Логика-1, 1 курс М

Виктор Львович Селиванов [1]

[1]ФМКН СПбГУ

Весенний семестр, 2025

v.selivanov@spbu.ru

Важная дополнительная информация:
https://github.com/vseliv/Logic1-24-25

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.

2. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.

3. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; будем считать, что σ содержит хотя бы один предикатный символ.

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; будем считать, что σ содержит хотя бы один предикатный символ.
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; будем считать, что σ содержит хотя бы один предикатный символ.
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$
- Логические символы $\wedge\ \vee\ \rightarrow\ \neg\ \forall\ \exists$

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; будем считать, что σ содержит хотя бы один предикатный символ.
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$
- Логические символы $\wedge\ \vee\ \ \rightarrow\ \ \neg\ \forall\ \exists$
- Вспомогательные символы ( ) ,

Осмысленные выражения ЛП$^\sigma$

σ-ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n-местный функциональный символ из σ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже терм.

Осмысленные выражения ЛП$^\sigma$

σ-ТЕРМЫ:
любая переменная есть терм;
если f — n-местный функциональный символ из σ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже терм.

σ-ФОРМУЛЫ:
выражение $P(t_1, \ldots, t_n)$,
где t_1,. . ., t_n — термы, а P - n-местный предикатный символ из σ, является формулой;
если φ и ψ — формулы, а x — переменная, то выражения
$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$
суть формулы.

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \ldots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов $t_1, \ldots, t_n$;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для $\vee, \to, \neg$;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для $\exists$.

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:
$FV(P(t_1, \ldots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов $t_1, \ldots, t_n$;
$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для $\vee, \to, \neg$;
$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для $\exists$.

Переменные, которые входят в формулу, но не являются свободными, называются связанными. Формулы без свободных переменных называются предложениями.

Запись $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ означает, что $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$. Аналогично для термов.

σ-Структуры

σ-Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n-местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n-местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{И,Л}\}$, а каждому n-местному функциональному символу f из σ — некоторую n-местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

σ-Структуры

σ-Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n-местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n-местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \to \{$И,Л$\}$, а каждому n-местному функциональному символу f из σ — некоторую n-местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

Изоморфизмом $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$ называется биекция g множества A на множество B такая, что $P^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ и $g(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{A}$.

Структуры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ называются изоморфными ($\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$), если существует изоморфизм $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$.

Значения термов и формул

Для любой σ-структуры $\mathbb{A}$ и означивания $\nu : Var \to A$ определяем значения $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{\text{И},\text{Л}\}$ индукцией:

$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x)$, $f(t_1,\ldots,t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu},\ldots,t_n^{\mathbb{A},\nu})$;

Значения термов и формул

Для любой σ-структуры $\mathbb{A}$ и означивания $\nu : Var \to A$ определяем значения $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{\text{И},\text{Л}\}$ индукцией:

$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x)$, $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \ldots, t_n^{\mathbb{A},\nu})$;

$P(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \ldots, t_n^{\mathbb{A},\nu})$;
$(\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu} \wedge \psi^{\mathbb{A},\nu}$, аналогично для $\vee, \to, \neg$;

$$(\forall x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigwedge_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x} \text{ и } (\exists x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigvee_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x}$$

,
где ν_a^x — означивание, полученное из ν изменением значения x на a.

Значения термов и формул

Пусть $t = t(x_1, \ldots, x_m)$ и $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$.

- Если означивания μ и ν согласованы на $x_1, \ldots, x_m$, то $t^{\mathbb{A},\mu} = t^{\mathbb{A},\nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A},\mu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu}$. Поэтому вместо $t^{\mathbb{A},\nu}$ часто пишут $t^{\mathbb{A}}(x_1/a_1, \ldots, x_m/a_m)$ или, короче, $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)$, где $a_i = \nu(x_i)$; аналогично для формул. Вместо $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) =$И часто пишут $\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_m)$.
- Если g — изоморфизм $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$, то $g(t^{\mathbb{A},\nu}) = t^{\mathbb{B},g\circ\nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{B},g\circ\nu}$. Иными словами, $g(t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = t^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_m))$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_m))$.
- Если $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$, то эти структуры элементарно эквивалентны ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), т.е. в них истинны одни и те же σ-предложения.

Определимость и автоморфизмы

Предикат $P(x_1, \ldots, x_k)$ на σ-структуре $\mathbb{A}$ называется *определимым*, если он определяется подходящей σ-формулой $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, т.е. $P(a_1, \ldots, a_k) = \varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ для любых $a_1, \ldots, a_k \in A$.

Функция на A *определима*, если определим ее график. Элемент $a \in A$ определим, если множество $\{a\}$ (равносильно, предикат $x = a$) определимо.

Определимость и автоморфизмы

Предикат $P(x_1, \ldots, x_k)$ на σ-структуре $\mathbb{A}$ называется *определимым*, если он определяется подходящей σ-формулой $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, т.е. $P(a_1, \ldots, a_k) = \varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ для любых $a_1, \ldots, a_k \in A$.

Функция на A *определима*, если определим ее график. Элемент $a \in A$ определим, если множество $\{a\}$ (равносильно, предикат $x = a$) определимо.

Определимость в структуре $\mathbb{A}$ связана с автоморфизмами этой структуры, которые составляют группу $Aut(\mathbb{A})$: любой определимый предикат инвариантен относительно всех автоморфизмов. Это свойство часто используют для доказательства неоределимости: если предикат не инвариантен, то он не определим.

Общезначимость и ее варианты

- φ общезначима (тождественно истинна), если $\varphi^{\mathbb{A},\nu}=$И для любых $\mathbb{A}$ и ν.
- φ и ψ равносильны ($\varphi \equiv \psi$), если $\varphi^{\mathbb{A},\nu} = \psi^{\mathbb{A},\nu}$ для любых $\mathbb{A}$ и ν.
- Моделью множества предложений T называется структура, в которой все предложения из T истинны.
- Предложение φ логически следует из множества педложений T ($T \models \varphi$), если φ истинно в любой модели множества T.

Общезначимость и ее варианты

- φ общезначима $\iff \models \varphi$.
- $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ общезначима.
- $\varphi(\bar{x})$ общезначима $\iff \forall \bar{x} \varphi$ общезначима.
- $T \models (\varphi \to \psi) \iff T \cup \{\varphi\} \models \psi$.
- $T \models \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$ не имеет модели.
- $T \models \varphi \iff \bigwedge T \to \varphi$ общезначима, где T — конечное множество предложений.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $J \in F \vee \bar{J} \in F$ для любого $J \subseteq I$, где $\bar{J} = I \setminus J$.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $J \in F \vee \bar{J} \in F$ для любого $J \subseteq I$, где $\bar{J} = I \setminus J$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

1. Ультрафильтры на I — это в точности максимальные фильтры по включению.
2. Если F — ультрафильтр, то $J \notin F \iff \bar{J} \in F$ и $J \cup K \in F \iff (J \in F \vee K \in F) \in F$, для любых $J, K \subseteq I$.
3. Любой фильтр на I содержится в некотором ультрафильтре.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ — семейство σ-структур и F — фильтр на I. Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \to \bigcup_i A_i \mid \forall i(a(i) \in A_i)\}$. Определим σ-структуру $\mathbb{A}_F$ на $A/_{\equiv_F}$ так:
$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in F$,
$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$;
это определение корректно.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$ — семейство σ-структур и F — фильтр на I. Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \to \bigcup_i A_i \mid \forall i(a(i) \in A_i)\}$. Определим σ-структуру $\mathbb{A}_F$ на $A/_{\equiv_F}$ так:
$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in F$,
$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$;
это определение корректно.

ТЕОРЕМА. Для любых ультрафильтра F, σ-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ и $a_1, \ldots, a_m \in A$ имеем:
$\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \ldots, [a_m]) \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_m(i))\} \in F$.

В частности, при $m = 0$: $\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F$.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T имеет модель, то T имеет модель.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T имеет модель, то T имеет модель.

Д. Пусть $I = \{i \mid i$ — конечное подмножество $T\}$. Каждое $i \in I$ имеет модель. По аксиоме выбора, существует семейство структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ такое, что $\mathbb{A}_i \models i$ для любого $i \in I$. Пусть $G_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$. Для любых $i, k \in I$ выполнено $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$. Поэтому $F = \{A \subseteq I \mid \exists i (G_i \subseteq A)\}$ — фильтр на I. По доказанному ранее, существует ультрафильтр $H \supseteq F$.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T имеет модель, то T имеет модель.

