

# Логика-2, 3 курс М

Виктор Львович Селиванов <sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФМКН СПбГУ

Весенний семестр, 2024

Важная дополнительная информация:

<https://github.com/vseliv/Logic2-2023/tree/main>

## Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.
2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.
3. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М: Мир, 1983, 255 с.
4. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.
5. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- ▶ Счетное множество  $Var$  переменных  $v_0 v_1 v_2 \dots$

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- ▶ Счетное множество  $Var$  переменных  $v_0 v_1 v_2 \dots$
- ▶ Логические символы  $\wedge \vee \rightarrow \neg \forall \exists$

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- ▶ Счетное множество  $Var$  переменных  $v_0 v_1 v_2 \dots$
- ▶ Логические символы  $\wedge \vee \rightarrow \neg \forall \exists$
- ▶ Вспомогательные символы  $( ) ,$

## Осмысленные выражения $ЛП^\sigma$

$\sigma$ -ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если  $f$  —  $n$ -местный функциональный символ из  $\sigma$  и  $t_1, \dots, t_n$  — термы, то выражение  $f(t_1, \dots, t_n)$  тоже терм.

## Осмысленные выражения $\text{ЛП}^\sigma$

$\sigma$ -ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если  $f$  —  $n$ -местный функциональный символ из  $\sigma$  и  $t_1, \dots, t_n$  — термы, то выражение  $f(t_1, \dots, t_n)$  тоже терм.

$\sigma$ -ФОРМУЛЫ:

выражение  $P(t_1, \dots, t_n)$ ,

где  $t_1, \dots, t_n$  — термы, а  $P$  —  $n$ -местный предикатный символ из  $\sigma$ , является формулой;  
если  $\varphi$  и  $\psi$  — формулы, а  $x$  — переменная, то выражения

$(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$ ,  $\neg\varphi$ ,  $\forall x\varphi$ ,  $\exists x\varphi$   
суть формулы.



## Свободные и связанные переменные

Множество  $FV(\varphi)$  свободных переменных формулы  $\varphi$  определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$  состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов  $t_1, \dots, t_n$ ;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ , и аналогично для  $\vee, \rightarrow, \neg$ ;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$ , и аналогично для  $\exists$ .

## Свободные и связанные переменные

Множество  $FV(\varphi)$  свободных переменных формулы  $\varphi$  определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$  состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов  $t_1, \dots, t_n$ ;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ , и аналогично для  $\vee, \rightarrow, \neg$ ;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$ , и аналогично для  $\exists$ .

Переменные, которые входят в формулу, но не являются свободными, называются связанными.

Формулы без свободных переменных называются предложениями.

Запись  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$  означает, что

$FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$ . Аналогично для термов.

## $\sigma$ -Структуры

$\sigma$ -Структура — пара  $\mathbb{A} = (A; I)$ , состоящая из непустого множества  $A$  и интерпретации  $I$  всех сигнатурных символов в  $A$  ( $I$  сопоставляет  $n$ -местному предикатному символу  $P \in \sigma$  некоторый  $n$ -местный предикат  $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{И, Л\}$ , а каждому  $n$ -местному функциональному символу  $f$  из  $\sigma$  — некоторую  $n$ -местную функцию  $f^I = f^{\mathbb{A}}$  на  $A$ ).

# $\sigma$ -Структуры

$\sigma$ -Структура — пара  $\mathbb{A} = (A; I)$ , состоящая из непустого множества  $A$  и интерпретации  $I$  всех сигнатурных символов в  $A$  ( $I$  сопоставляет  $n$ -местному предикатному символу  $P \in \sigma$  некоторый  $n$ -местный предикат  $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$ , а каждому  $n$ -местному функциональному символу  $f$  из  $\sigma$  — некоторую  $n$ -местную функцию  $f^I = f^{\mathbb{A}}$  на  $A$ ).

Изоморфизмом  $\mathbb{A}$  на  $\mathbb{B}$  называется биекция  $g$  множества  $A$  на множество  $B$  такая, что

$P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$  и  
 $g(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$  для любых  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

Структуры  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  называются изоморфными ( $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ ), если существует изоморфизм  $\mathbb{A}$  на  $\mathbb{B}$ .

## Значения термов и формул

Для любой  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$  и означивания  $\nu : Var \rightarrow A$  определяем значения  $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$  и  $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{И, Л\}$  индукцией:

$$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x), \quad f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

## Значения термов и формул

Для любой  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$  и означивания  $\nu : Var \rightarrow A$  определяем значения  $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$  и  $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{И, Л\}$  индукцией:

$$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x), \quad f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

$$P(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

$$(\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu} \wedge \psi^{\mathbb{A},\nu}, \text{ аналогично для } \vee, \rightarrow, \neg;$$

$$(\forall x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigwedge_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x} \text{ и } (\exists x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigvee_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x}$$

,

где  $\nu_a^x$  — означивание, полученное из  $\nu$  изменением значения  $x$  на  $a$ .

# Значения термов и формул

Пусть  $t = t(x_1, \dots, x_m)$  и  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ .

- ▶ Если означивания  $\mu$  и  $\nu$  согласованы на  $x_1, \dots, x_m$ , то  $t^{\mathbb{A}, \mu} = t^{\mathbb{A}, \nu}$  и  $\varphi^{\mathbb{A}, \mu} = \varphi^{\mathbb{A}, \nu}$ . Поэтому вместо  $t^{\mathbb{A}, \nu}$  часто пишут  $t^{\mathbb{A}}(x_1/a_1, \dots, x_m/a_m)$  или, короче,  $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)$ , где  $a_i = \nu(x_i)$ ; аналогично для формул. Вместо  $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) = \text{И}$  часто пишут  $\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$ .
- ▶ Если  $a$  — изоморфизм  $\mathbb{A}$  на  $\mathbb{B}$ , то  $g(t^{\mathbb{A}, \nu}) = t^{\mathbb{A}, g \circ \nu}$  и  $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \varphi^{\mathbb{A}, g \circ \nu}$ . Иными словами,  $g(t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)) = t^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_m))$  и  $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_m))$ .
- ▶ Если  $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ , то эти структуры элементарно эквивалентны ( $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ), т.е. в них истинны одни и те же  $\sigma$ -предложения.

## Общезначимость и ее варианты

- ▶  $\varphi$  общезначима (тождественно истинна), если  $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \text{И}$  для любых  $\mathbb{A}$  и  $\nu$ .
- ▶  $\varphi$  и  $\psi$  равносильны ( $\varphi \equiv \psi$ ), если  $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \psi^{\mathbb{A}, \nu}$  для любых  $\mathbb{A}$  и  $\nu$ .
- ▶ Моделью множества предложений  $T$  называется структура, в которой все предложения из  $T$  истинны.
- ▶ Предложение  $\varphi$  логически следует из множества предложений  $T$  ( $T \models \varphi$ ), если  $\varphi$  истинно в любой модели множества  $T$ .



# Общезначимость и ее варианты

- ▶  $\varphi$  общезначима  $\iff \models \varphi$ .
- ▶  $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$  общезначима.
- ▶  $\varphi(\bar{x})$  общезначима  $\iff \forall \bar{x} \varphi$  общезначима.
- ▶  $T \models (\varphi \rightarrow \psi) \iff T \cup \{\varphi\} \models \psi$ .
- ▶  $T \models \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$  не имеет модели.
- ▶  $T \models \varphi \iff \bigwedge T \rightarrow \varphi$  общезначима, где  $T$  — конечное множество предложений.

# Фильтры и ультрафильтры

Фильтр  $F$  на множестве  $I$  — это собственное подмножество множества  $P(I)$ , замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр  $F$  называется ультрафильтром, если  $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$  для любого  $A \subseteq I$ .

# Фильтры и ультрафильтры

Фильтр  $F$  на множестве  $I$  — это собственное подмножество множества  $P(I)$ , замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр  $F$  называется ультрафильтром, если  $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$  для любого  $A \subseteq I$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

1. Ультрафильтры на  $I$  — это в точности максимальные фильтры по включению.
2. Если  $F$  — ультрафильтр, то  $A \in F \iff (I \setminus A) \notin F$  и  $A \cup B \in F \iff (A \in F \vee B \in F) \in F$ , для любых  $A, B \subseteq I$ .
3. Любой фильтр на  $I$  содержится в некотором ультрафильтре.

## Фильтрованные произведения

Пусть  $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$  — семейство  $\sigma$ -структур и  $F$  — фильтр на  $I$ .

Тогда отношение  $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$  есть эквивалентность на  $A = \{a : I \rightarrow \bigcup_i A_i \mid \forall i (a(i) \in A_i)\}$ .

Определим  $\sigma$ -структуру  $\mathbb{A}_F$  на  $A/\equiv_F$  так:

$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F,$

$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a],$  где  $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i));$

это определение корректно.

## Фильтрованные произведения

Пусть  $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$  — семейство  $\sigma$ -структур и  $F$  — фильтр на  $I$ . Тогда отношение  $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$  есть эквивалентность на  $A = \{a : I \rightarrow \bigcup_i A_i \mid \forall i (a(i) \in A_i)\}$ . Определим  $\sigma$ -структуру  $\mathbb{A}_F$  на  $A/\equiv_F$  так:  
 $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F$ ,  
 $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a]$ , где  $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ ;  
это определение корректно.

ТЕОРЕМА. Для любых ультрафильтра  $F$ ,  $\sigma$ -формулы  $\varphi(x_1, \dots, x_m)$  и  $a_1, \dots, a_m \in A$  имеем:  
 $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_m]) \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_m(i))\} \in F$ .

В частности, при  $m = 0$ :  $\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F$ .

## Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений  $T$  имеет модель, то и все множество  $T$  имеет модель.

## Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений  $T$  имеет модель, то и все множество  $T$  имеет модель.

Далее предполагаем, что  $\sigma$  содержит символ равенства  $=$  (двухместный предикатный символ).  $\sigma$ -Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений  $T$  сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество  $T$  имеет нормальную модель.

Для доказательства надо применить предыдущую теорему к множеству  $T \cup E_\sigma$ , где  $E_\sigma$  — аксиомы равенства (утверждающие, что  $=$  есть  $\sigma$ -конгруэнтность) и профакторизовать полученную модель  $\mathbb{A}$  по конгруэнтности  $=^{\mathbb{A}}$ .

## Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x), \forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x),$$

$$\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n =$$
$$y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)).$$



## Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x), \forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x),$$

$$\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow \\ f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)).$$

ТЕОРЕМА. Если теория содержит аксиомы равенства и имеет модель, то она имеет и нормальную модель.

## Понижение мощности

- ▶  $\mathbb{A}$  — *подструктура*  $\mathbb{B}$  ( $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ ), если  $A \subseteq B$ ,  $P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$  и  $f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$  для всех  $a_1, \dots, a_n \in A$ ;
- ▶ *вложение* структуры  $\mathbb{A}$  в структуру  $\mathbb{B}$  — это изоморфизм  $\mathbb{A}$  на подструктуру структуры  $\mathbb{B}$ ;
- ▶  $\mathbb{A}$  — *элементарная подструктура*  $\mathbb{B}$  ( $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$ ), если  $A \subseteq B$  и  $\varphi^{\mathbb{A}}(\bar{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\bar{a})$  для всех  $\bar{a} \in A$  и для всех формул  $\varphi(\bar{x})$ ;
- ▶ *элементарное вложение*  $\mathbb{A}$  в  $\mathbb{B}$  — это изоморфизм  $\mathbb{A}$  на элементарную подструктуру структуры  $\mathbb{B}$ ;
- ▶  $\mathbb{A}$  *элементарно эквивалентно*  $\mathbb{B}$  ( $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

## Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть  $\mathbb{A}$ ,  $X \subseteq A$ ,  $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$ .

Тогда существует  $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$ :  $X \subseteq B$  и  $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$ .

## Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть  $\mathbb{A}$ ,  $X \subseteq A$ ,  $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$ .  
Тогда существует  $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$ :  $X \subseteq B$  и  $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$ .

Д. Определим последовательность

$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$  по индукции:

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\},$$

где  $E_n$  и  $\eta : E_n \rightarrow A$  определены так:

$E_n = \{(\bar{a}, \varphi(\bar{x}, y)) \mid \bar{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)\}$  и  
 $\mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, \eta(e))$  для всех  $e \in E_n$ .  $B = \bigcup_n S_n$ .

## Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть  $\mathbb{A}$ ,  $X \subseteq A$ ,  $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$ .  
Тогда существует  $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$ :  $X \subseteq B$  и  $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$ .

Д. Определим последовательность

$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$  по индукции:

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\},$$

где  $E_n$  и  $\eta : E_n \rightarrow A$  определены так:

$$E_n = \{(\bar{a}, \varphi(\bar{x}, y)) \mid \bar{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)\} \text{ и } \mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, \eta(e)) \text{ для всех } e \in E_n. B = \bigcup_n S_n.$$

Известен следующий важный результат: Не существует логики, собственным образом расширяющей логику предикатов и удовлетворяющей теоремам компактности и понижения мощности.

## Константное обогащение

Если  $\sigma \subseteq \tau$ , то сигнатура  $\tau$  называется *обогащением* сигнатуры  $\sigma$ . Если  $\mathbb{A} — \sigma$ -структура, то, определив интерпретацию символов из  $\tau \setminus \sigma$  в  $A$ , получим  $\tau$ -структуру  $\mathbb{B}$ , называемую обогащением структуры  $\mathbb{A}$ . Наоборот: если  $\mathbb{B} — \tau$ -структура, то, “забывая” интерпретацию символов из  $\tau \setminus \sigma$ , получим  $\sigma$ -обеднение  $B|_\sigma$  структуры  $\mathbb{B}$ . Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

## Константное обогащение

Если  $\sigma \subseteq \tau$ , то сигнатура  $\tau$  называется *обогащением* сигнатуры  $\sigma$ . Если  $\mathbb{A} — \sigma$ -структура, то, определив интерпретацию символов из  $\tau \setminus \sigma$  в  $A$ , получим  $\tau$ -структуру  $\mathbb{B}$ , называемую обогащением структуры  $\mathbb{A}$ . Наоборот: если  $\mathbb{B} — \tau$ -структура, то, “забывая” интерпретацию символов из  $\tau \setminus \sigma$ , получим  $\sigma$ -обеднение  $\mathbb{B}|_\sigma$  структуры  $\mathbb{B}$ . Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Например, пусть  $\mathbb{A} — \sigma$ -структура, а  $\sigma_A = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$  ее обогащение новыми константными символами  $c_a$  такими, что  $c_a \neq c_b$  при  $a \neq b$ . Стандартным константным обогащением структуры  $\mathbb{A}$  называется ее  $\sigma_A$ -обогащение, в котором новые символы интерпретируются так:  $c_a \mapsto a$ , для любого  $a \in A$ .

# Диаграммы структур

*Диаграмма  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$  — это множество  $D(\mathbb{A})$   $\sigma_A$ -предложений вида  $f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a$ ,  $P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ ,  $\neg P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ , истинных в  $\mathbb{A}_A$  при естественной интерпретации новых константных символов.*

*Полная диаграмма  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$  — это множество  $D^*(\mathbb{A})$  всех  $\sigma_A$ -предложений, истинных в  $\mathbb{A}_A$  при естественной интерпретации новых константных символов.*



# Диаграммы структур

*Диаграмма  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$*  — это множество  $D(\mathbb{A})$   $\sigma_A$ -предложений вида  $f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a$ ,  $P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ ,  $\neg P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ , истинных в  $\mathbb{A}_A$  при естественной интерпретации новых константных символов.

*Полная диаграмма  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$*  — это множество  $D^*(\mathbb{A})$  всех  $\sigma_A$ -предложений, истинных в  $\mathbb{A}_A$  при естественной интерпретации новых константных символов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1.  $\sigma$ -Структура  $\mathbb{A}$  изоморфно вкладывается в  $\sigma$ -структуру  $\mathbb{B} \iff \mathbb{B}$  является  $\sigma$ -обеднением некоторой модели множества  $D(\mathbb{A})$ .

2.  $\sigma$ -Структура  $\mathbb{A}$  элементарно вкладывается в  $\sigma$ -структуру  $\mathbb{B} \iff \mathbb{B}$  является  $\sigma$ -обеднением некоторой модели множества  $D^*(\mathbb{A})$ .

## Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная  $\sigma$ -структура  $\mathbb{A}$  и кардинал  $\kappa \geq \max(|A|, |\text{For}_\sigma|)$ . Тогда  $\mathbb{A}$  элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности  $\kappa$ .

# Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная  $\sigma$ -структура  $\mathbb{A}$  и кардинал  $\kappa \geq \max(|A|, |\text{For}_\sigma|)$ . Тогда  $\mathbb{A}$  элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности  $\kappa$ .

В качестве следствий получаем:

ТЕОРЕМА. Если  $\sigma$ -теория  $T$  имеет модель мощности  $\geq n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , то она имеет модель любой мощности  $\kappa \geq |\text{For}_\sigma|$ .

ТЕОРЕМА. Если  $\sigma$ -теория  $T$  имеет единственную с точностью до изоморфизма модель некоторой мощности  $\kappa \geq |\text{For}_\sigma|$  и не имеет конечных моделей, то она полна (т.е.  $T \models \varphi \vee T \models \neg\varphi$  для любого  $\sigma$ -предложения  $\varphi$ ).

## Аксиоматизируемые классы

- ▶ Теория  $T$  — множество  $\sigma$ -предложений.
- ▶ Теории  $T$  соответствует класс ее моделей  $\text{Mod}(T) = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \models T\}$
- ▶ Классу структур  $K \subseteq \text{Str}_\sigma$  соответствует его теория  $\text{Th}(K) = \{\varphi \in \text{Sent}_\sigma \mid \forall \mathbb{A} \in K (\mathbb{A} \models \varphi)\}$ .
- ▶ Класс структур  $K$  *аксиоматизируем*, если  $K = \text{Mod}(T)$  для некоторой теории  $T$ .
- ▶ Класс структур  $K$  *конечно аксиоматизируем*, если  $K = \text{Mod}(T)$  для некоторой конечной теории  $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . Это равносильно аксиоматизируемости одной формулой  $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ .

## Аксиоматизируемые классы: свойства

1. Если  $T \subseteq T'$ , то  $\text{Mod}(T) \supseteq \text{Mod}(T')$ ;
2. Если  $K \subseteq K'$ , то  $\text{Th}(K) \supseteq \text{Th}(K')$ ;
3.  $K \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(K))$  и  $T \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(T))$ ;
4. Класс  $K$  аксиоматизируем тогда и только тогда, когда  $K = \text{Mod}(\text{Th}(K))$ ;
5. Любое пересечение аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом. Объединение двух аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом;
6. Класс  $K$  конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда  $K$  и  $\text{Str}_\sigma \setminus K$  аксиоматизируемы;
7. Класс  $K$  — аксиоматизируем тогда и только тогда, когда  $K$  замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

# Классификация формул

- ▶  $\Sigma_0$  — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- ▶  $\Sigma_1$  — множество всех формул, равносильных формулам вида  $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ , где  $\psi$  — бескванторная;
- ▶  $\Sigma_2$  — множество всех формул, равносильных формулам вида  $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$ , где  $\psi$  — бескванторная, и т.д.;
- ▶ множество  $\Pi_n$  определяется аналогично множеству  $\Sigma_n$  с заменой  $\exists$  на  $\forall$  и наоборот.

# Классификация формул

- ▶  $\Sigma_0$  — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- ▶  $\Sigma_1$  — множество всех формул, равносильных формулам вида  $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ , где  $\psi$  — бескванторная;
- ▶  $\Sigma_2$  — множество всех формул, равносильных формулам вида  $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$ , где  $\psi$  — бескванторная, и т.д.;
- ▶ множество  $\Pi_n$  определяется аналогично множеству  $\Sigma_n$  с заменой  $\exists$  на  $\forall$  и наоборот.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.  $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$ ;

$\varphi \in \Pi_n$  тогда и только тогда, когда  $\neg \varphi \in \Sigma_n$ ;

$\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = \text{For}_\sigma$ .

## $\Pi_1$ - и $\Pi_2$ -аксиоматизируемость

В теории моделей имеется ряд теорем об аксиоматизируемости классов структур предложениями того или иного вида. Приведем два важных примера.

**ТЕОРЕМА.** Аксиоматизируемый класс является  $\Pi_1$ -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур (т.е. если какая-то структура лежит в классе, то и любая её подструктура тоже лежит в нём).



## $\Pi_1$ - и $\Pi_2$ -аксиоматизируемость

В теории моделей имеется ряд теорем об аксиоматизируемости классов структур предложениями того или иного вида. Приведем два важных примера.

**ТЕОРЕМА.** Аксиоматизируемый класс является  $\Pi_1$ -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур (т.е. если какая-то структура лежит в классе, то и любая её подструктура тоже лежит в нём).

Класс структур  $K$  замкнут относительно объединений цепей структур, если из  $\forall n (\mathbb{A}_n \in K)$  и  $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots$  следует  $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$ .

**ТЕОРЕМА.** Аксиоматизируемый класс является  $\Pi_2$ -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

# Полные теории

$\sigma$ -Теория  $T$  называется *полной*, если она имеет модель и, для любого  $\sigma$ -предложения  $\varphi$ , либо  $T \models \varphi$ , либо  $T \models \neg\varphi$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории  $T$ , имеющей модель, равносильны следующие условия:

$T$  — полна;

$[T] = \text{Th}(\mathbb{A})$ , для любой  $\mathbb{A} \models T$  (где  $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$  — множество всех логических следствий теории  $T$ ;

$\text{Th}(\mathbb{A}) = \text{Th}(\mathbb{B})$  для любых  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ .

# Полные теории

$\sigma$ -Теория  $T$  называется *полной*, если она имеет модель и, для любого  $\sigma$ -предложения  $\varphi$ , либо  $T \models \varphi$ , либо  $T \models \neg\varphi$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории  $T$ , имеющей модель, равносильны следующие условия:

$T$  — полна;

$[T] = \text{Th}(\mathbb{A})$ , для любой  $\mathbb{A} \models T$  (где  $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$  — множество всех логических следствий теории  $T$ ;

$\text{Th}(\mathbb{A}) = \text{Th}(\mathbb{B})$  для любых  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ .

Теория называется *категоричной в мощности  $\kappa$* , если она имеет единственную с точностью до изоморфизма модель мощности  $\kappa$ .

Ранее уже доказали простую, но важную теорему:

Если  $\sigma$ -теория не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности  $\geq |\text{For}_\sigma|$ , то она полна.

## Модельно полные теории

Теория  $T$  *модельно полна*, если она имеет модель и отношения  $\subseteq, \preceq$  совпадают на  $\text{Mod}(T)$ .

# Модельно полные теории

Теория  $T$  модельно полна, если она имеет модель и отношения  $\subseteq, \preceq$  совпадают на  $\text{Mod}(T)$ .

ТЕОРЕМА. Для теории  $T$ , имеющей модель, равносильны:

1.  $T$  — модельно полна.
2. Для любой  $\mathbb{A} \models T$ , теория  $T \cup D(\mathbb{A})$  полна.
3. Для любых  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$  из  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$  следует, что любое  $\Sigma_1$ -предложение в сигнатуре  $\sigma_A$ , которое истинно в  $\mathbb{B}_A$ , будет истинно и в  $\mathbb{A}_A$ .
4.  $\Sigma_1 = \Pi_1$  по модулю  $T$  (т.е. любая  $\Sigma_1$ -формула  $\varphi(\bar{x})$  равносильна подходящей  $\Pi_1$ -формуле  $\psi(\bar{x})$  в  $T$ :  $T \models \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$ ).
5.  $For_\sigma = \Pi_1$  по модулю  $T$ .

