Kosinus zunächst mithilfe der komplexen Exponentialfunktion (6.171):

$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ &= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{4} + \frac{e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{4} \\ &= \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \end{aligned} \quad (6.186)$$

Durch einfaches Umsortieren folgt also die Behauptung.

## 6.2

(a) Das effektive Potenzial für radialsymmetrische Probleme mit Drehimpulserhaltung lautet hier

$$U(r) = \alpha r^\beta + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad (6.187)$$

wobei  $L$  der konstante Bahndrehimpuls und  $\mu$  die reduzierte Masse ist.

Ein stabiles Gleichgewicht existiert, wenn  $U(r)$  ein lokales Minimum besitzt. Wir berechnen die erste Ableitung:

$$U'(r) = \alpha \beta r^{\beta-1} - \frac{L^2}{\mu r^3}. \quad (6.188)$$

Aus  $U'(r_0) = 0$  folgt die Lage möglicher Extrema:

$$r_0^{\beta+2} = \frac{L^2}{\alpha \beta \mu}. \quad (6.189)$$

Wir fordern also neben  $\alpha \neq 0$  und  $\beta \neq 0$  (was auf verschwindende oder konstante Potenziale führen würde) noch  $\alpha \beta > 0$ , da  $r_0$  positiv sein soll. Die zweite Ableitung lautet

$$U''(r) = \alpha \beta (\beta - 1) r^{\beta-2} + \frac{3L^2}{\mu r^4}. \quad (6.190)$$

Existiert ein lokales Minimum, so muss  $U''(r_0) > 0$  gelten:

$$\alpha \beta (\beta - 1) r_0^{\beta+2} + \frac{3L^2}{\mu} > 0 \implies \beta > -2. \quad (6.191)$$

Im letzten Schritt wurde (6.189) verwendet. Sowohl für das Kepler- bzw. Coulomb-Potenzial ( $\beta = -1$ ) als auch das harmonische Oszillatorenpotenzial ( $\beta = 2$ ) findet man also stabile Gleichgewichte (jedenfalls dann, wenn  $\alpha \beta > 0$  erfüllt ist).

(b) Die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung lautet

$$U(r_0 + r) = U(r_0) + U'(r_0)r + \frac{1}{2} U''(r_0)r^2. \quad (6.192)$$

Den konstanten Term unterschlagen wir, da er die Dynamik nicht beeinflusst. Die erste Ordnung verschwindet, da  $r_0$  die Gleichgewichtslage ist. Es verbleibt

$$U(r) = \frac{1}{2} \frac{(\beta + 2)L^2}{\mu r_0^4} r^2. \quad (6.193)$$

Aus Gründen der Übersicht ersetzen wir nicht den Term  $r_0^4$  im Nenner. Dies wäre mithilfe von (6.189) aber problemlos möglich.

- (c) Wir wissen, dass für ein quadratisches Potenzial der Form  $V(x) = Dx^2/2$  die Oszillationsfrequenz gerade durch  $\omega^2 = D/m$  gegeben ist, wobei  $m$  die Masse des Oszillators ist. Auf das vorliegende Problem angewandt erhält man analog

$$\omega = \sqrt{\beta + 2} \frac{L}{\mu r_0^2}. \quad (6.194)$$

Die Umlauffrequenz ist

$$\omega_U = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r_0}, \quad (6.195)$$

wobei wir in guter Näherung annehmen können, dass die Bahngeschwindigkeit  $v$  konstant ist, wenn  $x$  klein ist. Es ist

$$v = \frac{L}{\mu r_0}; \quad (6.196)$$

also gilt

$$\omega_U = \frac{L}{\mu r_0^2}. \quad (6.197)$$

Somit ist das Verhältnis der Frequenzen

$$\frac{\omega}{\omega_U} = \sqrt{\beta + 2}. \quad (6.198)$$

Für  $\beta = -1$  hatten wir in (6.24) bereits  $\omega/\omega_U = 1$  gefunden. Der harmonische Oszillator führt mit  $\beta = 2$  stattdessen auf  $\omega/\omega_U = 2$ , d. h., man beobachtet zwei radiale Schwingungen pro Umlauf.

### 6.3

- (a) Aus (6.124) folgen die Geschwindigkeiten

$$\dot{x} = -\mathbf{a}_1 \omega_1 C_1 \sin(\omega_1 t - \delta_1) - \mathbf{a}_2 \omega_2 C_2 \sin(\omega_2 t - \delta_2), \quad (6.199)$$

wobei wir zur Abkürzung  $\omega_1 = \omega_{1,0}$  und  $\omega_2 = \omega_{2,0}$  schreiben. Der Vektor  $\mathbf{x}$  fasst dabei die beiden Freiheitsgrade  $x_1$  und  $x_2$  zusammen, die in diesem Fall den Auslenkungswinkel der beiden Pendel entspricht. Damit die Geschwindigkeiten bei  $t = 0$  verschwinden, muss zunächst  $\delta_1 = 0$  und  $\delta_2 = 0$  gelten. Weiterhin soll die Anfangsposition der ersten Masse  $A$ , die der zweiten Masse 0 sein. Mithilfe von (6.123) ist

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \frac{1}{l\sqrt{2m}} C_1 + \frac{1}{l\sqrt{2m}} C_2 = A, \\ x_2(0) &= \frac{1}{l\sqrt{2m}} C_1 - \frac{1}{l\sqrt{2m}} C_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.200)$$

Es muss also  $C_1 = C_2$  gelten und schließlich

$$C_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} lA. \quad (6.201)$$

- (b) Die Bahnkurven der beiden Massen lauten

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ &= A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right), \\ x_2 &= \frac{A}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \\ &= A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right). \end{aligned} \quad (6.202)$$

Für die Umformungen wurden

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (6.203)$$

und

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (6.204)$$

verwendet. Man sieht bereits, dass sowohl die Summe als auch die Differenz der Oszillationsfrequenzen wichtige Rollen spielen.

- (c) Die Oszillationsfrequenzen (6.119) sind

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{g}{l}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{D}{m}} \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{Dl}{mg}\right), \end{aligned} \quad (6.205)$$

wenn  $Dl \ll mg$  ist. Somit ist die Differenz

$$\omega_2 - \omega_1 \approx \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{D}{m} \quad (6.206)$$

sehr viel kleiner als die Summe

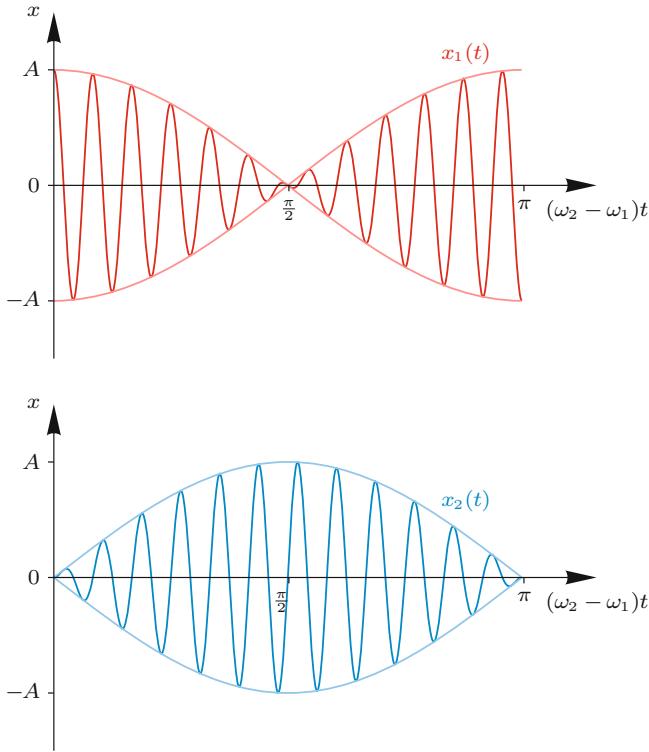
$$\omega_2 + \omega_1 \approx 2 \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (6.207)$$

Die Bewegungen von  $x_1$  und  $x_2$  sind folgendermaßen charakterisiert: Die Pendel schwingen mit einer Frequenz  $\omega_2 + \omega_1$ , wobei die Schwingungsamplitude durch eine langsame Oszillation mit  $\omega_2 - \omega_1$  moduliert ist. Dies ist in Abb. 6.15 an einem Beispiel dargestellt.

- (d) Die beiden Pendel tauschen im Laufe der Zeit Energie miteinander aus. Zu Beginn ist die Schwingungsamplitude des ersten Pendels maximal, die des zweiten null. Der Energietausch ist periodisch. Nach der Zeit  $\pi/[2(\omega_2 - \omega_1)]$  ist die Energie vollständig auf das zweite Pendel übergegangen.

- 6.4** Mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$  folgen aus (6.176) die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{v_0}{\tilde{\omega}}, \quad C_2 = 0. \quad (6.208)$$



**Abb. 6.15** Auslenkungen der ersten (rot, oben) und der zweiten (blau, unten) der beiden gekoppelten Punktmassen aus Aufgabe 6.3. Während die Schwingung selbst mit hoher Frequenz stattfindet, ändert sich die Amplitude derart, dass langsam zunächst Energie vom ersten auf das zweite Pendel und später wieder auf das erste Pendel übertragen wird

Somit lautet die Bahnkurve

$$x(t) = v_0 t e^{-\lambda t} \frac{\sin(\tilde{\omega}t)}{\tilde{\omega}}, \quad (6.209)$$

wobei mit  $t$  erweitert wurde. Der Grenzfall  $\tilde{\omega} \rightarrow 0$  lässt sich mit der *Regel von L'Hospital* leicht durchführen:

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} \frac{\sin(\tilde{\omega}t)}{\tilde{\omega}t} &= \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} \frac{d \sin(\tilde{\omega}t)/d(\tilde{\omega}t)}{d(\tilde{\omega}t)/d(\tilde{\omega}t)} \\ &= \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} \cos(\tilde{\omega}t) = 1. \end{aligned} \quad (6.210)$$

Für  $\tilde{\omega} \rightarrow 0$  ist also

$$x(t) = v_0 t e^{-\lambda t} \quad (6.211)$$

und somit (6.175) eine Fundamentallösung.

## 6.5

(a) Die kinetische Energie in kartesischen Koordinaten lautet

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2). \quad (6.212)$$

Für die potentielle Energie findet man

$$V = \frac{D}{2} [(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_-| - l)^2 + (|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_+| - l)^2]. \quad (6.213)$$

Die Koordinaten der Punktmassen sind

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{L}{2} \cos \varphi \\ \frac{L}{2} \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{L}{2} \cos \varphi \\ -\frac{L}{2} \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.214)$$

Die Koordinaten der Fixpunkte der Federn sind

$$\mathbf{x}_\pm = \begin{pmatrix} \pm \frac{H}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.215)$$

Die kinetische Energie, ausgedrückt durch  $x$  und  $\varphi$ , erhält man nach kurzer Rechnung:

$$T = \frac{m}{2} \left( 2\dot{x}^2 + \frac{L^2}{2}\dot{\varphi}^2 \right). \quad (6.216)$$

Der erste Term ist der Beitrag der Schwerpunktbewegung, der zweite ist der Beitrag durch die Ablenkung der Punktmassen von der  $x$ -Achse weg. Die potentielle Energie erfordert mehr Aufwand:

$$\begin{aligned} V &= \frac{D}{2} \left( \sqrt{x^2 + xH - L \left( \frac{H}{2} + x \right) \cos \varphi + \frac{L^2 + H^2}{4}} - l \right)^2 \\ &\quad + \frac{D}{2} \\ &\quad \cdot \left( \sqrt{x^2 - xH - L \left( \frac{H}{2} - x \right) \cos \varphi + \frac{L^2 + H^2}{4}} - l \right)^2. \end{aligned} \quad (6.217)$$

- (b) Die kinetische Energie ist bereits in der gewünschten Form. Sie muss nicht entwickelt werden. Die potentielle Energie lässt sich in mehreren Schritten vereinfachen. Innerhalb der Wurzel dürfen die Koordinaten höchstens quadratisch vorkommen, da wir uns auf eine kleine Schwingung beschränken. Man kann daher den Kosinus durch  $1 - \varphi^2/2$  ersetzen. Die Terme  $x\varphi^2$  können vernachlässigt werden. Die restlichen Terme lassen sich sortieren und zusammenfassen. Durch mehrfache Anwendung der binomischen Formeln folgt

$$\begin{aligned} V &\approx \frac{D}{2} \left( \sqrt{\left( x + \frac{H-L}{2} \right)^2 + \frac{LH}{4}\varphi^2} - l \right)^2 \\ &\quad + \frac{D}{2} \left( \sqrt{\left( x + \frac{L-H}{2} \right)^2 + \frac{LH}{4}\varphi^2} - l \right)^2. \end{aligned} \quad (6.218)$$

Wir müssen nun die Wurzeln entwickeln. Zur Abkürzung schreiben wir

$$\alpha = \sqrt{\left(x + \frac{H-L}{2}\right)^2 + \frac{LH}{4}\varphi^2}, \quad (6.219)$$

$$\beta = \sqrt{\left(x + \frac{L-H}{2}\right)^2 + \frac{LH}{4}\varphi^2}.$$

Zunächst ist

$$V \approx \frac{D}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + 2l^2 - 2l(\alpha + \beta)) \quad (6.220)$$

$$= \frac{D}{2} \left( 2x^2 + \frac{(H-L)^2}{2} + \frac{LH}{2}\varphi^2 + 2l^2 - 2l(\alpha + \beta) \right).$$

Hier sind – mit Ausnahme von  $\alpha$  und  $\beta$  – bereits alle Terme entweder konstant oder quadratisch in den Koordinaten. Wir müssen daher noch  $\alpha$  und  $\beta$  entwickeln. Da sich beide nur durch ein Vorzeichen unterscheiden, betrachten wir im Folgenden erst nur  $\alpha$ . Um die zweiten Ableitungen zu berechnen, notieren wir zunächst die ersten Ableitungen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \left(x + \frac{H-L}{2}\right) \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{LH}{4}\varphi \frac{1}{\alpha}. \quad (6.221)$$

Daraus folgen die zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial x} &= \frac{1}{\alpha} - \left(x + \frac{H-L}{2}\right)^2 \frac{1}{\alpha^3}, \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi \partial \varphi} &= \frac{LH}{4} \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{LH}{4}\varphi\right)^2 \frac{1}{\alpha^3}, \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial \varphi} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi \partial x} = -\left(x + \frac{H-L}{2}\right) \frac{LH}{4}\varphi \frac{1}{\alpha^3}. \end{aligned} \quad (6.222)$$

Sie sind für  $(x, \varphi) = (0, 0)$  auszuwerten. Mit

$$\alpha(x=0, \varphi=0) = \frac{|H-L|}{2} \quad (6.223)$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial x} \Big|_0 &= 0, \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi \partial \varphi} \Big|_0 &= \frac{1}{2} \frac{LH}{H-L}, \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial \varphi} \Big|_0 &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi \partial x} \Big|_0 = 0. \end{aligned} \quad (6.224)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass für  $\beta$  dieselben Ergebnisse wie (6.224) folgen. Damit ist das Potenzial, wenn konstante Terme vernachlässigt werden:

$$V \approx \frac{D}{2} \left[ 2x^2 + LH \left( \frac{1}{2} - \frac{l}{H-L} \right) \varphi^2 \right]. \quad (6.225)$$

Dies ist die gesuchte Näherung (6.177).

(c) Das Gleichgewicht ist nur dann stabil, wenn der Punkt  $(x, \varphi) = (0, 0)$  ein lokales Minimum des Potenzials ist. Dies ist wegen  $2 > 0$  für die  $x$ -Koordinate der Fall. Für  $\varphi$  ist dies nur erfüllt, wenn

$$LH \left( \frac{1}{2} - \frac{l}{H-L} \right) > 0 \quad (6.226)$$

gilt. Dies führt direkt auf  $l < (H-L)/2$ . Anschaulich bedeutet dies, dass die Gleichgewichtslänge der Federn kürzer sein muss als der Abstand der Punktmassen zu den Wänden. So ziehen sich die Federn zusammen und die Massen mit sich, also in Richtung der Wände. Damit bevorzugt der Stab  $\varphi = 0$ . Ist  $l$  größer, dehnen sich die Federn aus. Eine kleine Störung würde dann dazu führen, dass sich der Stab dreht und eine Gleichgewichtskonfiguration mit  $\varphi' \neq 0$  anstrebt. Davon gibt es aufgrund der Symmetrie allerdings zwei, d. h.,  $+\varphi'$  und  $-\varphi'$  sind möglich.

(d) Die Matrizen lauten

$$\mathbf{T} = m \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = D \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & LH \left( \frac{1}{2} - \frac{l}{H-L} \right) \end{pmatrix}. \quad (6.227)$$

Das Problem ist offensichtlich bereits diagonal. Die Eigenwerte folgen nach kurzer Rechnung aus  $\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T}$  und (6.105):

$$\lambda_1 = \frac{D}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{2DH}{mL} \left( \frac{1}{2} - \frac{l}{H-L} \right). \quad (6.228)$$

Die (nichtnormierten) Eigenvektoren sind offenbar  $(1, 0)^\top$  und  $(0, 1)^\top$ . Der erste beschreibt die Schwingung des Stabes entlang der  $x$ -Achse, der zweite die Rotationsoszillation um die neutrale Orientierung  $\varphi = 0$ . Anzumerken ist noch, dass der zweite Eigenwert verschwindet, wenn die Ruhelänge der Federn genau  $l = (H-L)/2$  ist. Anschaulich bedeutet dies, dass dann eine Winkelabsenkung keine Rückstellkraft erzeugt, da – gemäß der Entwicklung bis zur zweiten Ordnung – die Federlänge dabei unverändert bleibt.

## 6.6 Die kinetische und potentielle Energie lauten einfach

$$\begin{aligned} T &= \frac{mR^2}{2} (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2), \\ V &= \frac{D}{2} [(\phi_1 - \phi_2)^2 + (\phi_2 - \phi_3)^2 + (\phi_3 - \phi_1)^2]. \end{aligned} \quad (6.229)$$

Beide müssen nicht entwickelt werden, und die entsprechenden Matrizen sind

$$\mathbf{T} = mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = D \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (6.230)$$

Die Eigenwertgleichung lautet demnach

$$\det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T}) = \begin{vmatrix} 2D - \lambda mR^2 & -D & -D \\ -D & 2D - \lambda mR^2 & -D \\ -D & -D & 2D - \lambda mR^2 \end{vmatrix}. \quad (6.231)$$

Zur Vereinfachung definieren wir  $A := 2D - \lambda mR^2$  und berechnen die Determinante (mit einer Entwicklung nach der ersten Spalte bzw. Zeile)

$$\begin{aligned}\det(V - \lambda T) &= \begin{vmatrix} A & -D & -D \\ -D & A & -D \\ -D & -D & A \end{vmatrix} \\ &= A(A^2 - D^2) + D(-AD - D^2) - D(D^2 + AD) \\ &= (A + D)[A(A - D) - 2D^2].\end{aligned}\quad (6.232)$$

Alternativ hätte man die Regel von Sarrus (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 2.2) verwenden können. Im letzten Schritt wurde die dritte binomische Formel  $A^2 - D^2 = (A + D)(A - D)$  ausgenutzt und der gemeinsame Faktor  $(A + D)$  ausgeklammert. Die erste Lösung von  $\det(V - \lambda T) = 0$  sieht man sofort:

$$A_1 = -D.\quad (6.233)$$

Die beiden anderen folgen nach kurzer Rechnung aus der verbleibenden quadratischen Gleichung:

$$A_2 = -D, \quad A_3 = 2D.\quad (6.234)$$

Es muss nun noch die Lösung für die Eigenwerte  $\lambda$  gefunden werden. Sie erhält man aus  $A = 2D - \lambda mR^2$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{3D}{mR^2}, \quad \lambda_3 = 0.\quad (6.235)$$

Wir haben es also mit zwei entarteten und einem verschwindenden Eigenwert zu tun.

Beginnen wir mit  $\lambda_3$ . Die Eigenwertgleichung ist dann

$$D \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\quad (6.236)$$

Diese Vektorgleichung wird durch Vielfache von  $a_3 = (1, 1, 1)^\top$  gelöst, was der gleichförmigen Drehung aller Punktmasse entlang des Kreisrings entspricht. Dabei drehen sich alle Punktmasse mit derselben Geschwindigkeit in dieselbe Richtung. Es handelt sich um eine Translationsmode und keine Schwingungsmoden.

Für  $\lambda_{1,2}$  ergibt sich die Situation

$$D \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (6.237)$$

und entsprechend für  $a_2$ . Aufgrund der Entartung sind nun zwei bezüglich  $T$  orthogonale Vektoren  $a_1$  und  $a_2$  zu konstruieren. Wir beginnen willkürlich mit  $a_1 = (1, -1, 0)^\top$ , was offensichtlich der Eigenwertgleichung genügt.

Da  $T$  ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist, entspricht die Orthogonalitätsbedingung der üblichen im kartesischen Raum. Man überprüft leicht, dass  $a_2 = (1, 1, -2)^\top$  sowohl die Eigenwertgleichung erfüllt als auch orthogonal auf  $a_1$  steht.

Die Mode  $a_1$  entspricht einer ruhenden dritten Punktmasse, während die beiden übrigen mit identischer Amplitude gegeneinander schwingen. Dagegen schwingen in der Mode  $a_2$  die beiden ersten Punktmassen zusammen gegen die dritte, deren Amplitude doppelt so groß ist. Die Lösungen sind symmetrisch unter paarweiser Vertauschung beliebiger Punktmassen.

**6.7** Wir schreiben zur besseren Übersicht zunächst die Ausgangsgleichungen (6.84)

$$T\ddot{\xi} + V\xi = Q\quad (6.238)$$

mit  $Q = (Q_1, \dots, Q_F)^\top$  und die Zielgleichungen (6.100)

$$\ddot{\xi}'_i + \lambda_i \xi'_i = Q'_i \quad (1 \leq i \leq F),\quad (6.239)$$

wobei die  $Q'_i$  zu identifizieren sind. Multiplikation von (6.238) mit  $A^\top$  von links führt wegen  $T = B^\top B$  und  $A = B^{-1}$  auf

$$B\ddot{\xi} + A^\top V\xi = A^\top Q.\quad (6.240)$$

Wir ersetzen nun die alten Koordinaten durch die Normalkoordinaten und verwenden dafür  $\xi = A\xi'$ :

$$\ddot{\xi}' + A^\top VA\xi' = A^\top Q.\quad (6.241)$$

Wegen  $A^\top VA = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_F)$  folgt sofort

$$\ddot{\xi}'_i + \lambda_i \xi'_i = \sum_{j=1}^f A_{ji} Q_j \quad (1 \leq i \leq F).\quad (6.242)$$

Damit haben wir den Zusammenhang zwischen  $Q$  und  $Q'$  gefunden:

$$Q' = A^\top Q, \quad Q = B^\top Q'.\quad (6.243)$$

Die Kräfte, die auf die Normalkoordinaten  $\xi'$  wirken, sind Linearkombinationen (vermittelt durch  $A$ ) der Kräfte, die auf die Freiheitsgrade  $\xi$  ausgeübt werden. Die  $F$  entkoppelten Gleichungen (6.242) können mit den bekannten Methoden gelöst werden.

**6.8** Zunächst wendet man den Ansatz (6.180) auf  $A_0$  und  $A_{N+1}$  an:

$$A_0 = A_+ + A_- = 0, \quad A_{N+1} = c^{N+1} A_+ + c^{-(N+1)} A_- = 0.\quad (6.244)$$

Hieraus folgt neben  $A = A_+ = -A_-$  die Bedingung

$$c^{2(N+1)} = 1 \implies c = e^{\pi i n / (N+1)} \quad (n \in \mathbb{Z}).\quad (6.245)$$

Die Wellenzahl ist in diesem Fall

$$k = \frac{\pi n}{(N+1)a} \quad (n \in \mathbb{Z}).\quad (6.246)$$

Es gibt jeweils unendlich viele Wellenzahlen  $k$ , die auf dieselbe Welle führen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit fordern wir daher  $0 \leq n < N + 1$ . Aus (6.180) folgt

$$A_j = A (e^{ikaj} - e^{-ikaj}) = 2iA \sin(kaj). \quad (6.247)$$

Dies entspricht einer stehenden Welle mit je einem Knoten an jedem Ende der Kette. Die allgemeine Lösung ist eine Überlagerung dieser Wellen, wobei  $k$  aus (6.246) gewählt werden muss. In Kap. 8 kommen wir darauf im Detail zu sprechen.

# Hamilton-Formalismus

7

Kapitel 7



Welche Bedeutung hat die Hamilton-Funktion in der Physik?

Warum sind die kanonischen Gleichungen äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen?

Welche Eigenschaften haben kanonische Transformationen?

Was hat die Hamilton-Jacobi-Theorie der klassischen Mechanik mit der Quantenmechanik zu tun?

7.1	Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen	244
7.2	Kanonische Transformationen	249
7.3	Grundlagen der Hamilton-Jacobi-Theorie	254
	So geht's weiter	259
	Aufgaben	262
	Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben	264
	Literatur	269

Bereits in Abschn. 5.3 wurde die *Hamilton-Funktion* eingeführt; sie spielte bisher aber keine zentrale Rolle in der Mechanik. Dies ändert sich hier nun grundlegend. Es wird in Abschn. 7.1 gezeigt, dass man – auf der Hamilton-Funktion aufbauend – einen weiteren Zugang zu mechanischen Problemen einschlagen kann, der sich vom Aufstellen der Newton'schen Bewegungsgleichungen und auch vom Lagrange-Formalismus unterscheidet. Als Ergebnis finden wir die kanonischen Bewegungsgleichungen.

Wir werden in Abschn. 7.2 sehen, dass Koordinaten und Impulse in der Hamilton'schen Mechanik gleichberechtigt sind und sogar ineinander transformiert werden können. Die sogenannten kanonischen Transformationen erlauben eine Vereinfachung der Bewegungsgleichungen.

Obwohl die hier vorgeführten Methoden keine wesentlichen rechnerischen Vereinfachungen für das Lösen mechanischer Probleme mit sich bringen, so ist dieses Kapitel doch von entscheidender Bedeutung für die weiteren Bände. Insbesondere die Quantenmechanik baut auf der Hamilton-Jacobi-Theorie auf, die in Abschn. 7.3 angesprochen wird. Auch die statistische Physik und die Theorie chaotischer Systeme profitieren von einer Formulierung ausgehend vom Hamilton-Formalismus.

Wie die Hamilton-Funktion die Entwicklung physikalischer Systeme im sogenannten Phasenraum bestimmt, wird im Kasten „Vertiefung: Phasenfluss und Liouville'scher Satz“ in Bd. 4, Abschn. 2.1 wieder aufgegriffen.

## 7.1 Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen

In diesem Abschnitt wird eine Einführung in den Hamilton-Formalismus gegeben. Anstelle der Lagrange-Funktion steht die Hamilton-Funktion im Mittelpunkt. Sie kann mittels einer Legendre-Transformation aus der Lagrange-Funktion gewonnen werden. Die zu den Lagrange-Gleichungen äquivalenten kanonischen Gleichungen lassen sich mithilfe der Poisson-Klammern in kompakter Form schreiben. Die Quantenmechanik baut in großen Teilen auf dieser Struktur auf.

### Wiederholung der Grundlagen des Lagrange-Formalismus

Betrachten wir wieder ein System mit  $f$  Freiheitsgraden. Alle eventuell herrschenden Zwangsbedingungen sollen holonom sein, sodass sich eine Lagrange-Funktion  $L$  definieren lässt. Wir haben gesehen, dass sich Probleme dieser Art im Allgemeinen elegant mithilfe der Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq f) \quad (7.1)$$

beschreiben lassen, wobei die  $f$  Parameter  $q_i$  geeignete generalisierte Koordinaten sind, mit deren Hilfe alle holonen Zwangsbedingungen eliminiert wurden. Die Gleichungen in (7.1) sind  $f$  Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, deren vollständige Lösung  $2f$  Integrationskonstanten (z. B. in Form von Anfangsbedingungen) erfordert. Im Lagrange-Formalismus betrachtet man den  $f$ -dimensionalen *Konfigurationsraum*, der von den  $f$  verallgemeinerten Koordinaten  $q_i$  aufgespannt wird, sowie die  $f$  verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$ .

Die *verallgemeinerten Impulse*, *generalisierten Impulse* oder *kanonisch konjugierten Impulse* sind bei gegebener Lagrange-Funktion  $L$  definiert als (5.87)

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (7.2)$$

Man beachte, dass  $p_i$  im Allgemeinen nicht die Dimension eines Impulses besitzt. Allerdings hat das Produkt  $q_i p_i$  stets die Dimension einer Wirkung (Energie mal Zeit), was sich unmittelbar an (7.2) ablesen lässt.

### Die kanonischen Gleichungen

Im Hamilton-Formalismus werden die Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  durch die Impulse  $p_i$  ersetzt. Dazu wird die aus (7.2) folgende Relation umgekehrt:

$$p_i = p_i(t, q, \dot{q}) \implies \dot{q}_i = \dot{q}_i(t, q, p). \quad (7.3)$$

Wir verstehen unter  $q$ ,  $\dot{q}$  und  $p$  wieder die Kurzform für alle  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  und  $p_i$  ( $1 \leq i \leq f$ ).

**Achtung** Ist die Funktion  $p_i = p_i(\dot{q}_i)$  nicht monoton, so muss man  $p_i$  als abschnittsweise monotone Funktion definieren und dann in jedem Abschnitt separat umkehren. In vielen Fällen ist aber  $L$  quadratisch in  $\dot{q}_i$  und somit  $p_i$  linear in  $\dot{q}_i$ , sodass die Umkehrung keine Schwierigkeiten bereitet. ▶

Man verwendet anschließend die  $2f$  Werte  $(q, p) = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$  als Zustandsparameter des Systems.

### Phasenraum

Den von den  $2f$  Parametern  $q$  und  $p$  aufgespannten Raum nennt man *Phasenraum*. Jeder Bewegungszustand des Systems entspricht genau einem Punkt im Phasenraum  $\mathbb{R}^{2f}$ . Entsprechend lässt sich jeder Kurve im Phasenraum (auch *Trajektorie* genannt) eine Bahn im Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^f$  zuordnen.

## Harmonischer Oszillator

Die Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators mit einem kartesischen Freiheitsgrad lautet

$$L(t, x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2). \quad (7.4)$$

Man berechnet zunächst den zu  $x$  kanonisch konjugierten Impuls

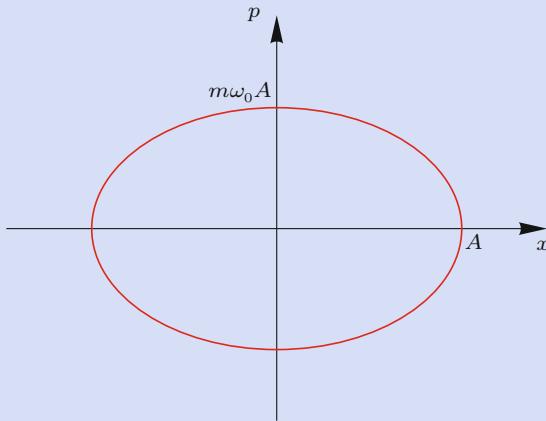
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad (7.5)$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators ist bereits bekannt. Zusammenfasst für Koordinate und Impuls lautet sie

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t - \phi_0) \\ -m\omega_0 \sin(\omega_0 t - \phi_0) \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

wobei der Phasenwinkel  $\phi_0$  wie auch die Amplitude  $A$  durch die Anfangsbedingungen festgelegt wird. Das Ergebnis ist eine Ellipse im Phasenraum (Abb. 7.1).

Machen Sie sich klar, dass (7.6) tatsächlich eine Ellipse mit Halbachsen  $A$  und  $m\omega_0 A$  beschreibt.



**Abb. 7.1** Phasenraumtrajektorie des ungedämpften, freien harmonischen Oszillators mit Schwingungsamplitude  $A$  und Impulsamplitude  $m\omega_0 A$ . Die Trajektorie ist geschlossen und läuft – je nach Anfangsbedingung – im Uhrzeiger- oder Gegenuhzeigersinn

Da die Lagrange-Gleichungen in (7.1) Ableitungen nach  $\dot{q}$  beinhalten, stellt sich die Frage, wie die Bewegungsgleichungen lauten, wenn das System durch  $(q, p)$  anstatt durch  $(q, \dot{q})$  beschrieben wird. Hier kommt die Hamilton-Funktion (5.95) zu

## 7.1 Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen

Hilfe. Sie lautet

$$H(t, q, p) = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - L(t, q, \dot{q}), \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(t, q, p). \quad (7.7)$$

Dies ist so zu verstehen, dass zwar formal  $\dot{q}$  und  $p$  gleichzeitig in  $H$  auftreten, die Geschwindigkeiten  $\dot{q}$  aber über  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t, q, p)$  eliminiert werden. Bei dem Übergang (7.7) von  $L$  nach  $H$  hat man es mit einer sogenannten *Legendre-Transformation* zu tun. Ihre Bedeutung und grundlegenden mathematischen Eigenschaften werden im „Mathematischen Hintergrund“ 7.1 näher beleuchtet.

Aufgrund ihrer Abhängigkeit von  $t, q$  und  $p$  ist das totale Differenzial der Hamilton-Funktion  $H$

$$dH = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (7.8)$$

Andererseits folgt aus (7.7) zunächst

$$dH = \sum_i \left( p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (7.9)$$

An dieser Stelle kann der konjugierte Impuls (7.2) verwendet werden, und die beiden Terme mit  $d\dot{q}_i$  heben sich gegenseitig auf. Übrig bleibt

$$dH = \sum_i \left( \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (7.10)$$

Vergleicht man (7.10) mit (7.8), folgen die Ableitungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (7.11)$$

### Frage 1

Machen Sie sich mithilfe der Lagrange-Gleichungen in (7.1) klar, dass

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (7.12)$$

gilt.

Schließlich erhält man die Hamilton'schen kanonischen Gleichungen.

### Hamilton'sche kanonische Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (1 \leq i \leq f) \quad (7.13)$$

## 7.1 Mathematischer Hintergrund: Legendre-Transformationen Grundlagen und anschauliche Bedeutung

Die *Legendre-Transformation* ist ein grundlegendes Werkzeug zur Funktionentransformation und findet zahlreiche Anwendungen in der Theorie der Differentialgleichungen und der Variationsrechnung.

**Idee und anschauliche Interpretation** Betrachten wir eine strikt konvexe und stetig differenzierbare Funktion  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Variablen (eine strikt konvexe Funktion zeichnet sich dadurch aus, dass ihre Ableitung streng monoton wachsend ist). Der Graph von  $f(x)$  ist als Menge von Punkten  $(x, f(x))$  gegeben. Alternativ kann man sich den Graphen einer konvexen Funktion als die Einhüllende aller ihrer Tangenten vorstellen, wie es in Abb. 7.2 angedeutet ist.

Ziel der Legendre-Transformation ist es nun,  $f(x)$  durch die einhüllenden Tangenten – und nicht durch  $f(x)$  selbst – zu beschreiben. Dazu führt man eine Funktion  $g(y)$  ein, wobei  $y(x) := f'(x)$  gerade die Steigung von  $f(x)$  bei  $x$  und  $g(y)$  noch zu bestimmen ist. Letztlich eliminiert man also die Variable  $x$  zugunsten von  $y$ , d.h. durch die Ableitung von  $f$  nach  $x$ .

In der Physik erlaubt dies wegen  $p = \partial L / \partial \dot{q}$  die Ersetzung der Geschwindigkeit  $\dot{q}$  in der Lagrange-Funktion  $L(\dot{q})$  durch den entsprechenden konjugierten Impuls  $p$  in der Hamilton-Funktion  $H(p)$ . In Bd. 4, Abschn. 3.1 wird die Legendre-Transformation außerdem ausgenutzt, um verschiedene thermodynamische Potenziale zu definieren. Allerdings besitzen die in der Thermodynamik auftretenden Funktionen häufig keine strikt monoton steigenden Ableitungen mehr, und man muss das Konzept der Legendre-Transformation erweitern, während die kinetische Energie  $T(\dot{q})$  in der Mechanik praktisch immer eine konvexe Funktion ist.

**Durchführung** Die *Legendre-Transformierte* der Funktion  $f(x)$  ist eine Funktion  $g(y)$ , die gegeben ist durch

$$g(y) := yx(y) - f(x(y))$$

mit  $y(x) = f'(x)$ . Die Rücktransformierte ist wieder

$$f(x) = xy(x) - g(y(x))$$

mit  $x(y) = g'(y)$ , wie in Aufgabe 7.2 gezeigt wird.

**Beispiel** Wir betrachten die Funktion  $f(x) = x^2$ . Wegen  $y(x) = f'(x) = 2x$  ist  $x(y) = y/2$ . Somit lautet die Legendre-Transformierte von  $f(x)$

$$g(y) = y\frac{x}{2} - f(x(y)) = \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{4} = \frac{y^2}{4}.$$

In diesem Spezialfall ist auch die Legendre-Transformierte eine Parabel. Weiterhin ist dann bei der Rücktransformation  $x(y) = g'(y) = y/2$  und somit  $y(x) = 2x$ . Man findet also sofort die ursprüngliche Funktion  $f(x) = 2x^2 - x^2 = x^2$ .

### Legendre-Transformation und Tangentensteigung

Die Legendre-Transformierte ordnet der Steigung einer jeden Tangente an  $f(x)$  deren (negativen)  $y$ -Achsenabschnitt zu (Abb. 7.2): Die Funktionsvorschrift einer Tangente  $t(x)$  an eine Funktion  $f(x)$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  mit Steigung  $m = f'(x_0)$  und  $y$ -Achsenabschnitt  $b$  ist

$$t(x) = mx + b \implies t(x_0) = f(x_0) = mx_0 + b.$$

Andererseits lautet die Legendre-Transformierte von  $f(x)$  gerade  $g[f'(x)] = f'(x)x - f(x)$  und speziell bei  $x = x_0$ :  $g(m) = mx_0 - f(x_0)$ . Durch Elimination von  $f(x_0)$  (erreicht durch die Kombination der Gleichungen für  $g(m)$  und  $t(x_0)$ ) folgt sofort die Behauptung  $g(m) = g[f'(x_0)] = -b$ .

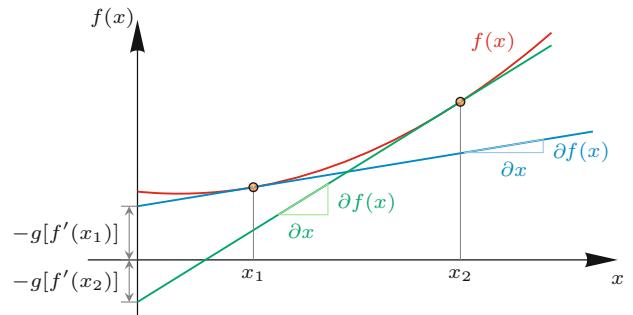


Abb. 7.2 Zur anschaulichen Bedeutung der Legendre-Transformation

**Herleitung mit vollständigem Differenzial** Wir setzen  $y = df/dx$  und schreiben das vollständige Differenzial von  $f(x)$ :

$$df = \frac{dy}{dx} dx = y dx.$$

Für das vollständige Differenzial der Transformierten  $g(y)$  fordern wir nun

$$dg = \frac{dy}{dx} dy = x dy.$$

Weiterhin ist  $d(xy) = y dx + x dy$ , und ein Vergleich liefert sofort  $dg = d(xy - f)$ , was nach einer Integration dann die Legendre-Transformation  $g(y) = yx(y) - f(x(y))$  liefert.

Je nach Zweckmäßigkeit kann man auch  $dg = -x dy$  verlangen, was auf die Transformation  $g(y) = f(x(y)) - yx(y)$  führt. Die Rücktransformierte lautet dann trotzdem wieder  $f(x)$ . Mathematisch spielt das Vorzeichen bei der Legendre-Transformation keine Rolle.

**Mehrere Parameter** Hängt eine Funktion  $f$  von mehreren unabhängigen Parametern  $x_1, \dots, x_n$  ab, so kann man jeden einzelnen Parameter  $x_i$  durch  $\partial f / \partial x_i$  ersetzen, indem man jeweils eine Legendre-Transformation mit partiellen Ableitungen durchführt.

## Literatur

- Zia, R.K.P. et al.: Making sense of the Legendre transform. Am. J. Phys. **77**, 614 (2009)

**Achtung** Wir sehen, dass die kanonischen Gleichungen in (7.13) sehr symmetrisch sind. Vertauscht man Ort und Impuls, ändert sich nur das Vorzeichen. Wir werden noch sehen, dass die Unterscheidung zwischen Ort und Impuls im Hamilton-Formalismus verschwimmt.

Das in nur der Hälfte der Gleichungen auftretende Minuszeichen führt zu einer sogenannten *symplektischen Struktur* der Hamilton'schen Gleichungen auf dem Phasenraum. Dies ist für die Liouville'sche Gleichung in der statistischen Physik von großer Bedeutung (Bd. 4, Abschn. 2.1).

Bei den kanonischen Gleichungen handelt es sich im Gegensatz zu den Lagrange-Gleichungen um  $2f$  Differentialgleichungen erster Ordnung. Beide Gleichungssysteme sind jedoch äquivalent. Eine vollständige Lösung der kanonischen Gleichungen ist möglich, wenn zu einer Zeit sämtliche Orte und Impulse bekannt sind; dies sind gerade  $2f$  Anfangsbedingungen und entspricht einem wohldefinierten Punkt im Phasenraum. Ist also ein Punkt im Phasenraum gegeben, folgt daraus die Bewegung im Phasenraum zu allen Zeiten.

### Harmonischer Oszillator

Aus der Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators (7.4) und dem kanonisch konjugierten Impuls (7.5) folgt die Hamilton-Funktion

$$H(x, p) = \dot{x}p - L(x, \dot{x}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2x^2. \quad (7.14)$$

Für  $H = E = \text{const}$  ist dies genau eine Ellipse im Phasenraum.

Die Hamilton'schen Gleichungen sind

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -m\omega_0^2x. \quad (7.15)$$

Während die erste Gleichung nichts anderes ist als die Definition des Impulses, ist die zweite die Bewegungsgleichung. Dieses Beispiel mag hier trivial erscheinen, ist aber für das weitere Verständnis hilfreich.

### Frage 2

Nehmen Sie die Lagrange-Funktion einer Punktmasse im dreidimensionalen kartesischen Raum unter Einfluss konservativer Kräfte. Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (7.16)$$

lautet und somit mit der Energie übereinstimmt. Die kanonischen Gleichungen lauten erwartungsgemäß

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\nabla V(\mathbf{x}). \quad (7.17)$$

In Aufgabe 7.1 werden die kanonischen Gleichungen für eine Punktmasse in Kugelkoordinaten für ein Zentralkraftfeld aufgestellt. Die Hamilton-Funktion und die kanonischen Gleichungen einer Punktladung im elektromagnetischen Feld werden erst in Bd. 2, Kap. 10 diskutiert.

### Vorteile des Hamilton-Formalismus

Warum ist es sinnvoll, statt  $f$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung  $2f$  Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten? Wie bereits erwähnt, ist der Hamilton-Formalismus eine fruchtbare Grundlage für die Untersuchung chaotischer Systeme (wie im Abschnitt „So geht's weiter“ am Ende des Kapitels beleuchtet) und die Quantenmechanik direkt im Hamilton-Formalismus verwurzelt.

Es gibt noch einen weiteren Vorteil. Wegen (7.11) vereinfachen zyklische Variablen (Abschn. 5.3) nicht nur im Lagrange-, sondern auch im Hamilton-Formalismus das Lösen der Bewegungsgleichungen. Zunächst erkennt man, dass eine Koordinate genau dann in  $H$  zyklisch ist, wenn sie in  $L$  zyklisch ist. Die Vereinfachung ist im Hamilton-Formalismus allerdings noch weitreichender, denn jede zyklische Koordinate  $q_i$  eliminiert eine der  $2f$  Gleichungen in (7.13), nämlich

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = 0. \quad (7.18)$$

Da  $p_i$  somit erhalten ist (d. h. keine Veränderliche mehr ist) und  $H$  nicht mehr von  $q_i$  abhängt, kann  $H$  als eine Funktion der restlichen  $f-2$  Koordinaten und Impulse angesehen werden, was die weitere Diskussion vereinfacht. Im Idealfall sind alle Koordinaten zyklisch. Dann sind wegen  $\dot{p}_i = 0$  alle konjugierten Impulse erhalten, und  $H$  ist (wenn überhaupt) nur noch eine Funktion der Zeit  $t$ .

### Bedeutung der Hamilton-Funktion

Die Hamilton-Funktion wurde bereits in (5.95) eingeführt. Allerdings wurde dort der Übergang von  $\dot{q}$  nach  $p$  noch nicht

vollzogen. Wir wissen, dass die Hamilton-Funktion  $H$  der Energie  $E$  entspricht (oder genauer: dass die Hamilton-Funktion, ausgewertet am Ort und mit dem Impuls einer Punktmasse, der Energie der Punktmasse entspricht), wenn alle herrschenden Zwangsbedingungen skleronom sind. Ein Gegenbeispiel hatten wir in Aufgabe 5.4 gesehen: Dort wurde explizit gezeigt, dass die rheonome Zwangsbedingung auf  $H \neq E$  führt.

Wegen (7.11) ist die Hamilton-Funktion  $H$  genau dann explizit zeitabhängig, wenn dies auch für die Lagrange-Funktion gilt – unabhängig davon, ob  $H$  der Energie entspricht oder nicht. Außerdem gilt wegen der kanonischen Gleichungen

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (7.19)$$

Jede Zeitabhängigkeit von  $H$  ist also vollständig durch die partielle Ableitung erfasst; darum ist  $H$  eine Erhaltungsgröße, wenn  $L$  nicht explizit von der Zeit abhängt (siehe Noether-Theorem in Abschn. 5.6).

Für den Fall, dass  $H$  der Energie  $E$  entspricht, ist zu betonen, dass  $H$  eine Funktion der Koordinaten  $q$  und kanonischen Impulse  $p$  ist, während die Energie stattdessen häufig als Funktion von  $q$  und  $\dot{q}$  geschrieben wird.

### Frage 3

Für den Fall, dass mindestens eine Zwangsbedingung rheonom ist,  $L$  und  $H$  aber keine explizite Funktionen der Zeit sind, so ist  $H$  zwar erhalten, entspricht aber nicht der Energie. Interessierte Leser sind dazu eingeladen, einen solchen Fall zu konstruieren.

**Achtung** Entspricht die Hamilton-Funktion  $H$  der Gesamtenergie  $E$ , dann kann  $H$  prinzipiell direkt aufgeschrieben werden, indem  $E$  durch die generalisierten Koordinaten  $q$  und Impulse  $p$  ausgedrückt wird, solange letztere bekannt sind. In Bd. 2, Kap. 10 werden wir Situationen begegnen, in denen die kanonischen Impulse nicht den „kinetischen“ Impulsen entsprechen, die man aus der Mechanik kennt. In solchen Fällen kommt man nicht umhin, die kanonischen Impulse zunächst aus der Lagrange-Funktion  $L$  herzuleiten, was letztlich bedeutet, dass man erst  $L$  aufstellt und anschließend mithilfe der berechneten kanonischen Impulse mittels einer Legendre-Transformation auf  $H$  transformieren muss. ▶

## Zeitentwicklung und Poisson-Klammern

Wir definieren eine *Observable*  $F$  als eine physikalische Größe eines Systems, die vollständig durch die Koordinaten, Impulse und die Zeit bestimmt ist:

$$F = F(t, q, p). \quad (7.20)$$

Die einfachsten Beispiele für Observablen sind die Orte  $q_i$  und Impulse  $p_i$  oder die Energie in der Form  $H(t, q, p)$  sowie der Drehimpuls.

Wir fragen nun: Was kann man über die Zeitentwicklung einer Observablen sagen, wenn die Hamilton-Funktion des Systems bekannt ist? Diese Fragestellung wird später in der Quantenmechanik von grundlegender Wichtigkeit sein. Dazu schreiben wir die totale Zeitableitung

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

wobei die kanonischen Gleichungen in (7.13) ausgenutzt wurden. Zur Abkürzung führt man die *Poisson-Klammer* ein.

### Poisson-Klammer

Sind zwei Observablen  $F$  und  $G$  gegeben, so lautet die Poisson-Klammer (benannt nach dem französischen Mathematiker und Physiker Siméon Denis Poisson, 1781–1840)

$$\{F, G\} := \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (7.22)$$

Folglich kann die Zeitentwicklung einer Observablen in der kompakten Gestalt

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (7.23)$$

geschrieben werden.

### Poisson-Klammer und Erhaltungsgrößen

Verschwindet die Poisson-Klammer einer Observablen  $F$  mit der Hamilton-Funktion  $H$  und ist  $F$  nicht explizit zeitabhängig, d.h.  $\partial F / \partial t = 0$ , so ist  $F$  ein Integral der Bewegung, also eine Erhaltungsgröße. Diese Schlussfolgerung gilt auch in die andere Richtung.

### Energieerhaltung

Wegen der offensichtlichen Identität  $\{H, H\} = 0$  ist für  $F = H$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (7.24)$$

was wir schon vorher gesehen haben. Ist  $H$  nun nicht explizit zeitabhängig, muss  $H$  eine Erhaltungsgröße sein. ▶

## Übersicht: Rechenregeln für Poisson-Klammern

Für die Poisson-Klammern gelten die unten aufgeführten Rechenregeln. Dazu betrachten wir die Observablen  $A, B$  und  $C$  sowie eine reelle Zahl  $\lambda$ :

- $\{A, B\} = -\{B, A\} \implies \{A, A\} = 0$  (Antikommutativität)

- $\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$  (Distributivgesetz)
- $\{A, \lambda B\} = \{\lambda A, B\} = \lambda \{A, B\}$
- $\{A, BC\} = B\{A, C\} + C\{A, B\}$  (Produktregel)
- $\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0$  (Jacobi-Identität)

### Frage 4

Zur Veranschaulichung bietet es sich an, die kanonischen Gleichungen als Spezialfall von (7.23) zu schreiben. Nutzen Sie dazu

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} \quad (7.25)$$

aus und berechnen Sie  $\{q_i, H\}$  und  $\{p_i, H\}$ . Achtung: Hier werden die  $q_i$ ,  $p_i$  und  $t$  als unabhängige Parameter verwendet, d.h.  $\partial q_i / \partial t = 0$  und  $\partial p_i / \partial t = 0$ .

Die wichtigsten Rechenregeln der Poisson-Klammern sind im Kasten „Übersicht: Rechenregeln für Poisson-Klammern“ zusammengefasst.

### Frage 5

Leiten Sie die Rechenregeln der Poisson-Klammern aus ihrer Definition ab (Jacobi-Identität für besonders Fleißige). Zeigen Sie außerdem die wichtigen Relationen

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad (7.26)$$

die auch *fundamentale Poisson-Klammern* genannt werden.

Des Weiteren wird in Aufgabe 7.3 gezeigt, dass die Komponenten des Drehimpulses in kartesischen Koordinaten, also  $L_i = \varepsilon_{ijk}x_j p_k$ , der Relation

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}L_k \quad (7.27)$$

genügen.

**Achtung** In der Quantenmechanik werden die Poisson-Klammern durch die wichtigen *Kommutatoren* ersetzt (Bd. 3, Kap. 3). Sie geben an, ob zwei quantenmechanische Operatoren vertauschbar sind (d.h. ob die Reihenfolge ihrer Anwendung auf einen quantenmechanischen Zustand eine Rolle spielt). ◀

## 7.2 Kanonische Transformationen

Die kanonischen Gleichungen werden – ähnlich wie die Lagrange-Gleichungen – aus einem Variationsprinzip abgeleitet. Bisher wurde in den meisten Anwendungen mit einem konkreten Satz generalisierter Koordinaten und Impulse gerechnet. Es

wird nun gezeigt, dass es eine Klasse von Phasenraumtransformationen (d.h. einem Übergang zu neuen generalisierten Koordinaten und Impulsen) gibt, unter denen die kanonischen Gleichungen invariant sind. Dies führt auf die sogenannten erzeugenden Funktionen dieser Transformationen. Kanonische Transformationen können eingesetzt werden, um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen.

### Ableitung der kanonischen Gleichungen aus dem Wirkungsprinzip

Die kanonischen Gleichungen in (7.13) wurden in Abschn. 7.1 durch einen Vergleich der totalen Differenziale der Hamilton- und Lagrange-Funktionen abgeleitet. Beide Mechanismen sind also gleichwertig. Häufig findet man in der Literatur einen äquivalenten Zugang: Es lassen sich die kanonischen Gleichungen direkt aus dem Wirkungsprinzip ableiten.

### Frage 6

Rufen Sie sich die Variationsverfahren aus Abschn. 5.5 in Erinnerung.

Dazu betrachten wir erneut die Wirkung als Zeitintegral der Lagrange-Funktion:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_i \dot{q}_i p_i - H(t, q, p) \right] dt. \quad (7.28)$$

Ihre Variation bei festgehaltener Zeit ist

$$\delta S = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} \left[ p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt. \quad (7.29)$$

Offensichtlich erhält man durch eine partielle Integration des ersten Terms

$$\sum_i \int_{t_0}^{t_1} p_i \delta \dot{q}_i dt = \sum_i p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \sum_i \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i \delta q_i dt. \quad (7.30)$$

Da die Variation mit festen Endpunkten durchgeführt wird, muss  $\delta q_i$  bei  $t = t_0$  und  $t = t_1$  verschwinden. Darum lässt sich

die Variation in folgender Form schreiben:

$$\delta S = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt. \quad (7.31)$$

Verlangt man wieder, dass die Variation  $\delta S$  für die tatsächliche Bahnkurve verschwindet, und nimmt man an, dass sämtliche Variationen  $\delta p_i$  und  $\delta q_i$  beliebig sind, müssen die Terme in den runden Klammern verschwinden. Dies führt aber gerade auf die kanonischen Gleichungen. Die Herleitung ist vollständig umkehrbar, daher folgt die Äquivalenz des Wirkungsprinzips und der kanonischen Gleichungen.

### Äquivalenz des Wirkungsprinzips und der kanonischen Gleichungen

Das Prinzip  $\delta S = 0$  ist äquivalent zu den kanonischen Gleichungen (7.13), welche die Bewegung im Phasenraum beschreiben.

Hier wurde verwendet, dass die generalisierten Koordinaten und Impulse unabhängige Größen sind. Somit hat man es mit  $2f$  unabhängigen Parametern zu tun, was letztlich auf  $2f$  Bewegungsgleichungen *erster* Ordnung führt. Bei der Ableitung der Lagrange-Gleichungen aus dem Wirkungsprinzip wurde nur die Unabhängigkeit der  $f$  Koordinaten verlangt, was  $f$  Differenzialgleichungen *zweiter* Ordnung zur Folge hatte. Im Hamilton-Formalismus führt dies auf die eher unanschauliche Tatsache, dass die generalisierten Impulse  $p$  gleichberechtigt zu den generalisierten Koordinaten  $q$  sind. Man erkennt dies schon an der Form der kanonischen Gleichungen in (7.13), die bis auf ein Vorzeichen symmetrisch unter der Vertauschung  $q \leftrightarrow p$  sind.

## Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen

Bevor wir zu den eigentlichen kanonischen Transformationen kommen, machen wir einen kleinen Exkurs zurück zum Lagrange-Formalismus. Wir erinnern uns, dass – im Gegensatz zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen – ein wesentlicher Vorteil die Koordinatenunabhängigkeit der Lagrange-Gleichungen ist. Dies wurde bisher nicht explizit gezeigt.

Wir nehmen an, dass die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq f) \quad (7.32)$$

für einen bestimmten Koordinatensatz  $q = (q_1, \dots, q_f)$  gelten. Führt man nun  $f$  neue Koordinaten  $Q = (Q_1, \dots, Q_f)$  mit  $Q = Q(t, q)$  ein (man nennt Transformationen der Gestalt  $Q = Q(t, q)$  *Punktransformationen*, da sie nur auf die Koordinaten wirken), gelten die  $f$  Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0. \quad (7.33)$$

Dies ist in der Tat immer der Fall; sie sind sogar gleichwertig, wenn wir fordern, dass die Abbildung auch umkehrbar ist, was nun gezeigt werden soll.

Zunächst ist

$$\dot{q}_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}. \quad (7.34)$$

Man kann daher direkt

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \quad (7.35)$$

ablesen. Ausgedrückt durch die neuen Koordinaten lautet die Lagrange-Funktion

$$L'(t, Q, \dot{Q}) = L(t, q(t, Q), \dot{q}(t, Q, \dot{Q})). \quad (7.36)$$

Es soll betont werden, dass beide Lagrange-Funktionen zwar dasselbe physikalische System beschreiben, im Allgemeinen aber unterschiedliche Funktionen ihrer Argumente sein werden. Man kann die folgenden Ableitungen leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right], \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_i \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j \partial t} \right]. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Diese Zwischenergebnisse lassen sich zusammenfassen zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = 0. \quad (7.38)$$

Im letzten Schritt wurde die Gültigkeit von (7.32) ausgenutzt. Hier erkennt man, dass die Lagrange-Gleichungen tatsächlich ebenso für die Koordinaten  $Q$  gelten, wenn sie für  $q$  gültig sind.

Wir stellen die Forderung der Umkehrbarkeit der Abbildung, d.h., die Rücktransformation  $q = q(t, Q)$  soll existieren. Dies ist dann möglich, wenn die Funktionaldeterminante  $\det(\partial Q_j / \partial q_i) \neq 0$  erfüllt. Wir verzichten hier auf einen Beweis dieses Zusammenhangs. Ist also die Punkttransformation umkehrbar, so kann (7.38) direkt invertiert werden, und die Aussage ist auch in die Rückrichtung korrekt: Aus (7.32) folgt (7.33) und umgekehrt. Somit sind die Lagrange-Gleichungen invariant unter Punkttransformationen.

## Kanonische Transformationen

Es wurde eben gezeigt, dass die Lagrange-Gleichungen invariant unter Punkttransformationen  $Q = Q(t, q)$  sind. Im Hamilton-Formalismus kann man allerdings noch viel weiter gehen. Da wir bereits gesehen haben, dass Koordinaten und Impulse ähnliche Rollen spielen und gleichberechtigt sind, liegt es

auf der Hand, auch Transformationen

$$Q = Q(t, q, p), \quad P = P(t, q, p) \quad (7.39)$$

mit neuen Koordinaten  $Q$  und Impulsen  $P$  zuzulassen.

Man kann berechtigterweise fragen, ob dies nur eine theoretische Spielerei oder eine praktische Vereinfachung zu erwarten ist. Tatsächlich können Transformationen der Art (7.39) ausgenutzt werden, um möglichst viele zyklische Koordinaten zu erhalten, was wiederum das Lösen der Bewegungsgleichungen wesentlich erleichtern kann. Dies ist die Hauptmotivation für die Diskussion der kanonischen Transformationen. Wir kommen in Aufgabe 7.7 darauf zurück.

Wir schränken alle möglichen Transformationen (7.39) jedoch durch die Forderung ein, dass die Form der kanonischen Gleichungen erhalten sein soll, d.h., es soll

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j} \quad (7.40)$$

gelten, wobei  $H'(t, Q, P)$  eine noch zu bestimmende Funktion ist, welche die Rolle der Hamilton-Funktion  $H(t, q, p)$  übernimmt.

### Kanonische Transformationen

Unter *kanonischen Transformationen* versteht man Transformationen in (7.39), welche die Form der kanonischen Gleichungen invariant lassen und somit (7.40) erfüllen, wobei  $H'(t, Q, P)$  eine geeignete Funktion ist.

Da die Bewegungsgleichungen invariant bleiben sollen, kann sich die Wirkung  $S$  beim Übergang  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  nur um eine Konstante ändern:

$$S = S' + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt} dt = S' + [F(t_1) - F(t_0)]. \quad (7.41)$$

Diese Argumentation ist uns bereits in Kap. 5 mehrfach begegnet. Hier bedeutet dies

$$\begin{aligned} & \sum_i p_i \dot{q}_i - H(t, q, p) \\ &= \sum_i P_i \dot{Q}_i - H'(t, Q, P) + \frac{dF(t, q, p, Q, P)}{dt}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

wobei  $F$  zunächst eine Funktion von allen alten und neuen Koordinaten und Impulsen sowie der Zeit sein kann. Es ist dabei aber zu beachten, dass wegen der Transformationsvorschrift (7.39) die alten und neuen Koordinaten und Impulse nicht unabhängig sind. Von den 4f Größen  $(q, p)$  und  $(Q, P)$  sind nur 2f unabhängig. Es ist eine Frage der Zweckmäßigkeit, welche der Parameter man als unabhängige Größen wählt. Beispielsweise kann man sich für die alten  $(q, p)$  oder die neuen Parameter  $(Q, P)$  oder aber für Mischungen davon, wie  $(q, P)$  oder  $(Q, p)$ , entscheiden.

### Erzeugende

Man nennt die Funktion  $F$  *Erzeugende der kanonischen Transformation* (meist nur kurz *Erzeugende*) und bezeichnet sie, je nach der Wahl der unabhängigen Parameter, als

$$\begin{aligned} & F_1(t, q, Q), \quad F_2(t, q, P), \quad F_3(t, p, Q), \\ & F_4(t, p, P), \quad F_5(t, q, p), \quad F_6(t, Q, P). \end{aligned} \quad (7.43)$$

Die Indexreihenfolge kann sich in anderen Mechanikbüchern davon unterscheiden, was allerdings nichts am physikalischen Inhalt ändert. Zunächst einmal erkennen wir, dass die Funktion  $F$  beliebig ist, solange sie differenzierbar ist, denn wir setzen nur voraus, dass die vollständige Zeitableitung  $dF/dt$  existiert. Dies garantiert automatisch die Invarianz der Bewegungsgleichungen.

### Frage 7

Überlegen Sie sich, dass Punkttransformationen  $Q(t, q)$  nicht durch  $F_1(t, q, Q)$  vermittelt werden können. Denken Sie dabei daran, welche der 4f Parameter  $(q, p)$  und  $(Q, P)$  voneinander abhängig sind. Punkttransformationen werden in Aufgabe 7.4 noch genauer behandelt.

Bis zu diesem Punkt ist nichts Physikalisches geschehen, und es stellen sich sofort mehrere Fragen: Wie hängt die Erzeugende  $F$  mit der gewünschten Transformation (7.39) zusammen? Wie lautet, für eine gegebene Funktion  $F$ , die neue Funktion  $H'(t, Q, P)$ , welche die Rolle der Hamilton-Funktion übernimmt? Dazu betrachten wir zunächst eine Transformation mit  $F_1(t, q, Q)$ .

Das Differenzial der Wirkung (7.42) lässt sich schreiben als

$$\sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (H' - H) dt = dF_1(t, q, Q). \quad (7.44)$$

Da wir hier  $q$  und  $Q$  als die unabhängigen Parameter der Transformation wählen, ist zunächst

$$dF_1(t, q, Q) = \sum_i \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt. \quad (7.45)$$

Vergleicht man die Koeffizienten in (7.44) und (7.45), folgen die drei Identitäten

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (7.46)$$

Die neue Hamilton-Funktion  $H'$  muss noch als Funktion der neuen Parameter  $(Q, P)$  ausgedrückt werden. Dazu müssen die Transformationsgleichungen in (7.39) bekannt sein. Sie folgen aus den ersten beiden Gleichungen in (7.46).

Nun wird auch klar, warum die Funktion  $F$  Erzeugende heißt: Durch ihre Wahl werden die Transformationsgleichungen in (7.39) und die neue Hamilton-Funktion  $H'$  festgelegt. Allerdings müssen die Rechnungen für die anderen Erzeugenden in (7.43) wiederholt werden, um die zu (7.46) analogen Transformationsgleichungen zu bestimmen. Zusammengefasst lauten die entsprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2(t, q, P)}{\partial q_i}, & Q_i &= \frac{\partial F_2(t, q, P)}{\partial P_i}, \\ q_i &= -\frac{\partial F_3(t, p, Q)}{\partial p_i}, & P_i &= -\frac{\partial F_3(t, p, Q)}{\partial Q_i}, \\ q_i &= -\frac{\partial F_4(t, p, P)}{\partial p_i}, & Q_i &= \frac{\partial F_4(t, p, P)}{\partial P_i}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Die Anwendung der Erzeugenden  $F_5(t, q, p)$  und  $F_6(t, Q, P)$  führt in der Regel auf aufwendige Rechnungen. Diese Fälle sollen hier nicht behandelt werden.

### Vertauschung von Orten und Impulsen

Eines der einfachsten konkreten Beispiele ist die Wahl

$$F_1 = \sum_i q_i Q_i. \quad (7.48)$$

Dies führt wegen (7.46) auf

$$p_i = Q_i, \quad P_i = -q_i \quad (7.49)$$

und entspricht somit (bis auf ein Vorzeichen) einer Vertauschung der Koordinaten und Impulse! Es wird hier einmal mehr deutlich, dass Orte und Impulse im Hamilton-Formalismus gleichwertig sind. Die neue Hamilton-Funktion  $H'$  lässt sich bei bekanntem  $H$  direkt angeben, indem die Transformationsgleichungen in (7.49) ausgenutzt werden und die partielle Ableitung  $\partial F_1 / \partial t$  addiert wird (solange sie – wie in diesem Beispiel – nicht verschwindet). 

Die neue Hamilton-Funktion  $H'$  ergibt sich – wie in (7.46) – stets aus der alten Funktion  $H$  plus der partiellen Zeitableitung der entsprechenden Erzeugenden. Die Gleichungen für  $F_2$  werden in Aufgabe 7.5 abgeleitet (der interessierte Leser wird dazu motiviert, auch die beiden übrigen Gleichungssätze nachzurechnen).

Ist die Erzeugende zeitunabhängig, erhält man  $H'$  direkt aus  $H$ , indem die Parameter  $(q, p)$  entsprechend der Rücktransformationen  $q(Q, P)$  und  $p(Q, P)$  durch  $(Q, P)$  ersetzt werden. In den Aufgaben 7.4 und 7.7 wird das Rechnen mit den Erzeugenden vertieft; unter anderem wird in Aufgabe 7.4 gezeigt, dass alle Punkttransformationen kanonisch sind, solange die Transformationsgleichung  $Q(t, q)$  differenzierbar ist.

### Bestimmung der Transformationsgleichungen

Um die Transformationsgleichungen in (7.39) für eine gegebene Erzeugende zu erhalten, betrachten wir ein etwas komplizierteres Beispiel. Nehmen wir die Erzeugende

$$F_2(q, P) = P [\ln(-P/q) - 1] \quad (7.50)$$

für ein System mit einem Freiheitsgrad. Man berechnet zunächst

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \ln(-P/q), \quad (7.51)$$

was man direkt nach

$$q(Q, P) = -P e^{-Q} \quad (7.52)$$

auflösen kann. Somit ist die erste Transformationsgleichung bekannt. Der alte Impuls erfüllt zunächst

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = -\frac{P}{q}. \quad (7.53)$$

Hier kann man das bekannte Ergebnis für  $q$  einsetzen und bekommt die zweite Transformationsgleichung

$$p(Q) = e^Q. \quad (7.54)$$

Die Umkehrtransformation lautet

$$Q(p) = \ln p, \quad P(q, p) = -qp. \quad (7.55)$$

Da  $F_2$  zeitunabhängig ist, kann man

$$H'(Q, P) = H[q(Q, P), p(Q)] \quad (7.56)$$

bei bekannter Hamilton-Funktion  $H(q, p)$  direkt hinschreiben. Ob dies letztlich auf Bewegungsgleichungen führt, die einfacher zu lösen sind, hängt von den expliziten funktionalen Formen von  $H'(Q, P)$  sowie  $H(q, p)$  ab. 

### Frage 8

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$F_2(t, q, P) = \sum_i q_i P_i \quad (7.57)$$

die identische Transformation mit  $Q_i = q_i$  und  $P_i = p_i$  erzeugt.

Praktisch kann man beliebige Erzeugende hinschreiben und ausprobieren, ob die dadurch vermittelten Transformationen Vorteile mit sich bringen. Beispielsweise wird in Aufgabe 7.7 eine Transformation durchgeführt, mit deren Hilfe sich das Problem des harmonischen Oszillators auf alternative (und innovative) Weise lösen lässt.

In Wirklichkeit ist das Auffinden einer Erzeugenden generell nicht einfacher als das direkte Lösen des Problems in den ursprünglichen Koordinaten; es wird also lediglich der Rechenaufwand verschoben. Daher bieten sich die kanonischen Transformationen nicht für Alltagsprobleme an.

Die Bedeutung der kanonischen Transformationen ist vielmehr, das theoretische Verständnis der Mechanik zu erweitern und auf die Hamilton-Jacobi-Theorie vorzubereiten, die in Abschn. 7.3 kurz vorgestellt wird. Dort sprechen wir auch die sogenannten Winkel- und Wirkungsvariablen an, die eine wichtige Anwendung der kanonischen Transformationen sind und in der Geschichte der theoretischen Physik eine nicht unwichtige Rolle gespielt haben.

### Schwerpunktskoordinaten

Um zu illustrieren, dass eine bekannte Erzeugende ein Problem vereinfachen kann, betrachten wir zwei Punktmasse  $m_1$  und  $m_2$  in einer Dimension mit Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$  und die Erzeugende

$$F_2(x_1, x_2, P_1, P_2) = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} P_1 + (x_1 - x_2) P_2, \quad (7.58)$$

wobei wir mit  $x_i = q_i$  verdeutlichen, dass kartesische Koordinaten verwendet werden.

Wie lauten nun die neuen Koordinaten  $X_i$  und die Impulse  $P_i$ ? Zunächst ist

$$X_1 = \frac{\partial F_2}{\partial P_1} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \quad X_2 = \frac{\partial F_2}{\partial P_2} = x_1 - x_2. \quad (7.59)$$

Dies sind gerade die Schwerpunkts- und Relativkoordinaten. Außerdem ist

$$p_1 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{m_1}{M} P_1 + P_2, \quad p_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{m_2}{M} P_1 - P_2. \quad (7.60)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich sofort die neuen Impulse bestimmen:

$$P_1 = p_1 + p_2, \quad P_2 = \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{M}. \quad (7.61)$$

Wir haben es hier mit Schwerpunkts- und „Relativimpuls“ zu tun.

Dies vereinfacht offensichtlich die Beschreibung für isolierte Systeme, da dort der Gesamtimpuls  $P_1$  erhalten und  $X_1$  zyklisch ist (Kap. 3 und 5).

Der aufmerksame Leser erkennt, dass es sich hier „nur“ um eine Punkttransformation handelt. Dieses Beispiel erfordert also gar nicht die volle Mächtigkeit der kanonischen Transformationen und zeigt, dass kanonische Transformationen vielmehr dem theoretischen Verständnis dienen. ▶

### Invarianz der Poisson-Klammern

Wir wissen nun, wie man eine kanonische Transformation durchführt, wenn die Erzeugende bekannt ist. Wie kann man nun aber entscheiden, ob bereits definierte Transformationsgleichungen eine kanonische Transformation beschreiben?

In den vorhergehenden Abschnitten wurde über kanonische Transformationen gesprochen. Dabei wird von einem generalisierten Koordinatensatz  $(q, p)$  auf einen anderen  $(Q, P)$  gewechselt. Wie verhalten sich dabei die Poisson-Klammern? Zunächst schreiben wir (7.22) explizit als

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{q,p} &= \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right), \\ \{F, G\}_{Q,P} &= \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} \right), \end{aligned} \quad (7.62)$$

um zwischen beiden Koordinatensätzen unterscheiden zu können;  $F$  und  $G$  sind dabei, je nach Wahl der Koordinaten, Funktionen  $F(t, q, p)$  und  $G(t, q, p)$  bzw.  $F(t, Q, P)$  und  $G(t, Q, P)$ .  $F(t, q, p)$  und  $F(t, Q, P)$  sind – genau wie  $G(t, q, p)$  und  $G(t, Q, P)$  – unterschiedliche Funktionen ihrer Argumente; man müsste streng genommen zwischen ihnen unterscheiden, was wir aus Übersichtsgründen unterlassen.

Man kann nun zeigen, dass die folgenden Zusammenhänge und Aussagen gelten:

1. Eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn die fundamentalen Poisson-Klammern invariant sind. Dies ist eine sehr praktische Aussage: Für eine vorgegebene, von den kanonischen Variablen  $(q, p)$  ausgehende Transformation  $Q(q, p)$ ,  $P(q, p)$  genügt es also zu überprüfen, ob die Relationen

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad (7.63)$$

erfüllt sind. Dies wird in Aufgabe 7.6 an einem Beispiel vorgeführt.

2. Die Poisson-Klammern sind invariant unter kanonischen Transformationen, d. h., das Ergebnis hängt nicht davon ab, welcher Satz kanonischer Variablen zur Auswertung verwendet wird:

$$\{F, G\}_{q,p} = \{F, G\}_{Q,P}. \quad (7.64)$$

Insbesondere sind die fundamentalen Poisson-Klammern in (7.26) invariant.

Es soll an dieser Stelle auf einen Beweis der beiden obigen Aussagen verzichtet werden. Interessierte Leser finden im Mechanik-Lehrbuch von Goldstein (1981) eine sorgfältige und umfassende Darstellung, die für unsere Zwecke jedoch zu eingehend und ausführlich ist.

## Vertiefung: Zusammenhang zwischen den Erzeugenden

In Aufgabe 7.5 wird folgender Zusammenhang gezeigt: Erzeugen  $F_1(t, q, Q)$  und  $F_2(t, q, P)$  dieselbe kanonische Transformation, d.h. führen beide auf dieselben Beziehungen  $Q_i(t, q, p)$  und  $P_i(t, q, p)$ , so gilt

$$\begin{aligned} F_2(t, q, P) &= F_1(t, q, Q) + \sum_i Q_i P_i(t, q, Q) \\ &= F_1(t, q, Q) - \sum_i Q_i \frac{\partial F_1(t, q, Q)}{\partial Q_i}. \end{aligned}$$

Wir stellen also fest, dass die Erzeugende  $F_2$  die Legendre-Transformierte von  $F_1$  ist, wobei auf der rechten Seite noch  $Q_i(t, q, P)$  eingesetzt werden muss. Dies zeigt, wie die  $(q, Q)$ -Abhängigkeit durch eine  $(q, P)$ -Abhängigkeit ersetzt werden kann.

### Frage 9

Als konkretes Beispiel können Sie sich davon überzeugen, dass

$$F_1(q, Q) = q e^Q$$

und

$$F_2(q, P) = P [\ln(-P/q) - 1]$$

auf dieselben Transformationsgleichungen führen und gleichzeitig die obige Gleichung für  $F_2(t, q, P)$  erfüllt ist. Nutzen Sie dazu die Ergebnisse aus, die wir bereits aus (7.50) abgeleitet haben.

Ohne Beweis halten wir weiterhin fest, dass sich analog auch  $F_3(t, p, Q)$  und  $F_4(t, p, P)$  als Legendre-Transformierte von  $F_1(t, q, Q)$  schreiben lassen, solange sie dieselbe kanonische Transformation erzeugen:

$$\begin{aligned} F_3(t, p, Q) &= F_1(t, q, Q) - \sum_i q_i p_i, \\ &= F_1(t, q, Q) - \sum_i q_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \\ F_4(t, p, P) &= F_1(t, q, Q) - \sum_i (q_i p_i - Q_i P_i) \\ &= F_1(t, q, Q) - \sum_i \left( q_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + Q_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right). \end{aligned}$$

Beim Übergang  $F_1 \rightarrow F_4$  muss eine doppelte Legendre-Transformation verwendet werden, um sowohl den Übergang  $q \rightarrow p$  als auch  $Q \rightarrow P$  vorzunehmen.

Welche Implikation hat dies? Man kann sich – je nach praktischem Nutzen – aussuchen, welche Erzeugende man für eine kanonische Transformation verwendet. Kennt man  $F_1$  für eine gegebene Transformation, lassen sich alle anderen Erzeugenden berechnen. Durch Auflösen kann man (mit einigen Ausnahmen) von jeder Erzeugenden zu jeder anderen wechseln. Dies funktioniert nicht immer, da beispielsweise Punkttransformationen nicht durch die Erzeugende  $F_1(t, q, Q)$  beschrieben werden können.

Abschließend soll nochmals betont werden, dass alle Transformationen, die sich aus Erzeugenden ableiten lassen, automatisch kanonisch sind. Für eine gegebene Erzeugende lassen sich also die neuen *kanonischen* Koordinaten bestimmen.

Optik und der Quantenmechanik erlaubt (Bd. 2, Abschn. 7.3 und Bd. 3, Abschn. 11.3). In letzterer ist die Prinzipalfunktion eng mit der Wellenfunktion verknüpft. Dieser Abschnitt enthält eine kurze Einführung, ohne zu sehr in mathematische Details abzugleiten.

## 7.3 Grundlagen der Hamilton-Jacobi-Theorie

Die Hamilton-Jacobi-Theorie ist wohl einer der Höhepunkte der Erkenntnisse, die aus der klassischen Mechanik abgeleitet wurden. Die Grundidee dieser Theorie ist es, eine Erzeugende zu finden, welche die Hamilton-Funktion auf null transformiert. Aus dieser Erzeugenden, die auch Wirkungsfunktion oder Prinzipalfunktion genannt wird, lassen sich dann die Bewegungsgleichungen ableiten, die zu den kanonischen Gleichungen äquivalent sind. Der entscheidende Punkt ist, dass diese Betrachtungsweise einen direkten Übergang zur geometrischen

### Transformation auf Ruhe, Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir haben gesehen, dass man mithilfe von kanonischen Transformationen die alten Koordinaten und Impulse durch neue ersetzen kann. Dabei wird auch die Hamilton-Funktion transformiert.

Im Folgenden beschränken wir uns auf die Erzeugende  $F_2(t, q, P)$  mit

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}. \quad (7.65)$$

## Vertiefung: Winkel- und Wirkungsvariable Bedeutung für die Physik

Zur Beschreibung periodischer Systeme (d. h., die  $q_i$  sollen periodische Funktionen bzw. die Bahnkurven wie in Abb. 7.1 geschlossen sein) haben sich die sogenannten *Winkelvariablen*  $\theta_i := Q_i$  und ihr kanonisch konjugierten Impulse, die *Wirkungsvariablen*  $J_i := P_i$ , als sehr nützlich erwiesen. Der Name „Winkelvariable“ zeigt bereits die geometrische Bedeutung dieser Variable in periodischen Systemen: Dort handelt es sich bei den  $\theta_i$  um Winkel. Der Begriff „Wirkungsvariable“ ist gerechtfertigt, da ihre Definition

$$J_i = \oint p_i dq_i$$

starke Ähnlichkeit mit der Wirkung hat (Goldstein 1981).

Ausgehend von der Definition von  $J_i$  zeigt sich, dass die transformierte Hamilton-Funktion nur noch eine Funktion der Wirkungsvariablen ist:  $H' = H'(J)$ . Die Winkelvariablen sind dann alle zyklisch und alle Wirkungsvariablen erhalten

$$J_i = \text{const.}$$

In diesem Fall sind die Bewegungsgleichungen für die  $\theta_i$  trivial zu lösen:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i t + \theta_i(0).$$

Hier wurde

$$\omega_i := \dot{\theta}_i = \text{const}$$

gesetzt.

Die charakteristische Funktion  $W$  aus (7.76) ist gerade die für die Transformation benötigte Erzeugende. In Aufgabe 7.7 wird ein Beispiel gezeigt.

Sowohl die Koordinatensätze  $(q, p)$  als auch  $(Q, P)$  sind kanonisch. Die Hamilton-Funktion erfüllt

$$H'(t, Q, P) = H(t, q, p) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (7.66)$$

Wir fragen nun: Wie lautet diejenige Erzeugende  $S(t, q, P) := F_2(t, q, P)$ , für welche die transformierte Hamilton-Funktion  $H'$  identisch verschwindet? Dies führt wegen (7.65) und (7.66) unmittelbar auf die Hamilton-Jacobi-Gleichung.

Historisch waren Winkel- und Wirkungsvariablen wichtig für die Entwicklung der Quantenmechanik. Beispielsweise lässt sich das Bohr'sche Atommodell mithilfe dieses Ansatzes lösen, indem das Integral  $\oint p_i dq_i$  quantisiert wird (Bd. 3, Abschn. 11.3).

Existiert ein Satz von Winkel- und Wirkungsvariablen, so lassen sich die entsprechenden Bewegungsgleichungen direkt integrieren, da sie linear sind. Solche Systeme heißen dann *integrabel* bzw. *lösbar*.

Integrable Systeme nehmen in der physikalischen Literatur einen breiten Raum ein; sie sind aber insofern sehr speziell, als sie eine maximale Zahl an Erhaltungsgrößen besitzen, nämlich die Wirkungsvariablen. Insbesondere bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden ist dies aber eine recht wirklichkeitsferne Situation.

Nichtintegrable Systeme (wie beispielsweise das allgemeine Dreikörperproblem) zeichnen sich dadurch aus, dass man nicht *global* (d. h. entlang der gesamten Bahnkurve) auf Winkel- und Wirkungsvariablen transformieren kann, da es weniger als  $f$  Erhaltungsgrößen gibt. Allerdings kann man immer *lokal*, also in einer Umgebung eines Punktes im Phasenraum, auf Variablen analog zu den Winkel- und Wirkungsvariablen transformieren. Nichtintegrable Systeme neigen zu chaotischem Verhalten, d. h., eine kleine Variation der Anfangsbedingungen führt zu stark unterschiedlichen Phasenraumtrajektorien bzw. Bahnkurven (z. B. ein Billardspiel). Die Untersuchung solcher nichtintegrablen Systeme ist Gegenstand der *Chaosforschung*.

### Literatur

- Goldstein, H.: *Klassische Mechanik*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1981

### Hamilton-Jacobi-Gleichung

Eine Erzeugende  $S(t, q, P)$ , welche die *Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (7.67)$$

erfüllt, führt auf  $H' = 0$ . Gl. (7.67) ist die Bestimmungsgleichung für  $S(t, q, P)$ .

Bei (7.67) handelt es sich um eine Differenzialgleichung erster Ordnung in den  $f$  Koordinaten  $q_i$  und der Zeit  $t$ . Man bezeichnet ihre Lösung  $S(t, q, P)$  auch als *Prinzipalfunktion* oder – wie noch deutlich werden wird – *Wirkungsfunktion*.

Die mit  $S(t, q, P)$  verbundene Transformation nennt man auch eine *Transformation auf Ruhe*, da die Hamilton-Funktion  $H'$  verschwindet und die neuen Variablen  $(Q, P)$  keine Dynamik besitzen: Aus den kanonischen Gleichungen für  $H'$  folgt nämlich sofort, dass

$$Q_i = \text{const}, \quad P_i = \text{const} \quad (1 \leq i \leq f) \quad (7.68)$$

erfüllt ist.

Was hat man durch solch eine Transformation auf Ruhe gewonnen? Warum ist sie interessant? Tatsächlich lassen sich die Bewegungsgleichungen der Mechanik lösen, indem man die Hamilton-Jacobi-Gleichung löst.

Wir wollen an dieser Stelle nicht im Detail erläutern, wie man aus (7.67) die Dynamik des Systems erhält; dies würde zu weit führen. Das Vorgehen soll aber kurz umrissen werden. Der erste Schritt besteht darin, aus (7.67) die Funktion  $S(t, q, P)$  zu ermitteln. Dabei kann man die  $f$  erhaltenen Impulse  $a_i := P_i = \text{const}$  als unbeteiligte Parameter ausnutzen. Man erhält somit zunächst eine Funktion  $S(t, q, a)$ , zu der außerdem eine beliebige Konstante hinzugefügt werden kann.

### Frage 10

Überlegen Sie sich, dass solch eine Konstante nicht in (7.67) auftreten kann.

Die Impulse  $p_i$  ergeben sich dann aus (7.65). Anschließend nutzt man

$$b_i := Q_i = \frac{\partial S(t, q, a)}{\partial a_i} = \text{const} \quad (7.69)$$

aus. Als Ergebnis hat man ein System von  $f$  Gleichungen für die  $f$  Koordinaten  $q_i$  mit  $2f$  Konstanten  $a_i$  und  $b_i$ . Dies lässt sich formal nach

$$q_i = q_i(t, b, a) \quad (1 \leq i \leq f) \quad (7.70)$$

auflösen, was schließlich die Lösung der Bewegungsgleichungen darstellt. Die Konstanten  $a_i$  und  $b_i$  sind dann gerade die benötigten  $2f$  Anfangsbedingungen des Problems.

Anschaulich sorgt die Transformation  $Q(t, q, p), P(t, q, p)$  dafür, dass die Koordinaten und Impulse zu einer Zeit  $t > t_0$  auf ihre Werte zur Zeit  $t_0$  transformiert werden, da die  $Q_i = b_i$  und  $P_i = a_i$  konstant sind und damit zu allen Zeiten ihren Anfangswerten entsprechen. In der Quantenmechanik spielt beispielsweise das sogenannte Heisenberg-Bild (Bd. 3, Kap. 5) eine wichtige Rolle, in dem die Zeitabhängigkeit vollständig von den quantenmechanischen Zuständen auf die Operatoren abgewälzt wird.

## Wirkungsfunktion und Wirkung

Um zu verstehen, welche Bedeutung die Prinzipalfunktion  $S$  hat, berechnen wir ihre Zeitableitung. Sie lautet

$$\frac{dS(t, q, a)}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (7.71)$$

Hier wurde verwendet, dass die  $a_i$  konstant sind. Weiterhin sind mit (7.65) und (7.67) die übrigen partiellen Ableitungen bekannt. Es folgt

$$\frac{dS(t, q, a)}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L. \quad (7.72)$$

Die Zeitableitung von  $S$  entspricht also gerade der Lagrange-Funktion des Systems. Eine formale Integration ist trivial:

$$S(t, q, a) = \int L dt + \text{const.} \quad (7.73)$$

Bis auf eine unbedeutende Konstante ist die Prinzipalfunktion  $S$  (entlang der Bahnkurve  $q(t)$  integriert) also die Wirkung des Systems. Dies rechtfertigt die alternative Bezeichnung *Wirkungsfunktion*. Die Prinzipalfunktion darf allerdings nicht direkt mit der Wirkung des Systems gleichgesetzt werden.

### Frage 11

Rufen Sie sich die Definition der Wirkung in Kap. 5 in Erinnerung.

**Achtung** Man könnte meinen, dass man bloß die Lagrange-Funktion  $L$  nach der Zeit integrieren müsste, um die gesuchte Wirkungsfunktion  $S(t, q, P)$  zu erhalten. Damit wäre die Dynamik des Systems also praktisch bekannt und das Problem gelöst. Dies funktioniert allerdings nicht, da die Integration entlang der tatsächlichen Bahnkurve zu erfolgen hat. Diese ist jedoch zu Beginn gar nicht bekannt. Tatsächlich sind in der Wirkung, wie sie in Kap. 5 definiert wurde, die beiden Endpunkte der Bahn fest, während in der Prinzipalfunktion die Endpunkte variabel sind. Man beachte vor allem die Gleichungen

$$\frac{\partial S(t, q, P)}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S(t, q, P)}{\partial t} = -H(t, q, P), \quad (7.74)$$

welche die partiellen Ableitungen der Wirkung mit den Impulsen und der Energie des Systems verknüpfen. Dies wird insbesondere von Landau und Lifshitz (1969, Abschnitt 43) deutlich herausgearbeitet. ▶

## Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Die Prinzipalfunktion  $S(t, q, a)$  ist generell explizit zeitabhängig. In vielen Fällen ist die Hamilton-Funktion jedoch erhalten

und hängt nicht explizit von der Zeit ab:

$$H = H(q, p). \quad (7.75)$$

Dann ist es möglich, eine Separation durchzuführen, bei der die Zeitabhängigkeit abgespalten wird:

$$S(t, q, a) = W(q, a) - a_0 t. \quad (7.76)$$

Hier ist  $a_0$  eine noch näher zu spezifizierende Größe. Dies führt auf eine vereinfachte Hamilton-Jacobi-Gleichung, die nicht mehr von der Zeit abhängt.

### Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Die *zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung* lautet

$$H(q, \partial W / \partial q) = a_0. \quad (7.77)$$

#### Frage 12

Zeigen Sie, wie (7.77) mit dem gewählten Ansatz (7.76) aus (7.67) folgt.

Wir sehen also, dass  $a_0$  gerade der konstante Wert der Hamilton-Funktion ist. Entspricht die Hamilton-Funktion der Energie (dies muss nicht zwangsläufig der Fall sein), so ist offensichtlich

$$a_0 = E \quad (7.78)$$

die erhaltene Gesamtenergie des Systems.

Die *zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung* ist nun eine Bestimmungsgleichung für die *zeitunabhängige Funktion*  $W(q, a)$ . Sie wird *charakteristische Funktion* genannt und spielt in der Quantenmechanik (Bd. 3, Abschn. 2.3) eine gewisse Rolle.

Es ist stark problemabhängig, wie aufwendig das Lösen von (7.77), d. h. das Auffinden von  $W(q, a)$ , ist. Man kann kein Standardverfahren dafür angeben. Hier wollen wir lediglich ein einfaches Beispiel zeigen.

### Freie Punktmasse

Eine freie Punktmasse in drei Dimensionen besitzt die Lagrange- und Hamilton-Funktionen

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2, \quad (7.79)$$

wenn wir von kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x}$  ausgehen. Der Impuls ist

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}. \quad (7.80)$$

Da  $H$  zeitunabhängig ist und der Energie entspricht, kann die *zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung* (7.77)

### 7.3 Grundlagen der Hamilton-Jacobi-Theorie

ausgenutzt werden. Sie lautet hier

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x_3} \right)^2 \right] = E \quad (7.81)$$

mit konstanter Energie  $E$ .

Anstatt diese Gleichung direkt zu lösen, probieren wir den Ansatz

$$W(x, a) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \quad (7.82)$$

für die charakteristische Funktion. Durch Einsetzen finden wir, dass

$$E = \frac{\mathbf{a}^2}{2m} \quad (7.83)$$

erfüllt sein muss. Die Prinzipalfunktion lautet also

$$S(t, x, a) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}^2}{2m} t. \quad (7.84)$$

Die konjugierten Impulse erfüllen

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i} = a_i = P_i = \text{const.} \quad (7.85)$$

Durch die kanonische Transformation werden die Impulse also nicht verändert.

Von Interesse sind die Bahnkurven. Dazu berechnen wir zunächst die konstanten Terme

$$b_i = \frac{\partial S}{\partial a_i} = x_i - \frac{a_i}{m} t = \text{const.} \quad (7.86)$$

Man erhält durch Auflösen sofort die Bahnkurven

$$\mathbf{x}(t, b, a) = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}}{m} t. \quad (7.87)$$

Hier ist  $\mathbf{b}$  der Anfangsort, d. h.  $\mathbf{x}(t = 0)$ , und  $\mathbf{a} = \mathbf{p}$  der erhaltene Impuls. Die sechs Konstanten  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{a}$  sind also die benötigten Anfangsbedingungen. 

Allgemein kann man sagen, dass nur solche Probleme mit vertretbarem Aufwand durch den hier vorgestellten Formalismus zu lösen sind, die „entkoppelt“ werden können. Entkoppeln bedeutet hier, dass man die Koordinaten des Problems so wählen kann, dass die Hamilton-Funktion die Gestalt

$$H(q, p) = \sum_i H_i(q_i, p_i) \quad (7.88)$$

annimmt, wobei  $i$  über alle Freiheitsgrade läuft. Sie ist dann die Summe lauter Funktionen, die jeweils nur von einer Koordinate und ihrem konjugierten Impuls abhängen. Dann ist auch ein analoger Separationsansatz für die charakteristische Funktion möglich, der das Lösungsverfahren entscheidend vereinfacht.

## Anwendung: Wellenmechanik Zusammenhang mit geometrischer Optik und Quantenmechanik

Wir beschränken uns hier auf eine einzelne Punktmasse  $m$  in kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x}$ . Dann lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung (7.67)

$$H(t, \mathbf{q}, \nabla S) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Der konjugierte Impuls  $\mathbf{p} = \nabla S$  ist der Gradient der Prinzipalfunktion  $S$ . Er steht somit senkrecht auf Flächen mit konstantem  $S$ . Wir nehmen weiterhin an, dass die Energie  $E$  erhalten ist und der Hamilton-Funktion entspricht. Somit separieren wir die Prinzipalfunktion gemäß

$$S(t, \mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) - Et.$$

Die Hamilton-Funktion hat die Form

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$$

mit einem Potenzial  $V(\mathbf{x})$ .

Flächen mit konstantem  $S$  wandern mit der Zeit durch den Raum und entsprechen zu einer gegebenen festen Zeit gerade den Flächen mit konstantem  $W$ . Die Trajektorie der Punktmasse steht dabei stets senkrecht auf den Niveauflächen. Dies erinnert stark an die Ausbreitung von Wellenfronten. In Bd. 2, Abschn. 7.3 und Bd. 3, Abschn. 2.3 greifen wir diese Idee wieder auf. In der Quantenmechanik wird die Prinzipalfunktion näherungsweise zur Phase der Wellenfunktion  $\psi$ . Dort ist dann die klassische Mechanik ein wohldefinierter Grenzfall der Quantenmechanik (und zwar derjenige, den

man durch die Grenzbetrachtung  $S/h \rightarrow \infty$  findet, wobei  $h$  die Planck'sche Konstante ist).

Der Zusammenhang mit der geometrischen Optik wird deutlich, wenn man die Geschwindigkeit berechnet, mit der sich die Wellenfronten ausbreiten. Dazu vergleicht man den Abstand  $ds$  zweier Niveauflächen zu infinitesimal unterschiedlichen Zeiten  $t$  und  $t + dt$ . Man kann zeigen, dass die charakteristische Funktion  $W(\mathbf{x})$  dabei den Zusammenhang

$$|\nabla W| = \frac{dW}{ds}$$

erfüllt und die lokale Wellengeschwindigkeit durch

$$u(\mathbf{x}) := \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V(\mathbf{x}))}} = \frac{E}{|\nabla W(\mathbf{x})|}$$

gegeben ist. Sie hängt über das Potenzial vom Ort ab. In der geometrischen Optik ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht analog

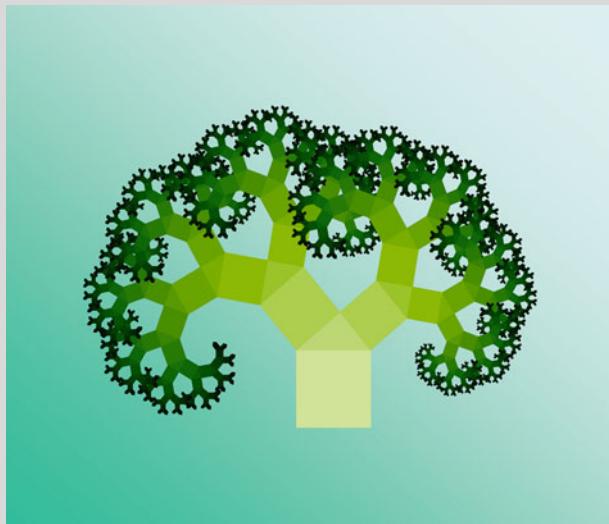
$$u(\mathbf{x}) = \frac{c}{n(\mathbf{x})}.$$

Hier ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $n(\mathbf{x})$  der Brechungsindex, der ebenfalls eine Funktion des Ortes ist. Der Brechungsindex  $n(\mathbf{x})$  ist also eng mit dem Gradienten der charakteristischen Funktion  $W(\mathbf{x})$  verbunden.

# So geht's weiter

## Determinismus und Chaos

Lässt sich das Verhalten der Natur eindeutig aus einer universellen, fundamentalen Theorie herleiten? Der von dieser Frage implizierte Determinismus in der klassischen Physik wurde schon vom französischen Wissenschaftler Pierre-Simon Laplace mathematisch untersucht. Für Laplace war die Welt vollständig determiniert: Würde man nur die Anfangsbedingungen und die Bewegungsgesetze der klassischen Physik genau kennen, so ließe sich jeder zukünftige Zustand des Universums aus den mathematischen Differenzialgleichungen genau berechnen. Auf diese Weise wäre es nach Laplace also zumindest im Prinzip möglich, ein in diesem Zusammenhang oft als Laplace'scher Dämon bezeichnetes Wesen zu postulieren, das alles vorhersagt, was geschehen wird und alles erklärt, was jemals geschehen ist. Dass es in der Praxis jedoch unmöglich sein könnte, diese so determinierte Zukunft eindeutig vorherzusagen, war auch schon Laplace bewusst, da es beispielsweise in einem System von vielen Freiheitsgraden empirisch nicht möglich ist, alle Anfangsbedingungen genau zu bestimmen. Diese Einsicht zeigt sich auch in den Ergebnissen der Chaosforschung: Schlägt ein Schmetterling in China mit den Flügeln, kann man daraus nicht das Wetter in Europa berechnen, wenngleich ein Zusammenhang zwischen beiden Ereignissen bestehen kann.



**Abb. 7.3** Der Baum des Pythagoras

Die Chaosforschung befasst sich mit dynamischen, nichtlinearen Systemen, deren jeweiliges Verhalten sehr empfindlich von den gewählten Anfangsbedingungen abhängt. Dies mag einerseits in Systemen mit vielen Freiheitsgraden der Fall sein, andererseits jedoch auch in solchen mit wenigen Freiheitsgraden. Dort hat man es dann wie im Falle der

schwingenden Atwood'schen Maschine oder des Doppelpendels mit komplexen, gekoppelten, nichtlinearen Bewegungsgleichungen zu tun, welche nur noch numerisch lösbar sind. Das Verhalten der chaotischen Systeme erscheint auf lange Zeiten gesehen als irregär und ungeordnet. Dennoch können sich nach einiger Zeit bestimmte Muster bilden, die durch universelle Konstanten gegeben sind. Ein typisches Verhalten von chaotischen Systemen ist die *Bifurkation* zusammen mit der Selbstreproduktion von bestimmten Formen, die allein gesehen nicht regulär sind, sich aber immer wiederholen. Ein schönes Beispiel hierfür ist der *Baum des Pythagoras* (Abb. 7.3), dessen kleiner werdende Verästelungen immer wieder die Form der vorherigen Struktur reproduzieren. Wie genau können wir uns diesem Begriff des Chaos nähern? Schon bei der alltäglichen Beobachtung der vielfältigen Vorgänge in der Natur sehen wir, dass bereits die klassische Physik eine immense Fülle von Möglichkeiten für uns bereithält. Auch hier können wir unter Umständen nicht alles berechnen – was sich allein daraus ergibt, dass man es oft mit komplexen Systemen zu tun hat, die aus sehr vielen einzelnen Teilchen bestehen. Diese Feststellung mag zunächst trivial klingen, sie ist jedoch sehr wichtig im Hinblick auf das bessere Verständnis der fundamentalen Gesetze der Natur und deren Bedeutung.

Ein Spiel, das sehr gut die Problematik verdeutlicht, ist Mikado, welches aus einer großen Anzahl gleichartiger, lediglich verschiedenen markierter Stäbchen besteht. Diese werden, nachdem sie gebündelt und mit der Hand festgehalten werden, plötzlich losgelassen und verteilen sich dann in großer Unordnung über die Tischoberfläche. Die Ausgangslage ist dabei offensichtlich immer die gleiche: Vor dem Loslassen sind alle Mikadostäbchen parallel und gleich ausgerichtet. Es ist aber praktisch unmöglich, dass sie sich, nachdem sie die Hand verlassen haben, immer gleich über den Tisch verteilen. Trotz scheinbar gleicher Anfangsbedingungen sieht jedes Spiel vollkommen anders aus, und dabei gibt es eine immense Anzahl von Mustern, welche die Mikadostäbchen auf dem Tisch bilden können. Obwohl es sich um klassische Physik handelt, durch welche die Stäbchen beschreibbar sind, sind diese Muster schwer von uns vorherzusagen und auch schwer zu berechnen, obwohl die zugrunde liegenden Gleichungen sehr einfach sind und wir im Prinzip alle Informationen besitzen, um die Lage der einzelnen Mikadostäbchen berechnen zu können.

Betrachten wir im Gegensatz dazu beim Billard den Lauf der Billardkugel, dann können wir mit etwas Geschick und Übung sehr gut vorausbestimmen und auch berechnen, wie sich die Kugel verhalten wird. Stößt eine Billardkugel an den Rand des Billardtisches, so ist der Ausfallswinkel (in Abwesenheit eines Spins der Kugel) immer gleich dem Einfallsinkel, und der Stoß der Billardkugeln untereinander folgt ähnlich einfachen Gesetzmäßigkeiten, nämlich des elastischen Stoßes mit Impuls- und Energieerhaltung.

Was unterscheidet nun Mikadostäbchen von Billardkugeln? Warum verhalten sich nun die einen und die andern augenscheinlich ganz unterschiedlich, obwohl beide doch den gleichen physikalischen Gesetzen folgen? Ein Grund für die Unvorhersagbarkeit beim Mikadospiel ist die große Zahl der Stäbchen. Es ist deshalb nämlich nicht möglich, vor dem Fallenlassen der Stäbchen immer die gleichen Anfangsbedingungen herzustellen. Schon das leichteste Zittern in der Hand oder ein geringfügiges Abweichen in der Ausgangskonfiguration hat einen dramatischen Effekt auf die Endkonfiguration: Alle diese Fluktuationen am Anfang werden durch die Vielzahl der Stäbchen enorm verstärkt. Trotz grundsätzlicher Beschreibung durch eine deterministische Theorie kann man daher keine eindeutige Vorhersage treffen.

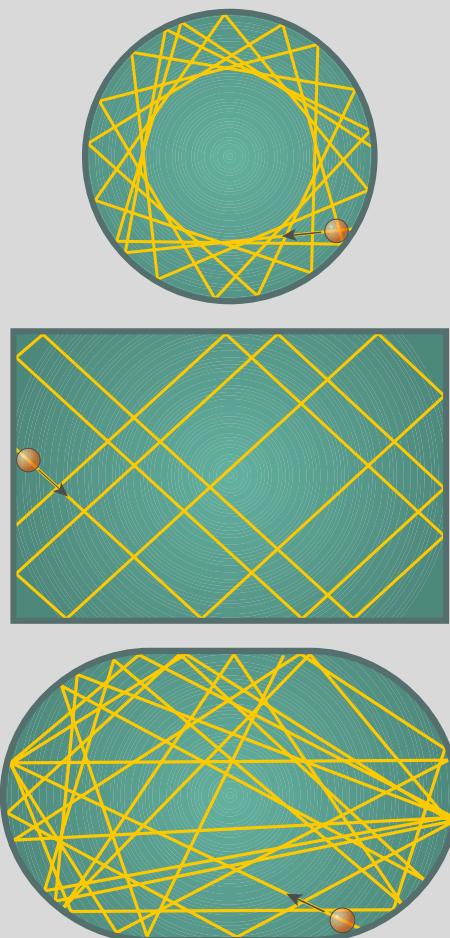
Im Gegensatz dazu folgt die Bahn einer einzelnen Billardkugel immer einem eindeutigen und vorhersagbaren Weg, wenn wir die Billardkugel immer gleich anstoßen und somit in diesem Fall keine Fluktuation besteht. Solche physikalischen Systeme mit einer großen Anzahl von beteiligten Körpern und eventuell auch mit fluktuierenden Anfangsbedingungen lassen sich am besten mit den Methoden der Statistik behandeln.

Wir sehen nun, wie leicht deterministische Theorien übergehen in eine statistische Beschreibung. So ist die klassische Mechanik zusammen mit der Gravitationstheorie von Newton eine vollkommen deterministische Theorie, die bei vorgegebenen Anfangsbedingungen eindeutige Vorhersagen über die Bahn von Planeten oder anderen Körpern ermöglicht. Die Reproduzierbarkeit der Anfangsbedingungen ist jedoch bei einem Experiment in Rahmen der klassischen Physik eine wichtige Voraussetzung, um ein eindeutiges Ergebnis zu erhalten.

Wenn allerdings ein physikalisches System aus einer großen Anzahl von Körpern besteht, dann wird es immer schwieriger, gleiche Anfangsbedingungen für alle beteiligten Teilchen herzustellen und die Berechnungen konkret und analytisch durchzuführen. In diesem Fall kann man statistische Aussagen über den Endzustand treffen, wobei oft auch die analytischen Berechnungen durch aufwendige Simulationen an Computern ersetzt werden müssen. Es gibt auch Vierteilchensysteme, die nunmehr ein ungeordnetes Verhalten aufweisen und Gegenstand der sogenannten Chaosforschung sind.

Nehmen wir nun an, dass die Billardkugeln nicht abgebremst werden, sondern idealerweise unendlich lange rollen können, und verfolgen wir ferner die Bahnen der Billardkugeln über einen sehr großen Zeitraum hinweg. Dann sehen wir, dass, obwohl die Bahnen der Billardkugeln deterministisch vorherbestimmt sind, wir doch ein Vierteilchensystem dadurch simulieren können, indem wir die Anfangsbedingungen, mit der wir die Billardkugel anstoßen, immer wieder verändern. Das ungeordnete, *chaotische* Verhalten von bestimmten Systemen kann man sich daher auch anhand des Billardspiels verdeutlichen.

Schauen wir uns dies noch einmal etwas genauer an: Wir betrachten dafür einen rechteckigen oder auch einen kreisförmigen Billardtisch (Abb. 7.4). Wie wir wissen, wird die Billardkugel am Rand des Tisches so reflektiert, dass Einfalls- und Ausfallswinkel genau übereinstimmen. Auf dem rechteckigen oder auf dem kreisförmigen Tisch sehen die Trajektorien der Billardkugel sehr geordnet und gleichmäßig aus. Hier liegt also kein chaotisches System vor. Dies ändert sich, wenn wir einen stadionförmigen Billardtisch betrachten. Dies ist das sogenannte chaotische Billard oder auch, benannt nach dem russischen Mathematiker Yakov Sinai (\*1935), das *Sinai-Billard*. Hier verlaufen die Trajektorien der Billardkugeln nicht mehr gleichmäßig, sondern ungeordnet, oder wie man sagt, chaotisch. Man kann dabei die Länge der geraden Seiten im stadionförmigen Billardtisch als den Parameter ansehen, der das Chaos bestimmt. Ist dieser Parameter gleich null, dann gibt es kein Chaos. Ist der Parameter allerdings nur um einen kleinen Betrag von Null verschieden, dann setzt das chaotische Verhalten ein.



