Задание 7. Выводимость и существование модели.

1. Докажите (используя только правило импликации), что:
из формул p, q выводимы формулы $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$;
из формул $p, \neg q$ выводимы формулы $\neg(p \wedge q)$, $p \vee q$, $\neg(p \rightarrow q)$;
из формул $\neg p, q$ выводимы формулы $\neg(p \wedge q)$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$;
из формул $\neg p, \neg q$ выводимы формулы $\neg(p \wedge q)$, $\neg(p \vee q)$, $p \rightarrow q$.

2. Докажите, что для любой формулы ЛВ $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n)$ и любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из {И, Л} справедливо $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \vdash \varphi^{\beta}$, где $\varphi^{\text{И}} = \varphi$, $\varphi^{\text{Л}} = \neg\varphi$, и $\beta = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

3. Докажите, что любая тавтология выводима из основных тавтологий с использованием только правила импликации.

4. Пусть T —теория Хенкина счетной сигнатуры σ_C, $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$, M — множество всех термов сигнатуры σ_C, не содержащих переменных, и $s \sim t$ означает $T \vdash s = t$. Докажите, что $\sim$ — эквивалентность на M такая, что:
если $s_1 \sim t_1, \ldots, s_n \sim t_n$, и $T \vdash P(s_1, \ldots, s_n)$, то $T \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$;
если $s_1 \sim t_1, \ldots, s_n \sim t_n$, то $f(s_1, \ldots, s_n) \sim f(t_1, \ldots, t_n)$

5. Докажите, что любое непротиворечивое множество предложений имеет модель.