## Дополнительные свойства

### ТЕОРЕМА.

1. Любая модельно полная теория  $\Pi_2$ -аксиоматизируемая.
2. Если модельно полная теория  $T$  имеет модель, которая вкладывается в любую модель  $T$ , то  $T$  полна.
3. Если для любых двух моделей модельно полной теории  $T$  существует третья модель, в которую они обе вкладываются, то  $T$  полна.
4. Теория  $T$  допускает элиминацию кванторов (т.е.  $For_\sigma = \Pi_0$  по модулю  $T$ ) в точности тогда, когда теория  $T \cup D(\mathbb{A})$  полна для любой  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \models T$ .
5. Если теория  $\Pi_2$ -аксиоматизируема, не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности  $\lambda \geq |For_\sigma|$ , то она модельно полна.

# Игры Эренфойхта

Считаем, что  $\sigma$  конечна, содержит  $=$ , и не содержит функциональных символов местности  $>0$ . Пусть  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  —  $\sigma$ -структуры с непересекающимися носителями.

# Игры Эренфойхта

Считаем, что  $\sigma$  конечна, содержит  $=$ , и не содержит функциональных символов местности  $>0$ . Пусть  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  —  $\sigma$ -структуры с непересекающимися носителями.

В игре Эренфойхта с  $n$  ходами  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  каждый из игроков I и II делает по  $n$  ходов (при  $n = 0$  ходов нет). При  $n > 0$ , на первом ходе I выбирает элемент  $a \in A$  или  $b \in B$ , II отвечает выбором элемента в другой структуре; получили обогащение каждой структуры константой:  $(\mathbb{A}, a)$ ,  $(\mathbb{B}, b)$ . Далее игра идет как  $G_{n-1}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))$ .



# Игры Эренфойхта

Считаем, что  $\sigma$  конечна, содержит  $=$ , и не содержит функциональных символов местности  $>0$ . Пусть  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  —  $\sigma$ -структуры с непересекающимися носителями.

В игре Эренфойхта с  $n$  ходами  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  каждый из игроков I и II делает по  $n$  ходов (при  $n = 0$  ходов нет). При  $n > 0$ , на первом ходе I выбирает элемент  $a \in A$  или  $b \in B$ , II отвечает выбором элемента в другой структуре; получили обогащение каждой структуры константой:  $(\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)$ . Далее игра идет как  $G_{n-1}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))$ .

II выигрывает в описанной партии, если конечные подструктуры, порождённые построенными кортежами элементов  $\bar{a}, \bar{b}$ , изоморфны относительно соответствия  $a_i \mapsto b_i$ ,  $c^{\mathbb{A}} \mapsto c^{\mathbb{B}}$ ; пустые подструктуры изоморфны по определению.

# Игры Эренфойхта

Считаем, что  $\sigma$  конечна, содержит  $=$ , и не содержит функциональных символов местности  $>0$ . Пусть  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  —  $\sigma$ -структуры с непересекающимися носителями.

В игре Эренфойхта с  $n$  ходами  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  каждый из игроков I и II делает по  $n$  ходов (при  $n = 0$  ходов нет). При  $n > 0$ , на первом ходе I выбирает элемент  $a \in A$  или  $b \in B$ , II отвечает выбором элемента в другой структуре; получили обогащение каждой структуры константой:  $(\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)$ . Далее игра идет как  $G_{n-1}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))$ .

II выигрывает в описанной партии, если конечные подструктуры, порождённые построенными кортежами элементов  $\bar{a}, \bar{b}$ , изоморфны относительно соответствия  $a_i \mapsto b_i$ ,  $c^{\mathbb{A}} \mapsto c^{\mathbb{B}}$ ; пустые подструктуры изоморфны по определению.

Игра  $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  отличается только тем, что первый ход I начинается выбором числа  $n$ ; далее игра идёт как  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ .

# Стратегии

Стратегия для игрока в ИЭ — правило, определяющее его ход в любой текущей позиции. Более формально, стратегия для I может быть задана функцией  $(A \cdot B)^* \rightarrow A \cup B$  (используются обозначения из теории формальных языков), а стратегия для II — парой функций  $(A \cdot B)^* \cdot A \rightarrow B$  и  $(A \cdot B)^* \cdot B \rightarrow A$ . Еще точнее, в игре  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  достаточны ограничения этих функций на слова длины  $< 2n$ , а для игры  $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  в начале стратегия I еще должна выбрать  $n$ .

# Стратегии

Стратегия для игрока в ИЭ — правило, определяющее его ход в любой текущей позиции. Более формально, стратегия для I может быть задана функцией  $(A \cdot B)^* \rightarrow A \cup B$  (используются обозначения из теории формальных языков), а стратегия для II — парой функций  $(A \cdot B)^* \cdot A \rightarrow B$  и  $(A \cdot B)^* \cdot B \rightarrow A$ . Еще точнее, в игре  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  достаточны ограничения этих функций на слова длины  $< 2n$ , а для игры  $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  в начале стратегия I еще должна выбрать  $n$ .

Стратегия для данного игрока называется выигрышной, если игрок, следуя этой стратегии, выигрывает в любой партии, при любых ходах своего оппонента.

# Стратегии

Стратегия для игрока в ИЭ — правило, определяющее его ход в любой текущей позиции. Более формально, стратегия для I может быть задана функцией  $(A \cdot B)^* \rightarrow A \cup B$  (используются обозначения из теории формальных языков), а стратегия для II — парой функций  $(A \cdot B)^* \cdot A \rightarrow B$  и  $(A \cdot B)^* \cdot B \rightarrow A$ . Еще точнее, в игре  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  достаточны ограничения этих функций на слова длины  $< 2n$ , а для игры  $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  в начале стратегия I еще должна выбрать  $n$ .

Стратегия для данного игрока называется выигрышной, если игрок, следуя этой стратегии, выигрывает в любой партии, при любых ходах своего оппонента.

Выражение  $G_n^I(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  означает, что игрок I имеет выигрышную стратегию в игре  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ . Аналогично определяются сокращения  $G_n^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ ,  $G^I(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ ,  $G^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ .

## Свойства выигрышных стратегий

1.  $G_{n+1}^I(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\exists a \in \mathbb{A} \forall b \in \mathbb{B} G_n^I((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))) \vee (\exists b \in \mathbb{B} \forall a \in \mathbb{A} G_n^I((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)))$ .
2.  $G_{n+1}^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbb{A} \exists b \in \mathbb{B} G_n^{II}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))) \wedge (\forall b \in \mathbb{B} \exists a \in \mathbb{A} G_n^{II}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)))$
3.  $G_{n+1}^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \implies G_n^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ .
4.  $G^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow \forall n G_n^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ .
5.  $G^I(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow \exists n G_n^I(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ .
6. В любой игре  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  ровно один из игроков имеет выигрышную стратегию.
7. В любой игре  $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  ровно один из игроков имеет выигрышную стратегию.

## Кванторная глубина

*Кванторная глубина* формулы  $\varphi$  — натуральное число  $q(\varphi)$ , определяемое рекурсией по  $\varphi$ :

Если  $\varphi$  атомарная, то  $q(\varphi) = 0$ ;

Если  $\varphi = \neg\varphi_1$ , то  $q(\varphi) = q(\varphi_1)$ ;

Если  $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ , то  $q(\varphi) = \max(q(\varphi_1), q(\varphi_2))$ ;

Если  $\varphi = \exists x \varphi_1$ , то  $q(\varphi) = q(\varphi_1) + 1$ .

## Кванторная глубина

*Кванторная глубина* формулы  $\varphi$  — натуральное число  $q(\varphi)$ , определяемое рекурсией по  $\varphi$ :

Если  $\varphi$  атомарная, то  $q(\varphi) = 0$ ;

Если  $\varphi = \neg\varphi_1$ , то  $q(\varphi) = q(\varphi_1)$ ;

Если  $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ , то  $q(\varphi) = \max(q(\varphi_1), q(\varphi_2))$ ;

Если  $\varphi = \exists x \varphi_1$ , то  $q(\varphi) = q(\varphi_1) + 1$ .

Пусть  $C_n^{\bar{x}}$  — множество всех  $\sigma$ -формул  $\varphi(\bar{x})$  глубины не более  $n$ . Если  $\varphi$  — предложение, сокращаем  $C_n^{\emptyset}$  до  $C_n$ .



## Кванторная глубина

*Кванторная глубина* формулы  $\varphi$  — натуральное число  $q(\varphi)$ , определяемое рекурсией по  $\varphi$ :

Если  $\varphi$  атомарная, то  $q(\varphi) = 0$ ;

Если  $\varphi = \neg\varphi_1$ , то  $q(\varphi) = q(\varphi_1)$ ;

Если  $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ , то  $q(\varphi) = \max(q(\varphi_1), q(\varphi_2))$ ;

Если  $\varphi = \exists x \varphi_1$ , то  $q(\varphi) = q(\varphi_1) + 1$ .

Пусть  $C_n^{\bar{x}}$  — множество всех  $\sigma$ -формул  $\varphi(\bar{x})$  глубины не более  $n$ . Если  $\varphi$  — предложение, сокращаем  $C_n^{\emptyset}$  до  $C_n$ .

ЛЕММА. Фактор-множество  $C_n^{\bar{x}} / \equiv$  по отношению равносильности формул конечно.

## Выигрышные стратегии и элементарная эквивалентность

ТЕОРЕМА.  $G_n^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \iff \forall \varphi \in C_n (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}).$

# Выигрышные стратегии и элементарная эквивалентность

ТЕОРЕМА.  $G_n^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \iff \forall \varphi \in C_n (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}).$

СЛЕДСТВИЕ.  $G^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \iff \forall \varphi \in \text{Sent}_\sigma (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}) \iff \mathbb{A} \equiv \mathbb{B}.$

# Выигрышные стратегии и элементарная эквивалентность

ТЕОРЕМА.  $G_n^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \iff \forall \varphi \in C_n (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}).$

СЛЕДСТВИЕ.  $G^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \iff \forall \varphi \in \text{Sent}_\sigma (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}) \iff \mathbb{A} \equiv \mathbb{B}.$

Отношение элементарной эквивалентности структур гораздо грубее чем отношение изоморфизма, однако во многих случаях оно полезно, поскольку дает важную классификацию структур, и с ним легче работать. В приложениях важны также следующие варианты элементарной эквивалентности: говорят, что  $\mathbb{A}$   $n$ -эквивалентно  $\mathbb{B}$  (обозначение  $\mathbb{A} \equiv_n \mathbb{B}$ ), если  $\forall \varphi \in C_n (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}).$

## Основной результат ЛП

Множество всех общезначимых предложений любой конечной сигнатуры перечислимо, т.е. существует алгоритм, который перечисляет все элементы этого множества, и никакие другие предложения. Схема доказательства:

## Основной результат ЛП

Множество всех общезначимых предложений любой конечной сигнатуры перечислимо, т.е. существует алгоритм, который перечисляет все элементы этого множества, и никакие другие предложения. Схема доказательства:

- 1) фиксируются некоторые конкретные простые общезначимые предложения (называемые аксиомами);
- 2) фиксируются некоторые простые правила, позволяющие чисто синтаксически выводить одни формулы из других;
- 3) доказывается, что многократное применение правил вывода к аксиомам и уже выведенным формулам порождает все общезначимые формулы.

## Основной результат ЛП

Множество всех общезначимых предложений любой конечной сигнатуры перечислимо, т.е. существует алгоритм, который перечисляет все элементы этого множества, и никакие другие предложения. Схема доказательства:

- 1) фиксируются некоторые конкретные простые общезначимые предложения (называемые аксиомами);
- 2) фиксируются некоторые простые правила, позволяющие чисто синтаксически выводить одни формулы из других;
- 3) доказывается, что многократное применение правил вывода к аксиомам и уже выведенным формулам порождает все общезначимые формулы.