**Abb. 7.4** Drei verschiedene Billardtische

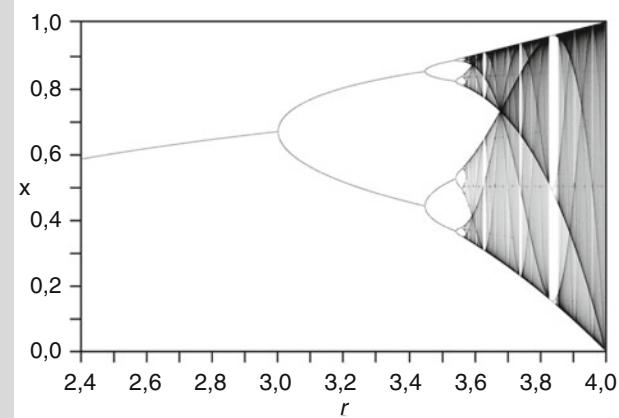
Ein weiteres konkretes System, das ein interessantes chaotisches Verhalten an den Tag legt, ist das demografische Modell der Population einer bestimmten Tierart. Das Anwachsen bzw. das Absterben der betrachteten Population hängt von zwei Faktoren ab: Durch die Fortpflanzung der Tiere vermehrt sich die Population proportional zur Anzahl der schon vorhandenen Tiere im Folgejahr um einen bestimmten Faktor. Andererseits verringert sich die Population der Tiere durch Verhungern, und zwar jährlich in Abhängigkeit von der Differenz zwischen ihrer aktuelle Größe und einer maximal möglichen Größe. (Die maximale Anzahl ist durch das verfügbare Nahrungsangebot begrenzt.)

Ohne auf die genauen Details einzugehen, lässt sich nun das Anwachsen oder auch das Abnehmen der Population in Abhängigkeit von einem bestimmten Parameter  $r$  berechnen, der sowohl die Fortpflanzungsrate als auch die Verhungerungsrate berücksichtigt. Wir können uns jetzt fragen, wie der asymptotische Populationswert  $x$  ( $x$  misst die Anzahl der Tiere nach vielen Jahren im Verhältnis zum maximal möglichen Wert, liegt also immer zwischen 0 und 1) von einer bestimmten, vorgegebenen Anfangspopulation abhängt. Strebt die Population immer gegen einen einzigen Häufungspunkt  $x$ , oder gibt es mehrere solche Häufungspunkte, je nachdem wie viele Tiere am Anfang vorhanden sind? Die mathematischen Berechnungen in diesem Modell führen zu einem sehr interessanten Ergebnis: Mit  $r$  zwischen 0 und 1 stirbt die Population auf jeden Fall, alle Tiere verhungern schließlich, und man erhält also  $x = 0$ . Ab dem Wert  $r = 1$  steigt die asymptotische Population kontinuierlich an, und, egal ob man am Anfang viele oder wenige Tiere hat, ist der asymptotische Populationswert  $x$  unabhängig von der gewählten Anfangspopulation. Hier liegt also genau ein Häufungspunkt vor. Ab einem bestimmten Parameterwert  $r$  ändert sich aber dieses Verhalten (Abb. 7.5). Nun beobachtet man, dass sich für den wachsenden Parameter  $r$  die Anzahl der Häufungspunkte in der asymptotischen Populationsanzahl  $x$  immer bei einem bestimmten  $r$ -Wert verdoppelt.

Dies ist die sogenannte *Periodenverdopplung* oder auch *Bifurkation*; der Abstand zwischen den Werten für  $r$ , bei denen sich die Anzahl der Häufungspunkte in der asymptotischen Population ändert, heißt *Bifurkationsintervall*. Für kleine  $r$ -Werte bewirken kleine Änderungen der Anfangswerte dabei normalerweise keine Änderung der Endpopulation. So führt im Falle von zwei Häufungspunkten eine relativ kleine An-

fangspopulation auf den kleineren der beiden  $x$ -Werte und eine große Anfangspopulation auf den größeren  $x$ -Wert. In diesem Bereich ist das Verhalten der Population also noch regelmäßig.

Ab einem Wert  $r \approx 3,57$  stellt sich aber schlagartig das Chaos ein: Die Folge springt zwischen nun instabilen Häufungspunkten hin und her, schon winzige Änderungen der Anfangspopulation resultieren in unterschiedlichsten Werten für  $x$ , eine Eigenschaft des Chaos. Es gibt aber eine interessante Eigenschaft in diesem Populationsmodell: Das Längenverhältnis zweier aufeinanderfolgender Bifurkationsintervalle nähert sich einer fundamentalen Konstante, der *Feigenbaum-Konstante*  $\delta$ , die den Wert  $\delta \approx 4,669$  annimmt. Dieser Zahlenwert von  $\delta$  wurde zuerst im Jahre 1977 von den Physikern Siegfried Großmann und Stefan Thomae publiziert. Mitchell Feigenbaum entdeckte dann im Jahre 1978 die Universalität dieser Konstante, denn sie bestimmt das chaotische Verhalten in vielen dynamischen Systemen mit Bifurkation, wie z. B. auch beim Wetter.



**Abb. 7.5** Das Populationsdiagramm, das die asymptotische (relative) Anzahl  $x$  einer bestimmten Tierpopulation nach vielen Jahren darstellt. Auf der  $x$ -Achse ist der Parameter  $r$  aufgetragen, der das Verhältnis der Fortpflanzungsrate zur Verhungerungsrate der Tiere bestimmt. Für größer werdendes  $r$  verdoppelt sich die Anzahl der möglichen, asymptotischen Häufungswerte, wobei ab  $r \approx 3,57$  das chaotische Verhalten einsetzt: Die Werte der verschiedenen Häufungspunkte variieren vollkommen unregelmäßig

## Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- leichte Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
- mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
- anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständen auch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

**7.1 •• Zentralpotenzial** Betrachten Sie eine Punktmasse  $m$  im Zentralpotenzial  $V(r)$ .

- Wie lautet die zugehörige Hamilton-Funktion in Kugelkoordinaten? Verwenden Sie dazu gegebenenfalls bekannte Teilergebnisse aus Kap. 5.
- Gibt es zyklische Koordinaten? Wie lauten die kanonischen Gleichungen?
- Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für  $\vartheta$  und  $\varphi$ . Benutzen Sie die Anfangsbedingung  $\vartheta = \pi/2$  (dies entspricht einer geeigneten Wahl der Kugelkoordinaten).
- Zeigen Sie, dass die verbleibende Gleichung für  $r$  der Radialgleichung des Zentralkraftproblems entspricht.

**7.2 • Inverse der Legendre-Transformation** Die Legendre-Transformierte einer konvexen Funktion  $f(x)$  lautet (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 7.1)

$$g(y) = yx(y) - f(x(y)), \quad (7.89)$$

wobei

$$y(x) = f'(x) \quad (7.90)$$

ist. Zeigen Sie, dass die Rücktransformation auf die Variable  $x$  wieder auf die Funktion  $f(x)$  führt. Somit ist auch bewiesen, dass bei Legendre-Transformationen keine Information der ursprünglichen Funktion  $f(x)$  verloren geht.

**7.3 •• Poisson-Klammern und Drehimpuls** Berechnen Sie für den Drehimpuls einer Punktmasse in kartesischen Koordinaten

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k \quad (7.91)$$

die Poisson-Klammern (in den konjugierten Variablen  $x$  und  $p$ )  $\{L_j, L_k\}$  (was auf (7.27) führt) und  $\{L^2, L_k\}$ .

**7.4 •• Punkttransformation** Eine Punkttransformation wird durch

$$Q_i = f_i(t, q) \quad (7.92)$$

beschrieben. Über die Transformation der Impulse wird dabei keine Aussage getroffen; man kann aber davon ausgehen, dass sie allgemein

$$P_i = g_i(t, q, p) \quad (7.93)$$

lautet.

(a) Warum kann eine Punkttransformation nicht durch  $F_1(t, q, Q)$  erzeugt werden?

(b) Gehen Sie im Folgenden von  $F_2(t, q, P)$  aus, d. h., (7.93) wird in der Form

$$p_i = h_i(t, q, P) \quad (7.94)$$

geschrieben. Wie lautet die allgemeine Form der Erzeugenden  $F_2(t, q, P)$ , die auf die Punkttransformation (7.93) und (7.94) führt? Zeigen Sie, dass  $h_i(t, q, P)$  nur höchstens linear von den Impulsen  $P_i$  abhängen kann, wenn die Transformation kanonisch ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Funktionen  $f_i(t, q)$  und  $h_i(t, q, P)$  nicht eindeutig miteinander verknüpft sind.

(c) Begründen Sie, warum alle Punkttransformationen mit differenzierbaren  $f_i(t, q)$  kanonisch sind.

**7.5 ••• Erzeugende** Es soll die Erzeugende  $F_2(t, q, P)$  genauer untersucht werden.

(a) Leiten Sie die Transformationsgleichung (7.47) für  $F_2(t, q, P)$  ab. Gehen Sie dabei von

$$\sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (H' - H) dt = dF'_2(t, q, P) \quad (7.95)$$

aus, wobei  $F'_2(t, q, P)$  wie  $F_2$  von den unabhängigen Größen  $(q, P)$  abhängt. Drücken Sie die  $dQ_i$  durch die Differenziale  $dq_j$  und  $dP_j$  aus. Zeigen Sie, dass die Relation

$$F'_2(t, q, P) + \sum_j Q_j(t, q, P) P_j = F_2(t, q, P) \quad (7.96)$$

zwischen  $F'_2$  und  $F_2$  bestehen muss. Wie lautet die neue Hamilton-Funktion  $H'$ ?

(b) Zeigen Sie damit, dass  $F_1(t, q, Q)$  und  $F_2(t, q, P)$  durch eine Legendre-Transformation ineinander überführt werden können, wenn beide dieselbe kanonische Transformation erzeugen.

**7.6 •• Ebene Polarkoordinaten** Die ebenen Polarkoordinaten sind definiert durch

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (7.97)$$

- (a) Zeigen Sie mithilfe der Lagrange-Gleichungen, dass die zu den Koordinaten  $(r, \varphi)$  konjugierten Impulse für eine freie Punktmasse

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \quad (7.98)$$

sind. Wie lauten die Hamilton'schen Gleichungen?

- (b) Wie lauten die kartesischen Impulse  $p_x = m\dot{x}$  und  $p_y = m\dot{y}$ , ausgedrückt durch  $(r, \varphi)$  und  $(p_r, p_\varphi)$ ?
- (c) Berechnen Sie alle fundamentalen Poisson-Klammern  $\{A, B\}_{r, \varphi, p_r, p_\varphi}$ , wobei für  $A$  und  $B$  die kartesischen Koordinaten und Impulse einzusetzen sind. Zeigen Sie, dass die Transformation von kartesischen zu Polarkoordinaten kanonisch ist (man könnte auch die Poisson-Klammern bezüglich der kartesischen Koordinaten berechnen, dies ist jedoch schwieriger). Warum kann man auch direkt ohne die Berechnung der fundamentalen Poisson-Klammern sagen, dass die Transformation kanonisch ist?
- (d) Überprüfen Sie, dass die Erzeugende

$$F_3(r, \varphi, p_x, p_y) = -r(p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi) \quad (7.99)$$

diese Transformation erzeugt.

### 7.7 •• Harmonischer Oszillator und kanonische Transformation

Wir betrachten den eindimensionalen, ungedämpften und freien harmonischen Oszillator mit Masse  $m$

und Kraftkonstante  $k$ . Im Text wurde bereits gezeigt, dass die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad (7.100)$$

lautet.

- (a) Verwenden Sie die Erzeugende

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2}q^2 \cot Q \quad (7.101)$$

und bestimmen Sie die Transformationsgleichungen für den Übergang zu den neuen Koordinaten  $(Q, P)$ , d. h.  $q(Q, P)$ ,  $p(Q, P)$  und  $Q(q, p)$ ,  $P(q, p)$ . Verwenden Sie dazu die Relation

$$\sin(\arccot x) = \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (7.102)$$

Wie lautet die Hamilton-Funktion  $H'(Q, P)$ ? Zeigen Sie damit, dass  $Q$  eine zyklische Variable und  $P$  damit erhalten ist (d. h.,  $Q$  ist eine Winkel- und  $P$  eine Wirkungsvariable).

- (b) Was bedeutet das Ergebnis für  $Q$ ? Wie lautet die Bewegungsgleichung für  $Q$ ? Lösen Sie sie allgemein und geben Sie damit schließlich die Lösung für  $q(t)$  an.

# Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

## 7.1

(a) Wir beginnen mit der Bestimmung der Lagrange-Funktion in Kugelkoordinaten. Die kinetische Energie  $T$  für Kugelkoordinaten wurde bereits in Aufgabe 5.3 bestimmt:

$$T = \frac{m}{2} \left[ \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \right]. \quad (7.103)$$

Demnach ist die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} \left[ \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \right] - V(r). \quad (7.104)$$

Die konjugierten Impulse sind

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ p_\vartheta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2 \dot{\vartheta}, \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (7.105)$$

Wir erhalten die Hamilton-Funktion durch Anwendung der Legendre-Transformation

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\vartheta}p_\vartheta + \dot{\varphi}p_\varphi - L \quad (7.106)$$

und des anschließenden Übergangs  $(\dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) \rightarrow (p_r, p_\vartheta, p_\varphi)$ . Dazu verwenden wir

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (7.107)$$

Man kann sich schnell vergewissern, dass das Ergebnis

$$H = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \vartheta} + V(r) \quad (7.108)$$

lautet.

(b) Der Winkel  $\varphi$  ist zyklisch und führt damit auf

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \quad (7.109)$$

Die kanonischen Gleichungen für  $r$  lauten

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad (7.110)$$

und

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr^3} \left( p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right) - \frac{dV}{dr}. \quad (7.111)$$

Die erste entspricht der Definition des kanonischen Impulses  $p_r$  und liefert keine neue Information. Dies verhält sich bei den entsprechenden Gleichungen für  $\vartheta$  und  $\varphi$  genauso. Wir schreiben daher nur noch die dynamische Gleichung, also die Zeitableitung des Impulses von  $\vartheta$ , auf:

$$\dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{p_\varphi^2}{mr^2 \sin^3 \vartheta} \cos \vartheta. \quad (7.112)$$

(c) Wir nehmen an, dass  $\vartheta_0 = \pi/2$  ist. Daher ist zur Zeit  $t = 0$  gerade  $\cos \vartheta = 0$  und  $\dot{p}_\vartheta = 0$ . Dies bedeutet aber wegen (7.107), dass zu Beginn auch  $\dot{\vartheta} = 0$  ist. Tatsächlich löst  $\vartheta_0 = \pi/2$  die Differenzialgleichung (7.112);  $\vartheta$  bleibt also konstant:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 = \pi/2 = \text{const.} \quad (7.113)$$

Die Bewegungsgleichung für  $\varphi$  ist trivial gelöst, da  $\varphi$  zyklisch ist:

$$p_\varphi = p_{\varphi,0} = \text{const.} \quad (7.114)$$

Dies führt mit dem Ergebnis für  $\vartheta$  auf den bekannten Flächensatz

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi,0}}{mr^2}, \quad (7.115)$$

wobei  $p_{\varphi,0}$  der konstante Drehimpuls der Punktmasse ist. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit der Diskussion des Zentralkraftproblems in Abschn. 3.2.

(d) Die dynamische Gleichung für  $r$  nimmt nun die vereinfachte Form

$$m\ddot{r} = \frac{p_{\varphi,0}^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \quad (7.116)$$

an. Dies entspricht gerade dem Ausdruck in (3.60). Es ist nur zu beachten, dass dort  $\mu$  (statt  $m$ ) die reduzierte Masse ist.

Wir sehen also, dass der Hamilton-Formalismus einen alternativen Weg zum Auffinden der Bewegungsgleichungen erlaubt.

## 7.2 In jedem Fall muss die Rücktransformation

$$h(x) = xy(x) - g(y(x)) \quad (7.117)$$

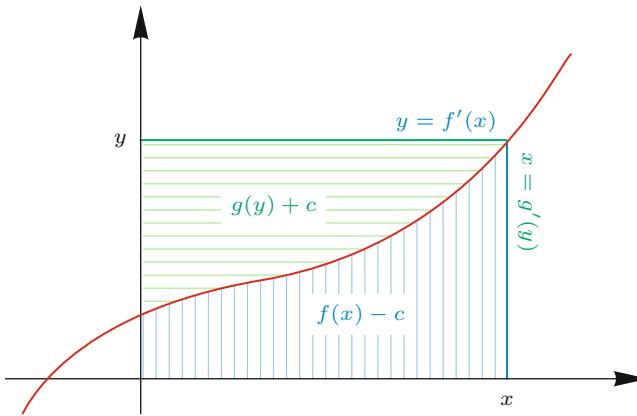
mit einer zu bestimmenden Funktion  $h(x)$  erfüllen. Wir setzen einfach (7.89) in (7.117) ein:

$$h(x) = xy(x) - y(x)x(y(x)) + f(x(y(x))). \quad (7.118)$$

Hier ist zu beachten, dass  $x(y(x)) = x$  gilt; also ist

$$h(x) = xy(x) - y(x)x + f(x). \quad (7.119)$$

Es folgt sofort, dass  $h(x) \equiv f(x)$  ist, was zu zeigen war.



**Abb. 7.6** Geometrischer Beweis dafür, dass die Legendre-Transformation ihr eigenes Inverses ist (Skarke 2013)

Ein geometrisch augenfälliger Beweis für die Tatsache, dass die Legendre-Transformation ihr eigenes Inverses ist, ergibt sich durch die geometrische Interpretation der monoton ansteigenden Funktion  $y(x) = f'(x)$  und ihrer Umkehrung  $x(y)$  in Abb. 7.6, bei der angenommen wurde, dass  $x$  und  $f'(x)$  gleichzeitig positiv sind. Die Fläche unterhalb des Funktionsgraphen ist bis auf eine Integrationskonstante die ursprüngliche Funktion  $f(x)$ . Um  $90^\circ$  gedreht kann der Funktionsgraph als  $x = g'(y)$  gelesen werden, wobei bis auf eine Konstante  $g(y)$  die Fläche darunter ist. Die Summe der beiden Flächen ist offenbar  $xy$ ,

$$f(x) + g(y) = xy, \quad y = f'(x) \quad \text{bzw.} \quad x = g'(y), \quad (7.120)$$

was gerade der Definition der Legendre-Transformation entspricht. Diese Argumentation kann leicht auf die Fälle negativer  $x$  und/oder negativer  $f'(x)$  verallgemeinert werden (Skarke 2013).

### 7.3 Die Definition der Poisson-Klammern (7.22) ist

$$\{F, G\} := \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right). \quad (7.121)$$

Für  $F = L_i$  und  $G = L_j$  findet man

$$\begin{aligned} \{L_j, L_k\} &= \sum_i \left( \frac{\partial(\varepsilon_{jlm} x_l p_m)}{\partial x_i} \frac{\partial(\varepsilon_{knr} x_n p_r)}{\partial p_i} - \frac{\partial(\varepsilon_{jlm} x_l p_m)}{\partial p_i} \frac{\partial(\varepsilon_{knr} x_n p_r)}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_i (\varepsilon_{jlm} \delta_{il} p_m \varepsilon_{knr} x_n \delta_{ir} - \varepsilon_{jlm} x_l \delta_{im} \varepsilon_{knr} \delta_{in} p_r). \end{aligned} \quad (7.122)$$

Bis hierhin wurden nur die Ableitungen berechnet. Es muss beachtet werden, dass über alle doppelt auftretenden Indizes summiert wird. Nur für den Index  $i$  wurde das Summenzeichen explizit hingeschrieben, da es aus der Definition der Poisson-

Klammern stammt. Im Folgenden wird die Summation über  $i$ ,  $l$  und  $m$  ausgeführt:

$$\begin{aligned} \{L_j, L_k\} &= \varepsilon_{jrm} \varepsilon_{knr} p_m x_n - \varepsilon_{jln} \varepsilon_{knr} x_l p_r \\ &= \varepsilon_{rmj} \varepsilon_{rkn} p_m x_n - \varepsilon_{njl} \varepsilon_{nrk} x_l p_r \\ &= (\delta_{km} \delta_{jn} - \delta_{mn} \delta_{jk}) p_m x_n - (\delta_{jr} \delta_{kl} - \delta_{jk} \delta_{lr}) x_l p_r \quad (7.123) \\ &= p_k x_j - x_k p_j \\ &= \varepsilon_{jkl} L_l. \end{aligned}$$

Den letzten Schritt überprüft man mithilfe der Definition des Drehimpulses (7.91).

Für die zweite zu bestimmende Poisson-Klammer sieht man zunächst

$$\{L^2, L_k\} = \{L_j L_j, L_k\}, \quad (7.124)$$

wobei über  $j$  summiert wird. Hier kann man die Produktregel

$$\{A, BC\} = B\{A, C\} + C\{A, B\} \quad (7.125)$$

ausnutzen:

$$\{L_j L_j, L_k\} = 2L_j \{L_j, L_k\}. \quad (7.126)$$

Wir sind damit schon fast fertig, denn man kann das Ergebnis (7.123) verwenden:

$$\{L_j L_j, L_k\} = 2L_j \varepsilon_{jkl} L_l. \quad (7.127)$$

Es wird über  $j$  und  $l$  summiert. Das Produkt  $L_j L_l$  ist symmetrisch, das Levi-Civita-Symbol  $\varepsilon_{jkl}$  aber antisymmetrisch unter der Vertauschung  $j \leftrightarrow l$ . Daher ist das Ergebnis null:

$$\{L^2, L_k\} = 0. \quad (7.128)$$

Die Ergebnisse (7.123) und (7.128) spielen in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Dort werden die Poisson-Klammern durch die sogenannten *Kommutatoren* ersetzt.

### 7.4

(a) Eine Punkttransformation bedeutet, dass die neuen Koordinaten  $Q_i$  von den alten  $q_i$  abhängen. Da die Erzeugende  $F_1$  aber die Unabhängigkeit von  $q_i$  und  $Q_i$  voraussetzt, würde dies zu einem Widerspruch führen.

(b) Verwendet man  $F_2(t, q, P)$ , so gilt zunächst

$$Q_i = \frac{\partial F_2(t, q, P)}{\partial P_i} = f_i(t, q). \quad (7.129)$$

Diese Gleichung kann aufintegriert werden zu

$$F_2(t, q, P) = \sum_i \int f_i(t, q) dP_i = \sum_i f_i(t, q) P_i + C(t, q). \quad (7.130)$$

Dies bedarf einiger Kommentare. Zum einen muss über  $i$  summiert werden, da über alle  $P_i$ , die voneinander unabhängig sind, zu integrieren ist. Dies entspricht dem Vorgehen,

das Potenzial aus einem konservativen Kraftfeld in kartesischen Koordinaten zu berechnen: Dort muss über alle drei kartesischen Koordinaten integriert werden (Abschn. 1.6). Da die Funktionen  $f_i$  nicht von den  $P_i$  abhängen, kann die Integration direkt ausgeführt werden. Dabei tritt im Allgemeinen eine von  $P_i$  unabhängige „Integrationskonstante“ auf, die jedoch von allen  $q_i$  und der Zeit abhängen kann:  $C(t, q)$ . Schließlich muss noch

$$\begin{aligned} p_i(t, q, P) &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_j f_i(t, q) P_j + C(t, q) \right) \\ &= h_i(t, q, P) \end{aligned} \quad (7.131)$$

gelten. Da die Impulse  $P_i$  in  $F_2$  nur höchstens linear auftreten, gilt dies auch für  $h_i$ . Die Funktionen  $f_i(t, q)$  und  $h_i(t, q, P)$  sind also eng, aber nicht eindeutig miteinander verknüpft: Die Wahl von  $C(t, q)$  ist beliebig (die Funktion muss jedoch differenzierbar sein).

- (c) Es sind genau dann alle Punkttransformationen kanonisch, wenn alle Funktionen  $f_i(t, q)$  mit kanonischen Transformationen vereinbar sind. Allerdings wird die Wahl von  $f_i$  nur dadurch eingeschränkt, dass  $f_i(t, q)$  differenzierbar ist, damit die  $p_i$  berechnet werden können. Ansonsten ist  $f_i(t, q)$  beliebig.

## 7.5

- (a) Das Differenzial von  $F'_2$  ist

$$dF'_2(t, q, P) = \sum_i \left( \frac{\partial F'_2}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F'_2}{\partial P_i} dP_i \right) + \frac{\partial F'_2}{\partial t} dt. \quad (7.132)$$

Andererseits kennen wir das Differenzial (7.95). Offensichtlich können die Differenziale noch nicht miteinander verglichen werden, da in (7.132)  $dP_i$ , in (7.95) aber  $dQ_i$  auftritt. Da die  $q_i$  und  $P_i$  die unabhängigen Größen sind, können wir allerdings

$$dQ_i(t, q, P) = \sum_j \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial Q_i}{\partial P_j} dP_j \right) + \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt \quad (7.133)$$

schreiben. Setzt man (7.133) in (7.95) ein, folgt

$$\begin{aligned} dF'_2(t, q, P) &= \sum_i \left( p_i dq_i - P_i \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j \right) \\ &\quad - \sum_i P_i \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial P_j} dP_j \\ &\quad - \sum_i P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt + (H' - H) dt. \end{aligned} \quad (7.134)$$

Dies ist mit (7.132) zu vergleichen. Aufgrund der Unabhängigkeit der Differenziale gilt zunächst

$$\sum_i \frac{\partial F'_2}{\partial q_i} dq_i = \sum_i \left( p_i dq_i - P_i \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j \right). \quad (7.135)$$

Wir benennen nun die Summationsindizes im zweiten Term auf der rechten Seite folgendermaßen um:  $i$  wird in  $j$  und gleichzeitig  $j$  in  $i$  umbenannt. Dies ist möglich, da über beide Indizes summiert wird. Es folgt also

$$\sum_i \frac{\partial F'_2}{\partial q_i} dq_i = \sum_i p_i dq_i - \sum_j P_j \sum_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} dq_i. \quad (7.136)$$

Da alle  $dq_i$  unabhängig sind, kann man den Vergleich auf

$$p_i = \frac{\partial F'_2}{\partial q_i} + \sum_j P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \quad (7.137)$$

reduzieren. Nun sind aber die  $P_j$  nach Voraussetzung von den  $q_i$  unabhängig; man kann also

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( F'_2 + \sum_j Q_j P_j \right) = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad (7.138)$$

schreiben, was die erste zu zeigende Gleichung ist.

Der Vergleich der Koeffizienten der  $dP_i$  führt auf

$$\frac{\partial F'_2}{\partial P_i} = - \sum_j P_j \frac{\partial Q_j}{\partial P_i}. \quad (7.139)$$

Dies kann wegen  $\partial P_j / \partial P_i = \delta_{ij}$  umgeschrieben werden in

$$0 = \frac{\partial}{\partial P_i} \left( F'_2 + \sum_j Q_j P_j \right) - Q_i \quad (7.140)$$

und schließlich in die gewünschte Form

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}. \quad (7.141)$$

Es ist nur noch der Zusammenhang für die Hamilton-Funktionen  $H$  und  $H'$  zu zeigen. Ein Vergleich des Zeitdifferenzials führt auf

$$\frac{\partial F'_2}{\partial t} = - \sum_i P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} + (H' - H) \quad (7.142)$$

oder, da die  $P_i$  und  $t$  unabhängig sind,

$$H' = H + \frac{\partial}{\partial t} \left( F'_2 + \sum_i Q_i P_i \right) = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (7.143)$$

- (b) Wir haben gesehen, dass

$$F_2(t, q, P) = F'_2(t, q, P) + \sum_j Q_j P_j \quad (7.144)$$

gilt. Vergleicht man (7.44) und (7.95) und verlangt, dass man es mit derselben kanonischen Transformation zu tun hat, so

sieht man, dass  $F_1(t, q, Q)$  und  $F'_2(t, q, P)$  identische Größen sind, allerdings ausgedrückt durch verschiedene unabhängige Koordinaten. Somit ist

$$\begin{aligned} F_2(t, q, P) &= F_1(t, q, Q) + \sum_i Q_i P_i(t, q, Q) \\ &= F_1(t, q, Q) - \sum_i Q_i \frac{\partial F_1(t, q, Q)}{\partial Q_i}, \end{aligned} \quad (7.145)$$

d.h., die Erzeugenden  $F_1$  und  $F_2$ , welche dieselbe kanonische Transformation erzeugen, gehen durch eine Legendre-Transformation ineinander über (wobei eine noch mögliche Konstante ignoriert wurde).

## 7.6

(a) Die Geschwindigkeiten sind

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (7.146)$$

Daraus folgt die kinetische Energie bzw. Lagrange-Funktion

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \quad (7.147)$$

Die generalisierten Impulse lauten entsprechend

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}. \quad (7.148)$$

Die Hamilton-Funktion ist

$$H = \dot{r} p_r + \dot{\varphi} p_\varphi - L = \frac{1}{2} \left( \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} \right). \quad (7.149)$$

Aus ihr folgen die Hamilton'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, & \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3}, & \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (7.150)$$

Da  $\varphi$  zyklisch ist, ist  $p_\varphi$  erhalten. Diese Gleichungen können mit den Gleichungen des Zentralkraftproblems in Abschn. 3.2 verglichen werden.

(b) Durch Einsetzen von (7.148) in (7.146) folgt

$$\begin{aligned} p_x &= m \dot{x} = p_r \cos \varphi - \frac{p_\varphi}{r} \sin \varphi, \\ p_y &= m \dot{y} = p_r \sin \varphi + \frac{p_\varphi}{r} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7.151)$$

Somit sind die kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  und Impulse  $(p_x, p_y)$  als Funktion der Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  und der entsprechenden Impulse  $(p_r, p_\varphi)$  bekannt.

(c) Man erkennt bereits, dass es sich um eine Punkttransformation handelt, da  $x$  und  $y$  nur von  $r$  und  $\varphi$  abhängen. Wir erwarten also, dass die Transformation kanonisch ist. Außerdem sind deswegen alle Ableitungen von  $x$  und  $y$  nach  $p_r$  und  $p_\varphi$  null, was die Berechnung der fundamentalen Poisson-Klammern beschleunigt. Tatsächlich findet man dadurch schnell, dass die Poisson-Klammer  $\{x, y\}_{r, \varphi, p_r, p_\varphi}$  identisch verschwindet. Wegen der Definition der Poisson-Klammern sind auch  $\{x, x\}_{r, \varphi, p_r, p_\varphi}$  und  $\{y, y\}_{r, \varphi, p_r, p_\varphi}$  sowie  $\{p_x, p_x\}_{r, \varphi, p_r, p_\varphi}$  und  $\{p_y, p_y\}_{r, \varphi, p_r, p_\varphi}$  null. Wir verzichten im Folgenden zur besseren Übersicht auf den Index der Poisson-Klammern. Es ist noch

$$\begin{aligned} \{p_x, p_y\} &= \frac{\partial p_x}{\partial r} \frac{\partial p_y}{\partial p_r} + \frac{\partial p_x}{\partial \varphi} \frac{\partial p_y}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial p_x}{\partial p_r} \frac{\partial p_y}{\partial r} - \frac{\partial p_x}{\partial p_\varphi} \frac{\partial p_y}{\partial \varphi} \\ &= \frac{p_\varphi}{r^2} \sin^2 \varphi + \left( -p_r \sin \varphi - \frac{p_\varphi}{r} \cos \varphi \right) \frac{\cos \varphi}{r} \\ &\quad + \frac{p_\varphi}{r^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r} \sin \varphi \left( p_r \cos \varphi - \frac{p_\varphi}{r} \sin \varphi \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.152)$$

Wir berechnen die verbleibenden Poisson-Klammern,

$$\begin{aligned} \{x, p_x\} &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \\ \{y, p_y\} &= \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1, \end{aligned} \quad (7.153)$$

sowie

$$\begin{aligned} \{x, p_y\} &= \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi = 0, \\ \{y, p_x\} &= \sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi \sin \varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.154)$$

Damit ist gezeigt, dass die Transformation tatsächlich kanonisch ist.

(d) Aus der Erzeugenden  $F_3$  (7.99) lassen sich die folgenden Gleichungen ableiten:

$$\begin{aligned} p_r &= -\frac{\partial F_3}{\partial r} = p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi, \\ p_\varphi &= -\frac{\partial F_3}{\partial \varphi} = -p_x r \sin \varphi + p_y r \cos \varphi, \\ x &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_x} = r \cos \varphi, \\ y &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_y} = r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (7.155)$$

Die letzten beiden Gleichungen sind offensichtlich die bereits bekannten Transformationsgleichungen für die Orte. Die ersten beiden lassen sich nach  $p_x$  und  $p_y$  auflösen, was unmittelbar auf (7.151) führt.

## 7.7

(a) Zunächst ist

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q} = m \omega q \cot Q. \quad (7.156)$$

Der transformierte Impuls lautet wegen  $d \cot x / dx = -1 / \sin^2 x$

$$P = -\frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q}. \quad (7.157)$$

Man kann sofort die folgenden Transformationsgleichungen ablesen:

$$Q(q, p) = \arccot \left( \frac{1}{m\omega} \frac{p}{q} \right) \quad (7.158)$$

und

$$|q(Q, P)| = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} |\sin Q|. \quad (7.159)$$

Durch Einsetzen von (7.159) in (7.156) findet man die dritte Gleichung:

$$p(Q, P) = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad (7.160)$$

Es verbleibt noch die Relation für  $P(q, p)$ . Sie folgt aus (7.157) und (7.158). Mithilfe von (7.102) bekommt man

$$P(q, p) = \frac{m\omega}{2} q^2 + \frac{p^2}{2m\omega}. \quad (7.161)$$

Man erkennt bereits, dass

$$P = \frac{E}{\omega} \quad (7.162)$$

ist. Wir wollen allerdings formal die Hamilton-Funktion  $H'(Q, P)$  berechnen, um dies zu zeigen. Setzt man in  $H(q, p)$  die Transformationsgleichungen  $q(Q, P)$  und  $p(Q, P)$  ein, folgt

$$H'(Q, P) = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P. \quad (7.163)$$

(b) Die neue Koordinate  $Q$  ist zyklisch und der generalisierte Impuls  $P$  erhalten. Da  $P$  bis auf einen konstanten Vorfaktor der Energie entspricht, ist auch die Energie erhalten. Die Bewegungsgleichung für  $Q$  lautet

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'(Q, P)}{\partial P} = \omega = \text{const.} \quad (7.164)$$

Die Lösung ist daher

$$Q = \omega t + Q_0 \quad (7.165)$$

mit einer geeignet zu wählenden Konstanten  $Q_0$ . Dieses Ergebnis wird in (7.159) eingesetzt, wobei wir noch  $Q_0$  in  $-\phi$  umbenennen. Das Ergebnis ist die wohlbekannte Lösung

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t - \phi). \quad (7.166)$$

Der Term vor dem Sinus ist gerade die Amplitude und  $\phi$  die Phasenverschiebung der Schwingung.

Obwohl die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators einfacher bestimmt werden kann, ist dieses Beispiel doch sehr instruktiv. Insbesondere erkennt man, dass durch eine geeignete kanonische Transformation die Anzahl der zyklischen Koordinaten erhöht werden kann. In diesem Fall gibt es sogar keine nichtzyklische Koordinate mehr; man hat es also mit Winkel- und Wirkungsvariablen zu tun. Es wird weiterhin deutlich, dass die generalisierten Koordinaten und Impulse mit den kartesischen Koordinaten und Newton'schen Impulsen im Allgemeinen nichts mehr zu tun haben.

## Literatur

Goldstein, H.: Klassische Mechanik. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1981)

Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: Mechanics. Pergamon Press, Oxford (1969)

Skarke, H.: Why is the Legendre transformation its own inverse?  
Am. J. Phys. **81**, 554–555 (2013)

# Kontinuumsmechanik

# 8



Kapitel 8

Was ist ein elastisches Kontinuum?

Was versteht man unter einem Feld?

Wie lassen sich periodische Vorgänge allgemein beschreiben?

Was ist eine mechanische Spannung?

Was ist der Unterschied zwischen Festkörpern und Fluiden?

Welche Bedeutung hat Reibung in Fluiden?

8.1	Lineare Kette und Übergang zum Kontinuum . . . . .	272
8.2	Schwingende Saite . . . . .	277
8.3	Fourier-Reihen . . . . .	281
8.4	Lagrange-Formalismus für Felder . . . . .	287
8.5	Grundlagen der Elastizitätstheorie . . . . .	290
8.6	Ideale Flüssodynamik . . . . .	297
8.7	Viskosität und Navier-Stokes-Gleichung . . . . .	304
	So geht's weiter . . . . .	308
	Aufgaben . . . . .	312
	Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	314
	Literatur . . . . .	318

Bisher haben wir uns entweder mit der Dynamik von Punktmassen oder von starren Körpern beschäftigt. Die dabei gelernten Methoden und Verfahren reichen für viele physikalische Anwendungen aus. In sehr vielen Problemen hat man es allerdings mit Systemen zu tun, die sich am zweckmäßigsten durch ein nichtstarres Kontinuum beschreiben lassen. Beispiele sind Flüssigkeiten und Gase (zusammengefasst auch als Fluide bezeichnet) oder elastische Festkörper wie Gummibänder oder Gitarrensaiten.

Wir werden hier untersuchen, wie sich verformbare Kontinua mathematisch beschreiben lassen und welche physikalischen Konsequenzen sich daraus ergeben. Zunächst wird der Kontinuumsstielmes durchgeführt. Dies erfordert die Einführung von sogenannten Federn, die in der Elektrodynamik (Bd. 2) eine fundamentale Rolle spielen werden. Die einfachsten Beispiele sind die lineare Kette und die schwingende Saite in Abschn. 8.1 und 8.2.

Als mathematischer Exkurs werden die sogenannten Fourier-Reihen in Abschn. 8.3 diskutiert. Sie stellen ein wichtiges Hilfsmittel für viele Probleme in der Physik dar, z. B. für schwingende Kontinua.

Nach einer kurzen Einführung in den Lagrange-Formalismus für Felder in Abschn. 8.4 beschäftigen wir uns mit den Grundlagen der Elastizitätstheorie (Abschn. 8.5). Dabei taucht auch der sogenannte Spannungstensor auf, der in Feldtheorien eine bedeutende Rolle spielt.

Abschließend werden die Grundlagen der Fluidodynamik vorgestellt. Wir beginnen mit einer Einführung in die Physik idealer Fluide (Abschn. 8.6), deren innere Reibung vernachlässigt wird. In Abschn. 8.7 wird diese Vereinfachung wieder aufgehoben und die sogenannte Viskosität eingeführt. Dies führt auf die wichtigen Navier-Stokes-Gleichungen.

Das vorliegende Kapitel behandelt Probleme, die von einigen Dozenten in Vorlesungen der theoretischen Mechanik behandelt werden. Doch wohl keine einführende Mechanik-Vorlesung ist so umfangreich, dass sie all diese Punkte abdecken kann. Dieses Kapitel richtet sich vor allem an neugierige und fortgeschrittene Studenten. Da viele weiterführende Themen wie Elastizitätstheorie oder Fluidodynamik ihre Wurzeln in der Mechanik haben, bietet es sich an, die Grundideen und Ansätze dieser Themen hier den Lesern vorzustellen. Dabei werden teilweise Begriffe und Hilfsmittel verwendet, die später vor allem in der Elektrodynamik wieder auftauchen (z. B. Felder, Oberflächenintegrale, die Kontinuitätsgleichung, der Spannungstensor). Eine Lektüre dieses Kapitels ist daher nicht nur eine Ergänzung der Mechanik, sondern vereinfacht auch das Verständnis des Stoffes in späteren Semestern.

## 8.1 Lineare Kette und Übergang zum Kontinuum

Wie schon beim starren Körper in Kap. 4 werden hier Systeme behandelt, die eine sehr große Anzahl von Punktmassen beinhalten. Eine explizite Beschreibung der Dynamik all dieser Freiheitsgrade ist unpraktisch, wenn nicht sogar unmöglich.

Beim starren Körper wurde angenommen, dass die paarweisen Abstände der elementaren Punktmassen alle konstant sind. Dies führte schließlich auf die Definition des Trägheitstensors und auf die Euler'schen Bewegungsgleichungen für starre Körper. Hier erlauben wir nun eine relative Bewegung benachbarter Punktmassen im Rahmen einer elastischen Wechselwirkung.

Zunächst werden die resultierenden kontinuierlichen Bewegungsgleichungen für ein eindimensionales System abgeleitet. Dazu wird der Young'sche Elastizitätsmodul als Materialeigenschaft eingeführt. Außerdem finden wir Wellenlösungen für das elastische Band.

### Lineare Kette

Wir beginnen mit einem der einfachsten elastischen Systeme in einer Dimension: die lineare Kette, die uns bereits in Abschn. 6.5 begegnet ist. Dazu betrachten wir  $N + 1$  Punktmassen  $m$ , die sich im Gleichgewichtszustand an den Orten

$$x_i = ia_0 \quad (0 \leq i \leq N) \quad (8.1)$$

befinden (Abb. 6.10). Hier ist  $a_0$  der Gleichgewichtsabstand benachbarter Punktmassen. Alle Punktmassen sollen sich nur entlang der  $x$ -Achse bewegen dürfen; ihre Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage seien  $q_i$ . Zwischen benachbarten Punktmassen sollen lineare (d. h. harmonische) Kräfte wirken.

Wir können uns also lauter identische Federn mit Kraftkonstanten  $D$  zwischen benachbarten Punktmassen vorstellen. Dies schränkt die Gültigkeit auf kleine Auslenkungen ein, wie bereits in Kap. 6 diskutiert. Allerdings lassen sich damit schon eine Vielzahl von physikalischen Effekten erklären. Nichtlineare Wechselwirkungen würden den Umfang dieser Einführung sprengen.

---

#### Frage 1

Schauen Sie sich erneut den Abschnitt über die lineare Kette in Kap. 6 an.

---

Die Kettenenden seien offen, d. h., die Punktmassen 0 und  $N$  haben nur einen Nachbarn. Die kinetische und die potenzielle Energie lauten dann

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i=0}^N \dot{q}_i^2, \quad V = \frac{D}{2} \sum_{i=1}^N (q_i - q_{i-1})^2. \quad (8.2)$$

Beachten Sie, dass die beiden Summen unterschiedliche Grenzen haben. Dies liegt daran, dass es bei  $N + 1$  Punktmassen  $N$  wechselwirkende Paare gibt, die zur potenziellen Energie beitragen.

Die Lagrange-Funktion ist wie gewohnt

$$L = T - V = \frac{m}{2} \sum_{i=0}^N \dot{q}_i^2 - \frac{D}{2} \sum_{i=1}^N (q_i - q_{i-1})^2. \quad (8.3)$$

Offenbar ist die Energie  $E = T + V$  erhalten, da  $L$  nicht explizit von der Zeit abhängt. Dies charakterisiert einen *elastischen Körper*.

### Elastischer Körper

Einen Körper, dessen Punktmassen durch konservative Kräfte wechselwirken, nennt man elastisch. Die Gesamtenergie ergibt sich aus der kinetischen und der Wechselwirkungsenergie. Wird ein elastischer Körper verformt, so wird die zur Verformung benötigte Arbeit als elastische (potenzielle) Energie gespeichert und kann wieder vollständig in kinetische Energie umgewandelt werden (wobei der Körper in seine Ursprungsgestalt zurückkehrt). Reibungskräfte treten in einem idealen elastischen Körper nicht auf.

Die Bewegungsgleichungen für alle Punktmassen lassen sich aus der Lagrange-Funktion ableiten:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_0 - D(q_1 - q_0) &= 0, \\ m\ddot{q}_i + D(q_i - q_{i-1}) - D(q_{i+1} - q_i) &= 0 \quad (0 < i < N), \quad (8.4) \\ m\ddot{q}_N + D(q_N - q_{N-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, spielen die Punktmassen mit  $i = 0$  und  $i = N$  eine Sonderrolle, da sie an den Enden der Kette liegen.

### Äußere Kräfte

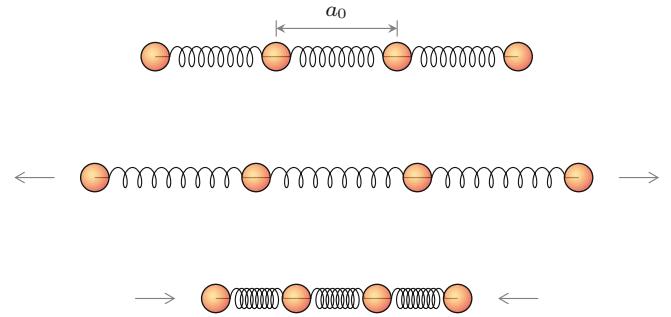
Wir gehen nun einen Schritt weiter und lassen noch eine konstante äußere Kraft  $-F$  auf die linke Punktmasse ( $i = 0$ ) und eine entgegengesetzt wirkende Kraft  $+F$  auf die rechte Punktmasse ( $i = N$ ) wirken. Dadurch bleibt das System insgesamt unbeschleunigt, doch die Dynamik der Punktmassen verändert sich, wie wir in Kürze sehen werden. Ist  $F > 0$ , ziehen die Kräfte das System auseinander. Man sagt, es wirkt eine *Zugspannung*. Ist dagegen  $F < 0$ , so wird das System komprimiert, und man spricht von einer *Druckspannung*.

Durch die Anwesenheit der Kraft  $F$  bleiben fast alle Bewegungsgleichungen unverändert, nur die für die Punktmassen 0 und  $N$  müssen modifiziert werden:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_0 - D(q_1 - q_0) + F &= 0, \\ m\ddot{q}_N + D(q_N - q_{N-1}) - F &= 0. \quad (8.5) \end{aligned}$$

#### Frage 2

Vergewissern Sie sich, dass die Bewegungsgleichungen in (8.5) korrekt sind. Modifizieren Sie dazu die Lagrange-Funktion, indem Sie dort Terme proportional zu  $Fq_0$  bzw.  $Fq_N$  berücksichtigen. Es gibt also zwei zusätzliche Potenzialanteile, die gerade der Bewegung von der linken und der rechten Masse in einem konstanten äußeren Kraftfeld entsprechen.



**Abb. 8.1** Ohne äußere Kräfte beträgt der Gleichgewichtsabstand benachbarter Punktmassen der Kette  $a_0$  (oben). Ziehen Kräfte, die nur an den beiden äußeren Punktmassen angreifen, die Kette auseinander, verlängern sich alle Federn im Gleichgewicht um denselben Betrag (Mitte). Dasselbe gilt für eine Kompression (unten)

Wir fragen nun nach der Gleichgewichtsbedingung unter dem Einfluss der Kraft  $F$ . Das System ist vollständig im Gleichgewicht, wenn alle Beschleunigungen verschwinden, d.h., wenn  $\ddot{q}_i = 0$  für alle  $i$  gilt. Da unter dem Einfluss von Kräften die Orte, an denen sich die Punktmassen im Gleichgewicht befinden, verändern können (man denke an eine Masse an einer Feder, die unter dem Einfluss der Schwerpunkt tiefer hängt), hat man es folglich mit *neuen* Gleichgewichtslagen zu tun. Es folgt zum einen

$$q_1 - q_0 = \frac{F}{D}, \quad q_N - q_{N-1} = \frac{F}{D} \quad (8.6)$$

und zum anderen

$$q_i - q_{i-1} = q_{i+1} - q_i \quad (0 < i < N). \quad (8.7)$$

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass (8.6) und (8.7) die Bedingungen

$$q_i - q_{i-1} = \frac{F}{D} \quad (0 < i \leq N) \quad (8.8)$$

verlangen. Dies bedeutet, dass alle Federn sich um den gleichen Betrag  $F/D$  verlängern bzw. verkürzen (Abb. 8.1). Unter dem Einfluss der Kraft  $F$  wird also der Gleichgewichtsabstand jeder einzelnen Feder der Kette zu

$$a = a_0 + \frac{F}{D}. \quad (8.9)$$

**Achtung** Der aufmerksame Leser könnte hier fragen, ob das Ergebnis nicht um einen Faktor 2 daneben liegt. Da nämlich die Kräfte  $\pm F$  links und rechts angreifen, wirkt auf jede Feder die Gesamtkraft  $2F$ , und somit müsste die Feder um den Betrag  $2F/D$  gestreckt bzw. gestaucht werden. Dies ist allerdings eine falsche Schlussfolgerung, die man sich leicht anhand des folgenden Beispiels überlegen kann. Wir stellen uns vor, dass eine Masse  $m$  an einer Feder mit Federkonstante  $D$  hängt, die an der Zimmerdecke befestigt ist. Auf  $m$  wirkt dann die Gravitationskraft  $F = mg$ , was auf eine Federverlängerung um den

Betrag  $F/D$  führt. Allerdings wirkt nun auf den Fixpunkt der Feder an der Decke eine entgegengesetzte Kraft  $-F$ . Warum? Dies ist gerade die Zwangskraft, welche die Feder an der Decke hält; ansonsten würde die Feder abreißen und nach unten beschleunigt werden. Da es der Feder aber völlig egal ist, ob es sich um eine Zwangskraft oder um eine andere äußere Kraft handelt, ist die Feder an der Zimmerdecke äquivalent zu der linearen Kette (mit einer einzigen Feder), und die Verlängerung wird durch  $F$  (und nicht durch  $2F$ ) bestimmt.  $\blacktriangleleft$

### Frage 3

Dieser Abschnitt ist leichter zu verstehen, wenn man sich den Fall  $N = 2$  mit einer einzigen Feder vorstellt. Dann wirken die beiden Kräfte  $\pm F$  direkt auf die alleinigen beiden Massen. Schauen Sie sich die obigen Rechnungen unter diesem Gesichtspunkt erneut an.

## Young'scher Elastizitätsmodul und Übergang zum Kontinuum

Durch die äußere Kraft  $F$  wird die Gesamtlänge der Kette  $\ell$  um einen Betrag

$$\Delta\ell = N \frac{F}{D} \quad (8.10)$$

verändert. Die Ruhelänge der Kette ist

$$\ell = Na_0. \quad (8.11)$$

Somit ist die *relative Längenänderung*

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{NF}{NDa_0} = \frac{F}{Da_0} = \frac{F}{Y}, \quad (8.12)$$

wobei wir mit

$$Y := Da_0 \quad (8.13)$$

den *Elastizitätsmodul*  $Y$  definiert haben. Er bestimmt in der linearen Näherung die Dehnung bzw. Stauchung der Kette bedingt durch die äußere Kraft  $F$ . Der Elastizitätsmodul ist eine reine *Materialeigenschaft* der Kette. Je größer  $Y$  ist, desto steifer ist die Kette, und desto weniger wird sie durch eine äußere Kraft beeinflusst. Im Grenzfall  $Y \rightarrow \infty$  hat man es wieder mit einem starren Körper zu tun.

### Frage 4

Der Elastizitätsmodul hat die Dimension einer Kraft. Er entspricht derjenigen Kraft, bei der die Feder um ihre eigene Länge gedehnt bzw. gestaucht werden würde. Überlegen Sie sich, warum wir deswegen stets  $F \ll Y$  verlangen.

An dieser Stelle soll der Übergang zum Kontinuum vorgenommen werden. Praktisch bedeutet dies, dass eine einzelne Feder sehr kurz im Vergleich zur Kette ist. Man führt also den Übergang  $a_0 \rightarrow 0$  derart durch, dass die Gesamtlänge  $\ell = Na_0$ ,

der Elastizitätsmodul  $Y = Da_0$  und die Kettenmasse  $M = Nm$  konstant bleiben. Dies ist möglich, indem man die *lineare Massendichte*

$$\rho := \frac{M}{\ell} = \frac{m}{a_0} \quad (8.14)$$

und den Elastizitätsmodul  $Y$  festhält (weswegen auch  $m \rightarrow 0$  geht).

Dies führt auf eine wichtige Änderung in der mathematischen Beschreibung: Die bisher diskreten Auslenkungen  $q_i(t)$  werden zu einer kontinuierlichen *Feldfunktion*  $q(t, x)$  (in vielen Lehrbüchern wird eine andere Reihenfolge der Argumente verwendet; wir schreiben aus Gründen der Konsistenz mit späteren Kapiteln zuerst das Zeitargument). Man ordnet also jedem Raumtpunkt  $x$  entlang der Kette eine kontinuierliche Auslenkung zu. In (1.17) hatten wir bereits das Gravitationsfeld einer Punktmasse eingeführt.

### Feld

In der Physik versteht man unter einem Feld eine Größe, die eine Funktion des Ortes ist (z. B. eine Funktion von  $r$  in drei Dimensionen). Zusätzlich kann ein Feld zeitabhängig sein. Felder können skalar-, vektor- oder tensorwertig sein. So ist beispielsweise die Temperaturkarte der Wettervorhersage ein Skalarfeld, da die Temperatur eine skalare Größe ist:  $T(r)$ . Ein Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(r)$  hingegen ist eine vektorwertige Größe und wird beispielsweise verwendet, um die Strömung einer Flüssigkeit am Ort  $r$  zu beschreiben.

Tensorfelder sind weniger anschaulich, spielen aber in der theoretischen Physik eine große Rolle. Der Spannungstensor eines elastischen Körpers oder einer Flüssigkeit ist ein Beispiel. Wir kommen später im Kapitel darauf zurück.

Wie kann man sich nun eine kontinuierliche Verformung  $q(t, x)$  vorstellen? Hierzu denke man sich zunächst die nichtdeformierte Kette als kontinuierliches Material. Man ordnet nun jedem Raumtpunkt eine Markierung zu, die sich – von einem raumfesten Koordinatensystem aus betrachtet – lokal mit der Kette mitbewegt, wenn diese deformiert wird. Eine Markierung, die sich im unverformten Zustand am Ort  $x$  befunden hat, verschiebt sich bei einer Verformung im Allgemeinen an einen anderen Ort  $x'$ . Die Differenz  $q = x' - x$  ordnet man dann dem *ursprünglichen* Referenzort  $x$  zu. Da die Verformung zeitabhängig sein kann, schreiben wir letztlich also  $q(t, x)$ , was bedeutet, dass sich die Markierung zur Zeit  $t$  am Ort  $x'(t) = x + q(t, x)$  befindet.

Setzt man nun voraus, dass die Verformung  $q(x)$  eine hinreichend glatte Funktion ist, so kann man die Auslenkungen der benachbarten Punktmassen durch eine Taylor-Entwicklung beschreiben:

$$\begin{aligned} q_{i\pm 1}(t) &\rightarrow q(t, x \pm a_0) \\ &= q(t, x) \pm a_0 \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{(t,x)} + \frac{a_0^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \Big|_{(t,x)} \pm \dots \end{aligned} \quad (8.15)$$

Selbstverständlich ist es mit diesen Definitionen nicht getan, denn man ist an einer kontinuierlichen Beschreibung der *Dynamik* interessiert. Dazu muss man sich ansehen, was mit den Bewegungsgleichungen geschieht, wenn der Kontinuumslices durchgeführt wird. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten: Zum einen können wir die für das diskrete System bekannten Bewegungsgleichungen direkt kontinuierlich formulieren. Der elegantere Weg ist allerdings ein anderer: Zunächst kann man die Lagrange-Funktion in ein *Lagrange-Funktional* der Verschiebungsfunktion  $q(t, x)$  umwandeln und anschließend daraus die Bewegungsgleichungen ableiten.

Wir wollen hier zunächst den ersten Weg beschreiten, da er einfacher ist. In Abschn. 8.4 holen wir schließlich den Kontinuumsübergang der Lagrange-Funktion nach. Es wird dort unter anderem gezeigt, dass sich daraus dieselben Bewegungsgleichungen ergeben.

Wir konzentrieren uns zunächst auf denjenigen Fall, bei dem keine äußeren Kräfte wirken (Kräfte werden in Abschn. 8.2 und Aufgabe 8.1 berücksichtigt). Für die Punktmassen, die nicht am Rand liegen, gilt wegen (8.4)

$$m\ddot{q}_i - D(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}) = 0 \quad (0 < i < N). \quad (8.16)$$

Mithilfe der Kontinuumsnotation erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{a_0^2} \\ & \rightarrow \frac{[q(x+a_0) - q(x)] - [q(x) - q(x-a_0)]}{a_0^2}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

wobei wir nun die diskreten Punktmassen durch eine kontinuierliche Verteilung ersetzt haben. Der Term auf der rechten Seite kann im Kontinuumslices  $a_0 \rightarrow 0$  als Differenzenquotient der ersten Ableitungen angesehen werden:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{q(x+a_0) - q(x)}{a_0} - \frac{q(x) - q(x-a_0)}{a_0}}{a_0} \\ & = \frac{\frac{\partial q}{\partial x}\Big|_x - \frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x-a_0}}{a_0} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\Big|_x. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Wir haben es also mit der zweiten Ableitung von  $q$  nach  $x$  zu tun. Ersetzt man nun die linke Seite von (8.17) durch die zweite Ableitung, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen im Kontinuumslices.

### Kräftefreie Bewegungsgleichung des elastischen Bandes

Die Bewegungsgleichung des Bandes (d. h. der kontinuierlichen Kette) lautet in Abwesenheit von äußeren Kräften

$$\rho \frac{\partial^2 q(t, x)}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 q(t, x)}{\partial x^2} = 0. \quad (8.19)$$

## 8.1 Lineare Kette und Übergang zum Kontinuum

Es handelt sich hierbei um eine *lineare partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung* für die Funktion  $q(t, x)$ , die auf dem Intervall  $[0, \ell]$  definiert ist.

### Frage 5

Zeigen Sie (8.19), indem Sie die Definitionen der Massendichte  $\rho$  und des Elastizitätsmoduls  $Y$  ausnutzen.

In der Kontinuumsmechanik werden also die Bewegungsgleichungen für Punktmassen durch partielle Differenzialgleichungen für Felder ersetzt. Wie in vielen anderen Bereichen der Physik ist diese *Feldgleichung* linear und erlaubt Wellenlösungen. Feldgleichungen werden uns in diesem Buch noch häufig begegnen. Zu den besonders wichtigen Beispielen gehören die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik (Bd. 2) und die Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik (Bd. 3).

Zum Lösen von (8.19) sind im Allgemeinen Randbedingungen erforderlich, d. h., es sind Bedingungen an  $q(t, x)$  an den Orten  $x = 0$  und  $x = \ell$  zu stellen. Dies wird in Abschn. 8.2 und Aufgabe 8.1 ausgeführt. Nun wollen wir allerdings erst das unendliche Band betrachten, das ohne Randbedingungen auskommt.

### Die d'Alembert'sche Gleichung

Wir beginnen mit einer mathematischen Untersuchung der Schwingungsgleichung (8.19). Dazu schreiben wir sie zunächst in der Gestalt

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) q(t, x) = 0. \quad (8.20)$$

Zur Abkürzung wurde

$$v := \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (8.21)$$

mit der Dimension einer Geschwindigkeit eingeführt. Die physikalische Bedeutung von  $v$  wird in Kürze deutlich werden. Der Term in der Klammer ist ein Differenzialoperator, der auf die Funktion  $q(t, x)$  wirkt. Offenbar sind all diejenigen Funktionen Lösungen der Schwingungsgleichung, die der Differenzialoperator auf null abbildet. Wir fragen nun nach der allgemeinen Klasse von Lösungen  $q(t, x)$ .

D'Alembert schlug 1747 einen eleganten Lösungsweg vor. Dazu werden der Ort  $x$  und die Zeit  $t$  durch zwei neue Variablen  $\xi$  und  $\eta$  ersetzt:

$$\begin{aligned} & \xi := x + vt, \quad \eta := x - vt \\ & \Rightarrow x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2v}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

**Frage 6**

Zeigen Sie, dass die Orts- und Zeitableitungen dann als

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = v \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (8.23)$$

geschrieben werden können. Verwenden Sie dazu die Kettenregel

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) q \quad (8.24)$$

und den entsprechenden Zusammenhang für die Zeitableitung.

Der Differenzialoperator in (8.20) wird somit zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= v^2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 - v^2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \\ &= -4v^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

**d'Alembert'sche Schwingungsgleichung**

Mit den in (8.22) eingeführten Parametern  $\xi$  und  $\eta$  nimmt die Schwingungsgleichung (8.20) die einfache Form

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (8.26)$$

an.

D'Alembert zeigte, dass jede Funktion der Form

$$q(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta) \quad (8.27)$$

mit zwei beliebigen differenzierbaren Funktionen  $g(\xi)$  und  $h(\eta)$  die allgemeine Lösung der d'Alembert-Gleichung ist. Dieses Ergebnis erhält man direkt, indem man (8.26) einmal nach  $\xi$  und einmal nach  $\eta$  integriert.

**Frage 7**

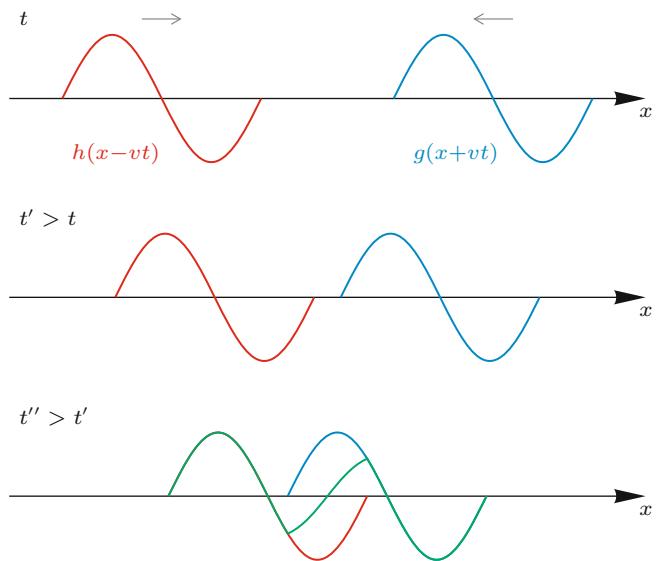
Überprüfen Sie, dass (8.27) die d'Alembert-Gleichung löst. Warum spielt eine additive Konstante keine Rolle?

Was bedeutet dies nun physikalisch? Wir transformieren dazu zurück auf die Parameter  $x$  und  $t$  und finden, dass

$$q(t, x) = g(x + vt) + h(x - vt) \quad (8.28)$$

die Gestalt der allgemeinen Lösung ist. Die beiden Funktionen  $g$  und  $h$  beschreiben Wellen, die sich in positive bzw. negative Richtung bewegen (Abb. 8.2).

Sind die räumlichen Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  zu einer Zeit  $t$  festgelegt, so behalten beide Funktionen ihre Gestalt (genauer:



**Abb. 8.2** Die beiden Wellen  $h(x - vt)$  (rot) und  $g(x + vt)$  (blau) propagieren mit der Zeit nach rechts bzw. links, ohne ihre Gestalt zu verändern (oben und Mitte). Überlappen sie (unten), so ist die resultierende Auslenkung (grün) einfach die Summe von  $h$  und  $g$ .

ihren Graphen); sie verschieben sich lediglich mit der Zeit in verschiedene Richtungen nach links bzw. nach rechts. Die Geschwindigkeit dieser Ausbreitung ist gerade durch  $v$  gegeben. Damit ist  $v$  die **Wellengeschwindigkeit**.

**Achtung** Der Begriff „Welle“ umfasst hier Funktionen, die beliebig geformt sein dürfen, aber mit der korrekten Geschwindigkeit  $v$  laufen müssen. Sinusfunktionen der Form  $A \sin(k(x \pm vt))$  sind daher nur spezielle Lösungen. ▶

**Unendliches Band**

Wir stellen uns ein unendlich ausgedehntes elastisches Band vor, das sich durch die Schwingungsgleichung (8.20) beschreiben lässt. Zu Beginn seien die Auslenkung und ihre Änderungsgeschwindigkeit überall bekannt:

$$q(t = 0, x) = q_0(x), \quad \dot{q}(t = 0, x) = \dot{q}_0(x). \quad (8.29)$$

Wie lautet nun die Auslenkung zu einer beliebigen Zeit? Gesucht ist also die Lösung für  $q(t, x)$  zu allen Zeiten.

Dazu gehen wir den Umweg über die d'Alembert-Parameter  $\xi$  und  $\eta$ . Aus den Anfangsbedingungen und den Definitionen von  $g$  und  $h$  folgt für  $t = 0$  zunächst

$$\begin{aligned} g(x) + h(x) &= q_0(x), \\ v [g'(x) - h'(x)] &= \dot{q}_0(x). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Der Strich steht dabei für die Ableitung nach dem Argument von  $g$  bzw.  $h$ . Wir möchten als Erstes die Lösungen

für  $g(x + vt)$  und  $h(x - vt)$  finden. Dazu integrieren wir die zweite Gleichung in (8.30):

$$v[g(x) - h(x)] = \int_{x_0}^x \dot{q}_0(x') dx' + C, \quad (8.31)$$

wobei  $C$  eine Integrationskonstante ist. Dieses Zwischenergebnis lässt sich durch eine Addition bzw. Subtraktion mit der ersten Gleichung in (8.30) kombinieren:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{q_0(x)}{2} + \frac{1}{2v} \left[ \int_{x_0}^x \dot{q}_0(x') dx' + C \right], \\ h(x) &= \frac{q_0(x)}{2} - \frac{1}{2v} \left[ \int_{x_0}^x \dot{q}_0(x') dx' + C \right]. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Somit ist der Anfangszustand, ausgedrückt durch  $g$  und  $h$ , bekannt. Da wir aber wissen, dass die Zeitentwicklung von  $g$  und  $h$  lediglich darin besteht, dass die Funktionen entlang der  $x$ -Achse laufen, können wir direkt das Ergebnis  $q(t, x)$  zu allen Zeiten notieren. Dazu muss bloß das Argument von  $g$  durch  $x + vt$  und das von  $h$  durch  $x - vt$  ersetzt werden:

$$\begin{aligned} q(t, x) &= g(x + vt) + h(x - vt) \\ &= \frac{1}{2}[q_0(x + vt) + q_0(x - vt)] \\ &\quad + \frac{1}{2v} \left( \int_{x_0}^{x+vt} \dot{q}_0(x') dx' + C \right) \\ &\quad - \frac{1}{2v} \left( \int_{x_0}^{x-vt} \dot{q}_0(x') dx' + C \right) \\ &= \frac{1}{2}[q_0(x + vt) + q_0(x - vt)] \\ &\quad + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \dot{q}_0(x') dx'. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Man erkennt, dass ein Raumpunkt  $x$  zur Zeit  $t$  nur durch anfängliche ( $t = 0$ ) Störungen im Raumbereich  $[x - vt, x + vt]$  beeinflusst wird. Daran sieht man erneut, dass sich die Wellen mit der Geschwindigkeit  $v$  ausbreiten.

Es wird außerdem deutlich, dass man zu Beginn sowohl den Auslenkungszustand  $q_0(x)$  als auch seine Änderungsgeschwindigkeit  $\dot{q}_0(x)$  kennen muss, um die Lösung in (8.33) eindeutig festzulegen. Der Grund ist, dass die Schwingungsgleichung zweiter Ordnung in der Zeit ist. Wir haben somit ein *Anfangswertproblem* gelöst. ▲

## 8.2 Schwingende Saite

Die Bewegungsgleichung für das lineare Band wird nun auf den Fall einer dreidimensional schwingenden Saite verallgemeinert. Wir lösen die Bewegungsgleichung für eine eingespannte Saite, d. h. eine Saite mit festgehaltenen Enden. Wir werden sehen, dass sich transversale und longitudinale Schwingungen in der Saite mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Die Ergebnisse bieten auch einen Einblick in die Funktionsweise von Musikinstrumenten.

### Aufstellung der Bewegungsgleichung

Kommen wir nun zu einem interessanten Beispiel aus dem Alltag: die Saite mit fest eingespannten Enden. Der Unterschied zum linearen Band ist, dass die Elemente der Saite in alle drei Raumrichtungen schwingen können. Wir verlangen allerdings, dass die ruhende Saite entlang der  $x$ -Achse verläuft. Erneut beginnen wir mit einer diskreten Formulierung; den Übergang zum Kontinuum führen wir durch, nachdem wir die diskreten Bewegungsgleichungen aufgestellt haben.

Die  $N + 1$  Punktmassen  $m$  der Saite befinden sich im Gleichgewicht an den Orten

$$\mathbf{x}_i = ai\hat{\mathbf{e}}_x \quad (0 \leq i \leq N). \quad (8.34)$$

Hier ist  $a$  der Gleichgewichtsabstand benachbarter Punkte unter dem Einfluss der Einspannung, d. h.  $a > a_0$ . Die eingespannte Saite ist also länger als das freie Band:

$$\ell' := Na > Na_0 = \ell. \quad (8.35)$$

Die Auslenkungen  $\mathbf{q}_i(t)$  definieren wir nun bezüglich der eingespannten Ruhelagen in (8.34). Wie bereits erwähnt, können die  $\mathbf{q}_i(t)$  in eine beliebige Richtung zeigen; sie sind nicht auf die  $x$ -Achse beschränkt (Abb. 8.3).

Aufgrund der eingespannten Enden sind die folgenden beiden Bedingungen zu allen Zeiten erfüllt:

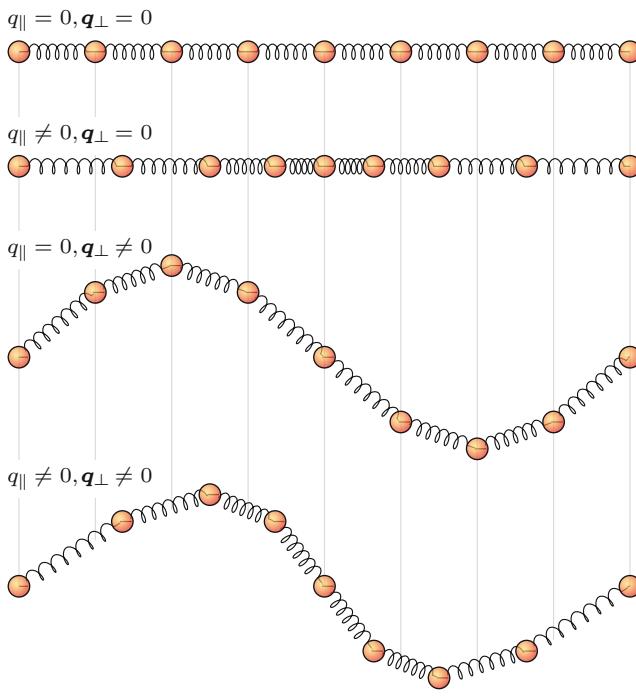
$$\mathbf{q}_0(t) = \mathbf{q}_N(t) = \mathbf{0}. \quad (8.36)$$

In Abschn. 8.1 wurde erläutert, dass sich eine Vorspannung durch eine äußere Kraft  $F$  auf die beiden äußeren Punktmassen erreichen lässt. Hier ist diese Kraft eine unbekannte Zwangskraft; wir wissen nur, dass sie die Randbedingungen in (8.36) erzeugt.

Die potenzielle Energie soll nur aus harmonischen Termen bestehen:

$$V = \frac{D}{2} \sum_{i=1}^N (|\mathbf{(x}_i + \mathbf{q}_i) - (\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{q}_{i-1})| - a_0)^2. \quad (8.37)$$

Hier ist zu beachten, dass das globale Minimum der potenziellen Energie nur erreicht wird, wenn alle Federn die Länge  $a_0$  besitzen. Dies ist wegen der Vorspannung allerdings nicht möglich, da mindestens immer eine Feder länger als  $a_0$  sein muss.



**Abb. 8.3** Eine eingespannte Kette bzw. Saite kann prinzipiell in alle Richtungen schwingen. In der *oberen Abbildung* ist die Kette im undeformierten Zustand gezeigt. Die *beiden mittleren Abbildungen* illustrieren eine reine Longitudinal- bzw. Transversalverformung. Eine allgemeine Verformung ist in der *unteren Abbildung* gezeigt. Die *senkrechten grauen Linien* deuten die longitudinalen Ruhelagen der Punktmassen an

### Frage 8

Überlegen Sie sich, dass eine Druckspannung, also  $a_0 > a$  bzw.  $F < 0$ , auf eine instabile Situation führen würde.

Im Folgenden soll der Ausdruck für die potentielle Energie vereinfacht werden. Dazu sind einige Entwicklungen und Abschätzungen notwendig. Wir betrachten die Beträge in der potentiellen Energie genauer:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}| \\ = |a\hat{\mathbf{e}}_x + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}| \\ = \sqrt{a^2 + 2a(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x + (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1})^2} \\ = \sqrt{[a + (q_{i,\parallel} - q_{i-1,\parallel})]^2 + (q_{i,\perp} - q_{i-1,\perp})^2}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Hier wurde die Auslenkung in einen Anteil parallel zur  $x$ -Achse (longitudinaler Anteil) und einen orthogonalen bzw. transversalen Anteil zerlegt:

$$\mathbf{q}_i = q_{i,\parallel} \hat{\mathbf{e}}_x + \mathbf{q}_{i,\perp}, \quad \mathbf{q}_{i,\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{i,y} \\ q_{i,z} \end{pmatrix}. \quad (8.39)$$

Nimmt man nun an, dass die relativen transversalen Auslenkungen zwischen zwei benachbarten Punktmassen klein sind gegenüber dem Abstand  $a$ , d. h.

$$(q_{i,\perp} - q_{i-1,\perp})^2 \ll [a + (q_{i,\parallel} - q_{i-1,\parallel})]^2, \quad (8.40)$$

so kann man die Wurzel bis zur zweiten Ordnung in  $\mathbf{q}$  entwickeln und findet

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}| \\ \approx a + (q_{i,\parallel} - q_{i-1,\parallel}) + \frac{1}{2a}(q_{i,\perp} - q_{i-1,\perp})^2. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Dabei wurde neben  $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$  für  $x \ll 1$  noch ausgenutzt, dass im Nenner  $a + (q_{i,\parallel} - q_{i-1,\parallel}) \approx a$  ersetzt werden kann, da auch die longitudinalen Auslenkungen klein sein sollen. Insgesamt folgt nun

$$\begin{aligned} (|\mathbf{x}_i + \mathbf{q}_i| - |\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{q}_{i-1}|) - a_0 \\ \approx (a - a_0)^2 + 2(a - a_0)(q_{i,\parallel} - q_{i-1,\parallel}) \\ + (q_{i,\parallel} - q_{i-1,\parallel})^2 + \frac{a - a_0}{a}(q_{i,\perp} - q_{i-1,\perp})^2, \end{aligned} \quad (8.42)$$

wobei alle Terme mit höherer als zweiter Ordnung in  $\mathbf{q}$  vernachlässigt wurden.

### Frage 9

Gehen Sie durch die Teilschritte, die auf (8.42) geführt haben. Überprüfen Sie die Näherungen, indem Sie sich danach fragen, welche Terme führend und welche vernachlässigbar sind.

Erinnern wir uns daran, was wir eigentlich erreichen wollen. Wir müssen (8.42) über  $i$  summieren, um die potentielle Energie und anschließend die Bewegungsgleichungen zu erhalten. Die Konstante  $(a - a_0)^2$  fällt beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen fort; dieser Term kann also direkt gestrichen werden. Da wir außerdem verlangt haben, dass die Saite fest eingespannt ist und somit  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_N = 0$  gilt, muss

$$\sum_{i=1}^N (q_{i,\parallel} - q_{i-1,\parallel}) = 0 \quad (8.43)$$

sein, wie man schnell beweisen kann. Dieser Term trägt also auch nicht zur Dynamik bei. Weiterhin schreiben wir

$$\frac{a - a_0}{a} \approx \frac{a - a_0}{a_0} = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{F}{Da_0} = \frac{F}{Y}. \quad (8.44)$$

Hier ist  $F$  diejenige Kraft, die zur Vorspannung benötigt wird (Abschn. 8.1), und man kann  $a$  im Nenner durch  $a_0$  ersetzen, wenn die Vorspannung klein ist:  $F \ll Y$ .

Die Lagrange-Funktion lautet mit den oben durchgeführten Vereinfachungen schließlich

$$\begin{aligned} L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{N-1} & \left( \dot{q}_{i,\parallel}^2 + \dot{q}_{i,\perp}^2 \right) \\ & - \frac{a_0}{2} \sum_{i=1}^N \left[ Y \frac{(q_{i,\parallel} - q_{i-1,\parallel})^2}{a_0^2} + F \frac{(q_{i,\perp} - q_{i-1,\perp})^2}{a_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Wir sehen, dass die longitudinalen und transversalen Terme nicht gemischt sind, d.h., sie enthalten keine Produkte der Art  $q_{i,\parallel} q_{i,\perp}$ . Die Bewegungsgleichungen für die  $q_{i,\parallel}$  und die  $q_{i,\perp}$  sind also entkoppelt. Dies ist eine Folge der vorgenommenen Vereinfachungen. Höhere, hier vernachlässigte Terme der potentiellen Energie sind gemischt, sodass die Bewegungsgleichungen eigentlich gekoppelt sind. Allerdings ist diese Kopplung bei kleinen Auslenkungen so schwach, dass wir sie hier getrost unterschlagen können.

Die Bewegungsgleichungen für die Punktmassen  $0 < i < N$  sind analog zu (8.16). Sie folgen direkt aus der Lagrange-Funktion (8.45) und lauten

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_{i,\parallel} - \frac{Y}{a_0} (q_{i+1,\parallel} - 2q_{i,\parallel} + q_{i-1,\parallel}) &= 0, \\ m\ddot{q}_{i,\perp} - \frac{F}{a_0} (q_{i+1,\perp} - 2q_{i,\perp} + q_{i-1,\perp}) &= 0. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Was bedeutet dies? Der Elastizitätsmodul  $Y$  ist für die Rückstellkraft in  $x$ -Richtung verantwortlich. Dies haben wir bereits in Abschn. 8.1 gesehen. Zusätzlich haben wir hier einen Term gefunden, der die Rückstellkraft in der  $y$ - $z$ -Ebene beschreibt und durch die Vorspannung  $F$  erzeugt wird. Eine lose eingespannte Saite mit  $F = 0$  kann also nicht in der  $y$ - $z$ -Ebene schwingen, da es (in erster Näherung) keine entsprechende Rückstellkraft gibt.

### Frage 10

Vergewissern Sie sich, dass die Bewegungsgleichungen der diskreten linearen Kette in Abschn. 8.1 aus (8.46) folgen, wenn man nur Auslenkungen entlang der  $x$ -Achse gestattet. Die lineare Kette ist also nichts weiter als ein Spezialfall der (noch diskreten) Saite.

Es fehlt noch der Kontinuumsliches. Hier ist nichts Neues zu sagen. Man erhält ihn analog zu dem in Abschn. 8.1 vorgestellten Verfahren.

### Kräftefreie kontinuierliche Bewegungsgleichung der schwingenden Saite

Die Bewegungsgleichungen der kontinuierlichen, kräftefrei schwingenden Saite lauten

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 q_{\parallel}(t,x)}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 q_{\parallel}(t,x)}{\partial x^2} &= 0, \\ \rho \frac{\partial^2 q_{\perp}(t,x)}{\partial t^2} - F \frac{\partial^2 q_{\perp}(t,x)}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Sie sind auf dem Intervall  $(0, \ell')$  definiert.

Wir sehen, dass mit

$$v_{\parallel} := \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad v_{\perp} := \sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad (8.48)$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen im Allgemeinen unterschiedlich sind.

### Transversal schwingende Saite

Es soll nun untersucht werden, wie eine eingespannte, transversal ausgelenkte Saite schwingt. Wir beschränken uns zur Vereinfachung auf eine Schwingung entlang der  $y$ -Achse, was wegen der Symmetrie in der  $y$ - $z$ -Ebene keine Einschränkung ist. Es ist also die partielle Differenzialgleichung

$$f \frac{\partial^2 q(t,x)}{\partial t^2} - v_{\perp}^2 \frac{\partial^2 q(t,x)}{\partial x^2} = 0 \quad (8.49)$$

mit den Randbedingungen

$$q(t, 0) = q(t, \ell') = 0 \quad (8.50)$$

zu lösen, wobei wir zur Vereinfachung  $q(t,x)$  statt  $q_y(t,x)$  schreiben.

Randbedingungen der Art (8.50), bei denen die Funktion an einem bestimmten Ort einen bestimmten Wert annehmen muss, nennt man *Dirichlet'sche Randbedingungen*. Weiterhin gibt es *Neumann'sche Randbedingungen*, die eine Forderung an die Ableitung der Funktion stellen. In Aufgabe 8.1 werden wir einer Neumann'schen Randbedingung begegnen. Weiterhin wird in Bd. 2, Kap. 2 und Bd. 3, Kap. 6 noch mehr über diese Randbedingungen gesagt.

Wir werden hier nicht den Ansatz von d'Alembert verfolgen. Stattdessen schlagen wir einen anderen Weg ein, der auf die Fourier-Reihen führt, was in Kürze deutlich werden wird.

Für die lineare Kette in (6.147) wurden die Orts- und Zeitabhängigen abgespalten, indem für alle Oszillatoren dieselbe Zeitabhängigkeit angesetzt wurde. Analog schreiben wir hier

$$q(t,x) = f(x)g(t). \quad (8.51)$$

(Separationsansätze wie dieser werden in Bd. 2, Kap. 6 detailliert besprochen.) Dies ergibt unmittelbar

$$f \frac{d^2 g}{dt^2} - v_{\perp}^2 g \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \implies \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} = \frac{v_{\perp}^2}{f} \frac{d^2 f}{dx^2}. \quad (8.52)$$

Die linke Seite hängt nur noch von der Zeit  $t$ , die rechte nur noch vom Ort  $x$  ab. Damit die Gleichung zu allen Zeiten und an allen Orten im Intervall  $(0, \ell')$  erfüllt ist, müssen beide Seiten der Gleichung einer Konstanten  $-c$  entsprechen (das Minuszeichen dient nur der Zweckmäßigkeit). Dies führt auf die zwei Bestimmungsgleichungen

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = -cg, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{cf}{v_{\perp}^2}. \quad (8.53)$$

### Frage 11

Überlegen Sie sich, dass  $c > 0$  sein muss, damit die Lösung nicht exponentiell anwächst. Man hat es also mit zwei Schwingungsgleichungen zu tun. Zeigen Sie weiterhin, dass die

Konstante  $c$  die Dimension einer quadratischen Kreisfrequenz haben muss.

Führt man  $\omega := \sqrt{c}$  ein, so lauten die Lösungen von (8.53)

$$g(t) = A_g \cos(\omega t - \phi_g), \quad f(x) = A_f \sin\left(\frac{\omega}{v_{\perp}}x - \phi_f\right). \quad (8.54)$$

Es ergeben sich also vier Integrationskonstanten: zwei Amplituden ( $A_f$  und  $A_g$ ) und zwei Phasen ( $\phi_f$  und  $\phi_g$ ). Für das Produkt  $f(x)g(t)$  kann man allerdings die beiden Konstanten  $A_f$  und  $A_g$  zu  $A_f A_g$  zusammenfassen.

Die eigentlich interessanten Ergebnisse erhält man erst, wenn die Randbedingungen berücksichtigt werden. Um  $q(t, 0) = 0$  und  $q(t, \ell') = 0$  zu erfüllen, könnte man  $A_g = 0$  fordern. Dies führt allerdings auf den trivialen Fall einer ruhenden Saite und soll nicht weiterverfolgt werden. Für  $A_g \neq 0$  folgt

$$\phi_f = 0, \quad \frac{\omega}{v_{\perp}}\ell' = n\pi \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (8.55)$$

Die Kreisfrequenz kann daher nur die diskreten Werte

$$\omega_n = n\pi \frac{v_{\perp}}{\ell'} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (8.56)$$

annehmen. Das Auftreten einer „Quantisierung“ (hier mit „Quantenzahl“  $n$ ) durch die Anwesenheit von Randbedingungen finden wir auch in der Quantenmechanik wieder. Dies wird in Bd. 3 gründlich untersucht.

Die *Wellenlänge*  $\lambda$  ergibt sich aus dem Argument der Funktion  $f(x)$ , indem man diese als  $f(x) = A_f \sin(2\pi x/\lambda - \phi_f)$  schreibt; sie kann ebenfalls nur diskrete Werte annehmen:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{\omega_n} v_{\perp} = \frac{2\ell'}{n} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (8.57)$$

Dies ist in Abb. 8.4 illustriert. Damit verbunden ist die sogenannte *Wellenzahl*

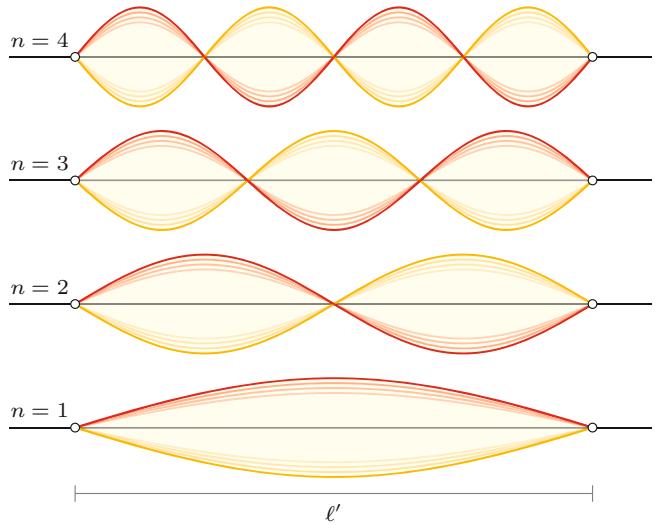
$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{\ell'} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (8.58)$$

Bei Musikinstrumenten wie Geigen oder Gitarren nennt man die Lösung mit  $n = 1$  den *Grundton*. Höhere  $n$  ergeben die *Obertöne*. Die Lösung für  $q(t, x)$  für ein gegebenes  $n$  ist schließlich

$$q^{(n)}(t, x) = C_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \sin(k_n x) \quad (8.59)$$

mit Amplituden  $C_n$  und Phasen  $\phi_n$ . Es handelt sich um *stehende Wellen* mit *Knoten* bei  $x = 0$  und  $x = \ell'$ , also Punkten, bei denen die Auslenkung zu allen Zeiten verschwindet.

Die Differenzialgleichung (8.49) ist linear und homogen. Man kann daher Lösungen beliebig superponieren.



**Abb. 8.4** Eine eingespannte Saite der Länge  $\ell'$  erlaubt stehende Wellen mit diskreten Wellenlängen (8.57), hier gezeigt für  $n = 1, 2, 3, 4$ . Die Anzahl der Knoten ist  $n + 1$

### Allgemeine Lösung der schwingenden Saite

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (8.49) für die schwingende Saite ist

$$q(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \sin(k_n x) \quad (8.60)$$

mit reellen Koeffizienten  $c_n$  und diskreten Frequenzen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{F}{\rho}} k_n. \quad (8.61)$$

Die noch unbekannten Konstanten  $c_n$  und  $\phi_n$  (von denen es im Prinzip unendlich viele gibt) lassen sich aus den Anfangsbedingungen  $q(0, x)$  und  $\dot{q}(0, x)$  bestimmen. Dies ist das sogenannte *Anfangswertproblem* und führt auf eine *Fourier-Reihe* bezüglich des Ortes  $x$ :

$$q(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \phi_n \sin(k_n x) \quad (8.62)$$

bzw.

$$\dot{q}(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n \sin \phi_n \sin(k_n x). \quad (8.63)$$

Fourier-Reihen und das Vorgehen zur Bestimmung der  $c_n$  und  $\phi_n$  werden in Abschn. 8.3 diskutiert.

**Frage 12**

Überlegen Sie sich, dass man ganz analoge Aussagen für die longitudinal schwingende Saite erhält, wenn man lediglich  $F$  durch  $Y$  und damit  $v_{\perp}$  durch  $v_{\parallel}$  ersetzt.

## 8.3 Fourier-Reihen

Nach den ersten beiden überwiegend physikalisch geprägten Abschnitten machen wir hier einen mathematischen Exkurs. Bisher wurden nur harmonische Schwingungen untersucht, d. h. Schwingungen, deren Zeitentwicklung durch eine einfache Sinusfunktion darstellbar sind. Die meisten periodischen Vorgänge in Natur und Technik sind aber keine harmonischen Schwingungen (z. B. Töne von Musikinstrumenten oder das Anschieben einer Schaukel). Es wird gezeigt, dass sich periodische Vorgänge allgemein als lineare Überlagerung harmonischer Schwingungen darstellen lassen. Dies führt auf die Fourier-Reihen, die gründlich diskutiert werden.

### Allgemeiner Formalismus

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Beobachtung, dass sich nicht nur die Funktionen  $g(t) = \cos(\omega t)$  und  $h(t) = \sin(\omega t)$  jeweils nach der Periode  $T = 2\pi/\omega$  wiederholen, sondern auch alle Sinus- und Kosinusfunktionen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache davon sind, also allgemein

$$g_j(t) := \cos(j\omega t) \quad \text{und} \quad h_j(t) := \sin(j\omega t) \quad (j \in \mathbb{N}). \quad (8.64)$$

Außerdem gilt dies auch für die konstanten Funktionen. Da die konstanten Funktionen wie die Kosinusfunktionen gerade sind und man sie auch als Funktionen betrachten kann, deren Frequenz das Nullfache von  $\omega$  ist, schreibt man für sie  $g_0$ . Weiter unten werden wir sehen, dass die Wahl  $g_0(t) = 1/\sqrt{2}$  am günstigsten für die weiteren Rechnungen ist. Außerdem wählen wir  $h_0(t) = 0$ .

Die Feldgleichung für die schwingende Saite (8.47) ist – wie die meisten Feldgleichungen in der Physik – linear. Daher liegt es nahe, einen beliebigen periodischen Vorgang als (unendliche) Linearkombination der Funktionen  $g_j(t)$  und  $h_j(t)$  darzustellen.

#### Fourier-Reihe

Funktionen der Periode  $T = 2\pi/\omega$  lassen sich durch eine *Fourier-Reihe* darstellen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} [a_j g_j(t) + b_j h_j(t)] \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j \cos(j\omega t) + b_j \sin(j\omega t)]. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Die Menge der Koeffizienten  $\{a_j, b_j\}$  (bzw. ihre Beträge, also die Amplituden der Teilschwingungen) nennt man das *Fourier-Spektrum* der Funktion. Die Berechnung des Spektrums wird oft auch als *Fourier-Analyse* der Funktion bezeichnet, das Zusammensetzen der Funktion aus den einzelnen harmonischen Schwingungen als *Fourier-Synthese*. Einige mathematische Eigenschaften von Funktionenfolgen und -reihen werden im „Mathematischen Hintergrund“ 8.1 besprochen.

In Anwendungen physikalischer Systeme verwendet man natürlich nicht die komplette unendliche Summe (8.65), sondern nur einige Summanden, also eine Partialsumme der Reihe mit den ersten  $n$  Summanden:

$$f_n(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^n [a_j \cos(j\omega t) + b_j \sin(j\omega t)]. \quad (8.66)$$

Um die bisher unbekannten Koeffizienten  $a_j$  und  $b_j$  zu bestimmen, benutzt man folgende Beziehungen zwischen den Funktionen, die für alle  $i, j \in \mathbb{N}$  gelten und die man leicht nachrechnen kann:

$$\begin{aligned} \int_c^{c+T} g_i(t) g_j(t) dt &= \frac{T}{2} \delta_{ij}, \\ \int_c^{c+T} h_i(t) h_j(t) dt &= \frac{T}{2} \delta_{ij}, \\ \int_c^{c+T} g_i(t) h_j(t) dt &= 0. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Der Wert für  $c$  ist aufgrund der Periodizität beliebig und wird in der Regel so gewählt, dass die Rechnung möglichst einfach wird. Man sagt auch, dass die Funktionen  $g_j$  und  $h_j$  ein *bi-orthogonales Funktionensystem* bilden. Dieses Konzept wird in Bd. 2, Kap. 3 ausführlich diskutiert.

Mithilfe der Beziehungen (8.67) lassen sich die Koeffizienten  $a_j$  und  $b_j$  bestimmen.

#### Fourier-Koeffizienten

Die Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion  $f(t)$  können über

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) g_j(t) dt, \\ b_j &= \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) h_j(t) dt \end{aligned} \quad (8.68)$$

berechnet werden.

## 8.1 Mathematischer Hintergrund: Funktionenfolgen und Funktionenreihen Punktweise und gleichförmige Konvergenz

**Definition** Eine Folge von Funktionen nennen wir *Funktionenfolge*. Wir schreiben  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei  $f_n$  Funktionen sind.

**Beispiel** Ein einfaches Beispiel einer Funktionenfolge ist  $f_n : x \mapsto x^n$ , wobei  $n$  die natürlichen Zahlen durchläuft. Die Folgenglieder lauten demnach  $f_1 = x, f_2 = x^2, f_3 = x^3$  usw.

**Konvergenz** Wir unterscheiden zwischen *punktweiser* und *gleichmäßiger Konvergenz* von Funktionenfolgen. Es sei dazu  $X$  eine nichtleere Menge und  $n \in \mathbb{N}$ . Die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *punktweise konvergent gegen  $f$* , wenn für jedes feste  $x \in X$  die Folge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(x)$  konvergiert, d. h.:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *gleichmäßig konvergent gegen  $f$* , wenn das  $n_0$  in der Definition der punktweise konvergenten Funktionenfolge nicht von  $x$  abhängt, also wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Dies bedeutet anschaulich, dass die Funktionenfolge für alle  $x$  „gleich schnell“ konvergiert.

**Diskussion der Konvergenzkriterien** Ist eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig konvergent, so hat dies entscheidende Vorteile, da gewisse Grenzbeziehungen vertraut werden dürfen:

- Konvergiert eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stetiger Funktionen gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$ , so ist diese wieder stetig.
- Wenn die Folge differenzierbarer Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert und die Ableitungen  $f'_n$  gleichmäßig konvergieren, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$ .
- Der gleichmäßige Grenzwert Riemann-integrierbarer Funktionen ist Riemann-integrierbar, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Beispiel** Im Gegensatz zum gleichmäßigen Limes stetiger Funktionen muss der punktweise Limes nicht unbedingt wieder stetig sein. Wir betrachten dazu die durch  $f_n : x \mapsto x^n$  auf

dem Intervall  $[0, 1]$  definierte Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Sie konvergiert punktweise gegen 0, falls  $x \in [0, 1)$ , und gegen 1, falls  $x = 1$ , denn  $1^n \rightarrow 1$  und  $x^n \rightarrow 0$  für  $0 \leq x < 1$ . Diese Grenzfunktion ist aber nicht mehr stetig.

**Funktionenreihen** Betrachtet man die *Partialsumme*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

als Summe der ersten  $n$  Glieder einer Funktionenfolge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , so ist eine *Funktionenreihe* gerade die Folge dieser Partialsummen, also  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Fourier-Reihe** Im Folgenden führen wir einige Aussagen über die Konvergenz von *Fourier-Reihen* an, die in (8.65) definiert wurden:

- Sei  $f$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  punktweise gegen  $f$ .
- Ist  $f$  sogar stetig differenzierbar, dann konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen  $f$ .
- Ist  $f$  quadratintegrabel, d. h.  $\int |f(t)|^2 dt < \infty$ , so konvergiert die Fourier-Reihe punktweise fast überall. (Die Stellen, an denen die Reihe nicht konvergiert, sind die im Text erwähnten Unter- und Überschwingen.) Deshalb gilt für  $n \rightarrow \infty$ :

$$\int_c^{c+2\pi} |f(t) - f_n(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

Man spricht von der *Konvergenz im quadratischen Mittel*. Dies ist der *Satz von Carleson*.

Wir halten fest:

- Gleichmäßige Konvergenz impliziert Konvergenz im quadratischen Mittel.
- Aus der Konvergenz im quadratischen Mittel folgt nicht die punktweise Konvergenz.

### Literatur

- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., SpringerSpektrum (2014)

## Vertiefung: Historische Entwicklung der Fourier-Reihen

Die ersten Fourier-Reihen wurden schon im 18. Jahrhundert von Euler, Lagrange und anderen aufgestellt. Doch erst 1822 behauptete *Jean Baptiste Joseph Fourier* (französischer Mathematiker und Physiker, 1768–1830) in seinem Werk *Théorie analytique de la chaleur* (*Analytische Theorie der Wärme*), dass eine solche Reihenentwicklung für alle periodischen Funktionen möglich wäre, ohne dies allerdings zu beweisen. Die Behauptung wurde von den führenden Mathematikern damals dementsprechend zunächst abgelehnt.

In den folgenden Jahrzehnten wurden dann auch Gegenbeispiele gefunden, bei denen die Fourier-Reihe nicht im üblichen Sinne konvergiert (ein Beispiel dafür werden wir

im Haupttext sehen). Erst 1966 fand der schwedische Mathematiker *Lennart Carleson* (\*1928) durch eine geeignete Erweiterung des Konvergenzbegriffs einen Beweis dafür, dass die Fourier-Reihe in gewissem Sinne tatsächlich für alle periodischen Funktionen konvergiert (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 8.1).

### Literatur

- Fourier, J.B.J.: *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, 1822

### Frage 13

Zeigen Sie, dass die obige Wahl  $g_0(t) = 1/\sqrt{2}$  es ermöglicht, in (8.67) und (8.68) einheitliche Formeln für alle  $j$  anzugeben, statt den Fall  $j = 0$  getrennt zu behandeln.

**Achtung** Bei den Vorfaktoren sind auch verschiedene andere Konventionen üblich: Manche Autoren definieren die Funktionen beispielsweise als  $g_0(t) = 1/\sqrt{T}$ ,  $g_j(t) = \sqrt{2/T} \cos(j\omega t)$  und  $h_j(t) = \sqrt{2/T} \sin(j\omega t)$ , da die Funktionen dadurch nicht nur orthogonal, sondern zusätzlich normiert sind (weshalb sie insbesondere in der Quantenmechanik gerne benutzt werden). Die Gleichungen in (8.68) für die Berechnung der Koeffizienten und die Orthogonalitätsgleichungen in (8.67) ändern sich dann entsprechend. ▶

Mit (8.68) ist auch das Anfangswertproblem in (8.62) und (8.63) lösbar. Dazu muss man erkennen, dass wir es hier mit einer Fourier-Reihe in der Zeit  $t$ , in Abschn. 8.2 aber mit einer Fourier-Reihe im Ort  $x$  zu tun haben. Mathematisch sind beide Fälle aber äquivalent. Man muss die Fourier-Analyse sowohl für  $q(0, x)$  als auch für  $\dot{q}(0, x)$  durchführen und erhält so Ausdrücke für  $c_n \cos \phi_n$  und  $c_n \omega_n \sin \phi_n$ . Daraus lassen sich die konstanten Phasen  $\phi_n$  bestimmen. Aufgrund der Randbedingungen der eingespannten Saite verschwinden alle Kosinusbeiträge der Fourier-Reihe.

### Dreiecksschwingung

Bei Streichinstrumenten hat die Intensität  $I$  eines Tones näherungsweise den in Abb. 8.5 gezeigten zeitlichen Verlauf. Beschränken wir uns zunächst auf den einfachen Fall, dass die Periode genau  $T = 2\pi$  ist und die Amplitude  $\pi/2$ , so wird die Intensität durch den Term

$$I(t) = \begin{cases} t & \left(-\frac{\pi}{2} \leq t < +\frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - t & \left(+\frac{\pi}{2} \leq t < +\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (8.69)$$

beschrieben und periodisch fortgesetzt, also  $I(t + 2\pi n) = I(t)$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

Diese Funktion ist ungerade; deshalb verschwinden alle Koeffizienten  $a_j$ , da die Kosinusfunktionen alle gerade sind (wähle hier  $c = 0$ ):

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I(t) \cos(jt) dt = 0. \quad (8.70)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten  $b_j$  ist die Wahl  $c = -\pi/2$  günstiger:

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin(jt) dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t) \sin(jt) dt. \quad (8.71)$$

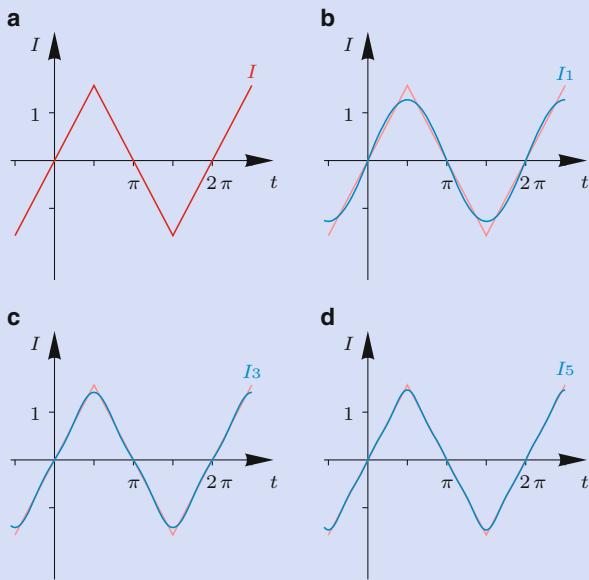
Beide Integrale sind mittels partieller Integration leicht auszuwerten. Daraus ergibt sich

$$b_j = \frac{4}{\pi j^2} \sin\left(\frac{\pi j}{2}\right) = \begin{cases} 0 & (j \text{ gerade}) \\ \frac{4}{\pi j^2} \cdot (-1)^{(j-1)/2} & (j \text{ ungerade}) \end{cases}. \quad (8.72)$$

Damit hat man als Näherungen für  $I(t)$  folgende Partialsummen der Fourier-Reihe:

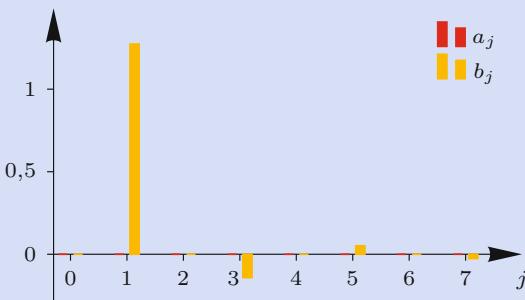
$$\begin{aligned} I_1(t) &= \frac{4}{\pi} \sin(t), \\ I_3(t) &= \frac{4}{\pi} \sin(t) - \frac{4}{9\pi} \sin(3t), \\ I_5(t) &= \frac{4}{\pi} \sin(t) - \frac{4}{9\pi} \sin(3t) + \frac{4}{25\pi} \sin(5t). \end{aligned} \quad (8.73)$$

Diese drei Näherungsfunktionen sind in Abb. 8.5 zusammen mit  $I(t)$  dargestellt.



**Abb. 8.5** Die periodische Dreiecksschwingung (rot) aus (8.69) lässt sich bereits durch die ersten Partialsummen in (8.73) ihrer Fourier-Reihe (gezeigt sind  $I_1$ ,  $I_3$  und  $I_5$ ) gut annähern

Wie man sieht, konvergiert die Fourier-Reihe hier schnell, und schon niedrige Partialsummen stellen eine gute Näherung dar. In Abb. 8.6 ist das zugehörige Spektrum zu sehen.



**Abb. 8.6** Fourier-Spektrum der Dreiecksschwingung (8.69). Gezeigt sind die Koeffizienten der ersten sieben Teilschwingungen (Kosinusschwingungen in Rot, Sinusschwingungen in Orange). In diesem Beispiel sind alle Kosinusbeiträge null

## Schaukel anschieben

Eine Schaukel schiebt man normalerweise nur in der Viertelperiode an, in der sie sich auf einer der beiden Seiten gerade nach unten bewegt. Beschreibt man die Schaukelbewegung durch

$x(t) = x_0 \sin(\omega t)$ , so wirkt nur während des zweiten Viertels der Periode eine Kraft auf die Schaukel. Der Einfachheit halber nehmen wir dafür eine konstante Kraft  $\hat{F}$  an. Im Intervall  $0 \leq t \leq T$  gilt also

$$F(t) = \begin{cases} \hat{F} & \left(\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}\right) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \quad (8.74)$$

und periodisch fortgesetzt, d. h.  $F(t + nT) = F(t)$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  (Abb. 8.11).

Da diese Funktion weder gerade noch ungerade ist, ergeben sich hier für beide Sorten von Fourier-Koeffizienten im Allgemeinen Werte ungleich null:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_{T/4}^{T/2} \hat{F} dt = \frac{\hat{F}}{2\sqrt{2}}, \quad (8.75)$$

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(j\omega t) dt = \frac{2\hat{F}}{T} \int_{T/4}^{T/2} \cos(j\omega t) dt \\ &= \frac{\hat{F}}{j\pi} \left[ \sin(j\pi) - \sin(j\frac{\pi}{2}) \right] \\ &= \begin{cases} 0 & (j \text{ gerade}) \\ -\frac{\hat{F}}{j\pi} \cdot (-1)^{(j-1)/2} & (j \text{ ungerade}) \end{cases}, \end{aligned} \quad (8.76)$$

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(j\omega t) dt = \frac{2\hat{F}}{T} \int_{T/4}^{T/2} \sin(j\omega t) dt \\ &= -\frac{\hat{F}}{j\pi} \left[ \cos(j\pi) - \cos(j\frac{\pi}{2}) \right] \\ &= \begin{cases} -\frac{\hat{F}}{j\pi} \cdot (1 - (-1)^{j/2}) & (j \text{ gerade}) \\ \frac{\hat{F}}{j\pi} & (j \text{ ungerade}) \end{cases}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

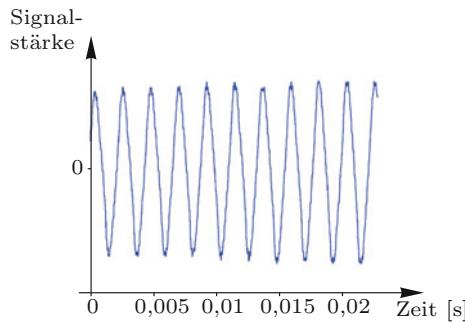
Die ersten Partialsummen lauten also

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{\hat{F}}{4}, \\ F_1(t) &= \hat{F} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \cos(\omega t) + \frac{1}{\pi} \sin(\omega t) \right), \\ F_2(t) &= \hat{F} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \cos(\omega t) + \frac{1}{\pi} \sin(\omega t) - \frac{1}{\pi} \sin(2\omega t) \right), \\ F_3(t) &= \hat{F} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \cos(\omega t) + \frac{1}{\pi} \sin(\omega t) - \frac{1}{\pi} \sin(2\omega t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{1}{3\pi} \sin(3\omega t) \right). \end{aligned} \quad (8.78)$$

## Anwendung: Musikinstrumente

### Realistische Intensitätsverteilungen und ihre Fourier-Spektren

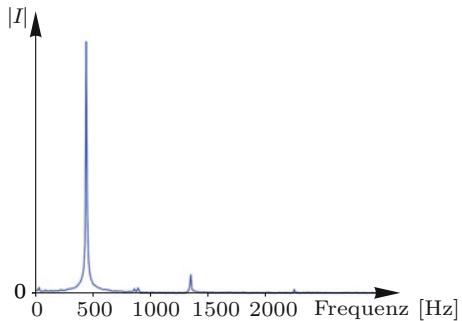
Die Dreiecksschwingung wurde als stark vereinfachte Intensitätsverteilung eines Musikinstruments verwendet. Im Folgenden werden einige reale Beispiele der Schallintensitäten von Musikinstrumenten gezeigt. Es ergeben sich hier nicht nur einzelne Spitzen bei festen Frequenzen, sondern leicht verbreiterte Intensitätsverteilungen.



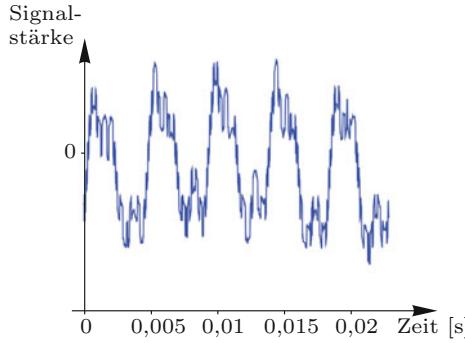
**Abb. 8.7** Signalstärke einer Flöte

Dies liegt einerseits daran, dass reale Töne nie streng periodisch sind, andererseits aber auch an numerischen Fehlern der verwendeten Algorithmen zur Fourier-Analyse.

