Задание 9. Рекурсивные функции.

Характеристической функцией предиката $P(\bar{x})$ называют функцию $\chi_P(\bar{x})$, задаваемую условиями: $\chi_P(\bar{x}) = 0$, если $P(\bar{x}) =$ И; $\chi_P(\bar{x}) = 1$, если $P(\bar{x}) =$ Л. Предикат рекурсивен, если его характеристическая функция рекурсивна.

1. Покажите, что предикат $<$ рекурсивен, и что всякая рекурсивная функция вычислима (т.е. существует вычисляющий ее алгоритм).

2. Докажите, что:

Если предикат $P(y_1, \ldots, y_k)$ и функции $h_1(\bar{x}), \ldots, h_k(\bar{x})$ рекурсивны, то рекурсивен и предикат $P(h_1(\bar{x}), \ldots, h_k(\bar{x}))$.

Если предикат $P(\bar{x}, y)$ рекурсивен и $\forall \bar{x} \exists y P(\bar{x}, y)$, то функция $f(\bar{x}) = \mu y P(\bar{x}, y)$ рекурсивна.

3. Докажите, что:

Если предикаты $P(\bar{x})$, $Q(\bar{x})$ и $R(\bar{x}, y)$ рекурсивны, то предикаты $P(\bar{x}) \wedge Q(\bar{x})$, $P(\bar{x}) \vee Q(\bar{x})$, $P(\bar{x}) \to Q(\bar{x})$, $\neg p(\bar{x})$, $\forall y < z R(\bar{x}, y)$ и $\exists y < z R(\bar{x}, y)$ рекурсивны.

Пусть $P_1(\bar{x}), \ldots, P_k(\bar{x})$ — рекурсивные предикаты такие, что для любого $\bar{x} \in \mathbb{N}$ истинен ровно один из этих предикатов, а $g_1(\bar{x}), \ldots, g_k(\bar{x})$ — рекурсивные функции. Тогда рекурсивна и функция

$$f(\bar{x}) \;=\; \begin{cases} g_1(\bar{x}), & \text{если} P_1(\bar{x}) = \text{И} \\ \ldots\ldots\ldots & \\ g_k(\bar{x}), & \text{если} P_k(\bar{x}) = \text{И} \end{cases}$$

4. Докажите рекурсивность следующих функций: $max\{x, y\}$; $[\sqrt{x}]$; $[x\sqrt{2}]$; $|x - y|$; $max\{0, x - y\}$; $f(x) = n$, если $x = 2n$, и $f(x) = 0$ в противном случае; $div(x, y)$ — частное от деления x на y ($div(x, 0) = 0$).

5. Докажите рекурсивность следующих функций: $rest(x, y)$ — остаток от деления x на y ($rest(x, 0) = x$); НОД(x, y) — наибольший общий делитель x и y (НОД$(0, 0) = 0$); НОК(x, y) — наименьшее общее кратное x и y (НОК$(x, 0) =$НОК$(0, y) = 0$).