Д. Пусть $I = \{i \mid i$ — конечное подмножество $T\}$. Каждое $i \in I$ имеет модель. По аксиоме выбора, существует семейство структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ такое, что $\mathbb{A}_i \models i$ для любого $i \in I$.
Пусть $G_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$. Для любых $i, k \in I$ выполнено $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$. Поэтому $F = \{A \subseteq I \mid \exists i (G_i \subseteq A)\}$ — фильтр на I. По доказанному ранее, существует ультрафильтр $H \supseteq F$.

Утверждаем, что ультрапроизведение $\mathbb{A}_H$ является моделью для T, т.е. $\mathbb{A}_H \models \varphi$ для любого $\varphi \in T$. Но $\{\varphi\} \in I$, откуда $G_{\{\varphi\}} \in F \subseteq H$ и $G_{\{\varphi\}} \subseteq \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in H$. По теореме об ультрапоизведении, $\mathbb{A}_H \models \varphi$.

Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двухместный предикатный символ). σ-Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двухместный предикатный символ). σ-Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество T имеет нормальную модель.

Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двухместный предикатный символ). σ-Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество T имеет нормальную модель.

Для доказательства надо применить предыдущую теорему к множеству $T \cup E_\sigma$, где E_σ — аксиомы равенства (утверждающие, что $=$ есть σ-конгруэнтность) и профакторизовать полученную модель $\mathbb{A}$ по конгруэнтности $=^{\mathbb{A}}$.

Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x),\ \forall x \forall y(x = y \to y = x),$$
$$\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z),$$

$$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)),$$
$$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n)).$$

Аксиомы равенства, нормальные модели

$\forall x(x = x)$, $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$,
$\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z)$,

$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to$
$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$,
$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n =$
$y_n \wedge P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n))$.

ТЕОРЕМА. Если теория содержит аксиомы равенства и имеет модель, то она имеет и нормальную модель.

Понижение мощности

- $\mathbb{A}$ — *подструктура* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$, $P^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ и $f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbb{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ для всех $a_1, \ldots, a_n \in A$;
- *вложение* структуры $\mathbb{A}$ в структуру $\mathbb{B}$ — это изоморфизм $\mathbb{A}$ на подструктуру структуры $\mathbb{B}$;
- $\mathbb{A}$ — *элементарная подструктура* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(\overline{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\overline{a}))$ для всех $\overline{a} \in \mathbb{A}$ и для всех формул $\varphi(\overline{x})$;
- *элементарное вложение* $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$ — это изоморфизм $\mathbb{A}$ на элементарную подструктуру структуры $\mathbb{B}$;
- $\mathbb{A}$ *элементарно эквивалентно* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

Понижение мощности

- $\mathbb{A}$ — *подструктура* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$, $P^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ и $f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbb{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ для всех $a_1, \ldots, a_n \in A$;
- *вложение* структуры $\mathbb{A}$ в структуру $\mathbb{B}$ — это изоморфизм $\mathbb{A}$ на подструктуру структуры $\mathbb{B}$;
- $\mathbb{A}$ — *элементарная подструктура* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(\overline{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\overline{a}))$ для всех $\overline{a} \in \mathbb{A}$ и для всех формул $\varphi(\overline{x})$;
- *элементарное вложение* $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$ — это изоморфизм $\mathbb{A}$ на элементарную подструктуру структуры $\mathbb{B}$;
- $\mathbb{A}$ *элементарно эквивалентно* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathsf{For}_\sigma|$.
Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathsf{For}_\sigma|$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathsf{For}_\sigma|$.
Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathsf{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность
$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ по индукции:
$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\}$,
где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены так:
$E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) \mid \overline{a} \in S_n$ и $\mathbb{A} \models \exists y\ \varphi(\overline{a}, y)\}$ и
$\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))$ для всех $e \in E_n$. $B = \bigcup_n S_n$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$. Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность $X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ по индукции: $S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\}$, где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены так: $E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) \mid \overline{a} \in S_n$ и $\mathbb{A} \models \exists y\ \varphi(\overline{a}, y)\}$ и $\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))$ для всех $e \in E_n$. $B = \bigcup_n S_n$.

Известен следующий важный результат: Не существует логики, собственным образом расширяющей логику предикатов и удовлетворяющей теоремам компактности и понижения мощности.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ. Если $\mathbb{A}$ — σ-структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$ в A, получим τ-структуру $\mathbb{B}$, называемую обогащением структуры $\mathbb{A}$. Наоборот: если $\mathbb{B}$ — τ-структура, то, "забывая" интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$, получим *σ-обеднение* $B|_\sigma$ структуры $\mathbb{B}$. Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ. Если $\mathbb{A}$ — σ-структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$ в A, получим τ-структуру $\mathbb{B}$, называемую обогащением структуры $\mathbb{A}$. Наоборот: если $\mathbb{B}$ — τ-структура, то, "забывая" интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$, получим *σ-обеднение* $B|_\sigma$ структуры $\mathbb{B}$. Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Например, пусть $\mathbb{A}$ — σ-структура, а $\sigma_A = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$ ее обогащение новыми константными символами c_a такими, что $c_a \neq c_b$ при $a \neq b$. Стандартным константным обогащением структуры $\mathbb{A}$ называется ее σ_A-обогащение, в котором новые символы интерпретируются так: $c_a \mapsto a$, для любого $a \in A$.

Аксиоматизируемые классы

- *Теория* T — множество σ-предложений.
- Теории T соответствует класс ее моделей $\mathrm{Mod}(T) = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \models T\}$
- Классу структур $K \subseteq \mathrm{Str}_\sigma$ соответствует его теория
  $\mathrm{Th}(K) = \{\varphi \in \mathrm{Sent}_\sigma \mid \forall \mathbb{A} \in K \ (\mathbb{A} \models \varphi)\}$.
- Класс структур K *аксиоматизируем*, если $K = \mathrm{Mod}(T)$ для некоторой теории T.
- Класс структур K *конечно аксиоматизируем*, если $K = \mathrm{Mod}(T)$ для некоторой конечной теории $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Это равносильно аксиоматизируемости одной формулой $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

Аксиоматизируемые классы: свойства

1. Если $T \subseteq T'$, то $\mathrm{Mod}(T) \supseteq \mathrm{Mod}(T')$;
2. Если $K \subseteq K'$, то $\mathrm{Th}(K) \supseteq Th(K')$;
3. $K \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(K))$ и $T \subseteq \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T))$;
4. Класс K аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(K))$;
5. Любое пересечение аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом. Объединение двух аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом;
6. Класс K конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K и $\mathrm{Str}_\sigma \backslash K$ аксиоматизируемы;
7. Класс K — аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

Логика высказываний

Пусть σ бесконечна и состоит только из нульместных предикатных символов $p, q, r, \ldots$. Бескванторные σ-формулы называются формулами логики высказываний (ЛВ) сигнатуры σ. Они называются также булевыми формулами (изучались в курсе дискретной математики).

Общезначимые формулы ЛВ называются также тавтологиями.

Хотя ЛВ составляет маленький фрагмент ЛП, она очень важна для применений, поскольку широко используется в проектировании микросхем.

Логика высказываний

Пусть σ бесконечна и состоит только из нульместных предикатных символов $p, q, r, \ldots$. Бескванторные σ-формулы называются формулами логики высказываний (ЛВ) сигнатуры σ. Они называются также булевыми формулами (изучались в курсе дискретной математики).

Общезначимые формулы ЛВ называются также тавтологиями.

Хотя ЛВ составляет маленький фрагмент ЛП, она очень важна для применений, поскольку широко используется в проектировании микросхем.

Множество булевых формул счетной сигнатуры, имеющих модель, является NP-полным. Вопрос “P=?NP” является одной из основных открытых проблем информатики.

Основные тавтологии

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
2. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to (\varphi \to \theta))$;
3. $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$;
4. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;
5. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;
6. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;
7. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$;
8. $(\varphi \to \theta) \to ((\psi \to \theta) \to ((\varphi \vee \psi) \to \theta))$;
9. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;
10. $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

Основные равносильности

1. $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$; 2. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$;
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$; 4. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
5. $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$; 6. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$;
7. $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$;
8. $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$;
9. $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$;
10. $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$.
11. $\neg(\forall x\varphi) \equiv \exists x(\neg\varphi)$;
12. $\neg(\exists x\varphi) \equiv \forall x(\neg\varphi)$;
13. $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$;
14. $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$;
15. $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$ (x не входит свободно в ψ);
16. $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$ (x не входит свободно в ψ);
17. $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$ (y не входит в φ);
18. $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$ (y не входит в φ).

Ограниченные кванторы

На практике часто используют так называемые формулы с ограниченными кванторами
$\forall x_{\psi(x)} \varphi$ и $\exists x_{\psi(x)} \varphi$,
где формула ψ является ограничением.

Такие выражения являются сокращениями обычных формул
$\forall x (\psi \to \varphi)$ и $\exists x (\psi \wedge \varphi)$.