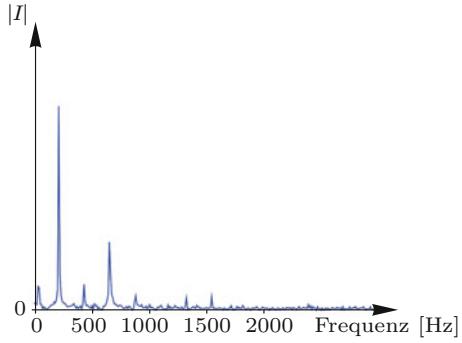
Die hier gezeigten Beispiele (Abb. 8.7 bis 8.10) wurden von Schülern der 10. bis 12. Klasse im Rahmen einer Sommerschule der Humboldt-Universität Berlin erstellt (Kramer & Warmuth 2010).



**Abb. 8.9** Fourier-Spektrum der Flöte



**Abb. 8.8** Signalstärke einer Violine



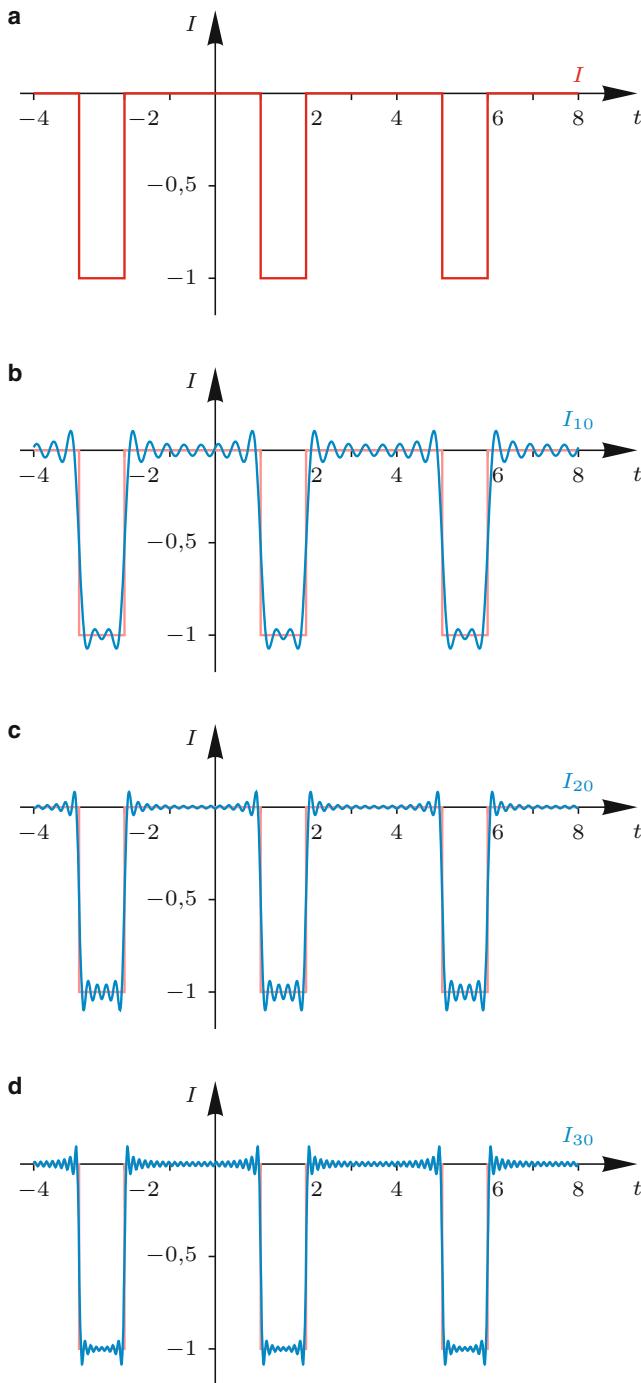
**Abb. 8.10** Fourier-Spektrum der Violine

Die Näherungskurven für die Partialsummen bis zu  $j = 10$  bzw. 20 bzw. 30 sind in Abb. 8.11 zusammen mit  $F(t)$  dargestellt. Abb. 8.12 zeigt das Spektrum.

Wie man anhand des zweiten Beispiels sieht, konvergieren hier die Partialsummen deutlich schlechter als für die Dreieckschwingung. Vor allem an den Stellen  $t = T/4$  und  $t = T/2$ , an denen  $F(t)$  unstetig ist, ergeben sich deutliche Abweichungen der Partialsummen zur Funktion, gegen die sie konvergieren sollen. Man spricht hier auch von *Über-* bzw. *Unterschwingern*. Es zeigt sich, dass diese Abweichungen auch für beliebige hohe Partialsummen nicht verschwinden. In welchem Sinne die

Fourier-Reihe dennoch gegen  $F(t)$  konvergiert, wird im „Mathematischen Hintergrund“ 8.1 erläutert. Dieses Verhalten der Fourier-Reihe ist typisch bei Funktionen mit Sprungstellen und wird als *Gibbs'sches Phänomen* bezeichnet.

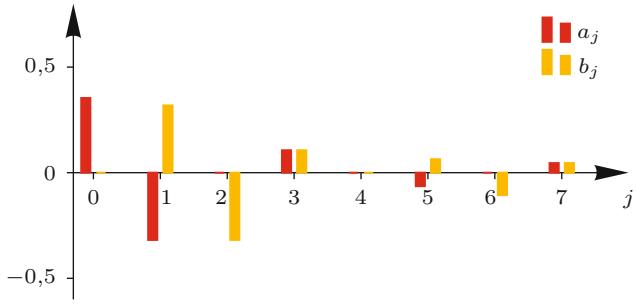
Die oben erhaltene Fourier-Darstellung der Kraft kann man nun schließlich verwenden, um die Auslenkung der Schaukel zu bestimmen. Die Amplitude eines mit  $\omega$  harmonisch angetriebenen schwingenden Systems (was eine Schaukel für nicht zu große Auslenkungen in guter Näherung ist) haben wir in (6.65) berechnet. Übertragen auf das vorliegende System mit Auslen-



**Abb. 8.11** Eine periodische Kraft  $F(t)$  (rot) und die Annäherungen durch die Partialsummen ihrer Fourier-Reihe ( $F_{10}$ ,  $F_{20}$ ,  $F_{30}$ ). Man erkennt deutlich die Über- und Unterschwinger in der Nähe der Unstetigkeiten von  $F(t)$

kungsamplitude  $\hat{x}$  und Masse  $m$  gilt

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}, \quad (8.79)$$



**Abb. 8.12** Fourier-Spektrum der untersuchten periodischen Kraft  $F(t)$  (8.74). Gezeigt sind die Koeffizienten der ersten sieben Teilschwingungen (Kosinus-Schwingungen in Rot, Sinus-Schwingungen in Orange)

falls die anregende Kraft sinusförmig mit Kreisfrequenz  $\omega$  und Amplitude  $\hat{F}$  ist. Das schwingende System ist neben der Masse noch durch seine Eigenfrequenz  $\omega_0$  und einen Dämpfungskoeffizienten  $\lambda$  charakterisiert.

#### Frage 14

Zeigen Sie, dass (6.65) für das vorliegende Problem in der Gestalt (8.79) geschrieben werden kann.

Will man die gesamte Auswirkung der hier Fourier-analysierten Kraft  $F(t)$  auf die Schwingung wissen, so muss man die (unendliche) Summe aus allen Teilschwingungen bilden, wobei die Amplituden jeweils durch das Produkt aus den Fourier-Koeffizienten  $a_j$  bzw.  $b_j$  und dem Ausdruck (8.79) gegeben sind und  $\omega$  je nach Summenglied durch das jeweilige  $j\omega$  zu ersetzen ist.

Man sieht hier also, wie man mithilfe der Fourier-Analyse allgemein die Auswirkungen einer periodischen Anregung auf ein harmonisch schwingendes System bestimmen kann. Das ist natürlich nicht nur bei Schaukeln wichtig, sondern auch beispielsweise in der Architektur, wenn es um die Stabilität von Hochhäusern oder Brücken geht.

#### Alternative Darstellungen der Fourier-Reihen

Neben der Darstellung (8.65) sind noch andere möglich. So erlaubt es die Beziehung

$$\cos(j\omega t - \phi_j) = \cos(j\omega t) \cos \phi_j + \sin(j\omega t) \sin \phi_j, \quad (8.80)$$

jede Linearkombination von Sinus und Kosinus gleicher Frequenz auch als verschobene Kosinus- oder Sinusfunktion darzustellen und umgekehrt. Daher kann man Fourier-Reihen auch in der sogenannten *Amplituden-Phasen-Darstellung* schreiben:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \cos(j\omega t - \phi_j). \quad (8.81)$$

Eine weitere Möglichkeit ist es, Sinus und Kosinus mittels komplexer Exponentialfunktionen auszudrücken (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 6.2):

$$\cos(j\omega t) = \frac{e^{ij\omega t} + e^{-ij\omega t}}{2}, \quad (8.82)$$

$$\sin(j\omega t) = \frac{e^{ij\omega t} - e^{-ij\omega t}}{2i}.$$

Dies führt auf die sogenannte *Exponentialdarstellung* der Fourier-Reihe,

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j e^{ij\omega t}, \quad (8.83)$$

in der wegen der obigen Zusammenhänge nun auch negative Frequenzen auftreten. Die Koeffizienten berechnet man dann folgendermaßen:

$$c_j = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) e^{-ij\omega t} dt. \quad (8.84)$$

Diese Darstellung ist häufig einfacher, da Integrale mit Exponentialfunktionen oft leichter zu berechnen sind als Integrale mit trigonometrischen Funktionen (siehe hierzu auch Bd. 2, Kap. 3).

## 8.4 Lagrange-Formalismus für Felder

Dieser Abschnitt liefert eine kurze Einführung in den Lagrange-Formalismus für Felder. Durch den Übergang zum Kontinuum wird die Lagrange-Funktion eines diskreten Systems zu einem Lagrange-Funktional der betrachteten Felder. Dieses Funktional kann als Integral einer Lagrange-Dichte aufgefasst werden. Ausgehend vom Hamilton'schen Prinzip lassen sich daraus Lagrange-Gleichungen als Bewegungsgleichungen für die Felder ableiten. Dabei lassen sich auch äußere Kräfte berücksichtigen. Abschließend werden die abgeleiteten Gleichungen auf drei Raumdimensionen verallgemeinert.

### Lagrange-Funktional und Lagrange-Dichte

In Abschn. 8.1 wurde bereits erwähnt, dass sich die Bewegungsgleichungen des Kontinuums ebenfalls aus einer geeigneten Lagrange-Funktion ableiten lassen. Aus Übersichtsgründen haben wir uns bisher nicht mit dem Lagrange-Formalismus für Felder beschäftigt. Dies soll nun in Grundzügen nachgeholt werden.

Wir beginnen der Einfachheit halber in einer räumlichen Dimension mit der Lagrange-Funktion der linearen Kette ohne äußere

Kräfte und führen zunächst dafür den Kontinuumslimes durch. Im diskreten Fall haben wir (8.3):

$$L = \frac{m}{2} \sum_{i=0}^N \dot{q}_i^2 - \frac{D}{2} \sum_{i=1}^N (q_i - q_{i-1})^2. \quad (8.85)$$

Die Summe läuft über alle Punktmassen in der Kette.

Der Grenzfall kann genauso einfach durchgeführt werden wie für die Bewegungsgleichung in Abschn. 8.1: Es ist  $q_i(t)$  durch  $q(t, x)$  zu ersetzen; weiterhin führen wir die Massendichte  $\rho = m/a_0$  und den Elastizitätsmodul  $Y = Da_0$  ein. Der Differenzenquotient wird wieder zur ersten Ortsableitung:

$$\frac{q_i(t) - q_{i-1}(t)}{a_0} \rightarrow \frac{\partial q(t, x)}{\partial x}. \quad (8.86)$$

Da wir nun über unendlich viele infinitesimale Massenelemente summieren, ersetzen wir die Summe durch ein Integral:

$$a_0 \sum_i \rightarrow \int_I dx. \quad (8.87)$$

Hier ist  $I$  das Ortsintervall, das der Kettenausdehnung entspricht, also beispielsweise  $I = [0, \ell]$ . Es folgt

$$L[q] = \int_I dx \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial q(t, x)}{\partial t} \right)^2 - \frac{Y}{2} \left( \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (8.88)$$

### Frage 15

Vollziehen Sie den Übergang zum Kontinuum nach und überprüfen Sie damit (8.88).

**Achtung** Offensichtlich haben wir es nun nicht mehr mit einer Lagrange-Funktion, sondern mit einem *Lagrange-Funktional* zu tun (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 5.2). ◀

Den Integranden in (8.88) nennt man *Lagrange-Dichte*  $\mathcal{L}$ . Dieser Name ist plausibel, da sich das Lagrange-Funktional über

$$L = \int_I dx \mathcal{L}(x) \quad (8.89)$$

berechnen lässt. Im Gegensatz zu  $L[q]$  ist die Lagrange-Dichte eine Funktion. Zur Erinnerung soll gesagt werden, dass Funktionale Funktionen auf Zahlen abbilden, während Funktionen von Funktionen wieder Funktionen sind.

Die Lagrange-Dichte selbst ist (wie die Lagrange-Funktion) keine eindeutig bestimmte, messbare Größe, doch ist sie meist der Ausgangspunkt für Feldtheorien. Dies wird vor allem mit der Lagrange-Dichte des elektrodynamischen Feldes in Bd. 2, Kap. 10 deutlich werden.

Wir sehen, dass sowohl die Zeit- als auch die Ortsableitung von  $q(t, x)$  in das Lagrange-Funktional eingehen. An dieser Stelle ist es nicht mehr direkt offensichtlich, wie sich die Bewegungsgleichungen aus dem Lagrange-Funktional bzw. der Lagrange-Dichte ableiten lassen. Dies soll nun untersucht werden.

## Ableitung der Bewegungsgleichungen aus dem Lagrange-Funktional

Bisher kannten wir nur Situationen für diskrete Systeme mit einer Lagrange-Funktion als Funktion von (generalisierten) Koordinaten und ihren ersten Zeitableitungen. Die Anzahl der Freiheitsgrade war dabei stets endlich, und wir erhielten eine Lagrange-Gleichung für jeden Freiheitsgrad. Hier haben wir es mit einem kontinuierlichen Feld und seinen Zeit- und Ortsableitungen zu tun. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist jetzt unendlich, da die Felder an jedem Ort  $x$  definiert sind. Wie kann man nun die Bewegungsgleichungen für diese Felder erhalten? Sie folgen – wie schon in Kap. 5 gesehen – aus einem Variationsprinzip.

Gesucht ist die Bewegungsgleichung für ein Feld  $q(t, x)$ . Wir nehmen an, dass sowohl  $q(t, x)$  selbst als auch die beiden Ableitungen  $\dot{q}(t, x) = \partial q(t, x)/\partial t$  und  $q'(t, x) = \partial q(t, x)/\partial x$  in  $L$  auftreten dürfen (wobei  $q'$  im Gegensatz zu  $\dot{q}$  schon bekannt ist, wenn  $q(x)$  zu einer festen Zeit gegeben ist):  $L = L(t, q, \dot{q}, q')$ . Die Wirkung lautet

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_I dx \mathcal{L}. \quad (8.90)$$

Erneut verlangen wir, dass die Variation der Wirkung für festes  $t_0$  und  $t_1$  verschwinden soll; wir gehen also vom Hamilton'schen Prinzip aus. Dazu ist es nötig zu fordern, dass die Variation von  $q(t, x)$  zu den Zeiten  $t_0$  und  $t_1$  an jedem Ort  $x \in I$  null ist. Weiterhin soll die Variation zu allen Zeiten an den räumlichen Endpunkten verschwinden (hier: bei  $x = 0$  und  $x = \ell$ ).

Es sei  $\delta q(t, x)$  die Variation von  $q(t, x)$ . Dann sind die Variationen der Ableitungen durch

$$\delta \dot{q} = \frac{\partial(\delta q)}{\partial t} \quad \text{und} \quad \delta q' = \frac{\partial(\delta q)}{\partial x} \quad (8.91)$$

gegeben (siehe (5.162)). Für die Variation der Wirkung folgt

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_I dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \delta q' \right], \quad (8.92)$$

wobei wir aus Platzgründen die Zeit- und Ortsabhängigkeiten von  $q(t, x)$  nicht explizit aufgeschrieben haben.

Wie sind nun die Terme  $\partial \mathcal{L}/\partial q$  usw. zu verstehen? Dazu betrachten wir  $q$ ,  $\dot{q}$  und  $q'$  als unabhängige Variablen. Konkret bedeutet dies, dass speziell die Lagrange-Dichte in (8.88) die folgenden Zusammenhänge erfüllt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q(t, x)} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}(t, x)} &= \rho \dot{q}(t, x), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'(t, x)} &= -Y q'(t, x). \end{aligned} \quad (8.93)$$

Offensichtlich sind diese Ausdrücke wieder Funktionen von  $x$  und  $t$ .

Die Variation (8.92) kann mithilfe von (8.91) umgeschrieben werden:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_I dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial}{\partial t} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial x} \delta q \right]. \quad (8.94)$$

Wir können nun zwei partielle Integrationen durchführen: die erste für den mittleren Term bezüglich der Zeit, die zweite für den rechten Term bezüglich des Ortes. Wir finden zunächst:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_I dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial}{\partial t} \delta q = - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_I dx \delta q \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (8.95)$$

Die Randterme haben wir gar nicht erst aufgeschrieben; sie tragen nicht bei, da die Variation  $\delta q$  zu den Zeiten  $t_0$  und  $t_1$  verschwinden soll. Es ist zu beachten, dass  $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}$  wieder eine Funktion von Ort und Zeit ist und wir daher die hier auftretende Zeitableitung ausführen können.

Für die zweite partielle Integration folgt analog

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_I dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial x} \delta q = - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_I dx \delta q \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}. \quad (8.96)$$

Auch hier trägt der Oberflächenterm (in diesem Fall besteht er nur aus den beiden Randpunkten des Intervalls) nicht bei, da die Variation  $\delta q(t, x)$  am Rand des betrachteten Ortsintervalls  $I$  ebenfalls verschwinden soll.

Bringen wir nun alle Teilergebnisse zusammen, folgt für die Variation der Wirkung schließlich

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_I dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \right] \delta q. \quad (8.97)$$

### Frage 16

Rechnen Sie die Schritte nach, die auf (8.97) führen.

Nun nutzen wir noch aus, dass die Variation  $\delta q(t, x)$  beliebig ist (außer dass sie am zeitlichen und örtlichen Rand verschwinden soll). Somit muss die eckige Klammer selbst verschwinden, und es folgt die Lagrange-Gleichung für das Feld  $q(t, x)$ .

### Lagrange-Gleichung für eindimensionales Feld

Die Lagrange-Gleichung für das eindimensionale Feld  $q(t, x)$  lautet

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} = 0, \quad (8.98)$$

wobei die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$  neben  $q(t, x)$  noch von den beiden Ableitungen  $\dot{q}(t, x)$  und  $q'(t, x)$  abhängen darf.

**Achtung** Wir sehen, dass wir nur eine einzige Lagrange-Gleichung erhalten, obwohl wir mit  $q(t, x)$  unendlich viele Freiheitsgrade betrachten (da  $x$  kontinuierlich ist). Wie ist dies zu verstehen? Gl. (8.98) ist eine partielle Differenzialgleichung in  $t$  und  $x$  und liefert daher sozusagen für jedes  $x$  eine Bewegungsgleichung.

die Erweiterungen der linearen Kette auf ein dreidimensionales elastisches System an. Dazu gehen wir von einem vektorwerten Feld  $\mathbf{q}(t, \mathbf{r})$  aus, da ein dreidimensionaler elastischer Körper in der Regel in alle Richtungen deformiert werden kann. Die Koordinaten  $\mathbf{r}$  und die Verformung  $\mathbf{q}$  sollen kartesische Größen sein. Das Lagrange-Funktional lautet dann

$$L = \int_V d^3r \left[ \frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{q}}^2(t, \mathbf{r}) - \mathcal{V}(\mathbf{q}, \nabla \circ \mathbf{q}) \right], \quad (8.102)$$

**Frage 17**  
Zeigen Sie, dass die bereits bekannte Bewegungsgleichung (8.19) mithilfe der Lagrange-Gleichung (8.98) aus der Lagrange-Dichte in (8.88) folgt.

wobei  $\rho$  nun die Massendichte im Bezug auf das Volumen ist. Die Integration ist über das gesamte Volumen  $V$  des elastischen Körpers auszuführen.

In (8.102) wurde die *potenzielle Energiedichte*  $\mathcal{V}(\mathbf{q}, \nabla \circ \mathbf{q})$  eingeführt. Sie setzt sich in der Regel aus zwei Anteilen zusammen:

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \nabla \circ \mathbf{q}) = \mathcal{V}^{(a)}(t, \mathbf{q}) + \mathcal{V}^{(i)}(\nabla \circ \mathbf{q}). \quad (8.103)$$

Der erste beschreibt den Einfluss äußerer Kräfte. Ähnlich wie in (8.99) schreiben wir nun im dreidimensionalen Raum:

$$\mathcal{V}^{(a)}(t, \mathbf{q}) = -\mathbf{f}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{q}(t, \mathbf{r}). \quad (8.104)$$

**Achtung** Streng genommen handelt es sich hierbei um kein Potenzial, da wir eine Zeitabhängigkeit erlauben, die zu einer Verletzung der Energieerhaltung führen kann. Der Einfachheit halber schließen wir diesen Term aber in die Definition von  $V$  ein.

Der zweite Potenzialbeitrag stammt von der inneren Verformung des Körpers. Im eindimensionalen Fall haben wir dafür

$$\mathcal{V}^{(i)} = \frac{Y}{2} \left( \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} \right)^2 \quad (8.105)$$

geschrieben. Im dreidimensionalen Fall muss der Gradient  $\nabla$  statt der einfachen Ortsableitung  $\partial/\partial x$  verwendet werden. Die innere Energie hängt also nicht von der Verformung  $\mathbf{q}$  selbst ab, sondern nur von ihrem Gradienten. Beachten Sie dabei, dass bereits in (8.4) nur die Differenzen der  $q_i$  in die potenzielle Energie eingegangen sind.

Da  $\mathbf{q}$  bereits ein Vektor ist, ist der Gradient  $\nabla \circ \mathbf{q} = (\partial_i q_j)$  ein Tensor zweiter Stufe und hat die Komponenten

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_{ij}) := (\partial_i q_j) = \begin{pmatrix} \partial_x q_x & \partial_x q_y & \partial_x q_z \\ \partial_y q_x & \partial_y q_y & \partial_y q_z \\ \partial_z q_x & \partial_z q_y & \partial_z q_z \end{pmatrix}. \quad (8.106)$$

Der Gradient eines Vektors  $\mathbf{q}$  ist also nichts anderes als das Tensorprodukt des Nabla-Operators  $\nabla$  und  $\mathbf{q}$  (hier explizit als dyadiisches Produkt geschrieben; Abschn. 4.3) und entspricht somit der Jacobi-Matrix von  $\mathbf{q}$ .

**Achtung** Der Gradient eines Vektors ist unbedingt von der Divergenz zu unterscheiden. Beim ersten handelt es sich um einen Tensor zweiter Stufe, beim zweiten um einen Skalar, da in  $\operatorname{div} \mathbf{q} = \nabla \cdot \mathbf{q} = \partial_i q_i$  über den Index summiert wird. Wir schreiben daher zur Verdeutlichung  $\nabla \circ \mathbf{q}$  anstatt der häufig verwendeten Form  $\nabla \mathbf{q}$ .

## Äußere Kräfte

Wirken auf die Massenelemente der linearen Kette noch äußere Kräfte, so addiert man einen entsprechenden Term zu der Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial q(t, x)}{\partial t} \right)^2 - \frac{Y}{2} \left( \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} \right)^2 + f(t, x)q(t, x). \quad (8.99)$$

Hier ist  $f(t, x)$  die Kraftdichte am Ort  $x$ , also eine Kraft pro Längeneinheit. Die Gesamtkraft auf die Kette ist

$$F(t) = \int_I dx f(t, x). \quad (8.100)$$

Unter dem Einfluss dieser Kraftdichte nehmen die Bewegungsgleichungen die modifizierte Form

$$\rho \frac{\partial^2 q(t, x)}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 q(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x) \quad (8.101)$$

an.

## Frage 18

Zeigen Sie dies mithilfe der Lagrange-Gleichung.

Beim Lösen von (8.101) werden äußere Kräfte in der Regel als Funktionen von Ort und Zeit vorgegeben.

In vielen Fällen hat man es mit der Gravitationskraft zu tun, die auf alle Massenelemente wirkt. Es gibt aber auch viele Situationen, in denen Kräfte nur an der Oberfläche eines elastischen Körpers angreifen – in diesem Fall an den Endpunkten der linearen Kette. Dies sind beispielsweise Zug- oder Druckkräfte durch Einspannen. Wir kommen später wieder darauf zurück.

## Verallgemeinerung auf drei räumliche Dimensionen

Für die meisten realistischen Anwendungen ist eine eindimensionale Feldfunktion für die Verformung eines elastischen Materials offensichtlich wenig geeignet. Wir geben daher noch

**Frage 19**

Stellen Sie sich einen elastischen Körper ohne äußere Kräfte vor. Überlegen Sie sich, dass eine homogene Verschiebung  $\mathbf{q}$  für alle Massenelemente die potenzielle Energie nicht ändert. Dazu muss man sich anschauen, wie die innere Verformung aussieht, wenn  $\mathbf{q}$  homogen ist. Berechnen Sie dazu (8.106) explizit.

In Abschn. 8.5 wird besprochen, welche funktionale Form die potenzielle Energiedichte  $\mathcal{V}^{(i)}(\eta)$  für einen dreidimensionalen elastischen Körper annimmt.

Wir beenden diesen Abschnitt mit den Lagrange-Gleichungen in drei Dimensionen.

**Lagrange-Gleichung für dreidimensionales Feld**

Die Lagrange-Gleichungen für das dreidimensionale Feld  $\mathbf{q}(t, \mathbf{r})$  lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j q_i)} = 0 \quad (i = x, y, z). \quad (8.107)$$

Hier ist über  $j$  zu summieren. Wir sehen, dass man eine partielle Differentialgleichung für jede Komponente des Feldes erhält. Hat man es mit einem Skalarfeld zu tun, z. B.  $T(t, \mathbf{r})$ , so ist in (8.107) bloß  $q_i$  durch  $T$  zu ersetzen, und es gibt nur eine Lagrange-Gleichung. Es ist zu beachten, dass der Lagrange-Formalismus für Felder viel mächtiger und allgemeiner ist, als es hier erscheinen mag. Vor allem in der Elektrodynamik spielt er eine zentrale Rolle (Bd. 2, Kap. 10).

**Frage 20**

Überlegen Sie sich, analog zum Vorgehen, das auf die eindimensionale Lagrange-Gleichung geführt hat, wie man (8.107) erhalten kann.

## 8.5 Grundlagen der Elastizitätstheorie

In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in die lineare Elastizitätstheorie gegeben. Dazu wird der Elastizitätstensor eingeführt, der die elastischen Eigenschaften des betrachteten Materials vollständig beschreibt. Weiterhin wird neben dem Verzerrungstensor noch der Spannungstensor definiert, der eine wichtige Größe in Feldtheorien ist und in seiner allgemeinen Gestalt in vielen Bereichen der Physik auftritt. Im Anwendungskasten „Elastischer Stab und spontane Symmetriebrechung“ demonstrieren wir, wie ein einfaches elastisches System zu einer spontanen Symmetriebrechung neigen kann. Symmetriebrechungen dieser Art sind von großer Bedeutung in der Quantenmechanik und der Elementarteilchenphysik, wie wir in Bd. 3, Kap. 7 zeigen werden.

## Innere potenzielle Energie und Elastizitätstensor

Welche funktionale Form hat der Beitrag der inneren potenziellen Energiedichte  $\mathcal{V}^{(i)}(\eta)$ , die in der Lagrange-Dichte (8.102) eingeführt wurde? Diese Funktion hängt stark davon ab, welche molekularen Wechselwirkungen im elastischen Medium vorherrschen. Allerdings erinnern wir uns hier an die kleinen Schwingungen in Kap. 6 und die Entwicklung der potenziellen Energie in (6.5). Egal wie kompliziert die elastische Energie auch aussehen mag, für kleine Verformungen lässt sich immer eine „gutartige“ Näherung finden, die konkrete Rechnungen ermöglicht.

Zunächst gehen wir davon aus, dass der Gradient der Verformung,  $\eta = \nabla \circ \mathbf{q}$ , hinreichend klein ist, sodass wir eine Taylor-Entwicklung durchführen können. Wir entwickeln um den undeformierten Zustand, also  $\eta = 0$ , bis hin zur zweiten Ordnung in  $\eta$ :

$$\mathcal{V}^{(i)}(\eta) \approx \mathcal{V}^{(i)}(0) + \left. \frac{\partial \mathcal{V}^{(i)}}{\partial \eta_{ij}} \right|_0 \eta_{ij} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}^{(i)}}{\partial \eta_{ij} \partial \eta_{kl}} \right|_0 \eta_{ij} \eta_{kl}. \quad (8.108)$$

Hier ist vor allem zu beachten, dass die Entwicklung im dreidimensionalen Raum durchzuführen ist und über alle Paare von Indizes summiert werden muss. Die Entwicklung ist ansonsten aber vollständig analog zu dem Vorgehen in (6.5).

Der konstante Term  $\mathcal{V}^{(i)}(0)$  in (8.108) spielt hier keine Rolle. Da wir um den Gleichgewichtszustand  $\eta = 0$  entwickelt haben, in dem die Energie ein Minimum besitzen soll, verschwindet die erste Ordnung der Entwicklung. Es verbleibt lediglich der Term zweiter Ordnung:

$$\mathcal{V}^{(i)}(\eta) \approx \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}^{(i)}}{\partial \eta_{ij} \partial \eta_{kl}} \right|_0 \eta_{ij} \eta_{kl} =: \frac{1}{2} C_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl}. \quad (8.109)$$

Die Größe  $C_{ijkl}$  ist vollständig durch die (unter Umständen ortsabhängigen) Materialeigenschaften festgelegt, die wir hier – wie beispielsweise eine Federkonstante – als gegeben ansehen können. Man nennt sie den *Elastizitätstensor*. Er wird im Kasten „Vertiefung: Elastizitätstensor“ näher charakterisiert.

## Verzerrungstensor

Wir betrachten die möglichen Verformungen eines elastischen Körpers noch etwas genauer. Häufig wird der Gradient der Verformung in zwei Anteile zerlegt:

$$\partial_i q_j = \eta_{ij} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (8.110)$$

Man unterscheidet den symmetrischen *Verzerrungstensor* (häufig auch *Scherungstensor* genannt)

$$\epsilon_{ij} := \frac{1}{2} (\eta_{ij} + \eta_{ji}) = \epsilon_{ji} \quad (8.111)$$

## Vertiefung: Elastizitätstensor Vereinfachung durch Symmetriebeziehungen

Die elastischen Konstanten  $C_{ijkl}$  bilden den Elastizitätstensor vieter Stufe mit insgesamt  $3^4 = 81$  Komponenten. Man hat es hier mit einem Tensor vieter Stufe zu tun, da er aus dem quadratischen Entwicklungsterm bezüglich des Gradienten der Verformungen stammt, der wiederum durch einen Tensor zweiter Stufe beschrieben wird.

Der Elastizitätstensor erfüllt allerdings eine Reihe von Symmetriebeziehungen, welche die Anzahl der unabhängigen Komponenten stark reduzieren. In Einführungsbüchern der Elastizitätstheorie (Sadd 2009) wird gezeigt, dass die Bedingungen

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klji}$$

gelten, die „nur“ 21 unabhängige Komponenten übrig lassen.

Außerdem kann man in vielen Fällen in guter Näherung Materialien als homogen und isotrop betrachten. Die Homogenität hat zur Folge, dass der Elastizitätstensor nicht vom Ort abhängt, was das Lösen der Bewegungsgleichungen stark vereinfacht. Durch die Isotropie bleiben schließlich nur noch zwei unabhängige Parameter übrig. Man schreibt den Elastizitätstensor dann häufig in der einfachen Form

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

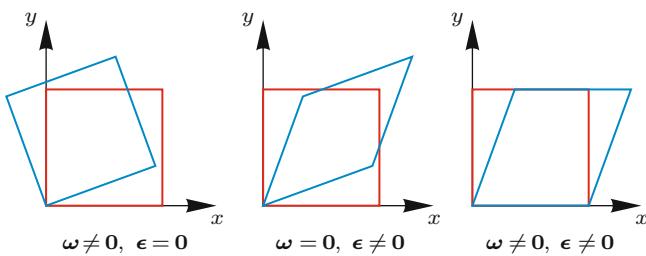
Man nennt  $\lambda$  und  $\mu$  die erste und zweite Lamé-Konstante. Die erste,  $\lambda$ , beschreibt, wie sich das Material verhält, wenn es

komprimiert wird. Die zweite,  $\mu$ , wird auch häufig als *Schermodul* oder *Schubmodul*  $G$  bezeichnet und charakterisiert das Verhalten des Materials unter Scherung. Der Elastizitätsmodul aus (8.13), der dort nur für ein eindimensionales Medium definiert wurde, wird für dreidimensionale Materialien durch den *Young'schen Elastizitätsmodul*

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

ersetzt, der die Dimension eines Drucks besitzt. Die beiden Lamé-Konstanten lassen sich bestimmen, indem Materialproben verformt und die dabei benötigten Kräfte gemessen werden.

Es ist zu beachten, dass der Elastizitätstensor nur lineare, also kleine Verformungsgradienten beschreibt. Außerdem berücksichtigt diese einfache Theorie nicht die *Plastizität*. Dabei handelt es sich um irreversible Verformungen, die durch Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme entstehen. Ganze Wissenschaftszweige, vor allem im Ingenieurswesen, beschäftigen sich mit nichtlinearen, nichthomogenen oder plastischen Materialeigenschaften. Die Automobilindustrie – um nur ein Anwendungsfeld zu nennen – ist bestrebt, leichtere, festere und günstigere Materialien für Karosserien zu entwickeln.



**Abb. 8.13** Durch die Zerlegung (8.110) werden Drehungen und Verzerrungen voneinander getrennt. Allgemeine Verformungen (rechts) lassen sich als Überlagerung einer reinen Drehung (links) und einer reinen Verzerrung (Mitte) darstellen

und den antisymmetrischen *Drehungstensor*

$$\omega_{ij} := \frac{1}{2} (\eta_{ij} - \eta_{ji}) = -\omega_{ji}. \quad (8.112)$$

Während  $\omega(t, r)$  die Drehung eines lokalen Elements des Körpers beschreibt, die Winkel und Längen invariant lässt (Aufgabe 8.6), erfasst  $\epsilon(t, r)$  eine tatsächliche Verzerrung am Ort  $r$  (Abb. 8.13).

Nur die Verzerrung  $\epsilon$  geht in die potentielle Energie ein, da eine reine Drehung eines Massenelements nicht zur inneren Energie beiträgt. Dies wird in Aufgabe 8.6 genauer diskutiert.

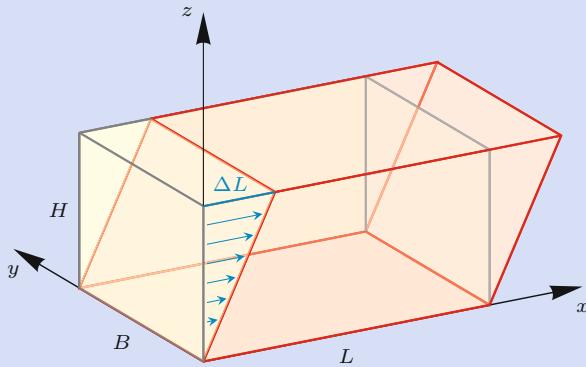
### Scherung

Eine der einfachsten Verformungen ist eine *Scherung*: Ein elastischer Quader sei in der  $x$ - $z$ -Ebene gescherzt (Abb. 8.14). Dabei werden die Massenelemente entlang der  $x$ -Achse verschoben, und man kann zunächst

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = q_x(z) \hat{\mathbf{e}}_x \quad (8.113)$$

schreiben, d. h., die Verformung hängt von der Lage  $z$  der Massenelemente ab, nicht jedoch von  $x$  oder  $y$ ; außerdem sei die Verformung statisch, also zeitunabhängig. Die Scherung soll linear in  $z$  sein:

$$q_x(z) = \frac{\Delta L}{H} z. \quad (8.114)$$



**Abb. 8.14** Zur Scherung eines Quaders in der  $x$ - $z$ -Ebene. Die Scherung wird durch das Verhältnis  $\Delta L/H = \text{const}$  definiert

Dann ist

$$\eta_{zx} = \frac{dq_x}{dz} = \frac{\Delta L}{H} = \text{const} \quad (8.115)$$

die einzige nicht verschwindende Komponente des Deformationsgradienten  $\boldsymbol{\eta}$ . Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.116)$$

Wir kommen in Aufgabe 8.7 nochmals auf die Scherung zurück. ◀

## Bewegungsgleichungen und Spannungstensor

Eine grundlegende Größe in der Elastizitätstheorie ist der sogenannte *Spannungstensor*, der in den Bewegungsgleichungen auftritt. Diese stellen wir zunächst in einem Beispiel auf. Dazu wenden wir die Lagrange-Gleichungen auf die Lagrange-Dichte des elastischen Mediums an.

### Bewegungsgleichungen des elastischen Mediums

Wir betrachten nun die konkrete Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 - V(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\rho}{2} \dot{q}_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} C_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl} + f_i q_i, \quad (8.128)$$

wobei  $\mathbf{q}$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  und  $f$  im Allgemeinen Funktionen von Ort und Zeit sind. Die Bewegungsgleichungen leiten wir mithilfe der Lagrange-Gleichungen (8.107) ab.

Es folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_m} = f_m, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_m} = \rho \ddot{q}_m, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{mn}} = -C_{mnkl} \eta_{kl}. \quad (8.129)$$

Die letzte Gleichung gilt wegen

$$\frac{\partial \eta_{kl}}{\partial \eta_{mn}} = \delta_{mk} \delta_{nl}, \quad (8.130)$$

da alle Elemente von  $\boldsymbol{\eta}$  unabhängig sind.

Die Bewegungsgleichungen des linearen elastischen Mediums lauten also

$$\rho \ddot{q}_m = \partial_n (C_{mnkl} \eta_{kl}) + f_m, \quad (8.131)$$

können aber noch in der Form

$$\rho \ddot{q}_m = \partial_n (C_{mnkl} \epsilon_{kl}) + f_m \quad (8.132)$$

geschrieben werden, da wir gesehen haben, dass nur der Anteil  $\boldsymbol{\epsilon}$  zur Energie beiträgt. ◀

### Frage 21

Überprüfen Sie explizit die Rechnungen, die auf (8.132) führen. Arbeiten Sie dabei mit der Index-Notation und nutzen Sie (8.110) sowie die Symmetrieeigenschaften des Elastizitätstensors aus.

Man erkennt, dass der erste Term auf der rechten Seite von (8.132) die Divergenz der Größe  $C_{ijkl} \epsilon_{kl}$  ist. Zur Abkürzung definiert man nun den *Spannungstensor* als

$$\sigma_{ij} := C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (8.133)$$

d.h. als Kontraktion von  $\mathbf{C}$  mit  $\boldsymbol{\epsilon}$ . Er ist wegen  $C_{ijkl} = C_{jikl}$  symmetrisch:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

### Bewegungsgleichung des elastischen Mediums

Ein elastisches Medium erfüllt die Bewegungsgleichungen

$$\rho \ddot{q}_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i \quad (8.134)$$

bzw. in Vektornotation formuliert:

$$\rho \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}. \quad (8.135)$$

Hier ist  $\boldsymbol{\sigma}$  der Spannungstensor und  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = (\partial_j \sigma_{ij})$  seine Divergenz (die in diesem Fall vektorwertig ist und daher fett geschrieben wird).

## Anwendung: Elastischer Stab und spontane Symmetriebrechung

Wir zeigen ein einfaches Beispiel eines elastischen Systems, das zu einer spontanen Symmetriebrechung neigt. Symmetriebrechungen spielen in der Elementarteilchenphysik eine entscheidende Rolle, wie im Vertiefungskasten „Spontane Brechung einer Symmetrie und Higgs-Mechanismus“ in Bd. 3, Kap. 7 diskutiert wird.

Betrachten wir einen elastischen Stab der Länge  $\ell_0$ . Dieser Stab wird entlang seiner Länge ( $z$ -Achse) eingespannt. Es wird eine äußere Druckspannung angewandt, so dass der Abstand der beiden Endpunkte des Stabes auf  $h < \ell_0$  verkürzt wird. Da der Stab einen endlichen Kompressionsmodul  $Y_c$  (mit der Dimension einer mechanischen Spannung) besitzen soll, erfordert diese Kompression eine Energie

$$E_c = \frac{1}{2} Y_c (h - \ell_0)^2 \ell_0. \quad (8.117)$$

Wir multiplizieren die in  $(h - \ell_0)$  quadratische Energie mit  $\ell_0$ , um den Dimensionen der einzelnen Größen Rechnung zu tragen. Man könnte dazu jede andere Längenskala verwenden (z. B. die Stabdicke) und den entsprechend auftretenden numerischen Faktor in der Definition von  $Y_c$  absorbieren. Für die Diskussion in diesem Abschnitt ist die genaue Definition von  $Y_c$  unerheblich.

Nun erlauben wir zusätzlich, dass sich der Stab verbiegen kann. Während die beiden Endpunkte weiterhin auf der  $z$ -Achse mit Abstand  $h$  befestigt sein sollen, kann der Stab sich so deformieren, dass er die Form eines Kreisbogenabschnitts mit Radius  $R$  in der  $x$ - $z$ -Ebene annimmt. Aufgrund der Rotationssymmetrie um die  $z$ -Achse ist dies keine Einschränkung; wir könnten genau so gut eine Verformung in der  $y$ - $z$ -Ebene oder jeder anderen um die  $z$ -Achse gedrehten Ebene gestatten.

Durch seine Krümmung kann der Stab eine Länge  $\ell$  beibehalten, die größer ist als der Abstand  $h$ :  $h \leq \ell \leq \ell_0$ . Die Krümmung neigt also dazu, die benötigte Kompressionsenergie  $E_c$  zu reduzieren. Da wir allerdings davon ausgehen können, dass der Stab einen elastischen Widerstand gegen Krümmung besitzt, den Biegemodul  $Y_b$  (ebenfalls mit der Dimension einer mechanischen Spannung), erfordert die Krümmung selbst ebenfalls eine Energie, die in guter Näherung quadratisch in der Verformung ist:

$$E_b = \frac{1}{2} Y_b (\kappa \ell)^2 \ell_0^3. \quad (8.118)$$

Hier ist  $\kappa = 1/R$  die als konstant angenommene Krümmung des Stabes. Der Faktor  $\ell_0^3$  sorgt für die Konsistenz der Dimensionen. Auch hier könnte man eine andere Längenskala verwenden und  $Y_b$  entsprechend anders definieren, was allerdings nichts am grundlegenden Ergebnis dieses Kastens ändern würde.

ersetzen wir nun in der Kompressionsenergie die Länge des Stabes durch den tatsächlichen Wert  $\ell$ , so hat der Stab insgesamt eine elastische Energie

$$E = \frac{1}{2} Y_c (\ell - \ell_0)^2 \ell_0 + \frac{1}{2} Y_b (\kappa \ell)^2 \ell_0^3. \quad (8.119)$$

Die Frage ist nun: Unter welchen Umständen biegt sich der Stab, und unter welchen bleibt er gerade? Wir können sicher sagen, dass die Wahl der Stabparameter  $\ell_0$ ,  $Y_c$  und  $Y_b$  ebenso eine Rolle spielen wird wie der erzwungene Abstand  $h$ . Der Stab wird dann denjenigen Krümmungszustand  $\kappa$  annehmen, für welchen die Gesamtenergie  $E$  minimal wird.

Um das Problem zu lösen, drücken wir  $\ell$  durch  $\kappa$  und  $h$  aus, was durch eine rein geometrische Betrachtung möglich ist. Für eine feste Wahl der Stabparameter wird die Energie dann eine Funktion  $E(h, \kappa)$ , welche wir uns für verschiedene vorgegebene Werte von  $h$  genauer ansehen können:  $E_h(\kappa)$ . Ziel ist es, die Minima von  $E_h(\kappa)$  zu finden, was schließlich direkt auf die gesuchte Krümmung  $\kappa$  führt.

Für einen Kreisbogen der Länge  $\ell$  mit Sehnenlänge  $h$  und Radius  $R$  gilt

$$h = 2R \sin \frac{\ell}{2R} \implies \ell = \frac{2}{\kappa} \arcsin(h\kappa/2). \quad (8.120)$$

Wir können also  $\ell$  eliminieren und durch  $h$  und  $\kappa$  ersetzen.

Da wir uns auf kleine Verformungen beschränken wollen, entwickeln wir die Energie  $E$  für kleine dimensionslose Krümmungen  $hk$  bei konstantem  $h$ . Dabei müssen wir die ersten beiden führenden Ordnungen mitnehmen, da wir in führender Ordnung stets nur eine quadratische Funktion mit einem einzigen Minimum bei  $\kappa = 0$  erhalten würden. Wegen  $\arcsin(x) \approx x + x^3/6$  finden wir zunächst

$$\ell \approx \frac{2}{\kappa} \left( \frac{hk}{2} + \frac{(hk)^3}{48} \right). \quad (8.121)$$

Die Energie wird somit

$$E \approx \frac{1}{2} Y_c \left( h - \ell_0 + \frac{h}{24} (hk)^2 \right)^2 \ell_0 + \frac{1}{2} Y_b \left( hk + \frac{(hk)^3}{24} \right)^2 \ell_0^3. \quad (8.122)$$

Mit der Abkürzung  $\tilde{\kappa} = hk$  können wir die Energie kompakt als

$$E \approx a + b\tilde{\kappa}^2 + c\tilde{\kappa}^4 \quad (8.123)$$

schreiben, wobei wir Terme höherer Ordnung als  $\tilde{\kappa}^4$  vernachlässigt haben. Die konstanten Koeffizienten sind

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} Y_c (h - \ell_0)^2 \ell_0, \\ b &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} Y_c h (h - \ell_0) + Y_b \ell_0^2 \right) \ell_0, \\ c &= \frac{1}{24} \left( \frac{1}{48} Y_c h^2 + Y_b \ell_0^2 \right) \ell_0. \end{aligned} \quad (8.124)$$

Wir untersuchen nun die Extrema der Energie  $E$ . Die erste Ableitung  $dE/d\tilde{\kappa}$  verschwindet für  $\tilde{\kappa} = 0$  und für

$$\tilde{\kappa}_{\pm}^2 = -\frac{b}{2c}. \quad (8.125)$$

Da  $\kappa_+$  und  $\kappa_-$  in dem Sinne gleichwertig sind, dass sie lediglich identische Krümmungen in unterschiedliche Richtungen beschreiben, interessieren wir uns nur für die Lösung  $\kappa_+ = \sqrt{-b/(2c)}$ . Sie ist reell, wenn  $b$  negativ wird, da  $c$  stets positiv ist. Dies ist der Fall für

$$h(h - \ell_0) < -12 \frac{Y_b}{Y_c} \ell_0^2. \quad (8.126)$$

Diese Ungleichung hat zwei Lösungen. Die für uns interessante führt auf eine physikalische Lösung  $\ell_0/2 < h < \ell_0$

mit kritischer Kompression  $h_{\text{krit}}$ , welche nur von den Stabparametern abhängt:

$$h < h_{\text{krit}} = \frac{\ell_0}{2} + \frac{\ell_0}{2} \sqrt{1 - 48 \frac{Y_b}{Y_c}}. \quad (8.127)$$

Ist diese Ungleichung erfüllt, besitzt die Energie drei Extrema, eines bei  $\tilde{\kappa} = 0$  und zwei bei  $\pm\tilde{\kappa}_+$ . Man kann zeigen, dass in diesem Fall die beiden äußeren Extrema Minima sind; der Stab wird also den gebogenen Zustand bevorzugen. Die entscheidende Beobachtung ist, dass für  $h > h_{\text{krit}}$  nur ein Minimum bei  $\tilde{\kappa} = 0$  existiert, für  $h < h_{\text{krit}}$  aber zwei Minima für  $\tilde{\kappa} \neq 0$ . Der Stab wird sich spontan für eines der Minima entscheiden; in der Realität würde dies beispielsweise durch Inhomogenitäten im Stab bestimmt werden.

Im Grenzfall  $Y_b \rightarrow 0$  ist der kritische Wert von  $h$  sehr nah an  $\ell_0$ . Schon eine kleine Kompression würde zum Verbiegen führen, da die Krümmung kaum energetisch bestraft wird. Mit zunehmendem Modul  $Y_b$  muss  $h$  kleiner, die Kompression also stärker werden, bevor sich das Verbiegen energetisch lohnt.

Während die *Kinematik* eines elastischen Materials durch seine Verzerrungen  $\epsilon$  beschrieben wird, benötigt man den Spannungstensor  $\sigma$  für die *Dynamik*. An dieser Stelle sind einige Erklärungen notwendig.

## Interpretation des Spannungstensors

Welche anschauliche Bedeutung hat (8.134) bzw. (8.135)? Die Massenelemente des elastischen Körpers werden durch äußere Kräfte  $f$  oder durch eine Inhomogenität der inneren *Spannungen*  $\sigma$  beschleunigt. Dass äußere Kräfte zu einer Beschleunigung führen, ist wenig überraschend, doch es muss erläutert werden, welche Bedeutung der Spannungstensor und seine Divergenz  $\text{div } \sigma$  bzw.  $\partial_j \sigma_{ij}$  haben.

In der Kontinuumsmechanik lassen sich Kräfte generell in zwei Kategorien unterteilen: *Volumenkräfte* und *Oberflächen- bzw. Kontaktkräfte*. Zu den Volumenkräften zählt beispielsweise die Gravitation. Sie kann direkt als ein Term  $f = \rho g$  in (8.135) berücksichtigt werden. Wir werden in Kürze sehen, dass mechanische Spannungen nichts weiter sind als Kräfte, die auf Flächen wirken. Dies zeigt eine enge Verwandtschaft von Spannungen und Druck, wie wir in Abschn. 8.6 noch sehen werden.

Die Flächen, auf welche diese Spannungen wirken, können äußere Flächen, also Oberflächen, von Objekten sein. Innere Spannungen hingegen lassen sich als Kräfte interpretieren, die auf (imaginäre, d. h. gedachte) Flächen wirken, die im Inneren eines Körpers verlaufen.

Stellen wir uns einen unbeschleunigten, aber deformierten elastischen Körper vor. Dieser wird wegen  $\ddot{q} = \mathbf{0}$  also durch die Gleichung

$$\mathbf{0} = \text{div } \sigma + f \quad (8.136)$$

beschrieben. Man spricht dann auch von der *Statik*. Aus der Newton'schen Mechanik wissen wir, dass unbeschleunigte Punktmassen insgesamt keine Kraft erfahren. Dies muss hier genauso für jedes beliebige Volumenelement gelten. Somit sieht man bereits, dass es sich bei  $\text{div } \sigma$  um eine innere Kraft handeln muss, die vom Verzerrungszustand  $\epsilon$  abhängt und gerade die äußere Kraft  $f$  kompensiert. Die Verzerrung  $\epsilon$  des statischen elastischen Körpers stellt sich also über (8.133) so ein, dass (8.136) erfüllt wird.

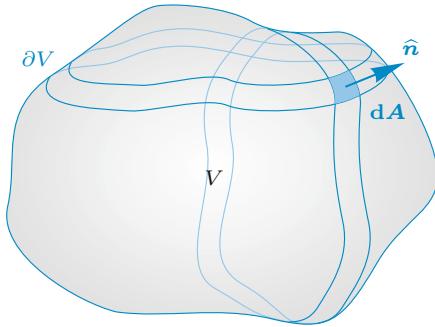
### Frage 22

Wesentlich aufwendiger wird die Betrachtung, wenn der elastische Körper nicht mehr im Gleichgewicht ist. Dann ist im Allgemeinen  $\ddot{q} \neq \mathbf{0}$ . Machen Sie sich klar, dass die Spannungsinhomogenitäten  $\text{div } \sigma$  in diesem Fall die Volumenkräfte nicht mehr ausgleichen.

Betrachten wir nun ein Volumen  $V$ , in dem die Kraftdichte  $f$  wirkt. Dann können wir

$$\iiint_V (\text{div } \sigma) dV = - \iiint_V f dV \quad (8.137)$$

schreiben. Es soll nun der Term auf der linken Seite so umgeformt werden, dass wir  $\sigma$  anschaulich interpretieren können. An



**Abb. 8.15** Ein Volumen  $V$  wird von seiner Oberfläche  $\partial V$  eingeschlossen. Die Oberfläche besteht aus infinitesimalen Flächenelementen  $d\mathbf{A} = dA \hat{\mathbf{n}}$ , wobei der Einheitsnormalenvektor  $\hat{\mathbf{n}}$  stets nach außen zeigt

dieser Stelle kommt der *Integralsatz von Gauß* ins Spiel, der erst im „Mathematischen Hintergrund“ Bd. 2, (1.3) gründlich besprochen wird (siehe hierzu auch den „Mathematischen Hintergrund“ 1.9).

Der Satz von Gauß erlaubt es, Volumenintegrale einer Divergenz in ein Oberflächenintegral umzuformen:

$$\iiint_V (\partial_j v_j) dV = \iint_{\partial V} v_j dA_j. \quad (8.138)$$

Hier ist  $\mathbf{v} = (v_j)$  ein Vektorfeld und  $d\mathbf{A} = (dA_j)$  das orientierte Flächenelement derjenigen Oberfläche  $\partial V$ , die das Volumen  $V$  einschließt (Abb. 8.15). Die Richtung  $\hat{\mathbf{n}}$  von  $d\mathbf{A} = dA \hat{\mathbf{n}}$  zeigt dabei senkrecht zur lokalen Oberfläche nach außen (d. h. fort vom eingeschlossenen Volumen);  $\hat{\mathbf{n}}$  hängt also vom Ort ab.

Gl. (8.138) lässt sich auf Tensorfelder beliebiger Stufe verallgemeinern, hier dargestellt für einen Tensor zweiter Ordnung:

$$\iiint_V (\partial_j \sigma_{ij}) dV = \iint_{\partial V} \sigma_{ij} dA_j. \quad (8.139)$$

Wir erkennen, dass (8.139) die Komponentenschreibweise von

$$\iiint_V (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) dV = \iint_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} \quad (8.140)$$

und dass die linke Seite gerade der Ausdruck auf der linken Seite von (8.137) ist. Daraus folgt unmittelbar

$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} = - \iiint_V f dV. \quad (8.141)$$

Dies ist der Schlüssel zur Interpretation des Spannungstensors: Das Oberflächenintegral des Spannungstensors auf der linken Seite von (8.141) kompensiert in der Statik gerade die negative Volumenkraft. Damit kann  $\boldsymbol{\sigma}$  als ein Maß für die Kraft pro Fläche, die an der Oberfläche  $\partial V$  angreift, interpretiert werden.

## 8.5 Grundlagen der Elastizitätstheorie

Handelt es sich bei  $\partial V$  um eine innere Fläche, die nicht im direkten Kontakt zur Außenwelt steht, so werden die darauf wirkenden Oberflächenkräfte durch das elastische Material selbst erzeugt (genauer gesagt: durch seine Verzerrung). Es handelt sich dabei sozusagen um die elastischen Rückstellkräfte, welche die Verzerrung auszugleichen versuchen. Wie bereits erwähnt, muss sich in der Statik die Verzerrung  $\epsilon$  gerade so einstellen, dass die damit verbundene Spannung  $\sigma$  überall die Volumenkraft kompensiert.

Zur Veranschaulichung der Oberflächenintegration betrachten wir ein Beispiel.

### Oberflächenintegral in kartesischen Koordinaten

Es soll das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  auf einem Würfel mit Kantenlänge  $a$  und Mittelpunkt im Ursprung berechnet werden. Das Integral lautet zunächst

$$I = \iint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (8.142)$$

Die Oberfläche eines Würfels besteht aus sechs einzelnen Flächen; wir greifen uns davon zunächst willkürlich eine heraus (und zwar die Fläche bei  $x = +a/2$ ):

$$I_{+x} = \int_{-a/2}^{+a/2} dy \int_{-a/2}^{+a/2} dz \mathbf{v}(+a/2, y, z) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x dA. \quad (8.143)$$

Der Normalenvektor  $\hat{\mathbf{n}}$  zeigt stets senkrecht nach außen.

In diesem Beispiel ist die betrachtete Fläche eben, sodass der Normalenvektor über die gesamte Fläche  $A_{+x}$  konstant ist und  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_x$  gilt (für die Fläche  $A_{-x}$  bei  $x = -a/2$  gilt entsprechend  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{e}}_x$ ). Man betrachtet also das Vektorfeld  $\mathbf{v}$  auf der angegebenen Fläche und projiziert es auf den dortigen Vektor  $\hat{\mathbf{n}}$ . Der resultierende Ausdruck wird dann integriert.

Wählen wir beispielsweise das konkrete Feld

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}, \quad (8.144)$$

dessen Divergenz  $\partial_x x + \partial_y y - 2\partial_z z = 0$  ist. Bei  $x = +a/2$  ist

$$\mathbf{v}(+a/2, y, z) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \begin{pmatrix} a/2 \\ y \\ -2z \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{a}{2}. \quad (8.145)$$

Die übrigen fünf entsprechenden Ausdrücke lauten

$$\begin{aligned} -\mathbf{v}(-a/2, y, z) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x &= \frac{a}{2}, \\ \mathbf{v}(x, +a/2, z) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y &= \frac{a}{2}, \\ -\mathbf{v}(x, -a/2, z) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y &= \frac{a}{2}, \\ \mathbf{v}(x, y, +a/2) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z &= -a, \\ -\mathbf{v}(x, y, -a/2) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z &= -a. \end{aligned} \quad (8.146)$$

Somit sind alle sechs Integranden innerhalb ihrer Integrationsgrenzen konstant, und das gesamte Oberflächenintegral lautet einfach

$$I = \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - a - a \right) A = 0, \quad (8.147)$$

wobei  $A = a^2$  die Fläche jeder Seite ist – in Übereinstimmung mit dem Gauß'schen Satz und der verschwindenden Divergenz.

Weitere Beispiele zur Berechnung von Oberflächenintegralen werden in Bd. 2, Aufgabe 1.4 im Rahmen der Maxwell'schen Gleichungen besprochen.

Wie hängt nun die Spannung mit der Oberflächenkraft zusammen? Die durch eine Spannung  $\sigma$  verursachte infinitesimale Kraft  $d\mathbf{F}$ , die auf ein kleines Flächenelement  $d\mathbf{A} = dA \hat{\mathbf{n}}$  wirkt, ist durch

$$d\mathbf{F} = \sigma d\mathbf{A} = dA \sigma \hat{\mathbf{n}} \quad \text{bzw.} \quad dF_i = dA \sigma_{ij} \hat{n}_j \quad (8.148)$$

gegeben. Dies erklärt auch, warum wir beispielsweise von einem gespannten Faden sprechen: Durch eine äußere Kontaktkraft wird eine innere Spannung  $\sigma$  erzeugt, die der von außen auferlegten Spannung entgegenwirkt.

**Achtung** Die Kraft  $d\mathbf{F}$  muss nicht zwangsläufig in dieselbe Richtung zeigen wie  $\hat{\mathbf{n}}$ , da  $\sigma$  ein Tensor zweiter Stufe ist. Insbesondere kann die Kraft für eine endliche Spannung unter Umständen sogar verschwinden, wenn  $\hat{\mathbf{n}}$  entsprechend gewählt wird.

### Frage 23

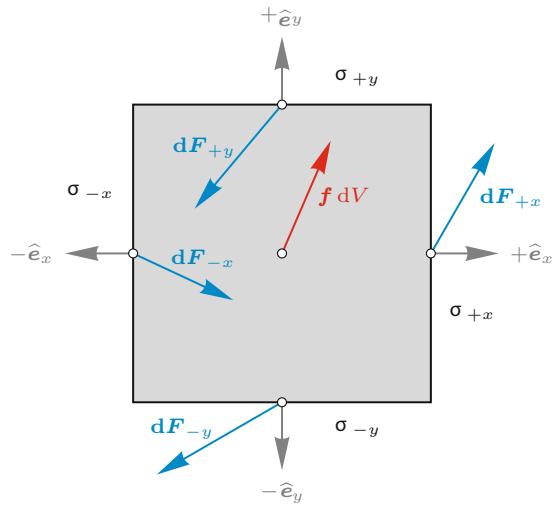
Denken Sie sich einen Spannungstensor, für den nur die Elemente  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y$ ) nicht verschwinden. Berechnen Sie die Kraft auf ein Flächenelement mit Normalenvektor  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_z$ . Zeigen Sie, dass keine Kraft auf dieses Flächenelement wirkt.

### Spannungstensor

Im Gegensatz zu einer Volumenkraft wie der Gravitation beschreibt der Spannungstensor  $\sigma$  Flächenkräfte: Auf ein orientiertes Flächenelement  $d\mathbf{A}$  wirkt die Kraft

$$d\mathbf{F} = \sigma d\mathbf{A}. \quad (8.149)$$

In Abb. 8.16 ist ein Beispiel für eine Kraftverteilung in einem infinitesimalen Volumenelement  $dV$  gezeigt. Aus Gründen der Anschaulichkeit betrachten wir nur ein zweidimensionales Problem in der  $x$ - $y$ -Ebene. Auf den vier Seiten des Quadrats sind Spannungstensoren  $\sigma_{\pm x}$  und  $\sigma_{\pm y}$  definiert, die über die Normalenvektoren  $\pm \hat{\mathbf{e}}_x$  und  $\pm \hat{\mathbf{e}}_y$  und (8.149) in Flächenkräften  $d\mathbf{F}_{\pm x}$  und  $d\mathbf{F}_{\pm y}$  resultieren. In der Statik müssen diese gerade eine mögliche Volumenkraft  $f dV$  kompensieren.



**Abb. 8.16** Ein Volumenelement (hier zur besseren Übersicht nur in zwei Dimensionen dargestellt) kann eine Volumenkraft  $f dV$  (rot) und Oberflächenkräfte (blau) erfahren. Auf jeder Seite sei eine konstante Spannung  $\sigma$  definiert, die über den Normalenvektor auf eine entsprechende Flächenkraft führt, die allgemein nicht parallel zum Normalenvektor ist. In diesem Fall ist die Summe aller Kräfte gerade null, sodass (8.136) gilt

Es muss noch erläutert werden, warum nur Inhomogenitäten des Spannungstensors (ausgedrückt durch seine Divergenz) in die Bewegungsgleichung eingehen und nicht  $\sigma$  selbst. Dies soll am Beispiel der Spannung in einem hängenden Faden veranschaulicht werden. Der Spannungstensor für die Scherung in (8.116) wird in Aufgabe 8.7 bestimmt.

### Faden im Gravitationsfeld

Stellen wir uns einen statischen Faden mit Querschnittsfläche  $A$  vor, der von der Decke herabhängt (Abb. 8.17). Durch die Gravitation  $\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{e}}_z$  wirkt eine äußere Kraft auf den Faden, und es wird sich ein Spannungszustand einstellen, sodass (8.136) gilt. Die Spannungen  $\sigma$  im Faden müssen also

$$\partial_j \sigma_{xj} = 0, \quad \partial_j \sigma_{yj} = 0, \quad \partial_z \sigma_{zz} = \rho g \quad (8.150)$$

erfüllen. Für den Faden heißt dies, dass er trotz der Gravitationskraft nicht beschleunigt wird, da an jedem Punkt des Fadens die Gravitation durch die Divergenz des Spannungstensors genau ausgeglichen wird.

Wir können hier in guter Näherung annehmen, dass die Spannung sich über die Querschnittsfläche des Fadens nicht ändert. Dies bedeutet, dass Ableitungen von  $\sigma$  nach  $x$  und  $y$  alle verschwinden. Es verbleibt

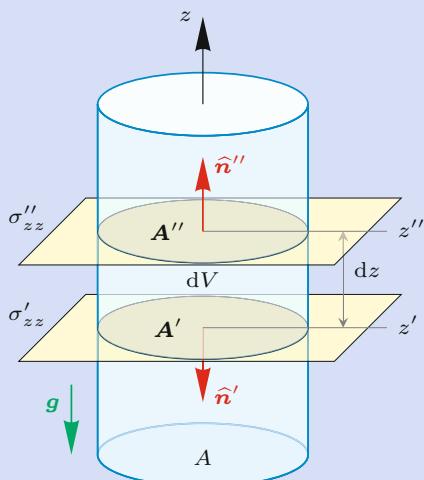
$$\partial_z \sigma_{xz} = 0, \quad \partial_z \sigma_{yz} = 0, \quad \partial_z \sigma_{zz} = \rho g. \quad (8.151)$$

Diese Gleichungen kann man direkt aufintegrieren:

$$\sigma_{xz} = C_{xz}, \quad \sigma_{yz} = C_{yz}, \quad \sigma_{zz} = C_{zz} + \rho g z. \quad (8.152)$$

Hier sind die  $C_{ij}$  Konstanten, die in der Bewegungsgleichung keine Rolle spielen. Über die anderen Komponenten des Spannungstensors können wir keine Aussage treffen. Entscheidend ist jedoch der zweite Term von  $\sigma_{zz}$ : Die Größe  $\rho g z$  beschreibt gerade die Inhomogenität der Spannung, die nötig ist, um die Gravitationskraft zu kompensieren.

Um besser zu verstehen, wie nun die Divergenz der Spannung die Rolle einer Kraft übernimmt, legen wir in Gedanken zwei Ebenen durch den Faden: die erste,  $A'$ , bei  $z'$ , die zweite,  $A''$ , bei  $z'' = z' + dz$ . Diese beiden Flächen grenzen ein kleines Fadenvolumen  $dV = A dz$  ein. Es zeigen sowohl  $A'$  als auch  $A''$  von dem eingeschlossenen Volumenelement fort, wie in Abb. 8.17 gezeigt.



**Abb. 8.17** Faden im Gravitationsfeld. Wegen der Gravitationsbeschleunigung  $g$  sind die Spannungen  $\sigma'_{zz}$  und  $\sigma''_{zz}$  auf den Querschnittsflächen  $A'$  und  $A''$  nicht gleich

$$A' = A \hat{n}' = -A \hat{e}_z, \quad A'' = A \hat{n}'' = +A \hat{e}_z. \quad (8.153)$$

Die Gravitationskraft, die auf das Volumen  $dV$  wirkt, ist

$$F_z = -\rho g dV = -\rho g A dz. \quad (8.154)$$

Nun soll untersucht werden, welche Kraft durch die Spannung auf dieses Volumenelement wirkt und ob sie die Gravitationskraft tatsächlich genau kompensiert. Die Spannungen am Ort der beiden imaginären Flächen sind

$$\sigma'_{zz} = \rho g z', \quad \sigma''_{zz} = \rho g z'' > \sigma'_{zz}, \quad (8.155)$$

wobei wir die Konstante  $C_{zz}$  gleich null gesetzt haben.

Nun können wir zunächst die Kräfte ausrechnen, die durch die Spannungen an den Flächen  $A'$  und  $A''$  erzeugt werden. Diese Kräfte müssen entlang der  $z$ -Achse wirken. Auf die Ebene  $A'$  wirkt die Kraft

$$F'_z = \sigma'_{zz} A'_z = -\sigma'_{zz} A, \quad (8.156)$$

während die auf die zweite Ebene  $A''$  wirkende Kraft

$$F''_z = \sigma''_{zz} A''_z = \sigma''_{zz} A \quad (8.157)$$

ist. Neben der Gravitationskraft wirken auf das Volumenelement also die beiden Oberflächenkräfte  $F'_z$  und  $F''_z$ . Zusammen ergeben diese die Kraft

$$F'_z + F''_z = (\sigma''_{zz} - \sigma'_{zz}) A. \quad (8.158)$$

Die Mantelfläche trägt nicht bei, da ihr Normalenvektor innerhalb der  $x$ - $y$ -Ebene liegt, in welcher der Spannungstensor laut Forderung konstant ist.

Die Gesamtkraft auf das Volumenelement verschwindet tatsächlich:

$$\begin{aligned} F'_z + F''_z + F_z &= (\sigma''_{zz} - \sigma'_{zz}) A - \rho g A dz \\ &= \rho g A dz - \rho g A dz = 0. \end{aligned} \quad (8.159)$$

Die Gravitationskraft wird also dadurch kompensiert, dass wegen der Inhomogenität der Spannung auf die beiden Flächen  $A'$  und  $A''$  unterschiedliche Kräfte wirken, deren Summe den Faden „oben“ halten. ▲

## 8.6 Ideale Flüssigkeiten und Gase

Wir haben in Abschn. 8.5 elastische Medien besprochen. In unserem Alltag gibt es aber noch eine völlig unterschiedliche Klasse von Stoffen: Flüssigkeiten und Gase (zusammen auch als Fluide bezeichnet). Wir leiten die Feldgleichungen für Fluide ab und unterscheiden dabei zwischen kompressiblen und inkompressiblen Fluiden.

Hier beschäftigen wir uns zunächst mit den sogenannten idealen Fluiden, bei denen innere Reibungseffekte vernachlässigt werden und Wärmetransport keine Rolle spielt. Als Ergebnis erhalten wir die Kontinuitätsgleichung sowie die Euler-Gleichung für Fluide. Diese Feldgleichungen der Flüssigkeitsdynamik werden für einige einfache Spezialfälle gelöst. Nichtideale Fluide, bei denen die Viskosität eine wichtige Rolle spielt, werden erst in Abschn. 8.7 angesprochen.

Dieser Abschnitt richtet sich vor allem an interessierte und motivierte Studenten, da der Stoff in der Regel nicht in Mechanik-Vorlesungen behandelt wird – als Ausnahme ist beispielsweise

se das Lehrbuch von Stephani und Kluge (1995) zu nennen. Dieser Abschnitt ist konzeptionell etwas anspruchsvoller; es werden viele neue Begriffe eingeführt. Aufgrund ihrer Wichtigkeit in vielen physikalischen und ingenieurwissenschaftlichen Bereichen und wegen ihrer direkten Abstammung von der Newton'schen Mechanik soll hier aber nicht auf eine kompakte Einführung in die Fluidodynamik verzichtet werden.

## Makroskopische Beschreibung von Gasen und Flüssigkeiten

Gase und Flüssigkeiten sind für uns Menschen in erster Linie makroskopische Substanzen: Mit bloßem Auge lässt sich keine innere Struktur erkennen, und man könnte denken, dass man beispielsweise einen Wassertropfen immer weiter teilen kann. In Wirklichkeit bestehen aber Gase und Flüssigkeiten wie fast alle Materie auf der Erde aus Atomen und Molekülen. Ein Liter Wasser beinhaltet etwa  $10^{24}$  Wassermoleküle; es ist daher absolut unpraktisch, Wasser im Alltag als Molekülwolke beschreiben zu wollen.

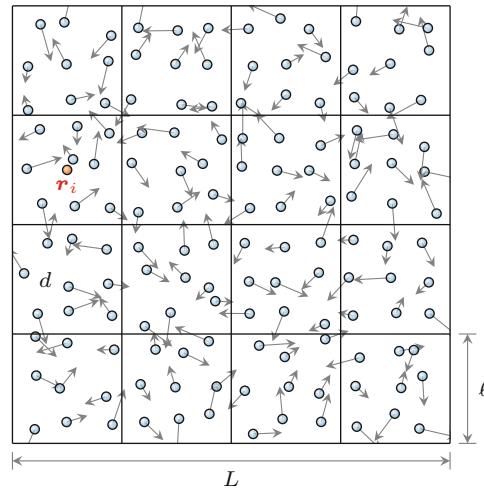
Glücklicherweise kann man mithilfe der Methoden der statischen Physik (Bd. 4) zeigen, dass sich Systeme mit sehr vielen Teilchen durch einige wenige „effektive“ Größen beschreiben lassen, wenn man sich nicht für die Bewegung der einzelnen Moleküle interessieren kann oder will.

Gase und Flüssigkeiten, die zusammengefasst auch als *Fluide* bezeichnet werden, werden in erster Linie durch fünf Felder beschrieben, wenn man die Temperatur zunächst außen vorlässt: Geschwindigkeit  $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$  (ein Vektorfeld oder entsprechend drei Skalarfelder  $u_i(t, \mathbf{r})$ ), Massendichte  $\rho(t, \mathbf{r})$  (im Folgenden kurz *Dichte*) und Druck  $P(t, \mathbf{r})$ . Das Geschwindigkeitsfeld gibt an, wie schnell die Flüssigkeit strömt. Die Dichte wurde bereits für das elastische Medium eingeführt. Der Druck ist konzeptionell schwieriger zu verstehen, ist aber salopp gesprochen die Kraft pro Fläche, mit der das Fluid gegen eine Wand *drückt*. Somit ist der Druck nichts weiter als ein Anteil des Spannungstensors (Abschn. 8.5). Wir kommen in Kürze wieder darauf zu sprechen.

**Achtung** Das elastische Medium wurde durch das Deformationsfeld  $\mathbf{q}(t, \mathbf{r})$  beschrieben. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$  eines Massenelements ist gerade die partielle Zeitableitung der Deformation:  $\mathbf{u} = \partial \mathbf{q} / \partial t$ .

Der Unterschied zwischen einem elastischen Medium und einem Fluid ist, dass Fluide keine elastischen Eigenschaften besitzen, d. h., ein „deformiertes“ Fluid kehrt nicht in den Ausgangszustand zurück, wenn die Deformationsursache (z. B. eine äußere Kraft) abgeschaltet wird. Dies liegt an den Details der Molekülwechselwirkungen, die für Fluide und Festkörper unterschiedlich sind.

Zur makroskopischen Beschreibung eines Fluids denken wir uns den Raum in lauter kleine Würfel mit Kantenlänge  $\ell$  und Mittelpunkten  $\mathbf{r}_i$  aufgeteilt, die zum einen groß gegenüber einzelnen Molekülen mit typischem Abstand  $d$  sind (sodass man über viele Moleküle in einem Würfel mitteln kann), zum anderen



**Abb. 8.18** Für den Kontinuumslimes wird ein Volumen mit Kantenlängen  $L$  in Untervolumina mit Kantenlänge  $\ell$  aufgeteilt, wobei  $\ell$  noch groß gegenüber dem mittleren Abstand der Moleküle sein soll. Die diskreten Koordinaten  $\mathbf{r}_i$  dieser Untervolumina werden dann durch eine kontinuierliche Variable  $\mathbf{r}$  ersetzt, was im Fall  $\ell \ll L$  möglich ist

aber klein gegenüber der Größe  $L$  des zu betrachtenden Systems (wie z. B. ein Eimer mit Wasser). Dies ist in Abb. 8.18 illustriert.

### Frage 24

Es hat sich gezeigt, dass für die oben angedeutete Mittelung bereits kleine „Würfchen“ mit etwa  $10^3$  Molekülen hinreichend groß sind. Schätzen Sie ab, wie groß die Seitenlänge dieses Würfels dann für Wasser wäre. Nehmen Sie dabei an, dass der typische Molekülabstand in der Größenordnung 1 nm liegt.

In diesem Fall können wir jedem dieser Würfel eine mittlere Geschwindigkeit  $\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}_i)$ , Massendichte  $\bar{\rho}(t, \mathbf{r}_i)$  und Druck  $\bar{P}(t, \mathbf{r}_i)$  zuordnen. Im Grenzfall  $L/\ell \rightarrow \infty$  und unter der Zusatzbedingung  $\ell/d \gg 1$  kann man dann  $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ ,  $\rho(t, \mathbf{r})$  und  $P(t, \mathbf{r})$  als kontinuierliche Felder einführen.

Die statistische Physik beschäftigt sich beispielsweise mit der Frage, wie sich der Druck in solch einer Situation aus den molekularen Eigenschaften des Fluids ergibt. Wir wollen hier nicht im Detail darauf eingehen, werden den Druck aber nun mechanisch genauer definieren.

## Mechanische Definition des Drucks

Mechanisch ist der Druck  $P^m$  auf eine kleine Fläche  $d\mathbf{A} = dA \hat{\mathbf{n}}$  nichts weiter als der Betrag der Komponente einer Kraft  $\mathbf{dF}$ , die senkrecht auf der Fläche steht (und damit parallel zu  $\hat{\mathbf{n}}$  ist):

$$P^m := \frac{|\mathbf{dF}_\perp|}{dA} = \frac{|(\mathbf{dF} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}|}{dA}. \quad (8.160)$$

Dabei muss es sich bei  $dA$  nicht um einen Teil der Begrenzung eines Gefäßes handeln; man kann auch die Kraft auf eine

gedachte Fläche in einem Material berechnen, so, wie wir es bereits beim Spannungstensor des elastischen Mediums in Abschn. 8.5 gesehen haben. Hier ist allerdings zu beachten, dass eine Fläche im Inneren eines Materials zwei Seiten hat (eine in Richtung von  $\hat{n}$ , eine in Richtung von  $-\hat{n}$ ). Daher wirken im Allgemeinen Kräfte von beiden Seiten auf die Fläche. Ist der Druck auf beiden Seiten identisch, so heben sich die beiden Kräfte, die auf jeweils eine Seite der Fläche wirken, gegenseitig auf, und die Fläche erfährt keine Gesamtkraft. Wir erkennen also, dass wir nur dann eine Nettokraft erwarten können, wenn der Druck nicht konstant ist, wie wir später noch sehen werden.

Tatsächlich ist der Druck  $P$  Teil des Spannungstensors und wird in Fluiden leicht abweichend definiert: Es handelt sich dort um den (negativen) isotropen Anteil des Spannungstensors  $\sigma$ , der folgendermaßen über die Spur definiert ist:

$$P = -\frac{\text{Sp}(\sigma)}{3} = -\frac{\sigma_{ii}}{3}. \quad (8.161)$$

Somit lässt sich der Spannungstensor auch als

$$\sigma = -P\mathbf{I} + \sigma' \quad (8.162)$$

schreiben, wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix und  $\sigma'$  der spurfreie Anteil des Spannungstensors ist.

Der mechanische Druck  $P^m$  und der auf dem Spannungstensor basierende Druck  $P$  sind nur identisch, wenn man  $P^m$  in (8.160) über alle Orientierungen  $\hat{n}$  mittelt. Um das zu sehen, setzen wir (8.162) in (8.149) ein und finden

$$dF = -PdA + \sigma' dA. \quad (8.163)$$

Multiplikation mit  $dA/dA^2$  führt unmittelbar auf

$$P^m = |-P + (\sigma' \hat{n}) \cdot \hat{n}|. \quad (8.164)$$

### Frage 25

Überprüfen Sie diese Rechnung.

Offensichtlich sind  $P^m$  und  $P$  im Allgemeinen nicht identisch, da der Term  $\sigma'_{ij}\hat{n}_i\hat{n}_j$  nicht zwangsläufig verschwindet. Mittelt man allerdings über alle Orientierungen von  $\hat{n}$ , so gilt

$$\langle \hat{n}_i \hat{n}_j \rangle = \frac{1}{4\pi} \iint d\Omega \hat{n}_i(\vartheta, \varphi) \hat{n}_j(\vartheta, \varphi) = \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad (8.165)$$

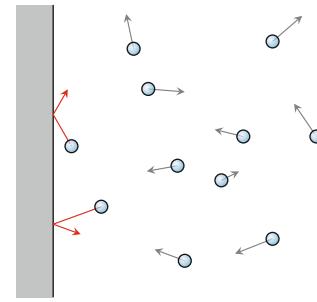
und man erhält (im Mittel)  $\sigma'_{ij}\delta_{ij} = \sigma'_{ii} = 0$ , da  $\sigma'$  laut Konstruktion spurfrei ist.

### Frage 26

Das Ergebnis in (8.165) kann man zeigen, indem die Integration in Kugelkoordinaten durchgeführt wird, wobei

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (8.166)$$

zu verwenden ist. Fleißige Leser können dies explizit nachrechnen.



**Abb. 8.19** Ein in einem Behälter eingeschlossenes Fluid übt einen Druck auf das Gefäß aus. Der Druck ist der mittlere Impulsübertrag pro Zeit und Fläche, wenn Moleküle an der Wand reflektiert werden (die Geschwindigkeitsvektoren der Moleküle sind als Pfeile dargestellt)

Die Drücke  $P^m$  und  $P$  sind also gleichwertig in dem Sinne, dass  $P$  der orientierungsgemittelte mechanische Druck an einem Punkt im Fluid ist. Insbesondere ist der Druck  $P$  in einem oben erwähnten Würfel mit Kantenlänge  $\ell$  dann der Mittelwert der Drücke, die auf jede der sechs Würfelseiten wirken.

Es gibt verschiedene Ursachen von Drücken in der Physik. In Fluiden wird der Druck durch die Eigenbewegung der Moleküle erzeugt, die sich ständig mit endlichen Geschwindigkeiten bewegen und dabei gegen die Gefäßwände stoßen, selbst wenn das Fluid augenscheinlich ruht (Abb. 8.19).

An dieser Stelle reicht es zu sagen, dass dieser *thermodynamische Druck* proportional zum Quadrat der mittleren Geschwindigkeit  $\langle v^2 \rangle$  der Moleküle und somit proportional zur Temperatur  $T$  des Fluids ist. Dies hängt mit dem sogenannten *Gleichverteilungssatz* zusammen, der in der statischen Physik besprochen wird (Bd. 4, Abschn. 4.2). Hier fragen wir nicht weiter nach den mikroskopischen Ursachen, sondern sehen den Druck als zusätzliches Skalarfeld  $P(t, r)$  an, das bei der makroskopischen Beschreibung nicht vernachlässigt werden darf.

### Luftdruck

An der Erdoberfläche herrscht ein Luftdruck von durchschnittlich rund  $10^5$  Pa (Pascal bzw. Newton pro Quadratmeter). Dies entspricht der Gewichtskraft von  $10^4$  kg, also 10 t, auf 1 m<sup>2</sup>! Wir spüren davon nichts, da in unserem Körper dieselbe Druck herrscht und dem Luftdruck entgegenwirkt. Allerdings nimmt beim Tauchen der Wasserdruk etwa alle 10 m um weitere  $10^5$  Pa zu, was man vor allem in den Ohren spürt.

Dieser Druckanstieg wird durch die nach unten zunehmende Gewichtskraft erzeugt, mit der die Luft- bzw. Wassersäule auf dem darunterliegenden Wasser lastet. Dies wird später in einem Beispiel vorgerechnet.

In Bd. 4, Abschn. 1.5 wird mehr über den Druck und seine physikalischen Einheiten gesagt.

## Kontinuitätsgleichung

Es wurden bisher die relevanten Felder der Flüssigkeitsdynamik definiert, doch ist noch nichts dazu gesagt worden, wie die entsprechenden Feldgleichungen aussehen.

Wir wissen, dass im Rahmen der klassischen Mechanik keine Masse erzeugt oder vernichtet werden kann. Sie kann sich allerdings von einem Ort zu einem anderen bewegen.

### Massenstrom

Stellen wir uns eine Flüssigkeitsströmung mit homogener Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  und konstanter Dichte  $\rho$  vor. Eine Flüssigkeitsmenge legt dann in einer infinitesimalen Zeit  $dt$  die Strecke  $d\mathbf{s} = \mathbf{u} dt = \mathbf{u}\hat{\mathbf{n}} dt$  zurück. Betrachten wir eine gedachte infinitesimale Fläche, die so orientiert ist, dass die Flüssigkeit senkrecht hindurchströmt (Abb. 8.20):  $d\mathbf{A} = dA \hat{\mathbf{n}}$ .

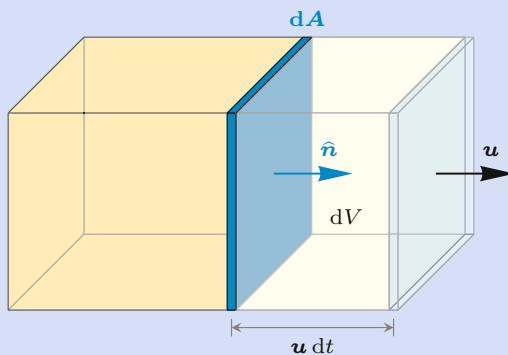


Abb. 8.20 Zur Veranschaulichung des Massenflusses  $j$

Dann ist in dieser Zeit durch diese Fläche ein Flüssigkeitsvolumen

$$dV = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{A} = dt dA \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = dt dA \mathbf{u} \quad (8.167)$$

gestromt. Die damit verbundene Masse ist

$$dm = \rho dV = \rho dt dA \mathbf{u}, \quad (8.168)$$

und die Masse, die pro Zeit durch diese Fläche fließt, ist

$$j := \frac{dm}{dt dA} = \rho \mathbf{u}, \quad (8.169)$$

was wir als *Massenstrom* oder *Massenfluss* definieren. Da der Massenstrom aber eine gerichtete Größe ist, schreibt man allgemein

$$\mathbf{j} := \rho \mathbf{u}. \quad (8.170)$$

Die Definition (8.170) ist auch gültig, wenn das Geschwindigkeitsfeld und die Dichte Funktionen von Zeit und Ort sind.

### Massenstromdichte

Die Massenstromdichte lässt sich an jedem Ort allgemein als

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{u}(t, \mathbf{r}) \quad (8.171)$$

schreiben. Sie gibt an, wie viel Masse sich pro Zeiteinheit durch eine bestimmte Querschnittsfläche in eine bestimmte Richtung bewegt.

Wir betrachten ein beliebiges, aber zeitlich konstantes Volumen  $V$  mit geschlossener Oberfläche  $\partial V$ . Die Masse, die sich in diesem Volumen befindet, ist  $M = \iiint_V \rho dV$ . Sie kann sich zeitlich ändern, genau dann, wenn gleichzeitig ein entsprechender Massenbeitrag in Form von  $\mathbf{j}$  entweder durch die Oberfläche  $\partial V$  ab- oder einfließt. Angenommen, die Masse ändert sich in der Zeit  $dt$  um  $dM$ , so muss

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (8.172)$$

sein, wobei  $d\mathbf{A} = dA \hat{\mathbf{n}}$  das nach außen zeigende Flächenelement ist. Die Zeitableitung kann in das Integral gezogen werden, da die Integrationsgrenzen als konstant gefordert wurden.

### Frage 27

Vergewissern Sie sich, dass das Vorzeichen in (8.172) korrekt ist. Stellen Sie sich dazu eine Situation vor, in welcher der Strom  $\mathbf{j}$  überall nach außen zeigt, und fragen Sie nach den Vorzeichen von  $\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  und  $\dot{M}$ .

Wie in Abschn. 8.5 brauchen wir nun wieder den Satz von Gauß, um Oberflächen- und Volumenintegrale ineinander zu überführen. Diesmal soll allerdings das Oberflächenintegral in (8.172) in ein Volumenintegral einer Divergenz umgeformt werden. Hier lautet der Satz

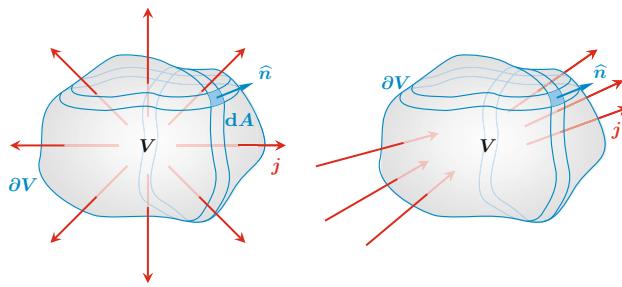
$$\oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV. \quad (8.173)$$

In Komponentenschreibweise lautet die Divergenz einfach  $\operatorname{div} \mathbf{j} = \partial_k j_k$ . Anschaulich gibt sie an, wie viel mehr Fluid aus einem Punkt heraus- als hineinfließt (Abb. 8.21).

Mithilfe des Gauß'schen Satzes (8.173) folgt

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) dV = 0. \quad (8.174)$$

Allerdings ist das betrachtete Volumen beliebig, sodass der Integrand selbst verschwinden muss.



**Abb. 8.21** Die Divergenz eines Vektorfeldes gibt an, wie viel Fluss aus einem Punkt heraustritt. Im *linken* Beispiel ist die Divergenz im Volumen  $V$  positiv, da ein Nettofluss  $\oint_V \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} > 0$  vorliegt. Im *rechten* Beispiel verschwindet die Divergenz, da der einlaufende vom auslaufenden Fluss kompensiert wird

### Kontinuitätsgleichung

Die Massenerhaltung von Fluiden lässt sich durch die lokale Bilanzgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \quad (8.175)$$

ausdrücken, die an jedem Ort  $\mathbf{r}$  und zu jeder Zeit  $t$  gilt. Es handelt sich also um eine in  $\rho$  und  $\mathbf{u}$  lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Bilanzgleichungen der Form (8.175) sind sehr wichtig in der Physik und kommen in Feldtheorien häufig vor: Auf der linken Seite steht die partielle Zeitableitung der Dichte einer erhaltenen Größe und auf der rechten die Divergenz des zugehörigen Stromes. Gl. (8.175) ist also ein Beispiel für einen *differenziellen Erhaltungssatz*. Dies wird in Bd. 2 und Bd. 3 noch deutlicher herausgearbeitet. Anschaulich bedeutet (8.175), dass alles, was nicht an einem Ort bleibt, von diesem Ort wegfließen muss und nicht einfach verschwinden kann.

Wir haben mit der Kontinuitätsgleichung (8.175) als Bilanzgleichung die erste Feldgleichung gefunden, welche die Dynamik von Fluiden beschreibt. In Aufgabe 8.8 wird sie anhand eines Beispiels vertieft.

### Euler-Gleichung

Neben der Massenerhaltung gilt in der Mechanik außerdem noch die Impulserhaltung: In einem abgeschlossenen System, d. h. in Abwesenheit äußerer Kräfte, ist der Impuls konstant. Man kann sich also direkt fragen, ob es nicht eine zu (8.175) äquivalente Differentialgleichung für den Impuls gibt. Dies ist tatsächlich der Fall.

Zunächst erkennen wir, dass die *Impulsdichte* nichts weiter ist als die Massenstromdichte  $\mathbf{j}$ , denn der Impulsbeitrag  $d\mathbf{p}$  eines

Massenelements mit infinitesimalen Volumen  $dV$  und Masse  $dm$  erfüllt

$$d\mathbf{p} = dm \mathbf{u} = \rho dV \mathbf{u} \implies \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \rho \mathbf{u} = \mathbf{j}. \quad (8.176)$$

### Impulsdichte

Impulsdichte und Massenstromdichte sind identisch.

Als Nächstes führen wir mit der *Impulsstromdichte*  $\mathbf{M}$  diejenige Größe ein, die sich zur Impulsdichte so verhält wie die Massenstromdichte  $\mathbf{j}$  zur Dichte  $\rho$ . Wir erhalten sie einfach, indem wir die Impulsdichte mit  $\mathbf{u}$  multiplizieren:

$$\mathbf{M} := \mathbf{j} \circ \mathbf{u} = \rho \mathbf{u} \circ \mathbf{u}, \quad M_{kl} = \rho u_k u_l. \quad (8.177)$$

Man erkennt, dass es sich dabei um einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe handelt; es ist somit unbedingt darauf zu achten, dass  $\mathbf{M}$  nicht das Skalarprodukt von  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{u}$  ist, sondern das Tensorprodukt.

Der Vorgang des Mitbewegtwerdens durch ein Strömungsfeld heißt *Advektion*; wir haben es also mit einer Advektion des Impulses (gelegentlich, vor allem in der Meteorologie, auch als *Konvektion des Impulses* bezeichnet) zu tun.

### Frage 28

Machen Sie sich den Zusammenhang zwischen (8.177) und (8.171) klar. Die Stromdichte  $\mathbf{j}$  beschreibt die Advektion der Masse.

Die Impulsstromdichte  $\mathbf{M}$  beschreibt, wie die Impulsdichtekomponente  $j_k$  entlang von  $\hat{\mathbf{e}}_l$  strömt. Dies ist schwieriger vorstellbar als der Transport der Massendichte. Es hilft hier, sich die drei Komponenten  $j_k$  als einzelne Skalarfelder zu denken; dann ist  $\mathbf{M}$  bloß eine Zusammenfassung der drei Ströme  $j_k \mathbf{u}$ .

Mithilfe von  $\mathbf{M}$  lässt sich der Impuls  $d\mathbf{p}$  berechnen, der pro Zeit  $dt$  durch eine orientierte Fläche  $d\mathbf{A}$  transportiert wird:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{M} d\mathbf{A} dt \quad \text{oder} \quad dp_k = M_{kl} dA_l dt. \quad (8.178)$$

Da  $\mathbf{M}$  ein Tensor ist, sind  $d\mathbf{p}$  und  $d\mathbf{A}$  in der Regel nicht parallel, d. h., es kann beispielsweise Impuls entlang der  $x$ -Achse in Richtung von  $\hat{\mathbf{e}}_y$  strömen. Dies macht man sich am besten anhand eines Beispiels klar.

### Impulstransport

Kommen wir zurück zum bereits vorgestellten Beispiel einer homogenen Strömung mit  $\mathbf{u} = \text{const}$ : Nehmen

wir zunächst an, dass die Flüssigkeit entlang der  $x$ -Achse fließt. Dann ist  $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{e}}_x$  und

$$\mathbf{M} = \rho \mathbf{u} \circ \mathbf{u} = \rho \begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.179)$$

und nur  $M_{xx}$  verschwindet nicht. Dies bedeutet, dass lediglich die  $x$ -Komponente der Impulsdichte entlang von  $\hat{\mathbf{e}}_x$  strömt.  $\blacktriangleleft$

### Frage 29

Wie lautet die Matrix  $\mathbf{M}$ , wenn man die Strömung (oder das Koordinatensystem) so dreht, dass  $\mathbf{u} = u_x\hat{\mathbf{e}}_x + u_y\hat{\mathbf{e}}_y$  gilt? Zeigen Sie, dass dann ein Teil der Impulsdichte  $\rho u_x$  entlang  $\hat{\mathbf{e}}_y$  und ein Teil der Impulsdichte  $\rho u_y$  entlang  $\hat{\mathbf{e}}_x$  transportiert wird. Dies macht deutlich, warum  $\mathbf{M}$  ein Tensor (und nicht bloß ein Skalar) sein muss.

Um nun die zu (8.175) äquivalente lokale Bilanzgleichung für die Impulsdichte zu erhalten, ersetzen wir einfach  $\rho$  in (8.175) durch  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$  und schreiben zunächst:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \circ \mathbf{u}) \iff \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\partial_j(\rho u_i u_j). \quad (8.180)$$

Hier ist wieder zu beachten, dass die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe ein Vektor ist.

Wie ist (8.180) zu verstehen? Auf der linken Seite steht die zeitliche Änderung der Impulsdichte. Ändert sich die Impulsdichte an einem Ort, so muss ein entsprechender Impulsbetrag ein- oder abfließen. Dies wird gerade durch den Term auf der rechten Seite, also die Divergenz von  $\mathbf{M}$ , beschrieben, ganz analog zu der Dichte in der Kontinuitätsgleichung.

Allerdings ist diese Gleichung noch nicht vollständig, da es weitere Mechanismen gibt, die eine Impulsänderung verursachen. Der erste solche Beitrag stammt von äußeren Kräften. Wir führen mit  $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$  eine Kraftdichte (Kraft pro Volumen) ein, die auf die Flüssigkeit wirken kann. Diese ist vollständig analog zu der Kraftdichte in (8.135). Es handelt sich dabei in der Regel um die Gravitation; es können aber bei bestimmten (geladenen) Flüssigkeiten auch elektromagnetische Kräfte sein. Eine von außen vorgegebene Kraftdichte  $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$  führt auf eine Beschleunigung zur Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{r}$  und somit zu einer Änderung der Impulsdichte. Wir schreiben daher vorläufig für die Impulsänderung:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \circ \mathbf{u}) + \mathbf{f}. \quad (8.181)$$

Wir sind fast am Ziel, doch muss nun noch der Druck  $P$  berücksichtigt werden. Es wurde bereits diskutiert, dass der Druck den isotropen Anteil des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  ausmacht. In der

idealnen Fluidynamik gibt es keinen spurfreien Anteil der Spannung, d.h., der in (8.162) definierte Anteil  $\boldsymbol{\sigma}'$  verschwindet hier, und man kann zunächst

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} \quad (8.182)$$

schreiben.

In (8.135) haben wir gesehen, dass nicht der Spannungstensor selbst, sondern nur seine Divergenz in die Bewegungsgleichung eines elastischen Mediums eingeht. Dies verhält sich bei Flüssigkeiten und Gasen genau so.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div}(-P\mathbf{I}) = -\operatorname{grad} P. \quad (8.183)$$

Es tritt also der *Druckgradient* in der Impulsgleichung auf.

### Frage 30

Zeigen Sie diese Identität mithilfe der Indexschreibweise.

Somit finden wir schließlich die *Euler-Gleichung* für *ideale Fluide*, bei denen innere Reibungseffekte und somit die Viskosität vernachlässigt werden.

#### Euler-Gleichung für ideale Fluide

Die Impulsdichte  $\rho \mathbf{u}$  genügt der Euler-Gleichung

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \circ \mathbf{u}) - \operatorname{grad} P + \mathbf{f} \quad (8.184)$$

an jedem Ort  $\mathbf{r}$  und zu jeder Zeit  $t$ . Dies sind drei *nichtlineare partielle Differentialgleichungen*.

Diese drei Gleichungen (eine für jede Komponente von  $\mathbf{u}$ ) bilden zusätzlich zur Kontinuitätsgleichung (8.175) weitere Feldgleichungen zur Beschreibung von idealen Fluiden. Da wir mit  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  und  $P$  aber fünf Felder haben, benötigen wir auch noch eine fünfte Feldgleichung, um Fluide vollständig charakterisieren zu können. Wir kommen in Kürze darauf zurück.

**Achtung** Eigentlich müssen auch noch die Energieerhaltung und der Wärmetransport in den Fluiden berücksichtigt werden. Dies führt mit der Energiedichte auf ein weiteres Feld und mit der Energiegleichung auf eine weitere partielle Differentialgleichung. Die Diskussion der Energieerhaltung in Fluiden ist aber erst dann sinnvoll, wenn die Grundlagen der Thermodynamik bereits behandelt und die Begriffe „Temperatur“ und „Entropie“ definiert wurden. Dies wird erst in Bd. 4 geschehen. Es lässt sich allerdings bereits sehr viel über Fluidynamik sagen, ohne die Energieerhaltung zu berücksichtigen (tatsächlich sind für ideale Fluide die Impulsgleichung und die Energiegleichung bis auf einen Faktor identisch und damit redundant).  $\blacktriangleleft$

Tab. 8.1 fasst die beiden erhaltenen Größen Masse und Impuls mit ihren Dichten, Strömen und Erhaltungssätzen zusammen.

**Tab. 8.1** Vergleich von erhaltenen Größen in der Flüssodynamik sowie ihren Dichten, Strömen und Erhaltungssätzen. Der Gesamtimpuls ist nur erhalten, wenn keine äußere Kräfte wirken

Größe	Dichte	Strom	Erhaltungssatz
Masse	$\rho$	$\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$	Kontinuitätsgleichung (8.175)
Impuls	$\rho\mathbf{u}$	$\mathbf{M} = \rho\mathbf{u} \circ \mathbf{u}$	Euler-Gleichung (8.184)

## Zustandsgleichung

Es fehlt an dieser Stelle noch eine Gleichung für die Dichte  $\rho$ . Gase ändern beispielsweise ihre Dichte mit dem Druck, dem sie ausgesetzt sind. Ein *ideales Gas*, das in einem Volumen  $V$  eingesperrt ist, erfüllt bei konstanter Temperatur

$$PV = \text{const.} \quad (8.185)$$

Es ist also  $\rho \propto P$ , da  $\rho \propto 1/V$  gilt. Ideale Gase werden im Rahmen der statischen Physik in Bd. 4 gründlich behandelt (Bd. 4, Abschn. 3.3). Gase sind *kompressible* Fluide, deren Dichte vom Druck abhängt. Im Allgemeinen muss man also eine *Zustandsgleichung*  $\rho(P)$  angeben, welche die letzte verbleibende Gleichung ist, die wir zur Beschreibung von idealen Fluiden benötigen.

Wasser ist ein Beispiel für eine praktisch *inkompressible* Flüssigkeit, d. h., die Dichte von Wasser ist in sehr guter Näherung und für alle praktischen Anwendungen stets konstant, auch wenn sich der Druck stark ändert:  $\rho = \text{const.}$  Die Dichte ist also zeit- und ortsunabhängig und kann vor alle Ableitungen gezogen werden.

Wir sehen, dass es verschiedene Fluide gibt, die sich stark in ihrer Zustandsgleichung unterscheiden. Die funktionale Form  $\rho(P)$  wird durch die mikroskopische Natur der Fluide festgelegt; dies zu untersuchen, ist Aufgabe der statistischen Physik, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen.

Für inkompressible Fluide vereinfachen sich die bisher gefundenen Feldgleichungen.

### Dynamik idealer, inkompressibler Fluide

Die Feldgleichungen idealer, inkompressibler Fluide lauten

$$\begin{aligned} 0 &= \text{div } \mathbf{u}, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\rho \text{div}(\mathbf{u} \circ \mathbf{u}) - \text{grad } P + \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (8.186)$$

wobei  $\rho = \text{const}$  die Zustandsgleichung ist.

### Frage 31

Leiten Sie (8.186) aus (8.175) und (8.184) ab. Zeigen Sie weiterhin die Äquivalenz

$$\text{div}(\mathbf{u} \circ \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (8.187)$$

die für inkompressible Flüssigkeiten gilt. Dazu betrachtet man am besten die Gleichung in Komponentenschreibweise und zeigt dann

$$\partial_j(u_i u_j) = u_j \partial_j u_i. \quad (8.188)$$

Man nennt die erste Gleichung in (8.186) auch die *Divergenzfreiheit* des Geschwindigkeitsfeldes, die sich als inkompressibler Spezialfall aus der Kontinuitätsgleichung ergibt. Sie ist wesentlich einfacher als die Kontinuitätsgleichung, da sie keine Zeitableitung mehr enthält.

### Wassersäule im Gravitationsfeld

Wir betrachten ein sehr einfaches Beispiel: eine ruhende Wassersäule (Dichte  $\rho_w$ ) im Gravitationsfeld. Dann ist  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{f} = \rho_w \mathbf{g}$ . Bei  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  spricht man auch von der *Hydrostatik*. Die Kontinuitätsgleichung ist trivial erfüllt, und die Euler-Gleichung wird zu

$$\text{grad } P = \rho_w \mathbf{g}, \quad (8.189)$$

d. h., der Druck nimmt nach unten (also in Richtung von  $\mathbf{g}$ ) zu, um die Gravitationskraft auszugleichen. Wählen wir das Koordinatensystem so, dass  $\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{e}}_z$  gilt, dann ist die Lösung für den Druck einfach

$$P = P_0 - \rho_w g z, \quad (8.190)$$

da Wasser inkompressibel und  $\rho_w$  somit konstant ist. Die Integrationskonstante  $P_0$  beschreibt den Druck bei  $z = 0$ . Auf der Erdoberfläche ist  $\rho_w g \approx 10^4 \text{ N m}^{-3}$ , weswegen der Druck pro Meter zusätzlicher Wassertiefe um etwa  $10^4 \text{ Pa}$  zunimmt. ▶

In Aufgabe 8.9 wird eine weitere Lösung der Euler-Gleichung berechnet. Außerdem erlaubt die Euler-Gleichung Schallwellen, die im Kasten „Vertiefung: Schallwellen und Schallgeschwindigkeit“ in Bd. 4, Abschn. 3.3 diskutiert werden.

### Vollständige Zeitableitung und ihre Bedeutung

Häufig schreibt man die inkompressible Euler-Gleichung in der Gestalt

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\text{grad } P + \mathbf{f}. \quad (8.191)$$

Dies kann wegen  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$  mithilfe der Kettenregel

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (8.192)$$

auch kompakter als

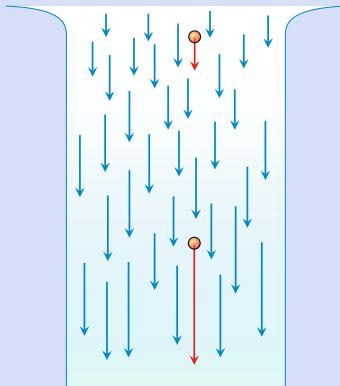
$$\rho \frac{du}{dt} = -\mathbf{grad} P + f \quad (8.193)$$

formuliert werden.

Man nennt die vollständige Ableitung  $du/dt$  auch die *konvektive* oder *substanzielle* Ableitung der Geschwindigkeit. Ihr erster Beitrag,  $\partial u / \partial t$ , erfasst nur die zeitliche Änderung an einem festen Punkt im Raum. Aber  $(u \cdot \nabla)u$  beschreibt die Änderung, die sich aufgrund der Bewegung zusammen mit der Flüssigkeit ergibt, da die Geschwindigkeit in der Regel an verschiedenen Orten verschiedene Werte hat.

### Wasserfall

Wir betrachten dazu als Beispiel einen Wasserfall, von dem wir zur Vereinfachung annehmen, dass sein Strömungsfeld *stationär*, also nur eine Funktion des Ortes, ist:  $u(r)$ . Dies bedeutet, dass das Wasser an einem festen Punkt stets mit derselben Geschwindigkeit strömt. Dies impliziert sofort  $\partial u / \partial t = 0$ . Lässt man jedoch ein kleines Boot auf dem Wasser treiben (Abb. 8.22), so wird dieses beim Sturz im Wasserfall seine Geschwindigkeit vergrößern; es wird also zusammen mit dem Wasser beschleunigt. Diese Geschwindigkeitsänderung wird gerade durch  $(u \cdot \nabla)u$  beschrieben.



**Abb. 8.22** In einem Wasserfall kann man in erster Näherung annehmen, dass das Strömungsfeld stationär ist. Dennoch wird das Wasser bzw. eine mitbewegte Masse wie ein kleines Boot während des Falls beschleunigt. Die Pfeile geben Richtung und Betrag der Geschwindigkeit an

### Frage 32

Können Sie sich eine allgemeine Situation vorstellen, für die  $\partial u / \partial t \neq 0$  und gleichzeitig  $(u \cdot \nabla)u = 0$  gilt?

In ihrer Form (8.193) erkennt man am besten, dass die Euler-Gleichung eine Verallgemeinerung des zweiten Newton'schen

Axioms  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$  ist. Dabei wird der Impuls  $\mathbf{p}$  durch seine Dichte  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$  und die Kraft  $\mathbf{F}$  durch ihre Dichte  $f$  ersetzt. Der Druckgradient kann als zusätzlicher Kraftbeitrag angesehen werden, der mit den Methoden der Thermodynamik begründet werden kann. Man hätte die inkompressible Euler-Gleichung auch direkt ausgehend vom zweiten Newton'schen Axiom aufstellen können; wir sind jedoch einen anderen Weg gegangen, um an die Spannungen der Kontinua anzuschließen.