Глубина основного результата в том, что определение Тарского не дает никакой верхней границы для вычислительной сложности множества общезначимых предложений. Известно, что не существует логики, расширяющей ЛП и удовлетворяющей теоремам компактности и основному результату.

# Исчисление секвенций

Известно много способов фиксации аксиом и правил вывода. Напомним *исчисление секвенций с равенством*. Секвенция — упорядоченная пара  $(\Gamma, \Delta)$  конечных множеств  $\sigma$ -формул, записанная в виде  $\Gamma \vdash \Delta$ . Неформальный смысл: из всех формул слева от  $\vdash$  вытекает хотя бы одна формула справа.



# Исчисление секвенций

Известно много способов фиксации аксиом и правил вывода. Напомним *исчисление секвенций с равенством*. Секвенция — упорядоченная пара  $(\Gamma, \Delta)$  конечных множеств  $\sigma$ -формул, записанная в виде  $\Gamma \vdash \Delta$ . Неформальный смысл: из всех формул слева от  $\vdash$  вытекает хотя бы одна формула справа.

Аксиомы:  $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi; \quad \Gamma \vdash \Delta, t = t$

# Исчисление секвенций

Известно много способов фиксации аксиом и правил вывода. Напомним *исчисление секвенций с равенством*. Секвенция — упорядоченная пара  $(\Gamma, \Delta)$  конечных множеств  $\sigma$ -формул, записанная в виде  $\Gamma \vdash \Delta$ . Неформальный смысл: из всех формул слева от  $\vdash$  вытекает хотя бы одна формула справа.

Аксиомы:  $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi; \quad \Gamma \vdash \Delta, t = t$

Правила:  $\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t=t', \varphi(t') \vdash \Delta, \psi(t')}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t'=t, \varphi(t') \vdash \Delta, \psi(t')}$$

Дополнительные правила см. ниже

## Дополнительные правила вывода

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta},$$
$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta; \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg \varphi \vdash \Delta},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(y) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg \varphi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(y)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi(x)}$$

# Проблема разрешимости ЛП

Множество общезначимых предложений перечислимо, но будет ли оно вычислимым, т.е. существует ли алгоритм, который по данному предложению определяет, будет ли оно общезначимо? Замечательный результат логики состоит в том, что в общем случае (для любой конечной сигнатуры) ответ отрицателен.

# Проблема разрешимости ЛП

Множество общезначимых предложений перечислимо, но будет ли оно вычислимым, т.е. существует ли алгоритм, который по данному предложению определяет, будет ли оно общезначимо? Замечательный результат логики состоит в том, что в общем случае (для любой конечной сигнатуры) ответ отрицателен.

Отметим, что интуитивного понятия алгоритма достаточно для того, чтобы убедиться в вычислимости многих функций (например,  $x \cdot y$ ,  $x^y$ ,  $x!$  и другие знакомые функции и предикаты из теории чисел). Совершенно другого подхода требует доказательство того, что какая-то функция или отношение не является вычислимой. Для строгого доказательства необходимо иметь строгое определение вычислимой функции.

# Рекурсивные функции и предикаты

Сначала будем изучать вычислимость лишь на  $\mathbb{N}$ , в частности значения всех переменных натуральные. Определим понятие рекурсивной функции - одну из формализаций понятия вычислимой функции.

# Рекурсивные функции и предикаты

Сначала будем изучать вычислимость лишь на  $\mathbb{N}$ , в частности значения всех переменных натуральные.

Определим понятие рекурсивной функции - одну из формализаций понятия вычислимой функции.

Если предикат  $P(x)$  истинен при некотором значении  $x \in \mathbb{N}$ , то  $\mu x P(x)$  — наименьшее число из  $\mathbb{N}$ , для которого предикат  $P(x)$  истинен. Например,  $\mu x (4 < x^2) = 3$ .

# Рекурсивные функции и предикаты

Сначала будем изучать вычислимость лишь на  $\mathbb{N}$ , в частности значения всех переменных натуральные.

Определим понятие рекурсивной функции - одну из формализаций понятия вычислимой функции.

Если предикат  $P(x)$  истинен при некотором значении  $x \in \mathbb{N}$ , то  $\mu x P(x)$  — наименьшее число из  $\mathbb{N}$ , для которого предикат  $P(x)$  истинен. Например,  $\mu x (4 < x^2) = 3$ .

При  $n > 0$  и  $1 \leq k \leq n$  определим  $n$ -местную функцию  $I_n^k$  следующим образом:  $I_n^k(x_1, \dots, x_n) = x_k$ .

Введем также двухместную функцию  $l(x, y)$ :  $l(x, y) = 0$  при  $x < y$  и  $l(x, y) = 1$  при  $x \geq y$ .



# Рекурсивные функции

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Функции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $l$  и  $I_n^k$  рекурсивны;

# Рекурсивные функции

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Функции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $l$  и  $I_n^k$  рекурсивны;

если рекурсивны функции  $g(y_1, \dots, y_k)$ ,  
 $h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x})$ , то функция  $g(h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x}))$   
рекурсивна;

# Рекурсивные функции

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Функции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $l$  и  $I_n^k$  рекурсивны;

если рекурсивны функции  $g(y_1, \dots, y_k)$ ,  
 $h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x})$ , то функция  $g(h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x}))$   
рекурсивна;

если функция  $g(\bar{x}, y)$  рекурсивна и  
 $\forall \bar{x} \exists y (g(\bar{x}, y) = 0)$ , то функция  
 $f(\bar{x}) = \mu y (g(\bar{x}, y) = 0)$  рекурсивна;

# Рекурсивные функции

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Функции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $l$  и  $I_n^k$  рекурсивны;

если рекурсивны функции  $g(y_1, \dots, y_k)$ ,  
 $h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x})$ , то функция  $g(h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x}))$   
рекурсивна;

если функция  $g(\bar{x}, y)$  рекурсивна и  
 $\forall \bar{x} \exists y (g(\bar{x}, y) = 0)$ , то функция  
 $f(\bar{x}) = \mu y (g(\bar{x}, y) = 0)$  рекурсивна;  
других рекурсивных функций нет.

## Рекурсивность и вычислимость

Нетрудно показать, что всякая рекурсивная функция вычислима. Достаточно заметить:

## Рекурсивность и вычислимость

Нетрудно показать, что всякая рекурсивная функция вычислима. Достаточно заметить:

функции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $l$  и  $I_n^k$  вычислимы;

если функции  $g(y_1, \dots, y_k)$  и  $h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x})$  вычислимы, то функция  $g(h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x}))$  вычислима;

если  $\forall \bar{x} \exists y (g(\bar{x}, y) = 0)$  и функция  $g(\bar{x}, y)$  вычислима, то функция  $f(\bar{x}) = \mu y (g(\bar{x}, y) = 0)$  вычислима.

Верно ли обратное? Почти все специалисты считают верным следующее утверждение.

## Рекурсивность и вычислимость

Нетрудно показать, что всякая рекурсивная функция вычислима. Достаточно заметить:

функции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $l$  и  $I_n^k$  вычислимы;

если функции  $g(y_1, \dots, y_k)$  и  $h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x})$  вычислимы, то функция  $g(h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x}))$  вычислима;

если  $\forall \bar{x} \exists y (g(\bar{x}, y) = 0)$  и функция  $g(\bar{x}, y)$  вычислима, то функция  $f(\bar{x}) = \mu y (g(\bar{x}, y) = 0)$  вычислима.

Верно ли обратное? Почти все специалисты считают верным следующее утверждение.

**ТЕЗИС ЧЁРЧА.** Класс всех рекурсивных функций совпадает с классом всех вычислимых функций.

## Рекурсивные предикаты

1. Характеристической функцией предиката  $P(\bar{x})$  называют функцию  $\chi_P(\bar{x})$ , задаваемую условиями:  $\chi_P(\bar{x}) = 0$ , если  $P(\bar{x}) = \text{И}$ ;  $\chi_P(\bar{x}) = 1$ , если  $P(\bar{x}) = \text{Л}$ .
2. Предикат рекурсивен, если его характеристическая функция рекурсивна.



## Рекурсивные предикаты

1. Характеристической функцией предиката  $P(\bar{x})$  называют функцию  $\chi_P(\bar{x})$ , задаваемую условиями:  $\chi_P(\bar{x}) = 0$ , если  $P(\bar{x}) = \text{И}$ ;  $\chi_P(\bar{x}) = 1$ , если  $P(\bar{x}) = \text{Л}$ .
2. Предикат рекурсивен, если его характеристическая функция рекурсивна.

Легко видеть, что определенная выше функция  $l$  есть характеристическая функция предиката  $<$  :  $l(x, y) = \chi_{<}(x, y)$ . Поэтому предикат  $<$  рекурсивен.

## Рекурсивные предикаты

1. Характеристической функцией предиката  $P(\bar{x})$  называют функцию  $\chi_P(\bar{x})$ , задаваемую условиями:  $\chi_P(\bar{x}) = 0$ , если  $P(\bar{x}) = \text{И}$ ;  $\chi_P(\bar{x}) = 1$ , если  $P(\bar{x}) = \text{Л}$ .
2. Предикат рекурсивен, если его характеристическая функция рекурсивна.

Легко видеть, что определенная выше функция  $l$  есть характеристическая функция предиката  $<$  :  $l(x, y) = \chi_{<}(x, y)$ . Поэтому предикат  $<$  рекурсивен.

Из тезиса Черча следует, что класс всех рекурсивных предикатов совпадает с классом всех вычислимых предикатов.

# Свойства рекурсивных функций и предикатов

1. Если предикат  $P(y_1, \dots, y_k)$  и функции  $h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x})$  рекурсивны, то рекурсивен и предикат  $P(h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x}))$ .
2. Если предикат  $P(\bar{x}, y)$  рекурсивен и  $\forall \bar{x} \exists y P(\bar{x}, y)$ , то функция  $f(\bar{x}) = \mu y P(\bar{x}, y)$  рекурсивна.
3. Если предикаты  $P(\bar{x})$ ,  $Q(\bar{x})$  и  $R(\bar{x}, y)$  рекурсивны, то предикаты  $P(\bar{x}) \wedge Q(\bar{x})$ ,  $P(\bar{x}) \vee Q(\bar{x})$ ,  $P(\bar{x}) \rightarrow Q(\bar{x})$ ,  $\neg p(\bar{x})$ ,  $\forall y < z R(\bar{x}, y)$  и  $\exists y < z R(\bar{x}, y)$  рекурсивны.
4. Пусть  $P_1(\bar{x}), \dots, P_k(\bar{x})$  — рекурсивные предикаты такие, что для любого истинен ровно один из этих предикатов, а  $g_1(\bar{x}), \dots, g_k(\bar{x})$  — рекурсивные функции. Тогда рекурсивна и функция

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} g_1(\bar{x}), & \text{если } P_1(\bar{x}) = \text{И} \\ \dots\dots\dots & \\ g_k(\bar{x}), & \text{если } P_k(\bar{x}) = \text{И} \end{cases}$$

## Функция Гёделя

ТЕОРЕМА. Существует рекурсивная функция  $\beta(a, i)$  такая, что:  $\beta(0, i) = 0$ ;  $\beta(a + 1, i) \leq a$ ; для любых  $n, a_0, \dots, a_n$  из  $\mathbb{N}$  найдется  $a \in \mathbb{N}$  такое, что  $\beta(a, 0) = a_0, \dots, \beta(a, n) = a_n$ .

## Функция Гёделя

ТЕОРЕМА. Существует рекурсивная функция  $\beta(a, i)$  такая, что:  $\beta(0, i) = 0$ ;  $\beta(a + 1, i) \leq a$ ; для любых  $n, a_0, \dots, a_n$  из  $\mathbb{N}$  найдется  $a \in \mathbb{N}$  такое, что  $\beta(a, 0) = a_0, \dots, \beta(a, n) = a_n$ .