Ограниченные кванторы

На практике часто используют так называемые формулы с ограниченными кванторами
$\forall x_{\psi(x)}\varphi$ и $\exists x_{\psi(x)}\varphi$,
где формула ψ является ограничением.

Такие выражения являются сокращениями обычных формул
$\forall x(\psi \to \varphi)$ и $\exists x(\psi \wedge \varphi)$.

Законы Де Моргана справедливы и для ограниченных кванторов:
$\neg(\forall x_{\psi}\varphi) \equiv \exists x_{\psi}(\neg\varphi)$,
$\neg(\exists x_{\psi}\varphi) \equiv \forall x_{\psi}(\neg\varphi)$.

Свойства равносильности

- Отношение $\equiv$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- Если $\varphi \equiv \psi$ и $\varphi_1 \equiv \psi_1$, то $\varphi \wedge \varphi_1 \equiv \psi \wedge \psi_1$, $\varphi \vee \varphi_1 \equiv \psi \vee \psi_1$, $\varphi \to \varphi_1 \equiv \psi \to \psi_1$, $\neg\varphi \equiv \neg\psi$ и $\forall x\varphi \equiv \forall x\psi$,$\exists x\varphi \equiv \exists x\psi$ для любой предметной переменной x.
- Пусть ψ — подформула формулы φ, а φ' — результат замены некоторого вхождения ψ в φ на формулу ψ'. Тогда из $\psi \equiv \psi'$ следует $\varphi \equiv \varphi'$.

ДНФ и КНФ

Элементарной дизъюнкцией называется формула, являющаяся либо переменной, либо отрицанием переменной, либо дизъюнкцией нескольких переменных и отрицаний переменных.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется формула, являющаяся либо элементарной дизъюнкцией, либо конъюнкцией нескольких элементарных дизъюнкций.

Элементарные конъюнкции и ДНФ определяются так же, с заменой $\wedge$ на $\vee$ и наоборот.

ДНФ и КНФ

Элементарной дизъюнкцией называется формула, являющаяся либо переменной, либо отрицанием переменной, либо дизъюнкцией нескольких переменных и отрицаний переменных.
Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется формула, являющаяся либо элементарной дизъюнкцией, либо конъюнкцией нескольких элементарных дизъюнкций.
Элементарные конъюнкции и ДНФ определяются так же, с заменой $\wedge$ на $\vee$ и наоборот.

Для любой формулы найдется равносильная ей КНФ.
Алгоритм приведения к КНФ (ДНФ):
Исключаем все импликации. По законам де Моргана проносим все отрицания как можно дальше вглубь формулы. Убираем все двойные отрицания. Раскрываем все скобки по закону дистрибутивности 9 (10).

Формулы предваренного вида

Формулу называют предваренной, если она либо бескванторная, либо имеет вид $Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi$, где Q_i — кванторы, x_i — попарно различные переменные и формула ψ не содержит кванторов.

Формулы предваренного вида

Формулу называют предваренной, если она либо бескванторная, либо имеет вид $Q_1x_1 \ldots Q_kx_k\psi$, где Q_i — кванторы, x_i — попарно различные переменные и формула ψ не содержит кванторов.

Любая формула логики предикатов равносильна некоторой предваренной формуле. Алгоритм приведения к предваренному виду:
Исключаем все импликации. По законам де Моргана проносим все отрицания как можно дальше вглубь формулы. Убираем все двойные отрицания. Переименовываем все связанные переменные по равносильностям 17, 18 так, чтобы новые переменные отличались от всех свободных переменных. Выносим по очереди кванторы вперед по равносильностям 13 — 16.

Элиминация кванторов

Говорят, что формулы $\varphi(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x})$ *равносильны в теории* T ($\varphi \equiv_T \psi$), если $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Элиминация кванторов

Говорят, что формулы $\varphi(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x})$ *равносильны в теории* T ($\varphi \equiv_T \psi$), если $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Теория T *допускает элиминацию кванторов*, если любая формула $\varphi(\bar{x})$ равносильна подходящей бескванторной формуле $\psi(\bar{x})$ в теории T.

Элиминация кванторов

Говорят, что формулы $\varphi(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x})$ *равносильны в теории* T ($\varphi \equiv_T \psi$), если $T \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Теория T *допускает элиминацию кванторов*, если любая формула $\varphi(\bar{x})$ равносильна подходящей бескванторной формуле $\psi(\bar{x})$ в теории T.

Аналогично, структура $\mathbb{A}$ допускает элиминацию кванторов, если любая формула $\varphi(\bar{x})$ равносильна подходящей бескванторной формуле $\psi(\bar{x})$ в этой структуре.
$\mathbb{A}$ допускает элиминацию кванторов в точности тогда, когда теория $Th(\mathbb{A}) = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ допускает элиминацию кванторов (эта теория называется теорией структуры $\mathbb{A}$).

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

ТЕОРЕМА. Упорядоченное поле $(\mathbb{R}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ вещественных чисел допускает элиминацию кванторов.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

ТЕОРЕМА. Упорядоченное поле $(\mathbb{R}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ вещественных чисел допускает элиминацию кванторов.

Далее все формулы имеют сигнатуру $\{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — набор различных переменных, а структура из формулировки обозначается $\mathbb{R}$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

ТЕОРЕМА. Упорядоченное поле $(\mathbb{R}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ вещественных чисел допускает элиминацию кванторов.

Далее все формулы имеют сигнатуру $\{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — набор различных переменных, а структура из формулировки обозначается $\mathbb{R}$.

1) Достаточно: для любой бескванторной ф. $\theta(x, \bar{x})$ ф. $\varphi(\bar{x}) = \exists x \theta(x, \bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ подходящей бесквант. ф.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

ТЕОРЕМА. Упорядоченное поле $(\mathbb{R}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ вещественных чисел допускает элиминацию кванторов.

Далее все формулы имеют сигнатуру $\{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — набор различных переменных, а структура из формулировки обозначается $\mathbb{R}$.

1) Достаточно: для любой бескванторной ф. $\theta(x, \bar{x})$ ф. $\varphi(\bar{x}) = \exists x \theta(x, \bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ подходящей бесквант. ф.

2) Любая бескванторная ф. $\psi(\bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ дизъюнкции ф., каждая из которых является конъюнкцией атомарных ф. $t = t_1$, $t < t_1$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

ТЕОРЕМА. Упорядоченное поле $(\mathbb{R}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ вещественных чисел допускает элиминацию кванторов.

Далее все формулы имеют сигнатуру $\{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — набор различных переменных, а структура из формулировки обозначается $\mathbb{R}$.

1) Достаточно: для любой бескванторной ф. $\theta(x, \bar{x})$ ф. $\varphi(\bar{x}) = \exists x \theta(x, \bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ подходящей бесквант. ф.

2) Любая бескванторная ф. $\psi(\bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ дизъюнкции ф., каждая из которых является конъюнкцией атомарных ф. $t = t_1$, $t < t_1$.
Отношение $(t = t_1)^{\mathbb{R}}$ (соотв. $(t < t_1)^{\mathbb{R}}$) совпадает с множеством всех решений уравнения $Q(\bar{x}) = 0$ (соотв. неравенства $Q(\bar{x}) > 0$), для подходящего $Q \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$. Поэтому $\psi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ – конечное объединение множеств всех решений таких системы уравнений и неравенств. Такие объединения называются *полуалгебраическими множествами*.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Для бескванторной формулы $\theta(x, \bar{x})$ докажем, что ф. $\varphi(\bar{x}) = \exists x \theta(x, \bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ подходящей бескванторной ф. (т.е. $\varphi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ полуалгебраическое). Согласно предыдущему слайду, можем найти полиномы $Q_1, \ldots, Q_k$ из кольца $\mathbb{Z}[x, \bar{x}] = K[x]$, где $K = \mathbb{Z}[\bar{x}]$, определяющие полуалгебраическое множество $\theta(x, \bar{x})^{\mathbb{R}}$, содержащееся в $\mathbb{R}^{m+1}$. При фиксировании значений $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, $Q_1^{\bar{x}}, \ldots, Q_k^{\bar{x}}$ становятся вещественными полиномами; пусть $\alpha_1 < \cdots < \alpha_l$ — все вещественные корни всех ненулевых полиномов $Q_1^{\bar{x}}, \ldots, Q_k^{\bar{x}}$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Для бескванторной формулы $\theta(x,\bar{x})$ докажем, что ф. $\varphi(\bar{x}) = \exists x\theta(x,\bar{x})$ равносильна в $\mathbb{R}$ подходящей бескванторной ф. (т.е. $\varphi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ полуалгебраическое). Согласно предыдущему слайду, можем найти полиномы $Q_1,\ldots,Q_k$ из кольца $\mathbb{Z}[x,\bar{x}] = K[x]$, где $K = \mathbb{Z}[\bar{x}]$, определяющие полуалгебраическое множество $\theta(x,\bar{x})^{\mathbb{R}}$, содержащееся в $\mathbb{R}^{m+1}$. При фиксировании значений $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, $Q_1^{\bar{x}},\ldots,Q_k^{\bar{x}}$ становятся вещественными полиномами; пусть $\alpha_1 < \cdots < \alpha_l$ — все вещественные корни всех ненулевых полиномов $Q_1^{\bar{x}},\ldots,Q_k^{\bar{x}}$.

