

### Задание 7. Исчисление предикатов.

1. Докажите, что “основные равносильности” (см. файл reminderLogic2.pdf) выводимы в исчислении секвенций.

(Равносильность  $\varphi \equiv \psi$  выводима, если секвенции  $\varphi \vdash \psi$  и  $\psi \vdash \varphi$  выводимы.)

2. Докажите, что “основные тавтологии логики высказываний”, а также кванторные аксиомы гильбертовского ИП (см. файл reminderLogic2.pdf), выводимы в исчислении секвенций.

(Формула  $\varphi$  выводима, если секвенция  $\vdash \varphi$  выводима.)

3. Докажите, что все аксиомы равенства выводимы в исчислении секвенций.

4. Докажите, что из аксиом упорядоченных абелевых групп выводимы формулы, выражающие следующие утверждения:

если элемент  $x$  положителен, то элементы  $x + x$  и  $x + x + x$  также положительны;

если элемент  $x$  отрицателен, то элементы  $x + x$  и  $x + x + x$  также отрицательны;

квадрат любого ненулевого элемента положителен.

5. Докажите, что из аксиом ZFC выводимы формулы, выражающие следующие утверждения:

существует единственное пустое множество;

для любых двух множеств существуют и единственны их объединение, пересечение, и разность;

две упорядоченные пары (в смысле Куратовского) равны в точности тогда, когда равны их первые и вторые компоненты;

если  $x$  — ординал, то  $x + 1 = x \cup \{x\}$  тоже ординал, и между ними нет других ординалов.