Рекурсивная функция  $p(x, y) = (x + y)^2 + x + 1$  — инъекция из  $\mathbb{N}^2$  в  $\mathbb{N}$  такая, что  $x, y < p(x, y)$ .

$$\beta(a, i) = \mu x ((a = 0) \vee (x + 1 = a) \vee \exists y < a \exists z < a (a = p(y, z) \wedge y \dot{=} (1 + z \cdot p(x, i)))).$$

## Функция Гёделя

ТЕОРЕМА. Существует рекурсивная функция  $\beta(a, i)$  такая, что:  $\beta(0, i) = 0$ ;  $\beta(a + 1, i) \leq a$ ; для любых  $n, a_0, \dots, a_n$  из  $\mathbb{N}$  найдется  $a \in \mathbb{N}$  такое, что  $\beta(a, 0) = a_0, \dots, \beta(a, n) = a_n$ .

Рекурсивная функция  $p(x, y) = (x + y)^2 + x + 1$  — инъекция из  $\mathbb{N}^2$  в  $\mathbb{N}$  такая, что  $x, y < p(x, y)$ .

$$\beta(a, i) = \mu x ((a = 0) \vee (x + 1 = a) \vee \exists y < a \exists z < a (a = p(y, z) \wedge y \dot{=} (1 + z \cdot p(x, i))))).$$

Функция  $\beta$  позволяет любой последовательности  $a_1, \dots, a_n$  сопоставить ее код  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \mu a (\beta(a, 0) = n \wedge \beta(a, 1) = a_1 \wedge \dots \wedge \beta(a, n) = a_n)$ .

## Свойства кодирования. Определение по индукции

1. Если  $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , то  $\beta(a, 0) = n$  и  $\beta(a, i) = a_i < a$  при  $1 \leq i \leq n$ .
2. Если  $(a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_m)$ , то  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \neq \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ .
3. Существует рекурсивная функция  $\text{нач}(a, i)$ , которая для любого  $a$ , являющегося кодом последовательности  $a_1, \dots, a_n$  длины  $n \geq i$ , равна коду начального отрезка этой последовательности длины  $i$ .
4. Предикат  $\text{Пос}(a)$ , истинный в точности тогда, когда  $a$  есть код некоторой последовательности, рекурсивен.

## Свойства кодирования. Определение по индукции

1. Если  $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , то  $\beta(a, 0) = n$  и  $\beta(a, i) = a_i < a$  при  $1 \leq i \leq n$ .
2. Если  $(a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_m)$ , то  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \neq \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ .
3. Существует рекурсивная функция  $\text{нач}(a, i)$ , которая для любого  $a$ , являющегося кодом последовательности  $a_1, \dots, a_n$  длины  $n \geq i$ , равна коду начального отрезка этой последовательности длины  $i$ .
4. Предикат  $\text{Пос}(a)$ , истинный в точности тогда, когда  $a$  есть код некоторой последовательности, рекурсивен.

ТЕОРЕМА. 1. Если  $g(\bar{x}, y, z)$  рекурсивна, то  $f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y, \langle f(\bar{x}, 0), \dots, f(\bar{x}, y-1) \rangle)$  тоже рекурсивна.

2. Если  $Q(\bar{x}, y, z)$  рекурсивен, то  $P(\bar{x}, y) = Q(\bar{x}, y, \langle \chi_P(\bar{x}, 0), \dots, \chi_P(\bar{x}, y-1) \rangle)$  тоже рекурсивен.



## Рекурсивная биекция между $\mathbb{N}^k$ и $\mathbb{N}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого  $k \geq 2$  существует рекурсивная биекция между  $\mathbb{N}^k$  и  $\mathbb{N}$ . Точнее, существуют рекурсивная биекция  $c^k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  и рекурсивные функции  $p_1^k(x), \dots, p_k^k(x)$  такие, что  $x \mapsto (p_1^k(x), \dots, p_k^k(x))$  — функция, обратная к  $c^k$ .

## Рекурсивная биекция между $\mathbb{N}^k$ и $\mathbb{N}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого  $k \geq 2$  существует рекурсивная биекция между  $\mathbb{N}^k$  и  $\mathbb{N}$ . Точнее, существуют рекурсивная биекция  $c^k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  и рекурсивные функции  $p_1^k(x), \dots, p_k^k(x)$  такие, что  $x \mapsto (p_1^k(x), \dots, p_k^k(x))$  — функция, обратная к  $c^k$ .

Индукция по  $k$ . При  $k = 2$  полагаем

$$c^2(x_1, x_2) = 2^{x_1}(2x_2 + 1) - 1, \quad p_1^2(x) = \mu y((x + 1) \nmid 2^{y+1}), \\ p_2^2(x) = ((x + 1)/2^{p_1^2(x)} - 1)/2.$$

## Рекурсивная биекция между $\mathbb{N}^k$ и $\mathbb{N}$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** Для любого  $k \geq 2$  существует рекурсивная биекция между  $\mathbb{N}^k$  и  $\mathbb{N}$ . Точнее, существуют рекурсивная биекция  $c^k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  и рекурсивные функции  $p_1^k(x), \dots, p_k^k(x)$  такие, что  $x \mapsto (p_1^k(x), \dots, p_k^k(x))$  — функция, обратная к  $c^k$ .

Индукция по  $k$ . При  $k = 2$  полагаем

$$c^2(x_1, x_2) = 2^{x_1}(2x_2 + 1) - 1, \quad p_1^2(x) = \mu y((x + 1) \nmid 2^{y+1}), \\ p_2^2(x) = ((x + 1)/2^{p_1^2(x)} - 1)/2.$$

При  $r = 3$  полагаем  $c^3(x_1, x_2, x_3) = (c^2(x_1, x_2), x_3)$ ,  
 $p_1^3(x) = p_1^2(p_1^2(x))$ ,  $p_2^3(x) = p_2^2(p_1^2(x))$ ,  $p_3^3(x) = p_2^2(x)$ .

И так далее.

# Кодирование исчисления предикатов

Чтобы применить рекурсивные функции к логике, нужно научиться представлять логические объекты (термы, формулы, выводы) натуральными числами (поскольку рекурсивные функции определены и принимают значения в  $\mathbb{N}$ ), т. е. ввести кодирование этих объектов. Такое кодирование можно построить для любой конечной или счетной сигнатуры, а мы сделаем это для сигнатуры  $\Sigma = \{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$ .

# Кодирование исчисления предикатов

Чтобы применить рекурсивные функции к логике, нужно научиться представлять логические объекты (термы, формулы, выводы) натуральными числами (поскольку рекурсивные функции определены и принимают значения в  $\mathbb{N}$ ), т. е. ввести кодирование этих объектов. Такое кодирование можно построить для любой конечной или счетной сигнатуры, а мы сделаем это для сигнатуры  $\Sigma = \{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$ .

Каждому исходному символу сопоставим число в соответствии с таблицей:

$v_n$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\neg$	$\forall$	$\exists$	$=$	$<$	$+$	$\cdot$	$0$	$1$
$2n$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

# Кодирование исчисления предикатов

Сопоставим каждому терму  $t$  его код  $\ulcorner t \urcorner \in \mathbb{N}$ :  $\ulcorner v_n \urcorner = \langle 2n \rangle$ ,  
 $\ulcorner 0 \urcorner = \langle 21 \rangle$ ,  $\ulcorner 1 \urcorner = \langle 23 \rangle$ ,  $\ulcorner t_1 + t_2 \urcorner = \langle 17, \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$ ,  
 $\ulcorner t_1 \cdot t_2 \urcorner = \langle 19, \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$ , где  $t_1$  и  $t_2$  - термы.

# Кодирование исчисления предикатов

Сопоставим каждому терму  $t$  его код  $\ulcorner t \urcorner \in \mathbb{N}$ :  $\ulcorner v_n \urcorner = \langle 2n \rangle$ ,  
 $\ulcorner 0 \urcorner = \langle 21 \rangle$ ,  $\ulcorner 1 \urcorner = \langle 23 \rangle$ ,  $\ulcorner t_1 + t_2 \urcorner = \langle 17, \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$ ,  
 $\ulcorner t_1 \cdot t_2 \urcorner = \langle 19, \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$ , где  $t_1$  и  $t_2$  - термы.

Каждой формуле  $\varphi$  сопоставим ее код  $\ulcorner \varphi \urcorner \in \mathbb{N}$ :  
 $\ulcorner s = t \urcorner = \langle 13, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner \rangle$ ,  $\ulcorner s < t \urcorner = \langle 15, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner \rangle$ ,  
 $\ulcorner \psi \wedge \theta \urcorner = \langle 1, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner \rangle$ ,  $\ulcorner \psi \vee \theta \urcorner = \langle 3, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner \rangle$ ,  
 $\ulcorner \psi \rightarrow \theta \urcorner = \langle 5, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner \rangle$ ,  $\ulcorner \neg \psi \urcorner = \langle 7, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$ ,  
 $\ulcorner \forall v_n \psi \urcorner = \langle 9, 2n, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$ ,  $\ulcorner \exists v_n \psi \urcorner = \langle 11, 2n, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$ , где  $s$  и  $t$  — термы,  $\psi$  и  $\theta$  — формулы.

# Кодирование исчисления предикатов

Сопоставим каждому терму  $t$  его код  $\ulcorner t \urcorner \in \mathbb{N}$ :  $\ulcorner v_n \urcorner = \langle 2n \rangle$ ,  
 $\ulcorner 0 \urcorner = \langle 21 \rangle$ ,  $\ulcorner 1 \urcorner = \langle 23 \rangle$ ,  $\ulcorner t_1 + t_2 \urcorner = \langle 17, \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$ ,  
 $\ulcorner t_1 \cdot t_2 \urcorner = \langle 19, \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$ , где  $t_1$  и  $t_2$  - термы.

Каждой формуле  $\varphi$  сопоставим ее код  $\ulcorner \varphi \urcorner \in \mathbb{N}$ :  
 $\ulcorner s = t \urcorner = \langle 13, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner \rangle$ ,  $\ulcorner s < t \urcorner = \langle 15, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner \rangle$ ,  
 $\ulcorner \psi \wedge \theta \urcorner = \langle 1, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner \rangle$ ,  $\ulcorner \psi \vee \theta \urcorner = \langle 3, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner \rangle$ ,  
 $\ulcorner \psi \rightarrow \theta \urcorner = \langle 5, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner \rangle$ ,  $\ulcorner \neg \psi \urcorner = \langle 7, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$ ,  
 $\ulcorner \forall v_n \psi \urcorner = \langle 9, 2n, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$ ,  $\ulcorner \exists v_n \psi \urcorner = \langle 11, 2n, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$ , где  $s$  и  $t$  — термы,  $\psi$  и  $\theta$  — формулы.

Каждой секвенции  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \vdash \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$  сопоставим ее код  $\langle \langle \ulcorner \gamma_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \gamma_m \urcorner \rangle, \langle \ulcorner \delta_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \delta_n \urcorner \rangle \rangle$ .



# Кодирование исчисления предикатов

Основным понятиям логики предикатов соответствуют предикаты и функции от кодов термов и формул, в частности:

# Кодирование исчисления предикатов

Основным понятиям логики предикатов соответствуют предикаты и функции от кодов термов и формул, в частности:

Терм( $a$ )  $\equiv a$  есть код некоторого терма;

$\Phi(a)$   $\equiv a$  есть код некоторой формулы;

$\Phi_0(a)$   $\equiv (a$  — код некоторой формулы, не содержащей свободных переменных, отличных от  $v_0$ );

Пр( $a$ )  $\equiv (a$  есть код некоторого предложения);

Сек( $a$ )  $\equiv a$  есть код некоторой секвенции;

$отр(a)$  — функция, равная  $\ulcorner \neg \varphi \urcorner$ , если  $\Phi(a) = И$  и  $a = \ulcorner \varphi \urcorner$ ; если же  $\Phi(a) = Л$ , то  $отр(a) = 0$ ;

$подс(a, b, c)$  — функция, равная  $\ulcorner \varphi(t) \urcorner$ , если  $\Phi(a) = И$ ,  $a = \ulcorner \varphi(v_n) \urcorner$ ,  $b = \ulcorner v_n \urcorner$ , Терм( $c$ ) = И,  $c = \ulcorner t \urcorner$  и допустима подстановка  $\varphi(t)$ ; в противном случае  $подс(a, b, c) = 0$ .