### Cauchy-Gleichung

Die allgemeinste Impulsgleichung, die man für ein nichtrelativistisches Kontinuum angeben kann, ist die *Cauchy-Gleichung*. Sie lautet

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{div} \sigma + f. \quad (8.194)$$

Hier wird nicht näher spezifiziert, welche Form der Spannungstensor  $\sigma$  hat; es wird lediglich verlangt, dass die Impulsdichte sich durch äußere Kräfte oder Inhomogenitäten der Spannungen ändert – unabhängig davon, welche funktionale Form der Spannungstensor besitzt. Für elastische Stoffe beinhaltet er einen elastischen Term (z. B.  $C_{ijkl}\epsilon_{kl}$ ). Ideale Fluide erfüllen dagegen  $\sigma = -PI$ . Für viskose Flüssigkeiten, die nun besprochen werden, ergibt sich noch ein Zusatzterm.

## 8.7 Viskosität und Navier-Stokes-Gleichung

In realen Fluiden finden innere Reibungsprozesse statt. Dieser Effekt bildet – neben dem advektiven Transport – einen zusätzlichen Mechanismus für den Impulstransport. Die Euler-Gleichung muss daher um einen entsprechenden Term erweitert werden, der die sogenannte Viskosität (d. h. die Zähigkeit eines Fluids) beinhaltet. Die sich daraus ergebenden Navier-Stokes-Gleichungen sind von entscheidender Bedeutung in vielen Bereichen der Physik sowie des Ingenieurswesens.

Dieser Abschnitt kann nur eine grundlegende Einführung in die Physik nichtidealener Fluide liefern. Es wird die funktionale Form des Viskositästerms des Spannungstensors bzw. der Navier-Stokes-Gleichung abgeleitet und mit dem sogenannten Poiseuille-Fluss eine analytische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen bestimmt.

### Viskosität

Ideale Fluide, wie sie in Abschn. 8.6 eingeführt wurden, gibt es in Wirklichkeit nicht. Tatsächlich finden in allen Fluiden Reibungsprozesse statt, die dazu führen, dass kinetische Energie in

Wärme umgewandelt wird. In diesem Abschnitt soll eine Erweiterung der Euler-Gleichung (8.184) diskutiert werden, welche die sogenannte Viskosität eines Fluids berücksichtigt.

Viskosität ist jedem aus dem Alltag geläufig: Man kann in Wasser nicht so schnell laufen wie in der Luft, und Honig tropft nur sehr langsam von einem Löffel auf das Brötchen. Beide Effekte röhren daher, dass Fluide eine innere Reibung erfahren, wenn sie fließen. Für Honig ist sie sehr viel größer als für Wasser oder gar für Luft.

Aufgrund eines zusätzlichen Impulstransportmechanismus (der durch die endliche freie Weglänge der Moleküle verursacht wird) kommt es zu Viskosität. Dies bedeutet, dass man die viskosen Effekte durch einen additiven Zusatzterm in der Euler-Gleichung (8.184) bzw. einen Beitrag zum Spannungstensor der Flüssigkeit berücksichtigen muss.

## Ableitung des viskosen Reibungsterms

Um die viskose Reibung in die Euler-Gleichung einzubauen, müssen wir uns überlegen, welche Eigenschaften sie erfüllt. Es gibt zwar rigorose Methoden, um den Reibungsterm aus den mikroskopischen Eigenschaften der Fluide abzuleiten, doch ist dies an dieser Stelle zu aufwendig – solche Ableitungen werden in Büchern über die kinetische Theorie der Gase durchgeführt, was wiederum ein gutes Verständnis der statistischen Physik voraussetzt (Hänel 2004). Tatsächlich lässt sich aber der viskose Zusatzterm relativ leicht durch physikalische Überlegungen konstruieren, was für unsere Zwecke völlig ausreicht und in vielen Büchern über Fluiddynamik ähnlich gehandhabt wird (Landau & Lifshitz 1991).

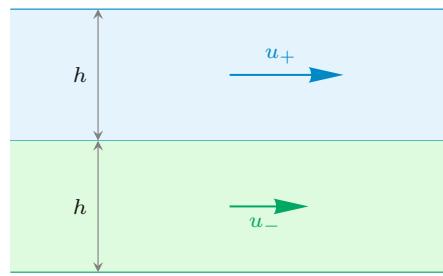
Aus Kap. 1 wissen wir, dass Reibungskräfte mit Relativgeschwindigkeiten zusammenhängen: Bewegt sich beispielsweise eine Masse in einem Wasserbehälter, so ist die Stokes'sche Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit der Masse relativ zum umgebenden Wasser. Wir wollen also auch hier verlangen, dass die viskose Reibung ebenfalls proportional zu einer Geschwindigkeitsdifferenz ist. Doch was bedeutet Geschwindigkeitsdifferenz in einer Flüssigkeit?

Wir stellen uns zunächst zwei Flüssigkeitsschichten vor, die sich parallel zueinander bewegen (Abb. 8.23). Die obere habe die Geschwindigkeit  $u_+$ , die untere  $u_- \neq u_+$ . Beide Schichten haben die Dicke  $h$ , sodass man sagen kann, dass die Geschwindigkeitsdifferenz  $\delta u := u_+ - u_-$  über einen Abstand  $h$  auftritt. Wir nehmen nun an, dass eine in  $\delta u$  lineare Reibungskraft

$$F_+ = -\eta \frac{A \delta u}{h} = -F \quad (8.195)$$

auf die obere Flüssigkeitsschicht und eine betragsmäßig gleiche Reibungskraft

$$F_- = +\eta \frac{A \delta u}{h} = +F \quad (8.196)$$



**Abb. 8.23** Bewegen sich zwei Flüssigkeitsschichten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten parallel zueinander, so führt dies in einer viskosen Flüssigkeit zu Reibungskräften zwischen diesen Schichten

auf die untere Flüssigkeitsschicht wirkt. Dabei ist die Richtung von  $F_\pm$  (anti)parallel zu  $u_\mp$ .

Weiterhin soll  $A$  die Kontaktfläche der beiden Schichten und  $\eta$  eine Konstante sein, um die wir uns später kümmern werden. Es ist anschaulich klar, dass die Gesamtkraft proportional zur Fläche  $A$  sein muss, da eine doppelte Fläche (und damit eine doppelte Flüssigkeitsmenge) zu einer doppelten Reibungskraft führt.

Dass die Dicke  $h$  im Nenner auftreten muss, kann man sich so vorstellen: Teilt man die beiden Schichten in insgesamt vier Schichten der Dicke  $h/2$  mit relativen Geschwindigkeitsdifferenzen  $\delta u/2$  auf, so soll das gleiche Ergebnis herauskommen; daher sollte  $F \propto \delta u/h$  gelten. Wir nehmen zur Vereinfachung weiterhin an, dass wir es mit einer inkompressiblen Flüssigkeit zu tun haben und die Dichte  $\rho$  überall konstant ist.

### Frage 33

Machen Sie sich klar, dass der Ansatz (8.195) für die Reibungskraft den Gesamtimpuls der Flüssigkeit erhält. Zeigen Sie außerdem, dass die Reibungskraft dafür sorgt, dass sich die Geschwindigkeiten der beiden Schichten einander angleichen.

Durch die Reibungskraft wirkt auf ein Flächenelement  $dA$  zwischen den Schichten die Spannung

$$\sigma_\eta = \frac{dF}{dA} = \eta \frac{\delta u}{h}. \quad (8.197)$$

Wir führen nun den Grenzfall  $h \rightarrow 0$  durch und verlangen, dass das Geschwindigkeitsfeld stetig ist. Aus der Differenz  $\delta u$  wird dann  $du$ , und die viskose Spannung ist

$$\sigma_\eta = \frac{dF}{dA} = \eta \frac{du}{dh}. \quad (8.198)$$

**Achtung** Die viskose Spannung sieht zwar ähnlich aus wie der Druck, der ebenfalls als Kraft pro Fläche definiert ist. Allerdings wirkt eine Druckkraft stets senkrecht auf eine Fläche, während die Reibungskraft hier parallel zur Fläche wirkt. Man nennt diese Spannung daher auch häufig eine *Scherspannung*.

Solch eine Spannung haben wir bereits in Abb. 8.14 gesehen: Die dort dargestellte Verzerrung wird durch eine Kraft in  $x$ -Richtung erreicht, die parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene wirkt.

### Normal- und Scherspannungen

Pressst man seine Hand senkrecht auf eine Tischplatte, so ist dies – wie der Druck – ein Beispiel für eine Normalspannung. Fährt man nun aber mit der Hand parallel zur Oberfläche über die Platte, so spürt man eine Reibungskraft. Dies ist ein Beispiel für eine Scherspannung, bei der die Kraft parallel anstatt senkrecht zur Angriffsfläche wirkt.

Die Proportionalitätskonstante  $\eta$  in (8.198) nennen wir nun *Viskosität*. Sie ist eine Materialeigenschaft und legt fest, wie stark die innere Reibung ist.

Der Gesamtimpuls bleibt unter dem Einfluss der Reibungskraft (8.195) erhalten. Demnach wird aufgrund der Viskosität lediglich Impuls von Bereichen mit viel Impuls an Regionen mit weniger Impuls verteilt. Dieser Impulstransportmechanismus findet vollständig ohne Massentransport statt, d.h., die beiden oben betrachteten Flüssigkeitsschichten tauschen keine Masse aus. Man spricht auch von einer *Impulsdiffusion*, doch dies soll nur am Rande erwähnt werden.

### Interpretation der Viskosität

Die Viskosität ist in erster Linie nichts weiter als eine materialspezifische Proportionalitätsgröße, mit der man von einem Geschwindigkeitsgradienten  $du/dh$  zu der damit verbundenen Scherspannung  $\sigma_\eta$  gelangt. Man nennt  $\eta$  auch häufig etwas präziser *dynamische Viskosität* und zerlegt sie über

$$\eta = \rho v \quad (8.199)$$

in zwei Faktoren, um die Dichteabhängigkeit abzuspalten (normalerweise ist  $\eta$  proportional zu  $\rho$ ). Hier ist  $v$  die *kinematische Viskosität*. Die Einheit von  $\eta$  ist Pa s. Entsprechend ist die Einheit von  $v$  durch  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$  gegeben.

Die Viskositäten der meisten Fluide lassen sich in Tabellen in der Literatur finden. Sie hängen von der Temperatur ab, was ein Hinweis auf ihren thermodynamischen Ursprung ist. Bei Raumtemperatur ist die Viskosität von Wasser (in SI-Einheiten) etwa 0,001 Pa s, Blut ist etwa viermal und Honig 4000-mal viskoser. Dagegen ist die Viskosität von Luft etwa 50-mal geringer als die von Wasser.

Man kann die Viskosität experimentell messen, indem man beispielsweise eine Flüssigkeit einer bekannten Scherspannung aussetzt und den dabei auftretenden Geschwindigkeitsgradienten misst.

### Navier-Stokes-Gleichung

Nun wollen wir noch zum dreidimensionalen Fall übergehen und die entsprechenden Feldgleichungen formulieren. In (8.198) ist  $u$  durch  $\mathbf{u}$  zu ersetzen und die Ableitung nach  $h$  durch den Gradienten  $\nabla$ . Wir wissen, dass der Spannungstensor ein Tensor zweiter Stufe ist. Dies führt auf den viskosen Spannungstensor für ein beliebiges Geschwindigkeitsfeld, den man zusätzlich noch symmetrisiert: Der antisymmetrische Anteil  $\eta(\partial_i u_j - \partial_j u_i)$  spielt keine Rolle, da er wie in (8.112) nur eine reibungsfreie Drehung beschreibt; er tritt in den Feldgleichungen nicht auf.

#### Viskoser Spannungstensor

Für ein beliebiges Strömungsfeld  $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$  lautet der Beitrag der viskosen Reibung zum Spannungstensor

$$\sigma_\eta = \eta (\mathbf{grad} \mathbf{u} + (\mathbf{grad} \mathbf{u})^\top) \quad (8.200)$$

bzw.

$$\sigma_{\eta,ij} = \eta (\partial_i u_j + \partial_j u_i). \quad (8.201)$$

Da, wie bereits gesehen, nur die Divergenz des Spannungstensors in die Euler-Gleichung eingeht, muss man  $\mathbf{div} \sigma_\eta$  bzw.  $\partial_j \sigma_{\eta,ij}$  zur rechten Seite von (8.184) addieren.

#### Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Flüssigkeit

Für eine inkompressive Flüssigkeit ( $\rho = \text{const}$ ) lautet die Impulsgleichung statt (8.193)

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\mathbf{grad} P + \eta \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (8.202)$$

Sie wird auch *inkompressive Navier-Stokes-Gleichung* genannt (nach dem französischen Mathematiker und Physiker *Claude Louis Marie Henri Navier*, 1785–1836, und dem irischen Mathematiker und Physiker *Sir George Gabriel Stokes*, 1819–1903).

#### Frage 34

Zeigen Sie mithilfe der Inkompressibilität der Flüssigkeit, dass

$$\mathbf{div} \sigma_\eta = \eta \Delta \mathbf{u} \quad (8.203)$$

gilt (wenn man annimmt, dass  $\eta$  nicht vom Ort abhängt, was für homogene Fluide der Fall ist). Gehen Sie dafür von der Komponentenschreibweise aus und verwenden Sie die Definition des Laplace-Operators

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = \partial_i \partial_i \mathbf{u}, \quad (8.204)$$

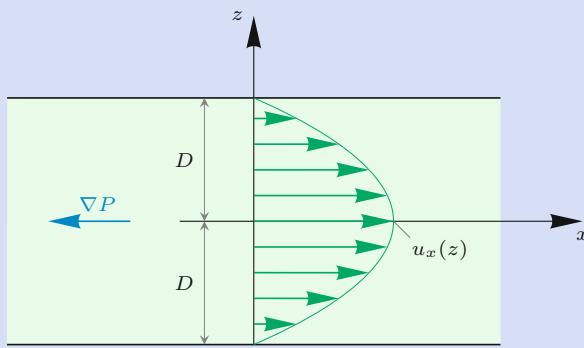
der bereits im „Mathematischen Hintergrund“ 1.7 eingeführt wurde.

Die Navier-Stokes-Gleichung ist wesentlich realistischer für alltägliche Probleme als die Euler-Gleichung, da alle Flüssigkeiten viskos sind.

Zur Veranschaulichung berechnen wir eine der einfachsten Lösungen, welche die Navier-Stokes-Gleichung erlaubt.

### Poiseuille-Fluss

Wir betrachten zwei unendlich ausgedehnte Platten parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene mit Abstand  $2D$  (Abb. 8.24). Wir denken uns den Zwischenraum mit einer viskosen Flüssigkeit (Viskosität  $\eta$ , Dichte  $\rho$ ) gefüllt. Durch einen konstanten Druckgradienten entlang der (negativen)  $x$ -Achse wird eine Strömung erzeugt. Gravitation wird vernachlässigt. Diese Konfiguration nennt man *ebenen Poiseuille-Fluss* (nach dem französischen Physiker Jean Louis Léonard Marie Poiseuille, 1797–1869). Er lässt sich analytisch lösen, wie nun gezeigt wird.



**Abb. 8.24** Der ebene Poiseuille-Fluss ist die Strömung, die sich durch einen konstanten Druckgradienten zwischen zwei parallelen Platten ergibt

Um die Navier-Stokes-Gleichungen lösen zu können, brauchen wir im Allgemeinen Rand- und Anfangsbedingungen. Die Randbedingungen sind derart, dass die Flüssigkeit an den Platten ruht, also  $\mathbf{u}(z = \pm D) = \mathbf{0}$ . Diese Randbedingung (auch *Haftbedingung* genannt) gilt an fast allen Kontaktflächen und ist experimentell sehr gut bestätigt.

Für den Poiseuille-Fluss sind die Anfangsbedingungen nicht wichtig, da sich nach einer gewissen Zeit (für nicht zu schnelle Strömungen; siehe Abschnitt „So geht's weiter“ am Ende dieses Kapitels) ein stationärer Zustand einstellt, der durch  $\partial\mathbf{u}/\partial t = 0$  ausgezeichnet ist. Wir fragen hier nur nach diesem stationären Zustand.

Es verbleibt die stationäre Navier-Stokes-Gleichung zu lösen:

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\mathbf{grad} P + \eta \Delta \mathbf{u}, \quad (8.205)$$

wobei der Druck  $P = P_0 - P'x$  vorgegeben ist. Der konstante Druckgradient lautet damit

$$\mathbf{grad} P = - \begin{pmatrix} P' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{const.} \quad (8.206)$$

Aufgrund der Symmetrie kann die Strömung dann nur entlang der  $x$ -Achse fließen:  $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)^\top$ . Außerdem wird die Geschwindigkeit  $u_x$  von  $z$ , wegen der Symmetrie aber nicht von  $x$  oder  $y$  abhängen. Daraus folgt, dass der Term  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  verschwindet.

Rechnen Sie dies ausgehend von  $u_x = u_x(z)$  explizit nach.

Damit lautet die relevante Komponente der Impulsgleichung

$$\eta \frac{d^2 u_x}{dz^2} = -P'. \quad (8.207)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist nach zweimaliger Integration schnell gefunden:

$$u_x = -\frac{P'}{2\eta} z^2 + C_1 z + C_2. \quad (8.208)$$

Man muss nun die Randbedingungen ausnutzen, um die beiden Integrationskonstanten festzulegen. Aus  $u_x(z = \pm D) = 0$  folgt nach kurzer Rechnung

$$u_x(z) = \frac{P'}{2\eta} (D^2 - z^2) \quad (-D \leq z \leq +D). \quad (8.209)$$

Die Flüssigkeit fließt daher in positive  $x$ -Richtung und somit entgegen dem Druckgradienten, also von einem Gebiet mit höherem zu einem Gebiet mit niedrigerem Druck. Das Geschwindigkeitsprofil  $u_x(z)$  ist parabolisch und ebenfalls in Abb. 8.24 gezeigt.

Führen Sie die Integration und die Rechnung zur Bestimmung der Integrationskonstanten explizit durch. Zeigen Sie außerdem, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.

Der Poiseuille-Fluss in einem Rohr mit rundem Querschnitt wird in Aufgabe 8.10 berechnet. ▶

## So geht's weiter

### Fluidodynamik in Physik und Technik

Die Navier-Stokes-Gleichungen spielen fast überall dort eine wichtige Rolle, wo die Beschreibung von Fluiden berücksichtigt werden muss. Dazu gehören Wettervorhersage, Blutfluss, chemische Industrie, Luft- und Raumfahrt oder Sternentwicklung – um nur einige wenige Beispiele zu nennen.

Aufgrund ihrer Nichtlinearität (die Geschwindigkeit kommt quadratisch vor) und da es sich bei ihnen um partielle Differentialgleichungen handelt, sind die Navier-Stokes-Gleichungen generell nur sehr schwer zu lösen. Hinzu kommen die benötigten Rand- und Anfangsbedingungen, die bei realistischen Problemen beliebig kompliziert werden können. Je komplexer die betrachtete Geometrie ist, desto aufwendiger wird die Lösung des Problems. Beispiele sind Ozeanströmungen entlang einer Küste oder die Strömung in veränderlichen Geometrien (z. B. Suspensionen, d. h. Flüssigkeiten mit suspendierten Teilchen, deren Oberflächen sowohl komplexe Randbedingungen für die Flüssigkeit darstellen, die aber auch durch die umgebende Flüssigkeit mitbewegt werden). In vielen Fluiden kommt es zudem zu chemischen Reaktionen (*reaktiven Strömungen*), die sowohl durch die Strömung beeinflusst werden als auch auf diese zurückwirken.

Häufig kommen noch weitere Komplikationen hinzu: Beispielsweise gibt es kompressible Fluide (die weitere Terme in der Navier-Stokes-Gleichung erfordern) oder Fluide mit veränderlicher bzw. inhomogener Viskosität.

In diesem Ausblick soll nur auf drei Punkte eingegangen werden: Turbulenz, Oberflächenspannung und numerische Lösungsansätze. Das Gebiet der Fluidodynamik ist jedoch viel umfangreicher und hat in der aktuellen Forschung nichts von seiner ursprünglichen Faszination verloren.

### Turbulenz

Die Navier-Stokes-Gleichungen gestatten turbulente Lösungen. *Turbulenz* bedeutet, dass im Strömungsfeld scheinbar willkürliche und stark zeitabhängige Strukturen auftreten, die sich analytisch nur sehr schwer beschreiben lassen. Prominente Alltagsbeispiele sind das Mischen von Kaffee und Milch oder Luftwirbel, die durch Wind erzeugt werden. Um zu verstehen, wann Turbulenz auftritt, schreiben wir (8.202) in dimensionsloser Form:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{f}}. \quad (8.210)$$

Dies lässt sich durch die folgenden Ersetzungen erreichen (sämtliche mit einer Tilde versehenen Größen sind

dimensionslos):

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u_c}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\ell_c}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\ell_c/u_c}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{\rho u_c^2}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}}{u_c^2/\ell_c}, \quad (8.211)$$

wobei  $u_c$  und  $\ell_c$  eine typische Geschwindigkeit und Länge des betrachteten Systems sind und sich die Differenzialoperatoren entsprechend wie  $\tilde{\nabla} = \ell_c \nabla$  und  $\tilde{\Delta} = \ell_c^2 \Delta$  verhalten. Außerdem wurde die dimensionslose *Reynolds-Zahl* (benannt nach dem britischen Physiker Osborne Reynolds, 1842–1912, der diese bereits durch Stokes eingeführte Zahl populär machte)

$$\text{Re} := \frac{\rho u_c \ell_c}{\eta} \quad (8.212)$$

definiert.

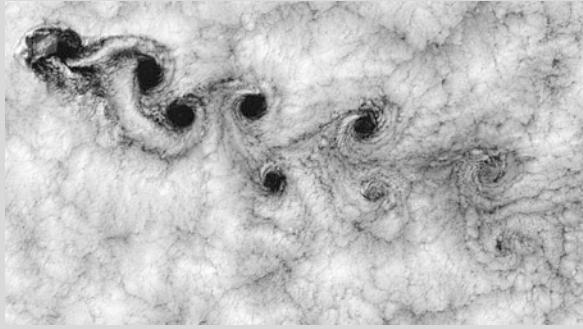
Für das bereits angesprochene Beispiel wählt man typischerweise den Durchmesser der Kaffeetasse für  $\ell_c$  und die Geschwindigkeit des Löffels für  $u_c$ . Man kann sich sehr leicht vorstellen, dass verschiedene physikalische Systeme auf völlig unterschiedliche Reynolds-Zahlen führen. Die folgende Tabelle gibt einen kurzen Überblick:

System	$\ell_c$	$u_c$	Re
schwimmende Bakterien	1 $\mu\text{m}$	10 $\mu\text{m}/\text{s}$	$10^{-5}$
Blutfluss in Kapillargefäßen	10 $\mu\text{m}$	1 $\text{mm}/\text{s}$	$10^{-2}$
Blutfluss in Aorta	1 cm	10 $\text{cm}/\text{s}$	$10^3$
schwimmender Mensch	1 m	1 $\text{m}/\text{s}$	$10^6$
Passagierflugzeug	10 m	200 $\text{m}/\text{s}$	$10^8$

Eine physikalisch wichtige Folgerung der dimensionslosen Gleichung (8.210) ist das *Ähnlichkeitsgesetz* der Navier-Stokes-Gleichung. Es besagt, dass sich alle Strömungen mit gleicher Geometrie (d. h. gleichen Anfangs- und Randbedingungen) und gleicher Reynolds-Zahl ähnlich verhalten, egal welche physikalischen Werte  $\rho$ ,  $u_c$ ,  $\ell_c$  und  $\eta$  im Detail annehmen. Beispielsweise lässt sich die in Abb. 8.25 gezeigte Wirbelstraße (die dort auf der Skala von vielen Kilometern existiert) auch im Labor auf der Zentimeterskala erzeugen. Dies ist für das Testen der Aerodynamik von Fahr- und Flugzeugen wichtig, die im Windkanal anhand von Miniaturmodellen untersucht werden kann.

Turbulenz tritt auf, wenn die Reynolds-Zahl hinreichend groß (und damit die viskose Reibung relativ unwichtig) ist. Da die kinetische Energie der Strömung so nur langsam in Wärme umgewandelt wird, verbleibt sie lange in der Strömung; es bilden sich dann häufig Wirbel wie in Abb. 8.25 gezeigt.

Der Grenzbereich zwischen *laminarer* (d. h. nichtturbulenter) und turbulenter Strömung liegt im Bereich um  $\text{Re} \approx 10^3$ , ist aber stark problemspezifisch.



**Abb. 8.25** Eine Kármán'sche Wirbelstraße (nach dem ungarisch-amerikanischen Physiker Theodore von Kármán, 1881–1963) in der Nähe der Insel Robinsón Crusoe (Chile), aufgenommen von Landsat 7 am 15. September 1999. Die Wirbelstraße wird durch einen Berg verursacht, der die Luftströmung stört. Die Wirbelstraße selbst ist noch nicht turbulent, da das Wirbelmuster regelmäßig ist. Wirbelstraßen können schon ab  $Re \approx 50$  entstehen, wohingegen „echte“ Turbulenz erst ab  $Re \approx 1000$  auftritt

Turbulente Strömungen haben die Eigenschaft, dass größere Wirbel nach und nach in kleinere zerfallen. Dieser Prozess findet so lange statt, bis die kleinsten Wirbel aufgrund von viskoser Dissipation verschwinden, d. h., ihre kinetische Energie wird letztlich in Wärme umgewandelt. Dass dies nur in den kleineren Wirbeln geschieht, erkennt man an der Definition der Reynolds-Zahl: Die *lokale* Reynolds-Zahl (definiert durch die Wirbelgröße und -geschwindigkeit) ist bei kleineren Wirbeln wesentlich kleiner, sodass dort die viskose Reibung wichtig wird. Die Längenskala, unterhalb der Wirbel durch Dissipation zerfallen, nennt man *Mikroskala von Kolmogorow* (der russische Mathematiker Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow, 1903–1987, leistete wegweisende Beiträge zur Theorie der Turbulenz).

Da Turbulenz vor allem bei der Wettervorhersage und in industriellen Produktionsprozessen eine große Rolle spielt, ist ihr Verständnis von großer Wichtigkeit. Ausgesprochen schwierig wird die Beschreibung turbulenter Systeme aufgrund der großen Spanne der relevanten Längenskalen. Die größte Skala ist selbstverständlich die Systemgröße selbst. Die kleinste relevante Skala ist gerade die Kolmogorow-Länge. In vielen Systemen trennen diese beiden Skalen viele Größenordnungen.

## Oberflächenspannung

Die Navier-Stokes-Gleichungen (8.202) beschreiben zunächst nur eine einzelne Fluidphase (verschiedene Fluidphasen sind beispielsweise Wasser und Luft oder Wasser und

Öl). Hat man es mit mehreren Phasen zu tun, so müssen zusätzliche Gleichungen bzw. Terme berücksichtigt werden, die das Verhalten der Grenzflächen zwischen diesen Phasen beschreiben.

Ist Wasser (oder ein anderes Fluid) in Kontakt mit einem zweiten Fluid, so spielt die molekulare Wechselwirkung zwischen diesen Phasen eine wichtige Rolle. Beispielsweise wechselwirken zwei Wassermoleküle ganz anders miteinander als zwei Stickstoffmoleküle der Luft oder ein Wasser- und ein Stickstoffmolekül. Je nach Art dieser Wechselwirkungen kann sich eine sogenannte *Oberflächenspannung* zwischen den beiden Phasen ergeben.

Wassermoleküle ziehen sich aufgrund ihrer Dipolwechselwirkung gegenseitig stark an. Es ist daher energetisch günstiger, wenn ein gegebenes Wasservolumen (z. B. ein Tropfen in Luft) eine minimale Oberfläche hat, sodass eine möglichst geringe Anzahl von Wassermolekülen weniger Nachbarn vorfindet als diejenigen Moleküle, die sich im Inneren des Volumens befinden. Dies ist der Grund, warum kleinere Wassertropfen mit einem Durchmesser von bis zu wenigen Millimetern kugelförmig sind. Größere Tropfen unterliegen dem Einfluss der Schwerkraft und werden daher verformt. Dies kann man beispielsweise bei einem tropfenden Wasserhahn beobachten.

Mechanisch kann man die Oberflächenspannung folgendermaßen verstehen: Stoßen sich zwei Fluide aufgrund ihrer molekularen Eigenschaften ab (z. B. Öl und Wasser), so ist es energetisch ungünstig, die Grenzfläche zwischen diesen beiden Phasen zu vergrößern. Es kostet also eine Energie  $\Delta E$ , um die Grenzfläche um eine Fläche  $\Delta A$  zu erhöhen. Die Oberflächenspannung ist gerade das Verhältnis

$$\gamma = \frac{\Delta E}{\Delta A} \quad (8.213)$$

und damit eine Art Grenzflächenenergiedichte. Umgekehrt bedeutet dies, dass eine existierende Grenzfläche einer äußeren (nicht zu großen) Kraft entgegenwirken kann, indem sich die Grenzfläche verformt und eine zusätzliche Gegenspannung erzeugt. Dies erlaubt es einem Wasserläufer, auf einer Wasseroberfläche zu laufen, ohne diese zu durchdringen (Abb. 8.26).

Es ist wichtig zu betonen, dass die Oberflächenspannung keine Eigenschaft *eines* Fluids ist, sondern stets zwei nicht mischbare Fluide charakterisiert. Mischaubare Fluide (z. B. Alkohol und Wasser) bilden keine Grenzfläche, da ihre molekularen Wechselwirkungen ähnlich sind und keine makroskopische Abstoßung resultiert. Folglich gibt es keine Oberflächenspannung zwischen mischbaren Fluiden. Diese Effekte sind temperaturabhängig; so gibt es Fluide, die in bestimmten Temperaturintervallen mischbar und in anderen nicht mischbar sind.



**Abb. 8.26** Ein Wasserläufer kann aufgrund der Oberflächenspannung auf einer Wasseroberfläche (Grenzfläche zwischen Wasser und Luft) laufen, ohne dabei unterzugehen

Die Oberflächenspannung zwischen Luft und Wasser beträgt bei 20 °C etwa 0,073 J/m<sup>2</sup>. Damit lässt sich abschätzen, für welche Ausdehnungen Wassertropfen durch Oberflächenspannung (und nicht durch Gravitation) dominiert werden. Hierzu betrachtet man einen Wassertropfen mit Radius  $r$ , Oberfläche  $A$  und Volumen  $V$ . Die Kraft, mit der die Oberflächenspannung den Wassertropfen zusammenhält, ist von der Ordnung

$$F_\gamma = \frac{\gamma}{r} A = 4\pi\gamma r. \quad (8.214)$$

Dagegen wirkt insgesamt eine Gravitationskraft

$$F_g = \rho g V = \frac{4\pi}{3} \rho g r^3 \quad (8.215)$$

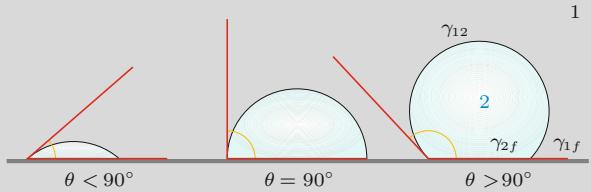
auf den Tropfen. Also haben wir

$$F_\gamma > F_g \implies \gamma > \frac{\rho g r^2}{3} \implies r_\gamma < \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \sim 3 \text{ mm}. \quad (8.216)$$

Im letzten Schritt wurde der numerische Faktor  $\sqrt{3} \sim 1$  ignoriert. Man nennt  $r_\gamma$  die *Kapillarlänge* von Wasser. Wir sehen, dass Oberflächenspannungen nur für kleine Ausdehnungen (kleiner als wenige Millimeter) wichtig sind und demnach nur Insekten, nicht aber Säugetiere, über Wasser laufen können.

Noch interessanter wird es, wenn zwei nicht mischbare Fluide mit einem Festkörper in Kontakt kommen (Abb. 8.27). Dort hat man es dann mit drei verschiedenen Oberflächenspannungen zu tun ( $\gamma_{1f}$  zwischen Fluid 1 und Festkörper,  $\gamma_{2f}$

zwischen Fluid 2 und Festkörper sowie  $\gamma_{12}$  zwischen Fluid 1 und Fluid 2). Je nach Verhältnis dieser drei Oberflächenspannungen ergibt sich ein anderer *Kontaktwinkel* der Fluid-Fluid-Grenzfläche an der Oberfläche des Festkörpers.



**Abb. 8.27** Der Kontaktwinkel  $\theta$  wird durch die Steigung der Tangente an die Fluid-Fluid-Oberfläche am gemeinsamen Kontaktpunkt aller drei Phasen definiert und ist eine Funktion der drei Oberflächenspannungen  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{1f}$  und  $\gamma_{2f}$

Der Kontaktwinkel ist über die *Young-Laplace-Gleichung* (nach dem englischen Physiker Thomas Young, 1773–1829, und Pierre-Simon Laplace) festgelegt:

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{1f} - \gamma_{2f}}{\gamma_{12}}. \quad (8.217)$$

Diese Gleichung lässt sich unmittelbar aus der Forderung eines mechanischen Kräftegleichgewichts ableiten.

Am häufigsten findet man die Situation, dass die beiden Fluide gerade Wasser und Luft sind. Dann spricht man bei  $\theta < 90^\circ$  von *hydrophilen* und bei  $\theta > 90^\circ$  von *hydrophoben* Oberflächen. Von besonderem Interesse sind *superhydrophobe* Materialien mit einem Kontaktwinkel  $> 150^\circ$  (*Lotuseffekt*; Abb. 8.28). An diesen perlt Wasser ab und transportiert mögliche Verschmutzungen fort; solche Materialien sind also potenziell selbstreinigend.



**Abb. 8.28** Der Kontaktwinkel von Wassertropfen auf einem Lotusblatt ist mit etwa 150° sehr groß. Das Wasser perlt daher ab und kann das Blatt nicht benetzen

## Numerische Lösungsansätze

In den meisten Fällen werden die Navier-Stokes-Gleichungen numerisch, also mithilfe von Computeralgorithmen, gelöst.

Es gibt eine Vielzahl klassischer CFD-Werkzeuge (Computational Fluid Dynamics), die mittlerweile extrem ausgereift sind. Dazu gehören die *Finite-Differenzen-* und *Finite-Volumen-Methoden*, aber auch *Finite-Elemente-* und *Spektralmethoden*. In den vergangenen 20 Jahren wurden allerdings eine ganze Reihe weitere Methoden entwickelt, die als Navier-Stokes-Löser verwendet werden können, obwohl sie nicht direkt auf einer Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen aufbauen. Beispiele sind die *Lattice-Boltzmann-* oder *Dissipative-Particle-Dynamics-Methode*.

Eine Gemeinsamkeit der meisten dieser Methoden ist die notwendige Diskretisierung des Raumes und der Zeit. Der einfachste (aber nicht immer der sinnvollste und effizienteste) Zugang ist es, den Raum durch ein orthogonales und regelmäßiges Gitter mit Gitterkonstante  $\Delta x$  zu beschreiben sowie die Zeit in äquidistante Zeitschritte der Länge  $\Delta t$  zu unterteilen. Die Gleichungen werden dann nur an diskreten Orten und zu diskreten Zeiten gelöst.

Dies soll kurz anhand der Finite-Differenzen-Methode illustriert werden. Um die Ableitung von  $u(x)$  an einem Gitterpunkt  $x_i$  mit Nachbarn  $x_{i\pm 1}$  im Abstand  $\Delta x$  zu bestimmen, berechnet man in erster Näherung

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2\Delta x}. \quad (8.218)$$

Entsprechend kann die zweite Ableitung folgendermaßen angenähert werden (siehe auch (8.18)):

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{(\Delta x)^2}. \quad (8.219)$$

Das Voranschreiten in der Zeit stellt eine andere Herausforderung dar. Die einfachste Zeitintegration stellt das *explizite Euler-Verfahren* dar. Für die Geschwindigkeit an einem gegebenen Punkt im Raum gilt dann (mit  $t_{j+1} = t_j + \Delta t$ )

$$u(t_{j+1}) = u(t_j) + \dot{u}(t_j)\Delta t, \quad (8.220)$$

wobei die zeitliche Änderung  $\dot{u}(t_j)$  bekannt sein muss. Dieses Verfahren ist relativ ungenau; es gibt aber eine große Palette verfeinerter Algorithmen wie die sogenannten Runge-Kutta-Verfahren.

## Literatur

- Davidson, P. A.: *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, 2004
- Ferziger, J. H., Peric, M., Leonard, A.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. Aufl., Springer Verlag, 2002
- Krüger, T. et al.: *The Lattice Boltzmann Method – Principles and Practice*. Springer, 2017
- Oertel, H. Jr. et al.: *Prandtl – Führer durch die Strömungslehre: Grundlagen und Phänomene*. 13. Aufl., Springer Verlag, 2012

## Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- leichte Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
- mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
- anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständen auch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

### 8.1 • Randbedingungen für das elastische Band

Am Beispiel der eingespannten Saite wurde in Abschn. 8.2 gezeigt, wie sich Dirichlet'sche Randbedingungen, also z. B.  $q(t, 0) = q(t, \ell) = 0$ , berücksichtigen lassen. In dieser Aufgabe sollen die Neumann'schen Randbedingungen betrachtet werden. Wir verlangen hier, dass das Band aus Abschn. 8.1 am Rand einer Kraft  $F$  ausgesetzt ist. Es ist aber im Vorfeld nicht klar, wie die Verformung  $q(t, x)$  bei  $x = 0$  und  $x = \ell$  aussieht.

(a) Zeigen Sie, dass (8.5) im Kontinuumsmechanik die Form

$$\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \Big|_{x=\ell} + \frac{Y}{a_0} \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = \frac{F}{a_0} \quad (8.221)$$

annimmt. Eine entsprechende Gleichung gilt auch an der Stelle  $x = 0$ .

(b) Leiten Sie einen Zusammenhang ab, der verhindert, dass (8.221) im Grenzfall  $a_0 \rightarrow 0$  divergiert. Zeigen Sie damit, dass die äußere Kraft am Rand eine Bedingung an die erste Ortsableitung von  $q$  stellt (und nicht an die Funktion  $q$  selbst). Damit handelt es sich um eine Neumann'sche Randbedingung.

**8.2 • Schwingende Membran** Wir betrachten eine zweidimensionale elastische Membran in der  $x$ - $y$ -Ebene, die bei  $x = 0$  und  $x = \ell_x$  sowie bei  $y = 0$  und  $y = \ell_y$  eingespannt ist. Gesucht ist die allgemeine Lösung  $q_z(t, x, y)$  für die Auslenkung der Membran entlang der  $z$ -Achse. Dies könnte beispielsweise das einfache Modell einer rechteckigen Trommel sein. Man kann die Bewegungsgleichung der schwingenden Saite (8.47) verallgemeinern und findet für die Membran ganz analog

$$\ddot{q}_z - v_\perp^2 \left( \frac{\partial^2 q_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_z}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (8.222)$$

Die Wellengeschwindigkeit erfüllt

$$v_\perp = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (8.223)$$

wobei  $\rho$  die Massendichte bezogen auf die Fläche ist und die Spannung  $\tau$  die zur Kraft  $F$  in (8.47) analoge Größe. Die Spannung hat die Bedeutung einer Kraft pro Länge, d. h., pro eingespannter Einheitslänge wirkt die Kraft  $\tau$  auf den Rand der Membran. Die Gesamtkraft, die bei  $x = 0$  bzw.  $x = \ell_x$

die Membran einspannt, ist also  $-\tau \ell_y$  bzw.  $+\tau \ell_y$ . Entsprechend wird bei  $y = 0$  bzw.  $y = \ell_y$  die Membran gerade mit  $-\tau \ell_x$  bzw.  $+\tau \ell_x$  festgehalten. Ansonsten sei die Membran kräftefrei.

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$q_z(t, x, y) = f(t)g(x)h(y) \quad (8.224)$$

mit

$$\begin{aligned} f(t) &= C_f \sin(\omega t - \phi_f), \\ g(x) &= C_g \sin(k_x x - \phi_g), \\ h(y) &= C_h \sin(k_y y - \phi_h) \end{aligned} \quad (8.225)$$

die Differenzialgleichung (8.222) löst. Wie muss dazu  $\omega$  als Funktion von  $k_x$  und  $k_y$  gewählt werden? Wie sind die Integrationskonstanten zu wählen, damit die Randbedingungen erfüllt sind? Zeigen Sie dann, dass die allgemeine Lösung durch eine Fourier-Reihe in  $x$  und  $y$  gegeben ist.

**Lösungshinweis:** Bedenken Sie bei der Konstruktion der allgemeinen Lösung, dass die Schwingungsgleichung (8.222) linear und homogen ist.

### 8.3 • Fourier-Reihe für (un)gerade Funktionen

Zeigen Sie, dass bei geraden Funktionen alle Koeffizienten  $b_j$  der Fourier-Reihe gleich null sind, bei ungeraden Funktionen alle Koeffizienten  $a_j$ .

**Lösungshinweis:** Wählen Sie  $c$  geeignet.

**8.4 • Sägezahnkurve** Stellen Sie die Funktion  $f(t) = t$  für  $0 \leq t < 1$  (und periodisch fortgesetzt) als Fourier-Reihe dar.

**Lösungshinweis:** Die Funktion  $f$  ist weder gerade noch ungerade. Durch eine Verschiebung nach unten erhält man jedoch eine ungerade Funktion.

**8.5 • Darstellungen der Fourier-Reihe** Ermitteln Sie die Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten  $a_j, b_j$  der Fourier-Reihe mit Sinus- und Kosinusfunktionen einerseits und den Koeffizienten  $c_j$  der Fourier-Reihe in der Exponential-Darstellung andererseits.

**8.6 • Drehungstensor** Es soll gezeigt werden, dass der Tensor  $\omega_{ij}$  aus (8.112) eine Drehung beschreibt und daher

nicht zu Verformungsenergie des elastischen Körpers beiträgt. Zur Vereinfachung betrachten wir ein infinitesimales Flächenelement in zwei Dimensionen, das von zwei (nicht notwendigerweise orthogonalen) Vektoren  $\mathbf{da}$  und  $\mathbf{db}$  aufgespannt wird. Nun betrachten wir dasselbe Flächenelement im verformten Zustand mit

$$\begin{aligned} \mathbf{da}'_i &= \mathbf{da}_i + \eta_{ij} \mathbf{d}a_j = (\delta_{ij} + \eta_{ij}) \mathbf{d}a_j, \\ \mathbf{db}'_i &= \mathbf{db}_i + \eta_{ij} \mathbf{d}b_j = (\delta_{ij} + \eta_{ij}) \mathbf{d}b_j, \end{aligned} \quad (8.226)$$

wobei  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_{ij}) = (\partial_i q_j)$  den Verformungszustand des Flächenelements charakterisiert.

Zeigen Sie, dass das Flächenelement lediglich gedreht (und nicht verzerrt) wird, genau dann, wenn  $\eta_{ij} = \omega_{ij}$  ist.

**Lösungshinweis:** Überprüfen Sie dazu, unter welchen Umständen die Bedingung  $\mathbf{da}'_i \cdot \mathbf{db}'_i = \mathbf{da}_i \cdot \mathbf{db}_i$  erfüllt ist, d.h., wann Längen- und Winkelvarianz vorherrschen (Invarianz des Skalarprodukts).

## 8.7 •• Spannungstensor für elastisches Medium

(a) Bestimmen Sie den Spannungstensor (8.133) für das elastische Medium mit dem Elastizitätstensor

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (8.227)$$

Das Ergebnis ist das *isotrope Hooke'sche Gesetz* als kontinuierliche Erweiterung der eindimensionalen Federgleichung

$$F = Dq(x) = D(x - x_0). \quad (8.228)$$

(b) Wie lautet der Spannungstensor für die Verzerrung

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.229)$$

die in (8.116) gefunden wurde?

(c) Berechnen Sie die äußere Kraft  $\mathbf{F}$ , die an der Oberseite des in Abb. 8.14 gezeigten Quaders angreifen muss, damit sich im statischen Fall der in Teilaufgabe (b) gefundene Spannungstensor ergibt. In welche Richtung wirkt die Kraft? Dies erlaubt die Bestimmung des Schermoduls  $\mu$ , wenn bei bekannter Kraft  $\mathbf{F}$  die resultierende Scherung  $\eta_{zx}$  gemessen wird.

**8.8 •• Fluss im Rohr mit variabler Querschnittsfläche** Eine inkompressible Flüssigkeit (d.h.  $\rho = \text{const}$  und  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ) fließe durch ein Rohr mit einer variablen Querschnittsfläche. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der mittleren Geschwindigkeit der Flüssigkeit auf einer beliebigen ebenen Querschnittsfläche und dem Flächeninhalt dieser Querschnittsfläche? Gehen Sie dabei vom Gauß'schen Satz aus.

**Lösungshinweis:** Die genaue Gestalt des Geschwindigkeitsfeldes ist unerheblich. Es ist nur wichtig anzunehmen, dass an der Rohrinnenwand die Geschwindigkeit der Flüssigkeit überall verschwindet.

**8.9 •• Rotierende Flüssigkeit** Betrachten Sie einen unendlich langen Zylinder mit Radius  $R$ , der mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt ist. Dieser Zylinder wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_z$  um seine Symmetriearchse gedreht, die durch den Ursprung verläuft. Gravitation soll vernachlässigt werden. Es kann angenommen werden, dass sich die Flüssigkeit mit dem Zylinder dreht und sich in einem stationären Zustand befindet.

- (a) Wie lautet das stationäre Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\varrho, \varphi)$  für  $\varrho = x^2 + y^2 < R$  ( $\varphi$  ist der Polarwinkel)?
- (b) Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.
- (c) Bestimmen Sie den Druck  $P(\varrho)$  so, dass die Euler-Gleichung erfüllt wird. Welche anschauliche Rolle spielt der Druck hier?

**Lösungshinweis:** Aufgrund der Symmetrie entlang der  $z$ -Achse kann das äquivalente zweidimensionale Problem in der  $x$ - $y$ -Ebene behandelt werden. Verwenden Sie die Zylinderkoordinaten aus Abschn. 2.5. Die Divergenz in Zylinderkoordinaten lautet

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho u_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (8.230)$$

mit

$$\mathbf{u} = u_\varrho \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + u_\varphi \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + u_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.231)$$

Achten Sie darauf, dass sowohl die radiale Koordinate  $\varrho$  als auch die Dichte  $\rho$  in den Rechnungen auftreten.

**8.10 •• Poiseuille-Fluss in Rohr** Betrachten Sie ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt (Radius  $R$ ) entlang der  $z$ -Achse. Ein Druckgradient  $\text{grad } P = (0, 0, -P')^\top = \text{const}$  treibt eine inkompressible Strömung an, von der angenommen werden kann, dass sie stationär ist. Leiten Sie ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen und unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Rohres verschwindet, das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\varrho)$  ab.

Berechnen Sie außerdem den Volumenstrom durch eine Querschnittsfläche des Rohres.

**Lösungshinweis:** Verwenden Sie Zylinderkoordinaten und den entsprechenden Laplace-Operator

$$\Delta f(\varrho, \varphi, z) = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (8.232)$$

Nutzen Sie außerdem die Symmetrieverlegungen aus, die bereits in Abschn. 8.7 für den planaren Poiseuille-Fluss verwendet wurden.

Fordern Sie bei der Integration, dass  $\mathbf{u}$  für  $\varrho \rightarrow 0$  nicht divergiert soll.

## Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

### 8.1

(a) Ausgehend von

$$m\ddot{q}_N + k(q_N - q_{N-1}) - F = 0 \quad (8.233)$$

folgt mit den Definitionen von Massendichte und Young-Modulus zunächst

$$\rho\ddot{q}_N + \frac{Y}{a_0} \frac{q_N - q_{N-1}}{a_0} = \frac{F}{a_0}. \quad (8.234)$$

Im Grenzfall  $a_0 \rightarrow 0$  ersetzen wir  $q_i(t)$  durch  $q(t, x)$ , wobei  $q_N(t)$  gerade  $q(t, \ell)$  entspricht und der Differenzenquotient zur ersten Ableitung von  $q(t, x)$  nach  $x$  wird. Da das Band hier nur bei  $x = \ell$  betrachtet wird, erhält man damit bereits (8.221).

(b) Damit (8.221) im Kontinuumsstetigen  $a_0 \rightarrow 0$  nicht divergiert, schreiben wir zunächst

$$\rho \left. \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right|_{x=\ell} + \frac{1}{a_0} \left( Y \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x=\ell} - F \right) = 0 \quad (8.235)$$

und verlangen, dass der umklammerte Ausdruck verschwinden muss. Somit lautet die Randbedingung

$$\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x=\ell} = \frac{F}{Y}. \quad (8.236)$$

Dies bedeutet, dass die an einem Ende angreifende Kraft eine Bedingung an die erste Ableitung von  $q(x)$  am Rand stellt. Ein völlig analoger Ausdruck folgt für  $x = 0$ .

**8.2** Der Ansatz (8.224), eingesetzt in (8.222), führt allgemein auf

$$\ddot{f}gh - v_\perp^2(fg''h + fgh'') = 0. \quad (8.237)$$

Speziell gilt hier

$$\ddot{f} = -\omega^2 f, \quad g'' = -k_x^2 g, \quad h'' = -k_y^2 h. \quad (8.238)$$

Es folgt also

$$-\omega^2 fgh + v_\perp^2 (k_x^2 + k_y^2) fgh = 0, \quad (8.239)$$

was für

$$\omega^2 = v_\perp^2 (k_x^2 + k_y^2) \quad (8.240)$$

erfüllt ist.

Nun erfordern die Randbedingungen, dass  $g(0) = g(\ell_x) = 0$  und  $h(0) = h(\ell_y) = 0$  ist. Dies wird durch  $\phi_g = \phi_h = 0$  erfüllt sowie durch die Bedingungen

$$k_x = \frac{\pi n_x}{\ell_x}, \quad k_y = \frac{\pi n_y}{\ell_y} \quad (n_x, n_y \in \mathbb{N}). \quad (8.241)$$

Somit lautet eine Lösung

$$q_z^{(n_x, n_y)}(t, x, y) = C_{n_x, n_y} \sin(\omega t - \phi_{n_x, n_y}) \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad (8.242)$$

mit  $C_{n_x, n_y} = C_f C_g C_h$  für einen gegebenen Satz  $(n_x, n_y)$  und der Nebenbedingung (8.240).

Da die Ausgangsgleichung (8.222) linear und homogen ist, erhält man die allgemeine Lösung durch eine beliebige Linearkombination der Lösungen (8.242) für verschiedene  $(n_x, n_y)$ :

$$q_z(t, x, y) = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} q_z^{(n_x, n_y)}(t, x, y). \quad (8.243)$$

Dies ist aber nichts anderes als eine Fourier-Reihe in  $x$  und  $y$ , die nur Sinusbeiträge beinhaltet. Die  $C_{n_x, n_y}$  und  $\phi_{n_x, n_y}$  sind Integrationskonstanten. Einige der Eigenmoden sind in Abb. 8.29 gezeigt.

**8.3** Für eine gerade Funktion  $f$  gilt  $f(t) = f(-t)$ . Die Koeffizienten berechnet man mit der Wahl  $c = -T/2$  über

$$b_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(j\omega t) dt. \quad (8.244)$$

Mit der Substitution  $t' = -t$  wird dies zu

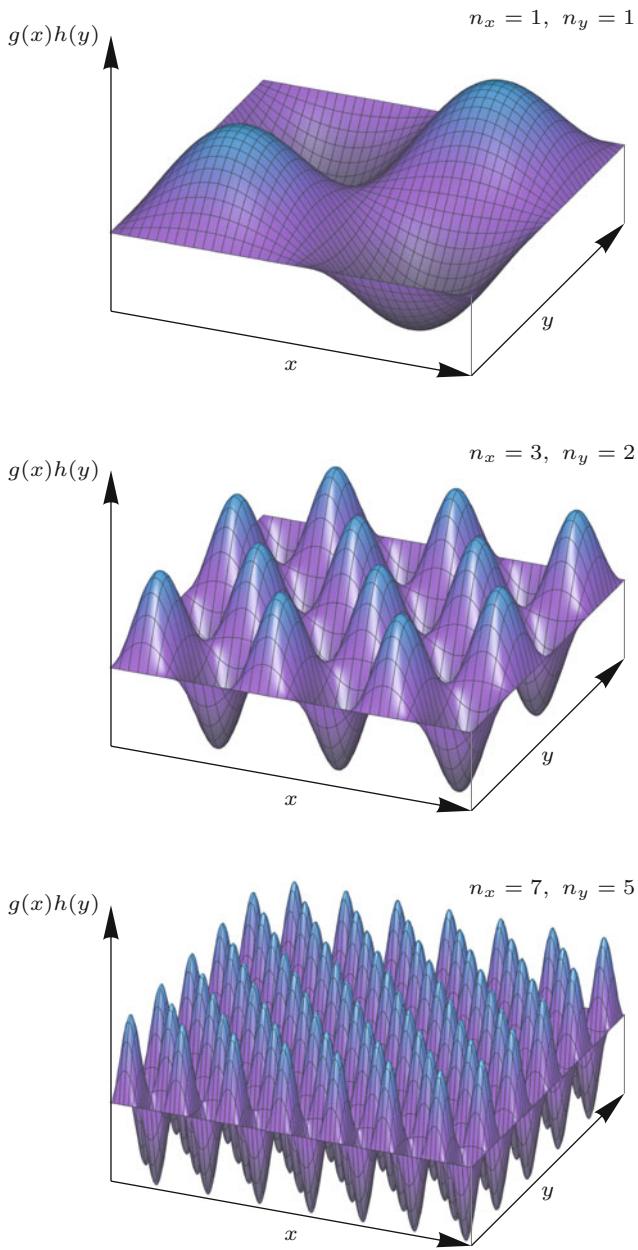
$$\begin{aligned} b_j &= \frac{2}{T} \int_{T/2}^{-T/2} f(-t') \sin(-j\omega t') (-dt') \\ &= \frac{2}{T} \int_{T/2}^{-T/2} f(t') \sin(j\omega t') dt', \end{aligned} \quad (8.245)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass  $f$  gerade und die Sinusfunktionen ungerade sind.

Vertauscht man die Integrationsgrenzen, dann folgt sofort

$$b_j = -\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') \sin(j\omega t') dt' \quad (8.246)$$

und deswegen  $b_j = -b_j$  und folglich  $b_j = 0$ . Völlig äquivalent zeigt man die andere Behauptung.



**Abb. 8.29** Einige Eigenmoden der rechteckigen Membran (von oben nach unten: \$n\_x = 1\$ und \$n\_y = 1\$, \$n\_x = 3\$ und \$n\_y = 2\$, \$n\_x = 7\$ und \$n\_y = 5\$)

**8.4** Die Funktion \$\bar{f}(t) = t - 1/2\$ auf dem Intervall \$0 \leq t < 1\$ (und periodisch fortgesetzt) ist ungerade, also hat man sofort \$\bar{a}\_j = 0\$ für alle \$j\$ und damit \$a\_0/\sqrt{2} = 1/2\$ und \$a\_j = 0\$ für \$j > 0\$. Die restlichen Koeffizienten sind

$$b_j = \frac{2}{1} \int_0^1 t \sin(2\pi jt) dt. \quad (8.247)$$

Mittels partieller Integration erhält man leicht \$b\_j = -1/(j\pi)\$, also insgesamt die Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi jt)}{j}. \quad (8.248)$$

### 8.5 Schreibt man

$$\begin{aligned} a_j \cos(j\omega t) + b_j \sin(j\omega t) \\ = \left( \frac{a_j}{2} + \frac{b_j}{2i} \right) e^{ij\omega t} + \left( \frac{a_j}{2} - \frac{b_j}{2i} \right) e^{-ij\omega t} \end{aligned} \quad (8.249)$$

und benutzt, dass dies gleich dem Summenglied \$c\_j \exp(ij\omega t) + c\_{-j} \exp(-ij\omega t)\$ sein muss, so erhält man für \$j > 0\$ sofort

$$c_j = \frac{a_j - ib_j}{2} \quad \text{und} \quad c_{-j} = \frac{a_j + ib_j}{2}. \quad (8.250)$$

Im Fall \$j = 0\$ folgt dagegen

$$c_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}}. \quad (8.251)$$

In der anderen Richtung hat man also

$$a_j = c_j + c_{-j} \quad \text{und} \quad b_j = i(c_j - c_{-j}). \quad (8.252)$$

### 8.6 Wir berechnen das Skalarprodukt der Vektoren \$\mathbf{da}'\$ und \$\mathbf{db}'\$:

$$\begin{aligned} \mathbf{da}' \cdot \mathbf{db}' &= da'_i db'_i = (\delta_{ij} + \eta_{ij})(\delta_{ik} + \eta_{ik}) da_j db_k \\ &= (\delta_{kj} + \eta_{kj} + \eta_{ik} + \eta_{ij}\eta_{ik}) da_j db_k. \end{aligned} \quad (8.253)$$

Da die Verformung \$\eta\_{ij}\$ klein sein soll, kann der in \$\eta\$ quadratische Term vernachlässigt werden. Es verbleibt also

$$\mathbf{da}' \cdot \mathbf{db}' = \mathbf{da} \cdot \mathbf{db} + (\eta_{kj} + \eta_{jk}) da_j db_k. \quad (8.254)$$

Vom trivialen Fall \$\eta = 0\$ abgesehen, kann \$\mathbf{da}' \cdot \mathbf{db}' = \mathbf{da} \cdot \mathbf{db}\$ nur genau dann verschwinden, wenn

$$\eta_{kj} = -\eta_{jk} \quad (8.255)$$

erfüllt ist, d.h. wenn \$\eta\$ antisymmetrisch und somit \$\eta\_{ij} = \omega\_{ij}\$ ist. Damit ist gezeigt, dass die Transformation \$\eta = \omega\$ das Flächen-element lediglich dreht und nicht verzerrt.

### 8.7

(a) Der Spannungstensor ist definiert als

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (8.256)$$

Wir multiplizieren also (8.227) mit \$\epsilon\_{kl}\$ und vereinfachen. Der erste Term ergibt

$$\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk}. \quad (8.257)$$

Dies ist also proportional zur Spur  $\epsilon_{kk}$  des Verzerrungstensors. Der zweite Term lautet

$$\mu (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\epsilon_{kl} = \mu (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}). \quad (8.258)$$

Zusammengefasst und wegen der Symmetrie des Verzerrungstensors erhalten wir

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}. \quad (8.259)$$

Diese Gleichung erlaubt es, direkt die Spannung für einen gegebenen Verzerrungszustand auszurechnen.

- (b) Zunächst sehen wir, dass die Spur der Verzerrung (8.229) verschwindet ( $\epsilon_{kk} = 0$ ); daher ist der Spannungstensor einfach

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} = \mu\eta_{zx}(\delta_{iz}\delta_{jx} + \delta_{ix}\delta_{jz}) \quad (8.260)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu\eta_{zx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.261)$$

- (c) Die Oberflächenkraft, die notwendig ist, um die Verzerrung (8.229) bzw. Spannung (8.261) zu erreichen, ergibt sich aus

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{A}, \quad (8.262)$$

wobei  $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{e}}_z$  die orientierte Fläche der Oberseite des Quaders ist. Wegen  $\hat{\mathbf{e}}_z = (0, 0, 1)^\top$  findet man sofort

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} A\mu\eta_{zx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.263)$$

- 8.8** Eine inkompressible Flüssigkeit erfüllt  $\operatorname{div} \mathbf{j} = \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . Der Satz von Gauß in (8.173) besagt dann:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = 0. \quad (8.264)$$

Als Integrationsvolumen wählen wir den Innenraum des Rohres (einschließlich seiner inneren Oberfläche), begrenzt durch zwei ebene und zueinander parallele Flächen. Wir zerlegen die dadurch definierte geschlossene Integrationsoberfläche nun in drei Teile: die beiden ebenen Querschnittsflächen ( $A_1$  und  $A_2$ ) und die Rohrinnenwand. Entsprechend der Annahme trägt die Rohrinnenwand nicht zum Integral bei, da dort überall  $\mathbf{u} = 0$  gilt. Die beiden betrachteten ebenen Flächen sind antiparallel zueinander, da das Flächenelement  $d\mathbf{A}$  überall nach außen zeigt. Die erste Fläche hat demnach einen Normalenvektor  $\hat{\mathbf{n}} = \text{const}$ , die zweite entsprechend  $-\hat{\mathbf{n}} = \text{const}$ . Es verbleibt

$$\iint_{A_1} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_{A_2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (8.265)$$

Mit der Projektion  $u_n = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  der Geschwindigkeit auf die Flächennormale  $\hat{\mathbf{n}}$  gilt in kompakter Form

$$\iint_{A_1} u_n dA = \iint_{A_2} u_n dA. \quad (8.266)$$

Nun ist aber

$$\bar{u}_n^{(1)} = \frac{\iint_{A_1} u_n dA}{A_1} \quad (8.267)$$

die mittlere (projizierte) Geschwindigkeit der Flüssigkeit auf der ersten Fläche  $A_1 = \iint_{A_1} dA$  (eine analoge Aussage gilt für die zweite Fläche), und wir schreiben demnach

$$A_1 \bar{u}_n^{(1)} = A_2 \bar{u}_n^{(2)}. \quad (8.268)$$

Dies bedeutet, dass das Produkt aus Querschnittsfläche und mittlerer Geschwindigkeit für alle gleichzeitig betrachteten Querschnittsflächen identisch ist, denn die Wahl der beiden Flächen war beliebig. Die Flüssigkeit muss also in einem engeren Abschnitt schneller fließen.

## 8.9

- (a) Der Geschwindigkeitsvektor muss überall in der  $x$ - $y$ -Ebene liegen. Bei einer Rotation  $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{e}}_z$  lautet das rotierende Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}(\varrho, \varphi) = \omega\varrho \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \omega\varrho \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \quad (8.269)$$

- (b) Die Kontinuitätsgleichung für eine inkompressible Flüssigkeit lautet einfach  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , wobei hier die Divergenz in Zylinderkoordinaten verwendet werden muss. Da nur  $u_\varphi = \omega\varrho$  als Funktion von  $\varrho$  auftritt, folgt direkt, dass die Divergenz verschwindet. Die Kontinuitätsgleichung ist also erfüllt.

- (c) Da keine Volumenkraft vorliegt und das Problem statisch ist, bleibt von der inkompressiblen Euler-Gleichung (8.186) lediglich

$$\rho \operatorname{div}(\mathbf{u} \circ \mathbf{u}) = -\operatorname{grad} P \quad (8.270)$$

übrig. Dies kann wegen der Divergenzfreiheit in folgender Form in Koordinatendarstellung geschrieben werden:

$$\rho u_i \partial_i u_j = -\partial_j P. \quad (8.271)$$

Es ist also zunächst der Gradient der Geschwindigkeit,  $\operatorname{grad} \mathbf{u}$ , zu berechnen. Mithilfe von (2.113) lässt sich dies in Zylinderkoordinaten leicht durchführen:

$$\operatorname{grad} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}}_\varrho \circ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varrho} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \circ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{e}}_z \circ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (8.272)$$

Hier bleibt wegen (8.269) lediglich

$$\operatorname{grad} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}}_\varrho \circ \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial(\omega\varrho)}{\partial \varrho} + \omega \hat{\mathbf{e}}_\varphi \circ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} \quad (8.273)$$

übrig, wobei noch  $\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi / \partial \varphi = -\hat{\mathbf{e}}_\varphi$  gilt. Wir erhalten also

$$\mathbf{grad} \mathbf{u} = \omega (\hat{\mathbf{e}}_\varphi \circ \hat{\mathbf{e}}_\varphi - \hat{\mathbf{e}}_\varphi \circ \hat{\mathbf{e}}_\varphi) \neq 0, \quad (8.274)$$

da die Reihenfolge der beiden Vektoren  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$  und  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$  nicht einfach vertauscht werden darf. Von links mit  $\mathbf{u}^\top$  multipliziert ergibt sich

$$\begin{aligned} (u_i \partial_i u_j) &= \mathbf{u}^\top (\mathbf{grad} \mathbf{u}) \\ &= \omega^2 \varrho \hat{\mathbf{e}}_\varphi^\top (\hat{\mathbf{e}}_\varphi \circ \hat{\mathbf{e}}_\varphi - \hat{\mathbf{e}}_\varphi \circ \hat{\mathbf{e}}_\varphi) = -\omega^2 \varrho \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \end{aligned} \quad (8.275)$$

Der Druck lässt sich dann über

$$\mathbf{grad} P = \rho \omega^2 \varrho \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad (8.276)$$

bestimmen. Daraus lässt sich ablesen, dass der Druck nur eine radiale Abhängigkeit haben kann:

$$P = \frac{\rho \omega^2}{2} \varrho^2, \quad (8.277)$$

wobei eine beliebige und unwichtige Konstante ignoriert wurde. Der Gradient des Druckes ergibt genau diejenige Kraft, welche die Flüssigkeit auf der stationären Kreisbahn hält; es handelt sich dabei also um die der Zentrifugalkraft entgegenwirkende Kraft.

### 8.10 Im stationären Zustand lautet die Navier-Stokes-Gleichung

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\mathbf{grad} P + \eta \Delta \mathbf{u}. \quad (8.278)$$

Aufgrund der Symmetrie kann die Strömung nur in  $z$ -Richtung fließen, und das Geschwindigkeitsfeld kann nur vom Abstand  $\varrho$  zur Mittelachse abhängen. Der Gradient von  $\mathbf{u}$  ist somit senkrecht zu  $\mathbf{u}$  selbst, sodass  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0$  ist. Es verbleibt daher nur die  $z$ -Komponente der Navier-Stokes-Gleichung:

$$\eta \Delta u_z = -P'. \quad (8.279)$$

Es ist nun zu beachten, dass die Integration in Zylinderkoordinaten durchzuführen ist.

Da wir annehmen, dass  $u_z$  nur von  $\varrho$  abhängt, können die Ableitungen nach  $\varphi$  und  $z$  ignoriert werden. Das Problem lautet also

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial u_z}{\partial \varrho} \right) = -\frac{P'}{\eta}. \quad (8.280)$$

Wir multiplizieren mit  $\varrho$  und integrieren:

$$\varrho \frac{\partial u_z}{\partial \varrho} = -\frac{P'}{2\eta} \varrho^2 + C_1. \quad (8.281)$$

Nun dividieren wir diese Gleichung durch  $\varrho$  und integrieren erneut:

$$u_z = -\frac{P'}{4\eta} \varrho^2 + C_1 \ln \varrho + C_2. \quad (8.282)$$

Die beiden Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  sind nun so zu bestimmen, dass  $u_z(R) = 0$  ist. Dies ist allerdings nur eine Bedingung an zwei Konstanten. Wir sehen außerdem, dass der Term  $\ln \varrho$  für  $\varrho \rightarrow 0$  divergiert. Dies darf allerdings nicht sein, da das Strömungsfeld im gesamten Rohrinnenraum regulär sein soll. Es muss also  $C_1 = 0$  erfüllt sein. Die verbleibende Konstante  $C_2$  wählen wir dann so, dass die Randbedingung erfüllt ist:

$$u_z(\varrho = R) = 0 \implies C_2 = \frac{P'}{4\eta} R^2. \quad (8.283)$$

Insgesamt lautet die Lösung also

$$u_z = \frac{P'}{4\eta} (\varrho^2 - R^2) \quad (\varrho \leq R). \quad (8.284)$$

Auch in einem Rohr mit kreisförmigem Querschnitt ist das Geschwindigkeitsfeld parabolisch, allerdings in der Radiuskoordinate  $\varrho$ . Außerdem unterscheiden sich die Vorfaktoren hier und in (8.209) um einen Faktor 2.

Die Gesamtmenge (d. h. das Gesamtvolumen) an Flüssigkeit, die pro Zeiteinheit durch eine Querschnittsfläche des Rohres fließt, ist

$$I = \int u_z dA = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R u_z \varrho d\varrho. \quad (8.285)$$

Beide Integrationen sind trivial ausführbar. Die Winkelintegration ergibt lediglich einen Faktor  $2\pi$ . Das verbleibende Integral lautet

$$\begin{aligned} \int_0^R u_z \varrho d\varrho &= \frac{P'}{4\eta} \int_0^R (R^2 \varrho - \varrho^3) d\varrho \\ &= \frac{P'}{4\eta} (R^4/2 - R^4/4) = \frac{P' R^4}{16\eta}. \end{aligned} \quad (8.286)$$

Der Gesamtfluss ist also

$$I = \frac{\pi P' R^4}{8\eta}. \quad (8.287)$$

Dieses letzte Ergebnis wird auch als *Hagen-Poiseuille-Gesetz* bezeichnet (nach dem deutschen Ingenieur Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen, 1797–1884). Es ist von großer Bedeutung für die Hydraulik und technische Anwendungen.

## Literatur

- Hänel, D.: Molekulare Gasdynamik: Einführung in die kinetische Theorie der Gase und Lattice-Boltzmann-Methoden. Springer, Berlin (2004)
- Kramer, J., Warmuth, E.: Sommerschule „Lust auf Mathematik“ (2010), [http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/bericht\\_1\\_11.pdf](http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/bericht_1_11.pdf). Zugegriffen: 5. September 2013
- Landau, L., Lifschitz, E.: Lehrbuch der theoretischen Physik, 10 Bde., Bd. 6, Hydrodynamik. Harri Deutsch, Frankfurt (1991)
- Sadd, M.H.: Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Academic Press, Amsterdam (2009)
- Stephani, H., Kluge, G.: Theoretische Mechanik: Grundlagen und Übungen. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1995)

# Spezielle Relativitätstheorie

# 9



Warum verlangt die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit die Relativität der Zeit?

Ist die Lorentz-Kontraktion wirklich oder scheinbar?

Welche Geometrie hat das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum?

Was sind Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft in der Relativitätstheorie?

Was bräuchte es für den Bau einer Zeitmaschine?

Kapitel 9

9.1 Anfang und Ende der Äther-Vorstellung . . . . .	321
9.2 Lorentz-Transformationen . . . . .	325
9.3 Minkowski-Raum . . . . .	330
9.4 Viererformalismus . . . . .	337
So geht's weiter . . . . .	344
Aufgaben . . . . .	347
Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	349
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	350
Literatur . . . . .	354

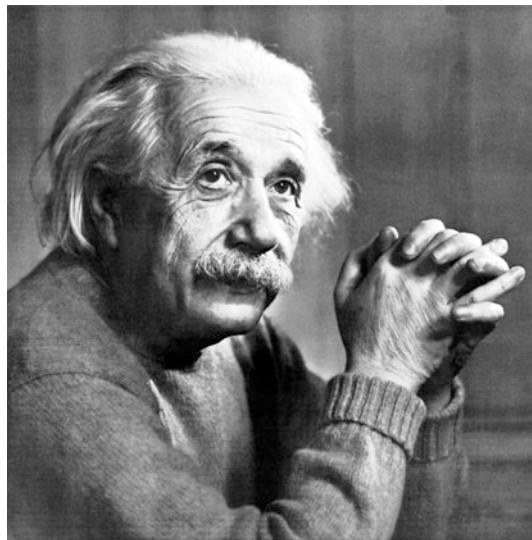
Dass sich physikalische Wirkungen nie schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, ist heutzutage allgemein bekannt, obwohl es im Alltagsleben und auch für einen Großteil der Experimentalphysik keine bedeutende Rolle spielt. Aber allein die Tatsache der Existenz einer absoluten Grenzgeschwindigkeit unterminiert die Grundlage, auf der die Newton'sche Mechanik aufgebaut wurde, denn in dieser haben nur Beschleunigungen eine absolute Bedeutung, während Geschwindigkeiten relativ und damit beliebig sind.

Da das Licht selbst ein elektrodynamisches Phänomen ist, wird die spezielle Relativitätstheorie, in der die Lichtgeschwindigkeit paradoxerweise eine absolute Bedeutung bekommt, üblicherweise erst in einem fortgeschrittenen Stadium von Elektrodynamik-Vorlesungen behandelt. In diesem Buch wird die Relativitätstheorie dement sprechend auch erst in Bd. 2, Kap. 8 dazu herangezogen, die Elektrodynamik von einer höheren Warte aus zu betrachten. Das Studium des vorliegenden und des nächsten Kapitels kann daher auch auf diesen Zeitpunkt verschoben werden. Alternativ kann aber auch ganz ohne die Elektrodynamik bereits jetzt die relativistische Kinematik und (im folgenden Kapitel) die relativistische Mechanik studiert werden.

*Albert Einstein* (1879–1955; Abb. 9.1) hatte 1905 als junger Patentamtsbeamter in seiner Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ (Einstein 1905) nicht so sehr die Elektrodynamik, sondern vielmehr die Newton'sche Mechanik revolutioniert, auch wenn das zur damaligen Zeit keine praktischen Auswirkungen hatte. In der Newton'schen Mechanik gibt es wegen der Gleichberechtigung aller Inertialsysteme keinen absoluten Raum, aber sehr wohl eine absolute Zeit. Schon vor Einstein hatten Physiker und insbesondere der französische Mathematiker *Henri Poincaré* (1854–1912) erkannt, dass es in der Elektrodynamik Sinn ergibt, beobachterabhängige Zeitkoordinaten einzuführen, aber vor einer Aufgabe des Konzepts einer absoluten Zeit waren alle zurückgeschreckt.

Einstein durchschlug nicht nur den gordischen Knoten des Äthers der Elektrodynamik, sondern insbesondere den der Newton'schen Zeit. Nur dadurch kann das Relativitätsprinzip der Mechanik, nämlich die Äquivalenz aller Inertialsysteme, mit der Existenz einer absoluten Grenzgeschwindigkeit in Einklang gebracht werden. Die dafür erforderliche Modifikation der Galilei-Transformationen war auch schon in der Elektrodynamik aufgefunden und in ihrer endgültigen Form zuvor von Poincaré nach dem niederländische Physiker *Hendrik Lorentz* (1853–1923) als Lorentz-Transformation bezeichnet und veröffentlicht worden.

In Einsteins spezieller Relativitätstheorie sind sowohl Raum als auch Zeit relative Begriffe, und dieser Schritt erwies sich als ungemein fruchtbar. Insbesondere wurde es notwendig, die Newton'sche Gravitationstheorie mit einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von physikalischen Wirkungen in Einklang zu bringen. Dies führte zu einer noch gewaltigeren Revolution unserer Vorstellungen von Raum und Zeit, die Einstein im November 1915 in Gestalt der allgemeinen Relativitätstheorie zuwege brachte. Diese kann in diesem Buch leider nicht entwickelt werden; wir werden aber gelegentlich auf sie stoßen, da einige experimentelle Tests der speziellen



**Abb. 9.1** Albert Einstein (1879–1955) (mit freundlicher Genehmigung der Russischen Akademie der Wissenschaften)

Relativitätstheorie auch Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie involvieren. Ebenso wie die spezielle Relativitätstheorie die Newton'sche Physik nicht überflüssig macht, sondern als Grenzfall weiterhin enthält, so stellt auch die spezielle Relativitätstheorie ein weiterhin gültiges Gebäude dar, solange die Krümmung von Raum und Zeit, die in der allgemeinen Relativitätstheorie hinzukommt, vernachlässigbar ist.

Bevor wir uns im nächsten Kapitel einer relativistischen Formulierung der Mechanik zuwenden, muss die kinematische Grundlage, die bisher durch das Galilei'sche Relativitätsprinzip bereitgestellt wurde, neu erarbeitet werden. Abschnitt 9.1 behandelt die empirischen Grundlagen für das neue Relativitätsprinzip Einsteins, das zur Aufgabe des Begriffs einer absoluten Zeit führt. An die Stelle der Galilei-Transformationen treten dabei die Lorentz-Transformationen, die in Abschn. 9.2 besprochen werden. Statt eines dreidimensionalen euklidischen Raumes und einer absoluten Zeit bildet nun ein vierdimensionales Raum-Zeit-Kontinuum die Arena der Physik, der sogenannte Minkowski-Raum, benannt nach Einsteins Mathematiklehrer am Polytechnikum in Zürich, *Hermann Minkowski* (1864–1909), dem die moderne Formulierung der speziellen Relativitätstheorie zu verdanken ist. Mithilfe der sogenannten Minkowski-Diagramme werden wir in Abschn. 9.3 die paradox anmutenden Effekte der speziellen Relativitätstheorie studieren und die kausale Struktur, die in der Minkowski-Welt die Physik bestimmt, diskutieren. In Abschn. 9.4 wird als neues Werkzeug der Viererformalismus eingeführt, in dem die Dreiervektoren des vertrauten euklidischen Raumes zu Vierergrößen in einen pseudoeuklidischen Raum verallgemeinert werden.

## 9.1 Anfang und Ende der Äther-Vorstellung

### Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit

Ob sich Licht mit endlicher oder unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet, war von der Antike bis ins 16. Jahrhundert eine umstrittene Frage. Die aristotelische Naturphilosophie ging von einer unendlichen Geschwindigkeit aus, und dies wurde auch von *Johannes Kepler* (1571–1630) und *René Descartes* (1596–1650) für wahr gehalten. *Galileo Galilei* (1564–1641) war vermutlich der Erste, der diese Frage experimentell entscheiden wollte, und stellte dazu Versuche mit Signallaternen an, die auf weit entfernten Hügeln von Gehilfen bedient wurden. Unter Einrechnung der menschlichen Reaktionszeit konnte er damit immerhin nachweisen, dass die Lichtgeschwindigkeit zumindest höher als ein paar Kilometer pro Sekunde sein müsse.

Ein klarer Beleg für die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit wurde 1676 vom dänischen Astronomen *Ole Rømer* (1644–1710) durch Beobachtung des Jupitermondes Io geliefert. Io umkreist den Jupiter in einer annähernd kreisförmigen Bahn mit einer Umlaufzeit von ungefähr 42,5 Stunden, und Bedeckungen von Io durch Jupiter lassen sich präzise vorhersagen. Abhängig davon, ob sich die Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne auf derselben Seite wie Jupiter oder entgegengesetzt befindet, kommt es aber zu Unterschieden im Zeitplan im Ausmaß von etwa 20 Minuten, die Rømer als zusätzliche Lichtlaufzeit durch den Durchmesser der Erdbahn identifizierte. Damit konnte die Lichtgeschwindigkeit in der richtigen Größenordnung geschätzt werden.

Eine schon recht genaue Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit lieferte der englische Geistliche und Astronom *James Bradley* (1693–1762) im Jahre 1728 durch die richtige Interpretation der von ihm entdeckten *Aberration* des Sternenlichtes. Fixsterne, die sich im Zenit befinden, beschreiben während eines Jahres kreisförmige Bewegungen im Bogensekundenbereich, die daher kommen, dass sich die Erde mit etwa  $v_E \approx 30 \text{ km/s}$  senkrecht zur Lichtausbreitung bewegt, sodass das Licht nicht mehr genau senkrecht von oben zu kommen scheint. Dies ist insbesondere in der Newton'schen Korpuskeltheorie der Lichtausbreitung naheliegend. So wie Regen schräg von vorne zu kommen scheint, wenn man sich darin vorwärts bewegt, erhalten Lichtstrahlen eine Neigung mit einem kleinen Winkel  $\tan \alpha = v_E/c$ . Da Bradley die Bahngeschwindigkeit der Erde hinreichend gut kannte, konnte er die Lichtgeschwindigkeit schon mit Prozentgenauigkeit berechnen.

Die erste terrestrische Messung der Lichtgeschwindigkeit gelang 1849 dem französischen Physiker *Hippolyte Fizeau* (1819–1896) mit einer stark verbesserten Version der frühen Experimente Galileis. Der entfernte Gehilfe wurde dabei durch einen Spiegel ersetzt und der Signalleiter durch ein sich schnell drehendes Zahnrad, mit dem sowohl das Licht gepulst ausgesandt als auch das reflektierte Licht selektiv detektiert wurde.

### Der Äther

Insbesondere die Wellentheorie des Lichtes, die von dem niederländischen Astronomen, Mathematiker und Physiker *Christiaan Huygens* (1629–1695) begründet wurde, legte die Existenz eines Mediums nahe, das sowohl feste Materie wie den ansonsten leeren Raum des Weltalls durchdringt, den *Äther* (nach dem griechischen Wort für den blauen Himmel), in dem sich Licht so ausbreitet wie Schall in Luft. Aristoteles hatte den ursprünglich rein mythologisch verstandenen Äther als fünftes Element (Quintessenz) den klassischen Elementen Platons hinzugefügt, das unveränderlich und ohne die Eigenschaften der übrigen Materie die sich ewig drehenden himmlischen Sphären ausfüllt.

Während Huygens sich das Licht noch als Longitudinalwelle im Äther vorstellte, ging der französische Physiker *Augustin Jean Fresnel* (1788–1827), der viel zur Entwicklung der Wellentheorie und Optik beitrug, von der Vorstellung eines elastischen Festkörpers aus, in dem sich Licht als Transversalwelle isotrop ausbreitet. Fresnel leitete 1818 aus der Vorstellung eines Äthers und der Notwendigkeit, diesen mit der veränderten Lichtgeschwindigkeit  $c/n$  in transparenten Medien mit Brechungsindex  $n > 1$  in Einklang zu bringen, sogar eine Vorhersage für die teilweise Mitführung des Äthers in bewegter Materie her, aufgrund dessen die Lichtgeschwindigkeit dann

$$\frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v \equiv \frac{c}{n} + \eta v$$

betragen solle, wobei  $v$  die Geschwindigkeit des Mediums ist. Der dabei auftretende *Fresnel'sche Mitführungscoefficient*  $\eta < 1$  wurde 1851 von Fizeau tatsächlich experimentell nachgewiesen, blieb aber rätselhaft, nicht zuletzt weil der Brechungsindex frequenzabhängig ist. Damit müsste für jede Farbe des Lichtes eine separate Komponente des Äthers existieren, die unterschiedlich stark von bewegter Materie mitgeführt werden sollte, was der Vorstellung eines universellen Äthers überhaupt nicht entsprach. (Die endgültige Erklärung dieses Phänomens liefert die relativistische Elektrodynamik, wie in Bd. 2, Abschn. 8.6 gezeigt werden wird.)

Mangels Alternativen hielten die Physiker des 19. Jahrhunderts an der Vorstellung eines Äthers fest, und es wurde in verschiedenen Experimenten versucht, den Äther und das von ihm ausgezeichnete Inertialsystem aufzuspüren. Apparaturen, die sich gegenüber dem Äther bewegen, sollten eine gewisse Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit feststellen. Da sich die Erde mit etwa  $10^{-4} c$  um die Sonne bewegt, sollte es entsprechende Abweichungen für erdgebundene Experimente geben, sofern der Äther nicht in der Umgebung der Erde von dieser mitgeführt wird. Gegen diese Möglichkeit spricht allerdings die erwähnte Aberration des Sternenlichtes. Licht, das in Richtung der Erdbewegung ausgesandt wird, sollte sich somit aufgrund des Gegenwindes, den der Äther liefert, ein wenig verlangsamt, in der anderen Richtung entsprechend schneller ausbreiten.

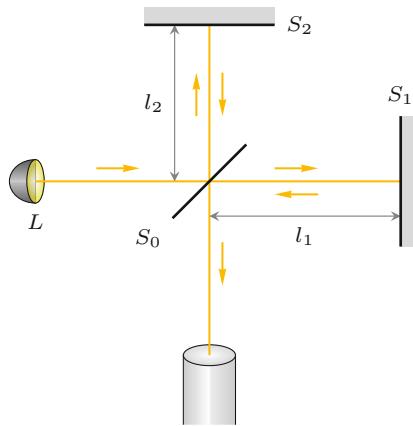


Abb. 9.2 Prinzipieller Aufbau eines Michelson-Interferometers

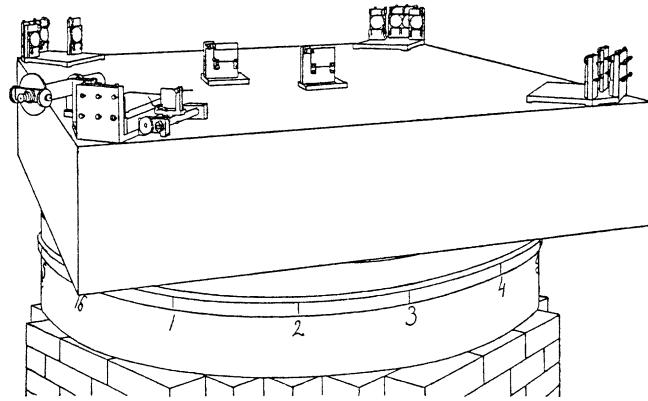


Abb. 9.3 Aufbau des Michelson-Morley-Experiments aus dem Jahr 1887, bei dem jeder Strahlengang dreifach gespiegelt wurde. In der Mitte befindet sich neben dem halbversilberten Spiegel noch ein Glaselement, das dafür sorgt, dass beide Strahlengänge durch dieselbe Menge an Glas geführt werden. Die Apparatur ist auf flüssigem Quecksilber drehbar gelagert, um möglichst erschütterungsfrei gedreht werden zu können

## Michelson-Morley-Experiment

# Kapitel 9

Das erste aussagekräftige Experiment zur Messung dieser so genannten Ätherdrift wurde 1887 in Cleveland, Ohio, von dem amerikanischen Physiker *Albert Michelson* (1852–1931) zusammen mit dem amerikanischen Chemiker *Edward Morley* (1838–1923) durchgeführt. Schon 1881 hatte Michelson ein Interferometer zu diesem Zweck konstruiert und damit in Potsdam experimentiert, aber die Empfindlichkeit war nicht hoch genug, um den negativen Ausgang signifikant zu machen.

In einem *Michelson-Interferometer* (Abb. 9.2) wird ein monochromatischer Lichtstrahl mittels eines halbversilberten Spiegels in zwei Teilstrahlen aufgespalten, die auf zwei rechtwinklig zueinander stehenden Wegen laufen, bevor sie in einem Beobachtungsfernrohr wieder zusammengeführt werden. In diesem entstehen dann Interferenzmuster, die sich ändern, sobald die Laufzeitdifferenz des Lichtes in den zwei Strahlengängen leicht geändert wird. Im Michelson-Morley-Experiment wurde das gesamte Interferometer drehbar gelagert, um den „Ätherwind“ aus unterschiedlichen Richtungen wirken zu lassen. Außerdem wurden die beiden Strahlengänge mehrfach gespiegelt, um die effektive Länge des Interferometers auf etwa 20 m zu erhöhen (Abb. 9.3), wodurch die Empfindlichkeit des Interferometers um eine Größenordnung gegenüber dem ersten Experiment von Michelson verbessert werden konnte.

Wir wollen nun für das in Abb. 9.2 skizzierte Interferometer die Laufzeitunterschiede bestimmen, die sich für unterschiedliche Orientierungen gegenüber dem angenommenen Ätherwind ergeben. Nehmen wir dazu zunächst an, dass sich das Interferometer mit einer Geschwindigkeit  $v$  entlang des Interferometerarmes mit Länge  $l_1$  gegenüber dem Ruhesystem des Äthers bewegt. In letzterem ist die Lichtgeschwindigkeit durch  $c$  gegeben und in allen Richtungen gleich (Abb. 9.4). Bezüglich dieses Inertialsystems läuft aber der Spiegel  $S_1$  dem Licht davon, und zwar um die Strecke  $\Delta l_1^{\text{hin}} = v t_1^{\text{hin}}$ , wobei  $t_1^{\text{hin}}$  die durch  $\Delta l_1^{\text{hin}}$

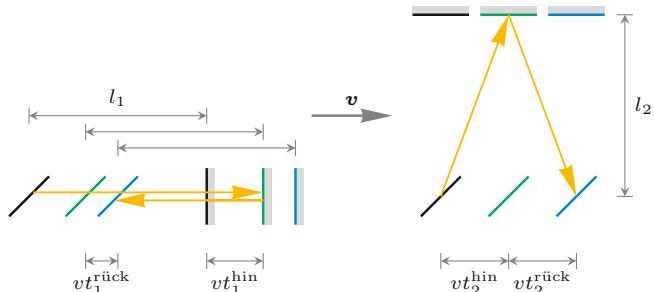


Abb. 9.4 Lichtbahnen im Michelson-Interferometer, das sich gegenüber dem Ruhesystem des Äthers mit Geschwindigkeit  $v$  nach rechts bewegt, links für den Interferometerarm 1, rechts für Arm 2

verlängerte Laufzeit zum Spiegel  $S_1$  ist:

$$t_1^{\text{hin}} = \frac{l_1 + \Delta l_1^{\text{hin}}}{c}, \quad \Delta l_1^{\text{hin}} = v t_1^{\text{hin}} \implies t_1^{\text{hin}} = \frac{l_1}{c - v}. \quad (9.1)$$

Für den Rückweg braucht das Licht umgekehrt um  $\Delta l_1^{\text{rück}} = v t_1^{\text{rück}}$  weniger Weg zurückzulegen und damit weniger Zeit:

$$t_1^{\text{rück}} = \frac{l_1 - \Delta l_1^{\text{rück}}}{c}, \quad \Delta l_1^{\text{rück}} = v t_1^{\text{rück}} \implies t_1^{\text{rück}} = \frac{l_1}{c + v}. \quad (9.2)$$

Auf dem Hinweg ist also die Lichtgeschwindigkeit um  $v$  reduziert, auf dem Rückweg um denselben Betrag erhöht. Diese Effekte heben sich aber nicht ganz auf: Zusammen ergibt dies für den Strahlengang entlang des Interferometerarmes 1 die Zeit

$$t_1 = t_1^{\text{hin}} + t_1^{\text{rück}} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2}, \quad (9.3)$$

in der sich die Beiträge erster Ordnung in  $v/c$  kompensieren und nur ein Effekt der Ordnung  $v^2/c^2$  übrig bleibt. Allerdings gibt es

auch im zweiten Arm einen Effekt, an den Michelson bei seinem ersten Experiment nicht gedacht hatte und der diese Laufzeitänderung noch etwas weiter reduziert. Die Seitwärtsbewegung verlängert den Weg des Lichtes aus Sicht des Äthersystems, weil es die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten  $l_2$  und  $\Delta l_2^{\text{hin}} = v t_2^{\text{hin}}$  bildet, sodass

$$t_2^{\text{hin}} = \frac{1}{c} \sqrt{l_2^2 + (\Delta l_2^{\text{hin}})^2}, \quad t_2^{\text{hin}} = \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = t_2^{\text{rück}} \quad (9.4)$$

und daher

$$t_2 = t_2^{\text{hin}} + t_2^{\text{rück}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (9.5)$$

ist.

Wegen

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} = 1 + \frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right), \quad (9.6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \quad (9.7)$$

halbiert sich für  $l = l_1 \approx l_2$  der Laufzeitunterschied auf den beiden Strahlengängen, bleibt aber von der Ordnung  $v^2/c^2$ .

Beim Michelson-Morley-Experiment wurden diese Laufzeitunterschiede auf Veränderungen bei geänderter Orientierung bezüglich der Bewegung der Erde untersucht. Bei einer kompletten Drehung des Interferometers sollte  $v$  zwischendurch einmal entlang Arm 1 und einmal entlang Arm 2 orientiert sein. Im ersten Fall müsste der Laufzeitunterschied

$$t_1 - t_2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (9.8)$$

betrugen und nach einer Drehung, die Arm 2 in die Richtung von  $v$  zeigen lässt:

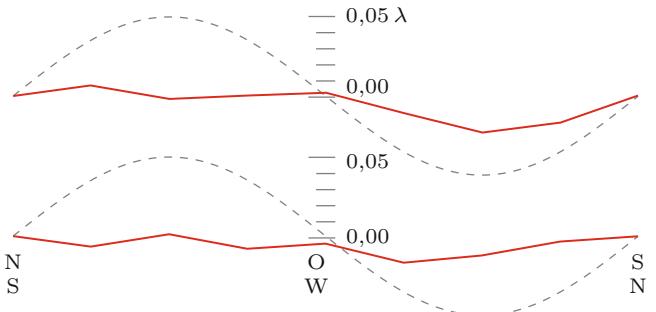
$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (9.9)$$

sodass mit  $l = l_1 \approx l_2$  und  $v \ll c$  ein Effekt von

$$\Delta t = |(t_1 - t_2) - (\bar{t}_1 - \bar{t}_2)| \approx \frac{2l}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad (9.10)$$

erzielbar sein sollte. Die von Michelson und Morley gemessenen Laufzeitunterschiede waren aber innerhalb der Messgenauigkeiten mit null verträglich, obwohl die Empfindlichkeit der Apparatur mehr als ausreichend war. In Abb. 9.5 sind die Messergebnisse mit einem Achtel des erwarteten Wertes verglichen, der sich ergibt, wenn für  $v$  die Orbitalgeschwindigkeit der Erde (etwa 30 km/s) um die Sonne eingesetzt wird. (Ein fast 100-mal so großer Effekt wäre übrigens zu erwarten, wenn die Geschwindigkeit eingesetzt wird, mit der das Sonnensystem um das Zentrum der Milchstraße läuft.)

## 9.1 Anfang und Ende der Äther-Vorstellung



**Abb. 9.5** Die von Michelson und Morley 1887 gemessenen Verschiebungen der Interferenzmuster in Einheiten der Wellenlänge  $\lambda$  bei einer Drehung des Interferometers (rote Linie) um 180° im Vergleich zu einem Achtel der zu erwartenden Werte (gestrichelte Linie), wenn  $v$  durch die Orbitalgeschwindigkeit der Erde um die Sonne gegeben ist. Das obere Ergebnis gehört zu Beobachtungen zur Mittagszeit, das untere zur Abendzeit

## Längenkontraktions- und Zeitdilatationshypotesen

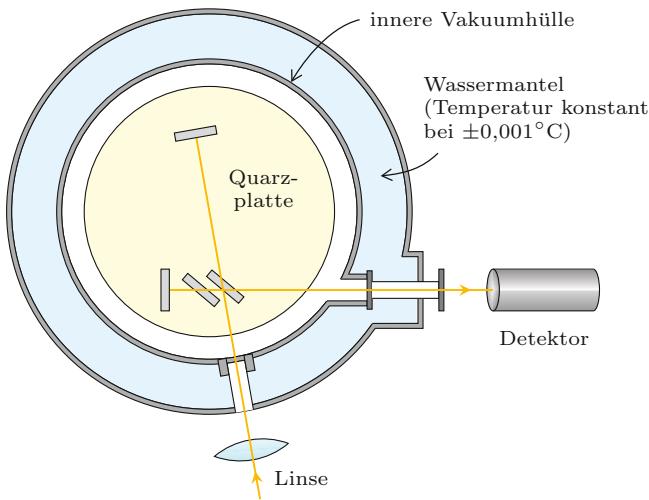
Als Erklärung für den negativen Ausgang des Michelson-Morley-Experiments schlügen 1889 der irische Physiker *George Fitzgerald* (1851–1901) und 1892 der niederländische Physiker *Hendrik Lorentz* (1853–1923) vor, dass jeder Körper bei einer Bewegung gegenüber dem Äther um einen Faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  verkürzt würde. Eine Motivation für diese Längenkontraktionshypothese war das 1888 von dem britischen Physiker und Mathematiker *Oliver Heaviside* gefundene Ergebnis, dass in der Elektrodynamik bewegte Ladungen entsprechend gestauchte Ellipsoide als Äquipotenzialflächen haben (wie wir in Bd. 2, Kap. 8 noch sehen werden). Wenn alle Materie durch elektrodynamische Kräfte zusammengehalten wird, ist diese Hypothese also gar nicht so weit hergeholt.

Mit der Längenkontraktionshypothese ist (9.8) folgendermaßen zu modifizieren:

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= \frac{2[l_1^{\text{Ruhe}} \sqrt{1 - v^2/c^2}]}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{2l_2^{\text{Ruhe}}}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{2[l_1^{\text{Ruhe}} - l_2^{\text{Ruhe}}]}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \bar{t}_1 - \bar{t}_2. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Damit wird die Ätherdrift im Michelson-Morley-Experiment praktisch unbeobachtbar, da eine Drehung der Apparatur zu keinen Laufzeitunterschieden führt. Effekte könnten sich nur durch eine Änderung des Betrags von  $v$  ergeben, wenn beispielsweise das Sonnensystem als Ganzes gegenüber dem Äther in Bewegung ist und sich die Bahngeschwindigkeit der Erde im Lauf des Jahres einmal zur Geschwindigkeit der Sonne addiert und ein halbes Jahr später entgegengerichtet ist.

Lorentz, der irische Physiker *Joseph Larmor* (1857–1942) und der französische Mathematiker *Henri Poincaré* (1854–1912) stießen aber in der Folge auf die von Poincaré nach Ersterem



**Abb. 9.6** Aufbau des Kennedy-Thorndike-Experiments aus dem Jahr 1932

## Kapitel 9

benannte *Lorentz-Transformation*, bei der neben räumlichen Abständen auch Zeitintervalle vom Bewegungszustand gegenüber dem Äther abhängig wurden. Demzufolge sollten Prozesse im bewegten System um einen Faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  langsamer ablaufen, effektiv beschrieben durch eine *lokale Zeit*; damit sollte die Ätherdrift komplett unbeobachtbar werden:

$$\begin{aligned}[t_1 - t_2]_{\text{Äther}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} [t_1 - t_2]^{\text{lokal}} \\ &= \frac{2[l_1^{\text{Ruhe}} - l_2^{\text{Ruhe}}]}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\end{aligned}\quad (9.12)$$

woraus folgt:

$$[t_1 - t_2]^{\text{lokal}} = \frac{2(l_1^{\text{Ruhe}} - l_2^{\text{Ruhe}})}{c}.\quad (9.13)$$

Eine experimentelle Bestätigung, dass auch der Betrag von  $v$  keinen Einfluss auf die Laufzeitunterschiede hat, gelang erst viel später, 1932, in einem Experiment von R. J. Kennedy und E. M. Thorndike (Abb. 9.6). In diesem wurde eine Variante des Michelson-Interferometers verwendet, mit ungleich langen Interferometerarmen, starr auf einer thermisch isolierten Quarzplatte montiert, sodass es über mehrere Monate stabile Beobachtungen zuließ.

### Einstein'sches Relativitätsprinzip

Mit der Invarianz aller elektrodynamischen Phänomene unter der von Lorentz und Larmor gefundenen Transformation, die 1905 von Poincaré nachgewiesen wurde, war der Äther unbeobachtbar geworden. Poincaré formulierte dies noch vor Einstein sogar als Prinzip der Relativität und der Unmöglichkeit, eine absolute Bewegung experimentell festzustellen (Poincaré

1905). Dennoch hielt Poincaré wie zuvor Lorentz an der Vorstellung eines Äthers fest, der – wenn auch unbeobachtbar – den absoluten Raum und die absolute Zeit definieren sollte.

Einstein, der die Arbeiten von Lorentz kannte, kam unabhängig von Poincaré zu demselben Schluss, war aber radikaler in seinem Denken und verzichtete komplett auf die Vorstellung eines Äthers und einer damit verbundenen absoluten Zeit. 1905 formulierte er in einer von drei bahnbrechenden Arbeiten (Einstein 1905) seine spezielle Relativitätstheorie mit einem einschneidenden Zusatz zum klassischen Relativitätsprinzip.

### Postulate der speziellen Relativitätstheorie

**Relativitätsprinzip** In allen zueinander gleichförmig bewegten Bezugssystemen (Inertialsystemen) laufen physikalische Vorgänge bei gleichen Bedingungen gleich ab.

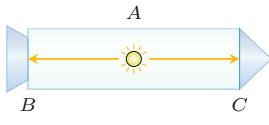
**Konstanz der Lichtgeschwindigkeit** In allen Inertialsystemen ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (unabhängig vom Bewegungszustand der Quellen) gleich groß.

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist im Widerspruch zur Galilei-Invarianz der Newton'schen Mechanik, die wir in Kap. 2 diskutiert haben. Diese kann also nur näherungsweise gültig sein, solange alle Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, und ist durch eine *relativistische Mechanik* zu ersetzen.

Für Einstein war das berühmte Michelson-Morley-Experiment übrigens nicht ausschlaggebend. Er war bereits durch das Fizeau'sche Mitführungsexperiment davon überzeugt, dass die Vorstellung eines universellen Äthers unhaltbar war (man musste ja für jede Farbe einen eigenen Äther annehmen), und konnte später nicht mehr sagen, ob er 1905 vom Michelson-Morley-Experiment überhaupt wusste (Holton 1969; Fölsing 1999). Das Michelson-Morley-Experiment war allerdings für Lorentz ein Schlüsselexperiment, und dessen von Einstein als ungenügend empfundene Hypothesen bereiteten den Weg für die spezielle Relativitätstheorie. Lorentz zollte Einsteins Relativitätstheorie später jeden Respekt, auch wenn er selbst weiterhin der Äthervorstellung nicht abschwören wollte. Michelson, der 1907 den Nobelpreis für sein Interferometer und die damit verbundenen neuen messtechnischen Möglichkeiten erhielt, bedauerte dagegen zeitlebens seinen Beitrag zum „Monstrum“ der Relativitätstheorie.

### Relativität der Gleichzeitigkeit

Der radikale Schritt Einsteins bestand darin, die Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen zu einem Axiom zu erheben, sodass es nicht mehr nur um elektromagnetische Phänomene ging, sondern um die Grundlage der gesamten Physik. Insbesondere musste die bisherige Vorstellung einer absoluten Zeit aufgegeben werden, die in der Newton'schen



**Abb. 9.7** Wird in der Mitte einer Rakete ein Licht eingeschaltet (Ereignis A), so werden die gegenüberliegenden Wände für einen Beobachter, der in demselben Inertialsystem ruht, gleichzeitig erhellt (Ereignisse B und C). Bewegt sich die Rakete gegenüber dem Beobachter, dann können B und C für diesen wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nicht mehr gleichzeitig sein, da das Licht für ihn unterschiedliche Strecken zurückzulegen hat. (Wegen der Lorentz-Kontraktion ist die bewegte Rakete auch noch kürzer für diesen Beobachter, was aber keinen Unterschied für die Asymmetrie macht, die die Gleichzeitigkeit von B und C aufhebt.)

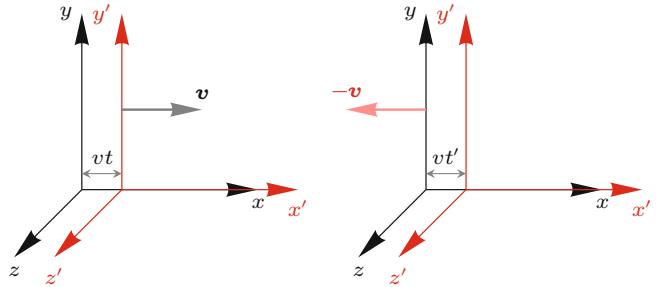
Mechanik unabhängig vom Bezugssystem für jeden Beobachter gleich verläuft und deshalb in den Galilei-Transformationen (2.40) bis auf eine mögliche Verschiebung des Zeitnullpunktes unverändert bleibt.

Das Relativitätsprinzip und die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit sind aber mit einer absoluten Zeit unvereinbar, wie leicht einzusehen ist. Nehmen wir als ein Beispiel eine gleichförmig bewegte Rakete, in der exakt in der Mitte eine Lichtquelle eingeschaltet wird. Für alle Beobachter im Inertialsystem der Rakete wird die vordere und hintere Wand der Rakete gleichzeitig erhellt (Abb. 9.7). Wird dies aber aus dem Inertialsystem einer anderen Rakete, die sich mit großer Geschwindigkeit gegenüber der ersten bewegt, beobachtet, ergibt sich ein anderes Bild. Auch in diesem Inertialsystem breitete sich das Licht in alle Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit aus, aber die vordere und hintere Wand der ersten Rakete bewegt sich nun vom Punkt, wo das Licht seinen Ursprung hat, weg bzw. auf ihn zu. Das Licht muss daher in einer Richtung eine längere und in der anderen eine kürzere Strecke durchlaufen, sodass für das bewegte Inertialsystem die vordere und die hintere Wand in der ersten Rakete nicht mehr gleichzeitig erhellt werden. Wenn sich die Rakete gegenüber dem zweiten Inertialsystem nach vorne bewegt, wird die hintere Wand zuerst erhellt, ansonsten ist die zeitliche Reihenfolge gerade vertauscht.

Es ist nicht verwunderlich, dass vor Einstein kein Physiker an der absoluten Zeit rütteln wollte, schon gar nicht an Begriffen wie „Gleichzeitigkeit“ und „zeitliche Abfolgen“, denn eine saubere Trennung von Vergangenheit und Zukunft ist unabdingbar für Kausalität und Berechenbarkeit. Es wird auch nur dann zu keinem Problem, wenn es keine Möglichkeit gibt, die Lichtgeschwindigkeit zu überschreiten (was in der Newton'schen Mechanik mit den Galilei-Transformationen aber möglich wäre).

### Frage 1

Erweitern Sie das Gedankenexperiment mit den zueinander bewegten Raketen um ein mit Überlichtgeschwindigkeit von einer Wand zur anderen fliegendes Insekt, und überlegen Sie sich, dass es zugleich in einem Inertialsystem vorwärts in der Zeit und im anderen rückwärts in der Zeit reisend erscheinen könnte.



**Abb. 9.8** Standardkoordinatenwahl für die Transformation zwischen zwei Inertialsystemen, die sich mit Geschwindigkeit  $v$  zueinander bewegen. Bei  $t = t' = 0$  sollen sie ihren gemeinsamen Koordinatenursprung haben, die  $x$ - und  $x'$ -Achsen sollen parallel zu  $v$  sein, und es soll keine Drehung um letztere im Spiel sein

## 9.2 Lorentz-Transformationen

Wir wollen nun unter Aufgabe einer absoluten Zeit die Transformationsgleichungen zwischen zwei Inertialsystemen  $S$  und  $S'$  herleiten, die sich mit einer Geschwindigkeit  $v < c$  zueinander bewegen, und zwar so, dass das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit respektiert wird. Als Standardkoordinatenwahl werden wir in beiden Systemen kartesische Koordinaten verwenden, die zum Zeitpunkt  $t = t' = 0$  einen gemeinsamen Koordinatenursprung haben und die so orientiert sind, dass sich das System  $S'$  entlang der positiven  $x$ -Achse von  $S$  bewegt. Es soll auch keine Drehung im Spiel sein, sodass die Ebenen  $y = 0$  und  $z = 0$  den Ebenen  $y' = 0$  und  $z' = 0$  entsprechen (Abb. 9.8).

Mit Galilei-Transformationen entspricht dies (2.40) mit  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$  und  $t_0 = 0$ , nämlich  $x' = x - vt$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ ,  $t' = t$ , und dies sollte im Grenzfall  $c \rightarrow \infty$  auch bei den relativistischen Transformationsgleichungen wieder herauskommen. (Für Galilei-Transformationen hatte man übrigens vor Einstein keinen eigenen Namen. Diese erschienen einfach zu selbstverständlich. Erst 1909 führte der österreichische Physiker und Philosoph Philipp Frank, 1884–1966, diese Bezeichnung ein.)