Пусть $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}}$ – таблица размера $k \times (2l+1)$, строки которой помечены полиномами $\mathcal{Q} = \{Q_1,\ldots,Q_k\}$, столбцы помечены интервалами
$(-\infty,\alpha_1),[\alpha_1,\alpha_1],(\alpha_1\alpha_2),[\alpha_2,\alpha_2],\ldots,[\alpha_l,\alpha_l],(\alpha_l,+\infty)$,
а любая клетка (i,j) содержит $=0$, >0, или <0, в зависимости от знака $Q_i^{\bar{x}}$ в интервале I_j.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Определим эквивалентность $\sim_{\mathcal{Q}}$ на $\mathbb{R}^m$: $\bar{x} \sim_{\mathcal{Q}} \bar{y}$, если $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}} = T_{\bar{y}}^{\mathcal{Q}}$. Тогда соответствующее фактор-множество конечно. Поскольку $\varphi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ инвариантно относительно $\sim_{\mathcal{Q}}$, получаем:

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Определим эквивалентность $\sim_{\mathcal{Q}}$ на $\mathbb{R}^m$: $\bar{x} \sim_{\mathcal{Q}} \bar{y}$, если $T^{\mathcal{Q}}_{\bar{x}} = T^{\mathcal{Q}}_{\bar{y}}$. Тогда соответствующее фактор-множество конечно. Поскольку $\varphi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ инвариантно относительно $\sim_{\mathcal{Q}}$, получаем:

3) Достаточно доказать, что любой класс $[\bar{x}]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$ – полуалгебраическое множество.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Определим эквивалентность $\sim_{\mathcal{Q}}$ на $\mathbb{R}^m$: $\bar{x} \sim_{\mathcal{Q}} \bar{y}$, если $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}} = T_{\bar{y}}^{\mathcal{Q}}$. Тогда соответствующее фактор-множество конечно. Поскольку $\varphi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ инвариантно относительно $\sim_{\mathcal{Q}}$, получаем:

3) Достаточно доказать, что любой класс $[\bar{x}]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$ – полуалгебраическое множество.

4) Если все классы эквивалентности для $Q_1, \ldots, Q_k, Q_{k+1}$ полуалгебраические, то и все классы эквивалентности для $Q_1, \ldots, Q_k$ полуалгебраические.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Определим эквивалентность $\sim_{\mathcal{Q}}$ на $\mathbb{R}^m$: $\bar{x} \sim_{\mathcal{Q}} \bar{y}$, если $T^{\mathcal{Q}}_{\bar{x}} = T^{\mathcal{Q}}_{\bar{y}}$. Тогда соответствующее фактор-множество конечно. Поскольку $\varphi(\bar{x})^{\mathbb{R}}$ инвариантно относительно $\sim_{\mathcal{Q}}$, получаем:

3) Достаточно доказать, что любой класс $[\bar{x}]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$ – полуалгебраическое множество.

4) Если все классы эквивалентности для $Q_1, \ldots, Q_k, Q_{k+1}$ полуалгебраические, то и все классы эквивалентности для $Q_1, \ldots, Q_k$ полуалгебраические.

5) Пусть $[\mathcal{Q}]$ — замыкание $\mathcal{Q}$ относительно следующих операций на $K[x]$, $K = \mathbb{Z}[\bar{x}]$: взятие старшего коэффициента; вычеркивание старшего члена; взятие производной; сопоставление полиномам P, Q остатка от деления $P \cdot c^{p-q+1}$ на Q, где c — старший коэффициент Q, а $p \geq q$ — степени P и Q, соответственно.
Тогда множество $[\mathcal{Q}]$ конечно.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Можем считать, что $Q_1, \dots, Q_k$ замкнуто относительно всех четырех операций и упорядочено по неубыванию степеней. Пусть j – наибольший индекс полинома нулевой степени и $\mathcal{Q}_0 = \{Q_1, \dots, Q_j\}$. Теперь достаточно проверить, что $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}}$ однозначно восстанавливается по $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}_0}$. Действительно, тогда $\bar{y} \in [\bar{x}]_{\mathcal{Q}} \leftrightarrow \bigwedge\{Q(\bar{y})s_Q \mid Q \in \mathcal{Q}_0\}$, где s_Q – знак из Q-й строки и единственного столбца таблицы $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}_0}$. Поэтому $[\bar{x}]_{\mathcal{Q}}$ – полуалгебраическое множество.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Можем считать, что $Q_1, \dots, Q_k$ замкнуто относительно всех четырех операций и упорядочено по неубыванию степеней.
Пусть j – наибольший индекс полинома нулевой степени и $\mathcal{Q}_0 = \{Q_1, \dots, Q_j\}$. Теперь достаточно проверить, что $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}}$ однозначно восстанавливается по $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}_0}$. Действительно, тогда $\bar{y} \in [\bar{x}]_{\mathcal{Q}} \leftrightarrow \bigwedge\{Q(\bar{y})s_Q \mid Q \in \mathcal{Q}_0\}$, где s_Q – знак из Q-й строки и единственного столбца таблицы $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}_0}$. Поэтому $[\bar{x}]_{\mathcal{Q}}$ – полуалгебраическое множество.

Остается проверить, что при любом $i \in [j, k)$ строка $P = Q_{i+1}$ однозначно восстанавливается по предыдущим строкам таблицы $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}}$. Сначала проверим, что восстанавливаются значения в столбцах $[\alpha, \alpha]$ таблицы для $\{Q_1, \dots, Q_i\}$, а потом – в остальных столбцах (включая возможные новые).
$P = ax^p + bx^{p-1} + \cdots$ ненулевой, поэтому $a \in K[\bar{x}]$ – тоже.
При фиксации $\bar{x} \in \mathbb{R}$ возможно $a(\bar{x}) = 0$ (можно узнать, т.к. $a \in \{Q_1, \dots, Q_i\}$). Тогда $Q = bx^{p-1} + \cdots \in \{Q_1, \dots, Q_i\}$; копируем строку Q.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Пусть $a(\bar{x}) \neq 0$. Найдем $Q = cx^q + \cdots \in \{Q_1, \ldots, Q_i\}$, $c \neq 0$, для которого α является корнем, и поделим $P \cdot c^{p-q+1} = Q \cdot U + R$, $R \in \{Q_1, \ldots, Q_i\}$. Поскольку знаки $c, R(\alpha)$ знаем из таблицы, можно найти и знак $P(\alpha)$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Пусть $a(\bar{x}) \neq 0$. Найдем $Q = cx^q + \dots \in \{Q_1, \dots, Q_i\}$, $c \neq 0$, для которого α является корнем, и поделим $P \cdot c^{p-q+1} = Q \cdot U + R$, $R \in \{Q_1, \dots, Q_i\}$. Поскольку знаки $c, R(\alpha)$ знаем из таблицы, можно найти и знак $P(\alpha)$.

Остается узнать, в каких открытых интервалах (α, α') таблицы есть новый корень P (увидим, что более одного корня быть не может) и найти знаки P в полученных новых интервалах. $P'_x \in \{Q_1, \dots, Q_i\}$. Если знаки $P(\alpha)$ и $P(\alpha')$ одинаковы, то в интервале (α, α') нет новых корней (т. Ролля) и знак P в этом интервале понятен; аналогично в случае, если хотя бы один из концов интервала – корень P. Если же знаки разные, то корень есть (т. о среднем значении), причем единственный (т. Ролля), и знаки в новых интервалах тоже понятны.

Элиминация кванторов в $\mathbb{R}$

Пусть $a(\bar{x}) \neq 0$. Найдем $Q = cx^q + \cdots \in \{Q_1, \ldots, Q_i\}$, $c \neq 0$, для которого α является корнем, и поделим $P \cdot c^{p-q+1} = Q \cdot U + R$, $R \in \{Q_1, \ldots, Q_i\}$. Поскольку знаки $c, R(\alpha)$ знаем из таблицы, можно найти и знак $P(\alpha)$.