## Кодирование исчисления предикатов

С произвольным множеством формул  $T$  свяжем следующие предикаты:

$$P_T(a) \equiv (\Phi(a) = \mathbb{I}, a = \ulcorner \varphi \urcorner \text{ и } \varphi \in T);$$

$\text{Выв}_T(a, b) \equiv (a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle, n > 0, b = a_n, a_i = \ulcorner S_i \urcorner (1 \leq i \leq n) \text{ и } S_1, \dots, S_n \text{ — вывод секвенции } \vdash \varphi \text{ (с кодом } b) \text{ из } T \text{ в исчислении секвенций.}$

## Кодирование исчисления предикатов

С произвольным множеством формул  $T$  свяжем следующие предикаты:

$P_T(a) \equiv (\Phi(a) = \mathbb{I}, a = \ulcorner \varphi \urcorner \text{ и } \varphi \in T)$ ;

$\text{Выв}_T(a, b) \equiv (a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle, n > 0, b = a_n, a_i = \ulcorner S_i \urcorner (1 \leq i \leq n) \text{ и } S_1, \dots, S_n \text{ — вывод секвенции } \vdash \varphi \text{ (с кодом } b) \text{ из } T \text{ в исчислении секвенций})$ .

СВОЙСТВА: 1. Разным термам, формулам, и секвенциям соответствуют разные коды.

2. Предикаты Терм,  $\Phi$ ,  $\Phi_0$ , Пр, Сек, и функции *отр*, *подс* рекурсивны.

3. Если множество кодов формул из  $T$  рекурсивно, то рекурсивен и предикат  $\text{Выв}_T$ .

4. Существует алгоритм, вычисляющий по терму (формуле, секвенции) соответствующий код.

5. Существует алгоритм, определяющий по заданному коду соответствующий терм (формулу, секвенцию).

# Минимальная арифметика

1.  $0 + 1 = 1$ ;
2.  $\forall x \neg(x + 1 = 0)$ ;
3.  $\forall x \forall y (x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$ ;
4.  $\forall x (x + 0 = x)$ ;
5.  $\forall x \forall y (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$ ;
6.  $\forall x (x \cdot 0 = 0)$ ;
7.  $\forall x \forall y (x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x)$ ;
8.  $\forall x \neg(x < 0)$ ;
9.  $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$ ;
10.  $\forall x \forall y (x < y + 1 \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$ .

# Представимость рекурсивных предикатов в МА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Предикат  $P(x_1, \dots, x_n)$  представим, если существует такая формула  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , что из  $P(\bar{x}) = И$  следует

$МА \vdash \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$  и из  $P(\bar{x}) = Л$  следует

$МА \vdash \neg \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ . Здесь  $\hat{0} = 0$ ,  $\hat{1} = 1$ ,  $\hat{2} = 1 + 1$ ,  $\hat{3} = (1 + 1) + 1$ , и т.д.

2. Функция  $f(\bar{x})$  представима, если существует формула  $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ , удовлетворяющая при всех  $x_1, \dots, x_n$  из  $\mathbb{N}$  соотношению

$МА \vdash \forall y (\psi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, y) \leftrightarrow y = \widehat{f(x)})$ .

# Представимость рекурсивных предикатов в МА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Предикат  $P(x_1, \dots, x_n)$  представим, если существует такая формула  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , что из  $P(\bar{x}) = И$  следует

$МА \vdash \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$  и из  $P(\bar{x}) = Л$  следует

$МА \vdash \neg \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ . Здесь  $\hat{0} = 0$ ,  $\hat{1} = 1$ ,  $\hat{2} = 1 + 1$ ,  $\hat{3} = (1 + 1) + 1$ , и т.д.

2. Функция  $f(\bar{x})$  представима, если существует формула  $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ , удовлетворяющая при всех  $x_1, \dots, x_n$  из  $\mathbb{N}$  соотношению

$МА \vdash \forall y (\psi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, y) \leftrightarrow y = \widehat{f(x)})$ .

ТЕОРЕМА. Любой рекурсивный предикат представим.

# Представимость рекурсивных предикатов в МА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Предикат  $P(x_1, \dots, x_n)$  представим, если существует такая формула  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , что из  $P(\bar{x}) = И$  следует

$МА \vdash \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$  и из  $P(\bar{x}) = Л$  следует

$МА \vdash \neg \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ . Здесь  $\hat{0} = 0$ ,  $\hat{1} = 1$ ,  $\hat{2} = 1 + 1$ ,  $\hat{3} = (1 + 1) + 1$ , и т.д.

2. Функция  $f(\bar{x})$  представима, если существует формула  $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ , удовлетворяющая при всех  $x_1, \dots, x_n$  из  $\mathbb{N}$  соотношению

$МА \vdash \forall y (\psi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, y) \leftrightarrow y = \widehat{f(\bar{x})})$ .

ТЕОРЕМА. Любой рекурсивный предикат представим.

СЛЕДСТВИЕ. Все рекурсивные функции и предикаты определимы в стандартной модели арифметики.



## Неразрешимость и неполнота арифметики

ТЕОРЕМА. Для любого непротиворечивого множества предложений  $T \supseteq MA$  множество  $[T]$  нерекурсивно.

## Неразрешимость и неполнота арифметики

ТЕОРЕМА. Для любого непротиворечивого множества предложений  $T \supseteq MA$  множество  $[T]$  нерекурсивно.

СЛЕДСТВИЕ. 1. Множества  $[MA]$ ,  $[PA]$  и  $Th(\mathbb{N})$  нерекурсивны.

2. Множества  $[MA]$ ,  $[PA]$  и  $Th(\mathbb{N})$  неразрешимы, т.е. не существует алгоритмов, выясняющих по любому предложению, принадлежит ли оно этим множествам.

## Неразрешимость и неполнота арифметики

ТЕОРЕМА. Для любого непротиворечивого множества предложений  $T \supseteq MA$  множество  $[T]$  нерекурсивно.

СЛЕДСТВИЕ. 1. Множества  $[MA]$ ,  $[PA]$  и  $Th(\mathbb{N})$  нерекурсивны.

2. Множества  $[MA]$ ,  $[PA]$  и  $Th(\mathbb{N})$  неразрешимы, т.е. не существует алгоритмов, выясняющих по любому предложению, принадлежит ли оно этим множествам.

ТЕОРЕМА. Любое непротиворечивое рекурсивно перечислимое множество предложений  $T \supseteq MA$  неполно.

# Разрешимые и неразрешимые теории

ТЕОРЕМА. Множество всех общезначимых предложений сигнатуры арифметики нерекурсивно.

# Разрешимые и неразрешимые теории

ТЕОРЕМА. Множество всех общезначимых предложений сигнатуры арифметики нерекурсивно.

Конечные сигнатуры, для которых логика предикатов разрешима, имеют простое описание: это в точности сигнатуры, не имеющие предикатных символов местности более 1, и которые, возможно, имеют единственный одноместный функциональный символ.

# Разрешимые и неразрешимые теории

ТЕОРЕМА. Множество всех общезначимых предложений сигнатуры арифметики нерекурсивно.

Конечные сигнатуры, для которых логика предикатов разрешима, имеют простое описание: это в точности сигнатуры, не имеющие предикатных символов местности более 1, и которые, возможно, имеют единственный одноместный функциональный символ.

Для  $A, B \subseteq \mathbb{N}$ ,  $A$   $m$ -сводится к  $B$  ( $A \leq_m B$ ), если  $A = f^{-1}(B)$  для подходящей рекурсивной функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Справедливы соотношения (структуры рассматриваются в сигнатуре  $\{=, +, \cdot\}$ ):

$$Th(\mathbb{R}) \equiv_m Th(\mathbb{C}) <_m Th(\mathbb{N}) \equiv_m Th(\mathbb{Z}) \equiv_m Th(\mathbb{Q}).$$

# Разрешимые и неразрешимые теории

ТЕОРЕМА. Множество всех общезначимых предложений сигнатуры арифметики нерекурсивно.

Конечные сигнатуры, для которых логика предикатов разрешима, имеют простое описание: это в точности сигнатуры, не имеющие предикатных символов местности более 1, и которые, возможно, имеют единственный одноместный функциональный символ.

Для  $A, B \subseteq \mathbb{N}$ ,  $A$   $m$ -сводится к  $B$  ( $A \leq_m B$ ), если  $A = f^{-1}(B)$  для подходящей рекурсивной функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Справедливы соотношения (структуры рассматриваются в сигнатуре  $\{=, +, \cdot\}$ ):

$$Th(\mathbb{R}) \equiv_m Th(\mathbb{C}) <_m Th(\mathbb{N}) \equiv_m Th(\mathbb{Z}) \equiv_m Th(\mathbb{Q}).$$

Для большинства популярных теорий известно, какие из них разрешимы, а какие нет.

# Программы

*Программа* — это непустая конечная последовательность  $P = (I_0, \dots, I_l)$  операторов, занумерованных начальным сегментом натурального ряда.

*Оператор* — это либо оператор присваивания, либо условный оператор  $r_i = r_j \Rightarrow k$  (условный переход на оператор с меткой  $k$ ).

*Оператор присваивания* — это либо  $r_i := 0$ , либо  $r_i := r_i + 1$ , либо  $r_i := r_j$ .

В программах используются переменные  $r_0, r_1, r_2, \dots$  со значениями в  $\mathbb{N}$ .

Пример программы:



# Программы

*Программа* — это непустая конечная последовательность  $P = (I_0, \dots, I_l)$  операторов, занумерованных начальным сегментом натурального ряда.

*Оператор* — это либо оператор присваивания, либо условный оператор  $r_i = r_j \Rightarrow k$  (условный переход на оператор с меткой  $k$ ).

*Оператор присваивания* — это либо  $r_i := 0$ , либо  $r_i := r_i + 1$ , либо  $r_i := r_j$ .

В программах используются переменные  $r_0, r_1, r_2, \dots$  со значениями в  $\mathbb{N}$ .

Пример программы:

0.  $r_1 := r_1 + 1$
1.  $r_2 := r_2 + 1$
2.  $r_1 = r_0 \Rightarrow 4$
3.  $r_0 = r_0 \Rightarrow 0$
4.  $r_0 := r_2$

## Пример вычисления по программе

время/память	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_0$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	3
$r_1$	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7
$r_2$	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
номер команды	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	4	5

время/ память	0	1	2	3	4	5	...
$r_0$	7	7	7	7	7	7	...
$r_1$	7	8	8	8	8	8	...
$r_2$	2	2	3	3	3	3	...
номер команды	0	1	2	3	0	1	...

# Параметры программы

*Длина программы  $P$  — число  $l + 1$ . Память  $P$  — наибольшее  $m$ , для которого  $r_m$  входит в  $P$ .*

*Состояние программы  $P$  в момент  $t$  при начальных значениях  $r_i = x_i \in \mathbb{N}$  — это кортеж  $(r_0(t), \dots, r_m(t), k(t))$ , где  $r_i(t)$  — содержимое регистра  $r_i$  в момент  $t$ , а  $k(t)$  — номер оператора, выполняющегося в момент  $t$ ;  $(r_0(0), \dots, r_m(0), k(0)) = (x_0, \dots, x_m, 0)$ . Если  $k(t) \geq l + 1$ , то считаем  $k(t + 1) = k(t)$ .*

*Вычисление по программе  $P$  — последовательность состояний  $\{(r_0(t), \dots, r_m(t), k(t))\}_t$ .*

Порядок выполнения команд как в языках программирования. Вычисления по программе заканчиваются, если программа должна выполнять команду с номером большим или равным длине программы.