Für die Suche nach verallgemeinerten, relativistischen Transformationsgleichungen können wir uns auf lineare Transformationen beschränken, denn ansonsten würden gerade gleichförmig durchlaufene (und damit kräftefreie) Teilchenbahnen in  $S$  nicht auf solche in  $S'$  abgebildet werden. Mit den Forderungen

$$\begin{aligned} x' = 0 &\iff x = vt, \\ x = 0 &\iff x' = -vt', \\ y' = 0 &\iff y = 0, \\ z' = 0 &\iff z = 0, \end{aligned} \quad (9.14)$$

die jeweils für alle nicht beteiligten Koordinaten zu erfüllen sind, ist diese lineare Transformation weiter eingeschränkt auf

$$x' = A(x - vt), \quad y' = Cy, \quad z' = \tilde{C}z. \quad (9.15)$$

Da die zweite Forderung in (9.14) für alle  $y$  und  $z$  zu gelten hat, bleibt als möglicher linearer Ansatz für die Transformation der Zeit

$$t' = Bt - Dx. \quad (9.16)$$

Da  $x = 0$  nun  $x' = -vt'$  verlangt und für  $x = 0$  einerseits  $x' = -Avt$  und weiter  $t' = Bt$  ist, können wir  $B = A$  setzen.

Die Koeffizienten  $C$  und  $\tilde{C}$  können aufgrund der Isotropie des Raumes nur vom Betrag von  $v$  abhängen, treten also unverändert bei der inversen Transformation auf, sodass auch  $y = Cy'$ ,  $z = \tilde{C}z'$  und damit  $C^2 = \tilde{C}^2 = 1$  sein muss. Wenn wir  $C = -1$  und  $\tilde{C} = -1$  ausschließen, was einer bloßen Spiegelung von  $y$  bzw.  $z$  entsprechen würde, können wir schon einmal

$$y' = y, \quad z' = z \quad (9.17)$$

setzen.

Aufgrund der postulierten Konstanz der Lichtgeschwindigkeit müssen die restlichen Koeffizienten nun so beschaffen sein, dass eine (notwendigerweise isotrope) Lichtausbreitung in  $S$  einer solchen in  $S'$  entspricht. Betrachten wir dazu eine Kugelwelle, die im Koordinatenursprung bei  $t = t' = 0$  emittiert wird. In  $S$  ist diese durch

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (9.18)$$

gegeben und in  $S'$  durch

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \\ &= A^2(x^2 - 2xvt + v^2 t^2) + y^2 + z^2 \\ &= c^2(A^2 t^2 - 2ADtx + D^2 x^2). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Übereinstimmung mit (9.18) wird erreicht durch

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad D = \frac{v}{c^2}A, \quad (9.20)$$

wobei wir die positive Wurzel wählen, damit für  $v = 0$  die Transformation zur Identität wird (und nicht zu einer noch möglichen Spiegelung von  $x$  und  $t$ ).

### Frage 2

Rechnen Sie dies nach!

Im Grenzfall  $c \rightarrow \infty$  ist offensichtlich  $A = B = 1$  und  $D = 0$ , und alles reduziert sich auf die einfachen Galilei-Transformationen. Nur in diesem Fall hat die Zeit bis auf Verschiebungen des Zeitnullpunktes eine absolute Bedeutung. Wie wir schon aus dem Relativitätsprinzip gefolgert haben, muss eine endliche invariante Geschwindigkeit  $c$  zu einer nichttrivialen Transformation der Zeitkoordinate führen.

Bevor wir weitere Konsequenzen diskutieren, werden wir zunächst unseren Formalismus zur Umrechnung zwischen Inertialsystemen den neuen Gegebenheiten anpassen und die Transformationsgleichungen in Matrixnotation zusammenfassen.

### Lorentz-Transformation in $x$ -Richtung

In Matrixform geschrieben lautet die Lorentz-Transformation von einem Inertialsystem  $S$  auf ein Inertialsystem  $S'$ , das sich gegenüber  $S$  mit Geschwindigkeit  $v = \beta c$  in positiver  $x$ -Richtung bewegt:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda(v)} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (9.21)$$

mit den gebräuchlichen Abkürzungen

$$\beta := \frac{v}{c}, \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.22)$$

Die inverse Transformation zu dieser „Standard-Lorentz-Transformation“ ist durch  $v \rightarrow -v$  bzw.  $\beta \rightarrow -\beta$  gegeben,  $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$ , also

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (9.23)$$

### Frage 3

Verifizieren Sie durch Ausmultiplizieren dieser Matrizen, dass sie tatsächlich zueinander invers sind! Zeigen Sie außerdem:

$$\det \Lambda(v) = 1. \quad (9.24)$$

In obiger symmetrischer Form publizierte Poincaré diese Transformation 1905 wenige Wochen, bevor Einstein seine Arbeit zur speziellen Relativitätstheorie einreichte, und nannte sie Lorentz-Transformation (Poincaré 1905). Diese Transformation wurde von Lorentz 1892 in einer Form aufgestellt, die bei der Transformation der Zeitvariablen Fehler der Ordnung  $v^2/c^2$  zuließ. Erstmals komplett formulierte sie Larmor 1897. Eine Version, die sich nur durch eine Skalentransformation davon unterscheidet, wurde übrigens bereits 1887 vom Göttinger Physiker *Woldemar Voigt* (1850–1919) bei der Analyse der Wellengleichung gefunden (Voigt 1887), war ihrer Zeit aber zu weit voraus, um voll verstanden zu werden, und blieb unbeachtet. (*Skalentransformation* bedeutet hier, dass alle Längen- und Zeiteinheiten um einen gemeinsamen Faktor verändert werden. Die Physik ist im Allgemeinen nicht invariant unter Skalentransformationen, die Wellengleichung dagegen schon.)

### Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Poincaré zeigte auch bereits 1905, dass die Lorentz-Transformationen für beliebig orientierte Geschwindigkeiten  $v$  mit  $|v| < c$

## Vertiefung: Lorentz-Transformation als imaginäre Drehung Geschwindigkeit und Rapidity

Wie Poincaré schon 1905 bemerkte, geht die Lorentz-Transformation in eine gewöhnliche Drehung über, wenn die Zeit rein imaginär gewählt wird,  $ct = ix_4$ . Eine Drehung in der  $x$ - $x_4$ -Ebene kann durch eine Matrix

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_4 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Mit  $\xi = i\varphi$ ,  $\cos \varphi = \cosh \xi$ ,  $i \sin \varphi = \sinh \xi$  erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi \\ -\sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma \\ -\beta \gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit der Identifikation

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \tanh \xi, \quad \gamma = \cosh \xi.$$

Die neue Variable (Abb. 9.9)

$$\xi = \operatorname{artanh} \beta \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

wird *Rapidity* (*rapidity*) genannt und hat einen Wertebereich, der im Gegensatz zu  $\beta \in (-1, 1)$  von  $-\infty$  bis

$+\infty$  reicht. Diese Variable wird häufig in der Hochenergiephysik verwendet, wo Geschwindigkeiten sehr nahe bei  $c$  vorkommen und daher  $\beta$  eine unpraktische Größe darstellt. Besonders nützlich ist darüber hinaus, dass im Gegensatz zu  $\beta$  die Rapidity  $\xi$  eine additive Größe ist. So wie sich Drehwinkel einfach addieren, wenn immer um die gleiche Achse gedreht wird, so addieren sich bei Geschwindigkeitstransformationen in ein und derselben Richtung die entsprechenden Werte von  $\xi$ . Das relativistische Additionstheorem für gleichgerichtete Geschwindigkeiten (9.31) wird mit  $\beta = \tanh \xi_1$ ,  $\beta_{w'} = \tanh \xi_2$  und  $\beta_w = \tanh \xi_3$  schlicht (Aufgabe 9.5):

$$\xi_1 + \xi_2 = \xi_3.$$

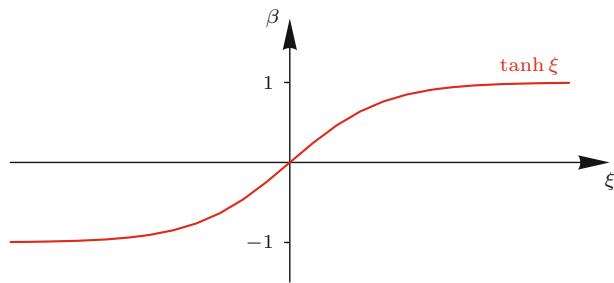


Abb. 9.9 Die Geschwindigkeit  $\beta = v/c$  als Funktion der Rapidityvariablen  $\xi$ :  $\beta = \tanh \xi$

zusammen mit den räumlichen Drehungen eine mathematische Gruppe bilden. Die Lorentz-Transformationen unter Ausschluss von Drehungen werden im Folgenden gelegentlich als „reine Geschwindigkeitstransformationen“ bezeichnet (in der englischsprachigen Literatur wird dafür der Ausdruck *Lorentz boost* verwendet). Die gesamte *Lorentz-Gruppe* verallgemeinert die orthogonale Gruppe der dreidimensionalen Drehungen auf vierdimensionale Transformationen, welche die quadratische Form

$$s^2 := c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (9.25)$$

invariant lassen. In obiger Herleitung der Lorentz-Transformationen haben wir bei dem Vergleich von (9.18) und (9.19) primär gefordert, dass  $s^2 = 0$  auf  $s'^2 = 0$  führt. Da wir aber mit  $y' = y$  und  $z' = z$  dafür gesorgt haben, dass eine zusätzliche Reskalierung aller Koordinaten ausgeschlossen wurde, haben wir tatsächlich die Invarianz von  $s^2$  verwendet. (Verlangt man nur die Invarianz von  $s^2 = 0$ , so führt dies auf die größere Gruppe der *konformen Transformationen*; die Physik ist darunter aber nur in Ausnahmefällen invariant.)

Die dreidimensionalen Drehungen sind diejenigen Lorentz-Transformationen, bei denen separat  $x^2 + y^2 + z^2$  und die Zeit  $t$

invariant bleiben. Sie sind also durch Matrizen

$$\Lambda(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad (9.26)$$

dargestellt, wobei  $\mathbf{R}$  eine orthogonale Matrix ( $\mathbf{R}^\top = \mathbf{R}^{-1}$ ) ist.

Die räumlichen Drehungen bilden eine Untergruppe: Zwei beliebige Drehungen hintereinander ausgeführt ergeben wieder eine Drehung. Für beliebige Geschwindigkeitstransformationen gilt dies nicht unbedingt, das Resultat kann eine Kombination einer Geschwindigkeitstransformation mit einer Drehung sein (siehe hierzu den Abschnitt „So geht's weiter“ am Ende dieses Kapitels).

Werden zwei Geschwindigkeitstransformationen mit gleichgerichteten Relativgeschwindigkeiten hintereinander ausgeführt, ist das Ergebnis wieder eine reine Geschwindigkeitstransformation. Allerdings addieren sich Geschwindigkeiten nicht länger einfach.

Betrachten wir dazu drei Inertialsysteme,  $S$ ,  $S'$  und  $S''$ .  $S'$  soll sich wieder mit Geschwindigkeit  $v$  in positive  $x$ -Richtung bezüglich  $S$  bewegen. Bezuglich  $S'$  soll sich das dritte System  $S''$

mit Geschwindigkeit  $w'$  bewegen, ebenfalls in positive  $x$ -Richtung:

$$S \xrightarrow{\Lambda(v)} S' \xrightarrow{\Lambda(w')} S''.$$

Wir wollen nun wissen, mit welcher Geschwindigkeit  $w$  sich  $S'$  bezüglich des Ausgangssystems  $S$  bewegt:

$$S \xrightarrow{\Lambda(w)} S''.$$

Für die Transformationsmatrizen bedeutet dies

$$\Lambda(w') \Lambda(v) = \Lambda(w). \quad (9.27)$$

#### Frage 4

Begründen Sie, warum hier  $\Lambda(v)$  rechts von  $\Lambda(w')$  steht (auch wenn das für die folgende Rechnung nicht wichtig ist).

Wir betrachten also

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \gamma_{w'} & -\beta_{w'}\gamma_{w'} & 0 & 0 \\ -\beta_{w'}\gamma_{w'} & \gamma_{w'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v\gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{w'}\gamma_v(1 + \beta_{w'}\beta_v) & -\gamma_{w'}\gamma_v(\beta_{w'} + \beta_v) & 0 & 0 \\ -\gamma_{w'}\gamma_v(\beta_{w'} + \beta_v) & \gamma_{w'}\gamma_v(1 + \beta_{w'}\beta_v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \gamma_w & -\beta_w\gamma_w & 0 & 0 \\ -\beta_w\gamma_w & \gamma_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Ein Vergleich der letzten beiden Matrizen ergibt

$$\gamma_{w'}\gamma_v(1 + \beta_{w'}\beta_v) = \gamma_w, \quad \gamma_{w'}\gamma_v(\beta_{w'} + \beta_v) = \beta_w\gamma_w, \quad (9.29)$$

woraus bei Division dieser beiden Gleichungen

$$\beta_w = \frac{\beta_{w'} + \beta_v}{1 + \beta_{w'}\beta_v} \quad (9.30)$$

bzw.

$$w = \frac{w' + v}{1 + w'v/c^2} \quad (9.31)$$

folgt. Wir sehen, dass es unmöglich ist, durch die Addition von zwei Geschwindigkeiten, die beide kleiner als  $c$  sind, die Lichtgeschwindigkeit zu überschreiten. So ergibt sich im Extremfall  $w' = v = c$  ebenfalls  $w = (c + c)/2 = c$ . (Das Additionstheorem für beliebige, nicht gleichgerichtete Geschwindigkeiten werden wir in Abschn. 9.4 herleiten.)

Die gesamte Gruppe der Lorentz-Transformationen, die Drehungen und Geschwindigkeitstransformationen beinhaltet, ist durch sechs kontinuierlich veränderliche Größen parametrisiert: die drei Komponenten eines Geschwindigkeitsvektors  $v$

und die drei Parameter, die eine zusätzliche Drehung festlegen (z. B. die drei Euler-Winkel). Eine allgemeine Lorentz-Transformationsmatrix, die über diese Parameter kontinuierlich mit der Einheitsmatrix verbunden ist, lässt sich immer durch das Produkt von zwei Drehungen und der Standard-Lorentz-Transformation (9.21) in  $x$ -Richtung darstellen:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_1 \end{pmatrix}, \quad (9.32)$$

wobei die erste Drehmatrix das Koordinatensystem von  $S$  so dreht, dass der Geschwindigkeitsvektor  $v$ , mit dem sich  $S'$  bezüglich  $S$  bewegt, in positive  $x$ -Richtung zeigt. Ist  $v = 0$ , so kombinieren sich die beiden Drehungen natürlich auf eine einzige Drehmatrix.

Eine reine Geschwindigkeitstransformation ergibt sich für  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1^{-1} = \mathbf{R}_1^\top$ . Diese hat dann die Form

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v^\top/c \\ -\gamma v/c & \mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{vv^\top}{v^2} \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

und ist im Gegensatz zur allgemeisten Lorentz-Transformationsmatrix symmetrisch. Um das Ergebnis (9.33) einzusehen, genügt es, sich davon zu überzeugen, dass dies für  $v = (v, 0, 0)^\top$  gerade die Standard-Lorentz-Transformation (9.21) gibt und dass Drehmatrizen  $\mathbf{R}_1$  und  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1^\top$  die Spalten- und Zeilenvektoren  $v^\top$  und  $v$  in eine beliebige Richtung drehen.

#### Frage 5

Zeigen Sie anhand von (9.33), dass zwei reine Geschwindigkeitstransformationen hintereinander ausgeführt im Allgemeinen keine reine Geschwindigkeitstransformation ergeben können, weil die resultierende Matrix nicht mehr symmetrisch ist, wenn die Geschwindigkeitsvektoren  $v_1$  und  $v_2$  in unterschiedliche Richtungen zeigen.

Zwei reine Geschwindigkeitstransformationen hintereinander ausgeführt ergeben eine reine Geschwindigkeitstransformation in einer Richtung, die in der von  $v_1$  und  $v_2$  aufgespannten Ebene liegt, kombiniert mit einer Drehung, wobei die Drehachse sowie die Größe der Drehung durch den axialen Vektor  $v_1 \times v_2$  bestimmt sind. Explizite allgemeine Formeln dafür sind etwas unübersichtlich (Sexl & Urbantke 1992); in Aufgabe 9.7 wird der Fall, dass eine der beiden Geschwindigkeiten klein ist, behandelt, was ausreicht, um den in der Atomphysik wichtigen Effekt der Thomas-Präzession herzuleiten, der am Ende des Kapitels im Abschnitt „So geht's weiter“ diskutiert wird.

Zusätzlich zu diesen Transformationen gibt es noch drei diskrete Operationen, die (9.25) unverändert lassen: *Zeitspiegelung* ( $T$ ), räumliche Spiegelung ( $P$ ), auch *Paritätstransformation* genannt, und die Kombination von beiden ( $PT$ ) mit Transformationsmatrizen:

$$\Lambda(T) = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(P) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(PT) = -\mathbf{I}_4. \quad (9.34)$$

## Vertiefung: Komponenten der Lorentz-Gruppe

### Diskrete Symmetrien und deren Verletzung in der Teilchenphysik

Wären alle Vorzeichen in der quadratischen Form  $s^2$  in (9.25) gleich, hätten wir einfach orthogonale Transformationen in vier Dimensionen vorliegen, was gruppentheoretisch als  $O(4)$  notiert würde (siehe auch den „Mathematischen Hintergrund“ Bd. 3, (7.1)). Weil  $s^2$  nicht mehr positiv definit ist, spricht man von *pseudoorthogonalen* Transformationen. Die Lorentz-Gruppe ist speziell die pseudoorthogonale Gruppe  $O(3,1)$ , wobei das Zahlenpaar die Vorzeichenstruktur in  $s^2$  angibt und ein globaler Vorzeichenwechsel keinen Unterschied macht:  $O(1,3)$  und  $O(3,1)$  sind identische Gruppen.

Die Lorentz-Transformationen, bei denen keine zeitlichen oder räumlichen Spiegelungen inkludiert sind, heißen *eigentliche orthochrone* (zeitrichtige) Lorentz-Transformationen.

Die Bezeichnung „eigentlich“ bezieht sich dabei auf die Eigenschaft  $\det \Lambda = 1$  (siehe „Mathematischen Hintergrund“ 2.2), was auch von  $\Lambda(P)$  erfüllt wird. Gruppentheoretisch wird dies  $SO(3,1)$  notiert, wobei „S“ für „speziell“, in diesem Zusammenhang ein Synonym für „eigentlich“, steht.

Bezeichnen wir orthochrone und nichtorthochrone Transformationen mit einem oberen Index  $\uparrow$  bzw.  $\downarrow$  und die möglichen Werte der Determinante  $\pm 1$  mit einem unteren Index  $\pm$ , so können wir zusammenfassend die Lorentz-Gruppe in vier disjunkte Komponenten zerlegen:

$$\mathcal{L} \equiv O(3,1) = \underbrace{\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow}_{SO(3,1)} \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow.$$

Die Komponente  $\mathcal{L}_+^\uparrow = SO(3,1)^\uparrow$  beinhaltet die Identität und wird daher auch als Komponente der Einheit bezeichnet. Sie bildet eine zusammenhängende *Mannigfaltigkeit* (siehe den „Mathematischen Hintergrund“ 5.1), weil ihre Elemente durch eine kontinuierliche Variation von Parametern ineinander übergeführt werden können. Die anderen Zusammenhangskomponenten sind als Mannigfaltigkeit betrachtet Kopien, die sich durch Kombination aller Elemente der Lie-Gruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  mit den diskreten Operationen  $T$ ,  $P$  und  $PT$  ergeben:

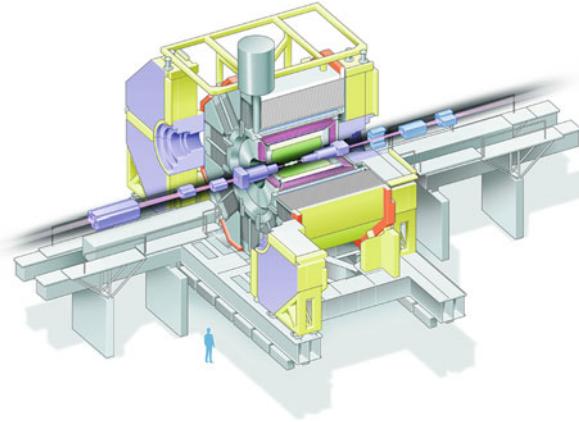
$$\mathcal{L}_-^\uparrow = P\mathcal{L}_+^\uparrow, \quad \mathcal{L}_-^\downarrow = T\mathcal{L}_+^\uparrow, \quad \mathcal{L}_+^\downarrow = PT\mathcal{L}_+^\uparrow.$$

(Für eine ausführlichere Diskussion des Begriffs „Lie-Gruppe“ siehe den „Mathematischen Hintergrund“ Bd. 3, 7.1.)

Die spezielle Relativitätstheorie und darauf aufbauende Theorien bis hin zu relativistischen Quantenfeldtheorien verlangen in Wirklichkeit nur Invarianz der Naturgesetze unter der Gruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Tatsächlich hat man in der Teilchenphysik sowohl *Paritätsverletzung* als auch Verletzung der Zeitspiegelungsinvarianz in den fundamentalen Wechselwirkungen,

die mit der sogenannten *schwachen Kernkraft* zusammenhängen, gefunden. (Die Verletzung der Zeitspiegelungsinvarianz ergibt sich dabei indirekt aus einer Verletzung der kombinierten Symmetrie von Raumspiegelung ( $P$ ) und Austausch von Teilchen mit ihren Antiteilchen ( $C$  für *charge conjugation* oder Ladungskonjugationssymmetrie), was als *CP-Verletzung* bezeichnet wird.)

Die Paritätsverletzung der schwachen Kernkraft war 1956 von den chinesisch-stämmigen amerikanischen theoretischen Physikern *Tsung-Dao Lee* (\*1926) und *Chen-Ning Yang* (\*1922) postuliert und 1957 von der chinesisch-amerikanischen Physikerin *Chien-Shiung Wu* (1912–1997) experimentell nachgewiesen worden. Die CP-Verletzung ist im Vergleich zur Paritätsverletzung ein noch subtilerer Effekt. Entdeckt wurde sie (völlig überraschend) 1964 von den amerikanischen Physikern *James Cronin* (1931–2016) und *Val Fitch* (1923–2015) im Zerfall von neutralen K-Mesonen (auch Kaonen genannt). Erst viel später, 2001, wurde sie auch bei weiteren Elementarteilchen, den sogenannten B-Mesonen, durch das amerikanische BaBar- und das japanische BELLE-Experiment (Abb. 9.10) nachgewiesen. Die CP-Verletzung hängt eng mit der noch völlig ungeklärten Frage zusammen, warum unser Universum so viel mehr Materie als Antimaterie enthält.



**Abb. 9.10** Schema des BELLE-Experiments am japanischen Teilchenbeschleunigerzentrum KEK in Tsukuba, mit dem die CP-Verletzung bei B-Mesonen untersucht wird

### Literatur

- Sexl, R.U., Urbantke, H.K.: *Relativität, Gruppen, Teilchen*. Springer Verlag, 1992
- Griffiths, D.: *Introduction to Elementary Particles*. 2. Aufl., Wiley-VCH, 2008

Jede dieser Transformationen ergibt nur Sinn als passive Transformation der Koordinaten, d.h., sie können im Gegensatz zu den Drehungen und Geschwindigkeitstransformationen nicht durch eine aktive Veränderung des Inertialsystems selbst induziert werden. (Für mathematische und auch physikalische Implikationen siehe den Kasten „Vertiefung: Komponenten der Lorentz-Gruppe“.)

Lässt man zusätzlich zu diesen Lorentz-Transformationen auch noch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs zu,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \left[ \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right], \quad (9.35)$$

so spricht man von der (zehnparametrischen) *Poincaré-Gruppe*. Diese verallgemeinert die Gruppe der Galilei-Transformationen, bei der wir ja auch Verschiebungen des Koordinatenursprungs und des Zeitnullpunktes zugelassen haben. Im Folgenden werden wir aber der Einfachheit halber immer den Koordinatenursprung und Zeitnullpunkt für unterschiedliche Inertialsysteme zusammenfallen lassen.

## Kapitel 9

### 9.3 Minkowski-Raum

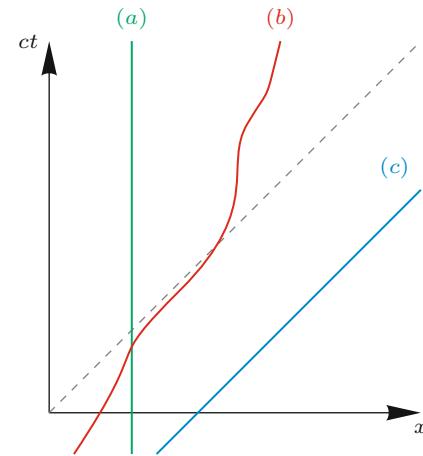
Die symmetrische Struktur der Lorentz-Transformationsmatrix (9.21), bei der Raum- und Zeitkoordinaten, letztere multipliziert mit  $c$ , gleichermaßen transformiert werden, legt eine vierdimensionale Beschreibung mit Koordinaten

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (9.36)$$

nahe. Der Index  $\mu$ , der nun vier Werte zu durchlaufen hat, wird dabei willkürlich oben notiert (was im Folgenden noch eine spezielle Bedeutung gewinnen wird), und der zusätzliche Index für die Koordinate  $ct$  wird als nullter vereinbart:  $x^0 := ct$ . Indizes, die mit griechischen Kleinbuchstaben notiert werden, werden im Folgenden immer von 0 bis 3 laufen; lateinische Kleinbuchstaben bleiben für räumliche Komponenten von 1 bis 3 reserviert.

**Achtung** Die nun hochgestellten Indizes dürfen natürlich nicht mit Exponenten verwechselt werden. Ob es sich in einem konkreten Fall um obere Indizes oder Exponenten handelt, wird sich immer eindeutig aus dem Zusammenhang ergeben. ▶

Ein Punkt des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums, der in einem Bezugssystem durch die Koordinaten  $x^\mu$  beschrieben wird, wird als *Ereignis* bezeichnet. Das gesamte Raum-Zeit-Kontinuum bildet den *Minkowski-Raum*, benannt nach dem deutschen Mathematiker *Hermann Minkowski* (1864–1909), der 1908 eine konsequent vierdimensionale Formulierung der



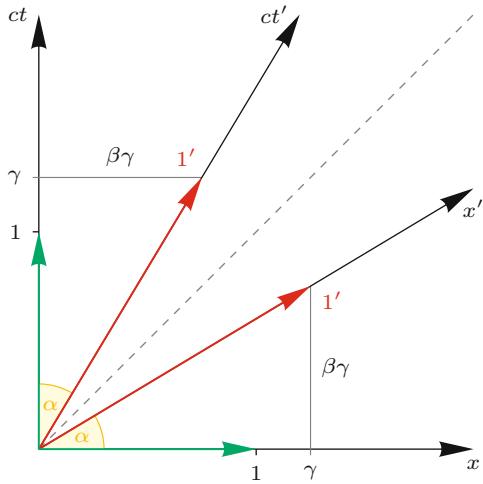
**Abb. 9.11** Minkowski-Diagramm mit Weltlinien für ein ruhendes Teilchen (a), ein ungleichförmig bewegtes Teilchen, dessen Geschwindigkeit überall unter der Lichtgeschwindigkeit bleibt (b), und ein Photon, das sich mit Lichtgeschwindigkeit nach rechts bewegt (c)

speziellen Relativitätstheorie Einsteins entwickelte. Minkowski (1909), der am Polytechnikum in Zürich Ende der 1890er Jahre Einsteins Lehrer gewesen war, stellte seinen vierdimensionalen Raum in einem Vortrag in Köln 1908 mit den pathetischen Worten vor: „Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.“

Im Minkowski-Raum wird ein ausdehnungsloses Punktteilchen durch eine eindimensionale *Weltlinie* dargestellt, die seine gesamte Geschichte wiedergibt. Wenn man auf die Darstellung von zumindest einer räumlichen Dimension verzichten kann, lassen sich die Prozesse im Minkowski-Raum durch *Minkowski-Diagramme* wiedergeben, die für die Diskussion und Auflösung der scheinbaren Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie äußerst hilfreich sind. In diesen werden traditionellerweise die zeitartige Koordinate eines Inertialsystems  $S$ ,  $ct$ , als vertikale Achse und ein bis maximal zwei räumliche Koordinaten durch horizontale Achsen dargestellt. Eine physikalisch mögliche Weltlinie eines Teilchens mit Masse ist dann eine Linie, die überall eine Steigung von mindestens  $45^\circ$  hat. Ist die Linie vertikal, dann ruht das Teilchen gerade im betrachteten Inertialsystem. Lichtsignale (quantentheoretisch masselose *Photonen*) haben im Vakuum Weltlinien, die mit exakt  $45^\circ$  verlaufen (Abb. 9.11).

### Geometrische Darstellung der Lorentz-Transformation in einem Minkowski-Diagramm

In einem Minkowski-Diagramm können wir auch übersichtlich darstellen, mit welchen Koordinaten ein gegenüber  $S$  bewegtes Inertialsystem  $S'$  die Ereignisse parametrisiert, die in  $S$  mit obigen rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt werden.



**Abb. 9.12** Geometrische Darstellung der Lorentz-Transformation in einem Minkowski-Diagramm (gezeichnet für den Wert  $\beta = 3/5 = 0,6$ , bei dem auch  $\gamma$  eine rationale Zahl ist, nämlich  $\gamma = 5/4 = 1,25$ )

Dazu beschränken wir uns auf die Koordinaten  $ct$  und  $x$  und stellen die Linien, die zu  $ct' = 0$  und  $x' = 0$  gehören, in den ungestrichenen Koordinaten dar. Die inverse Lorentz-Transformation (9.23) ergibt

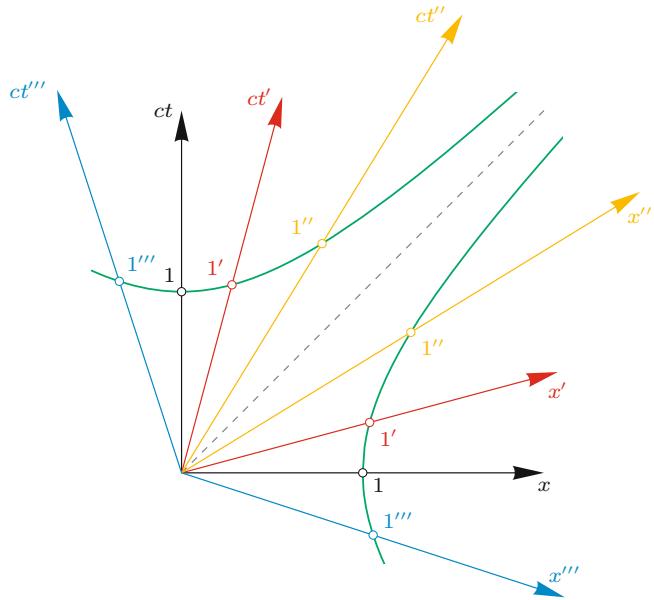
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ct' + \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x' \quad (9.37) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta\gamma \end{pmatrix} ct' + \begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} x'. \end{aligned}$$

Der räumliche Koordinatenursprung  $x' = 0$  (also die  $ct'$ -Achse) stellt sich klarerweise als gerade Linie dar mit Neigung  $\tan \alpha = \beta \equiv v/c$  gegenüber der  $ct$ -Achse, die das Weg-Zeit-Diagramm des sich nach rechts bewegenden Systems wieder gibt. Neu (gegenüber Galilei-Transformationen) ist hier, dass zu einer Einheit von  $ct'$  der Wert  $\gamma > 1$  in der Koordinate  $ct$  gehört (Abb. 9.12).

Noch ungewohnter ist freilich, dass die Linie  $ct' = 0$  (die  $x'$ -Achse) gegenüber der  $x$ -Achse geneigt ist, ebenfalls mit  $\tan \alpha = \beta$ , was zur Folge hat, dass abhängig von der Entfernung vom Koordinatenursprung die Zeitangabe  $t' = 0$  zu buchstäblich allen möglichen Werten von  $t$  gehört.

Das Koordinatensystem von  $S'$  stellt sich also gegenüber dem von  $S$  als schiefwinklig heraus. Linien mit konstantem Wert  $ct'$  sind immer parallel zur  $x'$ -Achse, genauso wie alle Linien mit festem  $x'$  dieselbe Neigung wie die  $ct'$ -Achse haben.

Da per Konstruktion  $x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$  ist, liegen für beliebige Werte der Geschwindigkeit die räumlichen und zeitartigen Einheitsvektoren auf einer Hyperbel (Abb. 9.13), die räumlichen



**Abb. 9.13** Die räumlichen und zeitartigen Einheitsvektoren von verschiedenen Inertialsystemen  $S', S'', \dots$  liegen im Minkowski-Diagramm von  $S$  auf Einheitshyperbeln

auf einem Ast der Einheitshyperbel  $x^2 - c^2 t^2 = 1$  und die zeitartigen auf  $x^2 - c^2 t^2 = -1$  (mit einer beliebigen Maßeinheit für die Länge).

#### Frage 6

Skizzieren Sie nun analog zu Abb. 9.12 ein Minkowski-Diagramm für das Bezugssystem  $S'$  mit rechtwinkligen Koordinatenachsen  $ct'$  und  $x'$ , in dem die Koordinatenachsen von  $S$  dargestellt sind.

### Längenkontraktion

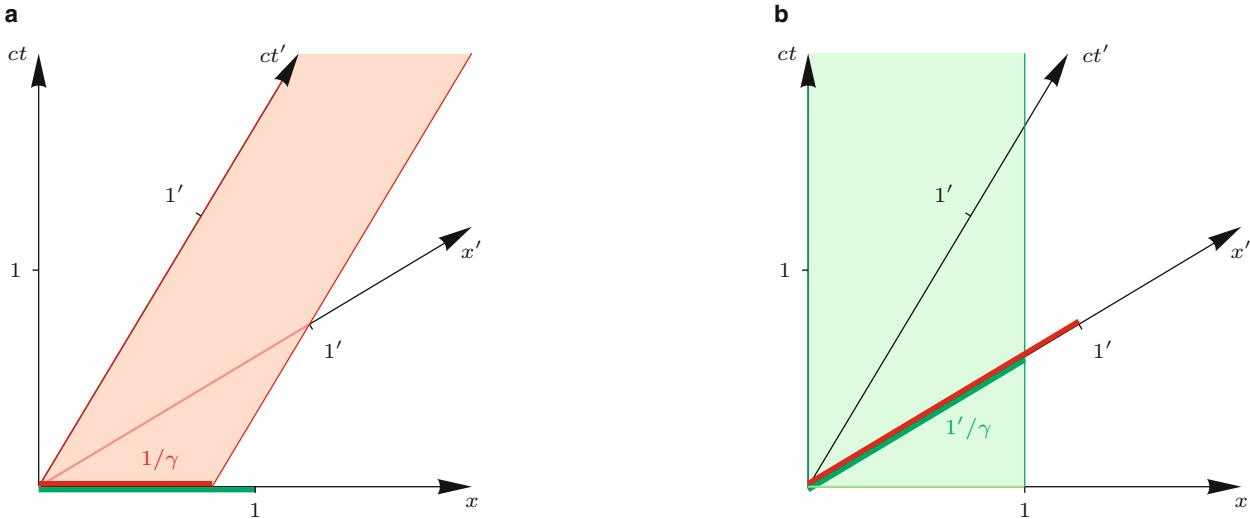
Um die physikalische Bedeutung der veränderten Einheiten auf den Koordinatenachsen des bewegten Systems  $S'$  zu verstehen, müssen wir uns darüber Klarheit verschaffen, was Längen- und Zeitmessungen in den verschiedenen Inertialsystemen konkret bedeuten.

Längen- und Zeitintervalle zwischen zwei Raumzeitpunkten transformieren sich, wenn wir uns auf Geschwindigkeitstransformationen in  $x$ -Richtung beschränken, gemäß

$$c \Delta t' = \gamma(c \Delta t - \beta \Delta x), \quad c \Delta t = \gamma(c \Delta t' + \beta \Delta x'), \quad (9.38)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t), \quad \Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta c \Delta t'). \quad (9.39)$$

Betrachten wir zunächst Längenmessungen. Im Ruhesystem gibt es dazu keine Mehrdeutigkeit, aber bei einem bewegten Maßstab muss natürlich darauf geachtet werden, dass die Positionen der beiden Enden zum gleichen Zeitpunkt aufgezeichnet



**Abb. 9.14** Lorentz-Kontraktion. Vergleichen zwei Inertialsysteme ihre Maßstäbe, so erweist sich in jedem der Maßstab des anderen verkürzt. Im linken Diagramm (a) wird der sich nach rechts bewegende Maßstab (rot), der in \$S'\$ ruht und dort die Länge 1 hat, in \$S\$ zum Zeitpunkt \$t = 0\$ durch Vergleich mit dem dort ruhenden (grün) gemessen und hat die Länge \$1/\gamma\$. Im rechten Diagramm (b) wird der in \$S\$ ruhende Maßstab analog in \$S'\$ gemessen. Hier findet die Messung bei \$t' = 0\$ statt, und er ist wiederum verkürzt. Wie man sieht, sind die Ereignispunkte, zu denen die jeweiligen Messungen stattfinden, nicht identisch

werden. Dazu benötigt man im Prinzip mehrere Beobachter, die über den Raum verteilt sind und synchronisierte Uhren besitzen, es sei denn, ein einzelner Beobachter sorgt dafür, dass er bei visuellen Beobachtungen präzise die Laufzeit des Lichtes herausrechnet.

Ruht ein Maßstab der Länge \$L\_0\$ in \$S'\$, dann füllt er dort das Intervall \$\Delta x' = L\_0\$ für beliebige \$\Delta t'\$ aus. Bei der Messung in \$S\$ muss aber \$\Delta t = 0\$ verlangt werden, denn dort ist er in Bewegung. Die linke Relation in (9.39) ergibt damit

$$L = \Delta x \Big|_{\Delta t=0} = \Delta x'/\gamma = L_0/\gamma < L_0. \quad (9.40)$$

Der bewegte Maßstab erweist sich daher um den Faktor \$1/\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}\$ verkürzt.

Dasselbe ergibt sich bei vertauschten Rollen. Ruht der Maßstab in \$S\$, gilt dort \$\Delta x = L\_0\$ für beliebige \$\Delta t\$. Die Messung vom bewegten System \$S'\$ aus verlangt nun \$\Delta t' = 0\$. Jetzt kann die rechte Relation in (9.39) verwendet werden, und diese führt auf

$$L = \Delta x' \Big|_{\Delta t'=0} = \Delta x/\gamma = L_0/\gamma < L_0. \quad (9.41)$$

Beim Vergleich ihrer Maßstäbe kommen Beobachter in \$S\$ und \$S'\$ also jeweils zu dem Schluss, dass der des anderen verkürzt ist. Es liegt hier aber überhaupt kein Widerspruch vor, denn wegen der Relativität der Zeit gehören zu den jeweiligen Messungen unterschiedliche Ereignispaare, wie man sich am besten anhand eines Minkowski-Diagramms vor Augen führt.

Betrachten wir dazu zwei Einheitsmaßstäbe, die jeweils in \$S\$ und \$S'\$ ruhen und entlang der \$x\$- bzw. \$x'\$-Achse die Strecke vom Koordinatenursprung bis 1 bzw. \$1'\$ ausfüllen und vom jeweils anderen

System aus gemessen werden. Die Weltlinien von Anfang und Ende der Maßstäbe sind jeweils die Koordinatenachsen \$ct\$ und \$ct'\$ und dazu parallele Linien durch 1 bzw. \$1'\$. Bei einer vergleichenden Messung in \$S\$ wird bei \$t = 0\$ und bei einer in \$S'\$ bei \$t' = 0\$ gemessen. Die Enden der Maßstäbe werden also in diesen beiden Fällen bei unterschiedlichen Raumzeitpunkten betrachtet (Abb. 9.14). In beiden Fällen ergibt sich, dass bezüglich des jeweils ruhenden Maßstabes der bewegte Maßstab verkürzt ist.

## Zeitdilatation

Betrachten wir nun Zeitmessungen mit zueinander bewegten Uhren. In jedem Inertialsystem sollen über den Raum verteilt Uhren vorliegen, die in diesem System ruhen und bezüglich dieses Systems synchronisiert sind.

Ruht eine Uhr in \$S'\$ und bewegt sich daher gegenüber \$S\$, so muss ihre Zeitangabe \$\Delta T\_0 = \Delta t\$ entlang ihrer Flugbahn (gegeben durch \$\Delta x' = 0\$) mit den Uhren von \$S\$ verglichen werden. Die rechte Relation in (9.38) ergibt damit

$$\Delta T = \Delta t \Big|_{\Delta x'=0} = \gamma \Delta T_0 > \Delta T_0. \quad (9.42)$$

Die bewegte Uhr geht also langsamer als die Uhren von \$S\$.

### Frage 7

Rechnen Sie nach, dass dieselbe Schlussfolgerung für in \$S\$ ruhende Uhren gilt, wenn sie mit denen von \$S'\$ verglichen werden!

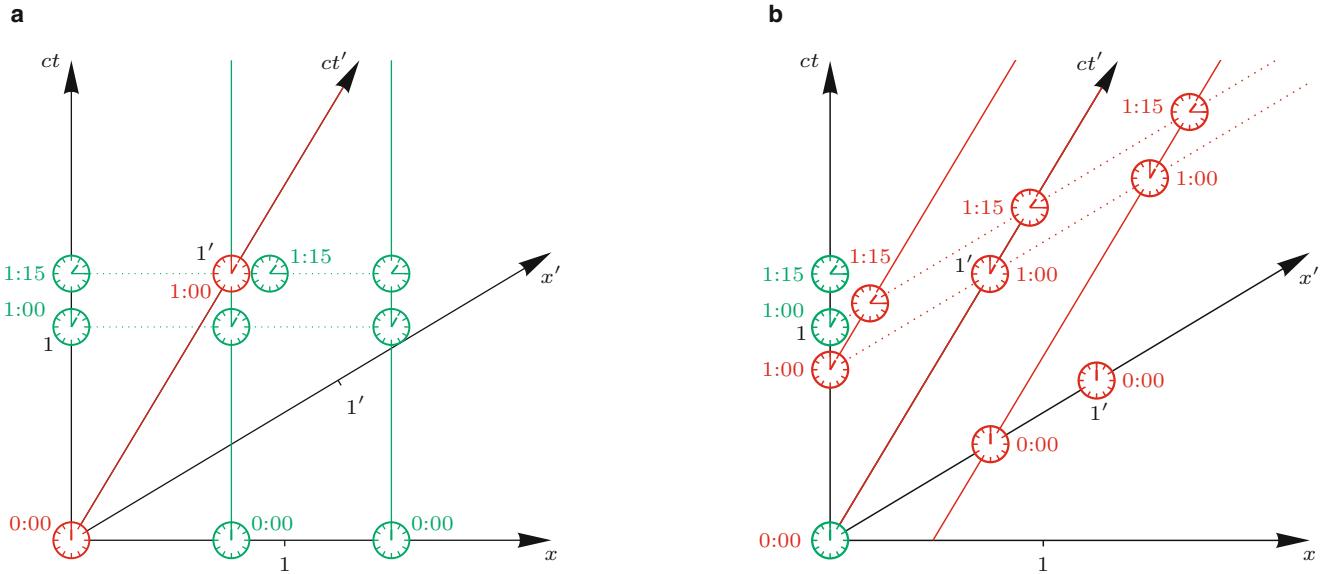


Abb. 9.15 Zeitdilatation. a Eine in  $S'$  ruhende Uhr (rot) wird mit den Uhren (grün) von  $S$  verglichen. b Die umgekehrte Situation

Wieder lässt sich am besten anhand eines Minkowski-Diagramms zeigen, dass hier kein Widerspruch vorliegt, weil unterschiedliche Raumzeitpunkte im Spiel sind (Abb. 9.15).

### „Lebensdauerverlängerung“ für Elementarteilchen

Eine eindrucksvolle Bestätigung der relativistischen Zeitdilatation wird durch die kosmische Strahlung geliefert und die von ihr in den oberen Schichten der Atmosphäre erzeugten kurzlebigen *Myonen*. Diese 1936 entdeckten Elementarteilchen haben in ihrem Ruhesystem eine Lebensdauer von ungefähr  $\tau \approx 2,2 \mu\text{s}$ , mit der sie nach dem exponentiellen Gesetz  $e^{-t/\tau}$  zerfallen. Sie werden typischerweise in etwa 10 km Höhe in Kernreaktionen als Zerfallsprodukte der noch kurzlebigeren *Pionen* erzeugt und haben Geschwindigkeiten von über  $0,99c$ .

Ihre charakteristische Reichweite wäre ohne Berücksichtigung der Zeitdilatation etwa  $2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 660 \text{ m}$ , und somit sollte auf der Erdoberfläche ihr Fluss um einen Faktor  $e^{-10.000/660} \approx 3 \cdot 10^{-7}$  reduziert sein. Tatsächlich erreicht etwa ein Drittel der Myonen die Erdoberfläche, weil sie bei  $\beta$  über 0,99 um einen Faktor  $\gamma$  von 7 und mehr langlebiger werden. Schon bei  $\gamma = 7$  ergibt sich eine Reduktion um nur mehr  $e^{-(10.000/660)/7} \approx 0,1$ . Die Zeitdilatation ist hier also alles andere als ein kleiner Effekt; der Myonenfluss auf der Erdoberfläche wird durch sie um das Millionenfache angehoben!

Die Verlängerung der Lebensdauer instabiler Elementarteilchen mit relativistischen Geschwindigkeiten wird auch routinemäßig in Teilchenphysikexperimenten beobachtet und muss bei deren Analyse berücksichtigt werden.

Sie hilft auch oft, Zerfallsketten von Elementarteilchen besser auflösen zu können, weil sie durch die Zeitdilatation gedehnt und damit vergrößert werden.

### Kausalität

Wie wir gesehen haben, ist Gleichzeitigkeit in der speziellen Relativitätstheorie eine Eigenschaft eines Paares von Ereignissen, die vom Bezugssystem abhängt. Jedes Inertialsystem kann ohne Bezug auf andere Systeme seine Uhren an unterschiedlichen Orten  $x_A$  und  $x_B$  sinnvoll synchronisieren, indem verlangt wird, dass zur gleichen Koordinatenzeit ausgesandte Lichtsignale gleichzeitig bei einem Beobachter in der Mitte zwischen den beiden Orten bei  $(x_A + x_B)/2$  eintreffen. Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit synchronisiert aber jedes Inertialsystem seine Uhren damit anders. Auf diese Weise lässt sich zu einem Paar von gleichzeitigen Ereignissen in einem System immer eines finden, in dem Ereignis A früher als B stattfindet, und auch eines, in dem dies genau umgekehrt der Fall ist.

Über eines können sich aber alle Beobachter einig sein: Wenn es ein System gibt, in dem A und B gleichzeitig sind, so ist die Größe

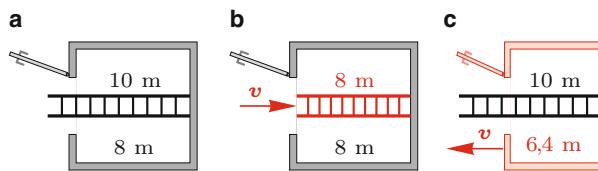
$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (9.43)$$

mit  $\Delta x^\mu = x_B^\mu - x_A^\mu$  immer negativ. Diese Größe bleibt ja unter Lorentz-Transformationen unverändert, und laut Voraussetzung verschwindet  $\Delta t = t_B - t_A$  in einem Inertialsystem.

Gibt es umgekehrt ein Inertialsystem, in dem A und B am selben Ort stattfinden, aber  $t_B > t_A$  ist, dann sind sich alle Beobachter

## Beispiel: Paradoxon von der bewegten Leiter und dem zu kleinen Abstellraum Starre Körper in der speziellen Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie ist voll von scheinbaren Widersprüchen, deren Auflösung aber wertvolle Einsichten liefern kann. Ein populäres Paradoxon zur Längenkontraktion, das in verschiedenen Varianten formuliert werden kann, lautet wie folgt: Ein Malermeister hat eine 10 m lange Leiter, aber sein Abstellraum misst nur 8 m. Er verlangt daher von seinem Gesellen, mit geschulterter Leiter und einer Geschwindigkeit  $\frac{3}{5}c$  in den Abstellraum zu rennen. Die Leiter ist dank Lorentz-Kontraktion mit  $\gamma = \frac{5}{4}$  auf  $10/\gamma = 8$  m verkürzt. Der Malermeister will in dem Augenblick die Tür schließen, in dem die Leiter gerade in den Abstellraum passt. Aus der Sicht des Gesellen sieht die Sache aber bedenklich anders aus. Für ihn ist nun der Abstellraum auf  $8/\gamma = 6,4$  m geschrumpft, während er in seinem Bezugssystem eine 10 m lange Leiter transportiert (Abb. 9.16). Kann der Malermeister wirklich die Tür hinter ihm schließen?



**Abb. 9.16** a Eine 10 m lange Leiter und ein Abstellraum mit einer Länge von 8 m. b Die mit  $\gamma^{-1} = \frac{4}{5}$  Lorentz-kontrahierte Leiter scheint im Bezugssystem des Abstellraumes in diesen zu passen. c Im Bezugssystem der Leiter ist ein mit  $\gamma^{-1} = \frac{4}{5}$  Lorentz-kontrahierter Abstellraum erst recht zu klein

Vom Standpunkt des Malermeisters und dem Ruhesystem des Abstellraumes ist tatsächlich klar, dass die Leiter hineinpasst. Gleichzeitiges Messen des vorderen und hinteren Endes ergibt eine Lorentz-kontrahierte Länge. Die Frage ist vielmehr, was passiert, nachdem er die Tür geschlossen hat. Das vordere Ende der Leiter stößt hier an die Wand des Abstellraumes und kommt abrupt zum Stillstand. Das hintere Ende läuft aber unvermindert weiter, während der Meister

darüber einig, dass  $\Delta s^2 > 0$  ist, und das bedeutet weiter, dass auch für alle anderen Beobachter Ereignis B in der Zukunft von A liegt.

Wir können demnach Vergangenheit und Zukunft eines Ereignisses A dadurch charakterisieren, dass  $\Delta s^2 > 0$  ist, und  $\Delta t < 0$  bzw.  $\Delta t > 0$ . Man nennt dann die Ereignisse *zeitartig* getrennt. Ist  $\Delta s^2 < 0$ , spricht man von *raumartiger* Trennung. In diesem Fall gibt es immer ein Inertialsystem, in dem das Ereignispaar gleichzeitig ist. Für den Beobachter am Referenzereignis A definiert dies gleichsam eine ausgedehnte *Gegenwart* (oder auch

die Tür hinter dem Gesellen schließt, denn die physikalische Auswirkung davon, dass das vordere Ende gestoppt wurde, kann sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, in Form einer Stoßwelle. Erst später kommt die Stoßwelle am hinteren Ende an, die dabei womöglich die Leiter komplett zerstört hat. Wenn sie elastisch genug ist, kann die Leiter auch einfach Richtung Tür expandieren und dann vielleicht diese zerstören.

Jedenfalls passiert all das erst eine Weile, nachdem die Tür geschlossen wurde und das hintere Ende sogar ein Stück weit in den Abstellraum vorgedrungen ist. Seine Bahnkurve ist bis zum Eintreffen der Stoßwelle gegeben durch

$$x_E = \frac{3}{5}ct,$$

wenn im Bezugssystem des Abstellraumes die Tür bei  $x = 0$  angenommen ist und  $t = 0$  als der Zeitpunkt, zu dem die Tür geschlossen werden konnte. Die Stoßwelle läuft ab  $t = 0$  von  $x = 8\text{ m}$  zu kleineren Werten von  $x$ . Mit Lichtgeschwindigkeit gibt das

$$x_S = 8\text{ m} - ct.$$

Die Stoßwelle trifft auf das hintere Ende bei  $x_E = x_S$ , woraus  $ct = 5\text{ m}$  und  $x_E = 3\text{ m}$  folgt. Das heißt, dass der Malermeister auch noch die Tür schließen hätte können, wenn der Abstellraum bloß 5 m groß gewesen wäre!

### Frage 8

Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm, das die Geschehnisse wiedergibt! (Die Werte von  $\beta$  und  $\gamma$  sind hier genauso gewählt wie in Abb. 9.12.)

Was dieses Paradoxon und seine Auflösung lehrt, ist, dass es in der speziellen Relativitätstheorie *keine starren Körper* geben kann. Wird ein Körper an einem Ende beschleunigt, dann folgt der Rest nie instantan.

*absolutes Anderswo*, da es im umgekehrten Fall einer zeitartigen Trennung immer ein System gibt, in dem die zwei Ereignisse am gleichen Ort stattfinden).

$\Delta s^2 = 0$  charakterisiert Ereignisse, die mit A durch Austausch von Signalen mit Lichtgeschwindigkeit verbunden werden können, und definiert damit den *Lichtkegel* über A. Diese Ereignisse sind dann *lichtartig* zueinander. Je nach Vorzeichen von  $\Delta t$  liegt B auf dem *Vorwärts-* oder *Rückwärtslichtkegel*. In Abb. 9.19 ist dies für den Fall dargestellt, dass Ereignis A mit dem Koordinatensprung zusammenfällt.

## Vertiefung: (Un-)Sichtbarkeit der Lorentz-Kontraktion

### Wie wirklich ist die Lorentz-Kontraktion?

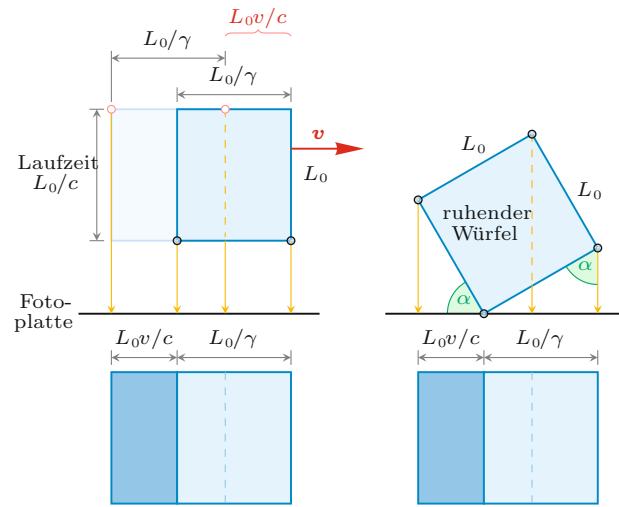
Lorentz-Kontraktion wie auch Zeitdilatation sind Aussagen darüber, was ein relativ zu einem Objekt bewegter Beobachter misst. Da Geschwindigkeiten keine absolute Bedeutung haben, passiert einem Lorentz-kontrahierten Objekt selbst natürlich nichts; in seinem Ruhesystem ist es immer gleich lang. Dennoch ist die Lorentz-Kontraktion ein objektives Phänomen, das durch die Messprozedur eindeutig feststeht: Wird in einem Inertialsystem ein dazu bewegtes Objekt zu einem in diesem System wohldefinierten Zeitpunkt vermessen, stellt es sich als in Bewegungsrichtung verkürzt heraus.

Wird aber ein bewegtes Objekt von einem einzelnen Beobachter, der ja nicht gleichzeitig an mehreren Orten sein kann, angesehen, dann sind dafür auch noch die Laufzeiten des Lichtes in Rechnung zu stellen, die bei einem ausgedehnten Objekt bei Bewegungen nahe der Lichtgeschwindigkeit nicht vernachlässigbar sind. Dies kann sogar, wie wir sehen werden, dazu führen, dass die Lorentz-Kontraktion gar nicht als solche *sichtbar* wird. Eigenartigerweise dauerte es bis 1959, bis dies durch voneinander unabhängige Arbeiten der Physiker *Roger Penrose* (\*1931) und *James Terrell* systematisch untersucht wurde (Penrose 1959; Terrell 1959). (In einer weitgehend unbekannt gebliebenen Publikation hatte allerdings der österreichische Physiker *Anton Lampa* (1868–1938) die optische Manifestation der Lorentz-Kontraktion schon 1924 richtig behandelt; Lampa 1924.)

Eine besonders einfache, wenn auch nicht ganz realistische optische Beobachtungsform ist die einer fotografischen Aufnahme mittels einer Parallelstrahlenprojektion. Werden bei einem Schnappschuss zu einem Zeitpunkt nur die exakt parallel auf eine Fotoplatte eintreffenden Strahlen registriert, so entsteht ein lebensgroßes Abbild.

Betrachten wir als Beispiel einen Würfel mit Kantenlänge  $L_0$ , der sich mit Geschwindigkeit  $v$  parallel zu einer solchen Fotoplatte nach rechts bewegt (Abb. 9.17), so werden wegen der endlichen Laufzeit des Lichtes die hinteren und die vorderen Kanten bei unterschiedlichen Zeiten aufgenommen. Das Bild der hinteren, weiter entfernten Kanten kommt von einer Position des Würfels, die er um  $L_0/c$  früher hatte als die, bei der die der Fotoplatte nähere Seite registriert wird. Die linke hintere Kante wird dadurch auch nicht länger von der vorderen verdeckt und erscheint auf dem Foto um  $L_0 v/c$  nach links verschoben. Ist der Würfel durchscheinend, wird auch die rechte hintere Kante abgebildet und ist gegenüber der vorderen rechten Kante in gleicher Weise verschoben.

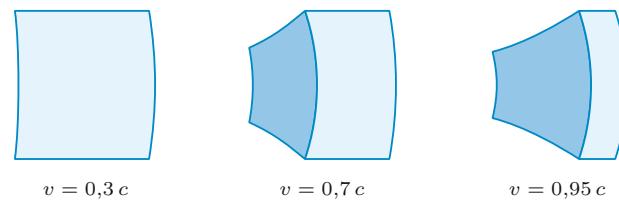
Gerade weil der Würfel in der Bewegungsrichtung auf  $L_0/\gamma$  Lorentz-kontrahiert ist, entsteht ein Abbild, das von einem gedrehten unverkürzten Würfel nicht unterschieden werden kann: Die beiden Faktoren  $v/c$  und  $1/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$  verhalten sich wie Sinus und Kosinus zueinander – setzen wir  $v/c = \cos \alpha$ , dann ist  $1/\gamma = \sin \alpha$ .



**Abb. 9.17** Parallelstrahlenprojektion eines bewegten Würfels ( $v = \frac{1}{2}c$ ) im Vergleich zu einem ruhenden, aber gedrehten Würfel. Im linken Teilbild, in dem ein bewegter Würfel fotografiert wird, sind die Abbilder der weiteren Würfekanten um das Produkt von Lichtlaufzeit  $L_0/c$  und Geschwindigkeit  $v$  so verschoben, dass auf der Fotoplatte exakt dasselbe Bild wie bei einem ruhenden Würfel entsteht, der um den Winkel  $\alpha = \arccos(v/c)$  gedreht wurde (rechtes Teilbild)

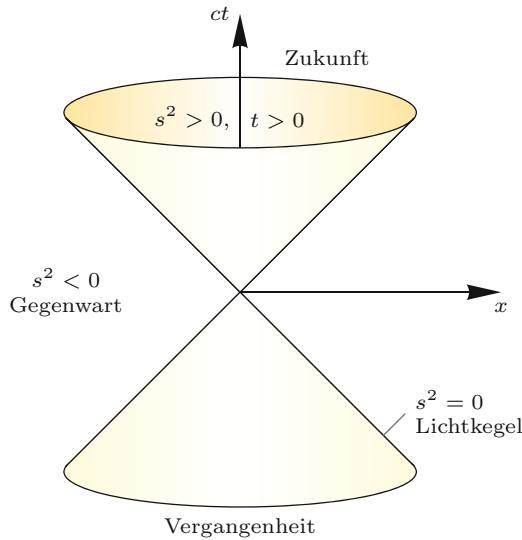
Die Kombination von Lorentz-Kontraktion und Lichtlaufzeiten erscheint ganz allgemein bei Parallelstrahlenprojektion als reine Drehung, die *Penrose-Terrell-Drehung* genannt wird.

Bei realistischeren Beobachtungen mittels Zentralprojektion treten aber bei geringen Entfernungen zum Objekt perspektivische Verzerrungen auf, die in Abb. 9.18 für unterschiedliche Geschwindigkeiten dargestellt sind. In diesen Fällen nähert sich der visuelle Eindruck doch wieder dem eines in Längsrichtung verkürzten Würfels.



**Abb. 9.18** Relativistisch bewegter Würfel aus geringer Entfernung (Zentralprojektion)

Eine Zusammenstellung einer Vielzahl an Animationen, die das Erscheinungsbild relativistisch bewegter Körper bis hin zu einer relativistischen Fahrt durch die Innenstadt von Tübingen zeigt, findet sich in Kraus & Borchers (2005).



**Abb. 9.19** Lichtkegel, Vergangenheit und Zukunft bezüglich des Koordinatenursprungs

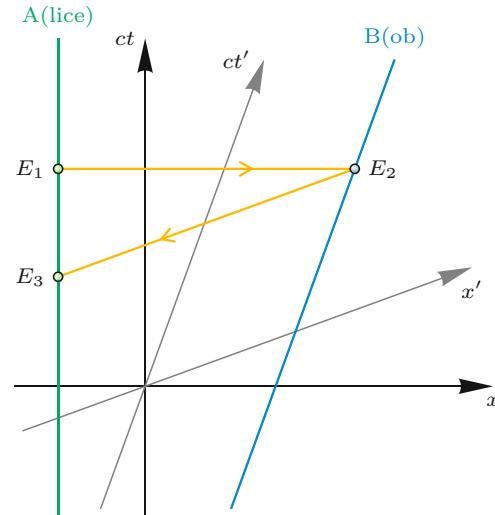
## Kapitel 9

### Überlichtgeschwindigkeit verletzt Kausalität!

Anhand von Minkowski-Diagrammen kann man sich sofort davon überzeugen, dass man seine eigene Vergangenheit beeinflussen könnte, wenn es möglich wäre, physikalische Wirkungen mit Überlichtgeschwindigkeit auszuüben. (Hypothetische Teilchen, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, werden oft als *Tachyonen* bezeichnet.)

Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass es möglich wäre, in einem Inertialsystem tachyonische Signale mit so großer Überlichtgeschwindigkeit auszusenden, dass sie im Minkowski-Diagramm als Linien erscheinen, die annähernd parallel zur zugehörigen  $x$ -Achse sind.

Eine in System  $S$  ruhende Physikerin A(lice) braucht für die Kausalitätsverletzung nur einen Partner B(ob) in einem sich mit großer Geschwindigkeit weg bewegenden System  $S'$ , dem sie zum Zeitpunkt von Ereignis  $E_1$  ein solches Signal übermittelt. Wenn der Partner B zum Ereignis  $E_2$  daraufhin ein ebensolches Signal, das sich nun bezüglich  $S'$  praktisch instantan ausbreitet, zurücksendet, kommt es bei Alice zu einem früheren Zeitpunkt an (Ereignis  $E_3$ ), als sie das Signal absetzte (Abb. 9.20). ▲



**Abb. 9.20** Könnten Signale mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen werden (hier der Einfachheit mit unendlicher Geschwindigkeit dargestellt), dann wäre eine Signalübertragung in die Vergangenheit möglich

### Lorentz-invariante Wegelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds'^2 \quad (9.44)$$

immer eine positive Größe ist. Betrachten wir ein Inertialsystem  $S'$ , das zu einem gegebenen Zeitpunkt relativ zu  $S$  dieselbe Geschwindigkeit wie das Teilchen hat, sodass das Teilchen in diesem System gerade ruht, so gilt  $ds^2 = c^2 dt'^2$ , und das infinitesimale Zeitintervall  $dt'$  stimmt mit dem infinitesimalen Zeitintervall  $d\tau$  der mitgeführten „inneren“ Uhr des Teilchens überein. Dies definiert die *Eigenzeit* eines Punktteilchens, die bei allgemeiner, nicht gleichförmiger Bewegung mit keiner Koordinatenzeit eines Inertialsystems übereinstimmen wird. Weil  $ds^2$  aber in jedem Inertialsystem gleich ist, können wir das Eigenzeitintervall in den Koordinaten eines Inertialsystems als

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= ds^2/c^2 = dt^2 \left( 1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right) \\ &= dt^2 \left( 1 - \frac{v^2(t)}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (9.45)$$

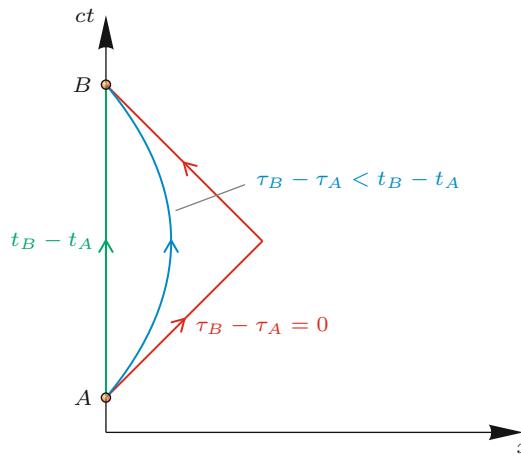
angeben. Dies ist gerade die schon diskutierte Zeitdilatation, nur jetzt für infinitesimale Zeitintervalle und mit einer Geschwindigkeit, die nicht notwendigerweise konstant sein muss. Damit können wir nun endliche Eigenzeitintervalle entlang einer beliebigen Weltlinie berechnen.

### Minkowski-Wegelement und Eigenzeit

Weltlinien von Punktmassen verlaufen von jedem Inertialsystem aus betrachtet mit Geschwindigkeiten  $|dx/dt| < c$ , sodass das

### Eigenzeit für ein beliebig bewegtes Punktteilchen

Sind  $A$  und  $B$  Ereignisse auf einer Weltlinie, die in einem Inertialsystem durch eine Bahnkurve  $\mathbf{x}(t)$  mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$  gegeben ist, dann ist die Eigenzeit



**Abb. 9.21** Die Weltlinie, die zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  durch eine Gerade verbindet (gleichförmige Bewegung), hat die maximale Zeitdifferenz. Jede andere Weltlinie hat eine kleinere Eigenzeit; bei einer Verbindung mit gestückelten lichtartigen Linien wird die Eigenzeit sogar null

zwischen  $A$  und  $B$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_B - \tau_A &= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{\gamma(v(t))} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \leq t_B - t_A. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Betrachten wir eine Weltlinie, die  $A$  und  $B$  durch eine gleichförmige Bewegung verbindet, dann definiert dies ein Inertialsystem. In diesem ist  $v = 0$  und das Eigenzeitintervall durch die Koordinatenzeitdifferenz gegeben. Jede andere Weltlinie, die von  $A$  nach  $B$  führt, hat also eine kleinere Eigenzeit (Abb. 9.21). Die zeitlich längste Verbindung zwischen zwei Ereignissen ist also die gerade Weltlinie im Minkowski-Raum! Die anfallende Eigenzeit wird dagegen beliebig klein, wenn Umwege mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit gemacht werden.

Dies führt auf das viel zitierte sogenannte *Zwillingssparadoxon* der speziellen Relativitätstheorie: Unten nimmt von einem Zwillingspaar einer eine Reise durch den Weltraum mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit, so kann er bei seiner Rückkehr den auf der Erde zurückgebliebenen Zwilling um ein Vielfaches gealtert vorfinden (oder schon längst nicht mehr am Leben). Ein Experiment dazu wurde tatsächlich mit Atomuhren von J. Hafele und R. Keating im Jahr 1971 mit einem gewöhnlichen Verkehrsflugzeug durchgeführt und 1975 von Physikern der University of Maryland wiederholt. Der gemessene Gangunterschied der reisenden und der auf der Erde

belassenen Atomuhr entsprach mit Prozentgenauigkeit den Voraussagen der Relativitätstheorie. Allerdings steuert hier, weil sich die beiden Atomuhren in unterschiedlichen Gravitationspotenzialen befinden, die allgemeine Relativitätstheorie mit der *Gravitationsrotverschiebung* einen entgegengesetzten und zehnmal größeren Effekt bei. Die Zeitdilatation, die sich auf dem 15 Stunden währenden Flug auf 5,7 ns aufaddierte, konnte dabei aber dank der erzielten Genauigkeit exakt bestätigt werden.

### Relativistische Effekte bei GPS

Seit 1994 werden diese Phänomene durch die Flotte der GPS-Satelliten zur geodätischen Positionsbestimmung quasi in Permanenz bestätigt. Diese Satelliten fliegen in 20.200 km Höhe mit einer Geschwindigkeit von etwa 14.000 km/h, was  $\beta \sim 10^{-5}$  und  $\gamma - 1 \approx 8 \cdot 10^{-11}$  entspricht. Die resultierende Zeitdilatation ist dabei um fast das Tausendfache höher als bei den historischen Experimenten mit Flugzeugen und beträgt  $-7 \mu\text{s}$  pro Tag. Die Gravitationsrotverschiebung ist ebenfalls höher und trägt  $+45 \mu\text{s}$  pro Tag bei. Die gesamte Zeitverschiebung ist also  $+38 \mu\text{s}$  pro Tag oder  $+26 \text{ ns}$  pro Minute. Das GPS-System braucht eine Genauigkeit von etwa 30 ns für eine Ortsauflösung von 10 m. Würden die relativistischen Effekte nicht korrigiert (was durch eine leichte Verstimming der Frequenz der GPS-Atomuhren schon beim Start der Satelliten gemacht wird), ginge die Genauigkeit des GPS-Systems schon nach einer Minute verloren, und nach einem Tag wäre der Fehler bereits 12 km!

## 9.4 Viererformalismus

Wir werden nun den Formalismus, den wir in Kap. 2 für Drehungen im dreidimensionalen euklidischen Raum entwickelt haben, auf den nichteuklidischen Minkowski-Raum verallgemeinern. Wie wir gesehen haben, sind Lorentz-Transformationen pseudoorthogonale Transformationen der Inertialsysteme, von denen aus Ereignisse, d. h. die Raumzeitpunkte des Minkowski-Raumes, durch vierdimensionale Koordinaten parametrisiert werden.

Wenn wir für alle Inertialsysteme den Koordinatenursprung gleich wählen, können wir einem Ereignis einen physikalischen Viererortsvektor  $x$  zuordnen, der aber in verschiedenen Inertialsystemen durch verschiedene Koordinaten  $x^\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ , beschrieben wird, weil in den verschiedenen Inertialsystemen verschiedene Basisvektoren ausgezeichnet wurden:

$$x = x^\mu e_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu e_\mu. \quad (9.47)$$

In diesem Ausdruck haben wir die Einstein'sche Summenkonvention auf den vierdimensionalen Fall erweitert, wobei wir

## Vertiefung: Zwillingsparadoxon

### Worin besteht das Paradoxon?

Da die Zeitdilatation eine so vielfältig getestete Konsequenz der speziellen Relativitätstheorie darstellt, scheint es anachronistisch, beim Zwillingsparadoxon überhaupt noch von einem Paradoxon zu sprechen. Die Geometrie des Minkowski-Raumes und der daraus folgende Eigenzeit-Begriff ist nun einmal nichteuklidisch und gerade so, dass die scheinbar kürzeste Verbindung über eine Gerade im Minkowski-Raum die längste Eigenzeit darstellt.

Dass die spezielle Relativitätstheorie bei entsprechend hoher Geschwindigkeit Zeitreisen in die Zukunft erlaubt, stellt auch kein Paradoxon in Hinblick auf Kausalität dar, denn zurück geht es leider nicht.

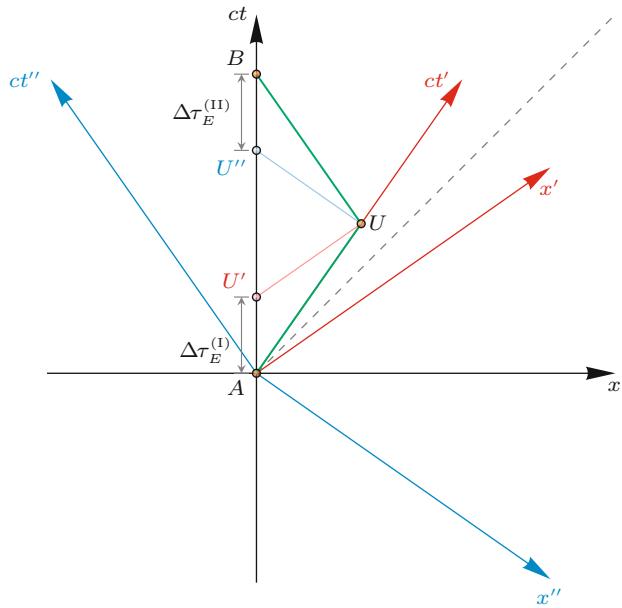
Dennoch ist es instruktiv, das Zwillingsparadoxon durch folgende Zuspitzung zu einem Paradoxon zu machen: Wie die Definition von Eigenzeitintervallen in (9.46) zeigt, spielen für die Reise in die Zukunft nicht die notwendigen Beschleunigungsphasen des „Raketenzwillings“ eine Rolle, sondern nur, dass er möglichst lange mit möglichst hoher Geschwindigkeit unterwegs ist. Er kann sich also nach kurzer Beschleunigungsphase lange Zeit von der Erde weg bewegen und danach nach ebenso kurzer entgegengesetzter Beschleunigungsphase wieder zur Erde zurück bewegen. Damit befindet er sich praktisch dauernd in einem Inertialsystem, und somit sollte der Raketenwilling eigentlich seinerseits dauernd eine langsamer vergehende Zeit beim auf der Erde zurückgebliebenen Zwilling feststellen können.

Während der Wegflugphase (I), die im wegfliegenden Inertialsystem  $S'$  die Zeit  $\Delta\tau_R/2$  dauert, vergeht im dazu relativ mit entgegengesetzter Geschwindigkeit bewegten Erdsystem  $S$  die Zeit  $\Delta\tau_E^{(I)} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\Delta\tau_R/2$ , für die Rückflugphase (II) gilt genau das Gleiche. Zusammenaddiert ist

$$\Delta\tau_E^{(I)} + \Delta\tau_E^{(II)} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\Delta\tau_R < \Delta\tau_R.$$

Wie passt das damit zusammen, dass der Raketenwilling den Erdwilling bei der Rückkehr dann doch schneller gealtert vorfindet?

Der Grund, warum es nicht erlaubt ist, Ergebnisse aus unterschiedlichen Inertialsystemen zu stückeln, liegt darin, dass sie unterschiedliche Gleichzeitsbegiffe haben. Das Umkehrereignis  $U$  des Raketenwillings ist zu unterschiedlichen Ereignissen im Erdsystem gleichzeitig, je nachdem ob es im weg fliegenden oder zurück fliegenden Inertialsystem betrachtet wird, wie sich am besten in einem Minkowski-Diagramm darstellen lässt:



Die Zeit des Erdzwillinges setzt sich demnach aus

$$\Delta\tau_E = \Delta\tau_E(A, U') + \Delta\tau_E(U', U) + \Delta\tau_E(U, B)$$

zusammen, wobei  $A$  und  $B$  die Ereignisse Abflug und Rückkehr bezeichnen.  $\Delta\tau_E(A, U')$  und  $\Delta\tau_E(U'', B)$  sind die oben mit  $\Delta\tau_E^{(I)}$  bzw.  $\Delta\tau_E^{(II)}$  bezeichneten Zeitintervalle.  $\Delta\tau_E(U', U'')$  ist dafür verantwortlich, dass in Summe  $\Delta\tau_E$  doch die größere Zeit ist,  $\Delta\tau_E = \Delta\tau_R / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Die obigen Betrachtungen gehen von der Gleichzeitigkeit definiert durch bezugssystemabhängig synchronisierte Uhren aus, während für Beobachtungen mit Licht oder Fernsehübertragung noch die Laufzeit eines Signals in Rechnung zu stellen ist. Im Minkowski-Diagramm kann man die daraus resultierende scheinbare Gleichzeitigkeit aber bequem ablesen, da lichtschnelle Signale durch 45°-Linien dargestellt werden (während Gleichzeitigkeit bezüglich eines Inertialsystems durch Parallelität zu den räumlichen Richtungen definiert ist). Damit lässt sich aus obigem Diagramm ablesen, dass der Raketenwilling bis zum Umkehrpunkt alle Ereignisse auf der Erde in einer Zeitslupe wahrnimmt, die noch stärker ist, als es durch die Zeitdilatation definiert wäre, denn es kommt noch die immer länger werdende Lichtlaufzeit dazu. Das Ereignis, das er am Umkehrpunkt auf der Erde mitverfolgen kann, liegt noch vor  $U'$ . Während der Rückflugphase sieht der Raketenwilling dagegen alles in einem entsprechend gesteigerten Zeitraffer ablaufen.

zusätzlich vereinbaren, dass beim Indexpaar immer ein Index unten und einer oben zu stehen hat.

Dementsprechend schreiben wir Lorentz-Transformationen als

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (9.48)$$

wobei der untere Index bei  $\Lambda^\mu{}_\nu$  nach rechts gerückt ist, damit klar ist, welcher der erste und welcher der zweite Index der Matrix ist. Da nur die Koordinaten andere sind, der physikalische Vektor aber eine invariante Bedeutung hat,

$$\mathfrak{x} = x^\mu e_\mu = x'^\mu e'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu e'_\mu, \quad (9.49)$$

folgt für die Basisvektoren

$$e_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu e'_\mu. \quad (9.50)$$

Lassen wir zusätzlich Verschiebungen des Koordinatenursprungs zu, so haben wir es mit den allgemeineren Poincaré-Transformationen zu tun:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu (x^\nu - b^\nu), \quad (9.51)$$

wobei  $b^\nu$  die Verschiebung des Zeitnullpunktes und die Verschiebung des räumlichen Koordinatenursprungs zusammenfasst. In diesem Fall transformieren aber Koordinatendifferenzen und Koordinatendifferenziale weiterhin homogen:

$$\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu, \quad dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu. \quad (9.52)$$

Dieses Transformationsverhalten stellt den Prototyp für *Vierervektoren* dar.

### Transformationsverhalten eines Vierervektors

$\alpha = a^\mu e_\mu$  ist ein Vierervektor mit *kontravarianten Komponenten*  $a^\mu$ , wenn letztere bei einer Poincaré-Transformation (9.51) gemäß

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \quad (9.53)$$

transformieren.

Die Bezeichnung „kontravariant“ erinnert daran, dass diese Komponenten entgegengesetzt zu den Basisvektoren transformieren.

## Minkowski-Metrik

Die Lorentz- bzw. Poincaré-Transformationen sind dadurch charakterisiert, dass sie das Wegelement  $ds^2$  in (9.44) invariant lassen. Dies definiert eine metrische Fundamentalform des Minkowski-Raumes,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (9.54)$$

die *Minkowski-Metrik* genannt wird:

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.55)$$

**Achtung** Die Minkowski-Metrik wird in der Literatur etwa gleich häufig auch als Diagonalmatrix mit Einträgen  $-$ ,  $+$ ,  $+$ ,  $+$  definiert. In der Teilchenphysik wird meist (aber nicht immer) die Metriksignatur (9.55) bevorzugt, in der allgemeinen Relativitätstheorie meist (aber auch nicht immer) die Signatur mit überwiegend positiven Vorzeichen. ◀

Die Invarianz von

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma \quad (9.56)$$

charakterisiert damit Lorentz-Transformationen durch die Relation

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (9.57)$$

### Frage 9

Vollziehen Sie dies nach.

Der Minkowski-Raum ist damit ein metrischer Raum (siehe den „Mathematischen Hintergrund“ 1.2), allerdings mit der Verallgemeinerung, dass die metrische Fundamentalform nicht positiv definit ist. Der mit dieser Metrik definierte „Abstand“ kann null sein, auch wenn die Raumzeitpunkte getrennt sind, nämlich wenn diese durch Lichtstrahlen miteinander verbunden werden können.

Durch diese Metrik haben wir eine (nicht positiv definite) Norm für Vierervektoren eingeführt, speziell für Ortsdifferenzvektoren,

$$\Delta s^2 = \langle \Delta \mathfrak{x}, \Delta \mathfrak{x} \rangle = \Delta x^\mu \underbrace{\Delta x^\nu}_{\eta_{\mu\nu}} \langle e_\mu, e_\nu \rangle, \quad (9.58)$$

und damit auch schon ein Lorentz-invariantes Skalarprodukt für beliebige Vierervektoren  $\alpha$ ,  $b$ :

$$\langle \alpha, b \rangle = a^\mu b^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (9.59)$$

Unabhängig von der Existenz einer invarianten Metrik, mit der wir dieses Skalarprodukt definieren könnten, existiert zu jedem Vektorraum ein *dualer Vektorraum*. Es ist dies einfach der Raum der linearen Abbildungen des Vektorraumes in den zugrunde gelegten Zahlenkörpern, hier die reellen Zahlen (siehe den „Mathematischen Hintergrund“ 9.1). Eine Basis für den dualen Vektorraum können wir durch

$$e^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu \quad (9.60)$$

## 9.1 Mathematischer Hintergrund: Dualraum

Bei der Betrachtung von Vektorräumen sind immer wieder Abbildungen wichtig, die linear sind. Eine besondere Rolle spielen solche lineare Abbildungen, die in den Grundkörper abbilden. Damit wollen wir uns hier kurz beschäftigen.

**Definition** Sei  $K$  ein Körper (z. B.  $K = \mathbb{R}$ ) und  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum (z. B.  $V = \mathbb{R}^n$ ). Dann nennen wir eine lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow K$  eine *Linearform*. Die Menge aller Linearformen bezeichnen wir mit  $V^*$ .

Eine Linearform ist also eine Abbildung der Form

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

für gewisse Konstanten  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ . Der Dualraum  $(K^n)^*$  kann also mit dem Raum aller  $(1 \times n)$ -Matrizen, d. h. Zeilenvektoren der Länge  $n$ , identifiziert werden. Die zu  $a := (a_1, \dots, a_n)$  gehörige Linearform  $\varphi_a$  ist

$$\varphi_a(x) = ax = \sum_{k=1}^n a_k x_k \quad \forall x \in V.$$

Zum Beispiel ist  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x, y, z) := 3x + y + 4z$  eine Linearform, der dazugehörige Zeilenvektor ist  $(3, 1, 4)$ . Der Dualraum  $(\mathbb{R}^3)^*$  besteht nun aus der Menge aller solcher Linearformen  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Dualraum als Vektorraum** Sind  $\varphi, \psi$  zwei Linearformen und  $\alpha \in K$ , so kann man die Summe  $\varphi + \psi$  sowie das skalare Produkt  $\alpha\varphi$  durch

$$(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x), \quad (\alpha\varphi)(x) = \alpha\varphi(x) \quad \forall x \in V$$

definieren. Mit diesen Verknüpfungen wird der Dualraum  $V^*$  selbst zu einem Vektorraum. Dieser Vektorraum hat wieder dieselbe Dimension wie  $V$  und ist deswegen isomorph zu  $V$ .

**Duale Basis** Wir hatten weiter oben bereits Linearformen mit Vektoren identifiziert. Dies wollen wir nun kurz präzisieren.

Da der Dualraum ein Vektorraum ist, können wir dort natürlich eine Basis finden. Hierfür gibt es eine besonders günstige Wahl. Ist im Vektorraum  $V$  eine Basis  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  gewählt, so definieren wir  $v_i^* \in V^*$  durch

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Dann ist  $(v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$  eine Basis von  $V^*$ . Wir nennen diese die *duale Basis*.

Damit wird nun auch die Identifikation von Linearformen als Vektoren klar: Bezuglich der dualen Basis sind die Vektorkomponenten  $\varphi_i$  der Linearform  $\varphi$  gerade die Werte  $\varphi(v_i)$ . Schreibt man nämlich  $\varphi$  in der dualen Basis als  $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i v_i^*$ , so ist

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^n \varphi_i v_i^*(v_j) = \varphi_j.$$

Betrachten wir den Vektorraum  $K^n$  zusammen mit der Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$ , so ist die duale Basis gegeben durch  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ , wobei

$$e_i^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

und die 1 jeweils an der  $i$ -ten Stelle steht.

**Dualität bei Skalarprodukträumen** Gibt es auf dem Vektorraum  $V$  ein Skalarprodukt, so ist für jedes feste  $w \in V$  die Abbildung

$$v \mapsto \langle w, v \rangle$$

linear, also ein Element des Dualraumes  $V^*$ . Ist nun umgekehrt  $\varphi$  eine Linearform, so gibt es immer einen Vektor  $w \in V$  (dessen Komponenten von den Komponenten der Linearform  $\varphi$  abhängen), sodass  $\varphi(v) = \langle w, v \rangle$  für alle  $v \in V$  gilt. Mit anderen Worten: Jede Linearform lässt sich durch ein Skalarprodukt darstellen.

In diesem Fall lässt sich eine Isomorphie zwischen Vektorraum und Dualraum sehr einfach darstellen, nämlich durch  $f : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$ .

**Der Dualraum im Unendlichdimensionalen** In den späteren Kapiteln werden unendlichdimensionale Vektorräume (z. B. Funktionenräume) öfters eine wichtige Rolle spielen, insbesondere in Bd. 3.

Ist  $V$  ein unendlichdimensionaler Vektorraum, so verlangt man für Elemente des Dualraumes zusätzlich die Stetigkeit und schreibt dann für den Dualraum  $V'$ . Zum Beispiel ist in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  (definiert in Bd. 3, Abschn. 3.1) für jedes feste  $y \in \mathcal{H}$  die Abbildung

$$x \mapsto \langle x, y \rangle$$

eine stetige lineare Abbildung, also ein Element von  $\mathcal{H}'$ . Für allgemeine unendlich dimensionale Vektorräume ist der Dualraum  $V'$  nun nicht mehr unbedingt isomorph zum zugrunde liegenden Vektorraum  $V$ . Für Hilbert-Räume gilt die Isomorphie jedoch. Genauer sagt der Darstellungssatz von Fréchet-Riesz, dass es zu jedem Element  $f \in \mathcal{H}'$  (also zu jeder stetigen, linearen Abbildung  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ) genau ein  $y \in \mathcal{H}$  gibt, sodass für alle  $x \in \mathcal{H}$  gilt:

$$f(x) = \langle x, y \rangle.$$

### Literatur

- Arens et. al.: Mathematik. 2. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag (2012)
- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., SpringerSpektrum (2014)

definieren, wobei die  $e^\mu$  mit oberem Index diese duale Basis darstellen und  $\delta_v^\mu$  das vierdimensionale Kronecker-Symbol ist:

$$\delta_v^\mu = \begin{cases} 1 & \mu = v \\ 0 & \mu \neq v \end{cases}. \quad (9.61)$$

Die Metrik erlaubt es nun aber, die dualen Basisvektoren mit den ursprünglichen in Beziehung zu setzen. Multiplizieren wir (9.60) mit  $\eta_{\lambda\mu}$ , so ergibt sich

$$\eta_{\lambda\mu} e^\mu (e_v) = \eta_{\lambda v}, \quad (9.62)$$

was dasselbe liefert wie das Skalarprodukt  $\langle e_\lambda, e_v \rangle$ . Wir können also

$$e_\lambda = \eta_{\lambda\mu} e^\mu \quad (9.63)$$

identifizieren.

Definieren wir die inverse Metrik  $\eta^{\mu\lambda}$  durch

$$\eta^{\mu\lambda} \eta_{\lambda v} = \delta_v^\mu, \quad (9.64)$$

können wir (9.63) auch nach den dualen Größen auflösen:

$$e^\mu = \eta^{\mu\lambda} e_\lambda. \quad (9.65)$$

Die inverse Metrik ist hier zwar numerisch mit (9.55) identisch,

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9.66)$$

ist aber konzeptionell von  $\eta_{\mu\nu}$  zu unterscheiden. Hätten wir nämlich krummlinige Koordinaten verwendet, was im räumlichen Teil nicht ungewöhnlich wäre, hätte die Metrik nicht zu sich selbst invers sein können.

Mit den dualen Basisvektoren (9.65) können wir nun allgemein Vierervektoren alternativ in duality Basis und damit mit *kovarianten Komponenten* schreiben:

$$a = a^\mu e_\mu = a_v e^v, \quad (9.67)$$

wobei die kovarianten Komponenten durch einen unteren Index notiert werden, der, wie man sagt, mit der Metrik nach unten gezogen wird:

$$a_v = \eta_{v\mu} a^\mu, \quad (9.68)$$

wodurch sich ein Unterschied im Vorzeichen in den räumlichen Komponenten ergibt:  $a_0 = a^0, a_1 = -a^1, a_2 = -a^2, a_3 = -a^3$ .

Die kovarianten Komponenten haben das entgegengesetzte Transformationsverhalten zu den kontravarianten, weil sie wie die Basisvektoren  $e_\mu$  in (9.50) transformieren. Dieses lässt sich mit Indexziehen auch in folgende Form bringen:

$$a'_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\lambda a^\lambda = \underbrace{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\lambda \eta^{\lambda\rho}}_{\Lambda_\mu^\rho} a_\rho. \quad (9.69)$$

Die hierbei entstandene Matrix  $\Lambda_\mu^\rho$  erfüllt

$$\Lambda_\mu^\rho \Lambda^\mu_\sigma = \delta_\sigma^\rho. \quad (9.70)$$

### Frage 10

Verifizieren Sie diese Aussage, indem Sie (9.57) auf beiden Seiten mit einer inversen Metrik multiplizieren.

Die zweifach unterschiedliche Indexposition hat zur Folge, dass es zu einem Vorzeichenwechsel kommt, wenn davon ein Index zeitlich und einer räumlich ist. Für die Lorentz-Transformation, die zu einer reinen Geschwindigkeitstransformation in  $x$ -Richtung gehört, bedeutet dies

$$(\Lambda^\mu_v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.71)$$

$$(\Lambda_\mu^v) = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie es sein muss, erhält man die inverse Matrix durch Änderung des Vorzeichens bei der Geschwindigkeit  $\beta$ . Bei einer reinen Drehung

$$(\Lambda^\mu_v(R)) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix}$$

ändert sich dagegen nichts; hier gibt ja auch schon die transponierte Matrix das Inverse (man beachte die Transposition, die in (9.70) im Spiel ist!).

Neben Vierervektoren können wir nun ganz analog auch *Vierertensoren* beliebiger Stufe definieren. Zum Beispiel transformieren die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe entsprechend der Indexposition:

$$t'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\tau t_{\sigma\tau}, \quad t'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau t^{\sigma\tau}, \quad (9.72)$$

wobei Indizes mit der Minkowski-Metrik von ko- zu kontravariant verändert werden können:  $t^{\sigma\tau} = \eta^{\sigma\mu} \eta^{\tau\nu} t_{\mu\nu}$ . Als Spezialfall haben wir bereits die Minkowski-Metrik kennengelernt, die sich dadurch auszeichnet, ein invariantes Tensor zu sein:

$$\eta'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\tau \eta_{\sigma\tau} = \eta_{\mu\nu}. \quad (9.73)$$

### Frage 11

Überzeugen Sie sich anhand der Definition der invarianten Metrik, dass auch die Indizes der Minkowski-Metrik durch die Metrik von ko- zu kontravariant umgewandelt werden können, wobei das Kronecker-Symbol  $\delta_v^\mu$  als gemischt ko- und kontravariante Darstellung der Minkowski-Metrik aufgefasst werden kann.

Werden dagegen Indizes „abgesättigt“, weil über sie unter Verwendung der Minkowski-Metrik summiert wird, reduziert sich die Stufe eines Tensors. So transformiert das Produkt  $a^\mu b^\nu$  von zwei Vierervektoren als Tensor zweiter Stufe, die Kontraktion

$$a \cdot b = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - a^i b^i \quad (9.74)$$

ist dagegen ein Lorentz-Skalar, d. h. eine Invariante unter Lorentz-Transformationen. Genauso gut lässt sich dies als  $a_\nu b^\nu = a_0 b^0 + a_i b^i$  oder  $a^\mu b_\mu = a^0 b_0 + a^i b_i$  anschreiben, wobei nicht vergessen werden darf, dass Heben oder Senken eines räumlichen Index einen Vorzeichenwechsel bedeutet.

**Achtung** Wenn hier wie in der einschlägigen Literatur verkürzend von ko- oder kontravarianten Vektoren oder Tensoren und deren Transformationsverhalten die Rede ist, sind eigentlich die *Komponenten* der Vektoren bzw. Tensoren gemeint. (Physikalische Vektoren wie in (9.47) sowie physikalische Tensoren haben eine von Koordinatensystemen unabhängige Bedeutung.)

## Vierergeschwindigkeit und -beschleunigung

Das einzige konkrete Beispiel für einen Vierervektor in der obigen Darlegung war der Viererortsvektor bzw. Differenzen davon und die infinitesimalen Differenziale  $dx^\mu$ . (Ein weiteres wichtiges Beispiel wird in Aufgabe 9.8 vorgestellt: der Vierergradient, der ab Bd. 2, Kap. 8 sehr wichtig werden wird.)

Ist eine Weltlinie eines Punktteilchens gegeben, können wir weitere Vierervektoren betrachten. Eine solche Weltlinie ist gegeben durch eine Linie  $x^\mu = x^\mu(t)$ , wobei  $t$  ein geeigneter Kurvenparameter ist. Weil eine physikalisch realisierbare Weltlinie aber überall zeitartig ist, d. h.  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0$ , ist in jedem Inertialsystem die jeweilige Koordinatenzeit ein geeigneter Parameter.

In einem gegebenen Inertialsystem ist  $dx(t)/dt = \mathbf{v}(t)$  die Geschwindigkeit des Punktteilchens zum Zeitpunkt  $t$ . Weil die Zeit nichttrivial transformiert, ist allerdings  $dx^\mu(t)/dt$  kein Vierervektor. Dieses Manko lässt sich aber beheben, indem  $dt$  durch das Eigenzeitdifferential  $d\tau = \sqrt{ds^2}/c$  ersetzt wird, denn letzteres ist ein Lorentz-Skalar.

### Vierergeschwindigkeit

Die Vierergeschwindigkeit ist durch

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (9.75)$$

definiert. Sie hängt wegen  $dt/d\tau = \gamma(v)$  mit der Dreiergeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  gemäß

$$u^\mu = \gamma(v) \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (9.76)$$

zusammen.

Aus dem Vierervektor  $u^\mu$  können wir durch Quadrieren mit der Minkowski-Metrik einen Lorentz-Skalar bilden, der die Dimension einer Geschwindigkeit zum Quadrat hat. Es gilt

$$u^2 \equiv u_\mu u^\mu = c^2, \quad (9.77)$$

in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass in der Relativitätstheorie  $c$  invariant unter Lorentz-Transformationen ist.

### Frage 12

Rechnen Sie  $u^2 = c^2$  nach!

Da die Operation  $d/d\tau$  eine Lorentz-invariante Bedeutung hat, können wir durch eine Differenziation von  $u^\mu$  einen weiteren Vierervektor definieren, der die gewöhnliche Beschleunigung verallgemeinert, die *Viererbeschleunigung*

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (9.78)$$

Aus  $u_\mu u^\mu = c^2$  folgt durch Differenziation

$$u_\mu a^\mu = 0, \quad (9.79)$$

d. h., die Viererbeschleunigung ist im Sinne der Minkowski-Geometrie überall orthogonal auf die Vierergeschwindigkeit. Im Gegensatz zu letzterer ist die Viererbeschleunigung ein raumartiger Vierervektor. Das Viererquadrat von  $a^\mu$  ist wieder eine Lorentz-invariante Größe. Um sie zu berechnen, genügt es, dies in einem Inertialsystem zu tun; die Lorentz-Invarianz stellt sicher, dass das Ergebnis für alle Inertialsysteme gilt. Betrachten wir ein Inertialsystem, in dem zu einem gegebenen Zeitpunkt  $\mathbf{v}(t) = 0$  ist. Berechnen wir nun in diesem System

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{du^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \gamma(v) \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (9.80)$$

dann ist  $\gamma = 1$  und wegen

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{c^2} \gamma^3 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (9.81)$$

auch  $d\gamma/dt = 0$ , wenn  $\mathbf{v}(t) = 0$  ist. Bezeichnen wir mit  $\tilde{\mathbf{a}}$  die Dreierbeschleunigung im momentanen Ruhesystem des Teilchens, so folgt in diesem  $a^\mu = (0, \tilde{\mathbf{a}})^\top$  und daher in jedem System  $a^\mu a_\mu = -(\tilde{\mathbf{a}})^2$ . Das invariante Viererquadrat der Viererbeschleunigung ist also (für jeden Zeitpunkt) durch den Betrag der gewöhnlichen Beschleunigung im momentanen Ruhesystem gegeben. (Der allgemeine Zusammenhang von Dreier- und Viererbeschleunigung wird in Aufgabe 9.6 ausgearbeitet.)

## Herleitung des allgemeinen Geschwindigkeitsadditionstheorems

Das Transformationsverhalten von Dreiergeschwindigkeiten unter Lorentz-Transformationen beinhaltet das relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem, das wir für parallele Geschwindigkeiten in (9.31) hergeleitet hatten.

Betrachten wir nun eine Vierergeschwindigkeit  $u^\mu = \gamma(w)(c, \mathbf{w})^\top$  mit beliebig orientierter Dreiergeschwindigkeit  $\mathbf{w}$  und machen eine Standard-Lorentz-Transformation in positiver  $x$ -Richtung mit Geschwindigkeit  $v$ , dann können wir die transformierte Geschwindigkeit einfach aus

$$u'^\mu(\mathbf{w}') = \Lambda(v)^\mu_{\nu} u^\nu(\mathbf{w}) \quad (9.82)$$

extrahieren. Komponentenweise angeschrieben lautet dies

$$u'^0 = \gamma(v) \left( u^0 - \frac{v}{c} u^1 \right) \implies \gamma(w') = \gamma(v) \gamma(w) \left( 1 - \frac{vw_x}{c^2} \right), \quad (9.83)$$

$$u'^1 = \gamma(v) \left( u^1 - \frac{v}{c} u^0 \right) \implies \gamma(w') w'_x = \gamma(v) \gamma(w) (w_x - v), \quad (9.84)$$

$$u'^{2,3} = u^{2,3} \implies \gamma(w') w'_{y,z} = \gamma(w) w_{y,z}. \quad (9.85)$$

Division der letzten beiden Gleichungen jeweils durch die erste liefert

$$\begin{aligned} w'_x &= \frac{w_x - v}{1 - vw_x/c^2}, \\ w'_{y,z} &= \frac{1}{\gamma(v)} \frac{w_{y,z}}{1 - vw_x/c^2} \end{aligned} \quad (9.86)$$

oder andersherum

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{w'_x + v}{1 + vw'_x/c^2}, \\ w_{y,z} &= \frac{1}{\gamma(v)} \frac{w'_{y,z}}{1 + vw'_x/c^2}, \end{aligned} \quad (9.87)$$

in Verallgemeinerung von (9.31), wo  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{w}'$  nur Komponenten in  $x$ -Richtung hatten.

### Frage 13

Betrachten Sie den Fall  $w'_x = 0$  und machen Sie sich das Ergebnis als Effekt der Zeitdilatation plausibel. (Denken Sie daran, dass Distanzen in transversaler Richtung nicht Lorentz-kontrahiert werden.)

Für die Beträge der Geschwindigkeiten gilt nun, wie man nachrechnen kann:

$$\frac{w^2}{c^2} = 1 - \frac{(1 - w'^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}'/c^2)^2}. \quad (9.88)$$

Daraus geht wieder hervor, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht erreicht werden kann, wenn  $w'$  und  $v$  kleiner als  $c$  sind.

## So geht's weiter

### Thomas-Präzession: Die Relativität von Richtungen

Das Produkt von zwei Lorentz-Transformationen, die reine Geschwindigkeitstransformationen sind, ist nur dann wieder eine reine Geschwindigkeitstransformation, wenn die dabei involvierten Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  parallel sind. Andernfalls ist immer auch eine Drehung des räumlichen Koordinatensystems im Spiel.

Betrachtet man von einem Inertialsystem aus eine allgemeine, nicht gleichförmige Bewegung eines Objekts, das in seinem Eigensystem eine Richtung auszeichnet, wie z. B. einen Kreiselkompass oder ein Elementarteilchen mit Spin (Bd. 3, Abschn. 1.6), dann ändert sich diese Richtung vom Inertialsystem aus betrachtet, auch wenn im Eigensystem des Objekts keine Drehmomente im Spiel sind.

Betrachten wir beispielsweise zwei Raketen, die Kreiselkompassen mitführen und die anfangs in einem gemeinsamen Inertialsystem sind. Beschleunigt eine dieser Raketen zuerst auf Geschwindigkeit  $v_1$  und danach auf eine zusätzliche Geschwindigkeit  $v_2 \neq v_1$ , dann hat sich ihr Kreiselkompass gegenüber der zweiten Rakete verdreht, wenn diese durch eine einzige lineare Beschleunigung in das neue Inertialsystem überwechselt. Das ist ein rein relativistischer Effekt, der in der Newton'schen Mechanik keine Entsprechung hat.

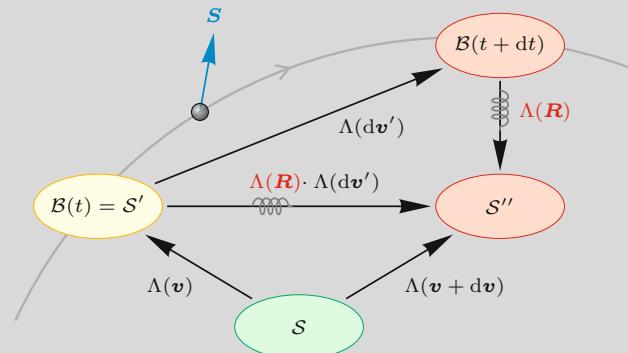
Wird nun ein Objekt auf einer ständig beschleunigten Bahnkurve bewegt, z. B. auf einer Kreisbahn, dann ändert sich, von einem Inertialsystem aus betrachtet, das mitgeführte räumliche Koordinatensystem (definiert durch Kreiselkompass oder Spin) kontinuierlich. Dieser ausschließlich kinematische Effekt heißt *Thomas-Präzession* nach dem englischen Physiker Llewellyn Hilleth Thomas (1903–1992). Die Bedingung an das mitgeführte Koordinatensystem eines beschleunigten Objekts, nämlich dass dieses aus seiner Perspektive rotationsfrei gehalten wird und aus einer kontinuierlichen Abfolge von reinen Geschwindigkeitstransformationen besteht, heißt *Fermi-Walker-Transport*, benannt nach dem italienischen Physiker Enrico Fermi (1901–1954) und dem britischen Mathematiker und Kosmologen Arthur Geoffrey Walker (1909–2001).

Betrachten wir nun von einem Laborsystem  $S$  aus die Flugbahn eines Objekts mit Spin (Elektron oder Kreiselkompass), dann können wir zu jedem Zeitpunkt  $t$ , zu dem sich das Objekt mit Geschwindigkeit  $v(t)$  bewegt, mit einer reinen Geschwindigkeitstransformation  $\Lambda(v(t))$  in das momentane Ruhesystem des Objekts übergehen und dadurch das räumliche Koordinatensystem des vom Objekt mitgeführten Systems mit dem des Laborsystems vergleichen. Bezeichnen wir mit  $\mathcal{B}(t)$  das aus der Sicht des beschleunigten Objekts rotationsfrei gehaltene Koordinatensystem, dann können wir es zu einem Zeitpunkt  $t$  gleich ausrichten wie ein Inertialsystem

$S'$ , das mit dem Laborsystem durch eine reine Geschwindigkeitstransformation  $\Lambda(v)$  verknüpft ist. Zu einem infinitesimal späteren Zeitpunkt  $t + dt$  hat das Objekt aus Sicht des Laborsystems die Geschwindigkeit  $v + dv$ , aber  $\mathcal{B}(t)$  hat nun eine andere räumliche Orientierung als das System  $S''$ , das durch  $\Lambda(v + dv)$  mit dem Laborsystem rotationsfrei verknüpft ist. Die Systeme  $\mathcal{B}(t)$  und  $\mathcal{B}(t + dt)$  unterscheiden sich definitionsgemäß um eine reine Geschwindigkeitstransformation  $\Lambda(dv')$ , während  $S'$  und  $S''$  durch

$$\Lambda(v + dv) \Lambda^{-1}(v) = \Lambda(R) \Lambda(dv') \quad (9.89)$$

verknüpft sind, wie das Diagramm in Abb. 9.22 zeigt.



**Abb. 9.22** Ein Objekt, das dadurch beschleunigt wird, dass Kräfte nur auf den Schwerpunkt wirken, wird durch ein Bezugssystem  $\mathcal{B}(t)$  beschrieben, das über eine kontinuierliche Abfolge von reinen Geschwindigkeitstransformationen definiert ist. In diesem ändern sich durch mitgeführte Kreiselkompassen oder Spins definierte Richtungen nicht. Von einem festen Laborsystem  $S$  aus betrachtet sind momentane Inertialsysteme  $S'$  und  $S''$  des beschleunigt bewegten Objekts, die dieselbe räumliche Orientierung wie das Laborsystem haben, mit diesem durch reine Geschwindigkeitstransformationen (hier  $\Lambda(v)$  bzw.  $\Lambda(v + dv)$ ) verknüpft. Wird  $\mathcal{B}(t) = S'$  gewählt, so unterscheidet sich zu einem infinitesimal späteren Zeitpunkt  $\mathcal{B}(t + dt)$  von  $S''$  im Allgemeinen um eine infinitesimale Drehung

Hierbei ist

$$dv' = \gamma dv + \gamma(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}, \quad (9.90)$$

in Übereinstimmung mit dem allgemeinen relativistischen Additionstheorem für Geschwindigkeiten, während die (infinitesimale) Drehmatrix durch

$$R = I + dR = I + \frac{(\gamma - 1)}{v^2} (\mathbf{v} dv^\top - dv \mathbf{v}^\top) \quad (9.91)$$

gegeben ist, wie in Aufgabe 9.7 gezeigt wird. Schreibt man

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{R}\mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{x}' \times \mathbf{d}\phi, \quad (9.92)$$

dann ist der infinitesimale Drehvektor

$$\mathbf{d}\phi = \frac{(\gamma - 1)}{v^2} \mathbf{v} \times d\mathbf{v}. \quad (9.93)$$

Vom mitgeführten System aus betrachtet unterscheidet sich  $S''$  von  $\mathcal{B}(t + dt)$  nur durch eine passive Koordinatentransformation  $\Lambda(d\mathbf{R})$ . Aus der Sicht des Laborsystems  $S$  hat sich das mitgeführte System  $\mathcal{B}$  zusammen mit einem damit verbundenen Spinvektor  $\mathbf{S}$  aber um  $\Lambda^{-1}(d\mathbf{R})$  aktiv gedreht:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{S} \times d\phi = -d\phi \times \mathbf{S}. \quad (9.94)$$

Dieser präzidiert also gemäß

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{S} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S} \quad (9.95)$$

mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{(\gamma - 1)}{v^2} \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{(\gamma - 1)}{v^2} \mathbf{v} \times \mathbf{a}, \quad (9.96)$$

die durch die momentane Geschwindigkeit und Beschleunigung bestimmt ist. Ist  $v \ll c$ , dann ist dies wegen  $\gamma - 1 \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$  näherungsweise

$$\boldsymbol{\Omega} \approx -\frac{1}{2c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{a}. \quad (9.97)$$

Man beachte, dass  $\boldsymbol{\Omega}$  abhängig von der Relativgeschwindigkeit des Beobachters in  $S$  ist. In einem momentanen Ruhesystem ist insbesondere die Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = 0$ , und der Spinvektor präzidiert gerade nicht. Durchläuft ein Objekt eine geschlossene Bahn und kommt in das Ausgangssystem zurück, dann kommt es aber zu einer eindeutig definierten Verdrehung des Spinvektors, die davon abhängt, wie groß die Beschleunigung entlang der Bahnkurve war.