Остается узнать, в каких открытых интервалах (α, α') таблицы есть новый корень P (увидим, что более одного корня быть не может) и найти знаки P в полученных новых интервалах. $P'_x \in \{Q_1, \ldots, Q_i\}$. Если знаки $P(\alpha)$ и $P(\alpha')$ одинаковы, то в интервале (α, α') нет новых корней (т. Ролля) и знак P в этом интервале понятен; аналогично в случае, если хотя бы один из концов интервала – корень P. Если же знаки разные, то корень есть (т. о среднем значении), причем единственный (т. Ролля), и знаки в новых интервалах тоже понятны.

Случай бесконечных интервалов разбирается аналогично, поскольку знаки P на бесконечности определяются знаком ненулевого числа $a(\bar{x})$, который знаем из таблицы.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

ТЕОРЕМА. Поле $(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$ комплексных чисел допускает элиминацию кванторов.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

ТЕОРЕМА. Поле $(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$ комплексных чисел допускает элиминацию кванторов.

Доказательство разобьем на вспомогательные утверждения, в которых все формулы имеют сигнатуру $\{=, +, \cdot, 0, 1\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — набор различных переменных, а структура из формулировки теоремы сокращенно обозначается $\mathbb{C}$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

ТЕОРЕМА. Поле $(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$ комплексных чисел допускает элиминацию кванторов.

Доказательство разобьем на вспомогательные утверждения, в которых все формулы имеют сигнатуру $\{=, +, \cdot, 0, 1\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — набор различных переменных, а структура из формулировки теоремы сокращенно обозначается $\mathbb{C}$.

1) Достаточно проверить, что для любой бескванторной формулы $\theta(x, \bar{x})$ формула $\varphi(\bar{x}) = \exists x \theta(x, \bar{x})$ равносильна в $\mathbb{C}$ подходящей бескванторной формуле.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

ТЕОРЕМА. Поле $(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$ комплексных чисел допускает элиминацию кванторов.

Доказательство разобьем на вспомогательные утверждения, в которых все формулы имеют сигнатуру $\{=, +, \cdot, 0, 1\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — набор различных переменных, а структура из формулировки теоремы сокращенно обозначается $\mathbb{C}$.

1) Достаточно проверить, что для любой бескванторной формулы $\theta(x, \bar{x})$ формула $\varphi(\bar{x}) = \exists x \theta(x, \bar{x})$ равносильна в $\mathbb{C}$ подходящей бескванторной формуле.

2) Любая бескванторная формула $\psi(\bar{x})$ равносильна в $\mathbb{C}$ дизъюнкции нескольких формул, каждая из которых является конъюнкцией нескольких формул вида $t = t_1$, $\neg t = t_1$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

Отношение $(t = t_1)^{\mathbb{C}}$ совпадает с множеством всех решений уравнения $Q(\bar{x}) = 0$, для подходящего полинома $Q \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$. Поэтому предикат $\psi(\bar{x})^{\mathbb{C}}$ (рассматриваемый как подмножество $\mathbb{C}^m$) совпадает с конечным объединением множеств всех решений системы уравнений и отрицаний уравнений указанного вида. Такие конечные объединения называются *алгебраическими множествами*.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

Отношение $(t = t_1)^{\mathbb{C}}$ совпадает с множеством всех решений уравнения $Q(\bar{x}) = 0$, для подходящего полинома $Q \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$. Поэтому предикат $\psi(\bar{x})^{\mathbb{C}}$ (рассматриваемый как подмножество $\mathbb{C}^m$) совпадает с конечным объединением множеств всех решений системы уравнений и отрицаний уравнений указанного вида. Такие конечные объединения называются *алгебраическими множествами*.

Для бескванторной формулы $\theta(x, \bar{x})$ докажем, что формула $\varphi(\bar{x}) = \exists x \theta(x, \bar{x})$ равносильна в $\mathbb{C}$ подходящей бескванторной формуле (т.е. $\varphi(\bar{x})^{\mathbb{C}}$ алгебраическое). Согласно предыдущему слайду, можем найти полиномы $Q_1, \dots, Q_k$ из кольца $\mathbb{Z}[x, \bar{x}] = K[x]$, где $K = \mathbb{Z}[\bar{x}]$, определяющие алгебраическое множество $\theta(x, \bar{x})^{\mathbb{C}}$, содержащееся в $\mathbb{C}^{m+1}$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

При фиксировании значений $\bar{x} \in \mathbb{C}^m$, $Q_1^{\bar{x}}, \ldots, Q_k^{\bar{x}}$ становятся комплексными полиномами; пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — все комплексные корни всех ненулевых полиномов из $Q_1^{\bar{x}}, \ldots, Q_k^{\bar{x}}$.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

При фиксировании значений $\bar{x} \in \mathbb{C}^m$, $Q_1^{\bar{x}}, \ldots, Q_k^{\bar{x}}$ становятся комплексными полиномами; пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — все комплексные корни всех ненулевых полиномов из $Q_1^{\bar{x}}, \ldots, Q_k^{\bar{x}}$.

Пусть $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}}$ — таблица размера $k \times (l+1)$, строки которой помечены полиномами $\{Q_1, \ldots, Q_k\} = \mathcal{Q}$, столбцы помечены корнями $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ (плюс еще один столцбец, помеченный $*$, соответствующий дополнению до множества всех корней), и любая клетка (i, j) содержит $= 0$ или $\neq 0$ в зависимости от значения $Q_i^{\bar{x}}$ в сответствующем корне (или в дополнении до множества всех корней).

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

При фиксировании значений $\bar{x} \in \mathbb{C}^m$, $Q_1^{\bar{x}}, \dots, Q_k^{\bar{x}}$ становятся комплексными полиномами; пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — все комплексные корни всех ненулевых полиномов из $Q_1^{\bar{x}}, \dots, Q_k^{\bar{x}}$.

Пусть $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}}$ — таблица размера $k \times (l+1)$, строки которой помечены полиномами $\{Q_1, \dots, Q_k\} = \mathcal{Q}$, столбцы помечены корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ (плюс еще один столцбец, помеченный $*$, соответствующий дополнению до множества всех корней), и любая клетка (i, j) содержит $= 0$ или $\neq 0$ в зависимости от значения $Q_i^{\bar{x}}$ в сответствующем корне (или в дополнении до множества всех корней).

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathbb{C}^m$ соотношением: $\bar{x} \sim_{\mathcal{Q}} \bar{y}$, если $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}} = T_{\bar{y}}^{\mathcal{Q}}$ с точностью до перестановки столбцов. Тогда соответствующее фактор-множество конечно. Поскольку $\varphi(\bar{x})^{\mathbb{C}}$ инвариантно относительно $\sim_{\mathcal{Q}}$, получаем:

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

3) Достаточно: для любых $Q_1, \ldots, Q_k \in K[x]$, любое $[\bar{x}]_{\mathcal{Q}}$ – алгебраическое.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

3) Достаточно: для любых $Q_1, \ldots, Q_k \in K[x]$, любое $[\bar{x}]_{\mathcal{Q}}$ – алгебраическое.

4) Если все классы для $Q_1, \ldots, Q_k, Q_{k+1}$ алгебраические, то и все классы для $Q_1, \ldots, Q_k$ алгебраические.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

3) Достаточно: для любых $Q_1, \ldots, Q_k \in K[x]$, любое $[\bar{x}]_{\mathcal{Q}}$ – алгебраическое.

4) Если все классы для $Q_1, \ldots, Q_k, Q_{k+1}$ алгебраические, то и все классы для $Q_1, \ldots, Q_k$ алгебраические.
5) Замыкание $[\mathcal{Q}]$ множества $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ относительно тех же операций, что и выше, конечно.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

3) Достаточно: для любых $Q_1, \ldots, Q_k \in K[x]$, любое $[\bar{x}]_{\mathcal{Q}}$ – алгебраическое.

4) Если все классы для $Q_1, \ldots, Q_k, Q_{k+1}$ алгебраические, то и все классы для $Q_1, \ldots, Q_k$ алгебраические.
5) Замыкание $[\mathcal{Q}]$ множества $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ относительно тех же операций, что и выше, конечно.
6) Пусть $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ – замкнутое множество, упорядоченное по неубыванию степеней, j – наибольший индекс полинома нулевой степени, и $\mathcal{Q}_0 = \{Q_1, \ldots, Q_j\}$. Тогда $\bar{y} \in [\bar{x}]_{\mathcal{Q}} \leftrightarrow \bigwedge\{Q(\bar{y})s_Q \mid Q \in \mathcal{Q}_0\}$, где s_Q – знак из Q-й строки и единственного столбца таблицы $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}_0}$. Поэтому $[\bar{x}]_{\mathcal{Q}}$ – алгебраическое множество.

Элиминация кванторов в $\mathbb{C}$

3) Достаточно: для любых $Q_1, \dots, Q_k \in K[x]$, любое $[\bar{x}]_{\mathcal{Q}}$ – алгебраическое.