## *R*-вычислимые функции

Пусть  $P$  — программа и  $n \geq 0$ . Тогда  $P$  вычисляет частичную функцию  $\varphi_P(x_0, \dots, x_n)$  на  $\mathbb{N}$ , которая определяется так: при любых  $\bar{x} \in \mathbb{N}$  зададим значения  $r_0 = x_0, \dots, r_n = x_n$ ;  $r_i = 0$  при  $i > n$ , и запустим  $P$ . Если  $P$  никогда не останавливается (то есть  $\forall t \ k(t) \leq l$ ), то  $\varphi_P(\bar{x})$  не определена. Если же она остановится в момент  $t$ , то  $\varphi_P(\bar{x}) = r_0(t)$ . Функции такого вида называются *R-вычислимыми*.

Если вычисление  $P(\bar{x})$  никогда не остановится, будем обозначать это  $P(\bar{x}) \uparrow$  (или  $\varphi_P(\bar{x}) \uparrow$ , в противном случае пишем  $P(\bar{x}) \downarrow$  (или  $\varphi_P(\bar{x}) \downarrow$ ). Таким образом,  $\varphi_P(\bar{x}) \downarrow$  в точности тогда, когда  $\varphi_P(\bar{x})$  определено.

## *R*-вычислимые функции

Пусть  $P$  — программа и  $n \geq 0$ . Тогда  $P$  вычисляет частичную функцию  $\varphi_P(x_0, \dots, x_n)$  на  $\mathbb{N}$ , которая определяется так: при любых  $\bar{x} \in \mathbb{N}$  зададим значения  $r_0 = x_0, \dots, r_n = x_n$ ;  $r_i = 0$  при  $i > n$ , и запустим  $P$ . Если  $P$  никогда не останавливается (то есть  $\forall t \ k(t) \leq l$ ), то  $\varphi_P(\bar{x})$  не определена. Если же она остановится в момент  $t$ , то  $\varphi_P(\bar{x}) = r_0(t)$ . Функции такого вида называются *R-вычислимыми*.

Если вычисление  $P(\bar{x})$  никогда не остановится, будем обозначать это  $P(\bar{x}) \uparrow$  (или  $\varphi_P(\bar{x}) \uparrow$ , в противном случае пишем  $P(\bar{x}) \downarrow$  (или  $\varphi_P(\bar{x}) \downarrow$ . Таким образом,  $\varphi_P(\bar{x}) \downarrow$  в точности тогда, когда  $\varphi_P(\bar{x})$  определено.

ТЕЗИС ТЬЮРИНГА: Частичная функция на  $\mathbb{N}$  *R*-вычислима в точности тогда, когда она вычислима (по некоторому алгоритму).

## Кодирование $R$ -вычислений

Кодом программы  $P = (I_0, \dots, I_l)$  назовем число  $\lceil P \rceil = \langle \lceil I_0 \rceil, \dots, \lceil I_l \rceil \rangle$ , где  $\lceil r_i := 0 \rceil = \langle 0, i \rangle$ ,  $\lceil r_i := r_i + 1 \rceil = \langle 1, i \rangle$ ,  $\lceil r_i := r_j \rceil = \langle 2, i, j \rangle$ , и  $\lceil r_i = r_j \Rightarrow k \rceil = \langle 3, i, j, k \rangle$ .

# Кодирование $R$ -вычислений

Кодом программы  $P = (I_0, \dots, I_l)$  назовем число

$\lceil P \rceil = \langle \lceil I_0 \rceil, \dots, \lceil I_l \rceil \rangle$ , где  $\lceil r_i := 0 \rceil = \langle 0, i \rangle$ ,

$\lceil r_i := r_i + 1 \rceil = \langle 1, i \rangle$ ,  $\lceil r_i := r_j \rceil = \langle 2, i, j \rangle$ , и

$\lceil r_i = r_j \Rightarrow k \rceil = \langle 3, i, j, k \rangle$ .

$\text{Оп}(a) \iff a$  — код некоторого оператора.

$\text{Прог}(a) \iff a$  — код некоторой программы.

$\text{Пер}(i, a) \iff a$  — код некоторой программы, в которую входит  $r_i$ .

$\text{дл}(a)$  = длине программы  $P$ , если  $a$  — код программы  $P$ ; иначе 0.

$\text{пам}(a)$  = памяти  $P$ , если  $a$  — код программы  $P$ ; иначе 0.

$\text{сос}(a, x_0, \dots, x_n, t)$  = коду состояния  $P$  в момент  $t$  при  $r_i = x_i$  для  $i \leq n$  и  $r_i = 0$  для  $i > n$ , если  $a$  — код  $P$ ; иначе 0.

## Свойства кодирования

1. Коды разных операторов различны.
2. Коды разных программ различны.
3. Все определенные на предыдущем слайде предикаты и функции рекурсивны.
4. Если  $r_i$  входит в  $P$ , то  $i < \lceil P \rceil$ .
5. Если  $k$  — номер оператора, входящий в  $P$ , то  $k < \lceil P \rceil$ .
6. Существует алгоритм, который по программе вычисляет её код и наоборот.



## R-вычислимость и рекурсивность

ТЕОРЕМА. Класс всех тотальных R-вычислимых функций совпадает с классом всех рекурсивных функций.

## R-вычислимость и рекурсивность

ТЕОРЕМА. Класс всех тотальных R-вычислимых функций совпадает с классом всех рекурсивных функций.

Справедлив вариант для частичных функций (ЧФ).

- 1) Функции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $\chi_{<}$ ,  $I_k^m$  являются R-вычислимыми ЧФ.
- 2) Суперпозиция R-вычислимых ЧФ является R-вычислимой ЧФ.
- 3) Минимизация R-вычислимой ЧФ является R-вычислимой ЧФ. При этом минимизация ЧФ  $g(\bar{x}, y)$  определяется как ЧФ  $f(\bar{x}) = \mu y (g(\bar{x}, y) = 0)$ , значение которой в точке  $\bar{x}$  равно числу  $y$  (если оно существует) такому, что  $g(\bar{x}, y) = 0$ , и для всякого  $z < y$  значение  $g(\bar{x}, z)$  определено, но отлично от 0.

## R-вычислимость и рекурсивность

ТЕОРЕМА. Класс всех тотальных R-вычислимых функций совпадает с классом всех рекурсивных функций.

Справедлив вариант для частичных функций (ЧФ).

- 1) Функции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $\chi_{<}$ ,  $I_k^m$  являются R-вычислимыми ЧФ.
- 2) Суперпозиция R-вычислимых ЧФ является R-вычислимой ЧФ.
- 3) Минимизация R-вычислимой ЧФ является R-вычислимой ЧФ. При этом минимизация ЧФ  $g(\bar{x}, y)$  определяется как ЧФ  $f(\bar{x}) = \mu y (g(\bar{x}, y) = 0)$ , значение которой в точке  $\bar{x}$  равно числу  $y$  (если оно существует) такому, что  $g(\bar{x}, y) = 0$ , и для всякого  $z < y$  значение  $g(\bar{x}, z)$  определено, но отлично от 0.

ТЕОРЕМА. Класс всех R-вычислимых ЧФ совпадает с классом всех рекурсивных ЧФ.

## Относительная R-вычислимость и рекурсивность

Пусть  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — произвольная (возможно, не рекурсивная) функция. Частичные функции, вычислимые относительно  $h$  определяются так же, как и обычные рекурсивные ЧФ, но в список начальных функций добавляется  $h$ .

# Относительная R-вычислимость и рекурсивность

Пусть  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — произвольная (возможно, не рекурсивная) функция. Частичные функции, вычислимые относительно  $h$  определяются так же, как и обычные рекурсивные ЧФ, но в список начальных функций добавляется  $h$ .

*R-вычислимые относительно  $h$  частичные функции (или ЧФ, вычислимые с оракулом  $h$ )* — это ЧФ, вычислимые R-программами с оракулом  $h$ . *R-программа с оракулом  $o$*  — это R-программа с дополнительным оператором  $r_i := o(r_i)$ , который, при заданном оракуле  $h$ , выполняется как присваивание  $r_i := h(r_i)$ .

# Относительная R-вычислимость и рекурсивность

Пусть  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — произвольная (возможно, не рекурсивная) функция. Частичные функции, вычислимые относительно  $h$  определяются так же, как и обычные рекурсивные ЧФ, но в список начальных функций добавляется  $h$ .

*R-вычислимые относительно  $h$  частичные функции (или ЧФ, вычислимые с оракулом  $h$ )* — это ЧФ, вычислимые R-программами с оракулом  $h$ . *R-программа с оракулом  $o$*  — это R-программа с дополнительным оператором  $r_i := o(r_i)$ , который, при заданном оракуле  $h$ , выполняется как присваивание  $r_i := h(r_i)$ .

ТЕОРЕМА. Для любой функции  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , класс всех ЧФ, рекурсивных относительно  $h$ , совпадает с классом всех ЧФ, R-вычислимых относительно  $h$ .

# Главная вычислимая нумерация РЧФ

Пусть  $\mathcal{F}$  — множество всех одноместных РЧФ. Нумерация  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$  называется *вычислимой*, если двуместная функция  $\tilde{\nu}(n, x) = \nu_n(x)$  вычислима. Вычислимая нумерация  $\nu$  называется *главной*, если любая вычислимая нумерация  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$  сводится к  $\nu$ , т.е.  $\mu = \nu \circ f$  для некоторой РФ  $f$ .

# Главная вычислимая нумерация РЧФ

Пусть  $\mathcal{F}$  — множество всех одноместных РЧФ. Нумерация  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$  называется *вычислимой*, если двуместная функция  $\tilde{\nu}(n, x) = \nu_n(x)$  вычислима. Вычислимая нумерация  $\nu$  называется *главной*, если любая вычислимая нумерация  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$  сводится к  $\nu$ , т.е.  $\mu = \nu \circ f$  для некоторой РФ  $f$ .

Определим нумерацию  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$  соотношением:

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_P^{(1)}, & \text{если } n = \ulcorner P \urcorner \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$$



# Главная вычислимая нумерация РЧФ

Пусть  $\mathcal{F}$  — множество всех одноместных РЧФ. Нумерация  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$  называется *вычислимой*, если двуместная функция  $\tilde{\nu}(n, x) = \nu_n(x)$  вычислима. Вычислимая нумерация  $\nu$  называется *главной*, если любая вычислимая нумерация  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$  сводится к  $\nu$ , т.е.  $\mu = \nu \circ f$  для некоторой РФ  $f$ .

Определим нумерацию  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$  соотношением:

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_P^{(1)}, & \text{если } n = \ulcorner P \urcorner \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$$

**ТЕОРЕМА.**  $\varphi$  — главная вычислимая нумерация одноместных РЧФ.

## Свойства нумерации $\varphi$

ТЕОРЕМА о неподвижной точке. Для любой  
одноместной РФ  $f(x)$  найдётся  $e$  такая, что  
 $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$ .

## Свойства нумерации $\varphi$

ТЕОРЕМА о неподвижной точке. Для любой одноместной РФ  $f(x)$  найдётся  $e$  такая, что  $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$ .

Рассмотрим вычислимую нумерацию  $\mu_n = \varphi_{\varphi_n(n)}$ . По предыдущей теореме, существует РФ  $s$  такая, что  $\mu_n = \varphi_{s(n)}$ . Функция  $f \circ s$  рекурсивная, поэтому  $f \circ s = \varphi_v$  для некоторого  $v$ . Значит  $e = s(v)$  подходит:  $\varphi_{s(v)} = \mu_v = \varphi_{\varphi_v(v)} = \varphi_{f(s(v))}$ .

