МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА 1

Виктор Львович Селиванов
v.selivanov@spbu.ru

Важная дополнительная информация:
https://github.com/vseliv/Logic1-2023/tree/main

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.

2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.

3. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.

4. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.

σ-ТЕРМЫ:
предметная переменная есть терм;
константный символ из σ есть терм;
если f — n-местный функциональный символ из σ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже терм.

σ-ФОРМУЛЫ:
выражения $s = t$ и $P(t_1, \ldots, t_n)$,
где s, t, t_1,..., t_n — термы, а p - n-местный предикатный символ из σ, суть формулы;
если φ и ψ — формулы, а x — предметная переменная, то выражения
$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$
суть формулы.

σ-СТРУКТУРА: пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I сигнатурных символов в A. Интерпретация I — отображение, сопоставляющее каждому n-местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n-местный предикат P^I на A, каждому n-местному функциональному символу $f \in \sigma$ — n-местную функцию f^I на A и каждому константному символу $c \in \sigma$ — элемент $c^I \in A$.

ЗНАЧЕНИЕ $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ ТЕРМА
$t = t(x_1, \ldots, x_k)$ В СТРУКТУРЕ $\mathbb{A}$,
при заданных значениях $x_i = a_i \in A$:
Если $t = x_i$, то $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) = a_i$;
если $t = c \in \sigma$, то $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) = c^{\mathbb{A}}$;
если $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ и значения
$b_j = t_j^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ уже определены по предположению индукции, то
$t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) = f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_n)$.

ЗНАЧЕНИЕ $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ ФОРМУЛЫ $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ В СТРУКТУРЕ $\mathbb{A}$ при $x_i = a_i \in A$:

Если φ есть $s = t$, то $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) =$ И в точности тогда, когда совпадают $s^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ и $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k)$;

если φ есть $P(t_1, \ldots, t_n)$, то $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) = P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k), \ldots, t_n^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k))$;

если φ есть $(\psi \wedge \theta)$, то $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) = \psi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) \wedge \theta^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k)$, и аналогично для операций $\vee$, $\rightarrow$ и $\neg$;

если φ есть $\forall x \psi(x, x_1, \ldots, x_k)$, то $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) =$ И в точности тогда, когда $\psi^{\mathbb{A}}(b, a_1, \ldots, a_k) =$ И при любом $b \in A$;

если φ есть $\exists x \psi(x, x_1, \ldots, x_k)$, то $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) =$ И в точности тогда, когда $\psi^{\mathbb{A}}(b, a_1, \ldots, a_k) =$ И хотя бы при одном $b \in A$.

ОСНОВНЫЕ РАВНОСИЛЬНОСТИ

1. $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$;
2. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$;
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$;
4. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
5. $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$;
6. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$;
7. $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$;
8. $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$;
9. $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$;
10. $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$.

11. $\neg(\forall x\varphi) \equiv \exists x(\neg\varphi)$;
12. $\neg(\exists x\varphi) \equiv \forall x(\neg\varphi)$;
13. $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$;
14. $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$;
15. $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$;
16. $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$;

(x не входит свободно в ψ)

17. $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$;
18. $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$.

(y не входит в φ)

ОСНОВНЫЕ ТАВТОЛОГИИ

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
2. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to (\varphi \to \theta))$;

3. $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$;
4. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;
5. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;
6. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;
7. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$;
8. $(\varphi \to \theta) \to ((\psi \to \theta) \to ((\varphi \vee \psi) \to \theta))$;
9. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;
10. $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

ГИЛЬБЕРТОВСКОЕ ИП$_\sigma$

АКСИОМЫ:

Тавтологии сигнатуры σ;

Кванторные аксиомы
$\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$ и $\varphi(t) \to \exists x \varphi(x)$;

Аксиомы равенства
$\forall x(x = x)$,
$\forall x \forall y(x = y \to y = x)$,
$\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z)$,

$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$,

$\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n))$.

ПРАВИЛА ВЫВОДА:

$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}, \quad \frac{\psi \to \varphi(y)}{\psi \to \forall x \varphi(x)}, \quad \frac{\varphi(y) \to \psi}{\exists x \varphi(x) \to \psi},$

где y — переменная, не входящая свободно в нижнюю формулу.

Вариант ИП$^*_\sigma$ получается, если вместо всех тавтологий берутся только ОСНОВНЫЕ тавтологии.