4) Если все классы для $Q_1, \dots, Q_k, Q_{k+1}$ алгебраические, то и все классы для $Q_1, \dots, Q_k$ алгебраические.
5) Замыкание $[\mathcal{Q}]$ множества $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ относительно тех же операций, что и выше, конечно.
6) Пусть $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ – замкнутое множество, упорядоченное по неубыванию степеней, j – наибольший индекс полинома нулевой степени, и $\mathcal{Q}_0 = \{Q_1, \dots, Q_j\}$. Тогда $\bar{y} \in [\bar{x}]_{\mathcal{Q}} \leftrightarrow \bigwedge\{Q(\bar{y})s_Q \mid Q \in \mathcal{Q}_0\}$, где s_Q – знак из Q-й строки и единственного столбца таблицы $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}_0}$. Поэтому $[\bar{x}]_{\mathcal{Q}}$ – алгебраическое множество.
Достаточно проверить, что $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}}$ однозначно восстанавливается по $T_{\bar{x}}^{\mathcal{Q}_0}$. Это доказывается проще, чем для R, поскольку теперь для обнаружения новых корней Q_{i+1} достаточно отслеживать кратности корней. Это делается с помощью корней производных, которые все находятся среди $Q_1, \dots, Q_i$.

Основной результат ЛП

Множество всех общезначимых предложений любой конечной сигнатуры перечислимо, т.е. существует алгоритм, который перечисляет все элементы этого множества, и никакие другие предложения. Схема доказательства:

Основной результат ЛП

Множество всех общезначимых предложений любой конечной сигнатуры перечислимо, т.е. существует алгоритм, который перечисляет все элементы этого множества, и никакие другие предложения. Схема доказательства:

1) фиксируются некоторые конкретные простые общезначимые предложения (называемые аксиомами);
2) фиксируются некоторые простые правила, позволяющие чисто синтаксически выводить одни формулы из других;
3) доказывается, что многократное применение правил вывода к аксиомам и уже выведенным формулам порождает все общезначимые формулы.

Основной результат ЛП

Множество всех общезначимых предложений любой конечной сигнатуры перечислимо, т.е. существует алгоритм, который перечисляет все элементы этого множества, и никакие другие предложения. Схема доказательства:

1) фиксируются некоторые конкретные простые общезначимые предложения (называемые аксиомами);
2) фиксируются некоторые простые правила, позволяющие чисто синтаксически выводить одни формулы из других;
3) доказывается, что многократное применение правил вывода к аксиомам и уже выведенным формулам порождает все общезначимые формулы.

Глубина основного результата в том, что определение Тарского не дает никакой верхней границы для вычислительной сложности множества общезначимых предложений. Известно, что не существует логики, расширяющей ЛП и удовлетворяющей теоремам компактности и основному результату.

Исчисление предикатов ИП$_\sigma$

Аксиомы:
1) Основные тавтологии;

Исчисление предикатов ИП$_\sigma$

Аксиомы:
1) Основные тавтологии;

2) Кванторные аксиомы (где $\varphi(t)$ — результат подстановки терма t вместо всех свободных вхождений x в формулу $\varphi(x)$; обозначение $\varphi(t)$ применяется только при условии, что никакая переменная терма t не оказывается связанной в результате этой подстановки):
$\forall x\varphi(x) \to \varphi(t)$ и $\varphi(t) \to \exists x\varphi(x)$;

Исчисление предикатов ИП$_\sigma$

Аксиомы:
1) Основные тавтологии;

2) Кванторные аксиомы (где $\varphi(t)$ — результат подстановки терма t вместо всех свободных вхождений x в формулу $\varphi(x)$; обозначение $\varphi(t)$ применяется только при условии, что никакая переменная терма t не оказывается связанной в результате этой подстановки):
$\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$ и $\varphi(t) \to \exists x \varphi(x)$;

3) Аксиомы равенства для сигнатуры σ.

Исчисление предикатов ИП$_\sigma$

Аксиомы:
1) Основные тавтологии;

2) Кванторные аксиомы (где $\varphi(t)$ — результат подстановки терма t вместо всех свободных вхождений x в формулу $\varphi(x)$; обозначение $\varphi(t)$ применяется только при условии, что никакая переменная терма t не оказывается связанной в результате этой подстановки):
$\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$ и $\varphi(t) \to \exists x \varphi(x)$;

3) Аксиомы равенства для сигнатуры σ.

Правила: $\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$, $\frac{\psi \to \varphi(y)}{\psi \to \forall x \varphi(x)}$, $\frac{\varphi(y) \to \psi}{\exists x \varphi(x) \to \psi}$,

где y — переменная, не входящая свободно в нижнюю формулу.

Свойства аксиом и правил

- Все аксиомы общезначимы.
- Если формула получена по правилу вывода из формул, тождественно истинных в $\mathbb{A}$, то тогда она тождественно истинна в $\mathbb{A}$.
- Если в любой аксиоме (любом правиле вывода) заменить все вхождения константного символа c на переменную z, не входящую в эту аксиому (это правило вывода), то получим аксиому (правило вывода). Неформально говоря, константы похожи на “свежие” переменные.

Выводимость

Выводом формулы φ из множества формул T называется последовательность формул $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$, где φ_i либо аксиома, либо принадлежит T, либо получается из предыдущих по одному из правил.

Формула φ *выводима* из множества формул T, если существует вывод формулы φ из T. Обозначается $T \vdash \varphi$. При $T = \emptyset$ говорят просто о выводимости.

Выводимость

Выводом формулы φ из множества формул T называется последовательность формул $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$, где φ_i либо аксиома, либо принадлежит T, либо получается из предыдущих по одному из правил.

Формула φ *выводима* из множества формул T, если существует вывод формулы φ из T. Обозначается $T \vdash \varphi$. При $T = \emptyset$ говорят просто о выводимости.

Основной результат об ИП$_\sigma$:
φ выводимо $\iff$ φ общезначимо;
Более общо: $T \vdash \varphi \iff T \models \varphi$.

Пример вывода

Следующая последовательность является выводом формулы $\varphi \to \varphi$:

Пример вывода

Следующая последовательность является выводом формулы $\varphi \to \varphi$:

1) $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$
(основная тавтология 1)

2) $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$
(основная тавтология 2)

3) $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$
(из 1 и 2 по $\to$-правилу)

4) $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$
(основная тавтология 1)

5) $\varphi \to \varphi$
(из 4 и 3 по $\to$-правилу)

Свойства выводимости

1. $T \vdash (\varphi \to \psi) \iff T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$
   (φ предложение, ψ формула, T множество формул).
2. Если $\varphi \in T$, то $T \vdash \varphi$.
3. Если $T \vdash \varphi$, то $T_0 \vdash \varphi$ для подходящего конечного множества $T_0 \subseteq T$.
4. Если $S \vdash \varphi$ и все формулы множества S выводимы из T, то $T \vdash \varphi$.
5. Если $T \cup \{\varphi\} \vdash \theta$ и $T \cup \{\psi\} \vdash \theta$, то $T \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \theta$ (φ и ψ — предложения).
6. Если $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ и $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$, то $T \vdash \neg\varphi$ (φ — предложение).
7. $T \vdash \varphi \wedge \psi \iff T \vdash \varphi$ и $T \vdash \psi$.

Доказательство свойства 1

Пусть $T \vdash (\varphi \to \psi)$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — вывод $(\varphi \to \psi) = \varphi_k$ из T. Тогда $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, φ, ψ — вывод ψ из $T \cup \{\varphi\}$.

Обратно, пусть $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Соотношение $T \vdash (\varphi \to \psi)$ будем доказывать индукцией по длине вывода $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ формулы $\psi = \varphi_k$ из $T \cup \{\varphi\}$. При $k = 1$ (базис индукции) формула $\psi = \varphi_1$ либо аксиома, либо принадлежит множеству $T \cup \{\varphi\}$. В первом случае искомым выводом формулы $\varphi \to \psi$ из T является ψ, $\psi \to (\varphi \to \psi)$, $\varphi \to \psi$. Это рассуждение проходит и в случае $\psi \in T$. Наконец, если $\psi = \varphi$, то искомый вывод состоит из единственной тавтологии $\varphi \to \varphi$.

Доказательство свойства 1

Пусть $k > 1$, и предположим, что для выводов, длина которых меньше k, утверждение $T \vdash (\varphi \to \psi)$ справедливо. При $1 \leq i < k$ последовательность $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ есть вывод (длины i) φ_i из $T \cup \{\varphi\}$, и, по индукции, имеем $T \vdash (\varphi \to \varphi_i)$. По определению вывода, φ_k либо аксиома, либо принадлежит $T \cup \{\varphi\}$, либо выведена из предыдущих формул $\varphi_i (i < k)$ по одному из правил вывода. В первых двух случаях доказательство $T \vdash (\varphi \to \varphi_k)$ как в базисе индукции.