Mit diesem relativistischen Effekt der Thomas-Präzession konnte 1927 Thomas einen Widerspruch beseitigen, der sich in der nichtrelativistischen Quantenmechanik bei der Berechnung der Feinstruktur von Atomen ergeben hatte: Ein Elektron, das sich in einem radialsymmetrischen Potenzial  $V(r) = -Ze/r$  um den Atomkern bewegt, wird durch die Kraft  $m\mathbf{a} = -V'(r)\mathbf{e}_r = -\mathbf{r}V'(r)/r$  auf seiner Bahn gehalten. Der Spin des Elektrons, das sich in guter Näherung nichtrelativistisch bewegt, erfährt damit eine Präzession der Gestalt

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{mr} V'(r) = -\frac{1}{2m^2c^2} \mathbf{L} \frac{V'(r)}{r}, \quad (9.98)$$

wobei  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$  der Bahndrehimpuls des Elektrons ist. Dies gibt eine Korrektur zur Spin-Bahn-Wechselwirkungsenergie des Elektrons, die sich aus der magnetischen

Wechselwirkung von Bahndrehimpuls und Spin in der nicht-relativistischen Quantenmechanik ergibt (wie in Bd. 3, Abschn. 9.3 hergeleitet werden wird). Bemerkenswerterweise haben dieser dynamische Beitrag und der rein kinematische der Thomas-Präzession dieselbe Form, wobei letzterer den Effekt um einen Faktor  $\frac{1}{2}$  vermindert. Dieser Korrekturfaktor  $\frac{1}{2}$  wird in der Quantenmechanik auch *Thomas-Faktor* genannt.

## Geodätische Präzession und Lense-Thirring-Effekt

Ein analoger Effekt existiert auch im Gravitationsfeld, zu dessen Berechnung aber die allgemeine Relativitätstheorie herangezogen werden muss. Dieser Effekt, der *geodätische Präzession* genannt wird, wurde schon 1916 von dem niederländischen Astronomen *Willem de Sitter* (1872–1934) berechnet, also elf Jahre vor dem speziell-relativistischen der Thomas-Präzession (und weniger als ein Jahr nach Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie). Der allgemein-relativistische Effekt hat wieder die Form (9.98), wobei nun  $V(r)$  das Gravitationspotenzial darstellt, ist aber sogar um einen Faktor 3 größer, denn er setzt sich aus einer „gravimagnetischen“ Spin-Bahn-Kopplung zusammen, die exakt analog zur Thomas-Präzession ist, und einem doppelt so großen weiteren Beitrag von der Raumkrümmung. Für Satelliten auf einem erdnahen Orbit beträgt diese geodätische Präzession einige Bogensekunden pro Jahr.



**Abb. 9.23** Der 2004 gestartete NASA-Satellit Gravity Probe B, der 2011 die allgemein-relativistischen Effekte der geodätischen Präzession (6,6 Bogensekunden pro Jahr) sowie den Lense-Thirring-Effekt (39 Millibogensekunden pro Jahr) mit einer Genauigkeit von 0,01 % bzw. 1 % bestätigen konnte. Dazu führte dieser Satellit vier aus schnell rotierenden supraleitenden Kugeln bestehende Gyroskoppe mit (© NASA/MSFC)

Zusätzlich dazu gibt es den noch subtileren, 1918 von *Josef Lense* (österreichischer Mathematiker, 1890–1985) und *Hans Thirring* (österreichischer Physiker, 1888–1976) gefundenen und nach ihnen benannten Effekt des *frame dragging*, der von der Rotation der Erde selbst hervorgerufen wird. Ein massiver rotierender Körper krümmt demnach nicht nur die Raumzeit, sondern verdrillt sie auch etwas, was zu einer weiteren Präzession führt, die als „gravi-magnetische“ Spin-Spin-Wechselwirkung angesehen werden kann.

Für Erdsatelliten macht der Lense-Thirring-Effekt nur etwa 40 Millibogensekunden pro Jahr aus, kann von der geodätischen Präzession aber unterschieden werden, weil er im Allgemeinen eine andere räumliche Drehachse hat. Beide Effekte konnten 2011 von dem 2004 gestarteten Satelliten Gravity Probe B (Abb. 9.23) mit hoher Genauigkeit bestätigt werden. (Für eine hervorragende Diskussion dieser Effekte und ihre Bedeutung für die allgemeine Relativitätstheorie siehe Overduin 2008.)

## Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- leichte Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
- mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
- anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständen auch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

**9.1 •• Vorbeiflug von Teilchen an Stab** In einem Inertialssystem  $S$  bewege sich ein Stab der Ruhelänge  $L_0$  mit der Geschwindigkeit  $v$  in seiner Längsrichtung. Mit entgegengesetz gleicher Geschwindigkeit fliege ein Punktteilchen auf den Stab zu und an ihm vorbei.

- Wie lange dauert der Vorbeiflug im Inertialssystem  $S$ ?
- Wie lange im Ruhesystem  $S'$  des Stabes?
- Wie lange im Ruhesystem  $S''$  des Punktteilchens?

Für welchen Fall ist das Ergebnis maximal bzw. minimal?

Empfehlenswerte Zusatzaufgabe: Fertigen Sie Minkowski-Diagramme dazu an.

**Lösungshinweis:** Definieren Sie sorgfältig die zwei Ereignisse, die zum Zusammentreffen von Teilchen und Anfangs- bzw. Endpunkt des Stabes gehören, und führen Sie die notwendigen Lorentz-Transformationen durch. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch eine alternative Berechnung mit der Formel für relativistische Geschwindigkeitsaddition.

**9.2 • Zeitdilatation durch Erdrotation** „Man schließt daraus, daß eine am Erdäquator befindliche Unruuhuhr um einen sehr kleinen Betrag langsamer laufen muß als eine genau gleich beschaffene, sonst gleichen Bedingungen unterworffene, an einem Erdpole befindliche Uhr“ schrieb Einstein (1905) in seiner Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. Schätzen Sie den Effekt ab, wenn vernachlässigt wird, dass die Erdoberfläche am Pol und am Äquator unterschiedliches Gravitationspotenzial hat und man eigentlich die Gravitationsrotverschiebung in die Rechnung einbeziehen müsste. Wie groß ist der Effekt nach einem Tag?

**9.3 •• Bell'sches Raumschiffparadoxon** Der nordirische Physiker John S. Bell (1928–1990), bekannt durch die nach ihm benannten Ungleichungen, die in der Interpretation der Quantenmechanik eine bedeutende Rolle spielen (Bd. 3, Kap. 4), berichtet in seinem Buch (Bell 1987), dass er mit folgendem Paradoxon sogar seine Physikerkollegen am CERN verblüffen konnte und dass eine Mehrheit davon zunächst spontan für die falsche Lösung votierte.

Man betrachte zwei identische Raketen, die entlang der  $x$ -Achse in ihrem gemeinsamen Ruhesystem  $S$  einen Abstand  $L_0$  haben, über den sie durch einen fragilen, nicht dehbaren Faden

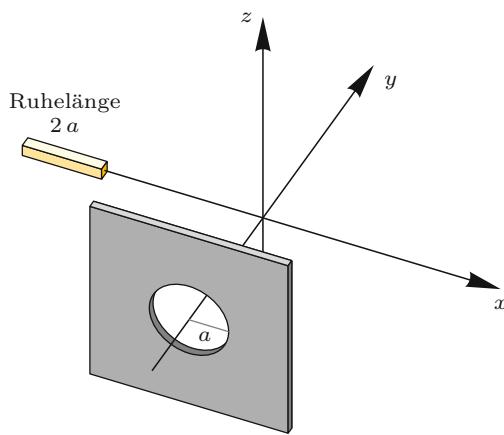
miteinander verbunden sind. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sollen sie exakt gleichzeitig starten und durch einen identischen Beschleunigungsvorgang in  $x$ -Richtung auf eine bestimmte Geschwindigkeit  $v$  gebracht werden. Vom Inertialssystem  $S$ , in dem sie gestartet sind, aus betrachtet, halten die beiden Raketen immer den gleichen Abstand, während der mitgeführte Faden, der die Raketen verbindet, auf eine Länge  $L = L_0/\gamma(v)$  Lorentz-kontrahiert wird. Wenn der Faden nicht dehnbar ist, sollte er reißen. Kann das sein? Im Bezugssystem der beiden Raketen ist natürlich keine Lorentz-Kontraktion vorhanden. Reißt nun der Faden, oder reißt er nicht?

**Lösungshinweis:** Stellen Sie die Ereignisse in einem Minkowski-Diagramm dar. Nehmen Sie an, dass die Beschleunigungsphase selbst vernachlässigbar kurz ist und sich danach beide Raketen mit gleicher Geschwindigkeit in positive  $x$ -Richtung bewegen. Die Frage kann dann ohne Rechnung beantwortet werden.

**9.4 ••• Relativistischer Zaubertrick mit Stab und Lochplatte** Ein zerbrechlicher Stab und eine massive Lochplatte werden im Laborsystem  $S$  eines Trickkünstlers wie in Abb. 9.24 skizziert auf zueinander rechtwinkligen Bahnen mit relativistischer Geschwindigkeit aufeinander geschossen. Die Länge des Stabes und der Durchmesser des Loches sind in Ruhe gleich, sodass der Stab gerade nicht durch das runde Loch geschoben werden kann, wenn er parallel zur Platte liegt (solange seine Enden nicht zum Loch passend abgerundet werden). Bei relativistischer Bewegung des Stabes in seiner Längsrichtung wird der Stab aber Lorentz-kontrahiert (bei z. B.  $v_x/c = \sqrt{3}/4$  und  $\gamma(v_x) = 2$  gerade auf die Hälfte) und sollte bequem und unbeschadet durch die Lochplatte durchgehen, die bei ihrer Bewegung in Richtung senkrecht zur Platte (mit Geschwindigkeit  $v_y$ , die nicht unbedingt relativistisch sein muss) nur in ihrer Dicke Lorentz-kontrahiert wird und sonst ihre Form beibehält.

Aus der Sicht des Ruhesystems des Stabes sieht dies aber unmöglich aus, denn hier sollte die Lochplatte, die sich nun auf schräger Bahn auf den Stab zu bewegt, in der Längsrichtung Lorentz-kontrahiert sein, sodass der Stab schon gar nicht durchpasst. Eine Kollision scheint zu drohen, bei der die Enden des Stabes massiv geköpft werden.

Lösen Sie dieses Paradoxon auf, indem Sie die Trajektorien der Endpunkte des Stabes und der Randpunktes des Loches in der  $xy$ -Ebene in beiden Inertialssystemen analysieren.



**Abb. 9.24** Ein Stab mit Ruhelänge  $2a$  sei im Laborsystem  $S$  entlang der  $x$ -Richtung positioniert, eine Platte mit einem Loch mit Radius  $a$  senkrecht zur  $y$ -Achse. Dann werden beide in Bewegung versetzt, sodass sie sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Koordinatenursprung überlappen. Wenn beide in Ruhe sind, soll der Stab gerade nicht in das Loch passen, da der Stab eckig und das Loch rund ist. Mit relativistischer Geschwindigkeit, z. B. mit  $\gamma = 2$ , aufeinander geschossen, ist aber der Stab im Laborsystem Lorentz-kontrahiert und das Loch nicht, er sollte also bequem durch das Loch passen. Im Ruhesystem des Stabes kommt die Lochplatte auf schräger Bahn auf den Stab zu, wobei das Loch nun in der Längsrichtung Lorentz-kontrahiert sein und damit der Stab nicht mehr durchpassen können sollte. Was passiert wirklich?

## Kapitel 9

**9.5 •• Additivität von Rapidity** Im Kasten „Vertiefung: Lorentz-Transformation als imaginäre Drehung“ wurde als alternatives Maß für Geschwindigkeit die *Rapidity*  $\xi$  eingeführt,

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \tanh \xi, \quad \gamma = \cosh \xi. \quad (9.99)$$

Während der Wertebereich von  $\beta$  in Lorentz-Transformationen durch  $-1 < \beta < 1$  beschränkt ist, hat man  $-\infty < \xi < \infty$ .

Zeigen Sie, dass bei der Kombination von Lorentz-Transformationen mit gleichgerichteten Geschwindigkeiten  $v_1 \parallel v_2$  die zugehörigen Rapiditäten  $\xi_1, \xi_2$  einfach addiert werden:

$$\xi_3 = \xi_2 + \xi_1. \quad (9.100)$$

**Lösungshinweis:** Verwenden Sie die Darstellung der hyperbolischen Funktionen durch Exponentialfunktionen, um deren Additionstheoreme herzuleiten.

**9.6 • Zusammenhang Dreier- und Viererbeschleunigung** Berechnen Sie die Dreierkomponenten der Viererbeschleunigung (9.78).

**9.7 •• Thomas-Präzession** Da sich das Produkt von zwei nicht gleichgerichteten reinen Geschwindigkeitstransformationen von einer reinen Geschwindigkeitsaddition mit relativistisch addierten Geschwindigkeiten dadurch unterscheidet, dass noch eine räumliche Drehung im Spiel ist, erfährt das räumliche Koordinatensystem, das von einem beschleunigt bewegten

Teilchen mitgeführt wird, bezüglich eines festen Inertialsystems eine kontinuierliche Drehung, die am Ende dieses Kapitels im Abschnitt „So geht's weiter“ besprochene Thomas-Präzession.

Dazu sollen die Koordinatensysteme von momentanen Ruhe-systemen entlang der Bahnkurve des Teilchens zu infinitesimal unterschiedlichen Zeitpunkten verglichen werden, zu denen das Teilchen bezüglich eines Laborsystems  $S$  die Geschwindigkeit  $v$  (System  $S'$ ) bzw.  $v + dv$  (System  $S''$ ) hat. Vom Laborsystem  $S$  sollen sich  $S'$  und  $S''$  nur um reine Geschwindigkeitstransformationen  $\Lambda(v)$  bzw.  $\Lambda(v + dv)$  unterscheiden und somit dieselbe räumliche Orientierung wie das Laborsystems haben.

Vom rotationsfrei mitgeführten Eigensystem des Teilchens aus betrachtet, unterscheiden sich aber  $S'$  und  $S''$  um eine zusätzliche Drehung von einer reinen Geschwindigkeitstransformation  $\Lambda(dv')$ .

Um diese zu bestimmen, berechne man das Produkt

$$\Lambda(v + dv) \Lambda^{-1}(v), \quad (9.101)$$

um das sich aus der Perspektive des Laborsystems die Koordinatensysteme  $S'$  und  $S''$  von einer reinen Geschwindigkeitstransformation unterscheiden (siehe Abb. 9.22). Man zeige, dass zusätzlich zur reinen Geschwindigkeitstransformation  $\Lambda(dv')$  mit

$$dv' = \gamma dv + \gamma(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot dv}{v^2} \mathbf{v} \quad (9.102)$$

eine infinitesimale räumliche Drehung mit Drehmatrix

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + d\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{(\gamma - 1)}{v^2} (\mathbf{v} dv^\top - dv \mathbf{v}^\top) \quad (9.103)$$

auftritt.

**Lösungshinweis:** Überlegen Sie sich dafür, welche Struktur die Transformationsmatrix bei einer Zusammensetzung von einer infinitesimalen Geschwindigkeitstransformation und einer infinitesimalen Drehung hat.

**9.8 •• Vierergradient** Ein Beispiel für einen Vierervektor, der natürlicherweise mit kovarianten Komponenten definiert wird, ist der später (ab Bd. 2, Kap. 8) noch sehr wichtig werdende *Vierergradient*

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \partial_t \right) \nabla. \quad (9.104)$$

(a) Zeigen Sie, dass dieser unter einer Lorentz-Transformation entspricht

$$\partial'_\nu = \Lambda_\nu^\mu \partial_\mu \quad (9.105)$$

transformiert, also entgegengesetzt zu  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ .

(b) Berechnen Sie damit

$$\partial_\mu x^\rho \quad (9.106)$$

und

$$\partial_\mu s^2 = \partial_\mu (\eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma) \quad (9.107)$$

und zeigen Sie, dass die Ergebnisse unter homogenen Lorentz-Transformationen entsprechend ihrer Indexstellung transformieren.

## Lösungen zu den Aufgaben

**9.1** (a)  $\Delta t = \frac{L_0}{2v} \sqrt{1 - \beta^2}$ ; (b)  $\Delta t' = \frac{L_0}{2v}(1 + \beta^2)$ ; (c)  $\Delta t'' = \frac{L_0}{2v}(1 - \beta^2)$ . Somit ist  $\Delta t' > \Delta t > \Delta t''$ .

**9.2**  $\gamma - 1 \approx 1,2 \cdot 10^{-12}$ . Pro Tag etwa 0,1  $\mu\text{s}$ .

**9.6**  $(a^v) = \gamma^2(v) \left( \gamma^2(v) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c}, \mathbf{a} + \gamma^2(v) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v}}{c^2} \right)^\top$

## Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

**9.1** Nehmen wir an, dass sich der Stab entlang der  $x$ -Achse nach rechts bewegt und sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  das linke Ende des Stabes bei  $x = 0$  und das rechte bei  $x = L$  befindet. ( $L$  ist damit definiert als die Länge des bewegten Stabes in  $S$ .) Bezeichnen wir die  $x$ -Koordinate des rechten bzw. linken Endes mit  $x_{\pm}$ , dann wird die Bewegung des Stabes in  $S$  durch

$$x_- = vt, \quad x_+ = L + vt \quad (9.108)$$

beschrieben. Das Punktteilchen bewege sich in negative  $x$ -Richtung und treffe zum Zeitpunkt  $t = 0$  gerade auf das vordere (rechte) Ende bei  $x = L$ . Seine Bewegung wird dann beschrieben durch

$$x_P = L - vt. \quad (9.109)$$

Die Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$ , die dadurch definiert sind, dass das Teilchen gerade mit dem vorderen bzw. hinteren Ende gleichauf ist, sind in  $S$  somit parametrisiert durch

$$\begin{aligned} E_1(x_+ = x_P) : & \quad t = 0, x = L; \\ E_2(x_- = x_P) : & \quad t = \frac{L}{2v}, x = L/2. \end{aligned} \quad (9.110)$$

Davon ausgehend betrachten wir nun die Situation in den drei Bezugssystemen:

(a) In  $S$  ist das Zeitintervall einfach von der Koordinatenzeit  $t$  abzulesen. Wegen der Lorentz-Kontraktion ist  $L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1-\beta^2}$ ; die Zeit für den Vorbeiflug ist also

$$\Delta t = \frac{L}{2v} = \frac{L_0}{2v}\sqrt{1-\beta^2}. \quad (9.111)$$

(b) Das Bezugssystem  $S'$ , in dem der Stab ruht, bewegt sich in positive  $x$ -Richtung. Lorentz-Transformation der Intervalle  $\Delta t = L/(2v)$ ,  $\Delta x = -L/2$  (Koordinaten von  $E_2$  minus Koordinaten von  $E_1$ ) ergibt

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= \gamma c\Delta t - \beta\gamma\Delta x \\ &= \gamma \frac{L}{2v} (c + v\beta) = c \frac{L_0}{2v} (1 + \beta^2). \end{aligned} \quad (9.112)$$

Betrachten wir alternativ die Geschwindigkeit des Teilchens im Ruhesystem des Stabes, so ist diese durch die relativistische Addition von zwei gleich großen Geschwindigkeiten mit Betrag  $v$  gegeben, mit dem Ergebnis

$$v' = \frac{v + v}{1 + v^2/c^2}. \quad (9.113)$$

In  $S'$  dauert der Vorbeiflug entlang der Ruhelänge des Stabes damit

$$\Delta t' = \frac{L_0}{v'} = \frac{L_0}{2v} (1 + \beta^2), \quad (9.114)$$

in Übereinstimmung mit (9.112).

(c) Für das Ruhesystem des Teilchens  $S''$  ist eine Lorentz-Transformation analog zu (9.112), aber mit umgekehrter Geschwindigkeit durchzuführen, mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} c\Delta t'' &= \gamma c\Delta t + \beta\gamma\Delta x \\ &= \gamma \frac{L}{2v} (c - v\beta) = c \frac{L_0}{2v} (1 - \beta^2). \end{aligned} \quad (9.115)$$

Für die direkte Berechnung über Geschwindigkeit und Länge des Stabes ist die nun unterschiedliche Lorentz-Kontraktion des Stabes zu berücksichtigen. Die Geschwindigkeit des Stabes in  $S''$  hat analog zu Teilaufgabe (b) den Betrag

$$v'' = \frac{2v}{1 + \beta^2}. \quad (9.116)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} L'' &= L_0 \sqrt{1 - \frac{v''^2}{c^2}} = L_0 \sqrt{1 - \frac{4\beta^2}{(1 + \beta^2)^2}} \\ &= L_0 \sqrt{\frac{(1 + \beta^2)^2 - 4\beta^2}{(1 + \beta^2)^2}} = L_0 \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}. \end{aligned} \quad (9.117)$$

Daraus folgt

$$\Delta t'' = \frac{L''}{v''} = \frac{L_0}{2v} (1 - \beta^2), \quad (9.118)$$

in Übereinstimmung mit (9.115).

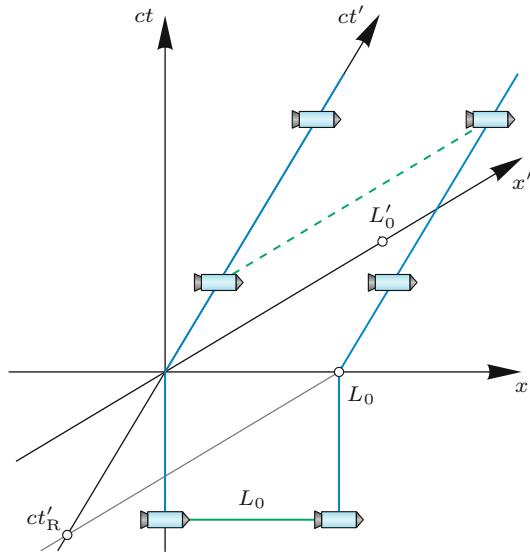
Der Vorbeiflug dauert also in allen drei Bezugssystemen unterschiedlich lang; am kürzesten ist er im Bezugssystem des Teilchens, am längsten im Bezugssystem des Stabes,  $\Delta t' > \Delta t > \Delta t''$ .

**9.2** Der Äquatorumfang beträgt ziemlich genau 40.000 km, der Tag hat 86.400 s, damit bewegt man sich am Äquator mit etwa 460 m/s, und die Abweichung des  $\gamma$ -Faktors von 1 ist

$$\gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \approx 1,2 \cdot 10^{-12}. \quad (9.119)$$

Pro Tag kämen etwa 0,1  $\mu$ s zusammen, also ein mit heutigen Atomuhren sehr leicht messbarer Effekt.

Was Einstein 1905 verständlicherweise nicht in Rechnung stellte, ist aber, dass wegen der Erdabplattung das reine Gravitationspotenzial der Erde (d. h. ohne Zentrifugalpotenzial) an den Polen der Erde stärker negativ ist als am Äquator, sodass hier die Gravitationsrotverschiebung nicht vernachlässigt werden kann,



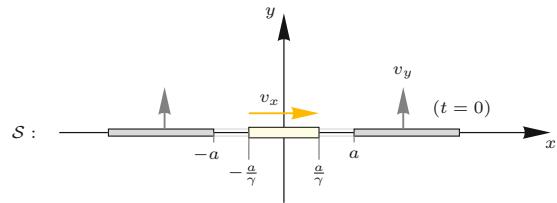
**Abb. 9.25** Bell'sches Raumschiffparadoxon. Zwei Raketen, die über einen undehbaren Faden der Länge  $L_0$  miteinander verbunden sind, starten gleichzeitig zum Zeitpunkt  $t = 0$  und werden auf gleiche Geschwindigkeit in positive  $x$ -Richtung gebracht. Reißt der Faden, der zwischen den Raketen gespannt wurde, aufgrund der Lorentz-Kontraktion?

die mit umgekehrten Vorzeichen beträgt. Die Erdabplattung ist nun gerade so, dass sich Unterschiede im Gravitationspotenzial und dem Zentrifugalpotenzial die Waage halten, was zur Folge hat, dass sich Gravitationsrotverschiebung und Zeitdilatation in der betrachteten Ordnung kompensieren (Cocke 1966). Um am Pol auf gleichem Gravitationspotenzial wie am Äquator auf Meeresniveau zu sein, sodass obiges Resultat doch herauskomme, müsste man sich dort etwa 10 km oberhalb des Meeresspiegel befinden. (Zum Vergleich: Die Erdabplattung macht etwa 20 km Unterschied im Radius aus.)

**9.3** Der Faden muss reißen, denn die Lorentz-Kontraktion in  $S$  ist ein objektives Phänomen. Die Frage ist also, wie sich das Reißen des Fadens im Bezugssystem der bewegten Raketen darstellt.

Wie bei eigentlich allen Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie liegt der Schlüssel im Begriff der Gleichzeitigkeit. Gleichzeitigkeit im System des Startsystems  $S$  ist eine klar definierte und intuitiv einsichtige Angelegenheit. Dass die Raketen gleichzeitig starten, braucht entweder perfekt synchronisierte Uhren, oder das Startsignal wird von einem Punkt aus den Raketen übermittelt, der sich im gleichen Abstand von den beiden Raketen befindet.

Vom Bezugssystem der bewegten Raketen aus betrachtet bedeutet Gleichzeitigkeit allerdings etwas grundsätzlich anderes. Wie das Minkowski-Diagramm (Abb. 9.25) zeigt, sind von diesem Bezugssystem aus betrachtet die Zeiten, zu denen die beiden Raketen gestartet sind, nicht gleich. Ist der Startzeitpunkt der hinteren (linken) Rakete  $t = t' = 0$ , dann ist der Startzeitpunkt



**Abb. 9.26** Zusammentreffen von Stab und Lochplatte aus Abb. 9.24 aus der Sicht des Laborsystems  $S$ . Mit  $\gamma = 2$  ist der Stab in Längsrichtung auf die Hälfte reduziert und passt bequem durch das Loch der mit  $v_y$  senkrecht dazu bewegten Platte

der vorderen (rechten) Raketen bei  $t' = t'_R < 0$  (Abb. 9.25). In diesem Bezugssystem ist der Faden einfach deshalb gerissen, weil die vordere Rakete früher gestartet ist.

Zu diesem Paradoxon gibt es übrigens eine ausgedehnte und teilweise kontroverse Literatur (Petkov 2009).

**9.4** Im Laborsystem ist die Situation klar, der Stab wird auf Länge  $2a/\gamma$  kontrahiert und passt durch das Loch (hinreichend dünne Platte und hinreichend dünner Stab vorausgesetzt bzw. ein  $v_y$ , das nicht allzu niedrig ist). Die Trajektorien von Platte und Stab in der  $xy$ -Ebene sind in Abb. 9.26 skizziert.

Im Ruhesystem  $S'$  des Stabes sind die Trajektorien der rechten und linken Randpunkte des Loches entscheidend. Schreiben wir diese im Laborsystem  $S$  als

$$x_{\pm}^{\mu}(t) = (ct, l_{\pm}(t))^{\top} = (ct, \pm a, v_y t, 0)^{\top}, \quad (9.120)$$

wobei der Index  $\pm$  den rechten bzw. linken Randpunkt des Loches bezeichnet, dann ergeben sich die Trajektorien im System  $S'$  durch eine Standard-Lorentz-Transformation mit Geschwindigkeit  $v \equiv v_x$ :

$$\begin{aligned} x_{\pm}^{\mu}(t') &= (ct_{\pm}, l'_{\pm})^{\top} \\ &= \left( c\gamma \left[ t - \frac{v}{c^2}(\pm a) \right], \gamma(\pm a - vt), v_y t, 0 \right)^{\top}. \end{aligned} \quad (9.121)$$

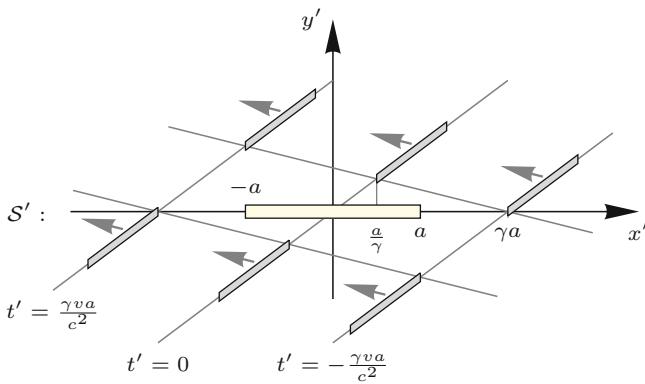
Um die Trajektorien in  $S'$  darzustellen, muss in diesem Ergebnis noch  $t$  zugunsten von  $t' = \gamma[t - \frac{v}{c^2}(\pm a)]$  eliminiert werden:

$$t = \frac{1}{\gamma}t' \pm \frac{va}{c^2}. \quad (9.122)$$

Damit bekommen wir für die räumlichen Koordinaten

$$\begin{aligned} l'_{\pm}(t') &= \left( \gamma \left[ \pm a - \frac{v}{\gamma}t' - \frac{v^2}{c^2}(\pm a) \right], v_y \left[ \frac{1}{\gamma}t' \pm \frac{va}{c^2} \right], 0 \right)^{\top} \\ &= \left( \pm \frac{a}{\gamma} - vt', v_y \left[ \frac{1}{\gamma}t' \pm \frac{va}{c^2} \right], 0 \right)^{\top}, \end{aligned} \quad (9.123)$$

grafisch dargestellt in Abb. 9.27 für  $\gamma = 2$  und  $v_y = v/2$ .



**Abb. 9.27** Zusammentreffen von Stab und Lochplatte aus Abb. 9.24 aus der Sicht des Stabes. Hier bewegt sich die Platte mit  $v'_x = -v$  auf den Stab zu, mit etwas reduzierter vertikaler Geschwindigkeit  $v'_y = v_y/\gamma$  aufgrund der Zeidilatation. Die horizontale Ausdehnung des Loches ist nun auf  $2\frac{a}{\gamma}$  Lorentz-kontrahiert, aber es kommt zu keiner Kollision, weil die Platte nicht mehr parallel zum Stab ist, sondern gerade so gedreht, dass das vordere und hintere Ende die horizontale Achse bei  $\pm\gamma a$  kreuzen, in Übereinstimmung mit den relativen Abständen im Laborsystem (aber nun nicht mehr zu gleichen Zeiten)

Zum Zeitpunkt  $t' = 0$ , an dem die Mittelpunkte von Loch und Stab zusammenfallen, ist

$$\mathbf{l}'_{\pm}(0) = \left( \pm\frac{a}{\gamma}, \pm a \frac{v_y v}{c^2}, 0 \right)^T. \quad (9.124)$$

Die  $x'$ -Koordinaten der Randpunkte des Loches sind also tatsächlich auf ihren durch die Lorentz-Kontraktion zu erwartenden Positionen, aber gleichzeitig sind die zugehörigen  $y'$ -Komponenten ungleich null – eine Kollision findet nicht statt, weil die Platte in  $S'$  gedreht ist!

Die beiden Randpunkte kreuzen die  $x'$ -Achse zu unterschiedlichen Zeiten,

$$(l'_{\pm})_y = 0 \Rightarrow t'_{\pm} = \mp \frac{\gamma v a}{c^2}, \quad (9.125)$$

an den Stellen

$$(l'_{\pm})_x(t'_{\pm}) = \pm a \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{v^2}{c^2} \gamma \right) = \pm a \gamma. \quad (9.126)$$

Damit sind die Verhältnisse der  $x'$ -Abstände bei  $y' = 0$  wieder dieselben wie schon im Laborsystem festgestellt: Die Randpunkte des Loches kreuzen die  $x'$ -Achse um einen Faktor  $\gamma$  von den Stabenden entfernt. Dass sie dies zu unterschiedlichen Zeiten  $t'_{\pm}$  tun, hängt mit der Drehung zusammen, die somit als Konsequenz des veränderten Gleichzeitigkeitsbegriffs in  $S'$  verstanden werden kann. (Zur Relativität von Richtungen siehe auch den Abschnitt „So geht's weiter“ in diesem Kapitel.)

**9.5** Schreiben wir die Lorentz-Transformation nur in den beteiligten Koordinaten als

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi \\ -\sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix}, \quad (9.127)$$

dann ergibt sich für zwei hintereinander ausgeführte Transformationen mit Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  mit den Abkürzungen  $\text{ch}_{1,2} := \cosh \xi_{1,2}$  und  $\text{sh}_{1,2} := \sinh \xi_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \text{ch}_2 & -\text{sh}_2 \\ -\text{sh}_2 & \text{ch}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}_1 & -\text{sh}_1 \\ -\text{sh}_1 & \text{ch}_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}_2 \text{ch}_1 + \text{sh}_2 \text{sh}_1 & -(\text{ch}_2 \text{sh}_1 + \text{sh}_2 \text{ch}_1) \\ -(\text{ch}_2 \text{sh}_1 + \text{sh}_2 \text{ch}_1) & \text{ch}_2 \text{ch}_1 + \text{sh}_2 \text{sh}_1 \end{pmatrix} \quad (9.128) \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}_3 & -\text{sh}_3 \\ -\text{sh}_3 & \text{ch}_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit der expliziten Darstellung durch e-Funktionen

$$\cosh \xi = \frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2}, \quad \sinh \xi = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2} \quad (9.129)$$

zeigt man leicht die Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen

$$\cosh(\xi_2 + \xi_1) = \cosh \xi_2 \cosh \xi_1 + \sinh \xi_2 \sinh \xi_1, \quad (9.130)$$

$$\sinh(\xi_2 + \xi_1) = \cosh \xi_2 \sinh \xi_1 + \sinh \xi_2 \cosh \xi_1, \quad (9.131)$$

und somit  $\xi_3 = \xi_2 + \xi_1$ .

**9.6** Mit  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  ist

$$\begin{aligned} a^\mu &= \frac{d}{d\tau} u^\mu = \gamma \frac{d}{dt} u^\mu \\ &= \gamma \frac{d}{dt} \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \gamma \left( \frac{d}{dt} \gamma \right) \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.132)$$

Die Ableitung des  $\gamma$ -Faktors gibt dabei

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma &= \frac{d}{dt} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \\ &= \left( -\frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \frac{-2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} = \frac{\gamma^3 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2}. \end{aligned} \quad (9.133)$$

Damit ist

$$(a^v) = \gamma^2(v) \left( \gamma^2(v) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c}, \mathbf{a} + \gamma^2(v) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}}{c^2} \right)^T. \quad (9.134)$$

**9.7** Eine infinitesimale Geschwindigkeitstransformation hat die Form

$$\Lambda(d\mathbf{v}') = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & -d\mathbf{v}'^\top/c \\ -d\mathbf{v}'/c & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (9.135)$$

da  $\gamma = 1 + O(dv'^2)$  ist, und eine infinitesimale Drehung

$$\Lambda(\mathbf{R}) = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{dR} \end{pmatrix}, \quad (9.136)$$

wobei die räumliche Matrix  $\mathbf{dR}$  antisymmetrisch ist (siehe Abschn. 2.1).

Die Zusammensetzung dieser beiden Transformationen ergibt

$$\Lambda(\mathbf{R})\Lambda(d\mathbf{v}') = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & -d\mathbf{v}'^\top/c \\ -d\mathbf{v}'/c & d\mathbf{R} \end{pmatrix}, \quad (9.137)$$

wobei es in dieser Ordnung nicht auf die Reihenfolge ankommt; die beiden infinitesimalen Matrizen werden einfach addiert.

Um keine Faktoren  $c$  schreiben zu müssen, definieren wir im Folgenden neben  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  ein infinitesimales  $\boldsymbol{\delta} := d\mathbf{v}/c$ .

Zu berechnen ist bis zur Ordnung  $\boldsymbol{\delta}$

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}) \Lambda^{-1}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{I} + \left( \boldsymbol{\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \Lambda(\boldsymbol{\beta}) \right) \Lambda^{-1}(\boldsymbol{\beta}). \quad (9.138)$$

Eine reine Geschwindigkeitstransformation in beliebiger Richtung ist gemäß (9.33) gegeben durch

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta}^\top \\ -\gamma \boldsymbol{\beta} & \mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^\top}{\beta^2} \end{pmatrix}. \quad (9.139)$$

Wegen

$$\boldsymbol{\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \gamma(\boldsymbol{\beta}) = \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad (9.140)$$

(siehe (9.133)) ergibt sich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} \Lambda &:= \boldsymbol{\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \Lambda(\boldsymbol{\beta}) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\delta} & -\gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\beta}^\top - \gamma \boldsymbol{\delta}^\top \\ -\gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\delta} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.141)$$

mit

$$\mathbf{M} = \left[ \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\delta} - (\gamma - 1) \frac{2\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\delta}}{\beta^2} \right] \frac{\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^\top}{\beta^2} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\delta}^\top + \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\beta}^\top}{\beta^2}.$$

Unter Verwendung der Identität  $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$  findet man schließlich nach sorgfältiger Rechnung

$$\boldsymbol{\delta} \Lambda \Lambda^{-1}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\delta} \Lambda \Lambda(-\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\delta}'^\top \\ -\boldsymbol{\delta}' & (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\delta}^\top - \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\beta}^\top}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad (9.142)$$

mit

$$\boldsymbol{\delta}' = \gamma \boldsymbol{\delta} + \gamma(\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\delta}}{\beta^2} \boldsymbol{\beta}. \quad (9.143)$$

Der Vergleich mit (9.137) gibt die Resultate (9.102) und (9.103)

## 9.8

(a) Mit der Kettenregel gilt

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\rho} = \Lambda^\rho_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\rho} = \Lambda^\rho_\mu \partial'_\rho. \quad (9.144)$$

Gemäß (9.70) ist  $\Lambda$  mit invertierter Indexstellung die inverse Matrix, mit der  $\partial'_\nu$  extrahiert werden kann:

$$\Lambda_\nu^\mu \partial_\mu = \Lambda_\nu^\mu \Lambda^\rho_\mu \partial'_\rho = \delta_\nu^\rho \partial'_\rho = \partial'_\nu. \quad (9.145)$$

(b)

$$\partial_\mu x^\rho \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\rho = \delta_\mu^\rho, \quad (9.146)$$

da  $\delta_\mu^\rho = 1$  für  $\rho = \mu$  und sonst null ist. Entsprechend der Indexstellung mit einem oberen und einem unteren Index transformiert die linke Seite unter Lorentz-Transformationen gemäß

$$\Lambda_\alpha^\mu \Lambda^\beta_\rho (\partial_\mu x^\rho) = (\Lambda_\alpha^\mu \partial_\mu) (\Lambda^\beta_\rho x^\rho) = \partial'_\alpha x'^\beta, \quad (9.147)$$

während das Kronecker-Delta auf der rechten Seite ein invariantier Tensor ist, denn mit (9.70) ist

$$\delta_\alpha^\beta = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda^\beta_\rho \delta_\mu^\rho = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda^\beta_\mu = \delta_\alpha^\beta. \quad (9.148)$$

Im zweiten zu berechnenden Ausdruck  $\partial_\mu s^2$  ist  $s^2$  ein Lorentz-Skalar, das Ergebnis muss also ein Lorentz-Vektor sein, der sich gemäß seiner Index-Stellung transformiert. Nach der Produktregel ist

$$\begin{aligned} \partial_\mu s^2 &= \partial_\mu (\eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma) = \eta_{\rho\sigma} \delta_\mu^\rho x^\sigma + \eta_{\rho\sigma} x^\rho \delta_\mu^\sigma \\ &= \eta_{\mu\sigma} x^\sigma + \eta_{\rho\mu} x^\rho = 2x_\mu. \end{aligned} \quad (9.149)$$

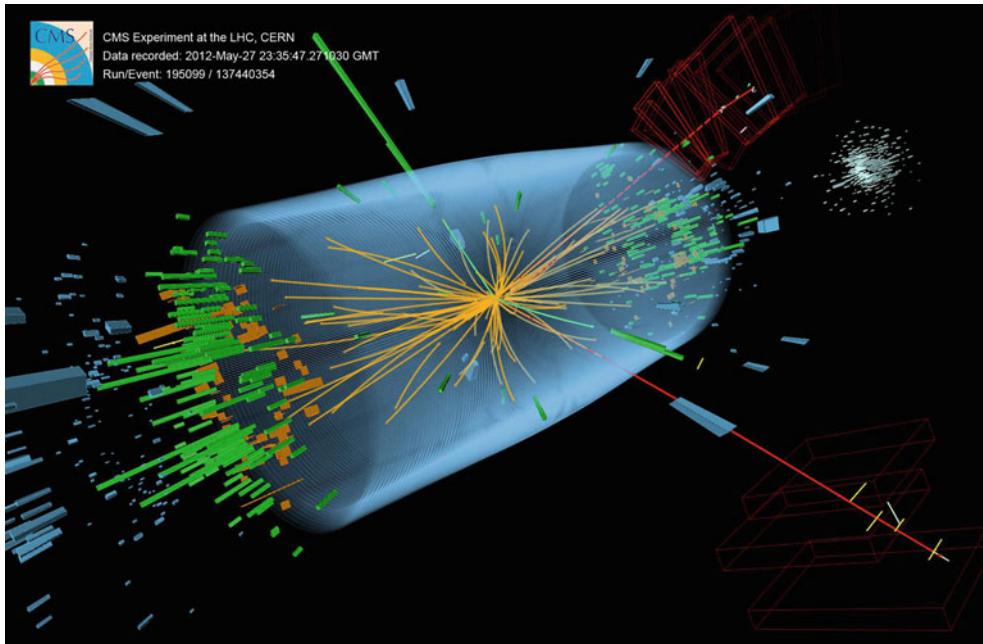
Mit unterem Index transformiert  $x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$  wie  $\partial_\mu$  (wovon man sich auch leicht am Beispiel einer Standard-Lorentz-Transformation überzeugt, in der gleichzeitig der räumliche Vektor  $\mathbf{x}$  in  $x_\mu$  und der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  in  $\Lambda_\mu^\nu$  ein negatives Vorzeichen bekommen).

## Literatur

- Bell, J.: How to teach special relativity. In: Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics. Cambridge University Press, Cambridge (1987)
- Cocke, W.J.: Relativistic Corrections for Terrestrial Clock Synchronization, Phys. Rev. Lett. **16**, 662–664 (1966)
- Einstein, A.: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17**, 891 (1905); on-line: [http://wikilivres.ca/wiki/Zur\\_Elektrodynamik\\_bewegter\\_Körper](http://wikilivres.ca/wiki/Zur_Elektrodynamik_bewegter_Körper)
- Fölsing, A.: *Albert Einstein*. Suhrkamp, Frankfurt am Main (1999)
- Holton, G.: Einstein and the “Crucial” Experiment, Am. J. Phys. **37**, 968 (1969)
- Kraus, U., Borchers, M.: Fast lichtschnell durch die Stadt, Physik in unserer Zeit, Heft 2/2005, S. 64–69. Online: <http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de>
- Lampa, A.: Wie erscheint nach der Relativitätstheorie ein bewegter Stab einem ruhenden Beobachter? Zeitschrift für Physik **27**, 138–148 (1924)
- Minkowski, H.: Raum und Zeit, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker- Vereinigung, Leipzig (1909). Online: [http://de.wikisource.org/wiki/Raum\\_und\\_Zeit\\_\(Minkowski\)](http://de.wikisource.org/wiki/Raum_und_Zeit_(Minkowski))
- Overduin, J.: Spacetime and Spin, <http://einstein.stanford.edu/SPACETIME/spacetime4.html>. Zugegriffen: 24. August 2013.
- Penrose, R.: The Apparent Shape of a Relativistically Moving Sphere. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **55**, 137–139 (1959)
- Petkov, V.: Accelerating spaceships paradox and physical meaning of length contraction, [arXiv:0903.5128](https://arxiv.org/abs/0903.5128), in: V. Petkov, Relativity and the Nature of Spacetime. Springer, Berlin (2009)
- Poincaré, H., *Sur la dynamique de l'électron*, Comptes Rendus **140**, 1504–1508 (1905); erweiterte Version in: Rendiconti del Circolo matematico Rendiconti del Circolo di Palermo **21**, 129–176 (1906) - on-line: [http://fr.wikisource.org/wiki/Sur\\_la\\_dynamique\\_de\\_l'électron\\_\(juillet\)](http://fr.wikisource.org/wiki/Sur_la_dynamique_de_l'électron_(juillet))
- Sexl, R.U., Urbantke, H.K.: Relativität, Gruppen, Teilchen. Springer, Wien (1992)
- Terrell, J.: Invisibility of the Lorentz Contraction. Physical Review **116**, 1041–1045 (1959)
- Voigt, W.: *Über das Doppler'sche Princip*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, Nr. 8, 41–51 (1887), online [http://de.wikisource.org/wiki/Ueber\\_das\\_Doppler'sche\\_Princip](http://de.wikisource.org/wiki/Ueber_das_Doppler'sche_Princip)

# Relativistische Mechanik

# 10



Was wird in der relativistischen Mechanik aus den Newton'schen Axiomen?

Woraus folgt die berühmte Gleichung  $E = mc^2$ ?

Was ist Masse?

Wie kann neue Materie erzeugt werden?

10.1 Punktteilchen, Ruhemasse und Viererimpuls . . . . .	356
10.2 Relativistische Bewegungsgleichungen . . . . .	357
10.3 Relativistische Teilchenstöße . . . . .	360
Aufgaben . . . . .	370
Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	373
Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	374
Literatur . . . . .	378

Wie wir in Kap. 9 gesehen haben, wird in der speziellen Relativitätstheorie der dreidimensionale euklidische Raum der Newton'schen Mechanik mit einer unabhängig definierten absoluten Zeit durch den vierdimensionalen Minkowski-Raum ersetzt. Die Zeit spielt zwar weiterhin eine besondere Rolle, aber Gleichzeitigkeit ist nun ähnlich relativ wie schon vor der Relativitätstheorie die Aussage, zwei separate Ereignisse fänden am selben Ort statt. Dem Einstein'schen Relativitätsprinzip und der Geometrie des Minkowski-Raumes wird man am besten durch die Verwendung von Vierergrößen anstelle der gewohnten dreidimensionalen Vektoren gerecht.

In diesem Kapitel, in dem die relativistische Mechanik begründet werden soll, werden wir daher in Abschn. 10.1 zuerst den Impuls eines Punktteilchens zu einer Vierergröße machen und damit in Abschn. 10.2 das zweite Newton'sche Axiom (Kraft als zeitliche Änderung des Impulses) neu formulieren. Dabei wird sich herausstellen, dass Energie und Impuls ähnlich zu kombinieren sind wie Zeit- und Raumkoordinaten. Als besonders folgenreicher neuer Aspekt stellt sich dabei heraus, dass die Masse nicht länger eine erhaltene Größe ist, sondern Energie in Masse und umgekehrt umgewandelt werden kann. Ohne auf die dafür notwendigen Wechselwirkungen eingehen zu müssen, werden in Abschn. 10.3 zunächst relativistische Streuprozesse diskutiert, bei denen Massen erhalten bleiben, und danach solche, bei denen Materie erzeugt oder vernichtet wird.

Das Eröffnungsbild dieses Kapitels zeigt die Produktion von zahlreichen Elementarteilchen bei einer hochenergetischen Kollision von zwei Protonen im Large Hadron Collider des CERN (der im Eröffnungsbild von Kap. 9 zu sehen ist), wobei in diesem konkreten Ereignis aus den Zerfallsprodukten auf das lange gesuchte Higgs-Teilchen geschlossen werden konnte. (Das Higgs-Teilchen, dessen Entdeckung im Juli 2012 bekannt gegeben wurde, ist gemäß dem Standardmodell der Teilchenphysik verantwortlich dafür, dass Elementarteilchen wie Elektronen oder Quarks überhaupt eine Masse tragen.)

## 10.1 Punktteilchen, Ruhemasse und Viererimpuls

In Kap. 9 haben wir gesehen, dass es in der speziellen Relativitätstheorie keine starren Körper geben kann. Ausdehnungslose Punktteilchen machen jedoch in dieser Hinsicht keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

**Achtung** Gewisse fundamentale Schwierigkeiten machen allerdings die mit Punktteilchen verknüpften Felder, nämlich wenn sie elektrische Ladung tragen und, allgemeiner, wenn man das Gravitationsfeld einbezieht, das sie selbst erzeugen, auch wenn letzteres für Elementarteilchen praktisch völlig vernachlässigbar ist. Diese Felder werden am Ort des Punktteilchens unendlich und führen notwendigerweise dazu, dass man bei hinreichend kleinen Abständen an die Grenzen der klassischen Physik stößt.

Betrachten wir den einfachsten Fall eines strukturlosen freien Punktteilchens (ohne den bei Elementarteilchen noch möglichen Spin, den intrinsischen Drehimpuls), dann ist sein Bewegungszustand vollständig durch eine Weltlinie  $x^\mu(t)$  beschrieben, welche die gesamte Geschichte dieses Teilchens wiedergibt. Dieser Weltlinie ist in Lorentz-invariante Weise eine Eigenzeit  $\tau$  zugeordnet, über die die Vierervektoren der Vierergeschwindigkeit  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  und der Viererbeschleunigung  $a^\mu = du^\mu/d\tau$  definiert werden können.

### Frage 1

Rufen Sie sich (ohne gleich nachzuschlagen) den Zusammenhang von Koordinaten- und Eigenzeit und damit von Vierer- und Dreiergeschwindigkeit in Erinnerung.

Ein elementares Punktteilchen ist durch seine *invariante Masse* charakterisiert, die dadurch definiert ist, dass man sie im (momentanen) Ruhesystem des Teilchens misst. Man nennt diese so definierte Masse deshalb auch *Ruhemasse*. Für zusammengesetzte Objekte wie Raketen macht es natürlich auch Sinn, eine zeitlich veränderliche Ruhemasse zu betrachten (siehe Aufgabe 10.2). Die auf diese Weise definierte Masse ist offensichtlich ein Lorentz-Skalar, d. h. eine Größe, die für jedes Bezugssystem dieselbe Bedeutung hat: Jeder Beobachter übernimmt einfach den im Ruhesystem bestimmten Wert. Weil das Produkt aus einem Vierervektor mit einer invarianten Größe wieder einen Vierervektor darstellt, kann ein Lorentz-kovarianter Viererimpuls einfach durch das Produkt von Ruhemasse und Vierergeschwindigkeit definiert werden.

### Viererimpuls

Der Viererimpuls eines Punktteilchens mit Ruhemasse  $m$  ist definiert durch

$$p^\mu := m u^\mu. \quad (10.1)$$

In einem gegebenen Inertialsystem, in dem das Punktteilchen die Dreiergeschwindigkeit  $v(t)$  hat, ist

$$p^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = m \gamma(v) \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

Der Dreierimpuls ist damit durch

$$\mathbf{p} = m \gamma(v) \mathbf{v} \quad (10.3)$$

gegeben. Dies stimmt mit der nichtrelativistischen Definition eines Impulses überein, wenn man eine geschwindigkeitsabhängige Masse  $m(v) = \gamma(v) m$  einführt (in der älteren Literatur auch *relativistische Masse* genannt). Im Folgenden wird in Übereinstimmung mit den heutigen Gebräuchen  $m$  aber immer die Ruhemasse  $m = m(0)$  bezeichnen.

Da das Betragsquadrat der Vierergeschwindigkeit durch  $u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2$  gegeben ist, folgt für den Viererimpuls

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (10.4)$$

Die Nullkomponente ist damit durch  $p^0 = +\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}$  gegeben (positiv, weil in (10.2)  $m$ ,  $\gamma$  und  $c$  alles positive Größen sind). Ihre physikalische Bedeutung wird im Folgenden klar werden, wenn wir die relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Bewegungsgleichung betrachten.

## 10.2 Relativistische Bewegungsgleichungen

### Viererkraft

So wie in der Newton'schen Bewegungsgleichung eine unter Galilei-Transformationen passend transformierende („Galilei-Kovariante“) vektorielle Kraft durch

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (10.5)$$

definiert wird, kann auch eine Lorentz-kovariante Kraft durch Verwendung der entsprechenden Vierergrößen definiert werden.

#### Viererkraft

Eine Lorentz-kovariante Viererkraft ist durch die Ableitung des Viererimpulses nach der Lorentz-invarianten Eigenzeit gegeben:

$$F^\mu := \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (10.6)$$

**Achtung** Lorentz-Kovarianz bzw. das Attribut Lorentz-kovariant bedeuten hier lediglich, dass sich alle Vierergrößen entsprechend ihrer Indexstruktur transformieren; die  $F^\mu$  sind eigentlich kontravariante Komponenten, aber wir könnten diese Gleichung genauso gut mit unteren, kovarianten Komponenten anschreiben. Die zugehörigen physikalischen (abstrakten) Vektoren haben dagegen eine völlig invariante Bedeutung. ◀

Wir können nun für ein gegebenes Inertialsystem mit seiner Koordinatenzeit  $t$  die Definition der Newton-Kraft (10.5) beibehalten und darin  $\mathbf{p}$  als den relativistischen Dreierimpuls einsetzen. Wegen

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} = \gamma(v) \frac{d}{dt}$$

sind die räumlichen Komponenten von  $F^\mu$  aber nun durch  $\gamma F$  gegeben.

### Zusammenhang von Viererkraft und Newton-Kraft

Bezeichnet in einem gegebenen Inertialsystem  $\mathbf{F}$  weiterhin die gewöhnliche Zeitableitung des (relativistischen) Impulses  $\mathbf{p}$ , dann gilt

$$F^\mu = \begin{pmatrix} F^0 \\ F^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^0 \\ \gamma \mathbf{F} \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

**Achtung** Ganz ähnlich wie bei der Vierergeschwindigkeit enthalten die räumlichen Komponenten nicht einfach die entsprechende Dreiergröße, sondern es ist noch ein  $\gamma$ -Faktor im Spiel. Bei der Vierergeschwindigkeit hatten wir dies durch die Notation mit unterschiedlichen Buchstaben ( $u^\mu$  und  $v$ ) berücksichtigt. Bei der Kraft ist aber darauf zu achten, ob es sich um die räumlichen Komponenten einer Vierergröße oder die Dreierkomponenten handelt,  $F^m = \gamma(\mathbf{F})_m$ ! Ebenso ist bei der Viererbeschleunigung  $a^m \neq (\mathbf{a})_m$ . Diese beiden Größen werden allerdings eine Ausnahme bilden. Dennoch muss man auch bei anderen Vierergrößen achten, wenn räumliche Komponenten betrachtet werden. So ist beim Viererimpuls zwar  $p^m = (\mathbf{p})_m$ , aber  $p_m = \eta_{mv} p^v = -(\mathbf{p})_m$  bringt ein anderes Vorzeichen ins Spiel. ◀

Bei Objekten wie Punktteilchen, deren Masse zeitunabhängig ist, folgt für die Viererkraft aus (10.6) weiterhin, dass Kraft durch Masse mal Beschleunigung gegeben ist,

$$F^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} = m a^\mu, \quad (10.8)$$

aber nicht länger für die Dreiergrößen. Mit dem Zusammenhang von Vierer- und Dreierbeschleunigung, der in Aufgabe 9.6 ausgerechnet wurde, gilt dies nur im momentanen Ruhesystem des Teilchens, in dem  $v = 0$  ist. In einem allgemeinen Bezugssystem, gegenüber dem sich das Teilchen mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  bewegt, ist

$$\mathbf{F} = m \gamma(v) \mathbf{a} + m \gamma^3(v) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{v}. \quad (10.9)$$

Die relativistische Trägheitskraft zeigt also nicht notwendigerweise in dieselbe Richtung wie die Beschleunigung  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ . Dies ist nur sichergestellt, wenn entweder  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$  oder  $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$  ist.

### Frage 2

Überlegen Sie sich, dass aber eine Kraft, die immer in eine fixe räumliche Richtung zeigt, ein anfänglich ruhendes Teilchen in eine lineare beschleunigte Bewegung (d. h. entlang einer Geraden) versetzt.

## Hyperbolische Bewegung

Betrachten wir nun den Fall, dass ein Teilchen durch eine konstante Kraft beschleunigt wird,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \text{const}, \quad (10.10)$$

was zumindest für beschränkte Raumbereiche durch ein konstantes elektrisches Feld oder ein Gravitationsfeld physikalisch realisierbar ist.

Bei konstanter Masse bedeutet konstante Newton-Kraft bezüglich eines Inertialsystems auch konstante Kraft bzw. Beschleunigung im Eigensystem des Teilchens, denn die Lorentz-kovariante Definition

$$m a^\mu = m \frac{d}{d\tau} u^\mu = m \frac{d}{d\tau} \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = F^\mu = \begin{pmatrix} F^0 \\ \gamma \mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

reduziert sich in einem Inertialsystem, bezüglich dessen das Teilchen instantan in Ruhe ist, wegen  $\gamma = 1$  und  $\partial_\tau \gamma \propto \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$  wieder auf (10.10). Das Teilchen erfährt also in seinem Eigensystem (das kein Inertialsystem ist) eine konstante Beschleunigung  $\tilde{a} = |\mathbf{F}|/m$ . In einem festen Inertialsystem kann die Dreierbeschleunigung dagegen keine Konstante sein, weil sonst die Geschwindigkeit linear mit der Koordinatenzeit wachsen müsste und irgendwann die Lichtgeschwindigkeit übersteigen würde.

Nehmen wir an, dass das Teilchen in einem Inertialsystem zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Ursprung ruht und in positiver  $x$ -Richtung beschleunigt wird, dann folgt aus der Bewegungsgleichung

$$m \frac{d}{dt} (\gamma(v) v) = m \tilde{a}. \quad (10.12)$$

Die Masse fällt aus dieser Gleichung heraus. Diese beschreibt daher auch eine Rakete, deren Masse bei der Beschleunigung allmählich abnimmt, aber bei der die Eigenbeschleunigung  $\tilde{a}$  konstant gehalten wird (was einer abnehmenden Kraft entspricht).

Mit konstantem  $\tilde{a}$  kann diese Gleichung trivial integriert werden:

$$\gamma(v) v = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \tilde{a} t. \quad (10.13)$$

Aufgelöst nach  $v$ ,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\tilde{a} t}{\sqrt{1 + \tilde{a}^2 t^2/c^2}}, \quad (10.14)$$

und nochmals integriert ergibt

$$x(t) = \frac{c^2}{\tilde{a}} \left( \sqrt{1 + \frac{\tilde{a}^2 t^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (10.15)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Hyperbel mit einer lichtartigen Asymptote, die bei  $c^2/\tilde{a}$  die  $ct$ -Achse schneidet (Abb. 10.1).

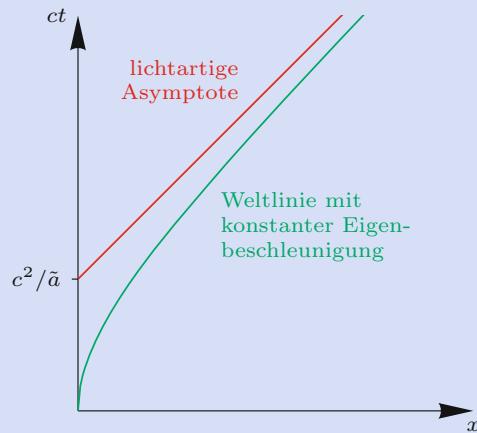


Abb. 10.1 Hyperbolische Bewegung

Überzeugen Sie sich, dass das Resultat (10.15) für kleine Zeiten mit dem nichtrelativistischen Ergebnis  $x(t) = (\tilde{a}/2)t^2$  übereinstimmt, das dagegen eine Parabel darstellt.

Wird ein Punktteilchen in alle Ewigkeit konstant beschleunigt, kann es ab dem Zeitpunkt  $t = c/\tilde{a}$  auch nicht mehr von einem Photon eingeholt werden, das ihm mit Lichtgeschwindigkeit nachläuft. Für ein solches Punktteilchen existiert daher ein *Ereignishorizont* – ein entsprechender Beobachter ist von der Kenntnis aller Ereignisse jenseits eines Horizonts ausgeschlossen (in diesem Beispiel *Rindler-Horizont* genannt, nach dem theoretischen Physiker Wolfgang Rindler, \*1924). Während in diesem Beispiel der Ereignishorizont keine globale Bedeutung hat, spielen Ereignishorizonte in der allgemeinen Relativitätstheorie eine fundamentale Rolle, da sie die kausale Struktur der gesamten Raumzeit bestimmen.

Die Eigenzeit entlang der hyperbolischen Weltlinie wird in Aufgabe 10.1 berechnet und ergibt sich als

$$\tau = \frac{c}{\tilde{a}} \operatorname{arsinh} \frac{\tilde{a} t}{c} < t. \quad (10.16)$$

Mit  $\operatorname{arsinh} z \equiv \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$  sieht man, dass  $\tau$  für große Zeiten nur logarithmisch mit  $t$  anwächst (während für kleine Zeiten mit  $\operatorname{arsinh} z = z + O(z^2)$  natürlich  $\tau \approx t$  folgt). ▲

## Relativistische Energie

Wie wir in (9.79) gefunden haben, ist die Viererbeschleunigung im Sinne der Minkowski-Metrik orthogonal zur Viergeschwindigkeit. Für ein Punktteilchen folgt aus (10.8) daher

$$0 = m a^\mu u_\mu = F^\mu u_\mu = \gamma (cF^0 - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}), \quad (10.17)$$

woraus sich die Bedeutung von  $F^0 \equiv dp^0/d\tau$  ablesen lässt:

$$F^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\gamma}{c} \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\gamma}{c} \frac{dW}{dt} = \frac{d}{d\tau} \frac{W}{c}, \quad (10.18)$$

wobei  $dW$  die Arbeit ist, die bei einer infinitesimalen Verschiebung  $d\mathbf{x}$  von der Kraft  $\mathbf{F}$  geleistet wird. Da gemäß (10.2)  $p^0 \equiv \gamma mc$  ist, gilt

$$\frac{d}{d\tau} W = \frac{d}{d\tau} (cp^0) = \frac{d}{d\tau} (\gamma(v) mc^2). \quad (10.19)$$

Wir können also abgesehen von einer beliebigen additiven Konstanten  $cp^0$  als *relativistische Energie* identifizieren: Wurde ein anfänglich freies Teilchen eine Zeit lang durch äußere Kräfte beschleunigt, dann hat sich die Größe  $cp^0$  um die geleistete Arbeit verändert.

### Relativistische Energie

Die relativistische Energie eines (freien) Punktteilchens ist definiert durch

$$E = \gamma(v) mc^2. \quad (10.20)$$

Auch einer ruhenden Masse wird somit eine Energie zugeordnet; man spricht daher von einer *Äquivalenz von Masse und Energie*.

**Achtung** Die ursprünglich von Einstein angegebene berühmte Relation  $E = mc^2$  bezieht sich auf die geschwindigkeitsabhängige Masse  $m(v)$ . Gerade wegen dieses direkten Zusammenhangs verzichtet man in der neueren Literatur aber auf den Begriff einer geschwindigkeitsabhängigen Masse und bezieht sich gleich auf die Energie. Der Begriff der Masse kann dann für die invariante Ruhemasse reserviert werden.

Gl. (10.4) gibt den relativistischen Zusammenhang von Teilchenenergie und Teilchenimpuls an.

### Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 \equiv \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad (10.21)$$

Diese Relation behält ihre Gültigkeit auch für *masselose Teilchen*, wobei die Identifikation von  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$  fallen gelassen wird. Masselose Teilchen haben  $|\mathbf{v}| = c$  und  $|\mathbf{p}| = E/c$ ; sie werden durch einen lichtartigen Vierervektor ( $p^\mu p_\mu = 0$ ) charakterisiert.

Das wichtigste Beispiel für masselose Teilchen sind die in der Quantenmechanik definierten Lichtquanten, die *Photonen*. Wie in Bd. 3, Kap. 1 begründet wird, sind Energie und Impuls von Photonen durch das Planck'sche Wirkungsquantum  $h$  mit Frequenz  $\nu$  und Wellenlänge  $\lambda$  von Licht verknüpft:

$$E = |\mathbf{p}| c = h\nu = \frac{hc}{\lambda}. \quad (10.22)$$

Für *massive* Punktteilchen haben wir dagegen den Zusammenhang

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}}, \quad (10.23)$$

der für  $v \ll c$  nach Potenzen von  $\mathbf{p}^2/(m^2 c^2)$  entwickelt werden kann:

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2} - \frac{1}{8} \frac{(\mathbf{p}^2)^2}{m^4 c^4} + \dots \right) \\ &= mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p}^2)^2}{8m^3 c^2} + \dots \end{aligned} \quad (10.24)$$

Der zweite Term in dieser Entwicklung ist gerade die nicht-relativistische kinetische Energie, die weiteren Terme sind die relativistischen Korrekturen dazu:

$$E = mc^2 + T. \quad (10.25)$$

**Achtung** Die gängige Bezeichnung „massives“ Punktteilchen soll nicht ausdrücken, dass ein Teilchen ungewöhnlich große Masse besäße, sondern nur, dass die Masse für einen bedeutenden Teil der Gesamtenergie verantwortlich ist. Wenn die Energie sehr viel größer als die Ruheenergie  $mc^2$  ist, kann dagegen die Masse in niedrigster Ordnung vernachlässigt werden, und man hat  $E \approx |\mathbf{p}| c$ . In diesem *ultrarelativistischen* Grenzfall können massebehaftete Punktteilchen also näherungsweise wie masselose Teilchen behandelt werden.

## Konservatives Kraftfeld

Ist ein Teilchen nicht frei, sondern einer Kraft ausgesetzt, die sich in einem Bezugssystem als Gradient eines zeitunabhängigen Potenzials  $V(\mathbf{x})$  darstellen lässt,  $\mathbf{F} = -\nabla V$ , dann ist

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -\nabla V \cdot d\mathbf{x} = -dV. \quad (10.26)$$

Mit  $dW = d(\gamma mc^2)$  folgt, dass die Kombination

$$\gamma mc^2 + V = mc^2 + T + V = E \quad (10.27)$$

in einem konservativen Kraftfeld eine Konstante der Bewegung ist. Da  $V$  selbst nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, ist  $E$  nicht eindeutig bestimmt. Ist das Kraftfeld allerdings räumlich konzentriert und verschwindet für große Abstände, kann

man  $V$  asymptotisch als null vereinbaren, sodass  $E$  dort mit der Definition der relativistischen Energie für freie Teilchen übereinstimmt.

### Elektronenvolt als Einheit für Energie und Masse

Eine in der nichtrelativistischen Quantenmechanik gelegentlich verwendete Einheit für die Energie ist die Änderung der potenziellen Energie, die ein Elektron beim Durchqueren einer Potenzialdifferenz von 1 V erfährt. Diese Energieeinheit wird *Elektronenvolt* oder *Elektronvolt* genannt; die Umrechnung in die SI-Einheit Joule ist dabei

$$1 \text{ eV} \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (10.28)$$

Photonen des sichtbaren Lichtes haben Energien zwischen 1,6 und 3,3 eV.

Aufgrund der Äquivalenz von Energie und Masse kann man das Elektronenvolt auch zur Angabe von Ruhemasen verwenden. Die Masse eines Elektrons ist z. B.

$$m_{\text{Elektron}} \approx 0,511 \text{ MeV}/c^2, \quad (10.29)$$

die Masse eines Protons

$$m_{\text{Proton}} \approx 0,938\,272 \text{ GeV}/c^2. \quad (10.30)$$

Das Giga-Elektronenvolt (GeV, also  $10^9$  eV) hat sich in der modernen Teilchenphysik als gängige Einheit für die Angabe von Energien durchgesetzt. Für Massen und Impulse wird  $\text{GeV}/c^2$  bzw.  $\text{GeV}/c$  verwendet. ▶

**Achtung** Dies ist insbesondere für Kernkräfte der Fall. Bei langreichweitigen Kräften wie der Coulomb-Kraft ist die Annahme, dass Wechselwirkungen räumlich begrenzt sind, streng genommen nicht richtig, wie in Abschn. „Die Coulomb-Streuung“ in der „So geht's weiter“-Box am Ende von Bd. 3, Kap. 12 noch diskutiert werden wird. Wir werden hier daher einfach annehmen, dass auf größeren Abständen Coulomb-Kräfte abgeschirmt werden. ◀

Für eine überschaubare Zahl von Teilchen kann man diese Prozesse dadurch beschreiben, dass vor einem Wechselwirkungsergebnis ein Satz  $\{A\}$  von Teilchen mit Impulsen  $p_A^\mu$  vorliegt und nachher ein eventuell unterschiedlicher Satz  $\{A'\}$  mit Impulsen  $p_{A'}^\mu$ . In Abwesenheit äußerer Kräfte gilt dann

$$p_{\text{vorher}}^\mu = p_{\text{nachher}}^\mu = p^\mu = \sum_A p_A^\mu = \sum_{A'} p_{A'}^\mu. \quad (10.32)$$

Bleiben die Teilchen bei einem solchen Stoß als solche erhalten, ohne dass sich abgesehen vom Viererimpuls etwas an ihnen ändert (wie die Masse bei Elementarteilchen oder der innere Aufbau bei zusammengesetzten Objekten), dann spricht man von einem *elastischen Stoß* oder einer *elastischer Streuung*. In allen anderen Fällen hat man es mit einem *inelastischen Stoß* zu tun.

Wir haben elastische Stöße und Streuung bereits in Abschn. 3.4 in der nichtrelativistischen Mechanik behandelt, sogar unter Einbeziehung von Gravitations- oder Coulomb-Potenzialen. Ebenso wie im nichtrelativistischen Fall lassen sich aber auch ohne die detaillierte Kenntnis der speziellen Wechselwirkungen allgemeine Aussagen über die mögliche Kinematik von Streuprozessen treffen, nämlich durch die Analyse der Konsequenzen der Energie-Impuls-Erhaltung. Ein wesentlicher Unterschied von relativistischen Teilchenstößen zum nichtrelativistischen Fall ist nun, dass Masse im Allgemeinen keine weitere Erhaltungsgröße ist; in der Relativitätstheorie ist dies nur bei elastischen Stoßprozessen gegeben.

Beispiele für elastische Stöße sind Kollisionen von Billardkugeln, wenn die geringfügige Erwärmung beim Stoß vernachlässigt wird. Wird bei einem Stoß in nicht vernachlässigbarem Ausmaß kinetische Energie in Wärme umgewandelt, so gilt weiterhin die Erhaltung des Gesamtviererimpulses, aber die Teilchen haben dann wegen der Äquivalenz von Energie und Masse ein klein wenig unterschiedliche Ruhemassen. Ein drastisches Beispiel für einen inelastischen Stoß ist, wenn Billardkugeln auseinanderbrechen oder wenn Objekte bei einem Stoß aneinanderkleben bleiben und somit ein neues zusammengesetztes Objekt bilden. In der nichtrelativistischen Mechanik wären auch hier die Summen der Ruhemassen erhalten. Bei Kollisionen von Elementarteilchen können dagegen überhaupt neue Teilchen entstehen oder auch einlaufende komplett vernichtet werden; dabei kann Energie in Masse oder umgekehrt umgewandelt werden.

Wie schon in Abschn. 3.4 kann die Analyse von Streuprozessen oft stark vereinfacht werden, wenn diese in speziellen Bezugsystemen betrachtet werden. Im nichtrelativistischen Fall ergeben sich die dafür notwendigen Transformationen von Energie

## 10.3 Relativistische Teilchenstöße

In Abwesenheit von Kräften ist der Viererimpuls eines Teilchens erhalten. Für mehrere nicht wechselwirkende Teilchen kann man den *Gesamtviererimpuls*

$$p^\mu = \sum_A p_A^\mu \quad (10.31)$$

definieren, der ebenso erhalten ist, wobei der Index  $A$  die Teilchen durchnummeriert.

Wirken Kräfte nur zwischen den einzelnen Teilchen, dann bleibt der Gesamtviererimpuls erhalten, auch wenn die einzelnen  $p_A^\mu$  zeitabhängig werden. Die Erhaltung von Gesamtenergie und Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems von wechselwirkenden Teilchen ist, wie wir in Kap. 5 gesehen haben, eine Konsequenz der Homogenität von Zeit und Raum.

Wechselwirkungen zwischen Teilchen sind typischerweise konzentriert auf kleine Raumzeitgebiete, nämlich wenn sich die Teilchen hinreichend nahe kommen.

und Impuls aus dem einfachen Additionsgesetz von Geschwindigkeiten. In der Relativitätstheorie sind Energie und Impuls aber Komponenten eines Vierervektors, die dabei einer Lorentz-Transformation unterworfen sind.

## Schwerpunktsystem

Ein Inertialsystem, in dem der Gesamtdreierimpuls verschwindet, definiert das *Schwerpunktsystem* (SPS).

### Frage 3

Überlegen Sie sich, dass ein Gesamtviererimpuls, der sich aus lauter zeit- oder lichtartigen Vierervektoren ( $p_A^\mu p_{A\mu} = m_A^2 c^2 \geq 0$ ) zusammensetzt, zeitartig ist, sodass sich das Schwerpunktsystem gegenüber anderen Inertialsystemen mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt. Ein lichtartiger Gesamtviererimpuls tritt nur auf, wenn ausschließlich lichtartige Vierervektoren mit gleichgerichteten Dreierimpulsen addiert werden, was offenbar keinem Stoßprozess entspricht.

(Die Antwort liefert die Dreiecksungleichung für die Addition von räumlichen Vektoren.)

In einem System mit einem Gesamtdreierimpuls  $\mathbf{p}$  mit  $|\mathbf{p}| < p^0 = E/c$  kann zuerst durch Drehung des Koordinatensystems  $\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\hat{\mathbf{e}}_x$  erreicht werden und dann durch die Standard-Lorentz-Transformation (9.21) in positiver  $x$ -Richtung  $\mathbf{p}_{\text{SPS}} = 0$  durch

$$p_{\text{SPS}}^1 = \gamma p^1 - \beta \gamma p^0 = 0 \quad \text{mit } \beta = \frac{p^1}{p^0} = \frac{|\mathbf{p}|}{E/c}. \quad (10.33)$$

Letzteres bestimmt die Schwerpunktgeschwindigkeit im ursprünglichen Inertialsystem als

$$v_{\text{SPS}} = \frac{|\mathbf{p}|}{E/c^2}. \quad (10.34)$$

Das Quadrat des Gesamtviererimpulses ist eine Lorentz-Invariante und definiert die *invariante Schwerpunktmasse*  $M$ :

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 =: M^2 c^2. \quad (10.35)$$

Im Schwerpunktsystem ist

$$p_{\text{SPS}}^\mu = \begin{pmatrix} Mc \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (10.36)$$

## Elastischer Stoß zweier Teilchen im Schwerpunktsystem

Betrachten wir den elastischen Stoß zweier Teilchen mit Ruhenmassen  $m_A$  und  $m_B$  im Schwerpunktsystem, so können wir vor

dem Stoß schreiben

$$p_A^\mu = \begin{pmatrix} E_A/c \\ \mathbf{p}_A \end{pmatrix}, \quad p_B^\mu = \begin{pmatrix} E_B/c \\ -\mathbf{p}_A \end{pmatrix} \quad (10.37)$$

mit den Viererquadraten

$$\frac{E_A^2}{c^2} - \mathbf{p}_A^2 = m_A^2 c^2, \quad \frac{E_B^2}{c^2} - \mathbf{p}_A^2 = m_B^2 c^2 \quad (10.38)$$

und nach dem Stoß

$$p_{A'}^\mu = \begin{pmatrix} E_{A'}/c \\ \mathbf{p}_{A'} \end{pmatrix}, \quad p_{B'}^\mu = \begin{pmatrix} E_{B'}/c \\ -\mathbf{p}_{A'} \end{pmatrix} \quad (10.39)$$

mit

$$\frac{E_{A'}^2}{c^2} - \mathbf{p}_{A'}^2 = m_A^2 c^2, \quad \frac{E_{B'}^2}{c^2} - \mathbf{p}_{A'}^2 = m_B^2 c^2. \quad (10.40)$$

In der Gesamtviererimpulsbilanz (10.32) sind die räumlichen Komponenten damit vorher und nachher null, sodass als einzige Relation die Gesamtenergieerhaltung verbleibt:

$$E_A + E_B = E_{A'} + E_{B'}. \quad (10.41)$$

Aus (10.38) und (10.40) folgt

$$m_A^2 c^4 - m_B^2 c^4 = E_A^2 - E_B^2 = E_{A'}^2 - E_{B'}^2. \quad (10.42)$$

Division dieser Gleichung durch die vorhergehende gibt wegen  $E_A^2 - E_B^2 = (E_A + E_B)(E_A - E_B)$

$$E_A - E_B = E_{A'} - E_{B'}, \quad (10.43)$$

was zusammen mit (10.41) schließlich auf

$$E_A = E_{A'}, \quad E_B = E_{B'} \quad (10.44)$$

führt. Das heißt, im Schwerpunktsystem bleiben bei einem elastischen Stoß die Energien der beiden Teilchen separat erhalten. Wegen der Energie-Impuls-Relationen (10.38) und (10.40) bedeutet dies auch, dass die Beträge der Dreierimpulse unverändert bleiben:

$$|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_{A'}|, \quad |\mathbf{p}_B| = |\mathbf{p}_{B'}|. \quad (10.45)$$

Der elastische Stoß wird somit im Wesentlichen durch einen Streuwinkel  $\vartheta$  beschrieben (Abb. 10.2).

## Elastischer Stoß zweier Teilchen allgemein und im Laborsystem

Obige Ergebnisse für die Viererimpulse im Schwerpunktsystem können durch Lorentz-Transformationen in beliebige Inertialsysteme übersetzt werden. Da Lorentz-Skalare aber dabei

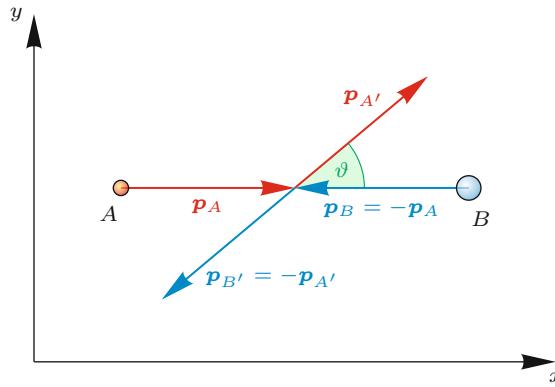


Abb. 10.2 Elastischer Stoß von zwei Teilchen im Schwerpunktsystem

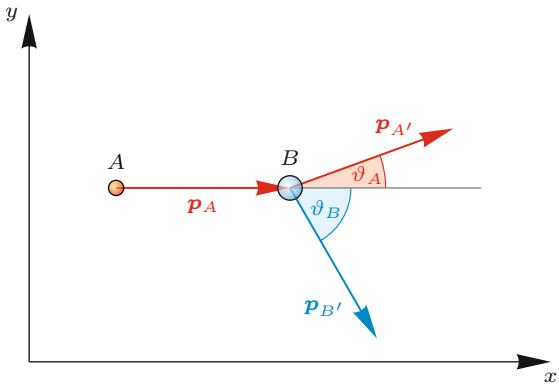


Abb. 10.3 Elastischer Stoß von zwei Teilchen im Laborsystem

unverändert bleiben, ist es rechnerisch vorteilhaft, wann immer möglich die Ergebnisse durch solche auszudrücken. Das zentrale Ergebnis des elastischen Stoßes zweier Teilchen ist (im Schwerpunktsystem) die Erhaltung der individuellen Energien

$$E_A^{\text{SPS}} = E_{A'}^{\text{SPS}}, \quad E_B^{\text{SPS}} = E_{B'}^{\text{SPS}}.$$

Dies sind die Nullkomponenten der Vierervektoren, aber im Schwerpunktsystem ergeben sich diese Relationen bis auf einen gemeinsamen Faktor  $M$  auch durch Kontraktion der Vierervektoren mit dem Schwerpunktimpuls (10.36):

$$p_A^\mu p_\mu = p_{A'}^\mu p_\mu, \quad p_B^\mu p_\mu = p_{B'}^\mu p_\mu. \quad (10.46)$$

Die Größen in diesen Gleichungen sind Lorentz-invariante Skalare. In dieser Form kann das Ergebnis, das im Schwerpunktsystem gewonnen wurde, direkt in einem beliebigen Inertialssystem verwertet werden.

Als ein wichtiges Beispiel betrachten wir den elastischen Stoß, bei dem ein gegenüber  $S$  bewegtes Teilchen  $A$  auf ein in  $S$  ruhendes Teilchen  $B$  (das „Target“) trifft. Das zugehörige Inertialssystem  $S$  wird oft als *Laborsystem* bezeichnet, weil dies vor der Entwicklung von modernen Teilchenbeschleunigern, die zwei Strahlen von Teilchen aufeinander schießen können, die typische Situation bei Streuexperimenten darstellte.

Vor dem Stoß haben wir somit die Viererimpulsvektoren nun in der Form

$$p_A^\mu = \left( \frac{E_A}{c}, p_A, 0, 0 \right)^\top, \quad p_B^\mu = (m_B c, \mathbf{0})^\top \quad (10.47)$$

mit  $E_A^2/c^2 - p_A^2 = m_A^2 c^2$  vorliegen. Der Gesamtviererimpuls ist

$$p^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu = \left( \frac{E_A + m_B c^2}{c}, p_A, 0, 0 \right)^\top = p_{A'}^\mu + p_{B'}^\mu. \quad (10.48)$$

Wählen wir das Koordinatensystem so, dass der Streuprozess in der  $xy$ -Ebene stattfindet, so können wir die Viererimpulse der beiden Teilchen nach dem Stoß durch Einführen zweier unterschiedlicher Winkel bezüglich der Kollisionsachse parametrisieren (Abb. 10.3):

$$\begin{aligned} p_{A'}^\mu &= \left( \frac{E_{A'}}{c}, p_{A'} \cos \vartheta_A, p_{A'} \sin \vartheta_A, 0 \right)^\top, \\ p_{B'}^\mu &= \left( \frac{E_{B'}}{c}, p_{B'} \cos \vartheta_B, -p_{B'} \sin \vartheta_B, 0 \right)^\top \end{aligned} \quad (10.49)$$

mit

$$m_A^2 c^2 = \frac{E_{A'}^2}{c^2} - p_{A'}^2, \quad m_B^2 c^2 = \frac{E_{B'}^2}{c^2} - p_{B'}^2. \quad (10.50)$$

Aus der invarianten Relation  $p_A^\mu p_\mu = p_{A'}^\mu p_\mu$  folgt damit

$$\begin{aligned} E_A (E_A + m_B c^2) - c^2 p_A^2 \\ = E_{A'} (E_A + m_B c^2) - c^2 p_{A'} p_{A'} \cos \vartheta_A, \end{aligned} \quad (10.51)$$

woraus sich mit  $p_{A'} = \sqrt{E_{A'}^2/c^2 - m_A^2 c^2}$  die Energie  $E_{A'}$  bzw. der Impuls  $p_{A'}$  als Funktion von  $\vartheta_A$  bestimmen lässt. Analog gilt  $p_B^\mu p_\mu = p_{B'}^\mu p_\mu$  im Laborsystem

$$\begin{aligned} m_B c^2 (E_A + m_B c^2) \\ = E_{B'} (E_A + m_B c^2) - c^2 p_A p_{B'} \cos \vartheta_B \end{aligned} \quad (10.52)$$

und damit  $E_{B'}$  als Funktion von  $\vartheta_B$ . Der Zusammenhang von  $\vartheta_B$  und  $\vartheta_A$  kann schließlich aus der  $y$ -Komponente von  $p_A^\mu + p_B^\mu = p_{A'}^\mu + p_{B'}^\mu$  gewonnen werden, was auf die Relation

$$p_{A'}(\vartheta_A) \sin \vartheta_A = p_{B'}(\vartheta_B) \sin \vartheta_B \quad (10.53)$$

führt.

### Spezialfall Compton-Streuung

Die obigen Formeln vereinfachen sich, wenn das einlaufende Teilchen A masselos ist, sodass in (10.51)  $cp_A = E_A$  und  $cp_{A'} = E_{A'}$  gesetzt werden kann:

$$E_A m_B c^2 = E_{A'} (E_A + m_B c^2) - E_A E_{A'} \cos \vartheta_A. \quad (10.54)$$

Division durch  $E_A E_{A'} m_B c^2$  ergibt

$$\frac{1}{E_{A'}} = \frac{1}{E_A} + \frac{1}{m_B c^2} (1 - \cos \vartheta_A), \quad (10.55)$$

wobei alternativ  $1 - \cos \vartheta_A = 2 \sin^2(\vartheta_A/2)$  geschrieben werden kann.

Eine wichtige Anwendung dieses Falles ist die *Compton-Streuung* von Photonen an Elektronen, die in Bd. 3, Kap. 1 näher besprochen werden wird (siehe Bd. 3, Abb. 1.7). Da wie erwähnt die Energie von Photonen proportional zur Frequenz und damit die inverse Energie proportional zur Wellenlänge ist, beschreibt (10.55) die Zunahme der Wellenlänge von an Elektronen gestreuten Photonen. ▲

Hat das einlaufende Teilchen A mehr Masse als das ursprünglich ruhende Teilchen B, dann hat es auch nach dem Stoß eine Impulskomponente in Vorwärtsrichtung und daher einen Streuwinkel  $\vartheta_A < \pi/2$ . Dieser Umstand ist qualitativ der gleiche wie in der nichtrelativistischen Mechanik (Abb. 3.12; mit  $\vartheta_1$  anstelle von  $\vartheta_A$ ), allerdings ist der Zusammenhang der Streuwinkel in Schwerpunkt- und Laborsystem, der nichtrelativistisch durch (3.110) gegeben ist, nun etwas komplizierter. Der maximale Winkel, um den das schwerere Teilchen A gestreut werden kann, ist, wie in Aufgabe 10.3 gezeigt wird, gegeben durch

$$\sin \vartheta_A^{\max} = \frac{m_B}{m_A} \quad \text{für } m_A > m_B. \quad (10.56)$$

Bemerkenswerterweise hängt dieses Ergebnis nur von den Massen ab, und nicht davon, wie hoch die Energie des einlaufenden Teilchens ist. Es stimmt daher mit dem Ergebnis überein, das sich in der nichtrelativistischen Mechanik für den maximalen Streuwinkel ergibt.

### Inelastische Prozesse

Wie schon betont, ist in der Relativitätstheorie die Ruhemasse im Allgemeinen keine erhaltene Größe. Betrachten wir z. B. im Schwerpunktsystem zwei identische massive Teilchen, die jeweils mit einer Geschwindigkeit  $v$  aufeinander zu fliegen und ein einziges Teilchen bilden, weil sie irgendwie aneinanderkleben bleiben. Die einlaufenden Teilchen haben dann jeweils die Energie  $E = \gamma(v) m c^2$ , das einzelne dabei entstehende Teilchen

muss aber wegen der Impulserhaltung in Ruhe sein, und seine Energie ist dabei wegen Energieerhaltung

$$E = M c^2 = 2\gamma(v) m c^2 = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} c^2 > (2m) c^2. \quad (10.57)$$

In diesem Fall wird also kinetische Energie in Ruhemasse umgewandelt. Sind diese Teilchen Materielkumpen, dann wurde die kinetische Energie in innere, z. B. thermische, Energie umgewandelt, die gemäß der Relativitätstheorie zur Ruhemasse gerechnet werden muss und tatsächlich ebenso der Gravitation unterworfen ist wie schwere Masse. Diese Effekte sind aber für makroskopische Körper, für die die Lichtgeschwindigkeit praktisch unerreichbar ist, vollkommen vernachlässigbar, da sie von der Ordnung  $(v/c)^2$  sind. Findet eine Umwandlung von Masse in Energie in nennenswertem Ausmaß statt, spricht man von einem *Massendefekt* (siehe hierzu Kasten „Anwendung: Massendefekt und Umwandlung von Masse in Energie“).

Für Elementarteilchen sind Umwandlungen von Energie in Masse und umgekehrt aber von zentraler Bedeutung. Die meisten Elementarteilchen sind instabil und zerfallen unter Umwandlung von Ruhemasse in kinetische Energie in andere Teilchen. Deren Masse muss in Summe kleiner sein als die Ausgangsmasse, andernfalls könnten mangels kinetischer Energie die Zerfallsprodukte nicht auseinanderstreben, und der Zerfall würde gar nicht stattfinden.

Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel, in dem ein instabiles Elementarteilchen in zwei andere zerfällt (oft sind auch mehr als zwei Zerfallsprodukte im Spiel wie beim Zerfall des Neutrons, das in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino zerfällt).

### Zerfall eines Pions

Das in der Kernphysik eine zentrale Rolle spielende positiv oder negativ geladene *Pion*  $\pi^\pm$  zerfällt in ein (ebenfalls instabiles, aber deutlich langlebigeres) leichten Myon  $\mu^\pm$  mit etwa  $\frac{3}{4}$  der Masse eines Pions und ein fast masseloses *Myon-Neutrino*  $\nu_\mu$  bzw. *Myon-Antineutrino*  $\bar{\nu}_\mu$ . (Lange Zeit nahm man sogar an, dass Neutrinos exakt masselos sind. Wie man inzwischen weiß, haben sie eine extrem kleine, aber nicht verschwindende Masse.) Welche Energie und welche Geschwindigkeit hat ein beim Zerfall eines ruhenden Pions entstehendes Myon?

Bezeichnen wir Energien, Impulse und Massen von Pionen, Myonen und Neutrinos mit Indizes  $\pi, \mu, \nu$  (die nun nicht mit Lorentz-Indizes verwechselt werden dürfen), dann lautet die Energieerhaltung

$$E_{\text{vorher}} = m_\pi c^2 = E_{\text{nachher}} = E_\mu + E_\nu. \quad (10.58)$$

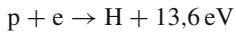
Das praktisch masselose Neutrino hat  $E_\nu = |\mathbf{p}_\nu| c$ . Aufgrund der Impulserhaltung ist

$$|\mathbf{p}_\nu| c = |\mathbf{p}_\mu| c = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}. \quad (10.59)$$

## Anwendung: Massendefekt und Umwandlung von Masse in Energie

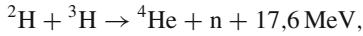
Mit der Einstein'schen Äquivalenz von Energie und Masse ist das Ganze eines gebundenen Systems leichter als die Summe seiner Teile.

Wird bei einer chemischen Reaktion Energie bei der Bildung eines Bindungszustands frei, dann ist dieser sogenannte Massendefekt vernachlässigbar klein. Zum Beispiel hat er bei der Bildung von Wasserstoff durch



die Größenordnung  $\sim 10 \text{ eV}/1 \text{ GeV} = 10^{-8}$ ; bei schwereren Molekülen und geringerer Bindungsenergie ist das Verhältnis noch geringer.

Bedeutendere Massendefekte bis fast 1 % treten bei den Bindungsenergien in Atomkernen auf, mit einem Maximum von etwa 8,8 MeV pro Nukleon bei Eisen und Nickel. Bei der Kernspaltung werden die Unterschiede in den Bindungsenergien bei schwereren Elementen ausgenutzt und somit typischerweise nur 0,01–0,1 % der Masse in Energie umgesetzt; bei der Kernfusion, z. B.



erreicht man etwas bessere Verhältnisse von etwa 0,5 %. Im Vergleich zu chemischen Reaktionen sind die freigesetzten Energien pro Masse auf alle Fälle gewaltig (Abb. 10.4).



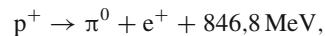
**Abb. 10.4** Explosion der ersten Wasserstoffbombe mit 10,4 Megatonnen TNT-Äquivalent am 1. November 1952 auf der pazifischen Insel Elugelab, die dabei vollständig zerstört wurde (© NNSA)

Die größten Bindungsenergien und damit die größten Massendefekte treten aber durch die gravitative Wechselwirkung in der Astrophysik auf. Bei der Bildung von Sternen werden so bis zu 40 % der Ruhemasse in Energie umgewandelt und abgestrahlt. Einmal gebildet ist allerdings die Kernfusion dafür verantwortlich, dass ein Stern über Milliarden von

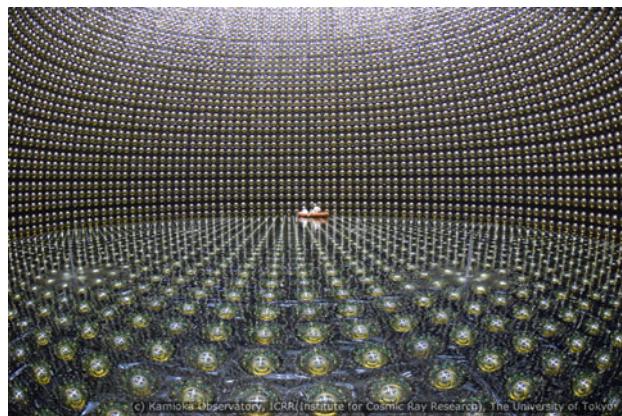
Jahren am Leuchten gehalten werden kann, auch wenn dabei nur noch einige Promille der Masse in Energie umgesetzt werden.

Die maximale Umwandlung von Masse in Energie geschieht natürlich bei der vollständigen Zerstrahlung von Materie durch Annihilation mit Antimaterie, nur ist Antimaterie sehr rar.

Ein in vieler Hinsicht interessanter Fall wäre hier der hypothetische Zerfall eines Protons



wie er von gewissen Theorien jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik vorhergesagt wird und nach dem – bisher allerdings vergeblich – gefahndet wird (Abb. 10.5). Falls solche Prozesse tatsächlich möglich sind, dann nur mit Halbwertszeiten jenseits von  $10^{34}$  Jahren, d. h. um Faktoren  $10^{24}$  oder mehr über dem Alter des Universums von etwa 14 Milliarden Jahren. Solche Theorien sagen aber auch die Existenz von magnetischen Monopolen vorher, die als Katalysator für den Protonzerfall wirken können. Sollten jemals magnetische Monopole gefunden werden, könnte dies im Prinzip auch Energiegewinnung in unvorstellbarem Ausmaß ermöglichen.



**Abb. 10.5** Das unterirdische Experiment Superkamiokande in Japan in einer Mine unter dem Berg Kamioka. Abgeschirmt von kosmischer Strahlung wurde in einem Detektor mit 50.000 t ultrareinem Wasser mithilfe von über 11.000 Photodetektoren und dem Tscherenkov-Effekt Ausschau nach Protonzerfällen gehalten und die aktuelle untere Schranke für die Lebensdauer von Protonen bestimmt. Dieses Experiment entdeckte stattdessen 1998 das Phänomen der Neutrinooszillation, bei der die von der Sonne in Kernreaktionen ausgestrahlten Neutrinos ihre Identität ändern. Das Bild zeigt die Befüllung des mit Photomultipliern ausgekleideten Detektortanks mit Wasser und Wissenschaftler in einem Boot darin (© Kamioka Observatory, ICRR (Institute for Cosmic Ray Research), The University of Tokyo)

Eingesetzt in die Energiebilanz ergibt dies

$$m_\pi c^2 - E_\mu = E_v = |\mathbf{p}_v| c = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}. \quad (10.60)$$

Daraus folgt

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 \quad (10.61)$$

und mit  $p = \gamma mv$  und  $E = \gamma mc^2$

$$v_\mu = \frac{|\mathbf{p}_\mu|}{E_\mu/c^2} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c \approx \frac{7}{25} c \approx 0,28c \quad (10.62)$$

für  $m_\mu \approx \frac{3}{4}m_\pi$ .

Es ist auch interessant, sich anzusehen, wie sich die verfügbaren Energien aufteilen. Die in kinetische Energie umgewandelte Ruhemasse ist durch  $T = m_\pi c^2 - m_\mu c^2 \approx \frac{1}{4}m_\pi c^2$  gegeben. Der Anteil, der auf das Neutrino entfällt, ist

$$T_v = |\mathbf{p}_v| c = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 \approx \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} m_\pi c^2; \quad (10.63)$$

dieses trägt also den Großteil der kinetischen Energie davon. Da aber auf das Myon die restliche Ruhemasse  $\approx \frac{3}{4}m_\pi c^2$  entfällt, ist dessen Gesamtenergie insgesamt höher.

Der geringfügig kompliziertere Fall, wo ein massives Teilchen in zwei massive Teilchen zerfällt, wird in Aufgabe 10.8 behandelt.

Da Energie und Masse in vielfältiger Weise ineinander umgewandelt werden können, kann man sich auch fragen, ob ein masseloses Teilchen wie das Photon bei hinreichend hoher Energie in andere, massebehaftete Teilchen zerfallen kann, z. B. in ein Elektron-Positron-Paar. Diese Frage kann man sofort negativ beantworten, da dann ja auch umgekehrt die Paarvernichtung eines Elektron-Positron-Paares in ein einzelnes Photon möglich sein müsste. Im Schwerpunktssystem ist das aber offenbar nicht möglich, denn dies würde einen verschwindenden Gesamtdreierimpuls verlangen, der auf das einzelne Photon entfiel.

### Kann ein hochenergetisches Photon zerfallen?

Man kann dies auch durch direkte Rechnung in einem Inertialsystem entscheiden, in dem ein hochenergetisches Photon den Impuls  $\mathbf{p}$  und damit die Energie  $E = |\mathbf{p}| c$  trägt. Der hypothetische Zerfall eines Photons in zwei gleich schwere Teilchen  $A'$  und  $B'$  hat die Viererimpulsbilanz

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{A'}/c \\ \mathbf{p}_{A'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{B'}/c \\ \mathbf{p}_{B'} \end{pmatrix} \quad (10.64)$$

mit Energie-Impuls-Relationen

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = 0, \quad \frac{E_{A'}^2}{c^2} - \mathbf{p}_{A'}^2 = m^2 c^2 = \frac{E_{B'}^2}{c^2} - \mathbf{p}_{B'}^2. \quad (10.65)$$

Die erste Relation, welche die Masselosigkeit des Photons ausdrückt, führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= (E_{A'} + E_{B'})^2 - c^2 (\mathbf{p}_{A'} + \mathbf{p}_{B'})^2 \\ &= 2m^2 c^4 + 2c^2 \\ &\quad \cdot \left( \sqrt{p_{A'}^2 + m^2 c^2} \sqrt{p_{B'}^2 + m^2 c^2} - \mathbf{p}_{A'} \cdot \mathbf{p}_{B'} \right). \end{aligned} \quad (10.66)$$

Wegen  $\mathbf{p}_{A'} \cdot \mathbf{p}_{B'} \leq p_{A'} p_{B'}$  ist aber der Ausdruck in der letzten Klammer größer als null, diese Gleichung hat also keine Lösung.

Kinematisch möglich sind dagegen Prozesse wie  $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$  (Elektron-Positron-Paarvernichtung in zwei Photonen), aber auch die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren durch ein hochenergetisches Photon ( $\gamma$ -Quant) in Materie, wo die Anwesenheit von Materie die Gesamtviererimpulserhaltung ermöglicht ( $\gamma + X \rightarrow X + e^- + e^+$ , auch *Gamma-Konversion* genannt). Aus dem gleichen Grund ist es nicht möglich, dass ein freies Elektron spontan ein Photon emittiert ( $e^- \rightarrow e^- + \gamma$ ), während dieser Prozess in Anwesenheit von Materie durchaus vorkommt, z. B. bei der *Tscherenkov-Strahlung* (oft der englischen Transliteration folgend Cherenkov-Strahlung geschrieben, benannt nach dem russischen Physiker Pawel A. Tscherenkov, 1904–1990). Diese tritt immer auf, wenn sich Teilchen mit einer Geschwindigkeit durch ein Medium bewegen, welche die reduzierte Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium übersteigt (siehe Kasten „Anwendung: Tscherenkov-Strahlung“).

## Teilchenerzeugung durch inelastische Stöße

Eine notwendige Bedingung für die Paarerzeugung von massiven Teilchen ist, dass genügend kinetische Energie dafür zur Verfügung steht. Im Schwerpunktssystem steht die gesamte kinetische Energie zur Disposition. Wird tatsächlich die gesamte kinetische Energie in Masse umgewandelt, dann ruht die auf diese Weise erzeugte Masse. Im Laborsystem ist dies nicht möglich, weil aufgrund der Gesamtdreierimpulserhaltung nach dem Stoß der Schwerpunkt weiterhin in Bewegung sein muss, wenn auch mit verringriger Geschwindigkeit, da ja zusätzliche Masse erzeugt wurde. Ein historisch bedeutsames Problem ist beispielsweise die Erzeugung von Antiprotonen durch die Kollision von Protonen im Laborsystem. Die Physiker Emilio Segrè (1905–1989) und Owen Chamberlain (1920–2006) wiesen 1955 die Existenz von Antiprotonen nach, indem sie am Lawrence Berkeley National Laboratory Materie mit Protonen beschossen, die gerade energiereich genug für die Erzeugung von Proton-Antiproton-Paaren waren.

## Vertiefung: Die Mandelstam-Variablen

### 2→2-Prozesse

Für elastische und inelastische relativistische Kollisionsprozesse in der Teilchenphysik, bei der zwei einlaufende Teilchen in zwei (eventuell andere) auslaufende Teilchen übergehen, werden die Lorentz-invarianten Mandelstam-Variablen

$$\begin{aligned} s &:= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ &= m_1^2 c^2 + 2E_1 E_2 / c^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + m_2^2 c^2, \\ t &:= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ &= m_1^2 c^2 - 2E_1 E_3 / c^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + m_3^2 c^2, \\ u &:= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \\ &= m_1^2 c^2 - 2E_1 E_4 / c^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 + m_4^2 c^2 \end{aligned}$$

definiert (benannt nach dem theoretischen Physiker *Stanley Mandelstam*, 1928–2016), wobei die zwei einlaufenden Teilchen mit 1 und 2 und die auslaufenden mit 3 und 4 indiziert sind. Neben den Massenparametern sind dies die bezugsystemunabhängigen Größen, mit denen 2→2-Prozesse beschrieben werden können, wobei nur zwei davon unabhängig sind: Wie man mit der Impulserhaltung  $p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$  leicht nachrechnen kann (Aufgabe 10.6), gilt

$$s + t + u = (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) c^2.$$

Elastische Streuung liegt für  $m_3 = m_1$  und  $m_4 = m_2$  vor; im Fall von inelastischer 2→2-Streuung spricht man auch von *quasielastischer* Streuung.

Die Größe  $s$  ist durch die Schwerpunktsenergie gegeben:

$$s = (E_{\text{SPS}}/c)^2,$$

und es hat sich in der Hochenergiephysik inzwischen  $\sqrt{s}$  als Synonym für die Schwerpunktsenergie etabliert, sodass viele experimentelle Teilchenphysikpublikationen schon im Titel angeben, bei welchem Wert  $\sqrt{s}$  Daten genommen wurden. (In der Teilchenphysik werden üblicherweise Einheiten verwendet, bei denen  $c = 1$  ist.)

Die zweite unabhängige Größe  $t$  (oder auch  $u$ ) charakterisiert den Impulstertrag und damit den Streuwinkel zwischen einlaufendem Teilchen 1 und auslaufendem Teilchen 3 (bzw. 4).

In Aufgabe 10.7 werden Formeln hergeleitet, mit denen die Parameter von Schwerpunkt- und Laborsystemen durch die Mandelstam-Variablen ausgedrückt werden und damit auch bequem ineinander umgerechnet werden können.

## Schwellenenergie für Antiprotonenerzeugung

Im Schwerpunktssystem ist die minimal notwendige Energie dadurch bestimmt, dass nach der Kollision von zwei Protonen vier Teilchen mit der gleichen Ruhemasse  $m = m_{\text{Proton}}$  ohne kinetische Energie vorhanden sind. Der Gesamtviererimpuls nach dem Stoß lautet im Schwerpunktssystem demnach

$$p_{\text{SPS,nachher}}^\mu = \begin{pmatrix} 4mc \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (10.67)$$

Das Lorentz-invariante Quadrat davon,

$$p_{\text{SPS,nachher}}^\mu p_\mu \text{SPS,nachher} = 16m^2 c^2, \quad (10.68)$$

ist im Laborsystem dasselbe und wegen der Gesamtimpulserhaltung gegeben durch

$$p_{\text{LS,vorher}}^\mu p_\mu \text{LS,vorher} = 16m^2 c^2. \quad (10.69)$$

Im Laborsystem ist nun

$$p_{\text{LS,vorher}}^\mu = \begin{pmatrix} E_A/c \\ \mathbf{p}_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (10.70)$$

mit  $E_A^2/c^2 - \mathbf{p}_A^2 = m^2 c^2$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_A}{c} + mc\right)^2 - \mathbf{p}_A^2 &= 2E_A m + 2m^2 c^2 = 16m^2 c^2 \\ \Rightarrow E_A &= 7mc^2, \end{aligned} \quad (10.71)$$

was zu einem Gammafaktor  $\gamma(v) = 7$  und einer Geschwindigkeit von  $\sqrt{\frac{48}{49}}c \approx 0,9897c$  gehört. Die kinetische Energie des einlaufenden Protons ist damit

$$T = E_A - mc^2 = 6mc^2. \quad (10.72)$$

$7mc^2 \approx 6,6 \text{ GeV}$  ist tatsächlich in etwa die Energie des Protonenstrahles, der von Segrè und Chamberlain bei der Suche nach Antiprotonen eingesetzt wurde (6,3 GeV). Da von ihnen Kupferkerne beschossen wurden und die Protonen und Neutronen darin (im Vergleich zu diesen Energien schwach, aber dennoch) gebunden sind, ist hier die Schwellenenergie für die Antiprotonenerzeugung geringfügig niedriger (siehe hierzu auch Aufgabe 10.4).

Hätte man nur in Rechnung gestellt, wie viel Energie die Ruhemassen von einem zusätzlichen Teilchenpaar kosten, hätte man auf eine kinetische Energie  $T$  von  $2mc^2$  für das einlaufende Teilchen geschlossen. Die tatsächlich notwendige kinetische Energie ist aber das Dreifache. ▲

## Anwendung: Tscherenkov-Strahlung

### Wenn geladene Teilchen schneller als das Licht sind

Durch rein kinematische Überlegungen, d. h., ohne Näheres über die dahinter stehenden Wechselwirkungen (die Dynamik) zu wissen, lassen sich oft schon prinzipielle Aussagen über die Möglichkeit von gewissen Prozessen treffen. Ein solches Beispiel war die Schlussfolgerung aus (10.66), dass ein noch so energiereiches Photon nicht spontan in massive Teilchen zerfallen kann. Ganz ähnlich folgt, dass ein freies geladenes Teilchen nicht spontan ein masseloses Photon emittieren kann.

