Логика-2, 3 курс М

Виктор Львович Селиванов [1]

[1]ФМКН СПбГУ

Весенний семестр, 2024

v.selivanov@spbu.ru

Важная дополнительная информация:
https://github.com/vseliv/Logic2-2023/tree/main

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.

2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.

3. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М: Мир, 1983, 255 с.

4. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.

5. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Непустое множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Непустое множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Непустое множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$
- Логические символы $\wedge\ \vee\ \rightarrow\ \neg\ \forall\ \exists$

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- Непустое множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$
- Логические символы $\wedge\ \vee\ \to\ \neg\ \forall\ \exists$
- Вспомогательные символы ( ) ,

Осмысленные выражения ЛП$^{\sigma}$

σ-ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n-местный функциональный символ из σ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже терм.

Осмысленные выражения ЛП$^\sigma$

σ-ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n-местный функциональный символ из σ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже терм.

σ-ФОРМУЛЫ:

выражение $P(t_1, \ldots, t_n)$,

где t_1,. . ., t_n — термы, а P - n-местный предикатный символ из σ, является формулой;

если φ и ψ — формулы, а x — переменная, то выражения

$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$

суть формулы.

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \ldots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов $t_1, \ldots, t_n$;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для $\vee, \rightarrow, \neg$;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для $\exists$.

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:
$FV(P(t_1, \dots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов $t_1, \dots, t_n$;
$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для $\vee, \to, \neg$;
$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для $\exists$.

Переменные, которые входят в формулу, но не являются свободными, называются связанными. Формулы без свободных переменных называются предложениями.

Запись $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ означает, что $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$. Аналогично для термов.

σ-Структуры

σ-Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n-местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n-местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \to \{$И,Л$\}$, а каждому n-местному функциональному символу f из σ — некоторую n-местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

σ-Структуры

σ-Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n-местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n-местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{И,Л}\}$, а каждому n-местному функциональному символу f из σ — некоторую n-местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

Изоморфизмом $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$ называется биекция g множества A на множество B такая, что $P^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ и $g(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{A}$.

Структуры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ называются изоморфными ($\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$), если существует изоморфизм $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$.

Значения термов и формул

Для любой σ-структуры $\mathbb{A}$ и означивания $\nu : Var \to A$ определяем значения $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{\text{И},\text{Л}\}$ индукцией:

$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x)$, $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \ldots, t_n^{\mathbb{A},\nu})$;

Значения термов и формул

Для любой σ-структуры $\mathbb{A}$ и означивания $\nu : Var \to A$ определяем значения $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{\text{И},\text{Л}\}$ индукцией:

$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x)$, $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu})$;

$P(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu})$;

$(\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu} \wedge \psi^{\mathbb{A},\nu}$, аналогично для $\vee, \to, \neg$;

$$(\forall x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigwedge_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x} \text{ и } (\exists x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigvee_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x}$$

,

где ν_a^x — означивание, полученное из ν изменением значения x на a.

Значения термов и формул

Пусть $t = t(x_1, \ldots, x_m)$ и $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$.

- Если означивания μ и ν согласованы на $x_1, \ldots, x_m$, то $t^{\mathbb{A},\mu} = t^{\mathbb{A},\nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A},\mu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu}$. Поэтому вместо $t^{\mathbb{A},\nu}$ часто пишут $t^{\mathbb{A}}(x_1/a_1, \ldots, x_m/a_m)$ или, короче, $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)$, где $a_i = \nu(x_i)$; аналогично для формул. Вместо $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) =$И часто пишут $\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_m)$.
- Если a — изоморфизм $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$, то $g(t^{\mathbb{A},\nu}) = t^{\mathbb{A},g\circ\nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{A},g\circ\nu}$. Иными словами, $g(t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = t^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_m))$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_m))$.
- Если $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$, то эти структуры элементарно эквивалентны ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), т.е. в них истинны одни и те же σ-предложения.

Общезначимость и ее варианты

- φ общезначима (тождественно истинна), если $\varphi^{\mathbb{A},\nu} =$И для любых $\mathbb{A}$ и ν.
- φ и ψ равносильны ($\varphi \equiv \psi$), если $\varphi^{\mathbb{A},\nu} = \psi^{\mathbb{A},\nu}$ для любых $\mathbb{A}$ и ν.
- Моделью множества предложений T называется структура, в которой все предложения из T истинны.
- Предложение φ логически следует из множества педложений T ($T \models \varphi$), если φ истинно в любой модели множества T.

