Задание 6. Игры Эренфойхта и элементарная эквивалентность.

1. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ — структуры сигнатуры $\{=, <\}$ с обычным отношением порядка. С помощью игр Эренфойхта обоснуйте, какие из этих сруктур элементарно эквивалентны, а какие нет. В последнем случае найдите наименьшее n, для которого первый игрок имеет выигрышную стратегию в соответствующей n-игре Эренфойхта, и опишите эту стратегию.

2. Решите задачу 1 для структур $\mathbb{N}, \mathbb{N}+\mathbb{N}, \mathbb{N}+\mathbb{Q}, \mathbb{N}+\mathbb{Z}$, где сумма двух порядков определяется как их дизъюнктное объединение, в котором каждый элемент первого порядка меньше каждого элемента второго.

3. Докажите, что теория линейных порядков, каждый элемент которых имеет непосредственного предшественника и непосредственного последователя, является полной. Запишите аксиомы этой теории в сигнатуре $\{=, <\}$.

4. Докажите, что для любого n найдется m такое, что любые два линейных порядка с $> m$ элементами n-элементарно эквивалентны.

Выведите из этого, что не существует $\{=, <\}$-предложения, которое истинно на всех конечных линейных порядках с четным числом элементов и ложно на всех конечных линейных порядках с нечетным числом элементов.

5. Структуры сигнатуры $\{=, <, P\}$ (P — одноместный предикатный символ) на множестве $\mathbb{N}$ естественным образом отождествляются с бесконечными двоичными словами (т.е. с последовательностями битов). Докажите, что не существует $\{=, <, P\}$-предложения, истинного в точности на бесконечных двоичных словах с четным числом единиц.