Dies ist allerdings nicht mehr gegeben, wenn der Viererimpuls des Photons paradoxe Weise nicht mehr lichtartig ist, d. h. ein Viererquadrat ungleich null hat. Während auf fundamentaler Ebene Photonen immer masselos sind und einen lichtartigen Viererimpuls haben, führt, wie in Bd. 2, Kap. 6 gezeigt wird, die Lichtausbreitung in transparenter Materie auf Wellenlängen, die gegenüber dem Vakuum durch Division durch einen Brechungsindex  $n > 1$  verkleinert sind ( $\lambda = \frac{c}{n} \nu^{-1}$ ). Auf Lichtquanten umgemünzt, ergibt dies effektiv raumartige Viererimpulse (siehe (10.22))

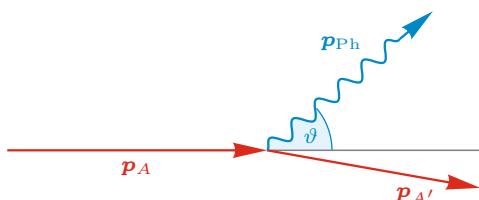
$$p_{\text{Ph}}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ \frac{h}{\lambda} \hat{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \frac{h\nu}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ n \hat{\mathbf{e}} \end{pmatrix},$$

wobei  $\hat{\mathbf{e}}$  die Ausbreitungsrichtung des Lichtquants ist und der Brechungsindex  $n$  von der Frequenz  $\nu$  abhängt. Insbesondere geht  $n$  für große Werte von  $\nu$  und damit für Photonenenergien  $E = h\nu$  jenseits des optischen Spektrums gegen 1.

Mit dieser Information kann die Emission eines Lichtquants in transparenter Materie über die relativistische Energie-Impuls-Erhaltung diskutiert werden. Ist  $p_A^\mu = (E_A/c, \mathbf{p}_A)^\top$  der Viererimpuls eines massiven hochenergetischen Teilchens mit  $p_A^2 = m^2 c^2$ , das nach Emission eines Photons den Viererimpuls  $p_{A'}^\mu = p_A^\mu - p_{\text{Ph}}^\mu$  mit unveränderter Masse  $p_{A'}^2 = m^2 c^2$  haben soll, dann folgt aus letzterem

$$\begin{aligned} p_{A'}^2 &= m^2 c^2 = p_A^2 - 2p_A \cdot p_{\text{Ph}} + p_{\text{Ph}}^2 \\ \Rightarrow 0 &= \frac{h\nu}{c} \left( -2 \frac{E_A}{c} + 2|\mathbf{p}_A| n \cos \vartheta + \frac{h\nu}{c} (1 - n^2) \right), \end{aligned}$$

wobei  $\vartheta$  der Winkel zwischen Photonimpuls und  $\mathbf{p}_A$  ist:



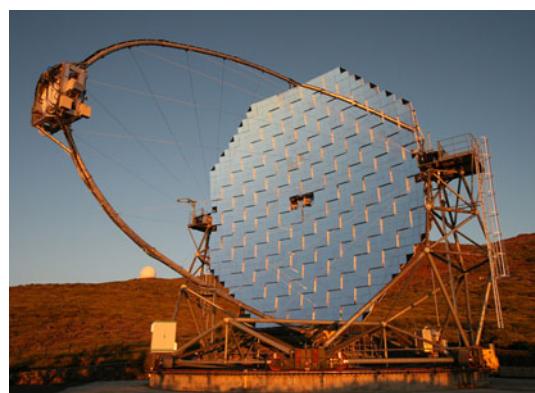
Für  $n = 1$  kann diese Gleichung wegen  $|\mathbf{p}_A| < E_A/c$  nie erfüllt werden – ein freies Teilchen kann kein masseloses Photon emittieren.

Für  $n > 1$  rückt dies aber in den Bereich des Möglichen. Hier kann der letzte Term in der Klammer vernachlässigt werden, denn damit  $n \neq 1$  ist, darf die Photonenenergie nicht viel größer als einige Elektronenvolt sein, während schon die Ruhemasse der leichtesten geladenen Teilchen, der Elektronen,  $511 \text{ keV}/c^2$  beträgt. Es gilt also  $h\nu \ll E_A$  für alle  $n \neq 1$ . Wir bekommen damit das einfache Kriterium

$$\cos \vartheta = \frac{E_A/c}{|\mathbf{p}_A|} \frac{1}{n} = \frac{1}{\beta_A n}.$$

Abstrahlung ist kinematisch erlaubt, wenn  $\beta_A \geq \frac{1}{n}$  oder  $v_A \geq \frac{c}{n} = c'$  ist, wobei  $c'$  die Lichtgeschwindigkeit im Medium ist. In diesem Fall können Photonen auf einem nach vorwärts gerichteten Kegel mit dem Öffnungswinkel  $\vartheta$  emittiert werden.

Dies ist ganz analog zum Überschallkegel, der auftritt, wenn sich ein Flugobjekt schneller als der Schall bewegt. Bewegen sich geladene Teilchen in einem Medium schneller als die Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium, kommt es zur Tscherenkov-Strahlung. Diese tritt z. B. in Abklingbecken von Kernreaktoren auf, wo sie durch schnelle Elektronen im Wasser hervorgerufen wird. In der Teilchenphysik kann der Tscherenkov-Effekt zum Nachweis von hochenergetischen Teilchen genutzt werden. In der Astroteilchenphysik werden sogenannte Tscherenkov-Teleskope dafür eingesetzt, die von hochenergetischer kosmischer Strahlung in der Atmosphäre hervorgerufenen Teilchenschauer und damit verbundenen Tscherenkov-Blitze zu beobachten (Abb. 10.6).



**Abb. 10.6** Das Tscherenkov-Teleskop MAGIC (Major Atmospheric Gamma-Ray Imaging Cherenkov) in über 2200 m Höhe auf der Kanarischen Insel La Palma, das extrem hochenergetische kosmische Gammastrahlung indirekt über die in der Atmosphäre entstehenden Tscherenkov-Lichtblitze der ausgelösten elektromagnetischen Elektron-Positron-Schauer detektiert (Max-Planck-Institut für Physik – MAGIC, © R. Wagner)

## Anwendung: Ultrahochenergetische kosmische Strahlung (UHECR) ... ... und deren oberes Ende: Der Greisen-Zatsepin-Kuzmin-Cutoff

Das Energiespektrum der primären kosmischen Strahlung, die hauptsächlich aus Protonen und Heliumkernen besteht, wurde seit dem Ende des Zweiten Weltkrieges mit immer ausgedehnteren Detektoren vermessen. Bei den höchsten Energien müssen hier indirekte Methoden eingesetzt werden wie die Vermessung der Teilchenschauer, die in der Atmosphäre erzeugt werden, oder die Beobachtung des von solchen Schauern erzeugten Fluoreszenzlichtes (an den Stickstoffmolekülen der Atmosphäre).

Man nimmt an, dass der ultrahochenergetische Teil des Spektrums, oberhalb von  $10^{17}$  eV =  $10^5$  TeV, extragalaktischen Ursprungs ist und damit Distanzen im Bereich von Millionen bis Milliarden Lichtjahren zu überbrücken hat. Schon 1962 wurden Ereignisse beobachtet, die zu einer Primärenergie von  $10^{20}$  eV ( $10^8$  TeV) gehören sollten, wobei bei diesen Energien der Fluss der kosmischen Strahlung schon extrem niedrig ist: ein Teilchen pro Quadratkilometer pro Jahrhundert, d. h., man muss entsprechend große Ausschnitte der Erdatmosphäre beobachten, um zu quantitativen Aussagen zu kommen.

1966 stellten der amerikanische Physiker *Kenneth Greisen* (1908–2007) und unabhängig davon die russischen Physiker *Georgi T. Sazepin* (englische Transliteration Zatsepin, 1917–2010) und *Wadim A. Kuzmin* (1937–2015) die Vermutung auf, dass es praktisch keine kosmische Strahlung mit Energien jenseits von  $10^{20}$  eV gäbe. Der kosmische Mikrowellenhintergrund, der das Nachleuchten des Urknalles darstellt (siehe Kasten „Anwendung: Kosmische Hintergrundstrahlung“ in Bd. 3, Abschn. 1.2) und ein Photonengas mit einer Dichte von etwa 400 Photonen pro Kubikzentimeter bildet, sollte nämlich für Protonen mit Energien oberhalb von  $10^{20}$  eV undurchdringlich werden, wenn diese kosmische Distanzen zu durchqueren haben. Dieser sogenannte *GZK-Cutoff* ergibt sich aus einer inelastischen Kollision von Protonen mit Photonen, bei denen ein sogenanntes  $\Delta$ -Baryon erzeugt wird, das danach in ein Proton und ein neutrales Pion zerfällt,

$$p^+ + \gamma \rightarrow \Delta^+ \rightarrow p^+ + \pi^0.$$

Bei dieser Reaktion verliert ein Proton einen Teil seiner kinetischen Energie (durchschnittlich 20%; siehe Aufgabe 10.9). Hat es danach noch immer hinreichend viel Energie, kann sich dieser Prozess wiederholen, bis es unter die Schwellenenergie für diesen Prozess fällt. Diese Schwellenenergie kann überschlagsmäßig leicht berechnet werden, wenn man weiß, dass die Photonen eine mittlere Energie von  $E_\gamma \approx 0,6$  meV haben und die Masse des  $\Delta^+$ -Baryons (auch  $\Delta$ -Resonanz genannt) bei  $\approx 1,232$  GeV/ $c^2$  liegt, während die Protonmasse laut (10.30)  $m_p \approx 0,938$  GeV/ $c^2$  beträgt. Die Schwerpunktsenergie für die Kollision eines Protons mit einem Photon ist durch

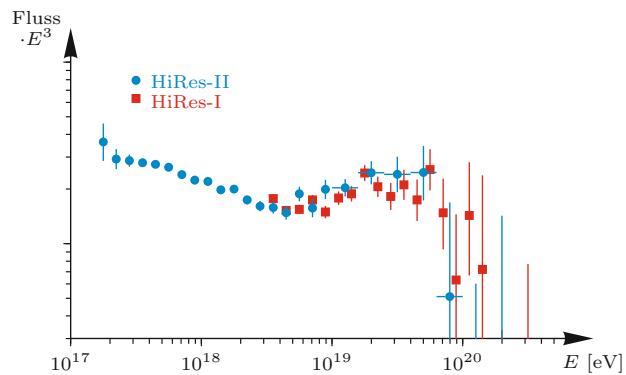
$$E_{\text{SPS}}^2/c^2 = (p_p^\mu + p_\gamma^\mu)(p_{p\mu} + p_{\gamma\mu}) = m_p^2 c^2 + 2p_p^\mu p_{\gamma\mu}$$

gegeben. Bei einer Frontalkollision ist der Protonenimpuls dem Photonenimpuls entgegengerichtet,  $p_p \cdot p_\gamma = -|p_p||p_\gamma|$  mit  $|p_\gamma| = E_\gamma/c$  und, weil das Proton ultrarelativistisch ist, ist  $|p_p| \approx E_p/c$ . Damit ergibt sich die Schwellenergie  $E_p$  aus

$$m_\Delta^2 c^2 = m_p^2 c^2 + 4E_p E_\gamma / c^2 \Rightarrow E_p \approx 2,5 \cdot 10^{20} \text{ eV}.$$

(Eine genauere Rechnung, welche die thermische Verteilung der Photonenenergie berücksichtigt, sowie die Tatsache, dass die  $\Delta$ -Resonanz keine scharfe Masse, sondern eine Massenverteilung hat, führt auf eine etwas niedrigere Schwelle von  $0,6 \cdot 10^{20}$  eV.)

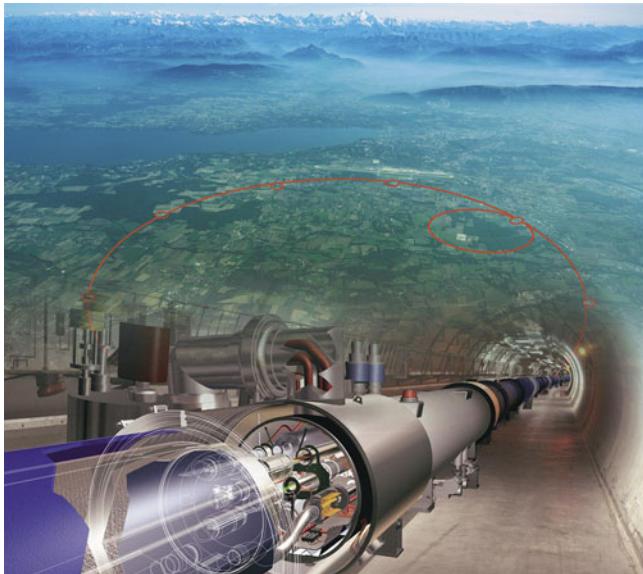
Dieser GZK-Cutoff wurde erstmals 2008 durch das High Resolution Fly's Eye Experiment (HiRes) in der Wüste von Utah nachgewiesen, nachdem ein früheres Experiment keinen Cutoff zu sehen schien. Inzwischen hat aber das Pierre-Auger-Observatorium in Argentinien die Ergebnisse von HiRes bestätigen können (Abb. 10.7).



**Abb. 10.7** Das Energiespektrum des Flusses an ultrahochenergetischer kosmischer Strahlung bei Energien oberhalb von  $10^{17}$  eV in einem doppelt logarithmischen Plot, wobei die stark abfallende Verteilung mit  $E^3$  multipliziert wurde (absolute Größe hier nicht näher spezifiziert)

### Literatur

- Greisen, K.: End to the Cosmic-Ray Spectrum? Physical Review Letters **16**, 748–750 (1966)
- Nagano, M.: Search for the end of the energy spectrum of primary cosmic rays. New J. Phys. **11** 065012 (2009) <http://iopscience.iop.org/1367-2630/11/6/065012/fulltext/> (open access)
- Zatsepin, G. T., Kuz'min, V. A.: Upper Limit of the Spectrum of Cosmic Rays. In: Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. **4**, 78–80 (1966) online (frei): [http://www.jetpletters.ac.ru/ps/1624/article\\_24846.pdf](http://www.jetpletters.ac.ru/ps/1624/article_24846.pdf)



**Abb. 10.8** Fotomontage aus LHC-Beschleuniger und seiner unterirdischen Ausdehnung bei Genf (© 2005 CERN, Fabienne Marcastel)

Moderne Teilchenbeschleuniger arbeiten in der Hochenergiephysik, wo man nach neuen immer schwereren Teilchen sucht, daher mit Collidern, bei denen zwei Strahlen aufeinander ge-

schlossen werden, um im Wesentlichen die gesamte aufgewandte Energie zur Teilchenerzeugung zur Verfügung zu haben.

Hier werden *ultrarelativistische* Energien erreicht, bei denen die Energie  $E = \gamma m c^2 \gg m c^2$  ist, mit Gammafaktoren von mehreren Tausend am Large Hadron Collider (LHC) des Europäischen Teilchenphysiklabors CERN bei Genf (Abb. 10.8). Bei diesen Energien wird die Energie, die zur Ruhemasse eines Protons gehört, vernachlässigbar. Berechnen wir zum Vergleich die Energie, die man im Laborsystem für ultrarelativistische Energien aufzuwenden hätte, so ergibt sich aus (10.71)

$$E_{\text{SPS}}^2/c^2 = p^\mu p_\mu = 2E_A m + 2m^2 c^2 \approx 2E_A m, \quad (10.73)$$

d.h., die Schwerpunktsenergie nimmt nur wie  $\sqrt{2E_A m c^2}$  mit der Strahlergie  $E_A$  zu, während bei einem Collider  $2E_A$  bereitgestellt werden. Für die Maximalenergie von 14 TeV ( $\approx 15.000 m c^2$ ), für die das LHC ausgerichtet wurde, wäre bei einem festen Target die mit Beschleunigern unerreichbar hohe Energie von etwa  $10^5$  TeV erforderlich.

Dermaßen hohe und noch höhere Energien kommen aber in der kosmischen Strahlung (hauptsächlich in Form von Protonen) vor, die uns von Quellen außerhalb unserer Galaxie erreichen. Deren Entstehungsmechanismus ist noch weitgehend ungeklärt; man nimmt an, dass sie z. B. von der Umgebung von ultramassiven Schwarzen Löchern im Zentrum von aktiven Galaxien wie Quasaren stammen (siehe Kasten „Anwendung: Ultrahochenergetische kosmische Strahlung“).

## Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- leichte Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
- mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
- anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständen auch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

### 10.1 •• Eigenzeit der hyperbolischen Bewegung und interstellare Reisen

- (a) Leiten Sie für die hyperbolische Bewegung, d. h. eine Weltlinie mit konstanter Eigenbeschleunigung  $\ddot{a}$ , den Zusammenhang (10.16) zwischen Eigen- und Koordinatenzeit sowie geschlossene Ausdrücke für den Zusammenhang von zurückgelegter Strecke  $x$  und Eigenzeit  $\tau$  her.
- (b) Berechnen Sie damit, wie viel Zeit eine Reise zum nächstgelegenen Stern (Alpha Centauri, 4,2 Lichtjahre Entfernung) bzw. zum Zentrum der Milchstraße (etwa 27.000 Lichtjahre) brauchen würde, wenn man eine Rakete zur Verfügung hat, die eine komfortable konstante Beschleunigung in der Höhe der Erdbeschleunigung von  $1\text{ g} \approx 9,81\text{ m/s}^2$  bereitstellt. Nach halber Strecke soll die Rakete um  $180^\circ$  drehen, sodass die Abbremsung ebenfalls mit konstanter negativer Beschleunigung von  $1\text{ g}$  erfolgt. Vergleichen Sie die Eigenzeit des Reisenden mit der Zeit der Startrampe.

**Lösungshinweis:** Verwenden Sie die Ergebnisse (10.14) und (10.15).

### 10.2 •• Relativistische Raketengleichung

Eine Rakete werde dadurch angetrieben, dass bezüglich ihres momentanen Ruhesystems kontinuierlich Masse mit einer konstanten Geschwindigkeit  $w$  ausgestoßen wird.

- (a) Welche Endgeschwindigkeit erreicht sie im Inertialsystem  $S$  der Startrampe, wenn sie ihren Vorrat an Brennstoff aufgebraucht und ihre Ruhemasse von anfänglich  $m_0$  auf  $m$  abgenommen hat?
- (b) Mit welcher Rate muss Masse ausgestoßen werden, damit die Beschleunigung im momentanen Ruhesystem konstant ist? Wie nimmt in diesem Fall die Masse als Funktion der Eigenzeit der Rakete ab?

**Lösungshinweis:** Betrachten Sie zunächst ein Objekt mit Ruhemasse  $m$ , das sich in zwei Objekte mit Ruhemassen  $m_1$  und  $m_2$  teilt, die sich bezüglich des Schwerpunktsystems mit den Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  voneinander weg bewegen, und spezialisieren Sie dann auf eine infinitesimale Änderung  $m_1 = m - |dm|$  und  $v_2 = w$ . Zur Aufstellung der Raketengleichung

sind die erhaltenen Beziehungen ins ursprüngliche Ruhesystem zu transformieren.

### 10.3 •• Maximaler Ablenkungswinkel im Laborsystem, wenn ein schweres Teilchen auf ein leichteres stößt

Berechnen Sie den maximalen Streuwinkel  $\vartheta_A$ , den eine Masse  $m_A$  nach Kollision mit einer ursprünglich ruhenden leichteren Masse  $m_B$  im Laborsystem annehmen kann. Bestimmen Sie dafür über eine explizite Lorentz-Transformation, wie  $\vartheta_A$  mit dem Streuwinkel im Schwerpunktssystem,  $\vartheta$ , der ja nicht eingeschränkt ist, zusammenhängt, und bestimmen Sie daraus den maximalen Wert.

### 10.4 • Inelastische Kollision von Protonen und Kupferkernen

Im Text wurde gezeigt, dass im Laborsystem bei der inelastischen Streuung von Protonen an Protonen das einlaufende Proton eine Energie von über  $7\text{ m}\text{c}^2$  haben muss, damit Antiprotonen erzeugt werden können. Bei der Entdeckung des Antiprotons wurde ein Protonenstrahl mit  $6,7\text{ m}\text{c}^2 = 6,3\text{ GeV}$  auf ein Kupfertarget (Atommasse ca. 63 Protonmassen) geschossen. Berechnen Sie die Schwellenenergie für Antiprotonenerzeugung unter der Annahme, dass die Nukleonen im Target fest gebunden sind (was sie bezüglich der hier eingesetzten Energien aber nicht sind).

### 10.5 • Energievorrat und Lebensdauer der Sonne

Wie im Kasten „Anwendung: Massendefekt und Umwandlung von Masse in Energie“ vermerkt, wird bei der Kernfusion etwa 0,5 % der Masse in Energie umgewandelt. Schätzen Sie damit ab, wie viel Energie unsere Sonne, die eine Masse von etwa  $2 \cdot 10^{30}\text{ kg}$  besitzt, im Laufe ihrer Existenz abstrahlen kann, und daraus die maximale Lebensdauer, wenn Sie verwenden, dass auf der Erde etwa  $1500\text{ W/m}^2$  an Energie empfangen wird, wobei die Erde ungefähr 150 Millionen km von der Sonne entfernt ist.

### 10.6 • Mandelstam-Variable

Man zeige, dass die im Kasten „Vertiefung: Die Mandelstam-Variablen“ besprochenen Größen

$$\begin{aligned}s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2\end{aligned}\tag{10.74}$$

für einen elastischen oder inelastischen 2→2-Prozess mit Viererimpulsen

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu \quad (10.75)$$

linear abhängig sind und

$$s + t + u = (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) c^2 \quad (10.76)$$

erfüllen. Die durch die Viererimpulse  $p_i^\mu$  beschriebenen Teilchen  $i = 1, \dots, 4$  sollen dabei beliebige Ruhemassen  $m_i$  haben.

**10.7 •• Umrechnung zwischen Schwerpunkt- und Laborsystem mit Mandelstam-Variablen** Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen den in (10.74) definierten Mandelstam-Variablen für relativistische 2→2-Prozesse und den Werten von Energie und Impuls, wobei

$$\begin{aligned} \lambda(a, b, c) &:= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \\ &\equiv a^2 - 2a(b+c) + (b-c)^2 \\ &\equiv \left[ a - (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \right] \left[ a - (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \right] \end{aligned} \quad (10.77)$$

die sogenannte Dreiecks- oder Källén-Funktion (benannt nach dem schwedischen theoretischen Physiker Gunnar Källén, 1926–1968) ist:

(a) im Schwerpunktsystem:

$$p_1^2 = p_2^2 = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_1^2 c^2, m_2^2 c^2), \quad (10.78)$$

$$p_3^2 = p_4^2 = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_3^2 c^2, m_4^2 c^2), \quad (10.79)$$

$$E_1/c = \frac{s + (m_1^2 - m_2^2)c^2}{2\sqrt{s}}, \quad (10.80)$$

$$E_2/c = \frac{s + (m_2^2 - m_1^2)c^2}{2\sqrt{s}}, \quad (10.81)$$

$$E_3/c = \frac{s + (m_3^2 - m_4^2)c^2}{2\sqrt{s}}, \quad (10.82)$$

$$E_4/c = \frac{s + (m_4^2 - m_3^2)c^2}{2\sqrt{s}}; \quad (10.83)$$

(b) im Laborsystem ( $\mathbf{p}_2 = 0$ ):

$$p_1^2 = \frac{1}{4m_2^2 c^2} \lambda(s, m_1^2 c^2, m_2^2 c^2), \quad (10.84)$$

$$E_1 = \frac{s - (m_1^2 + m_2^2)c^2}{2m_2}, \quad (10.85)$$

$$E_2 = m_2 c^2, \quad (10.86)$$

$$E_3 = \frac{(m_2^2 + m_3^2)c^2 - u}{2m_2}, \quad (10.87)$$

$$E_4 = \frac{(m_2^2 + m_4^2)c^2 - t}{2m_2}. \quad (10.88)$$

Insbesondere folgt aus dem Vergleich von (10.78) und (10.84) die einfache Umrechnungsformel

$$m_2 c |\mathbf{p}_1|_{\text{LS}} = \sqrt{s} |\mathbf{p}_1|_{\text{SPS}}. \quad (10.89)$$

Man beachte auch, dass die Streuwinkel in der Variablen  $t$  bzw.  $u$  enthalten sind. Die Energien im Schwerpunktsystem sind daher unabhängig von Streuwinkeln, wohingegen im Laborsystem  $E_3$  und  $E_4$  von diesen abhängen.

**10.8 • Zerfall eines massiven Teilchens in zwei massive Tochterteilchen** Berechnen Sie, wie sich im Schwerpunktsystem beim Zerfall eines massiven Teilchens mit Masse  $M$  die verfügbare Energie auf zwei Teilchen aufteilt, wenn diese die Massen  $m_A$  bzw.  $m_B$  besitzen.

**Lösungshinweis:** Lösen Sie nicht wie beim Zerfall des Pions die Energieerhaltungsgleichung direkt, sondern betrachten Sie dafür die Lorentz-Invarianten  $p_A^2 := p_A^\mu p_{A\mu}$  und  $p_B^2 := p_B^\mu p_{B\mu}$  und setzen Sie in diese die Energie-Impuls-Erhaltung ein. Dies vereinfacht die Rechnung merklich.

**10.9 ••• Energieverlust von ultrahochenergetischen Protonen bei Kollision mit Photonen des kosmischen Mikrowellenhintergrunds** Im Kasten „Anwendung: Ultrahochenergetische kosmische Strahlung“ wurde diskutiert, dass der inelastische Prozess  $p^+ + \gamma \rightarrow \Delta^+ \rightarrow p^+ + \pi^0$  für Protonen mit Energien  $\gtrsim 10^8$  TeV und Photonen aus der kosmischen Hintergrundstrahlung dazu führt, dass die Protonen so lange Energie verlieren, bis sie unter die zugehörige Schwellenenergie fallen.

Schätzen Sie den durchschnittlichen Energieverlust eines solchen Protons bei einer derartigen Kollision ab, indem Sie den minimalen und den maximalen Energieverlust berechnen, der auftritt, wenn das  $\Delta^+$ -Baryon im Schwerpunktsystem das sekundäre Proton in bzw. gegen die Richtung des einlaufenden Protons emittiert. Für den Prozess  $p^+ + \gamma \rightarrow \Delta^+$  soll angenommen werden, dass die Energie gerade zur Entstehung eines  $\Delta^+$ -Baryons ausreicht.

Berechnen Sie dazu die Energieaufteilungen für die Prozesse  $p^+ + \gamma \rightarrow \Delta^+$  und  $\Delta^+ \rightarrow p^+ + \pi^0$  mit den Formeln aus Aufgabe 10.8 ( $m_{\Delta^+} = 1,232 \text{ GeV}/c^2$ ,  $m_p = 0,938 \text{ GeV}/c^2$ ,  $m_{\pi^0} = 0,135 \text{ GeV}/c^2$ ) und transformieren Sie diese in das ursprüngliche Inertialssystem, in dem das Proton anfangs eine Energie von etwa  $10^{11} \text{ GeV}$  hatte.

**Lösungshinweis:** Nutzen Sie aus, dass sich die in (9.99) eingeführte Rapidityität  $\xi = \text{arcosh } \gamma(v)$  bei Lorentz-Transformationen in einer festen Richtung additiv verhält.

**10.10 •• Rapidität und Pseudorapidity in der Teilchenphysik** In Teilchenkollisionen ist eine direkt zugängliche Observable der Winkel  $\vartheta$ , unter dem ein gestreutes oder neu erzeugtes Teilchen gegenüber der Strahlachse in den Detektor fliegt. In der Teilchenphysik wird dieser üblicherweise durch

die äquivalente Größe der *Pseudorapidität*, definiert durch

$$\eta := -\ln \left( \tan \frac{\vartheta}{2} \right), \quad (10.90)$$

angegeben (Abb. 10.9).

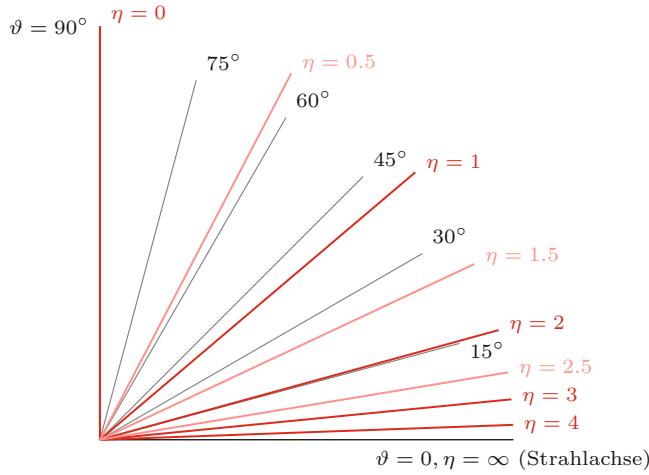


Abb. 10.9 Zusammenhang von Streuwinkel und Pseudorapidität

Unter Rapidität versteht man in der Teilchenphysik dagegen die in (9.99) eingeführte Rapidität  $\text{artanh}(v/c)$ , aber eingeschränkt auf die longitudinale Komponente der Geschwindigkeit  $v_{\parallel}/c = p_{\parallel} c/E$ :

$$y := \text{artanh} \frac{p_{\parallel} c}{E}. \quad (10.91)$$

Zeigen Sie, dass

- (a) im Hochenergielimes  $\gamma \gg 1$  die Pseudorapidität in die longitudinale Rapidität  $y$  übergeht;
- (b) sich die Rapidität  $y$  unter Lorentz-Transformationen mit Geschwindigkeit  $v = \beta c$  in longitudinaler Richtung gemäß

$$y' = y - \text{artanh} \beta \quad (10.92)$$

transformiert.

**Lösungshinweis:** Drücken Sie zuerst  $\eta$  durch Impulskomponenten  $p_{\parallel} = |\mathbf{p}| \cos \vartheta$  und  $p_{\perp} = |\mathbf{p}| \sin \vartheta$  aus. Verwenden Sie dazu die Identität

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta}}. \quad (10.93)$$

## Lösungen zu den Aufgaben

**10.1** (b) Rakete: 3,5 bzw. 19,8 Jahre; Erde: 5,8 bzw. 27.002 Jahre  
**10.5** Ungefähr  $67 \cdot 10^9$  Jahre.

**10.2**

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - (m/m_0)^{2w/c}}{1 + (m/m_0)^{2w/c}} \quad (10.94)$$

Bei konstanter Beschleunigung  $a$  ist  $m(\tau) = m_0 e^{-a\tau/w}$ .

**10.3**  $\sin \vartheta_A^{\max} = m_B/m_A$ .

**10.4**  $E_A \approx 3,06 m c^2$ .

**10.8**

$$\begin{aligned} E_A/c^2 &= \frac{M^2 + m_A^2 - m_B^2}{2M}, \\ E_B/c^2 &= \frac{M^2 + m_B^2 - m_A^2}{2M}. \end{aligned} \quad (10.95)$$

**10.9** Der minimale und maximale Energieverlust beträgt 3 % bzw. 40 %.

## Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

### 10.1

(a) Die Eigenzeit entlang der hyperbolischen Weltlinie folgt mit (10.14) aus

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1 + \tilde{a}^2 t^2/c^2}} \quad (10.96)$$

durch einfache Integration:

$$\tau = \frac{c}{\tilde{a}} \operatorname{arsinh} \frac{\tilde{a}t}{c}. \quad (10.97)$$

Kombiniert mit (10.15) ergibt sich der Zusammenhang

$$x(\tau) = \frac{c^2}{\tilde{a}} \left( \cosh \frac{\tilde{a}\tau}{c} - 1 \right) \quad (10.98)$$

bzw.

$$\tau(x) = \frac{c}{\tilde{a}} \operatorname{arcosh} \left( \frac{\tilde{a}x}{c^2} + 1 \right). \quad (10.99)$$

(b) Mit  $c \approx 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , 1 Jahr (y)  $\approx 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$ , 1 Lichtjahr (ly)  $\approx 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$ ,  $\tilde{a} = 9,81 \text{ m/s}^2$  ergibt sich die Eigenzeit für die beiden Reisen zu

$$\begin{aligned} \Delta\tau_1 &= 2 \tau(2,1 \text{ ly}) \approx 3,5 \text{ y}, \\ \Delta\tau_2 &= 2 \tau(13.500 \text{ ly}) \approx 19,8 \text{ y}. \end{aligned} \quad (10.100)$$

Beide Reisedauern sind kürzer als die Lichtlaufzeit im Inertialsystem der Startrampe, die zweite ist sogar weniger als ein Tausendstel davon! Die Zeit, die während dieser Reise auf der Erde vergeht, ist natürlich größer:

$$\Delta t_1 \approx 5,8 \text{ y}, \quad \Delta t_2 \approx 27.002 \text{ y}. \quad (10.101)$$

Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 10.2 lässt sich berechnen, welche Massen Raketen mindestens haben müssten, mit denen solche Reisen im Prinzip möglich wären. Dies ist dem Leser überlassen.

**10.2** Energie-Impuls-Erhaltung für die Aufspaltung  $m \rightarrow m_1 + m_2$  ergibt im momentanen Ruhesystem von  $m$

$$\begin{pmatrix} mc \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \gamma_1 m_1 \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} + \gamma_2 m_2 \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}, \quad (10.102)$$

also

$$\begin{aligned} m &= m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2, \quad \gamma_1 m_1 v_1 = \gamma_2 m_2 v_2, \\ \Rightarrow m &= m_1 \gamma_1 \left( 1 + \frac{v_1}{v_2} \right). \end{aligned} \quad (10.103)$$

Identifizieren wir  $m$  mit der Raketenmasse im momentanen Inertialsystem  $S$  und  $m_1 = m - |\mathrm{dm}|$  mit der neuen Ruhemasse nach einem infinitesimalen Massenausstoß  $m_2 < |\mathrm{dm}|$  mit Geschwindigkeit  $v_2 = w$ , dann ist  $v_1 = d\tilde{v}$  die erzielte infinitesimale Geschwindigkeit. Der Faktor  $\gamma_1$  in (10.103) ist dabei 1 bis auf Beiträge von höherer Ordnung, und man bekommt für die Massenänderung der Rakete

$$\frac{\mathrm{dm}}{m} = -\frac{|\mathrm{dm}|}{m} = -\frac{d\tilde{v}}{w}. \quad (10.104)$$

Bewegt sich die Rakete bezüglich  $S$  mit der Geschwindigkeit  $v = v(m)$ , dann folgt aus der relativistischen Geschwindigkeitsaddition

$$\begin{aligned} v + dv &= \frac{v + d\tilde{v}}{1 + v d\tilde{v}/c^2} \\ \Rightarrow dv &= (v + d\tilde{v}) (1 - v d\tilde{v}/c^2) - v + O(d\tilde{v}^2) \\ &= d\tilde{v} (1 - v^2/c^2) + O(d\tilde{v}^2). \end{aligned} \quad (10.105)$$

Umgeschrieben auf die Veränderung der Ruhemasse (die eine Lorentz-Invariante darstellt) ergibt dies mit (10.104)

$$\frac{dv/c}{1 - v^2/c^2} = -\frac{w}{c} \frac{dm}{m} \quad (10.106)$$

und auf-integriert

$$\operatorname{artanh} \frac{v}{c} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v/c}{1 - v/c} = -\frac{w}{c} \ln m + \text{const}, \quad (10.107)$$

wobei die Integrationskonstante dadurch fixiert ist, dass im Inertialsystem  $S$  die Geschwindigkeit für  $m = m_0$  null ist. Damit ergibt sich

$$\frac{1 + v/c}{1 - v/c} = \left( \frac{m(v)}{m_0} \right)^{-2w/c}. \quad (10.108)$$

Daraus erhält man eine lineare Gleichung in  $v/c$  mit der Lösung (10.94).

Alternativ hätten wir etwas direkter  $v/c = \tanh(\frac{w}{c} \ln(m_0/m))$  schreiben und dann die Definition des  $\tanh$  heranziehen können.

Nichtrelativistisch hätte man einfacher  $dv = -w dm/m$  zu lösen, und damit unmittelbar  $v = w \ln(m_0/m)$ . Die relativistische Verallgemeinerung unterscheidet sich also gerade durch die Ersetzung  $v/c \rightarrow \xi = \operatorname{artanh}(v/c)$ , wobei  $\xi$  die in Kap. 9 im Kasten „Vertiefung: Lorentz-Transformation als imaginäre Drehung“ diskutierte Rapidität ist.

Teilaufgabe (b) ergibt sich aus (10.104) dividert durch das Eigenzeitdifferenzial  $d\tau$ . Die Beschleunigung im momentanen

Ruhesystem ist  $a = d\tilde{v}/d\tau$ . Soll diese konstant gehalten werden, ist

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{a}{w}m(\tau) \quad (10.109)$$

mit der Lösung

$$m(\tau) = m_0 e^{-a\tau/w}. \quad (10.110)$$

Da bei konstanter Beschleunigung die Bewegung hyperbolisch ist, kann mit (10.16) unmittelbar auf die Koordinatenzeit der Startrampen umgerechnet werden.

**10.3** Bezeichnen wir den Betrag der gegengleichen einlaufenden Impulse  $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$  im Schwerpunktsystem mit  $p$  und die zugehörigen Energien  $E_{A,B}/c = \sqrt{p^2 + m_{A,B}^2 c^2}$ , dann ist die Geschwindigkeit, mit der sich Teilchen  $B$  im Schwerpunktsystem bewegt, gegeben durch  $\beta = p c / E_B$ . Ist die Kollisionsachse die  $x$ -Achse, so führt eine Standard-Lorentz-Transformation in negativer  $x$ -Richtung auf das Laborsystem, in dem Teilchen  $B$  ruht. Der Viererimpuls von Teilchen  $A$  nach dem Stoß transformiert sich vom Schwerpunkt- ins Laborsystem gemäß

$$(p_{A'}^\mu)_{\text{LS}} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_A/c \\ p \cos \vartheta \\ p \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.111)$$

$$= \begin{pmatrix} \dots \\ (E_A + E_B \cos \vartheta)p/m_B c^2 \\ p \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\gamma = E_B/m_B c^2$ ,  $\gamma\beta = p/m_B c$ . Das Verhältnis von  $y$ - und  $x$ -Komponente gibt

$$\tan \vartheta_A = \frac{m_B c^2 \sin \vartheta}{E_A + E_B \cos \vartheta}. \quad (10.112)$$

Für  $m_B < m_A$  ist  $E_B < E_A$ , und der Nenner hat keine Nullstelle, wenn  $\vartheta$  zwischen 0 und  $\pi$  variiert, sodass  $\vartheta_A < \pi/2$  bleibt und auch für  $\vartheta \rightarrow \pi$  wieder auf null geht. Dies bedeutet, dass das einlaufende Teilchen  $A$  nicht zurückgestreut werden kann, sondern immer einen Impuls in positiver  $x$ -Richtung behält. Der maximale Winkel  $\vartheta_A$  ergibt sich aus

$$\frac{d}{d\vartheta} \tan \vartheta_A = \frac{m_B c^2 (E_B + E_A \cos \vartheta)}{(E_A + E_B \cos \vartheta)^2} = 0 \quad (10.113)$$

für  $\cos \vartheta = -E_B/E_A$ . In (10.112) eingesetzt ergibt dies

$$\tan \vartheta_A^{\max} = \frac{m_B c^2}{\sqrt{E_A^2 - E_B^2}} = \frac{m_B/m_A}{\sqrt{1 - m_B^2/m_A^2}} \quad (10.114)$$

bzw.  $\sin \vartheta_A^{\max} = m_B/m_A$ .

#### 10.4 Aus

$$p_{\text{LS},\text{vorher}}^\mu = \begin{pmatrix} E_A/c \\ \mathbf{p}_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 63 m c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (10.115)$$

$$p_{\text{SPS},\text{nachher}}^\mu = \begin{pmatrix} (3 + 63) m c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

folgt nach Gleichsetzen der vom Bezugssystem unabhängigen Viererquadrate

$$\begin{aligned} & \left( \frac{E_A}{c} + 63 m c \right)^2 - \mathbf{p}_A^2 \\ &= 2 \cdot 63 E_A m + (63^2 + 1) m^2 c^2 = 66^2 m^2 c^2 \quad (10.116) \\ & \Rightarrow E_A = \frac{193}{63} m c^2 \approx 3,06 m c^2 \end{aligned}$$

bzw.

$$T = E_A - m c^2 = 2,06 m c^2. \quad (10.117)$$

Wären Kupferkerne bei diesen Energien unzerstörbar, würden demnach nur 3 % der kinetischen Energie mehr nötig sein, als die Ruheenergie eines Proton-Antiproton-Paares darstellt.

**10.5** Ein Massendefekt von 0,5 % der Masse der Sonne entspricht einer Energiemenge von

$$0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot c^2 \approx 9 \cdot 10^{44} \text{ Js}. \quad (10.118)$$

Dies ist der geschätzte Energievorrat, der nach Entstehung der Sonne zur Abstrahlung zur Verfügung steht.

Die Leistung der Sonne ist gegeben durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius 150 Millionen Kilometer multipliziert mit  $1500 \text{ W/m}^2$ :

$$4\pi (1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 1500 \text{ W/m}^2 \approx 4 \cdot 10^{26} \text{ W}. \quad (10.119)$$

Dies reicht für etwa  $2,1 \cdot 10^{18} \text{ s}$  oder etwa  $67 \cdot 10^9 \text{ Jahre}$ , wenn sie gleichmäßig strahlt. Die von Astrophysikern errechnete Brenndauer unserer Sonne, bis sie das Endstadium eines weißen Zwerges erreicht, liegt tatsächlich unter diesem Wert – bei etwa 12,5 Milliarden Jahren.

**10.6** Mit  $p_i^2 = m^2 c^2$  ergibt Ausmultiplikation der definierenden Gleichungen

$$\begin{aligned} s + t + u &= m_1^2 c^2 + 2p_1 \cdot p_2 + m_2^2 c^2 \\ &\quad + m_1^2 c^2 - 2p_1 \cdot p_3 + m_3^2 c^2 \\ &\quad + m_1^2 c^2 - 2p_1 \cdot p_4 + m_4^2 c^2 \\ &= \sum_{i=1}^4 m_i^2 c^2 + 2m_1^2 c^2 + 2p_1 \cdot \underbrace{(p_2 - p_3 - p_4)}_{-p_1} \\ &= \sum_{i=1}^4 m_i^2 c^2. \end{aligned} \quad (10.120)$$

**10.7**

(a) Im Schwerpunktsystem ist  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  und  $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4$ . Damit ist

$$\begin{aligned} s &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (E_1/c + E_2/c)^2 \\ &= (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2)/c^2, \end{aligned} \quad (10.121)$$

und mit  $E_i/c = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2 c^2}$  folgt

$$s - 2\mathbf{p}_1^2 - (m_1^2 + m_2^2)c^2 = 2E_1E_2/c^2. \quad (10.122)$$

Nach dem Quadrieren dieser Gleichung fallen die Terme proportional zu  $(\mathbf{p}_1^2)^2$  heraus, und man erhält

$$s^2 - 4s\mathbf{p}_1^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2)c^2 + (m_1^2 + m_2^2)^2c^4 - 4m_1^2m_2^2c^4 = 0 \quad (10.123)$$

oder

$$\begin{aligned} 4s\mathbf{p}_1^2 &= s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2)c^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2c^4 \\ &= \lambda(s, m_1^2 c^2, m_2^2 c^2), \end{aligned} \quad (10.124)$$

woraus (10.78) folgt. Daraus lässt sich nun die Energie über

$$\begin{aligned} E_1^2/c^2 &= \mathbf{p}_1^2 + m_1^2 c^2 = \frac{\lambda(s, m_1^2 c^2, m_2^2 c^2) + 4s m_1^2 c^2}{4s} \\ &= \frac{[s + (m_1^2 - m_2^2)c^2]^2}{4s} \end{aligned} \quad (10.125)$$

berechnen.

Ganz analog folgen die restlichen Relationen im Schwerpunktsystem.

(b) Im Laborsystem ist  $\mathbf{p}_2^\mu = (m_2 c, \mathbf{0})^\top$ , wodurch sich alle Mandelstam-Variablen unmittelbar durch die Energien ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned} s &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = m_1^2 c^2 + 2E_1 m_2 + m_2^2 c^2, \\ t &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4)^2 = m_2^2 c^2 - 2m_2 E_4 + m_4^2 c^2, \\ u &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)^2 = m_2^2 c^2 - 2m_2 E_3 + m_3^2 c^2. \end{aligned} \quad (10.126)$$

Daraus ergeben sich unmittelbar die angegebenen Ausdrücke für die Energien  $E_i$ .

Die zugehörigen Impulse folgen aus der Energie-Impuls-Beziehung  $\mathbf{p}_i^2 = E_i^2/c^2 - m_i^2 c^2$ , im Speziellen

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^2 &= \frac{[s - (m_1^2 + m_2^2)c^2]^2 - 4m_2^2 c^2 (m_1^2 c^2)}{4m_2^2 c^2} \\ &= \frac{1}{4m_2^2 c^2} \lambda(s, m_1^2 c^2, m_2^2 c^2). \end{aligned} \quad (10.127)$$

**10.8** Im Schwerpunktsystem ist  $\mathbf{p}^\mu = (Mc, \mathbf{0}) = \mathbf{p}_A^\mu + \mathbf{p}_B^\mu$ . Die Energie-Impuls-Relation  $\mathbf{p}_B^2 = m_B^2 c^2$  kann damit geschrieben werden als

$$\begin{aligned} m_B^2 c^2 &= (\mathbf{p} - \mathbf{p}_A)^2 = \mathbf{p}^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_A^2 \\ &= M^2 c^2 - 2ME_A + m_A^2 c^2, \end{aligned} \quad (10.128)$$

woraus

$$E_A/c^2 = \frac{M^2 + m_A^2 - m_B^2}{2M} \quad (10.129)$$

folgt. Analog erhält man

$$E_B/c^2 = \frac{M^2 + m_B^2 - m_A^2}{2M}. \quad (10.130)$$

Die Summe davon ist offensichtlich  $(E_A + E_B)/c^2 = M$ , was gerade die Energieerhaltungsgleichung darstellt. Deren direkte Lösung würde aber die Berechnung von  $\mathbf{p}_A^2 = \mathbf{p}_B^2$  aus einer Gleichung mit Wurzelausdrücken erfordern.

**10.9** Die Schwerpunktsenergie  $m_{\Delta^+} c^2$  teilt sich gemäß (10.95) bei  $p^+ + \gamma \rightarrow \Delta^+$  entsprechend

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1,232^2 + 0,938^2}{2 \cdot 1,232} \text{ GeV} = 0,973 \text{ GeV}, \\ E_\gamma &= \frac{1,232^2 - 0,938^2}{2 \cdot 1,232} \text{ GeV} = 0,259 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (10.131)$$

und bei  $\Delta^+ \rightarrow p^+ + \pi^0$  entsprechend

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1,232^2 + 0,938^2 - 0,135^2}{2 \cdot 1,232} \text{ GeV} = 0,966 \text{ GeV}, \\ E_{\pi^0} &= \frac{1,232^2 + 0,135^2 - 0,938^2}{2 \cdot 1,232} \text{ GeV} = 0,266 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (10.132)$$

auf.

Die Rapidität des Protons beträgt im ersten Fall  $\xi_1 = \operatorname{arcosh}(E_p/m_p c^2) = \operatorname{arcosh}(0,973/0,938) = 0,273$ , im letzten  $\xi_2 = \operatorname{arcosh}(0,966/0,938) = 0,242$ . Wird das sekundäre Proton in Richtung des primären emittiert, ist die Änderung der Rapidität  $\Delta\xi_1 = -0,03$ , bei entgegengesetzter Richtung  $\Delta\xi_2 = -0,515$ .

Bei sehr hohen kinetischen Energien und  $\xi \gg 1$  gilt

$$\frac{E}{mc^2} = \gamma = \cosh \xi \approx \frac{1}{2} e^\xi. \quad (10.133)$$

Die berechneten Verschiebungen von  $\Delta\xi$  bedeuten eine Multiplikation mit den Faktoren

$$e^{\Delta\xi_1} \approx 0,97, \quad e^{\Delta\xi_2} \approx 0,60 \quad (10.134)$$

und somit Energieverluste zwischen 3 % und 40 %. (Hier ist der genaue Wert von  $\xi$  nicht wesentlich, solange  $\xi \gg 1$  ist. Für  $E_p \sim 10^{11} \text{ GeV}$  ist  $\xi \sim 26$  und daher mehr als hinreichend groß.)

**10.10**

(a) Mit

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}| - p_{\parallel}}{|\mathbf{p}| + p_{\parallel}}} \quad (10.135)$$

ist

$$\eta = -\ln \left( \tan \frac{\vartheta}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{p}| + p_{\parallel}}{|\mathbf{p}| - p_{\parallel}} = \operatorname{artanh} \frac{p_{\parallel}}{|\mathbf{p}|}. \quad (10.136)$$

Für  $\gamma = E/(mc^2) = \sqrt{p^2 + m^2c^2}/(mc) \gg 1$  ist  $\mathbf{p}^2 \gg m^2c^2$  und  $E \approx |\mathbf{p}|c$ . Die longitudinale Rapidität wird daher

$$\gamma = \operatorname{artanh} \frac{p_{\parallel} c}{E} \approx \operatorname{artanh} \frac{p_{\parallel}}{|\mathbf{p}|} = \eta \quad (\gamma \gg 1). \quad (10.137)$$

- (b) Unter einer Lorentz-Transformation mit Geschwindigkeit  $c\beta$  in longitudinaler Richtung transformieren Energie und

Impuls als Vierervektor entsprechend

$$\begin{aligned} E' &= \gamma E - \beta \gamma p_{\parallel} c, \\ p'_{\parallel} &= \gamma p_{\parallel} - \beta \gamma E/c, \\ p'_{\perp} &= p_{\perp}. \end{aligned} \quad (10.138)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \ln \frac{E' + p'_{\parallel} c}{E' - p'_{\parallel} c} = \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma E - \beta \gamma p_{\parallel} c + \gamma p_{\parallel} c - \beta \gamma E}{\gamma E - \beta \gamma p_{\parallel} c - \gamma p_{\parallel} c + \beta \gamma E} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \beta)(E + p_{\parallel} c)}{(1 + \beta)(E - p_{\parallel} c)} = y - \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \beta)}{(1 - \beta)} \\ &= y - \operatorname{artanh} \beta. \end{aligned} \quad (10.139)$$

## Literatur

### Weiterführende Literatur

Byckling, E., Kajantie, K.: Particle Kinematics. Wiley, New York (1973)

# Abbildungsnachweis

Weitere Hinweise zu Bildrechten finden Sie in den jeweiligen Abbildungsunterschriften. Alle Abbildungen, die keinen Nachweis haben, wurden von Kristin Riebe und/oder den Autoren erstellt.

## Kapitel 1

Eröffnungsbild: © NASA 1.7: © NASA

## Kapitel 2

Eröffnungsbild: © NASA 2.7: © NASA 2.10: © NASA 2.11:  
© Ciudad de las Artes y las Ciencias. Generalitat Valenciana

## Kapitel 3

Eröffnungsbild: © NASA 3.1: © NASA

## Kapitel 4

Eröffnungsbild: © Markus Bautsch

## Kapitel 6

Eröffnungsbild: © Kristin Riebe 6.6: © Sheevar, SA 3.0

## Kapitel 7

Eröffnungsbild: © akg/Science Photo Library 7.5: © PAR, SA 3.0

## Kapitel 8

Eröffnungsbild: © Kristin Riebe 8.25: © NASA/GSFC/Bob Cahalan  
8.26: © Madlen Ziegler 8.28: © G. J. Bulte

## Kapitel 9

Eröffnungsbild: © CERN 2005 9.1: © Emilio Segre Visual Archives / American Institute Of Physics / Science Photo Library 9.3: A. A. Michelson, E. Morley (1887), American Journal of Science, Volume 34, Issue 203, pp. 333–345 (public domain, en.wikisource.org) 9.10: © BELLE, belle.kek.jp 9.23: © NASA/MSFC

## Kapitel 10

Eröffnungsbild: © CERN 2012, designed by Idea2Dezign™ 10.4: © NNSA 10.5: © Kamioka Observatory, ICRR (Institute for Cosmic Ray Research), The University of Tokyo 10.6: Max-Planck-Institut für Physik – MAGIC, © R. Wagner 10.7: © CERN 10.8: © CERN 2005, Fabienne Marcastel

# Sachverzeichnis

## A

Abampere, *siehe* Bd. 2  
Abbe, Ernst, *siehe* Bd. 2  
Abbe'sche Auflösungsgrenze, *siehe* Bd. 2  
Abbildung  
    diskret, *siehe* Bd. 3  
    offen, *siehe* Bd. 3  
    Überlagerung, *siehe* Bd. 3  
    unverzweigt, *siehe* Bd. 3  
abelsche Gruppe, 4  
Aberration, 321, *siehe auch* Bd. 2  
Ableitung, 29  
    äußere, *siehe* Bd. 2  
    konvektive, 304  
    kovariante, *siehe* Bd. 3  
    partielle, 21, 29  
        bei verschiedenen konstanten Größen,  
            *siehe* Bd. 4  
    substanzielle, 304  
    thermodynamische, *siehe* Bd. 4  
unter verschiedenen Bedingungen, *siehe*  
    Bd. 4  
    vollständige, 20  
Absorption, *siehe* Bd. 3  
Absorptionslinie, 224  
Absorptionspektrum, 224  
Absteigoperator, *siehe* Bd. 3  
    für Drehimpuls, *siehe* Bd. 3  
Abstrahlungscharakteristik, *siehe* Bd. 2  
Addition von Drehimpulsen, *siehe* Bd. 3  
Adiabate, *siehe* Bd. 4  
Adiabatenindex, *siehe* Bd. 4  
adjungierte Darstellung  
    einer Lie-Algebra, *siehe* Bd. 3  
    einer Lie-Gruppe, *siehe* Bd. 3  
adjungierter Operator, *siehe* Bd. 3  
Adsorption, *siehe* Bd. 4  
    mittlere Besetzungszahl, *siehe* Bd. 4  
Adsorptionsgleichgewicht  
    Langmuir-Isotherme, *siehe* Bd. 4  
Advektion, 301  
affiner Raum, 54  
Aharonov, Yakir, *siehe* Bd. 3  
Aharonov-Bohm-Effekt, *siehe* Bd. 3  
Ähnlichkeit  
    mechanische, 116  
Ähnlichkeitsgesetz, 308  
Ähnlichkeitstransformation, 117, 139, 140  
Airy, Sir George Biddell, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
Airy-Funktion, *siehe* Bd. 3  
Airy-Scheibchen, *siehe* Bd. 2  
Alfvén, Hannes, *siehe* Bd. 2

Alfvén'scher Satz, *siehe* Bd. 2

Algebra  
    der Erhaltungsgrößen, *siehe* Bd. 3  
allgemeine Relativitätstheorie, 337, *siehe auch*  
    Bd. 2  
Alpher, Ralph, *siehe* Bd. 3  
Ammoniakmolekül, *siehe* Bd. 3  
Ampere, *siehe* Bd. 2  
    absolutes, *siehe* Bd. 2  
    internationales, *siehe* Bd. 2  
    neue SI-Definition, *siehe* Bd. 2  
Ampère, André-Marie, *siehe* Bd. 2  
Ampère'sche Molekularströme, *siehe* Bd. 2  
Ampère'sches Gesetz, *siehe* Bd. 2  
Ampère'sches Kraftgesetz, *siehe* Bd. 2  
Amperesekunde, *siehe* Bd. 2  
Amplitude, 22  
analytisch, *siehe* Bd. 2  
Anderswo, absolutes, 334  
Anfangswertproblem, 13, 277, 280, *siehe auch*  
    Bd. 3  
anharmonische Schwingung, 211  
anharmonischer Oszillator, *siehe* Bd. 3  
Anomalie  
    exzentrische, 119  
Anschlussbedingungen  
    für Dielektrika, *siehe* Bd. 2  
    für magnetische Medien, *siehe* Bd. 2  
    für Wellenfunktion, *siehe* Bd. 3  
Antenne, *siehe* Bd. 2  
Antimaterie, 329  
Anyonen, *siehe* Bd. 3  
aperiodischer Grenzfall, 219  
Aphel, 96  
Apoapsis, 96  
Apogäum, 96  
Apsiden, 94  
Äquipotenzialfläche, 30, *siehe auch* Bd. 2  
Äquivalenzrelation, *siehe* Bd. 4  
Arbeit, 18, 20, *siehe auch* Bd. 4  
    technische, *siehe* Bd. 4  
    Wegunabhängigkeit, 32  
Arbeit und Wärme  
    Abgrenzung, *siehe* Bd. 4  
Archimedes, 2  
Aspect, Alain, *siehe* Bd. 3  
Assoziativgesetz, 4  
asymptotische Entwicklung, *siehe* Bd. 3  
Äther, 321, *siehe auch* Bd. 2  
Ätherdrift, 322  
Atlas, 168  
atmosphärische Elektrizität, *siehe* Bd. 2

Atomkern

    Einfluss auf Energie, *siehe* Bd. 3  
Aufenthaltswahrscheinlichkeit  
    im Gleichgewicht, *siehe* Bd. 4  
    im Zustandsraum, *siehe* Bd. 4  
Auflösungsvermögen, *siehe* Bd. 2  
Aufsteigoperator, *siehe* Bd. 3  
    für Drehimpuls, *siehe* Bd. 3  
Ausdehnungskoeffizient, *siehe* Bd. 4  
Ausschließungsprinzip, *siehe* Bd. 3  
Ausschlussprinzip, *siehe* Bd. 3  
äußeres Produkt, 25  
Austauschenergie, *siehe* Bd. 3  
Austauschentartung, *siehe* Bd. 3  
Austauschterm, *siehe* Bd. 3  
    bei Streuung, *siehe* Bd. 3  
Austauschwechselwirkung, *siehe* Bd. 3  
Auswahlregel, *siehe* Bd. 3  
    für Drehimpuls, *siehe* Bd. 3  
Avogadro, Amedeo, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
Avogadro-Konstante, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
axiale Eichung, *siehe* Bd. 2  
Axiome  
    von Kolmogorow, *siehe* Bd. 4

## B

Babinet, Jacques, *siehe* Bd. 2  
Babinet'sches Prinzip, *siehe* Bd. 2  
Back, Ernst Emil Alexander, *siehe* Bd. 3  
Bahn  
    gebundene, 94  
    ungebundene, 95  
Bahnbeschleunigung, 23  
Bahndrehimpuls-Vierertensor, *siehe* Bd. 2  
BahnEbene, 92  
Bahngeschwindigkeit, 23  
Bahnkurve, 5, 94  
    im Gravitationspotenzial, 97  
    im Zentralkraftfeld, 93  
Bahnparameter, 24, 97  
Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, *siehe* Bd. 3  
Balmer-Serie, *siehe* Bd. 3  
Banach-Raum, 6, *siehe auch* Bd. 3  
Band  
    elastisches, 275  
    unendliches, 276  
Barrieren, *siehe* Bd. 3  
Basis, 4  
    orthogonale, *siehe* Bd. 2  
    orthonormale, *siehe* Bd. 2  
Baum des Pythagoras, 259  
Bayes'scher Satz, *siehe* Satz, Bayes'scher  
Becquerel, Henri, *siehe* Bd. 3

- Bell, John Stewart, [347](#)  
 Bell'sche Ungleichung, *siehe* Bd. 3  
 Bell'sches Raumschiffparadoxon, [347](#)  
 Bell-Zustand, *siehe* Bd. 3  
 Bennett, Charles H., *siehe* Bd. 4  
 Bernoulli, Johann, [2](#)  
 Beschleunigung, [5](#)  
 beschränkter Operator, *siehe* Bd. 3  
 Besetzungswahrscheinlichkeit  
     im Zustandsraum, *siehe* Bd. 4  
 Besetzungszahl, *siehe* Bd. 3  
     mittlere  
         für ideale Quantengase, *siehe* Bd. 4  
 Besetzungszahldarstellung, *siehe* Bd. 4  
 Besetzungszahlinversion, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Besetzungszahloperator, *siehe* Bd. 3  
 Bessel, Friedrich Wilhelm, *siehe* Bd. 2  
 Bessel-Funktion, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
     erster Art, *siehe* Bd. 2  
     sphärische, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
     zweiter Art, *siehe* Bd. 2  
 Bessel'sche Differenzialgleichung, *siehe* Bd. 2;  
     Bd. 3  
 Bethe, Hans, *siehe* Bd. 3  
 Betragsquadrat, [214](#)  
 Beugung, *siehe* Bd. 2  
     an Kreisscheibe, *siehe* Bd. 2  
     Fraunhofer'sche, *siehe* Bd. 2  
     Fresnel'sche, *siehe* Bd. 2  
         qualitativ, *siehe* Bd. 2  
 Beugungstheorie  
     Kirchhoff'sche, *siehe* Bd. 2  
     skalare, *siehe* Bd. 2  
 Bewegungsgesetz, [8](#)  
 Bewegungsgleichungen  
     im Wechselwirkungsbild, *siehe* Bd. 3  
 Bezugssystem, [3](#)  
     linear beschleunigtes, [61](#)  
     rotierendes, [61, 185](#)  
 Bifurkation, [261](#)  
 Bildladungsmethode, *siehe* Bd. 2  
 Bildstrommethode, *siehe* Bd. 2  
 Bilinearität, [7](#)  
 Binomialkoeffizient, *siehe* Bd. 4  
 Binomialverteilung, *siehe* Bd. 4  
     Mittelwert, *siehe* Bd. 4  
     Streuung, *siehe* Bd. 4  
 Binormalenvektor, [24](#)  
 bi-orthogonales Funktionensystem, [281](#)  
 Biot, *siehe* Bd. 2  
 Biot, Jean-Baptiste, *siehe* Bd. 2  
 Biot-Savart-Gesetz, *siehe* Bd. 2  
 Birefringenz, *siehe* Bd. 2  
 Birkhoff, George David, *siehe* Bd. 4  
 Blende, *siehe* Bd. 2  
     komplementäre, *siehe* Bd. 2  
 Blindleistung, *siehe* Bd. 2  
 Blindwiderstand, *siehe* Bd. 2  
 Bloch, Felix, *siehe* Bd. 3  
 Bloch-Funktionen, *siehe* Bd. 3  
 B-Meson, [329](#)  
 Bogenlänge, [24](#)  
 Bogenlängenfunktional, [187](#)  
 Bohm, David Joseph, *siehe* Bd. 3  
 Bohm'sche Mechanik, *siehe* Bd. 3  
 Bohr, Niels, *siehe* Bd. 3  
 Bohr'sche Postulate, *siehe* Bd. 3  
 Bohr'scher Radius, *siehe* Bd. 3  
 Bohr'sches Atommodell, *siehe* Bd. 3  
 Bohr'sches Magnetom, *siehe* Bd. 3  
 Bohr-Sommerfeld-Quantisierung, *siehe* Bd. 3  
 Bohr-Sommerfeld-Regeln, *siehe* Bd. 3  
 Boltzmann, Ludwig, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Boltzmann-Faktor, *siehe* Bd. 4  
 Boltzmann-Konstante, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Boltzmann-Verteilung, *siehe* Bd. 4  
     boost, [327](#)  
 Born, Max, *siehe* Bd. 3  
 Born'sche Näherung, *siehe* Bd. 3  
 Born'sche Reihe, *siehe* Bd. 3  
     Konvergenz, *siehe* Bd. 3  
 Bose, Satyendranath, *siehe* Bd. 3  
 Bose-Einstein-Gas, ideales  
     Druck und innere Energiedichte, *siehe* Bd. 4  
     Entropiedichte, *siehe* Bd. 4  
     Fugazität, *siehe* Bd. 4  
     kritisches Volumen, *siehe* Bd. 4  
     latente Wärme beim Phasenübergang, *siehe*  
         Bd. 4  
     mittlere Teilchenzahl, *siehe* Bd. 4  
         spezifische Wärmekapazität, *siehe* Bd. 4  
 Bose-Einstein-Kondensation, *siehe* Bd. 4  
 Bose-Einstein-Verteilung, *siehe* Bd. 4  
 Bosonen, *siehe* Bd. 3  
     nicht wechselwirkend, *siehe* Bd. 3  
 Boyle, Robert, *siehe* Bd. 4  
 Boyle-Mariotte'sches Gesetz, *siehe* Bd. 4  
 Bra, *siehe* Bd. 3  
 Brachistochrone, [187, 201](#)  
 Bradley, James, [321](#), *siehe auch* Bd. 2  
 Bragg-Bedingung, *siehe* Bd. 3  
 Brahe, Tycho, [2](#)  
 Brayton, George, *siehe* Bd. 4  
 Brechung, *siehe* Bd. 2  
 Brechungsgesetz, [186](#), *siehe auch* Bd. 2  
 Brechungsindex, *siehe* Bd. 2  
 Breite, geografische, [67](#)  
 Breit-Wigner-Formel, *siehe* Bd. 3  
 Bremsstrahlung, *siehe* Bd. 2  
 Brennpunkt, [98](#)  
 Brewster, Sir David, *siehe* Bd. 2  
 Brewster-Winkel, *siehe* Bd. 2  
 Brille, 3-D, *siehe* Bd. 2  
 Brillouin, Léon Nicolas, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Brillouin-Funktion, *siehe* Bd. 4
- C**  
 Caloricum, *siehe* Bd. 4  
 Carleson, Lennart, [283](#)  
 Carleson, Satz von, [282](#)  
 Carnot, Betrachtungen, *siehe* Bd. 4  
 Cartan, Élie Joseph, *siehe* Bd. 2; Bd. 4  
 Cauchy-Folge, [6](#), *siehe auch* Bd. 3  
 Cauchy-Gleichung, [304](#)  
 Cauchy-Hadamard, *siehe* Bd. 2  
 Cauchy-Riemann'sche-Differenzialgleichungen,  
     *siehe* Bd. 2  
 Cauchy'scher Integralsatz, *siehe* Bd. 2  
 Cavendish, Henry, *siehe* Bd. 2  
 Cayley-Transformation, *siehe* Bd. 3  
 Celsius, Anders, *siehe* Bd. 4
- CERN, [369](#)  
 CFD, *siehe* Computational Fluid Dynamics  
 CGS-Einheiten, [11](#), *siehe auch* Bd. 2  
 Chamberlain, Owen, [365](#)  
 Chander-Periode, [152](#)  
 Chandrasekhar, Subrahmanyam, *siehe* Bd. 4  
 Chandrasekhar-Masse, *siehe* Bd. 4  
 Chaos, [260](#)  
 Chaosforschung, [255](#)  
 charakteristische Funktion, [257](#)  
 charakteristisches Polynom, [140](#)  
 chemisches Potenzial, *siehe* Bd. 4  
     als verallgemeinerte Kraft, *siehe* Bd. 4  
     eines idealen Gases, *siehe* Bd. 4  
 Cherenkov-Strahlung, [365](#)  
 Chromodynamik, *siehe* Bd. 3  
 Clapeyron, Benoît Paul Émile, *siehe* Bd. 4  
 Clausius, Rudolf, *siehe* Bd. 4  
 Clausius-Clapeyron'sche Gleichung, *siehe* Bd. 4  
 Clausius-Mossotti-Formel, *siehe* Bd. 2  
 Clebsch-Gordan Koeffizienten, *siehe* Bd. 3  
 COBE-Satellit, *siehe* Bd. 3  
 Compton, Arthur, *siehe* Bd. 3  
 Compton-Effekt, *siehe* Bd. 3  
 Compton-Streuung, [363](#)  
 Compton-Wellenlänge, *siehe* Bd. 3  
 Compton-Zeit, *siehe* Bd. 3  
 Computational Fluid Dynamics, [311](#)  
 Confinement, *siehe* Bd. 2  
 Coriolis-Kraft, [67](#)  
 Coulomb, *siehe* Bd. 2  
 Coulomb, Charles-Augustin de, *siehe* Bd. 2  
 Coulomb-Anteil, *siehe* Bd. 2  
 Coulomb-Eichung, *siehe* Bd. 2  
 Coulomb'sches Gesetz, *siehe* Bd. 2  
 Coulomb-Streuung, *siehe* Bd. 3  
     von  $\alpha$ -Teilchen, *siehe* Bd. 3  
 COW-Experiment, *siehe* Bd. 3  
 CP-Verletzung, [329](#)  
 Cramer'sche Regel, [57](#)  
 Cronin, James, [329](#)  
 Curie, Marie, *siehe* Bd. 3  
 Curie, Pierre, *siehe* Bd. 3  
 Curie'sches Gesetz, *siehe* Bd. 4  
 Curie-Temperatur, *siehe* Bd. 2; Bd. 4  
 Curie-Weiss-Modell, *siehe* Bd. 4  
     ferromagnetische Phase, *siehe* Bd. 4  
     kritische Temperatur, *siehe* Bd. 4  
     mittlerer Spin, *siehe* Bd. 4  
     Suszeptibilität und Magnetisierung, *siehe*  
         Bd. 4  
     Wärmekapazität, *siehe* Bd. 4
- D**  
 d'Alembert, Jean-Baptiste le Rond, [2](#)  
 d'Alembert-Operator, *siehe* Bd. 2  
 d'Alembert-Reduktion, [219](#)  
 d'Alembert'sche Schwingungsgleichung, [276](#),  
     *siehe auch* Bd. 2  
 d'Alembert'sches Prinzip, [173](#)  
 Dampfdruckkurve, *siehe* Bd. 4  
 Dampfmaschine, *siehe* Bd. 4  
 Dämpfung  
     kritische, [218](#)  
     schwache, [218](#)  
     starke, [218](#)

- Darstellung, 60  
 der Gittertranslationen, *siehe* Bd. 3  
 der Permutationsgruppe, *siehe* Bd. 3  
 des Ortsvektors, 48  
 Drehungen durch Matrizen, 49  
 einer Lie-Algebra, *siehe* Bd. 3  
 einer Lie-Gruppe, *siehe* Bd. 3  
 irreduzible, *siehe* Bd. 3  
 unitäre, *siehe* Bd. 3  
 von Drehungen, *siehe* Bd. 3
- Darwin, Charles Galton, *siehe* Bd. 3
- Darwin-Term, *siehe* Bd. 3
- Davisson, Clinton, *siehe* Bd. 3
- de Broglie, Louis, *siehe* Bd. 3
- de Haas, Wim, *siehe* Bd. 3
- de Sitter, Willem, 345
- De-Broglie-Wellenlänge, *siehe* Bd. 3
- Debye, Peter, *siehe* Bd. 4
- Debye-Funktion, *siehe* Bd. 4
- Debye-Temperatur, *siehe* Bd. 4
- Debye-Wellenzahl, *siehe* Bd. 4
- Definitionsbereich eines Operators, *siehe* Bd. 3
- Deformationspolarisation, *siehe* Bd. 2
- Dekohärenz, *siehe* Bd. 3
- Dekohärenz-Programm, *siehe* Bd. 3
- Delbrück-Streuung, *siehe* Bd. 2
- Delta-Distribution, *siehe* Bd. 2
- Deltafunktion, *siehe* Bd. 2
- Deltapotenzial, *siehe* Bd. 3
- Der Spin, *siehe* Bd. 3
- Derivationsregel, *siehe* Bd. 3
- Descartes, René, 321, *siehe auch* Bd. 2
- Determinante, 52, 55  
 Laplace'scher Entwicklungssatz, 57  
 Minor, 57, *siehe auch* Bd. 4  
 Regel von Sarrus, 52  
 Unterdeterminante, 57
- Determinismus, 259
- Deviationsmoment, 132
- diagonalisierbar, 140
- Diamagnetismus, *siehe* Bd. 2; Bd. 3
- Dichtefunktionaltheorie, *siehe* Bd. 3
- Dichtematrix, *siehe* Bd. 3  
 Anzahl Parameter, *siehe* Bd. 3
- Dichteoperator, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Eigenschaften, *siehe* Bd. 3
- Dielektrikum, *siehe* Bd. 2
- dielektrische Verschiebung, *siehe* Bd. 2
- Dielektrizitätskonstante, *siehe* Bd. 2  
 des Vakuums, *siehe* Bd. 2  
 relative, *siehe* Bd. 2  
 verallgemeinert, *siehe* Bd. 2
- Dielektrizitätszahl, *siehe* Bd. 2
- Diesel, Rudolf, *siehe* Bd. 4
- Differenzial  
 exaktes, *siehe* Bd. 4  
 unvollständiges, *siehe* Bd. 4  
 vollständiges, 21, *siehe auch* Bd. 4
- Differenzialformen, *siehe* Bd. 2
- Differenzialgleichung  
 Airy'sche, *siehe* Bd. 3  
 Anfangswertbedingung, 212  
 Bessel'sche, *siehe* Bd. 2  
 charakteristisches Polynom, 216  
 Fuchs'sche, *siehe* Bd. 3
- gewöhnliche, 13  
 homogene, 212  
 hypergeometrische, *siehe* Bd. 3  
 inhomogene, 212  
 Laguerre'sche, *siehe* Bd. 3  
 Legendre'sche, *siehe* Bd. 2  
 lineare, 212  
 Ordnung, 13  
 partielle, 13  
 partikuläre Lösung, 212
- Differenzialgleichungssystem, 212
- Differenzialoperator, 29  
 nichtkartesischer, 75  
 selbstadjungiert, *siehe* Bd. 2
- Differentialprinzip, 186
- differenzieller Erhaltungssatz, 301
- differenzieller Wirkungsquerschnitt, 106, *siehe auch* Bd. 3
- Differenzierbarkeit, 29
- Dimension, 4  
 Dimension eines Vektorraums, *siehe* Bd. 3
- Dimensionsanalyse, *siehe* Bd. 2
- Dipol  
 Hertz'scher, *siehe* Bd. 2  
 magnetischer, *siehe* Bd. 2
- Dipolmoment  
 elektrisches, *siehe* Bd. 2  
 magnetisches, *siehe* Bd. 2
- Dipolstrahlung, *siehe* Bd. 2  
 elektrische, *siehe* Bd. 3  
 magnetische, *siehe* Bd. 2; Bd. 3
- Dirac, Paul, *siehe* Bd. 2; Bd. 3
- Dirac-Distribution, 187
- Dirac-Gleichung, *siehe* Bd. 3
- Dirac-Notation, *siehe* Bd. 3
- Dirac'sche Deltafunktion, *siehe* Deltafunktion
- direkte Summe von Hilbert-Räumen, *siehe* Bd. 3
- Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune, *siehe* Bd. 2
- Dirichlet-Green-Funktion, *siehe* Bd. 2
- Dirichlet-Problem, *siehe* Bd. 3
- Dirichlet-Randbedingung, 279, *siehe auch* Bd. 2; Bd. 3
- diskrete Symmetrie, 196
- Dispersion, *siehe* Bd. 2  
 anomale, *siehe* Bd. 2  
 normale, *siehe* Bd. 2
- Dispersionsrelation, 232, *siehe auch* Bd. 2  
 für Gitterschwingungen im Festkörper, *siehe* Bd. 4
- Dispersionsrelationen von Kramers und Kronig, *siehe* Bd. 2
- Dissipation, 20, *siehe auch* Bd. 4
- Distributionen, *siehe* Bd. 2  
 Rechenregeln, *siehe* Bd. 2  
 reguläre, *siehe* Bd. 2  
 temperierte, *siehe* Bd. 2
- Divergenz, 29  
 in allgemeinen Koordinatensystemen, 75
- Divergenzfreiheit, 303
- Doppelbrechung, *siehe* Bd. 2
- Doppelfakultät, *siehe* Bd. 2
- Doppler, Christian, *siehe* Bd. 2
- Doppler-Effekt, 233, *siehe auch* Bd. 2
- Drehgruppe, *siehe* Bd. 3
- SO(3), 59
- Drehimpuls, 26, *siehe auch* Bd. 2  
 Addition, *siehe* Bd. 3  
 Produktzustände, *siehe* Bd. 3  
 Transformation unter Drehungen, 55
- Drehimpulsdichte  
 elektromagnetische, *siehe* Bd. 2
- Drehimpulserhaltung  
 für Zentralkräfte, 92
- Drehimpulsoperator, *siehe* Bd. 3
- Drehimpulskontanzahl, *siehe* Bd. 3
- Drehimpulssatz, 26, 88  
 vierdimensionale Verallgemeinerung, *siehe* Bd. 2
- Drehimpuls-Vierertensor, *siehe* Bd. 2
- Drehmatrix, 51
- Drehmoment, 26  
 Dipol, *siehe* Bd. 2  
 Quadrupol, *siehe* Bd. 2
- Drehung, *siehe* Bd. 3  
 aktive, 49  
 infinitesimale, 62  
 passive, 49  
 unitäre Darstellungen, *siehe* Bd. 3
- Drehungen  
 sukzessive, 51
- Drehungstensor, 291
- Dreibein, 48
- 3-D-Brille, *siehe* Bd. 2
- Dreiecksregel, *siehe* Bd. 3
- Dreiecksschwingung, 283
- Dreiecksungleichung, 6, *siehe auch* Bd. 3
- Dreikörperproblem  
 klassisches, 109  
 quantenmechanisches, *siehe* Bd. 3
- Driftgeschwindigkeit, elektrische, *siehe* Bd. 2
- Druck, 298  
 als verallgemeinerte Kraft, *siehe* Bd. 4  
 mechanischer, 298  
 Messung und Einheiten, *siehe* Bd. 4  
 thermodynamischer, 299
- Druckspannung, 273
- Druck-Volumen-Arbeit, *siehe* Bd. 4
- Drude-Modell, *siehe* Bd. 2
- duale Basis, 340
- dualer Vektorraum, 339, *siehe auch* Bd. 3
- duales Gitter, *siehe* Bd. 3
- Dufay, Charles, *siehe* Bd. 2
- Duhem, Pierre Maurice Marie, *siehe* Bd. 4
- Dulong, Pierre Louis, *siehe* Bd. 4
- Dulong-Petit'sches Gesetz, *siehe* Bd. 4
- Dunkle Energie, *siehe* Bd. 3
- Dunkle Materie, *siehe* Bd. 3
- Durchflutungsgesetz, *siehe* Bd. 2
- Durchstoßpunkt, 154
- Dyade, 136
- dyadisches Produkt, 134, 136
- dyn, *siehe* Bd. 2
- Dynamik, 12
- dynamische Viskosität, 306
- Dyson, Freeman, *siehe* Bd. 3
- Dyson-Reihe, *siehe* Bd. 3
- E**
- Ebene, schiefe, 181
- ebener Poiseuille-Fluss, 307

- effektive Feldtheorien, *siehe* Bd. 2  
 effektive Wirkung, *siehe* Bd. 2  
 Ehrenfest, Paul, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Ehrenfest-Theorem, *siehe* Bd. 3  
 Eichfunktion, *siehe* Bd. 2  
 Eichinvarianz, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 eichkovariante Ableitung, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Eichtheorie  
   nichtabelsche, *siehe* Bd. 2  
 Eichtransformation, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
    $SU(N)$ , *siehe* Bd. 3  
    $U(1)$ , *siehe* Bd. 3  
 Eichung, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Eigenfrequenz, 213  
 Eigenfunktion  
   eigentliche, *siehe* Bd. 3  
   uneigentliche, *siehe* Bd. 3  
 Eigenmode, 225  
 Eigenschwingung, 227  
 eigentliche Eigenfunktion, *siehe* Bd. 3  
 Eigenvektoren, 140  
   von  $\hat{J}^2$ , *siehe* Bd. 3  
   von  $\hat{J}_3$ , *siehe* Bd. 3  
 Eigenwert, 139, 140, *siehe auch* Bd. 3  
   entarteter, 140  
 Eigenwertgleichung, 141, *siehe auch* Bd. 3  
 Eigenwertproblem, *siehe* Bd. 3  
 Eigenzeit, 336, *siehe auch* Bd. 2  
 Eikonal, *siehe* Bd. 2  
 Eikonalgleichung, *siehe* Bd. 2  
 eindimensionale Potenzialprobleme, *siehe* Bd. 3  
 Eindringtiefe, *siehe* Bd. 2  
 einfach zusammenhängendes Gebiet, 34, *siehe auch* Bd. 2  
 eingespannte Enden, 231  
 Einheiten  
   CGS-, *siehe* CGS-Einheiten  
   Grund-, 11  
   Planck'sche, *siehe* Bd. 3  
   SI-, *siehe* SI-Einheiten  
 Einheitsmatrix, 50  
 Einheitstensor, 136  
 Einheitsvolumen, orientiertes, 25  
 einlaufende Welle, *siehe* Bd. 3  
 Einschwingung, 221  
 Einstein, Albert, 2, 320, 324, *siehe auch* Bd. 3  
 Einstein-de Haas-Effekt, *siehe* Bd. 3  
 Einstein-Koeffizienten, *siehe* Bd. 3  
 Einstein'sche Gravitationstheorie, *siehe* Bd. 2  
 Einstein'sche Summenkonvention, 24, 25, 53  
   vierdimensional, 337, *siehe auch* Bd. 2  
 Einteilchen-Näherung, *siehe* Bd. 3  
 Einteilchenoperator, *siehe* Bd. 3  
 elastische Kopplung, 223  
 elastischer Körper, 273  
 elastisches Band, 275  
 Elastizitätsmodul, 274  
   Young'scher, 291  
 Elastizitätstensor, 290  
 Elastizitätstheorie, 290  
 Elektret, *siehe* Bd. 2  
 elektrische Feldstärke, *siehe* Bd. 2  
 elektrische Influenz, *siehe* Bd. 2  
 elektrische Ladung, *siehe* Bd. 2  
 elektrische Polarisation, *siehe* Bd. 2  
 elektrische Suszeptibilität, *siehe* Bd. 2  
 elektrischer Leiter, *siehe* Bd. 3  
 elektrodynamische Potenziale, *siehe* Bd. 2  
 elektromagnetische Wellen, *siehe* Bd. 2  
 elektromagnetisches Feld  
   Druck und Energiedichte, *siehe* Bd. 4  
 elektromotorische Kraft, *siehe* Bd. 2  
 Elektron  
   Entdeckung, *siehe* Bd. 3  
   im Zentralfeld, *siehe* Bd. 3  
 Elektronenradius, klassischer, *siehe* Bd. 2  
 Elektronenschwingung, 224  
 Elektronenstreuung, *siehe* Bd. 3  
 Elektronenvolt, 360, *siehe auch* Bd. 2  
 Elektron-Positron-Paarzeugung, *siehe* Bd. 2  
 Elektron-Positron-Paarvernichtung, 365  
 Elektrostatik, *siehe* Bd. 2  
 Ellipsenbahn, 97  
 elliptische Integrale, 154, *siehe auch* Bd. 2  
 Emden, Robert, *siehe* Bd. 4  
 Emission  
   induzierte, *siehe* Bd. 3  
   spontane, *siehe* Bd. 3  
   stimulierte, *siehe* Bd. 3  
 Emissionsspektrum, 224  
 EMK, *siehe* Bd. 2  
 Enden, eingespannte, 231  
 Energie, 18  
   freie, *siehe* Bd. 4  
   Helmholtz'sche freie, *siehe* Bd. 4  
   innere, *siehe* Bd. 4  
   kinetische, 18  
   potenzielle, 18, 20  
   relativistische, 359  
   von Punktmassen, 88  
   Wärme und Arbeit, *siehe* Bd. 4  
 Energiebänder, *siehe* Bd. 3  
 Energie-Darstellung, *siehe* Bd. 3  
 Energiedichte des elektromagnetischen Feldes, *siehe* Bd. 2  
 Energiedichte, potenzielle, 289  
 Energieerhaltung, 89, 259  
 Energieerhaltungssatz, 20, *siehe auch* Bd. 4  
 Energie-Impuls-Tensor  
   kanonischer, *siehe* Bd. 2  
   symmetrischer, *siehe* Bd. 2  
 Energie-Impuls-Tensor, elektromagnetischer, *siehe* Bd. 2  
 Energiesatz, *siehe* Energieerhaltungssatz  
   der Elektrodynamik, *siehe* Bd. 2  
   mit Zwangsbedingungen, 172  
 Energieschale, *siehe* Bd. 4  
 Energiestromdichte, *siehe* Bd. 2  
 Energieübertrag bei elastischer Streuung, 104  
 Ensemble, *siehe* Bd. 4  
   Äquivalenz, *siehe* Bd. 4  
   gleichartiger Systeme, *siehe* Bd. 4  
   großkanonisches, *siehe* Bd. 4  
   kanonisches, *siehe* Bd. 4  
   mikrokanonisches, *siehe* Bd. 4  
 Ensemble-Interpretation, *siehe* Bd. 3  
 Ensemblemittel, *siehe* Bd. 4  
 Entartung, 141  
   vollständige, *siehe* Bd. 4  
 Entelektrifizierungsfaktor, *siehe* Bd. 2  
 Entelektrisierung, *siehe* Bd. 2  
 Enthalpie, *siehe* Bd. 4  
   als Funktion des Druckes, *siehe* Bd. 4  
   freie, *siehe* Bd. 4  
   Gibbs'sche, *siehe* Bd. 4  
   und innere Energie, *siehe* Bd. 4  
 Enthemmung, *siehe* Bd. 4  
 Entmagnetisierungsfaktor, *siehe* Bd. 2  
 Entropie, *siehe* Bd. 4  
   absolute Bestimmung, *siehe* Bd. 4  
   als extensive Zustandsgröße, *siehe* Bd. 4  
   als Maß des Phasenraumvolumens, *siehe* Bd. 4  
   als Maß einer Unordnung, *siehe* Bd. 4  
   als Maß für Ignoranz, *siehe* Bd. 4  
   als Maß für Wahrscheinlichkeitsverteilungen, *siehe* Bd. 4  
   als phänomenologische Zustandsgröße, *siehe* Bd. 4  
   bei irreversiblen Prozessen, *siehe* Bd. 4  
   bei reversiblen Kreisprozessen, *siehe* Bd. 4  
   Eindeutigkeit in der Quantenmechanik, *siehe* Bd. 4  
   eines idealen Gases, *siehe* Bd. 4  
   in abgeschlossenen Systemen, *siehe* Bd. 4  
   inhomogener Systeme, *siehe* Bd. 4  
   statistische Deutung/Interpretation, *siehe* Bd. 4  
   und Dissipation, *siehe* Bd. 4  
   Unterschied zwischen zwei Zuständen, *siehe* Bd. 4  
   Zunahme bei irreversiblen Prozessen, *siehe* Bd. 4  
 Entwicklung, asymptotische, *siehe* Bd. 3  
 EPR-Paradox, *siehe* Bd. 3  
 Erdabplattung, 67  
 Erdung, *siehe* Bd. 2  
 Ereignis, 3, 330, *siehe auch* Bd. 2  
 Ereignishorizont, 358  
 erg, *siehe* Bd. 2  
 Ergodenhypothese, *siehe* Bd. 4  
 Ergodensatz, *siehe* Bd. 4  
 Erhaltungsgröße, *siehe* Bd. 3  
 Erhaltungssatz, differenzialler, 301  
 Ericsson, Johan, *siehe* Bd. 4  
 Ersatzprozess  
   für Mischung von Gasen, *siehe* Bd. 4  
   reversibler, *siehe* Bd. 4  
   zur Wärmeleitung, *siehe* Bd. 4  
 Erwartungswert  
   allgemeine Aussagen über den, *siehe* Bd. 3  
   des Impulses, *siehe* Bd. 3  
   des Ortes, *siehe* Bd. 3  
   einer Observablen, *siehe* Bd. 3  
   von  $f(\hat{x}, \hat{p})$ , *siehe* Bd. 3  
 Erzeugende, 251  
   einer Symmetrie, *siehe* Bd. 3  
 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  
   bosonische und fermionische, *siehe* Bd. 4  
 Vertauschungs- oder  
   Antivertauschungsrelationen, *siehe* Bd. 4  
 Erzeugungsoperator, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Estermann, Immanuel, *siehe* Bd. 3  
 Euler, Hans, *siehe* Bd. 2

- Euler, Leonhard, 2, *siehe* Bd. 4  
 Euler-Ansatz, 216  
 Euler-Gleichung, 148, 302  
     der Variationsrechnung, 188  
 Euler-Heisenberg-Lagrange-Dichte, *siehe* Bd. 2  
 Euler-Lagrange-Gleichung, 192, *siehe auch*  
     Bd. 2  
     für Felder, kovariant, *siehe* Bd. 2  
     kovariant, *siehe* Bd. 2  
 Euler'sche Formel, 214  
 Euler'scher Satz, *siehe* Bd. 4  
 Euler-Theorem  
     für starre Körper, 130  
     über homogene Funktionen, 117, *siehe auch*  
     Bd. 4  
 Euler-Verfahren, explizites, 311, *siehe* Bd. 4  
 Euler-Winkel, 130, 148, *siehe auch* Bd. 3  
 Evolutionsoperator, *siehe* Bd. 3  
 Existenz  
     des Inversen, 4  
     des neutralen Elements, 4  
 explizit zeitabhängig, 21  
 explizites Euler-Verfahren, 311  
 Exponentialansatz, 216  
 Exponentiation von Operatoren, *siehe* Bd. 3  
 Extinktionskoeffizient, *siehe* Bd. 2  
 Extremale, 188  
 Extremaleigenschaft  
     der Entropie, *siehe* Bd. 4  
     der freien Energie, *siehe* Bd. 4  
     der freien Enthalpie, *siehe* Bd. 4  
 Extremalprinzip, 186  
 exzentrische Anomalie, 119  
 Exzentrizität, 97  
     lineare, 98  
     numerische, 98
- F**
- Faden im Gravitationsfeld, 296  
 Fadenpendel, 213  
 Fahrenheit, Daniel, *siehe* Bd. 4  
 Fahrstrahl, 92  
 Faktor  
     gyromagnetischer, *siehe* g-Faktor  
     integrierender, *siehe* Bd. 4  
 Faktorisierungsproblem, *siehe* Bd. 3  
 Fakultät, 31  
 Fall  
     frei, 12, 18  
     freier auf rotierender Erde, 68  
     mit Luftwiderstand, 16  
     mit Stokes'scher Reibung, 15  
 Fallgesetz, Galilei'sches, 10  
 Fallzeit, 13  
 Farad, *siehe* Bd. 2  
 Faraday, Michael, *siehe* Bd. 2  
 Faraday'sche Scheibe, *siehe* Bd. 2  
 Faraday'scher Käfig, *siehe* Bd. 2  
 Faraday'sches Induktionsgesetz, *siehe* Bd. 2  
 Federkonstante, 22  
 Fehlerfunktion, *siehe* Bd. 3  
 Feigenbaum-Konstante, 261  
 Feinstruktur, *siehe* Bd. 3  
 Feinstrukturkonstante, *siehe* Bd. 3  
 Feld, 21, 274  
     selbstkonsistentes, *siehe* Bd. 3
- Feldfunktion, 274  
 Feldgleichung, 275  
 Feldimpuls  
     kanonischer, *siehe* Bd. 2  
 Feldstärke  
     elektrische, *siehe* Bd. 2  
     magnetische, *siehe* Bd. 2  
 Feldstärketensor, *siehe* Bd. 2  
     dualer, *siehe* Bd. 2  
     makroskopischer/phänomenologischer, *siehe*  
     Bd. 2  
 Fermat, Pierre de, *siehe* Bd. 2  
 Fermat'sches Prinzip, 186, *siehe auch* Bd. 2  
 Fermi, Enrico, 344, *siehe auch* Bd. 3  
 Fermi-Dirac-Verteilung, *siehe* Bd. 4  
 Fermi-Druck, *siehe* Bd. 4  
 Fermi-Energie, *siehe* Bd. 4  
 Fermi-Gas, ideales  
     Druck und Energiedichte, *siehe* Bd. 4  
     Entropiedichte, *siehe* Bd. 4  
     Grenzfall schwacher Entartung, *siehe* Bd. 4  
     Grenzfall starker Entartung, *siehe* Bd. 4  
 Fermi-Integrale, *siehe* Bd. 4  
 Fermi-Kante, *siehe* Bd. 4  
 Fermionen, *siehe* Bd. 3  
     nicht wechselwirkend, *siehe* Bd. 3  
 Fermi-Walker-Transport, 344  
 Fernfeld, *siehe* Bd. 2  
 Ferroelektrikum, *siehe* Bd. 2  
 Ferromagnetismus, *siehe* Bd. 2  
 Feshbach-Resonanz, *siehe* Bd. 3  
 Festkörper  
     innere Energie, *siehe* Bd. 4  
     Modell aus harmonischen Oszillatoren, *siehe*  
     Bd. 4  
     molare Wärmekapazität im Debye-Modell,  
     *siehe* Bd. 4  
 Feynman, Richard, *siehe* Bd. 4  
 Feynman-Green-Funktion, *siehe* Bd. 2  
 Feynman-Kac-Formel, *siehe* Bd. 3  
 Figurenachse, 150  
     Locus, 154  
 Finite-Differenzen-Methode, 311  
 Finite-Elemente-Methode, 311  
 Fitch, Val, 329  
 Fitzgerald, George, 323  
 Fizeau, Hippolyte, 321, *siehe auch* Bd. 2  
 Flächengeschwindigkeit, 92  
 Flächenrotation, *siehe* Bd. 2  
 Fluchtgeschwindigkeit, 19  
 Fluid, 298, *siehe auch* Bd. 4  
     ideales, 302  
 Fluideynamik, 297  
 Fluktuation  
     der Energie, *siehe* Bd. 4  
     der inneren Energie, *siehe* Bd. 4  
     Energieaustausch, *siehe* Bd. 4  
 Fluktuations-Dissipations-Relation, *siehe* Bd. 4  
 Fluss  
     eines Vektorfeldes, *siehe* Bd. 2  
     elektrischer, *siehe* Bd. 2  
     magnetischer, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Flussdichte  
     magnetische, *siehe* Bd. 2  
 Flussregel, *siehe* Bd. 2
- Fly-by-Manöver, 104  
 Fock, Wladimir Alexandrowitsch, *siehe* Bd. 3  
 Fock-Raum, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
     orthonormale Basis, *siehe* Bd. 4  
 Fock-Vakuum, *siehe* Bd. 4  
 Folgenraum, *siehe* Bd. 3  
 Form, quadratische, 224  
 Formel von Plancherel, *siehe* Bd. 3  
 Formfaktor, *siehe* Bd. 3  
 Forminvarianz, 137, *siehe auch* Bd. 3  
 Foucault, Léon, *siehe* Bd. 3  
 Foucault'sches Pendel, 68, 219  
 Fourier, Jean Baptiste Joseph, 283, *siehe auch*  
     Bd. 4  
 Fourier-Analyse, 281, *siehe auch* Bd. 2  
 Fourier-Integral, *siehe* Bd. 2  
     vierdimensional, *siehe* Bd. 2  
 Fourier-Optik, *siehe* Bd. 2  
 Fourier-Reihe, 281, 282, *siehe auch* Bd. 2  
     Amplituden-Phasen-Darstellung der, 286  
     Exponentialdarstellung der, 287  
 Fourier-Spektrum, 281  
 Fourier-Synthese, 281  
 Fourier-Transformation, 222, *siehe auch* Bd. 2  
     frame dragging, 346  
 Frank, Philipp, 325  
 Fraunhofer, Joseph von, *siehe* Bd. 2  
 freie Energie, *siehe* Energie, freie  
 freie Enthalpie, *siehe* Enthalpie, freie  
 freier Elektronen-Laser, *siehe* Bd. 2  
 Freiheitsgrad, 8  
     des starren Körpers, 128  
 Fresnel, Augustin Jean, 321, *siehe auch* Bd. 2;  
     Bd. 3  
 Fresnel'sche Formeln, *siehe* Bd. 2  
 Fresnel'scher Mitführungskoeffizient, 321, *siehe*  
     auch Bd. 2  
 Fresnel-Zonenlinse, *siehe* Bd. 2  
 Frobenius-Sommerfeld-Methode, *siehe* Bd. 3  
 Frontgeschwindigkeit, *siehe* Bd. 2  
 Fuchs'sche Differenzialgleichung, *siehe* Bd. 3  
 Fuchs'scher Satz, *siehe* Bd. 3  
 Fugazität, *siehe* Bd. 4  
 fundamentale Poisson-Klammern, 249  
 Fundamentallösung, 212  
 Fundamentalsystem, 212  
     von Lösungen, *siehe* Bd. 3  
 Funktion  
     Green'sche, *siehe* Bd. 2  
     harmonische, *siehe* Bd. 2  
     homogene, *siehe* Bd. 4  
     Euler'scher Satz, *siehe* Bd. 4  
     kausale, *siehe* Bd. 2  
     konkave, *siehe* Bd. 4  
     verallgemeinerte, *siehe* Bd. 2  
 Funktional, 186, 187  
     Bogenlängen-, 187  
     Lagrange-, 287  
     lineares, 187  
     nichtlineares, 187  
 Funktionaldeterminante, 146  
 Funktionalintegral, *siehe* Bd. 3  
 Funktionalmatrix, *siehe* Bd. 4  
 Funktionenfolge, 282  
     gleichmäßig konvergente, 282

- punktweise konvergente, 282  
 Funktionenreihe, 282  
 Funktionensystem  
   bi-orthogonales, 281  
   orthonormales, *siehe* Bd. 2  
   vollständiges, *siehe* Bd. 2
- G**  
 Galilei, Galileo, 2, 321  
 Galilei-Invarianz, 194  
 Galilei-Kovarianz der Schrödinger-Gleichung,  
   *siehe* Bd. 3  
 Galilei'sches Fallgesetz, 10  
 Galilei-Transformation, 58, 59, 325, 330  
 Gammafunktion, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Gamma-Konversion, 365  
 Gamov, George, *siehe* Bd. 3  
 Gamov-Faktor, *siehe* Bd. 3  
 Gangpolkegel, 150  
 Gas  
   ideales, 303, *siehe auch* Bd. 4  
   adiabatische Ausdehnung, *siehe* Bd. 4  
   Differenz der spezifischen Wärmen, *siehe*  
     Bd. 4  
   Eigenschaften, *siehe* Bd. 4  
   Energie einzelner Teilchen, *siehe* Bd. 4  
   Entropie, *siehe* Bd. 4  
   innere Energie, *siehe* Bd. 4  
   innere Energie aus dem  
     Gleichverteilungssatz, *siehe* Bd. 4  
   innere Energie im Schwerefeld, *siehe*  
     Bd. 4  
   mit inneren Freiheitsgraden, *siehe* Bd. 4  
   ultrarelativistisches, *siehe* Bd. 4  
   Wärmekapazitäten, *siehe* Bd. 4  
   Wechselwirkung der Teilchen, *siehe* Bd. 4  
   Zustandsgleichung, *siehe* Bd. 4  
 ideales und reales, *siehe* Bd. 4  
 reales  
   Van-der-Waals'sche Gasgleichung, *siehe*  
     Bd. 4  
 reales (Van-der-Waals-Gas)  
   Ausströmen, *siehe* Bd. 4  
   Entropie, *siehe* Bd. 4  
   innere Energie, *siehe* Bd. 4  
   Inversionsdruck, *siehe* Bd. 4  
   Inversionstemperatur, *siehe* Bd. 4  
   Isothermen, *siehe* Bd. 4  
   Kondensationsdruck, *siehe* Bd. 4  
   kritische Temperatur, *siehe* Bd. 4  
   Phasen, *siehe* Bd. 4  
   Van-der-Waals'sche Zustandsgleichung in  
     dimensionsloser Form, *siehe* Bd. 4  
   Verdampfungsdruck, *siehe* Bd. 4  
 Gasgesetze, *siehe* Bd. 4  
   Boyle-Mariotte, *siehe* Bd. 4  
   Gay-Lussac, *siehe* Bd. 4  
 Gaskonstante, allgemeine, *siehe* Bd. 4  
 Gauß, *siehe* Bd. 2  
 Gauß, Carl Friedrich, *siehe* Bd. 2  
 Gauß'sche Glockenkurve, *siehe* Bd. 2  
 Gauß'sche Methode zur Vermessung von  
   Magnetfeldern, *siehe* Bd. 2  
 Gauß'sche Wellenpakete, *siehe* Bd. 3  
 Gauß'sche Zahlenebene, 214  
 Gauß'scher Satz, 33, 295, *siehe auch* Bd. 2
- Gauß'sches Gesetz, *siehe* Bd. 2  
 Gay-Lussac, Joseph, *siehe* Bd. 4  
 Gay-Lussac, Versuch von, *siehe* Bd. 4  
 Gebiet, *siehe* Bd. 2  
 Gegeninduktionskoeffizienten, *siehe* Bd. 2  
 Gegenwart, 334  
 Geiger, Hans, *siehe* Bd. 3  
 Gelfand-Yaglom-Methode, *siehe* Bd. 3  
 Gemisch, *siehe* Bd. 3  
 generalisierte Geschwindigkeit, 177  
 generalisierte Koordinate, 169, 176  
 generalisierte Kraft, 176  
 generalisierter Impuls, 179, 244  
 Geodäte, 193  
 geodätische Linie, 193  
 gequetschter Zustand, *siehe* Bd. 3  
 Gerlach, Walther, *siehe* Bd. 3  
 Germer, Lester, *siehe* Bd. 3  
 Gesamtheit, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Gesamtmasse, 87  
 Geschwindigkeit, 5  
   generalisierte, 177  
 Geschwindigkeitsaddition, relativistische, 328,  
   342  
 Geschwindigkeitsfilter, *siehe* Bd. 2  
 Geschwindigkeitsverteilung, Maxwell'sche,  
   *siehe* Bd. 4  
 Gesetz  
   1. Ampère'sches, *siehe* Bd. 2  
   2. Ampère'sches, *siehe* Bd. 2  
   Biot-Savart, *siehe* Bd. 2  
   der großen Zahlen, *siehe* Bd. 4  
   Gauß'sches, *siehe* Bd. 2  
   Oersted'sches, *siehe* Bd. 2  
   Gezeitenkräfte, 112  
   Gezeitenreibung, 115  
   Gezeitentensor, 115  
   g-Faktor, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
   GHZ-Zustände, *siehe* Bd. 3  
   Gibbs, Josiah Willard, *siehe* Bd. 4  
   Gibbs-Duhem-Beziehung, *siehe* Bd. 4  
   Gibbs'sche Phasenregel, *siehe* Bd. 4  
   Gibbs'sches Paradoxon, *siehe* Bd. 4  
   und Quantenstatistik, *siehe* Bd. 4  
   Gibbs'sches Phänomen, 285  
   Gibbs'sches Variationsprinzip, *siehe*  
     Variationsprinzip, Gibbs'sches  
   Gilbert, William, *siehe* Bd. 2  
   Gitter  
     duales, *siehe* Bd. 3  
     kubisches, *siehe* Bd. 3  
   Gitterabstand, 231  
   Gitterpotenzial, *siehe* Bd. 3  
   Gittervektor, *siehe* Bd. 3  
   Gleichgewicht  
     bei Adsorption, *siehe* Bd. 4  
     chemisches, *siehe* Bd. 4  
       für ideale Gase, *siehe* Bd. 4  
     indifferentes, 211, 227  
     instabiles, 211  
     Maximierung der Wahrscheinlichkeit, *siehe*  
       Bd. 4  
     mechanisches, 210  
     mechanisches und thermisches, *siehe* Bd. 4  
     stabiles, 211
- Störung, *siehe* Bd. 4  
 thermisches, *siehe* Bd. 4  
 Übergang dorthin, *siehe* Bd. 4  
 Übergang nach Störung, *siehe* Bd. 4  
 und Aufenthaltswahrscheinlichkeit, *siehe*  
   Bd. 4  
 und Extremalprinzip, *siehe* Bd. 4  
 Gleichgewichtszustand, *siehe* Bd. 4  
 Gleichverteilungssatz, *siehe* Bd. 4  
 Gluon, *siehe* Bd. 2  
 Goldene Regel, *siehe* Bd. 3  
 Goldstone-Teilchen, *siehe* Bd. 3  
 Goldstone-Theorem, *siehe* Bd. 3  
 Goudsmith, Samuel, *siehe* Bd. 3  
 GPS-Satelliten, 337  
 Gradient, 28, 29  
   in allgemeinen Koordinatensystemen, 71  
 Gram-Schmidt-Verfahren, *siehe* Bd. 3  
 Grand Unified Theories, *siehe* Bd. 2  
 Graßmann-Identität, 25  
 Gravitation, *siehe* Bd. 2  
 Gravitationsfeld, 10, *siehe auch* Bd. 2  
 Gravitationskonstante, 10  
 Gravitationsrotverschiebung, 337  
 Gravity Probe B Satellit, 345  
 Green, George, *siehe* Bd. 2  
 Green'sche Funktion, *siehe* Bd. 2  
   avancierte, *siehe* Bd. 2  
   des Laplace-Operators, *siehe* Bd. 2  
   für auslaufende Wellen, *siehe* Bd. 3  
   für Radialproblem, *siehe* Bd. 3  
   retardierte, *siehe* Bd. 2  
   Symmetrie, *siehe* Bd. 2  
   zur Helmholtz-Gleichung, *siehe* Bd. 2  
 Greisen-Zatsepin-Kuzmin-Cutoff, 368  
 Grenzfall, aperiodischer, 219  
 Grenzwertsatz, zentraler, *siehe* Bd. 4  
 großkanonisches Potenzial für ideale  
   Quantengase, *siehe* Bd. 4  
 Grundeinheit, 11  
 Grundpostulat der statistischen Physik, *siehe*  
   Bd. 4  
 Grundton, 280  
 Gruppe, 60  
   abelsche, 4, 60, *siehe auch* Bd. 3  
   diskrete, 60  
   kommutative, 60  
   kontinuierliche, 60  
   Lorentz-, 327  
   nichtabelsche, *siehe* Bd. 3  
   orthogonale, 60, 327, *siehe auch* Bd. 3  
   Poincaré-, 330  
   pseudoorthogonale, 329  
   SU(2), *siehe* Bd. 3  
   symmetrische, *siehe* Bd. 3  
 Gruppengeschwindigkeit, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Gruppenhomomorphismus, 60  
 Guericke, Otto von, *siehe* Bd. 4  
 gyromagnetischer Faktor, *siehe* g-Faktor  
 gyromagnetisches Verhältnis, *siehe* Bd. 3  
 GZK-Cutoff, 368
- H**  
 Haftbedingung, 307  
 Hagen, Gotthilf Heinrich Ludwig, 317  
 Hagen-Poiseuille-Gesetz, 317