Общезначимость и ее варианты

- φ общезначима $\iff \models \varphi$.
- $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ общезначима.
- $\varphi(\bar{x})$ общезначима $\iff \forall \bar{x} \varphi$ общезначима.
- $T \models (\varphi \to \psi) \iff T \cup \{\varphi\} \models \psi$.
- $T \models \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$ не имеет модели.
- $T \models \varphi \iff \bigwedge T \to \varphi$ общезначима, где T — конечное множество предложений.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$ для любого $A \subseteq I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

1. Ультрафильтры на I — это в точности максимальные фильтры по включению.
2. Если F — ультрафильтр, то $A \in F \iff (I \setminus A) \in F$ и $A \cup B \in F \iff (A \in F \vee B \in F) \in F$, для любых $A, B \subseteq I$.
3. Любой фильтр на I содержится в некотором ультрафильтре.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$ — семейство σ-структур и F — фильтр на I. Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \to \bigcup_i A_i \mid \forall i(a(i) \in A_i)\}$.
Определим σ-структуру $\mathbb{A}_F$ на $A/_{\equiv_F}$ так:
$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F$,
$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$;
это определение корректно.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$ — семейство σ-структур и F — фильтр на I. Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \to \bigcup_i A_i \mid \forall i(a(i) \in A_i)\}$. Определим σ-структуру $\mathbb{A}_F$ на $A/_{\equiv_F}$ так:
$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in F$,
$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$;
это определение корректно.

ТЕОРЕМА. Для любых ультрафильтра F, σ-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ и $a_1, \ldots, a_m \in A$ имеем:
$\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \ldots, [a_m]) \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_m(i))\} \in F$.

В частности, при $m = 0$: $\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F$.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений T имеет модель, то и все множество T имеет модель.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений T имеет модель, то и все множество T имеет модель.

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двухместный предикатный символ). σ-Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений T сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество T имеет нормальную модель.

Для доказательства надо применить предыдущую теорему к множеству $T \cup E_\sigma$, где E_σ — аксиомы равенства (утверждающие, что $=$ есть σ-конгруэнтность) и профакторизовать полученную модель $\mathbb{A}$ по конгруэнтности $=^{\mathbb{A}}$.

Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x),\ \forall x \forall y(x = y \to y = x),$$
$$\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z),$$

$$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)),$$
$$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n =$$
$$y_n \wedge P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n)).$$

Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x),\ \forall x \forall y(x = y \to y = x),$$
$$\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z),$$

$$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)),$$
$$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n)).$$

ТЕОРЕМА. Если теория содержит аксиомы равенства и имеет модель, то она имеет и нормальную модель.

Понижение мощности

- $\mathbb{A}$ — *подструктура* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$, $P^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ и $f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbb{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ для всех $a_1, \ldots, a_n \in A$;
- *вложение* структуры $\mathbb{A}$ в структуру $\mathbb{B}$ — это изоморфизм $\mathbb{A}$ на подструктуру структуры $\mathbb{B}$;
- $\mathbb{A}$ — *элементарная подструктура* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(\overline{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\overline{a}))$ для всех $\overline{a} \in \mathbb{A}$ и для всех формул $\varphi(\overline{x})$;
- *элементарное вложение* $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$ — это изоморфизм $\mathbb{A}$ на элементарную подструктуру структуры $\mathbb{B}$;
- $\mathbb{A}$ *элементарно эквивалентно* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathsf{For}_\sigma|$.
Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathsf{For}_\sigma|$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$. Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность
$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ по индукции:
$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\}$,
где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены так:
$E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) \mid \overline{a} \in S_n$ и $\mathbb{A} \models \exists y\, \varphi(\overline{a}, y)\}$ и
$\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))$ для всех $e \in E_n$. $B = \bigcup_n S_n$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$. Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность $X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ по индукции: $S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\}$, где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены так: $E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) \mid \overline{a} \in S_n$ и $\mathbb{A} \models \exists y\ \varphi(\overline{a}, y)\}$ и $\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))$ для всех $e \in E_n$. $B = \bigcup_n S_n$.

