

Задание 5. Модельная полнота и элиминация кванторов.

1. Пусть теория T имеет модель. Докажите, что T модельно полна тогда и только тогда, когда теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна для любой $\mathbb{A} \models T$.

Докажите, что если любые две модели модельно полной теории изоморфно вкладываются в некоторую модель этой теории, то эта теория полна.

2. Являются ли следующие теории модельно полными: теория групп, теория абелевых групп, теория абелевых групп без кручения, теория полей, теория полей характеристики 0, теория алгебраически замкнутых полей, теория алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики. Ответ обоснуйте.

3. Докажите, что структура $(\mathbb{Z}; =, 0, S)$, где $S(x) = x + 1$, допускает элиминацию кванторов.

Опишите определимые одноместные отношения в структуре $(\mathbb{Z}; =, 0, S)$. Определимо ли отношение $<$ в этой структуре?

4. Докажите, что теория плотного линейного порядка с наименьшим, но без наибольшего элемента в сигнатуре $\{=, a, <\}$ (a — наименьший элемент) допускает элиминацию кванторов.

Опишите определимые двухместные отношения в структуре $([0, 1]; =, 0, <)$.

5. Докажите, что теория алгебраически замкнутых полей допускает элиминацию кванторов.

Докажите, что теория поля вещественных чисел модельно полна, но не допускает элиминацию кванторов.

Являются ли модельно полными теории $Th(\mathbb{N}; =, \leq)$ и $Th(\mathbb{N}; =, +)$?