- Halbachse  
große, 98  
kleine, 98  
halb-gebundener Zustand, *siehe* Bd. 3  
Halbleiter, *siehe* Bd. 2  
Halbwertsbreite, 221  
Hamilton, William Rowan, 2  
Hamilton-Dichte, *siehe* Bd. 2  
der Elektrodynamik, quellenfrei, *siehe* Bd. 2  
Hamilton-Formalismus, 247  
Hamilton-Funktion, 179, 244  
äußere Parameter, *siehe* Bd. 4  
freies relativistisches Teilchen, *siehe* Bd. 2  
nichtrelativistische Punktladung, *siehe* Bd. 2  
relativistische Punktladung, *siehe* Bd. 2  
Hamilton-Jacobi-Gleichung, 255, *siehe auch*  
Bd. 3  
zeitabhängige, 257, *siehe auch* Bd. 3  
Hamilton-Jacobi-Theorie, 254, *siehe auch* Bd. 3  
Hamilton-Operator, *siehe* Bd. 3  
für harmonischen Oszillator, *siehe* Bd. 3  
für ideales Gas, *siehe* Bd. 4  
Hamilton'sche kanonische Gleichungen, 245  
Hamilton'sches Prinzip, 191, 288  
Hankel-Funktionen, *siehe* Bd. 2  
sphärische, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
Hantelmolekül, *siehe* Bd. 3  
Harmonisch schwingende Punktladung, *siehe*  
Bd. 2  
harmonischer Oszillator, *siehe* Bd. 3  
angeregte Zustände, *siehe* Bd. 3  
Energien, *siehe* Bd. 3  
geladener, *siehe* Bd. 3  
Grundzustand, *siehe* Bd. 3  
Schwankungsquadrat, *siehe* Bd. 3  
semiklassisch, *siehe* Bd. 3  
Harriot, Thomas, *siehe* Bd. 2  
Hartree, Douglas Rayner, *siehe* Bd. 3  
Hartree-Fock-Gleichungen, *siehe* Bd. 3  
Häufigkeit, relative, *siehe* Bd. 4  
Hauptachse, 139  
Hauptachsentransformation, 139  
Hauptminor, *siehe* Bd. 4  
Hauptnormalenvektor, 24  
Hauptquantenzahl, *siehe* Bd. 3  
Hauptsatz der Thermodynamik  
dritter, *siehe* Bd. 4  
erster, *siehe* Bd. 4  
nullter, *siehe* Bd. 4  
zweiter, *siehe* Bd. 4  
für irreversible Prozesse, *siehe* Bd. 4  
für reversible Prozesse, *siehe* Bd. 4  
statistische Deutung, *siehe* Bd. 4  
Hauptträgheitsachse, 139  
Hauptträgheitsmoment, 139  
Hausdorff-Raum, 168  
Heaviside, Oliver, 323, *siehe auch* Bd. 2  
Heaviside-Lorentz-System, *siehe* Bd. 2  
Heaviside'sche Stufenfunktion, *siehe* Bd. 2  
Heisenberg, Werner, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
Heisenberg-Bild, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
Heisenberg-Euler-Lagrange-Dichte, *siehe* Bd. 2  
Helium  
Ortho-, *siehe* Bd. 3  
Para-, *siehe* Bd. 3  
Heliumdiffusion, *siehe* Bd. 4  
Helizität, 55, *siehe auch* Bd. 2  
Hellmann-Feynman-Formel, *siehe* Bd. 3  
Helmholtz-Gleichung, *siehe* Bd. 2  
Hemmung, *siehe* Bd. 4  
Wegfall, *siehe* Bd. 4  
Henry, *siehe* Bd. 2  
Hermann, Robert, *siehe* Bd. 3  
Hermite-Polynome, *siehe* Bd. 3  
hermitesche Operatoren, *siehe* Bd. 3  
Hertz, *siehe* Bd. 2  
Hertz, Heinrich, *siehe* Bd. 2  
Hesse-Matrix, 31, 115  
Higgs, Peter, *siehe* Bd. 2  
Higgs-Mechanismus, *siehe* Bd. 2  
Higgs-Teilchen, 356, *siehe auch* Bd. 2  
Hilbert-Raum, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
Hilbert-Raum  $L_2(C)$ , *siehe* Bd. 3  
Hilbert'scher Folgenraum, *siehe* Bd. 3  
Hill-Kurve, 111  
Hohenberg, Pierre, *siehe* Bd. 3  
Hohenberg-Kohn-Theorem, *siehe* Bd. 3  
Hohlleiter, *siehe* Bd. 2  
Hohlraumstrahlung, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
holomorph, *siehe* Bd. 2  
holomorphe Funktion, *siehe* Bd. 2  
holonome Nebenbedingung, 166, 193  
holonome Zwangsbedingung, *siehe* holonome  
Nebenbedingung  
homogen, zeitlich, 179  
homogene Differenzialgleichung, 212  
homogene Funktion, 116  
Euler'scher Satz, *siehe* Euler-Theorem über  
homogene Funktionen  
Homogenität der Zeit, 3, 198  
Homogenität des Raumes, 3, 198  
Homöomorphismus, 168  
homopolarer Generator, *siehe* Bd. 2  
Homopolarmotor, *siehe* Bd. 2  
Hooke'sches Gesetz, isotropes, 313  
Humboldt, Alexander von, *siehe* Bd. 4  
Huygens, Christiaan, 321, *siehe auch* Bd. 2;  
Bd. 4  
Huygens'sches Prinzip, *siehe* Bd. 2  
hydrophil, 310  
hydrophob, 310  
Hydrostatik, 303  
hydrostatische Gleichung, *siehe* Bd. 4  
Hyperbelbahn, 99  
hyperbolische Bewegung, 358  
Hyperfeinstruktur, *siehe* Bd. 3  
Hysterese, *siehe* Bd. 2
- I**
- ideales Fluid, 302  
ideales Gas, *siehe* Gas, ideales  
identische Fermionen  
Grundzustand, *siehe* Bd. 3  
identische Teilchen, *siehe* Bd. 3  
nicht wechselwirkend, *siehe* Bd. 3  
imaginäre Einheit, 214  
Imaginärteil, 214  
Impedanz, *siehe* Bd. 2  
implizit zeitabhängig, 21  
Impuls, 7  
generalisierter, 179, 244  
kanonisch konjugierter, 179, 244, *siehe auch*  
Bd. 2; Bd. 3  
kinetischer, *siehe* Bd. 3  
konjugierter, 179  
Konvektion, 301  
verallgemeinerter, 244  
Impulsdarstellung, *siehe* Bd. 3  
Impulsdichte, 301  
des elektromagnetischen Feldes, *siehe* Bd. 2  
Impulsdiffusion, 306  
Impulsmessung, *siehe* Bd. 3  
Impulssatz, 87  
der Elektrodynamik, *siehe* Bd. 2  
Impulsstromdichte, 301  
indifferentes Gleichgewicht, 211, 227  
Indikatordiagramm, *siehe* Bd. 4  
Induktion, magnetische, *siehe* Bd. 2  
Induktionsgesetz, *siehe* Bd. 2  
für bewegte Leiter, *siehe* Bd. 2  
Induktionskoeffizient, *siehe* Bd. 2  
induktive Kopplung, *siehe* Bd. 2  
Inertialsystem, 9, *siehe auch* Bd. 2  
infinitesimale Erzeugende, *siehe* Bd. 3  
infinitesimale Transformation, 196  
Influenz, elektrische, *siehe* Bd. 2  
inhomogene Differenzialgleichung, 212  
inkohärente Streuung, *siehe* Bd. 3  
inkompressibel, 303  
inkompressible Navier-Stokes-Gleichung, 306  
inneres Produkt, 7, *siehe auch* Bd. 3  
instabiles Gleichgewicht, 211  
integrables System, 255  
Integral der Bewegung, 20, 93  
Integrale  
elliptische, 154, *siehe auch* Bd. 2  
Gauß'sche, *siehe* Bd. 4  
Integralprinzip, 186  
Integralsatz  
Stokes'scher, *siehe* Bd. 2  
von Cauchy, *siehe* Bd. 2  
integrierender Faktor, *siehe* Bd. 4  
Intensität, spezifische, *siehe* Bd. 4  
invariante Masse, 356  
inverser Operator, *siehe* Bd. 3  
irreduzible Darstellung, *siehe* Bd. 3  
Irreversibilität, *siehe* Bd. 4  
Ising, Ernst, *siehe* Bd. 4  
Ising-Modell, eindimensionales, *siehe* Bd. 4  
mittlerer Spin, *siehe* Bd. 4  
Isobare, *siehe* Bd. 4  
Isochore, *siehe* Bd. 4  
Isolator, *siehe* Bd. 3  
isolierte Singularität, *siehe* Bd. 2  
hebbar, *siehe* Bd. 2  
Pol, *siehe* Bd. 2  
Polordnung, *siehe* Bd. 2  
wesentlich, *siehe* Bd. 2  
isometrischer Operator, *siehe* Bd. 3  
isoperimetrische Nebenbedingung, 193  
Isotherme, *siehe* Bd. 4  
Isotopieverchiebung, *siehe* Bd. 3  
isotropes Hooke'sche Gesetz, 313  
Isotropie des Raumes, 3, 198
- J**
- Jacobi-Determinante, 146

- Jacobi-Identität, 25, *siehe auch* Bd. 3  
 Jacobi-Konstante, 111  
 Jacobi-Matrix, 145, *siehe auch* Bd. 4  
 Jansky, Karl Guthe, *siehe* Bd. 4  
 Jeans, James, *siehe* Bd. 3  
 Jo-Jo, 183  
 Jönsson, Claus, *siehe* Bd. 3  
 Jost-Funktionen, *siehe* Bd. 3  
 Joule, *siehe* Bd. 2  
 Joule, James, *siehe* Bd. 4  
 Joule-Thomson-Koeffizient, *siehe* Bd. 4  
 Joule-Thomson-Prozess, *siehe* Bd. 4
- K**
- Kalkspat, *siehe* Bd. 2  
 Källén, Gunnar, 371  
 Källén-Funktion, 371  
 Kalorie, *siehe* Bd. 4  
 Kalorimeter, *siehe* Bd. 4  
 Kältemaschine, *siehe* Bd. 4  
 Kamerlingh Onnes, Heike, *siehe* Bd. 2  
 kanonisch konjugierter Impuls, 179, 244  
 kanonische Gleichungen, 245  
 kanonische Transformation, 251  
     Erzeugende der, 251  
 kanonischer Energie-Impuls-Tensor, *siehe* Bd. 2  
 Kaon, 329  
 Kapazität, *siehe* Bd. 2  
 Kapazitätskoeffizient, *siehe* Bd. 2  
 Kapillarlänge, 310  
 Kármán, Theodore von, 309  
 Kármán'sche Wirbelstraße, 309  
 Karte, 168  
 Kartenwechsel, 168  
 kartesisches Koordinatensystem, 3  
 Katzenzustand, *siehe* Bd. 3  
 Kausalstruktur, 333, *siehe auch* Bd. 2  
 Kegelschnitt, 97  
 Kepler, Johannes, 2, 321  
 Kepler-Problem, 95, 213  
 Kepler'sche Gleichung, 120  
 Kepler'sches Gesetz  
     drittes, 99  
     erstes, 99  
     zweites, 92  
 Kern eines Operators, *siehe* Bd. 3  
 Kernfusion, 364  
 Kernkraft  
     schwache, *siehe* Bd. 2  
     starke, *siehe* Bd. 2  
 Kernreaktor, 105  
 Kernspaltung, 364  
 Ket, *siehe* Bd. 3  
 Kinematik, 12  
 kinematische Viskosität, 306  
 kinetische Theorie, *siehe* Bd. 4  
 kinetischer Impuls, *siehe* Bd. 3  
 Kirchhoff, Gustav Robert, *siehe* Bd. 2  
 Kirchhoff'sche Gesetze, *siehe* Bd. 2  
 Kirchhoff'sches Integral, *siehe* Bd. 2  
 klassischer Elektronenradius, *siehe* Bd. 2  
 klassischer Grenzfall für  
     Schrödinger-Gleichung, *siehe* Bd. 3  
 Klein, Oskar Benjamin, *siehe* Bd. 3  
 kleine Schwingung, 211  
 Klein-Gordon-Gleichung, *siehe* Bd. 3
- K-Meson, 329  
 Knoten, 280  
 Knotenlinie, 130  
 Knotensatz, *siehe* Bd. 3  
 Koaxialkabel, *siehe* Bd. 2  
 Kockel, Bernhard, *siehe* Bd. 2  
 Koerzitivfeldstärke, *siehe* Bd. 2  
 kohärente Streuung, *siehe* Bd. 3  
 kohärente Zustände, *siehe* Bd. 3  
 Kohlrausch, Rudolf, *siehe* Bd. 2  
 Kohn, Walter, *siehe* Bd. 3  
 Kollaps der Wellenfunktion, *siehe* Bd. 3  
 kollektive Eigenschaften, *siehe* Bd. 4  
 Kollisionsinvarianten, 101  
 Kolmogorow, Andrei Nikolajewitsch, 309  
 Kolmogorow, Mikroskala von, 309  
 Kolmogorow'sche Axiome, *siehe* Axiome von Kolmogorow  
 Kommutativgesetz, 4  
 Kommutator, 249, 265, *siehe auch* Bd. 3  
     von Operatoren, *siehe* Bd. 3  
     von Ort und Impuls, *siehe* Bd. 3  
 kommutierende Operatoren, *siehe* Bd. 3  
 komplex konjugierte Zahl, 214  
 komplexe Funktion, *siehe* Bd. 2  
 komplexe Struktur, *siehe* Bd. 2  
 komplexer Wechselstromwiderstand, *siehe* Bd. 2  
 Komponenten einer Phase, *siehe* Bd. 4  
 kompressibel, 303  
 Kompressibilität, *siehe* Bd. 4  
     adiabatische, *siehe* Bd. 4  
     isotherme, *siehe* Bd. 4  
 Kondensator, *siehe* Bd. 2  
 Konfigurationsraum, 167, 191, 244  
 konfluente hypergeometrische Reihe, *siehe* Bd. 3  
 Kongruenzabbildungen, *siehe* Bd. 3  
 konjugierter Impuls, 179  
 Konstante der Bewegung, *siehe* Bd. 3  
 Kontaktkraft, 294  
 Kontaktterm, *siehe* Bd. 2  
 Kontaktwinkel, 310  
 kontinuierliche Symmetrie, 196  
 Kontinuitätsgleichung, 300, *siehe auch* Bd. 2  
     für verallgemeinerte Koordinaten, *siehe* Bd. 3  
     für Wahrscheinlichkeit, *siehe* Bd. 3  
 Kontinuum  
     Übergang zum, 274  
 Kontraktion, 136  
 kontravariant, 339  
 kontravariante Komponenten, *siehe* Bd. 2  
 Konvektion des Impulses, 301  
 Konvektionsstrom, *siehe* Bd. 2  
 konvektive Ableitung, 304  
 Konvergenz, 6  
     gleichmäßige, 282  
     im quadratischen Mittel, 282  
     punktweise, 282  
 Konvergenzradius, *siehe* Bd. 2  
 konvexe Linearkombination, *siehe* Bd. 3  
 Koordinate  
     generalisierte, 169, 176  
     verallgemeinerte, 169  
     zyklische, 179  
 Koordinatensystem
- gleichläufiges, 110  
 kartesisches, 3  
 krummliniges, 72  
 nichtkartesisches, 71  
 synodisches, 110  
 Kopenhagener Interpretation, *siehe* Bd. 3  
 Kopernikus, Nikolaus, 2  
 Kopplung, 11  
     elastische, 223  
     von Teilsystemen, *siehe* Bd. 3  
 Körper, 4  
     elastischer, 273  
     starrer, 128  
 Korrelationsfunktion  
     symmetrierte, *siehe* Bd. 4  
     zeitliche, *siehe* Bd. 4  
 Korrespondenzprinzip, *siehe* Bd. 3  
 Korrespondenzregeln, *siehe* Bd. 3  
     allgemeine, *siehe* Bd. 3  
 kosmische Hintergrundstrahlung, 368, *siehe auch* Bd. 3; Bd. 4  
 kosmische Maser, *siehe* Bd. 3  
 kosmische Strahlung, 368  
 kovariante Ableitung, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 kovariante Komponenten, 341, *siehe auch* Bd. 2  
 Kovarianz, 56  
 Kraft  
     äußere, 86  
     dissipative, 20  
     elektromotorische, *siehe* Bd. 2  
     generalisierte, 176  
     innere, 86  
     konservative, 28  
     Lorentz-kovariante, 357  
     nichtdissipativ, 20  
     verallgemeinerte, *siehe* Bd. 4  
     Mittelwert, *siehe* Bd. 4  
 Kraftstoß, 17  
 Kramers, Hendrik Anthony, *siehe* Bd. 3  
 Kramers-Kronig-Relationen, *siehe* Bd. 2; Bd. 4  
 Kramers-Theorem, *siehe* Bd. 3  
 Kreisbahn, 97  
 Kreisel, 129  
     kräftefreier symmetrischer, 150  
     oblater, 162  
     prolater, 162  
     Rotation, 149  
     schwerer symmetrischer, 152, 180  
     symmetrischer, 142  
     unsymmetrischer, 142  
 Kreisfrequenz, 213  
 Kreisprozess  
     Carnot'scher, *siehe* Bd. 4  
     Ablauf, *siehe* Bd. 4  
     Wirkungsgrad, *siehe* Bd. 4  
     Diesel'scher, *siehe* Bd. 4  
     Ericsson'scher, *siehe* Bd. 4  
     Joule'scher oder Brayton'scher, *siehe* Bd. 4  
     Otto'scher, *siehe* Bd. 4  
     Stirling'scher, *siehe* Bd. 4  
 Kreuzprodukt, 24  
 Kreuzschiene, 174  
 Kronecker-Symbol, 25  
     vierdimensional, 341, *siehe auch* Bd. 2  
 Kronig-Penney-Modell, *siehe* Bd. 3

- Krümmungsradius, lokaler, 26  
 Kubo-Formel, *siehe* Bd. 4  
 Kugelelektrret, *siehe* Bd. 2  
 Kugelflächenfunktionen, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
     Eigenschaften, *siehe* Bd. 3  
 Kugelkondensator, *siehe* Bd. 2  
 Kugelkoordinaten, 73  
 Kugelkreisel, 142  
 Kugelschale, 167  
 Kugelwelle, *siehe* Bd. 2  
 Kummer'sche Funktion, *siehe* Bd. 3  
 Kurvenintegral, 27
- L**
- Laborsystem, 3, 103, 362  
 Ladungsdichte, *siehe* Bd. 2  
 Ladungskonjugations-Symmetrie, 329  
 Ladungsquantisierung, *siehe* Bd. 2  
 Lagrange, Joseph-Louis, 2  
 Lagrange-Dichte, 287, *siehe auch* Bd. 2  
     der Elektrodynamik, *siehe* Bd. 2  
     kovariant, *siehe* Bd. 2  
 Lagrange-Formalismus  
     Übersicht, 182  
 Lagrange-Funktion, 178  
     freies relativistisches Teilchen, *siehe* Bd. 2  
     kovariant, *siehe* Bd. 2  
     nichtrelativistische Punktladung, *siehe* Bd. 2  
     relativistische Punktladung, *siehe* Bd. 2  
 Lagrange-Funktional, 287  
 Lagrange-Gleichungen, 178  
     erster Art, 171  
     Forminvarianz, 250  
     zweiter Art, 177  
 Lagrange-Identität, 36  
 Lagrange-Kreisel, 152  
 Lagrange-Multiplikator, 170, 171, 193  
 Lagrange-Punkt, 112  
 Laguerre-Polynome, *siehe* Bd. 3  
     zugeordnete, *siehe* Bd. 3  
 Laguerre'sche Differentialgleichung, *siehe* Bd. 3  
 Lamb-Verschiebung, *siehe* Bd. 3  
 Lamé-Konstante, 291  
 laminare Strömung, 308  
 Lampa, Anton, 335  
 Landau, Lew Dawidowitsch, *siehe* Bd. 3  
 Landau-Funktion, *siehe* Bd. 4  
 Landau-Niveaus, *siehe* Bd. 3  
 Landé, Alfred, *siehe* Bd. 3  
 Landé-Faktor, *siehe* Bd. 3  
 Lane, Jonathan Homer, *siehe* Bd. 4  
 Lane-Emden-Gleichung, *siehe* Bd. 4  
 Längenkontraktion, 323, 331  
 Längenprojektion, 135  
 Langmuir, Irving, *siehe* Bd. 4  
 Langmuir-Konstante, *siehe* Bd. 4  
 Laplace, Pierre-Simon, *siehe* Bd. 2  
 Laplace-Beltrami-Operator, *siehe* Bd. 3  
 Laplace-Gleichung, *siehe* Bd. 2  
 Laplace-Operator, 42, 76, *siehe auch* Bd. 2  
     in Kugelkoordinaten, 76  
     in Zylinderkoordinaten, *siehe* Bd. 2  
 Laplace-Runge-Lenz-Vektor, 102, *siehe auch* Bd. 3  
 Laplace-Transformation, *siehe* Bd. 4  
 Large Hadron Collider, 369
- Larmor, Joseph, 323, *siehe auch* Bd. 3  
 Larmor-Formel, *siehe* Bd. 2  
 Larmor-Frequenz, *siehe* Bd. 3  
 Larmor-Radius, *siehe* Bd. 2  
 Laser, *siehe* Bd. 3  
 latente Wärme, *siehe* Wärme, latente  
 Laurent-Reihe, *siehe* Bd. 2  
     Hauptteil, *siehe* Bd. 2  
     Nebenteil, *siehe* Bd. 2  
 LCD-Bildschirm, *siehe* Bd. 2  
 Lebensdauer, *siehe* Bd. 3  
 Lee, Tsung-Dao, 329  
 Legendre-Funktionen  
     zugeordnete, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
     zweiter Art, *siehe* Bd. 2  
 Legendre-Polynome, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Legendre-Transformation, 245, 246, *siehe auch* Bd. 2; Bd. 4  
     als Berührungstransformation, *siehe* Bd. 4  
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 2  
 Leistung, 20, 28  
 Leistungsdichte, *siehe* Bd. 2  
 Leiter, elektrischer, *siehe* Bd. 2  
 Leiteroperator, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Leitfähigkeit, *siehe* Bd. 2  
 Leitungsstrom, *siehe* Bd. 2  
 Lemaître, Georges, *siehe* Bd. 3  
 Lenard, Philipp, *siehe* Bd. 3  
 Lense-Thirring-Effekt, 346  
 Lenz, Wilhelm, *siehe* Bd. 4  
 Lenz'sche Regel, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Leuchtelektron, *siehe* Bd. 3  
 Levi-Civita-Symbol, 24, 25  
     vierdimensional, *siehe* Bd. 2  
 Levinson-Theorem, *siehe* Bd. 3  
 Lex Prima, 7  
 Lex Quarta, 8  
 Lex Secunda, 8  
 Lex Tertia, 8  
 LHC, 369  
 L'Hospital, Regel von, 239  
 lichtartig, 334  
 Lichtdruck, *siehe* Bd. 2  
 lichtelektrischer Effekt, *siehe* Bd. 3  
 Lichtgeschwindigkeit, 321, *siehe auch* Bd. 2  
 Lichtkegel, 334, *siehe auch* Bd. 2  
 Lichtmühle, *siehe* Bd. 2  
 Lichtquantenhypothese, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Lichtstrahl, *siehe* Bd. 2  
 Lie, Sophus, *siehe* Bd. 3  
 Lie-Algebra, *siehe* Bd. 3  
 Lie-Gruppe, 329, *siehe auch* Bd. 3  
 Limes, thermodynamischer, *siehe* Bd. 4  
 lineare Algebra, 4  
 lineare Differentialgleichung, 212  
 lineare Exzentrizität, 98  
 Lineare Kette, 231, 272  
 lineare Medien, *siehe* Bd. 2  
 lineare Unabhängigkeit, 36  
 linearer Operator, *siehe* Bd. 3  
 Linearform, 340  
 Linienbreite, natürliche, 224, *siehe auch* Bd. 2  
 linkshändig, 55  
 Liouville'sche Gleichung, *siehe* Bd. 4  
 Liouville'scher Satz, *siehe* Bd. 4
- Lippmann-Schwinger-Gleichung, *siehe* Bd. 3  
 Locus der Figurenachse, 154  
 Lokalität, *siehe* Bd. 3  
 Longitudinalschwingungen, 232  
 Lord Rayleigh, *siehe* Bd. 3  
 Lorentz boost, 327  
 Lorentz, Hendrik, 320, 323, *siehe auch* Bd. 2  
 Lorentz-Gruppe, 327  
     Komponenten, 329  
 Lorentz-Kontraktion, *siehe* Längenkontraktion  
 Lorentz-kovariant, 357  
 Lorentz-Kraft, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Lorentz-Kraftdichte, *siehe* Bd. 2  
 Lorentz-Kurve, *siehe* Bd. 3  
 Lorentz-Oszillator-Modell, *siehe* Bd. 2  
 Lorentz-Profil, 224  
 Lorentz-Pseudoskalar, *siehe* Bd. 2  
 Lorentz-Skalar, 342  
 Lorentz-Transformation, 324, 325, *siehe auch* Bd. 2  
     eigentliche orthochrone, 329  
     infinitesimale, *siehe* Bd. 2  
 Lorenz, Ludvig, *siehe* Bd. 2  
 Lorenz-Eichung, *siehe* Bd. 2  
 lösbares System, 255  
 Lösung der Schrödinger-Gleichung  
     für freies Teilchen, *siehe* Bd. 3  
     für Oszillatoren, *siehe* Bd. 3  
 Lotuseffekt, 310  
 Luft, Zusammensetzung, *siehe* Bd. 4  
 Luftdruck, 299  
 Luftspiegelung, *siehe* Bd. 2  
 Lummer, Otto, *siehe* Bd. 3  
 Lyman-Serie, *siehe* Bd. 3  
 L<sub>2</sub>-Räume, *siehe* Bd. 3
- M**
- Mach-Zehnder-Interferometer, *siehe* Bd. 3  
 Magnetfeld, homogen, *siehe* Bd. 3  
 magnetische Feldstärke, *siehe* Bd. 2  
 magnetische Flasche, *siehe* Bd. 2  
 magnetische Flussdichte, *siehe* Bd. 2  
 magnetische Induktion, *siehe* Bd. 2  
 magnetische Quantenzahl, *siehe* Bd. 3  
 magnetische Suszeptibilität, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 magnetischer Monopol, 364, *siehe auch* Bd. 2  
     Dirac'sche Quantisierungsbedingung, *siehe* Bd. 2  
 magnetischer Spiegel, *siehe* Bd. 2  
 magnetisches Moment, *siehe* Bd. 3  
     anomales, *siehe* Bd. 3  
     Elektron, *siehe* Bd. 3  
 Magnetisierung, *siehe* Bd. 2  
 Magnetisierungsstromdichte, *siehe* Bd. 2  
 Magnetohydrodynamik, *siehe* Bd. 2  
 Magneton, Bohr'sches, *siehe* Bd. 3  
 Magnetostatik, *siehe* Bd. 2  
 magnetostatisches Paradoxon, *siehe* Bd. 2  
 Magnetostriktion, *siehe* Bd. 4  
 Magnetostriktionskoeffizient, *siehe* Bd. 4  
 Magnetron, *siehe* Bd. 2  
 Mandelstam-Variable, 366, 370  
 Mannigfaltigkeit, 168  
     differenzierbare, 168  
 Mariotte, Edme, *siehe* Bd. 4  
 Marsden, Ernest, *siehe* Bd. 3

- Maser, *siehe* Bd. 3  
 Maß auf dem Zustandsraum, *siehe* Bd. 4  
 Masse  
 invariante, 356  
 reduzierte, 90, *siehe auch* Bd. 3  
 relativistische, 356  
 schwere, 10  
 träge, 7, 10  
 masselose Teilchen, 359  
 Massendefekt, 363, 364  
 Massendichte, lineare, 274  
 Massenfluss, 300  
 Massenspektrometer, *siehe* Bd. 2  
 Massenstrom, 300  
 Massenstromdichte, 300  
 Massenverteilung, 143  
 Massenwirkungsgesetz, *siehe* Bd. 4  
 Maßsystem  
 CGS, 11, *siehe auch* Bd. 2  
 emE, *siehe* Bd. 2  
 EMU, *siehe* Bd. 2  
 esE, *siehe* Bd. 2  
 ESU, *siehe* Bd. 2  
 Gauß'sches, *siehe* Bd. 2  
 Heaviside-Lorentz, *siehe* Bd. 2  
 MKSA, *siehe* Bd. 2  
 SI, 11, *siehe auch* Bd. 2  
 Materialgleichungen für Dielektrika, *siehe* Bd. 2  
 Materie, *siehe* Bd. 3  
 Materiewellen, *siehe* Bd. 3  
 für kräftefreie Teilchen, *siehe* Bd. 3  
 mathematisches Pendel, 157  
 Matrix, 50  
 antisymmetrische, 62  
 Diagonalisierung, 139  
 hermitesche, *siehe* Bd. 2  
 inverse, 57  
 invertierbare, 57  
 orthogonale, 52  
 quadratische, 49  
 reguläre, 57  
 schiefsymmetrische, 62  
 singuläre, 57  
 symmetrische, *siehe* Bd. 2  
 transponierte, 50  
 Matrixelement, 50  
 Matrixmultiplikation, 50  
 Matrizenmechanik, *siehe* Bd. 3  
 Maximumsnorm, 6  
 Maxwell, *siehe* Bd. 2  
 Maxwell, James Clerk, *siehe* Bd. 2; Bd. 4  
 Maxwell-Gleichungen, *siehe* Bd. 2  
 in Vierernotation, *siehe* Bd. 2  
 Integralversion, *siehe* Bd. 2  
 makroskopische/phänomenologische, *siehe* Bd. 2  
 Maxwell-Relationen, *siehe* Bd. 4  
 Maxwell'scher Dämon, *siehe* Bd. 4  
 Maxwell'scher Spannungstensor, *siehe* Bd. 2  
 Maxwell'scher Verschiebungsstrom, *siehe* Bd. 2  
 Mayer, Robert, *siehe* Bd. 4  
 mechanisches Gleichgewicht, 210  
 mechanisches Weltbild, 2  
 Mehrfachprodukt, 36  
 Mehrkörperkräfte, *siehe* Bd. 2  
 Mehrteilchensysteme, *siehe* Bd. 3  
 Meißner, Walther, *siehe* Bd. 2  
 Meißner-Ochsenfeld-Effekt, *siehe* Bd. 2  
 meromorph, *siehe* Bd. 2  
 Messergebnisse, *siehe* Bd. 3  
 Messprozess, *siehe* Bd. 3  
 Metrik, 6, 72  
 metrischer Raum, 6  
 metrischer Tensor, 72, 226  
 mho, *siehe* Bd. 2  
 Michelson, Albert, 322, *siehe auch* Bd. 3  
 Michelson-Interferometer, 322  
 Michelson-Morley-Experiment, 322  
 Mikroskala von Kolmogorow, 309  
 Mikrowellen, *siehe* Bd. 2  
 Mikrowellenhintergrund, kosmischer, *siehe* Bd. 4  
 Mikrozustand eines klassischen Systems, *siehe* Bd. 4  
 Millikan, Robert, *siehe* Bd. 3  
 Mills, Robert, *siehe* Bd. 2  
 Minkowski, Hermann, 320, 330, *siehe auch* Bd. 2  
 Minkowski-Diagramm, 330  
 Minkowski-Metrik, 339, *siehe auch* Bd. 2  
 Minkowski-Raum, 330, *siehe auch* Bd. 2  
 Minkowski-Tensor für lineare Medien, *siehe* Bd. 2  
 Minkowski-Tensor für nichtlineare Medien, *siehe* Bd. 2  
 Minkowski-Wegelement, 336  
 Mischung von reinen Zuständen, *siehe* Bd. 3  
 Mischungstemperatur, *siehe* Bd. 4  
 Mittelwert  
 makroskopischer Zustandsgrößen, *siehe* Bd. 4  
 und Wahrscheinlichkeit, *siehe* Bd. 4  
 Mittelwertegenschaft von harmonischen Funktionen, *siehe* Bd. 2  
 mittlerer Aufenthaltsort, *siehe* Bd. 3  
 Mode, *siehe* Bd. 2  
 transversal elektrisch, *siehe* Bd. 2  
 transversal elektromagnetisch, *siehe* Bd. 2  
 transversal magnetisch, *siehe* Bd. 2  
 Moderation, 105  
 Moderator, 105  
 Möllenstedt, Gottfried, *siehe* Bd. 3  
 Molwärme, *siehe* Bd. 4  
 Momententensor, *siehe* Bd. 2  
 Monopolmoment, *siehe* Bd. 2  
 Morley, Edward, 322  
 Mott, Nevill Francis, *siehe* Bd. 3  
 Mott-Streuung  
 von Spin-0-Teilchen, *siehe* Bd. 3  
 von Spin-1/2-Teilchen, *siehe* Bd. 3  
 Müller-Matrizen, *siehe* Bd. 2  
 Multilinearform, 134  
 Multiplikationssatz für Jacobi-Matrizen, *siehe* Bd. 4  
 Multipolentwicklung  
 dynamische, *siehe* Bd. 2  
 kartesische, *siehe* Bd. 2  
 sphärische, *siehe* Bd. 2  
 Multipolmoment, *siehe* Bd. 2  
 dynamisches, sphärisches, *siehe* Bd. 2  
 Multipolstrahlung, *siehe* Bd. 2  
 Musikinstrument, 285  
 Myon, 333, 363  
 g-Faktor, *siehe* Bd. 3  
 Myon-Neutrino, 363
- N**
- Nabla-Operator, 28, 29  
 Näherung, semiklassische, *siehe* Bd. 3  
 Gültigkeitsbereich, *siehe* Bd. 3  
 mehrere Dimensionen, *siehe* Bd. 3  
 Nahfeld, *siehe* Bd. 2  
 natürliche Einheiten, *siehe* Bd. 2  
 natürliche Linienbreite, 224  
 Navier, Claude Louis Marie Henri, 306  
 Navier-Stokes-Gleichung, inkompressible, 306  
 Nebenbedingung, 166  
 holonome, 193  
 isoperimetrische, 193  
 Nernst'sches Theorem, *siehe* Bd. 4  
 Neumann, Carl Gottfried, *siehe* Bd. 2  
 Neumann-Funktionen, *siehe* Bd. 2  
 sphärische, *siehe* Bd. 2  
 Neumann-Green-Funktion, *siehe* Bd. 2  
 Neumann-Randbedingung, 279, *siehe auch* Bd. 2; Bd. 3  
 Neutrino, 363  
 Neutrinhintergrund, kosmischer, *siehe* Bd. 4  
 Neutrino-Oszillation, 364  
 Neutroneninterferenz im Schwefeld, *siehe* Bd. 3  
 Neutronenstern, *siehe* Bd. 2  
 Neutronenstreuung, 105  
 Newton, *siehe* Bd. 2  
 Newton, Isaac, 2  
 Newton'sche Gravitationstheorie, *siehe* Bd. 2  
 Newton'sches Axiom  
 drittes, 8  
 erstes, 7  
 zweites, 8  
 nichtabelsche Eichtheorie, *siehe* Bd. 2  
 nichtholone Zangsbedingung, 167  
 nichtlineare Elektrodynamik, *siehe* Bd. 2  
 N-Körperproblem, 110  
 Noether, Amalie Emmy, 2, *siehe auch* Bd. 3  
 Noether-Theorem, 197  
 für Felder, kovariant, *siehe* Bd. 2  
 für relativistische Punktteilchen, *siehe* Bd. 2  
 in Quantenmechanik, *siehe* Bd. 3  
 nomierter Raum, *siehe* Bd. 3  
 Norm, 6  
 einer Wellenfunktion, *siehe* Bd. 3  
 eines Operators, *siehe* Bd. 3  
 eines Vektors, *siehe* Bd. 3  
 Normalbeschleunigung, 12  
 Normalenvektor, 24  
 Normalfrequenzen, 227  
 Normalkoordinaten, 225  
 Normalschwingung, 227  
 normierte Algebra, *siehe* Bd. 3  
 normierte Wellenfunktion, *siehe* Bd. 3  
 Normierung auf  $\delta$ -Funktion, *siehe* Bd. 3  
 n-Sphäre, *siehe* Bd. 4  
 Nullpunktenergie, *siehe* Bd. 3  
 Nullpunktfluktuationen, *siehe* Bd. 3  
 Nullstellenordnung, 216

- numerische Exzentrizität, 98  
 Numerov-Verfahren, *siehe* Bd. 3  
 Nutation, 154
- O**  
 Oberflächenkraft, 294  
 Oberflächenspannung, 309  
 Oberton, 280  
 Observable, 248, *siehe auch* Bd. 3  
     nicht verträgliche, *siehe* Bd. 3  
     verträgliche, *siehe* Bd. 3  
 Ochsenfeld, Robert, *siehe* Bd. 2  
 Oersted, *siehe* Bd. 2  
 Oersted, Hans Christian, *siehe* Bd. 2  
 Oersted'sches Gesetz, *siehe* Bd. 2  
 Ohm, *siehe* Bd. 2  
 Ohm, Georg Simon, *siehe* Bd. 2  
 Ohm'sches Gesetz, *siehe* Bd. 2  
     relativistische Form, *siehe* Bd. 2  
 Onsager, Lars, *siehe* Bd. 4  
 Operator, *siehe* Bd. 3  
     adjungierter, *siehe* Bd. 3  
     beschränkter, *siehe* Bd. 3  
     hermitescher, *siehe* Bd. 3  
     inverser, *siehe* Bd. 3  
     isometrischer, *siehe* Bd. 3  
     linearer, *siehe* Bd. 3  
     mit kontinuierlichem Spektrum, *siehe* Bd. 3  
     selbstadjungierter, *siehe* Bd. 3  
     Spektraldarstellung, *siehe* Spektralzerlegung  
     symmetrischer, *siehe* Bd. 3  
     unbeschränkter, *siehe* Bd. 3  
     unitärer, *siehe* Bd. 3  
 Operatornorm, *siehe* Bd. 3  
 Operatorprodukt, *siehe* Bd. 3  
 Optik  
     geometrische, 258, *siehe auch* Bd. 2  
 optisches Theorem, *siehe* Bd. 3  
 Orbitalaufzug, 77  
 Ordnungsparameter, *siehe* Bd. 4  
 orientiertes Einheitsvolumen, 25  
 Orientierungspolarisation, *siehe* Bd. 2  
 Orthogonalbasis, 7  
 orthogonale Gruppe, *siehe* Bd. 3  
 orthogonale Vektoren, *siehe* Bd. 3  
 Orthogonalisierungsverfahren von  
     Gram-Schmidt, *siehe* Bd. 2  
 Orthonormalbasis, 7, *siehe auch* Bd. 3  
 Orthonormalitätsrelation, verallgemeinerte, 226  
 orthonormiertes System, *siehe* Bd. 3  
 Ortsdarstellung, *siehe* Bd. 3  
 Ortsmessung, *siehe* Bd. 3  
 Ortsvektor, 3  
     Darstellung, 48  
     Transformation unter Drehungen, 53  
 Oszillationsfrequenz, 22  
 Oszillator  
     anharmonischer, *siehe* Bd. 3  
     gekoppelter, 229  
     harmonischer, 22, *siehe auch* Bd. 3  
 Otto, Nicolaus August, *siehe* Bd. 4
- P**  
 Parabelbahn, 99  
 Paradoxon, Gibbs'sches, *siehe* Bd. 4  
 Paraelektrikum, *siehe* Bd. 2
- paraelektrisch, *siehe* Bd. 2  
 Parallaxe, *siehe* Bd. 2  
 Paramagnet, einfaches Modell, *siehe* Bd. 4  
 Paramagnetismus, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Parameter der Hamilton-Funktion, *siehe* Bd. 4  
 parametrische Resonanz, 222  
 Parität, *siehe* Bd. 3  
     eines Zustands, *siehe* Bd. 3  
 Paritätstransformation, 328  
 Paritätsverletzung, 329  
 Parsec, *siehe* Bd. 2  
 Parseval-Gleichung, allgemeiner Fall, *siehe* Bd. 3  
 Partialdruck, *siehe* Bd. 4  
 Partialsumme, 282  
 Partialwellen, *siehe* Bd. 3  
 Partialwellenamplitude, *siehe* Bd. 3  
 partielle Ableitung, 21  
 partikuläre Lösung, 212  
 Paschen, Friedrich, *siehe* Bd. 3  
 Paschen-Back-Effekt, *siehe* Bd. 3  
 Pauli, Wolfgang, *siehe* Bd. 3  
 Pauli-Lubanski-Pseudovektor, *siehe* Bd. 2  
 Pauli-Matrizen, *siehe* Bd. 3  
 Pauli-Prinzip, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Pendel  
     mathematisches, 157  
     physikalisches, 129, 157  
     sphärisches, 169  
 Penrose, Roger, 335, *siehe auch* Bd. 2; Bd. 4  
 Penrose-Terrell-Drehung, 335  
 Penzias, Arno, *siehe* Bd. 3  
 Periapsis, 96  
 Perigäum, 96  
 Perihel, 96  
 Periheldrehung, 95, 102  
 Periodenverdopplung, 261  
 Periodische Bewegung, 21  
 periodische Randbedingung, 231, *siehe auch* Bd. 3  
 Permeabilitätskonstante, *siehe* Bd. 2  
     des Vakuums, *siehe* Bd. 2  
 Permutation, 52, *siehe auch* Bd. 3  
     gerade, 52  
     Signum, 52  
     ungerade, 52  
 Perpetuum mobile erster Art, *siehe* Bd. 4  
 Petit, Alexis Thérèse, *siehe* Bd. 4  
 Pfadintegral, *siehe* Bd. 3  
     diskrete Version, *siehe* Bd. 3  
     für Propagator, *siehe* Bd. 3  
     kontinuierliche Version, *siehe* Bd. 3  
 Phänomen, Gibbs'sches, 285  
 Phase, *siehe* Bd. 4  
 Phasengeschwindigkeit, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Phasengleichgewicht, *siehe* Bd. 4  
     Lage als Funktion äußerer Zustandsgrößen, *siehe* Bd. 4  
 Phasenraum, 244, *siehe auch* Bd. 4  
 Phasenraumfluss, *siehe* Bd. 4  
 Phasenraumvolumen, *siehe* Bd. 4  
     Abhängigkeit von den Freiheitsgraden, *siehe* Bd. 4  
 Phasenübergang, Ehrenfest-Klassifikation, *siehe* Bd. 4
- Phasenverschiebung, *siehe* Bd. 3  
 Phlogiston, *siehe* Bd. 4  
 Phonon, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Photoeffekt, *siehe* Bd. 3  
 Photon, 330, 359, *siehe auch* Bd. 3  
 physikalische Realität, *siehe* Bd. 3  
 physikalisches Pendel, 129, 157  
 Pinch-Effekt, *siehe* Bd. 2  
 Pion, 333, 363  
 Plancherel, Satz von, *siehe* Bd. 2  
 Planck, Max, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Planck-Ladung, *siehe* Bd. 3  
 Planck-Länge, *siehe* Bd. 3  
 Planck-Masse, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Planck-Satellit, *siehe* Bd. 3  
 Planck'sche Einheiten, *siehe* Bd. 3  
 Planck'sches Strahlungsgesetz, *siehe* Bd. 3;  
     Bd. 4  
 Planck-Zeit, *siehe* Bd. 3  
 Plasma, *siehe* Bd. 2  
 Plasmafrequenz, *siehe* Bd. 2  
 Plastizität, 291  
 Plattenkondensator, *siehe* Bd. 2  
 Poincaré, Henri, 320, 323  
 Poincaré-Gruppe, 330  
 Poincaré-Transformation, 339, *siehe auch* Bd. 2  
 Poiseuille, Jean Louis Léonard Marie, 307  
 Poiseuille-Fluss  
     ebener, 307  
     in Rohr, 313  
 Poisson, Siméon Denis, 248, *siehe auch* Bd. 2  
 Poisson-Gleichung, *siehe* Bd. 2  
 Poisson-Klammer, 248  
     fundamentale, 249  
     Invarianz, 253  
 Poisson-Verteilung, *siehe* Bd. 3  
 Polarimeter, *siehe* Bd. 2  
 Polarisation, *siehe* Bd. 2  
     elektrische, *siehe* Bd. 2  
     elliptische, *siehe* Bd. 2  
     lineare, *siehe* Bd. 2  
     zirkulare, *siehe* Bd. 2  
 Polarisationsfeldtensor, *siehe* Bd. 2  
 Polarisationsfilter, *siehe* Bd. 2  
 Polarisationsflächenladungsdichte, *siehe* Bd. 2  
 Polarisationsladungsdichte, *siehe* Bd. 2  
 Polarisationsstrom, *siehe* Bd. 2  
 Polarisationstensor, *siehe* Bd. 2  
 Polarkoordinaten, sphärische, 73  
 Polbewegung, 151  
 Pole der Streuamplitude, *siehe* Bd. 3  
 Pole der Transmissionsamplitude, *siehe* Bd. 3  
 Polkegel, 150  
 Polytropenexponent, *siehe* Bd. 4  
 Polytropengleichung, *siehe* Bd. 4  
 Polytropenindex, *siehe* Bd. 4  
 Pöschl-Teller Potenzial, *siehe* Bd. 3  
 Positron, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Positronium, *siehe* Bd. 3  
 Postulat, Clausius'sches, *siehe* Bd. 4  
 Postulate der Quantenmechanik, *siehe* Bd. 3  
 Potenzial, 20, *siehe auch* Bd. 2  
     chemisches, *siehe* chemisches Potenzial  
     effektives, 93  
     elektrostatisches, *siehe* Bd. 2

- großkanonisches, *siehe* Bd. 4  
 periodisches, *siehe* Bd. 3  
 skalares, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 skalares magnetisches, *siehe* Bd. 2  
 Zeitunabhängigkeit, 20  
 Zentrifugal-, 93
- Potenziale  
 Liénard-Wiechert-, *siehe* Bd. 2  
 retardierte, *siehe* Bd. 2  
 thermodynamische, *siehe* Bd. 4
- Potenzialkraft, 28
- Potenzialproblem  
 allgemeines, *siehe* Bd. 3  
 eindimensionales, *siehe* Bd. 3
- Potenzialstreuung, *siehe* Bd. 3
- Potenzialstufe, *siehe* Bd. 3
- Potenzialtopf, *siehe* Bd. 3  
 kugelsymmetrischer, *siehe* Bd. 3  
 sphärischer, *siehe* Bd. 2
- potenzielle Energiedichte, 289
- Potenz-Potenzial, 30
- Poynting, John Henry, *siehe* Bd. 2
- Poynting-Vektor, *siehe* Bd. 2
- Poynting-Vektorfeld, *siehe* Bd. 2
- Prä-Hilbert-Raum, *siehe* Bd. 3
- Präparation eines Zustands, *siehe* Bd. 3
- Präzession, 150  
 des schweren Kreisels, 154  
 geodätische, 345  
 reguläre, 155
- Präzessionskegel, 151
- Priestley, Joseph, *siehe* Bd. 2
- Pringsheim, Ernst, *siehe* Bd. 3
- Prinzip  
 d'Alembert'sches, 173  
 der kleinsten Wirkung, 191  
 Fermat'sches, 186, *siehe auch* Bd. 2  
 Hamilton'sches, 191
- Prinzip des minimalen Vorurteils, *siehe* Bd. 4
- Prinzipalfunktion, 256, *siehe auch* Bd. 2; Bd. 3  
 für freies Teilchen, *siehe* Bd. 3  
 für Oszillator, *siehe* Bd. 3
- Produkt  
 äußeres, 25  
 dyadisches, 136  
 inneres, 7
- Produktregel, *siehe* Bd. 3
- Produktzustand, *siehe* Bd. 3
- Projektionsoperator, *siehe* Bd. 3
- Projektor, *siehe* Bd. 4  
 Darstellung durch Orthonormalbasis, *siehe* Bd. 4
- Propagator, *siehe* Bd. 3  
 für freies Teilchen, *siehe* Bd. 3  
 für Oszillator, *siehe* Bd. 3
- Protonenfall, 364
- Proxima Centauri, *siehe* Bd. 2
- Prozess  
 adiabatischer, *siehe* Bd. 4  
 irreversibler, *siehe* Bd. 4  
 polytrop, *siehe* Bd. 4
- Prozessgröße, *siehe* Bd. 4  
 und unvollständige Differenziale, *siehe* Bd. 4
- pseudoorthogonale Gruppe, 329
- Pseudorapidität, 371
- Pseudoskalar, 56  
 PT-symmetrische Quantenmechanik, *siehe* Bd. 3
- Pulsar, *siehe* Bd. 2
- Punkt, stationärer, 186
- Punktdipol, *siehe* Bd. 2
- Punktmasse, 3
- Punktteilchen, 356
- Punkttransformation, 250
- Pythagoras, Baum des, 259
- Q**
- Qbit, *siehe* Bd. 3
- Quabla-Operator, *siehe* Bd. 2
- quadratintegrable Funktion, *siehe* Bd. 3
- quadratische Form, 224
- Quadrupolmoment, *siehe* Bd. 2
- Quantenbit, *siehe* Bd. 3
- Quantenchromodynamik, *siehe* Bd. 2
- Quantenelektrodynamik, *siehe* Bd. 2
- Quantenfeldtheorie, 329, *siehe auch* Bd. 2
- Quantengas  
 ideales, Druck und Energiedichte, *siehe* Bd. 4  
 ultrarelativistisches, *siehe* Bd. 4  
 Adiabatenindex, *siehe* Bd. 4
- Quantenmechanik, *siehe* Bd. 4
- Quantenstatistik  
 Ensemblemittel, *siehe* Bd. 4  
 kanonische Verteilung, *siehe* Bd. 4
- Quanten-Zeno-Effekt, *siehe* Bd. 3
- Quark, *siehe* Bd. 2
- Quasar, 369
- Quaternionen, 130
- R**
- Rabi, Isidor, *siehe* Bd. 3
- Rabi-Frequenz, *siehe* Bd. 3  
 resonante, *siehe* Bd. 3  
 verallgemeinerte, *siehe* Bd. 3
- Rabi-Oszillationen, *siehe* Bd. 3
- Radialbeschleunigung, 26
- radiale Schrödinger-Gleichung, *siehe* Bd. 3
- Radialgleichung, 93
- radioaktiver Zerfall, *siehe* Bd. 3
- Raketengleichung, 17
- Randbedingung, 231  
 Dirichlet'sche, 279  
 für Dielektrika, *siehe* Bd. 2  
 für magnetische Medien, *siehe* Bd. 2  
 natürliche, *siehe* Bd. 2  
 Neumann'sche, 279  
 periodische, 231  
 Robin'sche, *siehe* Bd. 2; Bd. 3
- Rapidität, 327, 348, 371
- Rastpolkegel, 151
- Raum  
 affiner, 54  
 euklidischer, 7  
 metrischer, 6  
 normierter, 6  
 topologischer, 168  
 vollständiger, 6
- raumartig, 334
- Rayleigh, John William Strutt, dritter Baron, *siehe* Bd. 2
- Rayleigh-Jeans-Formel, *siehe* Bd. 3
- Rayleigh-Kriterium, *siehe* Bd. 2
- Rayleigh-Ritz-Prinzip, *siehe* Bd. 3
- Rayleigh-Streuung, *siehe* Bd. 2
- Reaktanz, *siehe* Bd. 2
- Reaktionsgesetz, 8
- Reaktionsgleichung, chemische, *siehe* Bd. 4
- Realteil, 214
- rechtshändig, 48
- reflektierte Welle, *siehe* Bd. 3
- Reflexion, *siehe* Bd. 2  
 eines Wellenpakets, *siehe* Bd. 3
- Reflexionsgesetz, *siehe* Bd. 2
- Reflexionskoeffizient, *siehe* Bd. 2
- Refraktion, astronomische, *siehe* Bd. 2
- Regel von L'Hospital, 239
- Regel von Sarrus, 52
- Regenbogen, *siehe* Bd. 2
- reguläre Präzession, 155
- Reibung, Stokes'sche, 15
- Rekursionsgleichung, 38
- relativistische Geschwindigkeitsaddition, 328
- relativistische Korrekturen, *siehe* Bd. 3
- relativistische Masse, 356
- Relativitätsprinzip, 5, 198, 324, *siehe auch* Bd. 2
- Relativitätstheorie  
 allgemeine, 337  
 spezielle, 324
- Relativkoordinaten für Zweiteilchensystem, *siehe* Bd. 3
- Relaxationsmethode, *siehe* Bd. 2
- Relaxationszeit, 218
- Remanenzfeldstärke, *siehe* Bd. 2
- Remanenzmagnetisierung, *siehe* Bd. 2
- Reparametrisierungsinvarianz, *siehe* Bd. 2
- Reservoir, *siehe* Bd. 4
- Residuensatz, *siehe* Bd. 2; Bd. 3
- Residuum, *siehe* Bd. 2
- Resonanz, 221, *siehe auch* Bd. 3  
 parametrische, 222
- Resonanzfrequenz, 221
- Resonanzkatastrophe, 223
- Resonanzstreuung, *siehe* Bd. 3
- Responsefunktion, *siehe* Bd. 4  
 des harmonischen Oszillators, *siehe* Bd. 4
- Response-Theorie  
 lineare, *siehe* Bd. 4
- Reynolds, Osborne, 308
- Reynolds-Zahl, 308
- rheonome Zwangsbedingung, 167
- Riccati-Differentialgleichung, *siehe* Bd. 3
- Richardson-Dushman-Gleichung, *siehe* Bd. 4
- Richtungableitung, 30
- Richtungskosinus, 49
- Riemann'sche Zetafunktion, *siehe* Bd. 3
- Riemann'scher Krümmungstensor, *siehe* Bd. 2
- Rindler, Wolfgang, 358
- Rindler-Horizont, 358
- Ringspannung  
 elektrische, *siehe* Bd. 2  
 magnetische, *siehe* Bd. 2
- Ritz, Walter, *siehe* Bd. 3
- Ritz'sches Variationsverfahren, *siehe* Bd. 3
- Roche-Grenze, 116
- Rodrigues-Formel für Laguerre-Polynome, *siehe* Bd. 3
- Rollpendel, 181

- Römer, Ole, 321  
 Röntgen, Wilhelm Conrad, *siehe* Bd. 3  
 Röntgenröhre, *siehe* Bd. 2  
 Röntgenteleskop, *siehe* Bd. 2  
 Rosen-Morse-Potenzial, *siehe* Bd. 3  
 Rotation, 29, 32  
 Rotationsenergie, 131  
 Roulette, russisches, *siehe* Bd. 4  
 Rubens, Heinrich, *siehe* Bd. 3  
 Rückwärtlichtkegel, 334  
 Ruhemasse, 356  
 Rumford, Graf von, *siehe* Thompson, Benjamin  
 Rumpflekttron, *siehe* Bd. 3  
 Runge-Lenz-Vektor, *siehe* Bd. 3  
 Rutherford, Ernest, *siehe* Bd. 3  
 Rutherford-Formel, *siehe* Bd. 3  
 Rutherford'sches Atommodell, 109  
 Rydberg-Energie, *siehe* Bd. 3  
 Rydberg-Frequenz, *siehe* Bd. 3
- S**
- Sadi Carnot, Nicolas Léonard, *siehe* Bd. 4  
 Saha, Meghnad, *siehe* Bd. 4  
 Saha-Gleichung, *siehe* Bd. 4  
 Sahl, Ibn, *siehe* Bd. 2  
 Saite, 277  
 Säkulargleichung, 141, *siehe auch* Bd. 3  
 Sarrus, Regel von, 52  
 Satellit, 70  
 Satellit, geostationärer, 77  
 Sattelpunktentwicklung, *siehe* Bd. 4  
 Satz  
     Bayes'scher, *siehe* Bd. 4  
     erster Green'scher, *siehe* Bd. 2  
     von Carleson, 282  
     von Cayley-Hamilton, *siehe* Bd. 3  
     von Chasles, 130  
     von Gauß, 33, 295, *siehe auch* Bd. 2  
     von Picard-Lindelöf, 13  
     von Plancherel, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
     von Stokes, 32, *siehe auch* Bd. 2  
     von Taylor, 31  
     von Wigner, *siehe* Bd. 3  
     zweiter Green'scher, *siehe* Bd. 2  
 Sauter, Fritz, *siehe* Bd. 2  
 Savart, Félix, *siehe* Bd. 2  
 Schalenmodell, *siehe* Bd. 3  
 Schallgeschwindigkeit, *siehe* Bd. 4  
 Schallwellen, *siehe* Bd. 4  
 Scharmittel, *siehe* Bd. 4  
 Schatten, *siehe* Bd. 2  
     bei Streuung, *siehe* Bd. 3  
 Schattenzone, *siehe* Bd. 3  
 Schaukel, 284  
 Scheinkraft, 66  
 Scheinwiderstand, *siehe* Bd. 2  
 Schermodul, 291  
 Scherspannung, 305  
 Scherung, 291  
 Scherungstensor, 290  
 schiefe Ebene, 181  
 Schieß-Verfahren, *siehe* Bd. 3  
 Schirm, *siehe* Bd. 2  
 Schmelzwärme, *siehe* Bd. 4  
 Schmiegebene, 24  
 Schrödinger, Erwin, *siehe* Bd. 3
- Schrödinger-Bild, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Schrödinger-Gleichung, *siehe* Bd. 3  
     allgemeine Koordinaten, *siehe* Bd. 3  
     für allgemeine Koordinaten, *siehe* Bd. 3  
     für Teilchen, *siehe* Bd. 3  
     im Gravitationsfeld, *siehe* Bd. 3  
     in elektromagnetischen Feldern, *siehe* Bd. 3  
     mit Potenzial, *siehe* Bd. 3  
     radiale, *siehe* Bd. 3  
     zeitabhängige, *siehe* Bd. 3  
     zeitunabhängige, *siehe* Bd. 3  
 Schrödinger-Katzenzustand, *siehe* Bd. 3  
 Schrödingers Katze, *siehe* Bd. 3  
 Schrödinger'scher Erhaltungssatz, *siehe* Bd. 3  
 Schubmodul, 291  
     schwache Kernkraft, 329  
 Schwartz, Laurent, *siehe* Bd. 2  
 Schwartz-Raum, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Schwarzer Körper, *siehe* Bd. 3  
 Schwarzkörperstrahlung, *siehe* Bd. 4  
 Schwarz'sche Ungleichung, *siehe* Bd. 3  
 Schwebung, 235  
 Schwereanomalie, 67  
 Schwerfeld  
     homogenes, 12  
 Schwerpunkt, 87  
     der Energieverteilung, *siehe* Bd. 2  
 Schwerpunktskoordinaten  
     für Zweiteilchensystem, *siehe* Bd. 3  
 Schwerpunktssystem, 87, 361  
 Schwinger  
     Julian, *siehe* Bd. 2  
 Schwinger-Effekt, *siehe* Bd. 2  
 Schwingung  
     anharmatische, 211  
     eines linearen, dreiatomigen Moleküls, 229  
     erzwungene, 222  
     freie, 210  
         gedämpfte, 217, *siehe auch* Bd. 2  
         kleine, 211  
         lineare Kette, 231  
 Schwingungsgleichung, d'Alembert'sche, 276  
 Schwingungsperiode, 22  
 Segrè, Emilio, 365  
 Selbstenergie, *siehe* Bd. 2  
 Selbstinduktionskoeffizienten, *siehe* Bd. 2  
 self-consistent field, *siehe* Bd. 3  
 semiklassische Näherung, *siehe* Bd. 3  
     Gültigkeitsbereich, *siehe* Bd. 3  
     mehrere Dimensionen, *siehe* Bd. 3  
 separabler Hilbert-Raum, *siehe* Bd. 3  
 Separation  
     der Schwerpunktbewegung, *siehe* Bd. 3  
     der Variablen, 15  
 Separationsansatz, *siehe* Bd. 2  
 Shannon'scher Satz, *siehe* Bd. 4  
 Siedepunktserhöhung  
     bei erhöhtem Druck, *siehe* Bd. 4  
     bei Wasser, *siehe* Bd. 4  
 SI-Einheiten, 11, *siehe auch* Bd. 2  
 Siemens, *siehe* Bd. 2  
 Siemens, Werner von, *siehe* Bd. 2  
 Signalgeschwindigkeit, *siehe* Bd. 2  
 Sinai-Billard, 260  
 Skalar, 4  
 skalarer Operator, *siehe* Bd. 3  
 skalares magnetisches Potenzial, *siehe* Bd. 2  
 skalares Potenzial, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Skalarfeld, 29  
 Skalarprodukt, 7, 135, *siehe auch* Bd. 2; Bd. 3  
 Skalenhierarchie, *siehe* Bd. 4  
 Skalentransformation, 326  
 Skineffekt, *siehe* Bd. 2  
 skleronome Zwangsbedingung, 167  
 Slater-Determinante, *siehe* Bd. 3  
 Smoluchowski, Marian, *siehe* Bd. 3  
 Snellius, Willebrord, *siehe* Bd. 2  
 Solarkonstante, *siehe* Bd. 3  
 Sommerfeld, Arnold, *siehe* Bd. 2; Bd. 3; Bd. 4  
 Sommerfeld-Entwicklung, *siehe* Bd. 4  
 Sonnensegel, *siehe* Bd. 2  
 Spannung, 294  
     elektrische, *siehe* Bd. 2  
     viskose, 305  
 Spannungskoeffizient, *siehe* Bd. 4  
 Spannungstensor, 292, *siehe auch* Bd. 2  
 Spatprodukt, 25, 36  
 Spektraldichte, *siehe* Bd. 3  
 Spektrallinien, 224  
 Spektralmethode, 311  
 Spektralprojektor, *siehe* Bd. 3  
 Spektralzerlegung, *siehe* Bd. 3  
     eines selbstadjungierten Operators, *siehe* Bd. 3  
 spezielle orthogonale Gruppe, 60  
 spezielle Relativitätstheorie, 324  
 spezifische Leitfähigkeit, *siehe* Bd. 2  
 Sphäre,  $n$ -dimensional, *siehe* Bd. 4  
 sphärische Polarkoordinaten, 73  
 sphärisches Pendel, 169  
 sphäroidale Koordinaten, *siehe* Bd. 2  
 Spiegeladnungsmethode, *siehe* Bd. 2  
 Spiegelung, *siehe* Bd. 3  
 Spin, *siehe* Bd. 3  
     Polarisation, *siehe* Bd. 3  
 Spin-Bahn-Kopplung, *siehe* Bd. 3  
 Spinkette, eindimensionale, *siehe* Bd. 4  
 Spinoperatoren, *siehe* Bd. 3  
 Spinor, *siehe* Bd. 3  
     Ortsraum, *siehe* Bd. 3  
 Spinpräzession, *siehe* Bd. 3  
 Spin-Statistik-Theorem, *siehe* Bd. 3  
 Spinzustand, *siehe* Bd. 3  
 spontane Lokalisierung, *siehe* Bd. 3  
 spontane Symmetriebrechung, *siehe* Bd. 3  
 Spur, 136  
     Eigenschaften, *siehe* Bd. 4  
     eines Operators, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Spurkegel, 151  
 Spurklasse, *siehe* Bd. 3  
 Stabelekret, *siehe* Bd. 2  
 stabiles Gleichgewicht, 211  
 Stabilität  
     gegenüber Temperaturänderungen, *siehe* Bd. 4  
     gegenüber Volumenänderungen, *siehe* Bd. 4  
         thermodynamische, *siehe* Bd. 4  
 Standardabweichung, *siehe* Bd. 4  
 Stark, Johannes, *siehe* Bd. 3  
 Stark-Effekt, *siehe* Bd. 3

- linearer, *siehe* Bd. 3  
 quadratischer, *siehe* Bd. 3  
**Statampere**, *siehe* Bd. 2  
**Statcoulomb**, *siehe* Bd. 2  
**Statik**, 294  
 stationäre Strömung, 304  
 stationärer Punkt, 186  
 statistischer Operator, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
     Zeitentwicklung, *siehe* Bd. 3  
**Statohm**, *siehe* Bd. 2  
**Statvolt**, *siehe* Bd. 2  
 Stefan, Josef, *siehe* Bd. 4  
**Stefan-Boltzmann-Gesetz**, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 stehende Welle, 280  
**Steiner'scher Satz**, 138  
 Stern, Otto, *siehe* Bd. 3  
 Stern-Gerlach-Versuch, *siehe* Bd. 3  
 Stirling, Robert, *siehe* Bd. 4  
 Stirling'sche Formel, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
**Stöchiometrie**, *siehe* Bd. 4  
 stöchiometrische Koeffizienten, *siehe* Bd. 4  
**Stoffmenge**, *siehe* Bd. 4  
 Stokes, Sir George Gabriel, 306  
**Stokes-Parameter**, *siehe* Bd. 2  
 Stokes'scher Satz, 32, *siehe auch* Bd. 2  
**Störung**  
     konstante, *siehe* Bd. 3  
     periodische, *siehe* Bd. 3  
**Störungstheorie**  
     Energie  
         erste Ordnung, *siehe* Bd. 3  
         zweite Ordnung, *siehe* Bd. 3  
     entartete, *siehe* Bd. 3  
     zeitabhängige, *siehe* Bd. 3  
     zeitunabhängige, *siehe* Bd. 3  
     Zustände erste Ordnung, *siehe* Bd. 3  
**Stoß**  
     elastischer, 101, 360  
     inelastischer, 360  
     zweier harter Kugeln, 108  
**Stoßinvarianten**, 101  
**Stoßparameter**, 105  
**Strahl**, *siehe* Bd. 3  
**Strahleigenschaft**, *siehe* Bd. 2  
**Strahlenoptik**, *siehe* Bd. 2  
**Strahlung**, *siehe* Bd. 3  
**Strahlungsdämpfung**, *siehe* Bd. 2  
**Strahlungsdruck**, *siehe* Bd. 2  
**Strahlungseichung**, *siehe* Bd. 2  
**Strahlungsgesetze**, Planck'sches, *siehe* Bd. 3;  
     Bd. 4  
**Strahlungsrückwirkung**, *siehe* Bd. 2  
**Strahlungsschweif**, *siehe* Bd. 2  
**Streuamplitude**, *siehe* Bd. 3  
     analytische Eigenschaften, *siehe* Bd. 3  
     für harte Kugeln, *siehe* Bd. 3  
**Streulänge**, *siehe* Bd. 3  
**Streumatrix**, *siehe* Bd. 3  
**Streuphase**, *siehe* Bd. 3  
**Streuung**, 95, 100, 101, *siehe auch* Bd. 4  
     an harten Kugeln, *siehe* Bd. 3  
     elastische, 360, *siehe auch* Bd. 3  
     Energieübertrag bei elastischer, 104  
     inelastische, 360, *siehe auch* Bd. 3  
     inkohärente, *siehe* Bd. 3  
     kohärente, *siehe* Bd. 3  
     quasielastische, 366  
     Rutherford'sche, 106  
     von Elektronen an Atomen, *siehe* Bd. 3  
     von identischen Bosonen, *siehe* Bd. 3  
     von identischen Fermionen, *siehe* Bd. 3  
     von identischen Teilchen, *siehe* Bd. 3  
         von Licht an Licht, *siehe* Bd. 2  
**Streuwinkel**, 102, *siehe auch* Bd. 3  
     Transformation, 103  
**Stromdichte**, *siehe* Bd. 2  
     transversale, *siehe* Bd. 2  
**Strömung**  
     laminare, 308  
     reaktive, 308  
     stationäre, 304  
     turbulente, 308  
 Strutt, John William, *siehe* Bd. 3  
 Strutt, John William, dritter Baron Rayleigh,  
     *siehe* Bd. 2  
**Stufenfunktion**, *siehe* Bd. 2  
**Sturm-Liouville-Problem**, *siehe* Bd. 3  
**SU(2)**, *siehe* Bd. 3  
**su(2)**, *siehe* Bd. 3  
 substanzelle Ableitung, 304  
**sudden approximation**, *siehe* Bd. 3  
**superhydrophob**, 310  
**Superkamiokande**, 364  
**Superladung**, *siehe* Bd. 3  
**Superpositionsprinzip**, 9, *siehe auch* Bd. 2  
**Superpotenzial**, *siehe* Bd. 3  
**Superstringtheorie**, *siehe* Bd. 2  
**Supersymmetrie**, *siehe* Bd. 3  
 supersymmetrische Quantenmechanik, *siehe*  
     Bd. 3  
**Supraleiter**, *siehe* Bd. 2  
**Supremumsnorm**, 6  
**Suszeptibilität**, 222  
     dynamische, *siehe* Bd. 4  
     elektrische, *siehe* Bd. 2  
     magnetische, *siehe* Bd. 2; Bd. 4  
**Swing-by-Manöver**, 104  
**Symmetrie**, *siehe* Bd. 3  
     der Lagrange-Funktion, 196  
     diskrete, 196  
     eines Quantensystems, *siehe* Bd. 3  
     kontinuierliche, 196  
**Symmetriebrechung**  
     spontane, *siehe* Bd. 3  
**Symmetriegruppe**, *siehe* Bd. 3  
**Symmetrietransformation**, *siehe* Bd. 3  
 symmetrischer Kreisel, *siehe* Bd. 3  
 symplektische Struktur, 247, *siehe auch* Bd. 4  
**Synchrotron**, *siehe* Bd. 2  
**Synchrotronstrahlung**, *siehe* Bd. 2  
**System**  
     abgeschlossenes, 86  
     homogenes, *siehe* Bd. 4  
     Isolierbarkeit, *siehe* Bd. 4  
     isoliertes, 86  
     mikro- und makroskopisches, *siehe* Bd. 4  
     offenes, geschlossenes und abgeschlossenes,  
         *siehe* Bd. 4  
 Szilard, Leo, *siehe* Bd. 4
- T**
- 't Hooft, Gerard, *siehe* Bd. 2  
**Tachyonen**, 336  
**Tangentialvektor**, 24  
**Target**, 103  
**Taylor-Polynom**, 31  
**Taylor-Reihe**, 31  
**Taylor'scher Satz**, 31  
**Teilchen**  
     identische, *siehe* Bd. 3  
     zusammengesetzte, *siehe* Bd. 3  
**Teilchen im Kasten**, Energieeigenwerte, *siehe*  
     Bd. 4  
**Teilchenzahldichte**, für Fermionen, *siehe* Bd. 4  
**Teilchenzahloperator**, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
**Telegrafengleichungen**, *siehe* Bd. 2  
**Temperatur**, *siehe* Bd. 4  
     absolute, *siehe* Bd. 4  
         Definition durch Kreisprozess, *siehe*  
             Bd. 4  
         negative, *siehe* Bd. 4  
         als Äquivalenzrelation, *siehe* Bd. 4  
         als Ausdruck innerer Bewegung, *siehe* Bd. 4  
         subjektives Empfinden, *siehe* Bd. 4  
**Temperaturskala**  
     absolute, *siehe* Bd. 4  
         Konsistenz verschiedener Definitionen,  
             *siehe* Bd. 4  
         Celsius, *siehe* Bd. 4  
         Fahrenheit, *siehe* Bd. 4  
         Kelvin, *siehe* Bd. 4  
     temporale Eichung, *siehe* Bd. 2  
**Tensor**, 134  
     Matrizen als Darstellung, 135  
     metrischer, 72, 226  
     Transformationsverhalten, 135  
**Tensorkomponente**, 133  
**Tensorprodukt**, 134, 136, *siehe auch* Bd. 3  
     von Hilbert-Räumen, *siehe* Bd. 3  
     von Operatoren, *siehe* Bd. 3  
**Termschema**, Wasserstoffatom, *siehe* Bd. 3  
**Terrell, James**, 335  
**Tesla**, *siehe* Bd. 2  
**Testfunktion**, *siehe* Bd. 2  
**Theorem von Wigner**, *siehe* Bd. 3  
**Thermodynamik**  
     Axiome oder Hauptsätze, *siehe* Bd. 4  
     fundamentale Theorie, *siehe* Bd. 4  
     Gültigkeit für Quantensysteme, *siehe* Bd. 4  
     Gültigkeitsbereich, *siehe* Bd. 4  
     phänomenologisch, *siehe* Bd. 4  
**Thermometer**, *siehe* Bd. 4  
**Thomas, Llewellyn Hilleth**, 344, *siehe auch*  
     Bd. 3  
**Thomas-Faktor**, 345, *siehe auch* Bd. 3  
**Thomas-Fermi-Gleichung**, *siehe* Bd. 3  
**Thomas-Fermi-Näherung**, *siehe* Bd. 3  
**Thomas-Präzession**, 328, 344, 348  
**Thompson, Benjamin**, *siehe* Bd. 4  
**Thomson, George Paget**, *siehe* Bd. 3  
**Thomson, Joseph John**, *siehe* Bd. 3  
**Thomson-Streuung**, *siehe* Bd. 2  
**Tokamak**, *siehe* Bd. 2  
**Torricelli, Evangelista**, *siehe* Bd. 4  
**Torus**, 167

- totaler Wirkungsquerschnitt, 106, *siehe auch* Bd. 3  
 Totalreflexion, *siehe* Bd. 2  
 Trägheit, 7  
 Trägheitsgesetz, 7  
 Trägheitsmoment, 132  
     bezüglich der Drehachse, 137  
 Trägheitsprodukt, 132  
 Trägheitstensor, 132  
     Diagonalform, 139  
     Diagonalisierung, 142  
     einer kontinuierlichen Massenverteilung, 143  
     einer Kugel, 146  
     eines Quaders, 143  
 Trajektorie, 244  
 Transfermatrix, *siehe* Bd. 4  
 Transformation  
     auf Ruhe, 256  
     eigentliche, 52  
     infinitesimale, 64, 196  
     kanonische, 251  
     konforme, 327  
     längentreue, 79  
     orthonormale, 52  
     uneigentliche, 52  
     winkeltreue, 79  
 Transformationssatz, 145  
 Transformator, *siehe* Bd. 2  
 Translationen, *siehe* Bd. 3  
 Translationsgruppe, *siehe* Bd. 3  
 Translationsoperator, *siehe* Bd. 3  
 Transmission eines Wellenpakets, *siehe* Bd. 3  
 Transmissionsamplitude, *siehe* Bd. 3  
     für Potenzialtopf, *siehe* Bd. 3  
     in Resonanznähe, *siehe* Bd. 3  
 Transmissionskoeffizient, *siehe* Bd. 2  
 Transmissionswahrscheinlichkeit für  
     Kastenpotenzial, *siehe* Bd. 3  
 transmittierte Welle, *siehe* Bd. 3  
 transponierte Matrix, 50  
 Transposition, *siehe* Bd. 3  
 Transversalität, *siehe* Bd. 2  
 Transversalwellen, 232  
 Tripelpunkt, *siehe auch* Wasser, Tripelpunkt,  
     *siehe* Bd. 4  
 triviale Darstellung, *siehe* Bd. 3  
 Trochoide, *siehe* Bd. 2  
 Trojaner, 112  
 Tscherenkow-Strahlung, 365  
 Tunneleffekt, *siehe* Bd. 3  
     semiklassisch, *siehe* Bd. 3  
 Tunnel-Matrixelement, *siehe* Bd. 3  
 turbulente Strömung, 308  
 Turbulenz, 308
- U**  
 Übergangsbedingungen für Dielektrika, *siehe* Bd. 2  
 Übergangsbedingungen für magnetische  
     Medien, *siehe* Bd. 2  
 Übergangsmatrixelemente, *siehe* Bd. 3  
 Übergangstemperatur, *siehe* Bd. 4  
 Überlichtgeschwindigkeit, 336, *siehe auch* Bd. 2  
 Überschwinger, 285  
 Uhlenbeck, George, *siehe* Bd. 3  
 UKW-Sender, *siehe* Bd. 2
- ultrahochenergetische kosmische Strahlung, 368  
 ultrarelativistisch, 359, 369  
 Ultraviolettkatastrophe, *siehe* Bd. 3  
 Umkehrproblem, *siehe* Bd. 3  
 Umkehrpunkt, 21, 95  
 unbeschränkter Operator, *siehe* Bd. 3  
 Unbestimmtheitsrelation, allgemeine, *siehe* Bd. 3  
 uneigentliche Eigenfunktion, *siehe* Bd. 3  
 Unipolarinduktion, *siehe* Bd. 2  
 Unipolarmaschine, *siehe* Bd. 2  
 unitäre Operatoren, *siehe* Bd. 3  
 Unschärferelation, *siehe* Bd. 3  
 Untermaennigfaltigkeit, 167  
 Unterschwinger, 285  
 Untervektorraum, aufgespannter, 36  
 unverträgliche Observable im weniger strengen  
     Sinn, *siehe* Bd. 3  
 Urknall-Theorie, *siehe* Bd. 3
- V**  
 Vakuum-Doppelbrechung/Birefringenz, *siehe* Bd. 2  
 Vakuumpolarisation, *siehe* Bd. 2  
 Valenzelektron, *siehe* Bd. 3  
 Van Allen, James, *siehe* Bd. 2  
 van der Waals, Johannes Diderik, *siehe* Bd. 4  
 Van-Allen-Gürtel, *siehe* Bd. 2  
 Van-der-Waals-Gas  
     Binnendruck, *siehe* Bd. 4  
     Eigenvolumen, *siehe* Bd. 4  
 Van-der-Waals-Kraft, *siehe* Bd. 3  
 Varianz, *siehe* Bd. 4  
 Variation, 188, 190  
 Variation der Konstanten, 216  
 Variationsprinzip, Gibbs'sches, *siehe* Bd. 4  
 Variationsrechnung, 186  
 Variationsverfahren, *siehe* Bd. 3  
     Ritz'sches, *siehe* Bd. 3  
 Vektor, 4  
     axialer, 56  
     Darstellung, 48  
     gebundener, 54  
     polarer, 56  
     ungebundener, 54  
 Vektorfeld, 29  
 Vektor-Laplace-Operator, *siehe* Bd. 2  
 Vektoroperator, *siehe* Bd. 3  
 Vektor-Poisson-Gleichung, *siehe* Bd. 2  
 Vektorpotenzial, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 Vektorprodukt, 24, 25  
 Vektorraum, 4, *siehe auch* Bd. 3  
     dualer, 339, *siehe auch* Bd. 3  
 Veltman, Martinus, *siehe* Bd. 2  
 verallgemeinerte Funktion, *siehe* Bd. 2  
 verallgemeinerte Koordinaten, 169  
 verallgemeinerte Orthonormalitätsrelation, 226  
 verallgemeinerter Impuls, 244  
 verborgene Symmetrie, *siehe* Bd. 3  
 verborgene Variable, *siehe* Bd. 3  
 Verdampfungswärme, *siehe* Bd. 4  
 Vergangenheit, 334  
 Verlustleistung, 20  
 Vernichtungsoperator, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 Verrückung, virtuelle, 173  
 Verschiebungsgesetz, Wien'sches, *siehe* Bd. 4
- Verschiebungsoperator, *siehe* Bd. 3  
 Verschiebungssatz, *siehe* Bd. 4  
 Verschiebungsstrom, *siehe* Bd. 2  
 Verschiebungsvektor, 54  
 verschränkter Zustand, *siehe* Bd. 3  
 Verteilung  
     großkanonische, *siehe* Bd. 4  
     kanonische, *siehe* Bd. 4  
         Quantenstatistik, *siehe* Bd. 4  
         mikrokanonische, *siehe* Bd. 4  
 Verzerrungstensor, 290  
 Verzweigungspunkte, *siehe* Bd. 3  
 Viele-Welt-Interpretation, *siehe* Bd. 3  
 Viererbeschleunigung, 342  
 Vierergeschwindigkeit, 342, *siehe auch* Bd. 2  
 Vierergradient, 348, *siehe auch* Bd. 2  
 Viererimpuls, 356, *siehe auch* Bd. 2  
 Viererkraft, 357  
 Viererpotenzial, *siehe* Bd. 2  
 Viererstromdichte, *siehe* Bd. 2  
 Vierertensor, 341  
 Vierervektor, 339  
 Virial, 118  
 Virialentwicklung, *siehe* Bd. 4  
 Virialsatz, 118, *siehe auch* Bd. 3  
 virtuelle Verrückung, 173  
 viskos, 15  
 viskose Spannung, 305  
 Viskosität, 306  
     dynamische, 306  
     kinematische, 306  
 Voigt, Woldemar, 326  
 vollständige Ableitung, 20  
 vollständige Zeitableitung, 21  
 vollständiger Raum, 6  
 vollständiges Differenzial, 21  
 Vollständigkeit, *siehe* Bd. 2  
     der Quantenmechanik, *siehe* Bd. 3  
     von Projektoren, *siehe* Bd. 4  
 Vollständigkeitsrelation, *siehe* Bd. 3  
     im Ortsraum, *siehe* Bd. 3  
 Volt, *siehe* Bd. 2  
 Volta, Alessandro, *siehe* Bd. 2  
 Volumen, kritisches, *siehe* Bd. 4  
 Volumenintegral, 143  
 Volumenkraft, 294  
 von Laue, Max, *siehe* Bd. 3  
 von Neumann, John, *siehe* Bd. 3  
 Von-Neumann-Gleichung, *siehe* Bd. 4  
     im Schrödinger-Bild, *siehe* Bd. 3  
     im Wechselwirkungsbild, *siehe* Bd. 3  
 Vorwärtslichtkegel, 334
- W**  
 Wahrscheinlichkeit  
     als Erwartungswert der relativen Häufigkeit,  
         *siehe* Bd. 4  
     bedingte, *siehe* Bd. 4  
         Umkehrung, *siehe* Bd. 4  
         unabhängiger Ereignisse, *siehe* Bd. 4  
         von Messresultaten, *siehe* Bd. 3  
 Wahrscheinlichkeitsdichte, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
     auf dem Phasenraum, *siehe* Bd. 4  
     für allgemeine Koordinaten, *siehe* Bd. 3  
 Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Phasenraum,  
     *siehe* Bd. 4

- Wahrscheinlichkeitsstrom, *siehe* Bd. 3  
 Wahrscheinlichkeitsstromdichte, *siehe* Bd. 3  
 Walker, Arthur Geoffrey, 344  
**Wärme**, *siehe* Bd. 4  
 als innere Bewegung, *siehe* Bd. 4  
 kinetische Theorie, *siehe* Bd. 4  
 latente, *siehe* Bd. 4  
 mikroskopische Theorie, *siehe* Bd. 4  
 molare, *siehe* Bd. 4  
 Reibung und Arbeit, *siehe* Bd. 4  
 spezifische, *siehe* Bd. 4  
 Substanzcharakter, *siehe* Bd. 4  
 Zusammenhang mit Arbeit, *siehe* Bd. 4  
**Wärme und Arbeit**  
 Abgrenzung, *siehe* Bd. 4  
**Wärmebad**, *siehe* Bd. 4  
**Wärmekapazität**, *siehe* Bd. 4  
 allgemeiner Systeme, *siehe* Bd. 4  
 fester Körper, *siehe* Bd. 4  
 spezifische, *siehe* Bd. 4  
**Wärmekraftmaschine**, *siehe* Bd. 4  
**Wärmeleitung**, *siehe* Bd. 4  
**Wärmeleitungspumpe**, *siehe* Bd. 4  
**Wärmereservoir**, *siehe* Bd. 4  
**Wärmestoff**, *siehe* Bd. 4  
 Wasser, Tripelpunkt, *siehe* Bd. 4  
 Wasserfall, 304  
 Wassersäule im Gravitationsfeld, 303  
**Wasserstoffatom**  
 algebraische Lösung, *siehe* Bd. 3  
 diskretes Spektrum, *siehe* Bd. 3  
 Energien, *siehe* Bd. 3  
 im elektrischen Feld, *siehe* Bd. 3  
**Wasserstoffbombe**, 364  
**Watt**, *siehe* Bd. 2  
**Watt, James**, *siehe* Bd. 4  
**Weber**, *siehe* Bd. 2  
**Weber, Wilhelm**, *siehe* Bd. 2  
**Wechselstromwiderstand, komplexer**, *siehe* Bd. 2  
**Wechselwirkung, elastische**, 101  
**Wechselwirkungsbild**, *siehe* Bd. 3  
**Wechselwirkungsenergie**, *siehe* Bd. 2  
 wechselwirkungsfreie Messung, *siehe* Bd. 3  
**Wegintegral**  
 geschlossenes, 27  
 siehe Pfadintegral, *siehe* Bd. 3  
**Weglänge**  
 mittlere freie, *siehe* Bd. 4  
 optische, *siehe* Bd. 2  
**Wegunabhängigkeit der Arbeit**, 32  
**Weißer Zwerg**, *siehe* Bd. 4  
**Weiss'sche Bezirke**, *siehe* Bd. 2  
**Weitwinkelstreuung**, *siehe* Bd. 3  
**Welle**, 232  
 ebene, *siehe* Bd. 2  
 im Medium, *siehe* Bd. 2  
 stehende, 280  
**Wellenfunktion, Norm**, *siehe* Bd. 3  
**Wellengeschwindigkeit**, 276  
**Wellengleichung**, *siehe* Bd. 2  
 inhomogene, *siehe* Bd. 2  
**Wellenlänge**, 280  
 thermische, *siehe* Bd. 4  
**Wellenmechanik**, 258  
**Wellenmechanik, mit Kräften**, *siehe* Bd. 3  
**Wellenoperator**, *siehe* Bd. 2  
**Wellenoptik**, *siehe* Bd. 2  
**Wellenpaket**, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
**Wellenzahl**, 231, 280  
**Weltbild, mechanisches**, 2  
**Weltlinie**, 330, *siehe auch* Bd. 2  
**Wentzel, Gregor**, *siehe* Bd. 3  
**Weyl, Hermann**, *siehe* Bd. 3  
**Weyl-Eichung**, *siehe* Bd. 2  
**Weyl-Ordnung**, *siehe* Bd. 3  
**Weyl'sche Vertauschungsrelation**, *siehe* Bd. 3  
**Widerstand**, *siehe* Bd. 2  
 innerer, *siehe* Bd. 2  
**Wien, Wilhelm**, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
**Wiener, Norbert**, *siehe* Bd. 3  
**Wienfilter**, *siehe* Bd. 2  
**Wiensch'sches Strahlungsgesetz**, *siehe* Bd. 3  
**Wigner, Eugene**, *siehe* Bd. 3  
**Wigner'sches Theorem**, *siehe* Bd. 3  
**Wilson, Robert**, *siehe* Bd. 3  
**Winkelgeschwindigkeit**, 63  
**Winkelvariable**, 255  
**Wirbelstärke**, 32, 33  
**Wirbelstraße, Kármán'sche**, 309  
**Wirkleistung**, *siehe* Bd. 2  
**Wirkung**, 191, 288, *siehe auch* Bd. 3  
 effektive, *siehe* Bd. 2  
 Felder, *siehe* Bd. 2  
 kovariant, *siehe* Bd. 2  
 Prinzip der kleinsten, 191  
 Prinzip der stationären, 191  
**Wirkungsfunktion**, 256  
**Wirkungsgrad**  
 Carnot'scher, *siehe* Bd. 4  
 universelle Gültigkeit, *siehe* Bd. 4  
 einer Dampfmaschine, *siehe* Bd. 4  
**Wirkungsintegral**, *siehe* Bd. 3  
**Wirkungsprinzip**, 191  
**Wirkungsquantum**, *siehe* Bd. 3  
**Wirkungsquerschnitt**  
 differenzieller, 107, *siehe auch* Bd. 3  
 für Streuung an harten Kugeln, *siehe* Bd. 3  
 isotroper, 108  
 Rutherford'scher, 109  
 totaler, 107, *siehe auch* Bd. 3  
**Wirkungsvariable**, 255  
**WKB-Näherung**, *siehe* Bd. 3  
 Gültigkeitsbereich, *siehe* Bd. 3  
 mehrere Dimensionen, *siehe* Bd. 3  
**WMAP-Satellit**, *siehe* Bd. 3  
**Wolter, Hans**, *siehe* Bd. 2  
**Wolter-Teleskop**, *siehe* Bd. 2  
**Wronski-Determinante**, 212, *siehe auch* Bd. 3  
**Wu, Chien-Shiung**, 329
- Y**  
 Yang, Chen-Ning, 329, *siehe auch* Bd. 2  
**Yang-Mills-Theorie**, *siehe* Bd. 2  
**Young, Thomas**, *siehe* Bd. 3  
**Young-Laplace-Gleichung**, 310  
**Young'scher Elastizitätsmodul**, 291  
**Yukawa, Hideki**, *siehe* Bd. 3  
**Yukawa-Potenzial**, *siehe* Bd. 2; Bd. 3
- Z**  
**Zahl, komplex konjugierte**, 214  
**Zahlenebene, Gauß'sche**, 214  
**Zeeman, Pieter**, *siehe* Bd. 3  
**Zeeman-Effekt**  
 anomaler, *siehe* Bd. 3  
 normaler, *siehe* Bd. 3  
**Zeh, Dieter**, *siehe* Bd. 3  
**Zeit, retardierte**, *siehe* Bd. 2  
**zeitabhängig**  
 explizit, 21  
 implizit, 21  
**Zeitableitung**, 5  
 in rotierenden Bezugssystemen, 64  
 vollständige, 21  
**zeitartig**, 334  
**Zeitdilatation**, 323, 332  
**Zeitentwicklung, ungestörte**, *siehe* Bd. 3  
**Zeitentwicklungsoperator**, *siehe* Bd. 3  
**zeitlich homogen**, 179  
**Zeitmessung**, *siehe* Bd. 3  
**Zeitordnung**, *siehe* Bd. 3  
**Zeitordnungsoperator**, *siehe* Bd. 3  
**Zeitspiegelung**, 328  
**Zeittranslationsinvarianz**, 197  
**Zeitumkehr**, *siehe* Bd. 3  
**Zeitunabhängigkeit des Potenzials**, 20  
**Zentralfeld**, *siehe* Bd. 3  
**Zentralkraft**, 8, 30  
**Zentrifugalkraft**, 67  
**Zerfallsbreite**, *siehe* Bd. 3  
**Zerfließen von Wellenpaketen**, *siehe* Bd. 3  
**Zerlegung der Eins**, *siehe* Bd. 2; Bd. 3  
 allgemeiner Fall, *siehe* Bd. 3  
 bezüglich Impulsoperator, *siehe* Bd. 3  
 bezüglich Ortsoperator, *siehe* Bd. 3  
**Zetafunktion, Riemann'sche**, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
**Zirkulation**, 32, 33  
**Zitterbewegung**, *siehe* Bd. 3  
**Zufallsbewegung**, *siehe* Bd. 4  
**Zugspannung**, 273  
**Zukunft**, 334  
**Zustand**  
 adiabatischer, Poisson'sche Gleichung, *siehe* Bd. 4  
 antisymmetrischer, *siehe* Bd. 3  
 gemischter, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 reiner, *siehe* Bd. 3; Bd. 4  
 symmetrischer, *siehe* Bd. 3  
**Zustände**, *siehe* Bd. 3  
**Zustandsänderung**, *siehe* Bd. 4  
 durch Wechselwirkung mit der Umgebung,  
*siehe* Bd. 4  
 irreversible, *siehe* Bd. 4  
 quasistatische, *siehe* Bd. 4  
 quasistatische und reversible, *siehe* Bd. 4  
 reversible, *siehe* Bd. 4  
 reversible oder irreversible  
 aus statistischer Sicht, *siehe* Bd. 4  
**Zustandsdichte**, *siehe* Bd. 3  
**Zustandsfläche**, *siehe* Bd. 4  
**Zustandsgleichung**, 303, *siehe auch* Bd. 4  
 kalorische, *siehe* Bd. 4  
**Zustandsgröße**, *siehe* Bd. 4  
 extensive oder intensive, *siehe* Bd. 4

- und homogene Funktionen, *siehe* Bd. 4  
makroskopische, *siehe* Bd. 4  
mikroskopische, *siehe* Bd. 4  
und vollständige Differenziale, *siehe* Bd. 4  
Zustandsraum, *siehe* Bd. 4  
der klassischen Mechanik, *siehe* Bd. 4  
Einteilchen-, *siehe* Bd. 4  
Zustandssumme  
eines idealen Gases, *siehe* Bd. 4  
für ein Gemisch idealer Gase, *siehe* Bd. 4  
großkanonische, *siehe* Bd. 4  
kanonische, *siehe* Bd. 4
- und freie Energie, *siehe* Bd. 4  
mikrokanonische, *siehe* Bd. 4  
Zwangsbedingung, 8, 128, 166, *siehe auch*  
    Hemmung  
    äußere, 172  
    holonom, 166  
    innere, 172  
    nichtholonom, 167  
    nichtintegrierbare, 170  
    rheonom, 167  
    skleronom, 167  
Zwangskraft, 166, 171
- Zweikörperproblem, 90, 91  
Zweiteilchenoperator, *siehe* Bd. 3  
Zweiteilchen-Problem, *siehe* Bd. 3  
Zwillingsparadoxon, 337, 338  
zyklische Koordinate, 179  
Zykloide, 201, *siehe auch* Bd. 2  
Zyklotron, *siehe* Bd. 2  
Zyklotronfrequenz, 41, *siehe auch* Bd. 2; Bd. 3  
Zylinderkondensator, *siehe* Bd. 2  
Zylinderkoordinaten, 71

## Komplexe Zahlen

Polarendarstellung komplexer Zahlen:

$$z = x + i y = |z| e^{i\varphi}, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Euler'sche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

## Vektorrechnung

### Dreidimensional

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 &= a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \end{aligned}$$

Kronecker-Symbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

Levi-Civita-Symbol:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } ijk \text{ gerade Permutation von 123} \\ -1 & \text{wenn } ijk \text{ ungerade Permutation von 123} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2 \delta_{il}$$

Einstein'sche Summenkonvention (kartesische Koordinaten):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^3 a_i b_i, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

Ableitungen von skalaren Feldern  $\phi(\mathbf{r})$ , Vektorfeldern  $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ :

Gradient:  $\mathbf{grad} \phi = \nabla \phi$  bzw.  $(\nabla \phi)_i = \partial_i \phi$

Divergenz:  $\operatorname{div} \mathbf{X} = \nabla \cdot \mathbf{X} = \partial_i X_i$

Rotation:  $\mathbf{rot} \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X}$  bzw.  $(\mathbf{rot} \mathbf{X})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j X_k$

Zweite Ableitungen:

$\operatorname{div} \mathbf{grad} \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi$

$\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{X} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{X})$

$\operatorname{div} \mathbf{rot} \mathbf{X} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$

$\mathbf{rot} \mathbf{grad} \phi = \nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$

$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{X} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{X}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{X}) - \Delta \mathbf{X}$

### Vierdimensional

Kronecker-Symbol:

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \mu = \nu \\ 0 & \text{wenn } \mu \neq \nu \end{cases}$$

Minkowski-Metrik:

$$(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{\mu\lambda} \eta_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$$

Lorentz-invariantes Skalarprodukt (mit Summenkonvention):

$$a_\mu b^\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = a_0 b^0 + a_i b^i = a^0 b^0 - a^i b^i$$

Viererortsvektor:

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mu \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Vierergradient:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (\partial_\mu) = \left( \frac{1}{c} \partial_t \right), \quad (\partial^\mu) = (\eta^{\mu\nu} \partial_\nu) = \left( \frac{1}{c} \partial_t \right)$$

Wellen-, d'Alembert- oder Quabla-Operator:

$$\partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial^2 \equiv \square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \equiv \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$$

Vierdimensionales Levi-Civita-Symbol:

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} := \begin{cases} +1 & \text{wenn } \mu\nu\sigma\tau \text{ gerade Permutation von 0123} \\ -1 & \text{wenn } \mu\nu\sigma\tau \text{ ungerade Permutation von 0123} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{0123} = \eta_{00} \eta_{11} \eta_{22} \eta_{33} \varepsilon^{0123} = -1$$

## Integralsätze

Linienintegral:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} &= \phi(\mathbf{x}_b) - \phi(\mathbf{x}_a) \\ \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} dx_i \partial_i (\dots) &= (\dots)|_{\mathbf{x}_b} - (\dots)|_{\mathbf{x}_a} \end{aligned}$$

Satz von Stokes:

$$\begin{aligned} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{X} &= \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{X} \\ \int_F df_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\dots) &= \oint_{\partial F} dx_k (\dots) \end{aligned}$$

Satz von Gauß:

$$\begin{aligned} \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{X} &= \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{X} \\ \int_V dV \partial_i (\dots) &= \oint_{\partial V} df_i (\dots) \end{aligned}$$

Green'sche Integralsätze:

$$\int_V dV [(\nabla \phi) \cdot (\nabla \chi) + \phi \Delta \chi] = \oint_{\partial V} \mathbf{d}\mathbf{f} \cdot \phi \nabla \chi$$

$$\int_V dV (\phi \Delta \chi - \chi \Delta \phi) = \oint_{\partial V} \mathbf{d}\mathbf{f} \cdot (\phi \nabla \chi - \chi \nabla \phi)$$

## Zylinderkoordinaten

$$x_1 \equiv x = \varrho \cos \varphi \quad \hat{\mathbf{e}}_\varrho = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2$$

$$x_2 \equiv y = \varrho \sin \varphi \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_1$$

$$x_3 \equiv z \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$dV = d^3x = \varrho d\varrho d\varphi dz$$

$$\nabla f = \hat{\mathbf{e}}_\varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\Delta f = \underbrace{\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right)}_{\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2}} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

## Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten)

$$x_1 \equiv x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$x_2 \equiv y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$x_3 \equiv z = r \cos \vartheta$$

$$dV = d^3x = r^2 dr d\Omega = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \sin \vartheta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \vartheta \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\vartheta = \cos \vartheta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \vartheta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 - \sin \vartheta \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_1$$

$$\nabla f = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\Delta f = \left( \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \right) f$$

$$\Delta_r := \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\Delta_\Omega := \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

## Kugelflächenfunktionen

$$\Delta_\Omega Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = -\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad \ell \in \mathbb{N}_0, \quad m = -\ell, \dots, \ell$$

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$P_\ell^m(u) = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!} (1-u^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{du^{\ell+m}} (1-u^2)^\ell, \quad P_\ell \equiv P_\ell^0$$

$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$m = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$
$m = 1$		$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi}$	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi}$
$m = 2$			$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}$

$$Y_{\ell, -m} = (-1)^m Y_{\ell m}^*, \quad \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) Y_{\ell' m'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'}$$

$$\frac{1}{|r-r'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r_-^\ell}{r_+^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi')$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_-^\ell}{r_+^{\ell+1}} P_\ell(\cos \alpha), \quad \cos \alpha \equiv \frac{r \cdot r'}{r r'},$$

$$r_- = \min(r, r'), \quad r_+ = \max(r, r')$$

## Fourier-Transformation

$$f(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{f}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(k \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

$$\tilde{f}(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} f(t, \mathbf{x}) e^{-i(k \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

## Entwicklung nach einem vollständigen orthonormalen Funktionensystem $f_j$

$$f(x) = \sum_j a_j f_j(x), \quad a_j = \langle f_j, f \rangle, \quad \langle f, g \rangle = \int_I f^*(x) g(x) dx$$

$$\langle f_j, f_k \rangle = \delta_{jk}, \quad \sum_j f_j^*(x') f_j(x) = \delta(x' - x)$$

## Funktionentheorie

Cauchy-Riemann'sche Differenzialgleichungen:

$$f(z) = u(x + iy) + iv(x + iy) : \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Residuensatz:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} f(z)$$

Residuum bei einer einfachen Polstelle:

$$\text{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

## Mechanik

Lagrange-Gleichungen erster Art:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{a=1}^r \lambda_a \nabla_i f_a, \quad f_a(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = 0$$

Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad L = T - V$$

Hamilton'sche kanonische Gleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

Poisson-Klammern:

$$\{F, G\} = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

## Elektrodynamik

Maxwell-Gleichungen (Gauß'sches System):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_f, \quad \mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$$

Potenziale:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Lineare Medien:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = (1 + 4\pi \chi_e) \mathbf{E} \equiv \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = (1 + 4\pi \chi_m) \mathbf{H} \equiv \mu \mathbf{H}$$

Vakuum:  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\rho_f \rightarrow \rho$ ,  $\mathbf{j}_f \rightarrow \mathbf{j}$

Maxwell-Gleichungen (SI-System):

$$\operatorname{div} \mathbf{D}^{[SI]} = \rho_f^{[SI]}, \quad \mathbf{D}^{[SI]} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}^{[SI]} + \mathbf{P}^{[SI]}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}^{[SI]} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^{[SI]} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}^{[SI]}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{[SI]} = \mathbf{j}_f^{[SI]} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}^{[SI]}, \quad \mathbf{H}^{[SI]} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{[SI]} - \mathbf{M}^{[SI]}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2, \quad \epsilon_0 \equiv \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

Potenziale:

$$\mathbf{E}^{[SI]} = -\nabla \phi^{[SI]} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{[SI]}, \quad \mathbf{B}^{[SI]} = \nabla \times \mathbf{A}^{[SI]}$$

Lineare Medien:

$$\mathbf{P}^{[SI]} = \chi_e^{[SI]} \epsilon_0 \mathbf{E}^{[SI]}, \quad \mathbf{D}^{[SI]} = (1 + \chi_e^{[SI]}) \epsilon_0 \mathbf{E}^{[SI]} \equiv \epsilon^{[SI]} \mathbf{E}^{[SI]},$$

$$\mathbf{M}^{[SI]} = \chi_m^{[SI]} \mathbf{H}^{[SI]}, \quad \mathbf{B}^{[SI]} = (1 + \chi_m^{[SI]}) \mu_0 \mathbf{H}^{[SI]} \equiv \mu^{[SI]} \mathbf{H}^{[SI]}$$

Umrechnung Gauß'sches und SI-System:

$$\mathbf{E} = \sqrt{4\pi \epsilon_0} \mathbf{E}^{[SI]}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{B}^{[SI]},$$

$$\phi = \sqrt{4\pi \epsilon_0} \phi^{[SI]}, \quad \mathbf{A} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{A}^{[SI]},$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{4\pi \epsilon_0}} \rho^{[SI]}, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \epsilon_0}} \mathbf{j}^{[SI]}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$$

Lorentz-Kraft auf Punktladung  $q = q^{[SI]} / \sqrt{4\pi \epsilon_0}$ :

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) = q^{[SI]} \left( \mathbf{E}^{[SI]} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}^{[SI]} \right)$$

## Quantenmechanik

Korrespondenzregeln im Ortsraum:

$$\mathbf{x} \mapsto \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{p} \mapsto \hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla_x$$

Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Formale Lösung für konservative Systeme:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle, \quad \hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

Stationäre Schrödinger-Gleichung für konservative Systeme:

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad |\psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar} |\psi\rangle$$

Hamilton-Operator im Ortsraum für Teilchen ohne Spin:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(t, \hat{\mathbf{x}}) \right)^2 + V(\hat{\mathbf{x}})$$

Entwicklung nach Eigenvektoren einer Observablen:

$$\hat{A} |a_n\rangle = a_n |a_n\rangle, \quad \langle a_m | a_n \rangle = \delta_{mn} \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_n \langle a_n | \psi \rangle |a_n\rangle$$

Erwartungswert einer Observablen in einem Zustand:

$$\langle \hat{A} \rangle_{\psi} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle, \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

Unbestimmtheitsrelation für zwei Observablen:

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle_{\psi} \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle_{\psi} \geq -\frac{1}{4} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{\psi}^2, \quad \Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_{\psi}$$

Übergang vom Schrödinger- zum Heisenberg-Bild:

$$|\psi_H\rangle = \hat{U}^{-1}(t) |\psi(t)\rangle, \quad \hat{A}_H(t) = \hat{U}^{-1}(t) \hat{A} \hat{U}(t)$$

Heisenberg-Gleichung für Observablen:

$$i\hbar \frac{d\hat{A}_H}{dt} = [\hat{A}_H, \hat{H}_H]$$

Harmonischer Oszillator:

$$\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2), \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

Hermesche Drehimpulsoperatoren:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{J}_k, \quad [\hat{J}^2, \hat{J}_i] = 0$$

Eigenzustände des Drehimpulses:

$$\hat{J}^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle, \quad \hat{J}_3 |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$$

Energien des Wasserstoffatoms:

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \text{Ry}, \quad \text{Ry} = \frac{m_e c^2}{2} \alpha^2 \approx 13,606 \text{ eV}$$

Änderung der Energie und des Zustandsvektors in erster Ordnung Störungstheorie:

$$E^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | \hat{H}^{(1)} | \psi_n^{(0)} \rangle, \\ |\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{\langle \psi_k^{(0)} | \hat{H}^{(1)} | \psi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |\psi_k^{(0)}\rangle$$

## Thermodynamik

Einige wichtige thermodynamische Potenziale:

$U(S, V)$	innere Energie
$F(T, V) = U(S, V) - TS$	freie Energie
$H(S, P) = U(S, V) + PV$	Enthalpie
$G(T, P) = F(T, V) + PV$ $= U(S, V) - TS + PV$	freie Enthalpie

Vollständige Differenziale davon:

$$\begin{aligned} dU(S, V) &= T dS - P dV \\ dF(T, V) &= -S dT - P dV \\ dH(S, P) &= T dS + V dP \\ dG(T, P) &= -S dT + V dP \end{aligned}$$

Daraus abgeleitete Maxwell-Relationen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S &= -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \\ \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S &= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \\ \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T &= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \end{aligned}$$

Großkanonische Zustandssummen für Maxwell-Boltzmann-, Fermi-Dirac- und Bose-Einstein-Systeme:

$$\begin{aligned} Z_{\text{gc}}^{\text{MB}} &= \sum_{N=0}^{\infty} \int d\Gamma(x) e^{-\beta(H(x)-\mu N)} \\ Z_{\text{gc}}^{\text{FD}} &= \prod_k \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}\right) \\ Z_{\text{gc}}^{\text{BE}} &= \prod_k \left(1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Großkanonische Verteilungsfunktionen dieser Systeme:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{gc}}^{\text{MB}} &= \left(Z_{\text{gc}}^{\text{MB}}\right)^{-1} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta(H(x)-\mu N)} \\ \langle n_k^{\text{FD}} \rangle &= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1} \\ \langle n_k^{\text{BE}} \rangle &= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \end{aligned}$$

Beziehungen zwischen Zustandssummen und thermodynamischen Potenzialen:

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln \Omega \\ F &= -k_B T \ln Z_c \\ J &= -PV = -k_B T \ln Z_{\text{gc}} \end{aligned}$$

Gibbs-Duhem-Beziehung:

$$U - TS + PV = G = \sum_i \mu^{(i)} N^{(i)}$$



# Willkommen zu den Springer Alerts

Jetzt  
anmelden!

- Unser Neuerscheinungs-Service für Sie:  
aktuell \*\*\* kostenlos \*\*\* passgenau \*\*\* flexibel

Springer veröffentlicht mehr als 5.500 wissenschaftliche Bücher jährlich in gedruckter Form. Mehr als 2.200 englischsprachige Zeitschriften und mehr als 120.000 eBooks und Referenzwerke sind auf unserer Online Plattform SpringerLink verfügbar. Seit seiner Gründung 1842 arbeitet Springer weltweit mit den hervorragendsten und anerkanntesten Wissenschaftlern zusammen, eine Partnerschaft, die auf Offenheit und gegenseitigem Vertrauen beruht.

Die SpringerAlerts sind der beste Weg, um über Neuentwicklungen im eigenen Fachgebiet auf dem Laufenden zu sein. Sie sind der/die Erste, der/die über neu erschienene Bücher informiert ist oder das Inhaltsverzeichnis des neuesten Zeitschriftenheftes erhält. Unser Service ist kostenlos, schnell und vor allem flexibel. Passen Sie die SpringerAlerts genau an Ihre Interessen und Ihren Bedarf an, um nur diejenigen Informationen zu erhalten, die Sie wirklich benötigen.

Mehr Infos unter: [springer.com/alert](http://springer.com/alert)