Задание 8. Перечислимость и разрешимость.

1. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется перечислимым (соотв. разрешимым) если существует алгоритм, перечисляющий все его элементы (соотв. алгоритм, позволяющий вычислить по любому науральному числу, принадлежит ли оно множеству A). Эти понятия осмысленны для любого разумного множества конструктивных объектов на месте $\mathbb{N}$ (в частности для множества всех предложений, и для множества всех конечных последовательностей формул данной конечной сигнатуры и т.п.).

Докажите, что множество натуральных чисел разрешимо тогда и только тогда, когда оно само и его дополнение перечислимы.

2. Докажите, что следующие теории перечислимы:

множество всех логических следствий перечислимой теории конечной сигнатуры;

множество всех логических следствий аксиом бесконечных полугрупп, групп, колец, и полей;

множество всех логических следствий аксиом арифметики Пеано;

множество всех логических следствий аксиом ZFC.

3. Докажите, что следующие теории разрешимы:

множество всех логических следствий аксиом плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элементов;

множество всех логических следствий аксиом нетривиальных делимых абелевых групп без кручения;

множество всех логических следствий аксиом алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики;

множество всех логических следствий аксиом вещественно замкнутых упорядоченных полей;

множество всех логических следствий аксиом любой полной перечислимой теории.

4. Докажите, что следующие теории разрешимы:

множество всех логических следствий аксиом плотного линейного порядка;

множество всех логических следствий аксиом алгебраически замкнутых полей.

5. Разрешимы ли теории основных числовых структур?