Пусть φ_k выведена из φ_i и φ_j по $\to$-правилу. Тогда $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_k$ и есть деревья вывода E и D формул $\varphi \to \varphi_i$ и $\varphi \to \varphi_j$ из T. Из тавтологии $A = (\varphi \to \varphi_i) \to ((\varphi \to (\varphi_i \to \varphi_k)) \to (\varphi \to \varphi_k))$ и деревьев E и D легко строится дерево вывода $\varphi \to \varphi_k$ из T.

Другие свойства выводимости

Есть много других свойств выводимости, которые формализуют способы рассуждения, широко используемые в математике. Приведем некоторые из них, справедливые для любого множества формул T и любых формул φ, ψ и θ:

1) $\dfrac{T \vdash (\varphi \to \psi); T \vdash (\psi \to \theta)}{T \vdash (\varphi \to \theta)}$,

2) $\dfrac{T \vdash \varphi; T \vdash (\varphi \to \psi)}{T \vdash \psi}$,

3) $\dfrac{T \vdash \neg\neg\varphi}{T \vdash \varphi}$,

4) $\dfrac{T \vdash \varphi; T \vdash \psi}{T \vdash (\varphi \wedge \psi)}$,

5) $\dfrac{T \vdash (\varphi \wedge \psi)}{T \vdash \varphi}$,

6) $\dfrac{T \vdash (\varphi \wedge \psi)}{T \vdash \psi}$,

7) $\dfrac{T \vdash \varphi}{T \vdash (\varphi \vee \psi)}$,

8) $\dfrac{T \vdash \psi}{T \vdash (\varphi \vee \psi)}$.

Квазивыводы

Свойства выводимости можно применять для доказательства соотношений вида $T \vdash \varphi$, строя деревья, называемые квазивыводами. Приведем квазивывод соотношения $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \varphi}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash (\varphi \vee \neg\varphi); \neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)}}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \neg\varphi}}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash (\varphi \vee \neg\varphi); \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)}}{\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)}}{\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)}$$

Исчисление высказываний

ИВ — фрагмент ИП, позволяющий выводить бескванторные предложения сигнатуры, состоящей из счетного множества нульместных предикатных символов $p_0, p_1, \ldots$. Формулы ИВ — это булевы комбинации высказывательных переменных. Аксиомы ИВ — основные тавтологии, единственное правило вывода — $\to$-правило.

Исчисление высказываний

ИВ — фрагмент ИП, позволяющий выводить бескванторные предложения сигнатуры, состоящей из счетного множества нульместных предикатных символов $p_0, p_1, \ldots$. Формулы ИВ — это булевы комбинации высказывательных переменных. Аксиомы ИВ — основные тавтологии, единственное правило вывода — $\to$-правило.

ТЕОРЕМА. В ИВ выводимы в точности все тавтологии (общезначимые формулы).

В одну сторону понятно, остается доказать, что любая тавтология выводима.

Исчисление высказываний

ИВ — фрагмент ИП, позволяющий выводить бескванторные предложения сигнатуры, состоящей из счетного множества нульместных предикатных символов $p_0, p_1, \ldots$. Формулы ИВ — это булевы комбинации высказывательных переменных. Аксиомы ИВ — основные тавтологии, единственное правило вывода — $\to$-правило.

ТЕОРЕМА. В ИВ выводимы в точности все тавтологии (общезначимые формулы).

В одну сторону понятно, остается доказать, что любая тавтология выводима.

ЛЕММА. Для любой формулы $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n)$ и любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из {И, Л} справедливо $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash \varphi^{\beta}$, где $\varphi^{\text{И}} = \varphi$, $\varphi^{\text{Л}} = \neg\varphi$, и $\beta = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Доказательство леммы

Индукция по φ. При $\varphi = p_i$ понятно. Предположим, что для формул ψ и θ лемма верна, а φ имеет один из видов: $\psi \wedge \theta$, $\psi \vee \theta$, $\psi \to \theta$, $\neg\psi$. Все случаи аналогичны, поэтому рассмотрим лишь $\varphi = (\psi \to \theta)$.

Доказательство леммы

Индукция по φ. При $\varphi = p_i$ понятно. Предположим, что для формул ψ и θ лемма верна, а φ имеет один из видов: $\psi \wedge \theta$, $\psi \vee \theta$, $\psi \to \theta$, $\neg\psi$. Все случаи аналогичны, поэтому рассмотрим лишь $\varphi = (\psi \to \theta)$.

По индукции, $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash \psi^\gamma$ и $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash \theta^\sigma$, где $\gamma = \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\sigma = \theta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Если установим, что $\psi^\gamma, \theta^\sigma \vdash \varphi^\beta$, то получим требуемое.

Доказательство леммы

Индукция по φ. При $\varphi = p_i$ понятно. Предположим, что для формул ψ и θ лемма верна, а φ имеет один из видов: $\psi \wedge \theta$, $\psi \vee \theta$, $\psi \to \theta$, $\neg\psi$. Все случаи аналогичны, поэтому рассмотрим лишь $\varphi = (\psi \to \theta)$.

По индукции, $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash \psi^\gamma$ и $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash \theta^\sigma$, где $\gamma = \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\sigma = \theta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Если установим, что $\psi^\gamma, \theta^\sigma \vdash \varphi^\beta$, то получим требуемое.

Итак, докажем $\psi^\gamma, \theta^\sigma \vdash \varphi^\beta$ при $\beta = (\gamma \to \sigma)$. Перебирая возможные значения γ и σ из {И, Л}, видим, что достаточно установить: ψ, $\theta \vdash (\psi \to \theta)$; $\neg\psi, \theta \vdash (\psi \to \theta)$; $\neg\psi, \neg\theta \vdash (\psi \to \theta)$; $\psi, \neg\theta \vdash \neg(\psi \to \theta)$. Первые два следуют из теоремы дедукции, четвертое из очевидных соотношений $\psi, \neg\theta, \psi \to \theta \vdash \theta$ и $\psi, \neg\theta, \psi \to \theta \vdash \neg\theta$, а третье — из следующего квазивывода:

Доказательства леммы и теоремы

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\psi, \neg\theta, \psi, \neg\theta \vdash \psi; \neg\psi, \neg\theta, \psi, \neg\theta \vdash \neg\psi}{\neg\psi, \neg\theta, \psi \vdash \neg\neg\theta}}{\neg\psi, \neg\theta, \psi \vdash \theta}}{\neg\psi, \neg\theta \vdash (\psi \to \theta)}$$

Доказательства леммы и теоремы

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\neg\psi, \neg\theta, \psi, \neg\theta \vdash \psi; \neg\psi, \neg\theta, \psi, \neg\theta \vdash \neg\psi}{\neg\psi, \neg\theta, \psi \vdash \neg\neg\theta}}{\neg\psi, \neg\theta, \psi \vdash \theta}}{\neg\psi, \neg\theta \vdash (\psi \to \theta)}$$

Д. т-мы. Пусть $\varphi(p_1, p_2)$ — тавтология. $\varphi(\alpha_1, \alpha_2) =$ И при любых α_1, $\alpha 2$ из {И, Л}, поэтому $p_1, p_2 \vdash \varphi$; $p_1, \neg p_2 \vdash \varphi$; $\neg p_1, p_2 \vdash \varphi$; $\neg p_1, \neg p_2 \vdash \varphi$. Применяя свойства выводимости к первым двум соотношениям, получим $p_1, p_2 \vee \neg p_2 \vdash \varphi$; применяя его к последним двум соотношениям, получим $\neg p_1, p_2 \vee \neg p_2 \vdash \varphi$. Применяя то же свойство к только что выведенным соотношениям, получим:
$p_1 \vee \neg p_1, p_2 \vee \neg p_2 \vdash \varphi$. Но $\vdash (p_1 \vee \neg p_1)$ и $\vdash (p_2 \vee \neg p_2)$.
Отсюда получаем $\vdash \varphi$.

Свойства непротиворечивых множеств

Множество формул T называется *противоречивым*, если из него выводима любая формула. В противном случае T называется *непротиворечивым*.

Свойства непротиворечивых множеств

Множество формул T называется *противоречивым*, если из него выводима любая формула. В противном случае T называется *непротиворечивым*.

1. T противоречиво тогда и только тогда, когда из него выводима хотя бы одна формула вида $\theta \wedge \neg\theta$.
2. Если множества формул T_n, $n \in \mathbb{N}$ непротиворечивы и $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots$, то множество $\bigcup_n T_n$ непротиворечиво.
3. Если φ — предложение, T — множество формул и $T \cup \{\varphi\}$ противоречиво, то $T \vdash \neg\varphi$.
4. Если множество формул T непротиворечиво, то для любого предложения φ непротиворечиво хотя бы одно из множеств $T \cup \{\varphi\}$ и $T \cup \{\neg\varphi\}$.
5. Если множество предложений $S = T \cup \{\exists x \ \psi(x)\}$ непротиворечиво, то и множество $S \cup \{\psi(c)\}$ непротиворечиво для любого не входящего в формулы из S сигнатурного константного символа c.

