Задание 11. Проблемы разрешимости.

1. Докажите, что функции $+, \cdot, l, I_k^n$ представимы в минимальной арифметике.

2. Докажите, что суперпозиция представимых функций представима, и что минимизация представимой функции представима.

3. Говорят, что $A \subseteq \mathbb{N}$ m-сводится к $B \subseteq \mathbb{N}$ (символически, $A \leq_m B$), если $A = f^{-1}(B)$ для некоторой рекурсивной функции f.

Докажите, что отношение m-сводимости рефлексивно и транзитивно, а фактор-множество по индуцированному им отношению эквивалентности $\equiv_m$ континуально.

Докажите, что если $A \leq_m B$ и B рекурсивно, то A также рекурсивно.

Докажите, что множество всех натуральных чисел не определимо в поле вещественных чисел, а также в поле комплексных чисел.

4. Выясните, какие соотношения по m-сводимости существуют между следующими множествами предложений (точнее, между соответствующими множествами кодов): $Th(\mathbb{N})$, $Th(\mathbb{Z})$, $Th(\mathbb{Q})$, $Th(\mathbb{R})$, $Th(\mathbb{C})$, арифметика Пеано. Все указанные теории расссматриваются в сигнатуре $\{=, +, \cdot, 0, 1\}$.

5. Докажите, что минимальная арифметика неразрешима.