## Свойства нумерации $\varphi$

ТЕОРЕМА о неподвижной точке. Для любой одноместной РФ  $f(x)$  найдётся  $e$  такая, что  $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$ .

Рассмотрим вычислимую нумерацию  $\mu_n = \varphi_{\varphi_n(n)}$ . По предыдущей теореме, существует РФ  $s$  такая, что  $\mu_n = \varphi_{s(n)}$ . Функция  $f \circ s$  рекурсивная, поэтому  $f \circ s = \varphi_v$  для некоторого  $v$ . Значит  $e = s(v)$  подходит:  $\varphi_{s(v)} = \mu_v = \varphi_{\varphi_v(v)} = \varphi_{f(s(v))}$ .

ТЕОРЕМА Райса. Пусть  $\emptyset \subset C \subset \mathcal{F}$ . Тогда множество  $\varphi^{-1}(C) = \{n \mid \varphi_n \in C\}$  не рекурсивно.

## Главная вычислимая нумерация РПМ

Напомним, что  $A \subseteq \mathbb{N}$  РП, если  $A = \emptyset \vee A = \text{rng}(f)$  для некоторой рекурсивной функции  $f$ . Пусть  $\mathcal{E}$  — множество всех РПМ.

Нумерация  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{E}$  *вычислима*, если  $\{\langle n, x \rangle \mid x \in \nu_n\}$  РП. Вычислимая нумерация называется *главной*, если к ней сводится любая другая вычислимая нумерация.

## Главная вычислимая нумерация РПМ

Напомним, что  $A \subseteq \mathbb{N}$  РП, если  $A = \emptyset \vee A = \text{rng}(f)$  для некоторой рекурсивной функции  $f$ . Пусть  $\mathcal{E}$  — множество всех РПМ.

Нумерация  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{E}$  *вычислима*, если  $\{\langle n, x \rangle \mid x \in \nu_n\}$  РП. Вычислимая нумерация называется *главной*, если к ней сводится любая другая вычислимая нумерация.

1.  $A$  рекурсивно  $\Leftrightarrow A$  и  $\bar{A}$  РП.
2.  $A$  РП  $\Leftrightarrow A = \text{rng}(\varphi_n)$  для некоторого  $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow A = \text{dom}(\varphi_n)$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Если  $A \leq_m B$  и  $B$  рекурсивно (РП), то и  $A$  рекурсивно (РП).
4.  $W_n = \text{dom}(\varphi_n)$  — главная вычислимая нумерация множества  $\mathcal{E}$ , удовлетворяющая аналогам теоремы о неподвижной точке и теоремы Райса.
5. Множества  $C = \{n \mid n \in W_n\}$  и  $U = \{\langle n, x \rangle \mid x \in W_n\}$  РП, но не рекурсивны.
6. Любое РПМ  $m$ -сводится к множествам  $C$  и  $U$ .

# Арифметическая иерархия

Пусть  $\Sigma_n^\rho$  ( $\Pi_n^\rho$ ) — множество всех предикатов, определенных в  $\mathbb{N}$   $\Sigma_n$ -формулами ( $\Pi_n$ -формулами) сигнатуры  $\rho$ , состоящей из всех рекурсивных предикатов. Предикаты из  $\bigcup_n \Sigma_n^\rho$  называются *арифметическими*.

# Арифметическая иерархия

Пусть  $\Sigma_n^\rho$  ( $\Pi_n^\rho$ ) — множество всех предикатов, определимых в  $\mathbb{N}$   $\Sigma_n$ -формулами ( $\Pi_n$ -формулами) сигнатуры  $\rho$ , состоящей из всех рекурсивных предикатов. Предикаты из  $\bigcup_n \Sigma_n^\rho$  называются *арифметическими*.

1.  $\Sigma_n^\rho \cup \Pi_n^\rho \subseteq \Sigma_{n+1}^\rho \cap \Pi_{n+1}^\rho = \Delta_{n+1}^\rho$ .
2.  $A \in \Sigma_n^\rho \Leftrightarrow \bar{A} \in \Pi_n^\rho$ .
3.  $A \leq_m B \in \Sigma_n^\rho \Rightarrow A \in \Sigma_n^\rho$ .
4.  $\Sigma_n^\rho$  совпадает со множеством предикатов вида  $\exists y_1 \forall y_2 \cdots Q y_{n-1} R(\bar{x}, \bar{y})$ , где  $R$  — рекурсивный предикат.
5. Множества  $\Sigma_n^\rho$  и  $\Pi_n^\rho$  замкнуты относительно  $\wedge$ ,  $\vee$ , и ограниченных кванторов.



## Арифметическая иерархия и определимость в $\mathbb{N}$

Пусть  $\Sigma_n^\sigma$  ( $\Pi_n^\sigma$ ) — множество всех предикатов, определенных в  $(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$   $\Sigma_n$ -формулами ( $\Pi_n$ -формулами).

## Арифметическая иерархия и определимость в $\mathbb{N}$

Пусть  $\Sigma_n^\sigma$  ( $\Pi_n^\sigma$ ) — множество всех предикатов, определимых в  $(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$   $\Sigma_n$ -формулами ( $\Pi_n$ -формулами).

1.  $\Sigma_n^\sigma \cup \Pi_n^\sigma \subseteq \Sigma_{n+1}^\sigma \cap \Pi_{n+1}^\sigma$ .
2.  $A \in \Sigma_n^\sigma \Leftrightarrow \bar{A} \in \Pi_n^\sigma$ .
3.  $\bigcup_n \Sigma_n^\sigma = \bigcup_n \Sigma_n^\rho$ .
4.  $\Sigma_n^\sigma = \Sigma_n^\rho$  при любом  $n \geq 2$ .
5.  $\Sigma_n^\sigma = \Sigma_n^\rho$  при любом  $n \geq 1$  (вытекает из теоремы Матиясевича  $\Sigma_1^\sigma = \Sigma_1^\rho$ , из которой следует решение 10-й проблемы Гильберта).

## T-сводимость и T-скачок

$A$   $T$ -сводится к  $B$  ( $A \leq_T B$ ), если  $A$  рекурсивно относительно  $B$ , т.е.  $A = \varphi_n^B$  для некоторого  $n$ .  $T$ -скачком множества  $A$  называется  $A' = \{n \mid n \in W_n^A\}$ .

## T-сводимость и T-скачок

$A$   $T$ -сводится к  $B$  ( $A \leq_T B$ ), если  $A$  рекурсивно относительно  $B$ , т.е.  $A = \varphi_n^B$  для некоторого  $n$ .  $T$ -скачком множества  $A$  называется  $A' = \{n \mid n \in W_n^A\}$ .

1. Отношение  $\leq_T$  является предпорядком на  $P(\mathbb{N})$ , причем все классы эквивалентности по индуцированному отношению эквивалентности  $\equiv_T$  на  $P(\mathbb{N})$  счетны.
2.  $B$  РП относительно  $A \iff B \leq_m A'$ .
3.  $A <_T A'$  и  $A \equiv_T \overline{A}$ .
4.  $A \leq_T B \iff A \leq_m B' \wedge \overline{A} \leq_m B'$ .
5.  $A'$  РП, но не рекурсивно относительно  $A$ .
6.  $A \leq_T B \iff A' \leq_m B'$ .
7.  $A \in \Sigma_1^\rho \wedge B \leq_T A \Rightarrow B \in \Sigma_2^\rho$ .

## Арифметическая иерархия и $T$ -скачок

Пусть  $\emptyset^{(n)}$  —  $n$ -я итерация  $T$ -скачка  
начинающаяся с  $\emptyset$ , т.е.  $\emptyset^{(0)} = \emptyset$  и  $\emptyset^{(n+1)} = (\emptyset^{(n)})'$ ,  
и пусть  $\emptyset^{(\omega)} = \{\langle n, x \rangle \mid x \in \emptyset^{(n)}\}$ . Тогда  
 $\emptyset^{(n)} <_T \emptyset^{(n+1)} <_T \emptyset^{(\omega)}$  для любого  $n$ .

## Арифметическая иерархия и $T$ -скачок

Пусть  $\emptyset^{(n)}$  —  $n$ -я итерация  $T$ -скачка начинающаяся с  $\emptyset$ , т.е.  $\emptyset^{(0)} = \emptyset$  и  $\emptyset^{(n+1)} = (\emptyset^{(n)})'$ , и пусть  $\emptyset^{(\omega)} = \{\langle n, x \rangle \mid x \in \emptyset^{(n)}\}$ . Тогда  $\emptyset^{(n)} <_T \emptyset^{(n+1)} <_T \emptyset^{(\omega)}$  для любого  $n$ .

ТЕОРЕМА. Для любых  $A \subseteq \mathbb{N}$  и  $n \geq 1$  имеем:  
 $A \in \Sigma_n^\rho \Leftrightarrow A \leq_m \emptyset^{(n)}$  и  $A \in \Delta_n^\rho \Leftrightarrow A \leq_T \emptyset^{(n-1)}$ .

# Арифметическая иерархия и Т-скачок

Пусть  $\emptyset^{(n)}$  —  $n$ -я итерация  $T$ -скачка начинающаяся с  $\emptyset$ , т.е.  $\emptyset^{(0)} = \emptyset$  и  $\emptyset^{(n+1)} = (\emptyset^{(n)})'$ , и пусть  $\emptyset^{(\omega)} = \{\langle n, x \rangle \mid x \in \emptyset^{(n)}\}$ . Тогда  $\emptyset^{(n)} <_T \emptyset^{(n+1)} <_T \emptyset^{(\omega)}$  для любого  $n$ .

ТЕОРЕМА. Для любых  $A \subseteq \mathbb{N}$  и  $n \geq 1$  имеем:  
 $A \in \Sigma_n^\rho \Leftrightarrow A \leq_m \emptyset^{(n)}$  и  $A \in \Delta_n^\rho \Leftrightarrow A \leq_T \emptyset^{(n-1)}$ .

СЛЕДСТВИЕ. Для любого  $n \geq 1$  имеем:  $\Sigma_n^\rho \not\subseteq \Pi_n^\rho$  и  $\Sigma_{n-1}^\rho \subset \Sigma_n^\rho$ .

## Сложность $Th(\mathbb{N})$ . Неопределимость истины

Истинность  $\sigma$ -предложения в структуре  $\mathbb{N}$  была определена с помощью теории множеств. Можно ли отношение истинности определить в структуре  $(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ ?



## Сложность $Th(\mathbb{N})$ . Неопределимость истины

Истинность  $\sigma$ -предложения в структуре  $\mathbb{N}$  была определена с помощью теории множеств. Можно ли отношение истинности определить в структуре  $(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ ?

ТЕОРЕМА. Множество  $T = \{\ulcorner \theta \urcorner \mid \mathbb{N} \models \theta\}$  не определимо в структуре  $(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ .

## Сложность $Th(\mathbb{N})$ . Непределимость истины

Истинность  $\sigma$ -предложения в структуре  $\mathbb{N}$  была определена с помощью теории множеств. Можно ли отношение истинности определить в структуре  $(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ ?

ТЕОРЕМА. Множество  $T = \{\ulcorner \theta \urcorner \mid \mathbb{N} \models \theta\}$  не определимо в структуре  $(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ .

По теореме Геделя, множество  $T$  нерекурсивно. Какова алгоритмическая сложность этого множества?

## Сложность $Th(\mathbb{N})$ . Непределимость истины

Истинность  $\sigma$ -предложения в структуре  $\mathbb{N}$  была определена с помощью теории множеств. Можно ли отношение истинности определить в структуре  $(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ ?

ТЕОРЕМА. Множество  $T = \{\ulcorner \theta \urcorner \mid \mathbb{N} \models \theta\}$  не определимо в структуре  $(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ .

По теореме Геделя, множество  $T$  нерекурсивно. Какова алгоритмическая сложность этого множества?

ТЕОРЕМА. Множество  $T$   $m$ -эквивалентно множеству  $\emptyset^{(\omega)}$ .