Известен следующий важный результат: Не существует логики, собственным образом расширяющей логику предикатов и удовлетворяющей теоремам компактности и понижения мощности.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ. Если $\mathbb{A}$ — σ-структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$ в A, получим τ-структуру $\mathbb{B}$, называемую обогащением структуры $\mathbb{A}$. Наоборот: если $\mathbb{B}$ — τ-структура, то, "забывая" интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$, получим *σ-обеднение* $B|_\sigma$ структуры $\mathbb{B}$. Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ. Если $\mathbb{A}$ — σ-структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$ в A, получим τ-структуру $\mathbb{B}$, называемую обогащением структуры $\mathbb{A}$. Наоборот: если $\mathbb{B}$ — τ-структура, то, "забывая" интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$, получим *σ-обеднение* $B|_\sigma$ структуры $\mathbb{B}$. Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Например, пусть $\mathbb{A}$ — σ-структура, а $\sigma_A = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$ ее обогащение новыми константными символами c_a такими, что $c_a \neq c_b$ при $a \neq b$. Стандартным константным обогащением структуры $\mathbb{A}$ называется ее σ_A-обогащение, в котором новые символы интерпретируются так: $c_a \mapsto a$, для любого $a \in A$.

Диаграммы структур

Диаграмма σ-структуры $\mathbb{A}$ — это множество $D(\mathbb{A})$ σ_A-предложений вида $f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = c_a$, $P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, $\neg P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, истинных в $\mathbb{A}_A$ при естественной интерпретации новых константных символов.

Полная диаграмма σ-структуры $\mathbb{A}$ — это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех σ_A-предложений, истинных в $\mathbb{A}_A$ при естественной интерпретации новых константных символов.

Диаграммы структур

Диаграмма σ-структуры $\mathbb{A}$ — это множество $D(\mathbb{A})$ σ_A-предложений вида $f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = c_a$, $P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, $\neg P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, истинных в $\mathbb{A}_A$ при естественной интерпретации новых константных символов.

Полная диаграмма σ-структуры $\mathbb{A}$ — это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех σ_A-предложений, истинных в $\mathbb{A}_A$ при естественной интерпретации новых константных символов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1. σ-Структура $\mathbb{A}$ изоморфно вкладывается в σ-структуру $\mathbb{B}$ $\iff$ $\mathbb{B}$ является σ-обеднением некоторой модели множества $D(\mathbb{A})$.

2. σ-Структура $\mathbb{A}$ элементарно вкладывается в σ-структуру $\mathbb{B}$ $\iff$ $\mathbb{B}$ является σ-обеднением некоторой модели множества $D^*(\mathbb{A})$.

Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная σ-структура $\mathbb{A}$ и кардинал $\kappa \geq \max(|A|, |\mathsf{For}_\sigma|)$. Тогда $\mathbb{A}$ элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности κ.

Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная σ-структура $\mathbb{A}$ и кардинал $\kappa \geq \max(|A|, |\mathsf{For}_\sigma|)$. Тогда $\mathbb{A}$ элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности κ.

В качестве следствий получаем:

ТЕОРЕМА. Если σ-теория T имеет модель мощности $\geq n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то она имеет модель любой мощности $\kappa \geq |\mathsf{For}_\sigma|$.

ТЕОРЕМА. Если σ-теория T имеет единственную с точностью до изоморфизма модель некоторой мощности $\kappa \geq |\mathsf{For}_\sigma|$ и не имеет конечных моделей, то она полна (т.е. $T \models \varphi \vee T \models \neg\varphi$ для любого σ-предложения φ).

Аксиоматизируемые классы

- *Теория* T — множество σ-предложений.
- Теории T соответствует класс ее моделей $\mathsf{Mod}(T) = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \models T\}$
- Классу структур $K \subseteq \mathsf{Str}_\sigma$ соответствует его теория $\mathsf{Th}(K) = \{\varphi \in \mathsf{Sent}_\sigma \mid \forall \mathbb{A} \in K\ (\mathbb{A} \models \varphi)\}$.
- Класс структур K *аксиоматизируем*, если $K = \mathsf{Mod}(T)$ для некоторой теории T.
- Класс структур K *конечно аксиоматизируем*, если $K = \mathsf{Mod}(T)$ для некоторой конечной теории $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Это равносильно аксиоматизируемости одной формулой $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

Аксиоматизируемые классы: свойства

1. Если $T \subseteq T'$, то $\mathsf{Mod}(T) \supseteq \mathsf{Mod}(T')$;
2. Если $K \subseteq K'$, то $\mathsf{Th}(K) \supseteq Th(K')$;
3. $K \subseteq \mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(K))$ и $T \subseteq \mathsf{Th}(\mathsf{Mod}(T))$;
4. Класс K аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = \mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(K))$;
5. Любое пересечение аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом. Объединение двух аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом;
6. Класс K конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K и $\mathsf{Str}_\sigma \backslash K$ аксиоматизируемы;
7. Класс K — аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

Классификация формул

- Σ_0 — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- Σ_1 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \overline{x}\, \psi(\overline{x}, \overline{y})$, где ψ — бескванторная;
- Σ_2 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \overline{x_1}\, \forall \overline{x_2}\, \psi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{y})$, где ψ — бескванторная, и т.д.;
- множество Π_n определяется аналогично множеству Σ_n с заменой $\exists$ на $\forall$ и наоборот.

