

# Логика-2, 3 курс М

Виктор Львович Селиванов <sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФМКН СПбГУ

Весенний семестр, 2024

Важная дополнительная информация:

<https://github.com/vseliv/Logic2-2023/tree/main>

## Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.
2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.
3. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М: Мир, 1983, 255 с.
4. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.
5. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- ▶ Счетное множество  $Var$  переменных  $v_0 \ v_1 \ v_2 \dots$

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- ▶ Счетное множество  $Var$  переменных  $v_0 v_1 v_2 \dots$
- ▶ Логические символы  $\wedge \vee \rightarrow \neg \forall \exists$

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- ▶ Счетное множество  $Var$  переменных  $v_0 v_1 v_2 \dots$
- ▶ Логические символы  $\wedge \vee \rightarrow \neg \forall \exists$
- ▶ Вспомогательные символы  $( ) ,$

## Осмысленные выражения $ЛП^\sigma$

$\sigma$ -ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если  $f$  —  $n$ -местный функциональный символ из  $\sigma$  и  $t_1, \dots, t_n$  — термы, то выражение  $f(t_1, \dots, t_n)$  тоже терм.

## Осмысленные выражения $\text{ЛП}^\sigma$

$\sigma$ -ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если  $f$  —  $n$ -местный функциональный символ из  $\sigma$  и  $t_1, \dots, t_n$  — термы, то выражение  $f(t_1, \dots, t_n)$  тоже терм.

$\sigma$ -ФОРМУЛЫ:

выражение  $P(t_1, \dots, t_n)$ ,

где  $t_1, \dots, t_n$  — термы, а  $P$  —  $n$ -местный предикатный символ из  $\sigma$ , является формулой;  
если  $\varphi$  и  $\psi$  — формулы, а  $x$  — переменная, то выражения

$(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$ ,  $\neg\varphi$ ,  $\forall x\varphi$ ,  $\exists x\varphi$   
суть формулы.



## Свободные и связанные переменные

Множество  $FV(\varphi)$  свободных переменных формулы  $\varphi$  определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$  состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов  $t_1, \dots, t_n$ ;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ , и аналогично для  $\vee, \rightarrow, \neg$ ;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$ , и аналогично для  $\exists$ .

## Свободные и связанные переменные

Множество  $FV(\varphi)$  свободных переменных формулы  $\varphi$  определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$  состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов  $t_1, \dots, t_n$ ;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ , и аналогично для  $\vee, \rightarrow, \neg$ ;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$ , и аналогично для  $\exists$ .

Переменные, которые входят в формулу, но не являются свободными, называются связанными.

Формулы без свободных переменных называются предложениями.

Запись  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$  означает, что

$FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$ . Аналогично для термов.

## $\sigma$ -Структуры

$\sigma$ -Структура — пара  $\mathbb{A} = (A; I)$ , состоящая из непустого множества  $A$  и интерпретации  $I$  всех сигнатурных символов в  $A$  ( $I$  сопоставляет  $n$ -местному предикатному символу  $P \in \sigma$  некоторый  $n$ -местный предикат  $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$ , а каждому  $n$ -местному функциональному символу  $f$  из  $\sigma$  — некоторую  $n$ -местную функцию  $f^I = f^{\mathbb{A}}$  на  $A$ ).

# $\sigma$ -Структуры

$\sigma$ -Структура — пара  $\mathbb{A} = (A; I)$ , состоящая из непустого множества  $A$  и интерпретации  $I$  всех сигнатурных символов в  $A$  ( $I$  сопоставляет  $n$ -местному предикатному символу  $P \in \sigma$  некоторый  $n$ -местный предикат  $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$ , а каждому  $n$ -местному функциональному символу  $f$  из  $\sigma$  — некоторую  $n$ -местную функцию  $f^I = f^{\mathbb{A}}$  на  $A$ ).

Изоморфизмом  $\mathbb{A}$  на  $\mathbb{B}$  называется биекция  $g$  множества  $A$  на множество  $B$  такая, что

$P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$  и  
 $g(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$  для любых  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

Структуры  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  называются изоморфными ( $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ ), если существует изоморфизм  $\mathbb{A}$  на  $\mathbb{B}$ .

## Значения термов и формул

Для любой  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$  и означивания  $\nu : Var \rightarrow A$  определяем значения  $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$  и  $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{И, Л\}$  индукцией:

$$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x), \quad f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

## Значения термов и формул

Для любой  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$  и означивания  $\nu : Var \rightarrow A$  определяем значения  $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$  и  $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{И, Л\}$  индукцией:

$$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x), \quad f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

$$P(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

$$(\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu} \wedge \psi^{\mathbb{A},\nu}, \text{ аналогично для } \vee, \rightarrow, \neg;$$

$$(\forall x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigwedge_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x} \text{ и } (\exists x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigvee_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x}$$

,

где  $\nu_a^x$  — означивание, полученное из  $\nu$  изменением значения  $x$  на  $a$ .

# Значения термов и формул

Пусть  $t = t(x_1, \dots, x_m)$  и  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ .

- ▶ Если означивания  $\mu$  и  $\nu$  согласованы на  $x_1, \dots, x_m$ , то  $t^{\mathbb{A}, \mu} = t^{\mathbb{A}, \nu}$  и  $\varphi^{\mathbb{A}, \mu} = \varphi^{\mathbb{A}, \nu}$ . Поэтому вместо  $t^{\mathbb{A}, \nu}$  часто пишут  $t^{\mathbb{A}}(x_1/a_1, \dots, x_m/a_m)$  или, короче,  $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)$ , где  $a_i = \nu(x_i)$ ; аналогично для формул. Вместо  $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) = \text{И}$  часто пишут  $\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$ .
- ▶ Если  $a$  — изоморфизм  $\mathbb{A}$  на  $\mathbb{B}$ , то  $g(t^{\mathbb{A}, \nu}) = t^{\mathbb{A}, g \circ \nu}$  и  $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \varphi^{\mathbb{A}, g \circ \nu}$ . Иными словами,  $g(t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)) = t^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_m))$  и  $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_m))$ .
- ▶ Если  $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ , то эти структуры элементарно эквивалентны ( $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ), т.е. в них истинны одни и те же  $\sigma$ -предложения.

## Общезначимость и ее варианты

- ▶  $\varphi$  общезначима (тождественно истинна), если  $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \text{И}$  для любых  $\mathbb{A}$  и  $\nu$ .
- ▶  $\varphi$  и  $\psi$  равносильны ( $\varphi \equiv \psi$ ), если  $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \psi^{\mathbb{A}, \nu}$  для любых  $\mathbb{A}$  и  $\nu$ .
- ▶ Моделью множества предложений  $T$  называется структура, в которой все предложения из  $T$  истинны.
- ▶ Предложение  $\varphi$  логически следует из множества предложений  $T$  ( $T \models \varphi$ ), если  $\varphi$  истинно в любой модели множества  $T$ .



# Общезначимость и ее варианты

- ▶  $\varphi$  общезначима  $\iff \models \varphi$ .
- ▶  $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$  общезначима.
- ▶  $\varphi(\bar{x})$  общезначима  $\iff \forall \bar{x} \varphi$  общезначима.
- ▶  $T \models (\varphi \rightarrow \psi) \iff T \cup \{\varphi\} \models \psi$ .
- ▶  $T \models \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$  не имеет модели.
- ▶  $T \models \varphi \iff \bigwedge T \rightarrow \varphi$  общезначима, где  $T$  — конечное множество предложений.

# Фильтры и ультрафильтры

Фильтр  $F$  на множестве  $I$  — это собственное подмножество множества  $P(I)$ , замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр  $F$  называется ультрафильтром, если  $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$  для любого  $A \subseteq I$ .

# Фильтры и ультрафильтры

Фильтр  $F$  на множестве  $I$  — это собственное подмножество множества  $P(I)$ , замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр  $F$  называется ультрафильтром, если  $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$  для любого  $A \subseteq I$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

1. Ультрафильтры на  $I$  — это в точности максимальные фильтры по включению.
2. Если  $F$  — ультрафильтр, то  $A \in F \iff (I \setminus A) \notin F$  и  $A \cup B \in F \iff (A \in F \vee B \in F) \in F$ , для любых  $A, B \subseteq I$ .
3. Любой фильтр на  $I$  содержится в некотором ультрафильтре.

## Фильтрованные произведения

Пусть  $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$  — семейство  $\sigma$ -структур и  $F$  — фильтр на  $I$ .

Тогда отношение  $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$  есть эквивалентность на  $A = \{a : I \rightarrow \bigcup_i A_i \mid \forall i (a(i) \in A_i)\}$ .

Определим  $\sigma$ -структуру  $\mathbb{A}_F$  на  $A/\equiv_F$  так:

$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F,$

$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a],$  где  $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i));$

это определение корректно.

## Фильтрованные произведения

Пусть  $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$  — семейство  $\sigma$ -структур и  $F$  — фильтр на  $I$ . Тогда отношение  $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$  есть эквивалентность на  $A = \{a : I \rightarrow \bigcup_i A_i \mid \forall i (a(i) \in A_i)\}$ . Определим  $\sigma$ -структуру  $\mathbb{A}_F$  на  $A/\equiv_F$  так:  
 $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F$ ,  
 $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a]$ , где  $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ ;  
это определение корректно.

ТЕОРЕМА. Для любых ультрафильтра  $F$ ,  $\sigma$ -формулы  $\varphi(x_1, \dots, x_m)$  и  $a_1, \dots, a_m \in A$  имеем:  
 $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_m]) \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_m(i))\} \in F$ .

В частности, при  $m = 0$ :  $\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F$ .

## Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений  $T$  имеет модель, то и все множество  $T$  имеет модель.

# Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений  $T$  имеет модель, то и все множество  $T$  имеет модель.

Далее предполагаем, что  $\sigma$  содержит символ равенства  $=$  (двухместный предикатный символ).  $\sigma$ -Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений  $T$  сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество  $T$  имеет нормальную модель.

Для доказательства надо применить предыдущую теорему к множеству  $T \cup E_\sigma$ , где  $E_\sigma$  — аксиомы равенства (утверждающие, что  $=$  есть  $\sigma$ -конгруэнтность) и профакторизовать полученную модель  $\mathbb{A}$  по конгруэнтности  $=^{\mathbb{A}}$ .