Свойства теорий Хенкина

Множество предложений T называется *теорией Хенкина*, если T непротиворечиво, любое предложение или его отрицание выводимо из T, и для любого выводимого из T предложения вида $\exists x\, \psi(x)$ существует константный символ $c \in \sigma$ такой, что $T \vdash \psi(c)$.

Свойства теорий Хенкина

Множество предложений T называется *теорией Хенкина*, если T непротиворечиво, любое предложение или его отрицание выводимо из T, и для любого выводимого из T предложения вида $\exists x\, \psi(x)$ существует константный символ $c \in \sigma$ такой, что $T \vdash \psi(c)$.

1. $T \vdash \neg\varphi \iff T \nvdash \varphi$.
2. $T \vdash (\varphi \vee \psi) \iff T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.
3. $T \vdash (\varphi \to \psi) \iff T \nvdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.
4. $T \vdash \exists x \theta(x) \iff T \vdash \theta(c)$ для некоторого $c \in \sigma$.
5. $T \vdash \forall x \theta(x) \iff T \vdash \theta(c)$ для любого $c \in \sigma$.
6. Любая непротиворечивая теория S конечной или счетной сигнатуры σ может быть расширена до теории Хенкина сигнатуры σ_C, где C — счетное множество новых константных символов.

Доказательство свойства 6

Множество всех предложений сигнатуры σ_C счетно, поэтому их можно расположить в последовательность $\varphi_n (n \in \mathbb{N})$. Определим по индукции последовательность множеств $T_n (n \in \mathbb{N})$ следующим образом: $T_0 = S$. Пусть T_n построено. Если множество $T_n \cup \{\varphi_n\}$ противоречиво, то полагаем $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\varphi_n\}$. Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и φ_n не имеет вид $\exists x \psi(x)$, то полагаем $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n\}$. Наконец, если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво и $\varphi_n = \exists x \psi(x)$, то полагаем $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, \psi(c_k)\}$, где k — наименьшее число такое, что c_k не входит в формулы из T_n (в формулы из T_n входит лишь конечное число элементов C, поэтому такое k существует).
Легко проверить, что $\bigcup_n T_n$ — теория Хенкина, расширяющая S.

Основные результаты об ИП$_\sigma$

ТЕОРЕМА. Любое непротиворечивое множество предложений имеет модель.

Основные результаты об ИП$_\sigma$

ТЕОРЕМА. Любое непротиворечивое множество предложений имеет модель.

ТЕОРЕМА. Для любой сигнатуры σ с равенством и любого σ-предложения φ имеем:
φ выводимо в ИП$_\sigma$ $\iff$ φ общезначимо.
Более общо: для любой теории T,
$T \vdash \varphi \iff T \models \varphi$.

Основные результаты об ИП$_\sigma$

ТЕОРЕМА. Любое непротиворечивое множество предложений имеет модель.

ТЕОРЕМА. Для любой сигнатуры σ с равенством и любого σ-предложения φ имеем:
φ выводимо в ИП$_\sigma$ $\iff$ φ общезначимо.
Более обще: для любой теории T,
$T \vdash \varphi \iff T \models \varphi$.

СЛЕДСТВИЕ. Множество всех общезначимых преложений любой конечной сигнатуры перечислимо.
Более обще: Множество всех логических следствий любой перечислимой теории конечной сигнатуры перечислимо.

Доказательство теоремы о существовании модели

Пусть S — непротиворечивое множество предложений сигнатуры σ. Хотим показать, что S имеет модель. По теореме о компактности можем считать, что S конечно. Тогда в формулы S входит конечное подмножество символов сигнатуры σ, поэтому можно считать, что σ конечна. Тогда, по доказанному выше факту, существует теория Хенкина T сигнатуры σ_C, $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$, расширяющая S.

Доказательство теоремы о существовании модели

Пусть S — непротиворечивое множество предложений сигнатуры σ. Хотим показать, что S имеет модель. По теореме о компактности можем считать, что S конечно. Тогда в формулы S входит конечное подмножество символов сигнатуры σ, поэтому можно считать, что σ конечна. Тогда, по доказанному выше факту, существует теория Хенкина T сигнатуры σ_C, $C = \{c_0, c_1, \dots\}$, расширяющая S.

Пусть M — множество всех термов сигнатуры σ_C, не содержащих переменных (то есть это константы с "накрученными" на них функциональными символами). Введём на этом множестве отношение эквивалентности $s \sim t$, если $T \vdash s = t$. Из аксиом равенства вытекает, что:
Если $s_1 \sim t_1, \dots, s_n \sim t_n$, и $T \vdash P(s_1, \dots, s_n)$, то $T \vdash P(t_1, \dots, t_n)$;
Если $s_1 \sim t_1, \dots, s_n \sim t_n$, то $f(s_1, \dots, s_n) \sim f(t_1, \dots, t_n)$

Доказательство теоремы о существовании модели

Определим σ_C-структуру $\mathbb{A} = (A, I)$: $A = M/_\sim$, $c^I = [c]$,
$f^I([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$,
$P^I([t_1], \dots, [t_n]) \iff T \vdash P(t_1, \dots, t_n)$.

Доказательство теоремы о существовании модели

Определим σ_C-структуру $\mathbb{A} = (A, I)$: $A = M/_\sim$, $c^I = [c]$,
$f^I([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$,
$P^I([t_1], \ldots, [t_n]) \iff T \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$.

Индукцией по построению термов и формул проверяем, что:
Для любого терма $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ и любых $s_1, \ldots, s_n \in M$ имеем $t^{\mathbb{A}}([s_1], \ldots, [s_n]) = [t(s_1, \ldots, s_n)]$;
Для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и для $s_1, \ldots, s_k \in M$ выполнено $\mathbb{A} \models \varphi([s_1], \ldots, [s_k]) \iff T \vdash \varphi(s_1, \ldots, s_k)$.

Доказательство теоремы о существовании модели

Определим σ_C-структуру $\mathbb{A} = (A, I)$: $A = M/_{\sim}$, $c^I = [c]$,
$f^I([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$,
$P^I([t_1], \ldots, [t_n]) \iff T \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$.

Индукцией по построению термов и формул проверяем, что:
Для любого терма $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ и любых $s_1, \ldots, s_n \in M$ имеем $t^{\mathbb{A}}([s_1], \ldots, [s_n]) = [t(s_1, \ldots, s_n)]$;
Для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и для $s_1, \ldots, s_k \in M$ выполнено $\mathbb{A} \models \varphi([s_1], \ldots, [s_k]) \iff T \vdash \varphi(s_1, \ldots, s_k)$.

Из последнего свойства вытекает, что $\mathbb{A}$ является моделью множества T, а значит и множества S.

Разрешимость и неразрешимость

Рассматриваем только теории конечной сигнатуры. Такая теория T называется разрешимой, если существует алгоритм, который по любому предложению φ определяет, следует ли φ из T.

Разрешимость и неразрешимость

Рассматриваем только теории конечной сигнатуры. Такая теория T называется разрешимой, если существует алгоритм, который по любому предложению φ определяет, следует ли φ из T.

ТЕОРЕМА. Множество всех логических следствий любой перечислимой полной теории конечной сигнатуры разрешимо.

Разрешимость и неразрешимость

Рассматриваем только теории конечной сигнатуры. Такая теория T называется разрешимой, если существует алгоритм, который по любому предложению φ определяет, следует ли φ из T.

ТЕОРЕМА. Множество всех логических следствий любой перечислимой полной теории конечной сигнатуры разрешимо.

СЛЕДСТВИЕ. Теория поля вещественных чисел, теория поля комплексных чисел, и теория порядка на рациональных числах разрешимы.

Разрешимость и неразрешимость

Рассматриваем только теории конечной сигнатуры. Такая теория T называется разрешимой, если существует алгоритм, который по любому предложению φ определяет, следует ли φ из T.

ТЕОРЕМА. Множество всех логических следствий любой перечислимой полной теории конечной сигнатуры разрешимо.

СЛЕДСТВИЕ. Теория поля вещественных чисел, теория поля комплексных чисел, и теория порядка на рациональных числах разрешимы.

К сожалению, большинство интересных математических теорий (в частности, логика предикатов достаточно богатой сигнатуры, а также теории сложения и умножения на натуральных, целых, и рациональных числах) неразрешимы. Но это уже совсем другая история...