Классификация формул

- Σ_0 — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- Σ_1 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \overline{x}\, \psi(\overline{x}, \overline{y})$, где ψ — бескванторная;
- Σ_2 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \overline{x_1}\, \forall \overline{x_2}\, \psi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{y})$, где ψ — бескванторная, и т.д.;
- множество Π_n определяется аналогично множеству Σ_n с заменой $\exists$ на $\forall$ и наоборот.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$;
$\varphi \in \Pi_n$ тогда и только тогда, когда $\neg\varphi \in \Sigma_n$;
$\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = \mathrm{For}_\sigma$.

Π_1- и Π_2-аксиоматизируемость

В теории моделей имеется ряд теорем об аксиоматизируемости классов структур предложениями того или иного вида. Приведем два важных примера.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_1-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур (т.е. если какая-то структура лежит в классе, то и любая её подструктура тоже лежит в нём).

Π_1- и Π_2-аксиоматизируемость

В теории моделей имеется ряд теорем об аксиоматизируемости классов структур предложениями того или иного вида. Приведем два важных примера.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_1-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур (т.е. если какая-то структура лежит в классе, то и любая её подструктура тоже лежит в нём).

Класс структур K *замкнут относительно объединений цепей структур*, если из $\forall n\,(\mathbb{A}_n \in K)$ и $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots$ следует $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_2-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

Полные теории

σ-Теория T называется *полной*, если она имеет модель и, для любого σ-предложения φ, либо $T \models \varphi$, либо $T \models \neg\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории T, имеющей модель, равносильны следующие условия:
T — полна;
$[T] = \mathrm{Th}(\mathbb{A})$, для любой $\mathbb{A} \models T$ (где $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ — множество всех логических следствий теории T;
$\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \mathrm{Th}(\mathbb{B})$ для любых $\mathbb{A}$, $\mathbb{A} \models T$.

Полные теории

σ-Теория T называется *полной*, если она имеет модель и, для любого σ-предложения φ, либо $T \models \varphi$, либо $T \models \neg\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории T, имеющей модель, равносильны следующие условия:
T — полна;
$[T] = \mathrm{Th}(\mathbb{A})$, для любой $\mathbb{A} \models T$ (где $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ — множество всех логических следствий теории T;
$\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \mathrm{Th}(\mathbb{B})$ для любых $\mathbb{A}$, $\mathbb{A} \models T$.

Теория называется *категоричной в мощности* κ, если она имеет единственную с точностью до изоморфизма модель мощности κ.
Ранее уже доказали простую, но важную теорему:

Если σ-теория не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\geq |\mathrm{For}_\sigma|$, то она полна.

Модельно полные теории

Теория T *модельно полна*, если она имеет модель и отношения $\subseteq, \preceq$ совпадают на $\mathrm{Mod}(T)$.

Модельно полные теории

Теория T *модельно полна*, если она имеет модель и отношения $\subseteq, \preceq$ совпадают на Mod(T).

ТЕОРЕМА. Для теории T, имеющей модель, равносильны:

1. T — модельно полна.
2. Для любой $\mathbb{A} \models T$, теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна.
3. Для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ из $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ следует, что любое Σ_1-предложение в сигнатуре σ_A, которое истинно в $\mathbb{B}$, будет истинно и в $\mathbb{A}$.
4. $\Sigma_1 = \Pi_1$ по модулю T (т.е. любая Σ_1-формула $\varphi(\overline{x})$ равносильна подходящей Π_1-формуле $\psi(\overline{x})$ в T: $T \models \forall \overline{x}\ (\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$.
5. $For_\sigma = \Pi_1$ по модулю T.

Дополнительные свойства

ТЕОРЕМА.

1. Любая модельно полная теория Π_2-аксиоматизируемая.
2. Если модельно полная теория T имеет модель, которая вкладывается в любую модель T, то T — полная.
3. Если для любых двух моделей модельно полной теории T существует третья модель, в которую они обе вкладываются, то T полна.
4. Если теория Π_2-аксиоматизируема, не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\lambda \geq |\mathrm{For}_\sigma|$, то она модельно полна.
5. Теория T допускает элиминацию кванторов (т.е. $For_\sigma = \Pi_0$ по модулю T) в точности тогда, когда теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна для любой $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \models T$.