ГЕНЦЕНОВСКОЕ ИП$_\sigma$ (без равенства)
АКСИОМЫ:

$\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$

ПРАВИЛА ВЫВОДА:

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi;\ \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta;\ \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi;\ \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(y)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(y) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi(x)},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi;\ \Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

МИНИМАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА МА:

1. $0+1=1$; 2. $\forall x\neg(x+1=0)$;
3. $\forall x\forall y(x+1=y+1\to x=y)$;
4. $\forall x(x+0=x)$;
5. $\forall x\forall y(x+(y+1)=(x+y)+1)$;
6. $\forall x(x\cdot 0=0)$;
7. $\forall x\forall y(x\cdot(y+1)=(x\cdot y)+x)$;
8. $\forall x\neg(x<0)$;
9. $\forall x\forall y(x<y\vee x=y\vee y<x)$;
10. $\forall x\forall y(x<y+1\leftrightarrow(x<y\vee x=y))$.

Арифметика Пеано ПА получается из МА добавлением схемы аксиом индукции:

$$(\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\to\varphi(x+1)))\to\forall x\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — любая формула сигнатуры МА.

АКСИОМЫ ZFC (сигнатура $\{=, \in\}$)

0. $\exists x(x = x)$.

1. $\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y$.

2. $\forall u \forall v \exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v)$.

3. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u))$.

4. $\forall X \exists Y \forall u \forall z(u \in z \wedge z \in X \to u \in Y)$.

5. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$.

6. $\forall x \forall y \forall y'(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y') \to y = y')$
$\to \forall X \exists Y \forall x \forall y(x \in X \wedge \varphi(x, y) \to y \in Y)$.

7. $\exists Y(\emptyset \in Y \wedge \forall y(y \in Y \to y \cup \{y\} \in Y))$.

8. $\forall X(X \neq \emptyset \to \exists x(x \in X \wedge \forall u(u \in x \to u \notin X)))$.

9. $\forall X \exists f((f : (P(X) \setminus \{\emptyset\}) \to X) \wedge \forall Y(Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \to f(Y) \in Y))$.

СВОЙСТВА АКСИОМ И ПРАВИЛ

1. Все аксиомы тождественно истинны.

2. Если формула получена по некоторому правилу из формул, тождественно истинных в структуре $\mathbb{A}$, то она тождественно истинна в $\mathbb{A}$.

3. Если в любой аксиоме (любом правиле вывода) заменить все вхождения константного символа c на переменную z, не входящую в эту аксиому (это правило вывода), то получим аксиому (правило вывода).

Выводом формулы φ из множества формул T называют последовательность формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, в которой $\varphi_k = \varphi$ и каждый элемент либо аксиома, либо принадлежит T, либо выведен из предшествующих формул последовательности по одному из правил вывода.

Формулу φ называют выводимой из множества формул $T (T \vdash \varphi)$, если существует вывод формулы φ из T.

СВОЙСТВА ВЫВОДИМОСТИ

Теорема дедукции: Соотношения $T \vdash (\varphi \to \psi)$ и $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ равносильны для всех предложений φ, формул ψ и множеств формул T.

1. Если $\varphi \in T$, то $T \vdash \varphi$.

2. Если $T \vdash \varphi$, то $T_0 \vdash \varphi$ для подходящего конечного множества $T_0 \subseteq T$.

3. Если $S \vdash \varphi$ и все формулы множества S выводимы из T, то $T \vdash \varphi$.

4. Если $T \cup \{\varphi\} \vdash \theta$ и $T \cup \{\psi\} \vdash \theta$, то $T \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \theta$($\varphi$ и ψ — предложения).

5. Если $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ и $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$, то $T \vdash \neg\varphi$ (φ — предложение).

6. $T \vdash \varphi \wedge \psi$ тогда и только тогда, когда $T \vdash \varphi$ и $T \vdash \psi$.

СВОЙСТВА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

Множество формул противоречиво, если из него выводима любая формула.

1. T противоречиво тогда и только тогда, когда из него выводима хотя бы одна формула вида $\theta \wedge \neg\theta$.
2. Если $T_n (n \in \mathbb{N})$ непротиворечивы и $T_0 \subseteq \mathbf{T}_1 \subseteq$ то $\bigcup_n T_n$ непротиворечиво.
3. Если φ — предложение, и $T \cup \{\varphi\}$ противоречиво, то $T \vdash \neg\varphi$.
4. Если T непротиворечиво, то для любого предложения φ непротиворечиво хотя бы одно из $T \cup \{\varphi\}$ и $T \cup \{\neg\varphi\}$.
5. Если множество предложений $S = T \cup \{\exists x \psi(x)\}$ непротиворечиво, то и множество $S \cup \{\psi(c)\}$ непротиворечиво для любого не входящего в формулы из S сигнатурного константного символа c.

СВОЙСТВА ТЕОРИЙ ХЕНКИНА

Пусть T — теория Хенкина, т.е. T непротиворечива, любое предложение или его отрицание выводимо из T, и для любого выводимого из T предложения вида $\exists x \psi(x)$ существует константный символ $c \in \sigma$ такой, что $T \vdash \psi(c)$.

1. $T \vdash \neg\varphi \iff T \nvdash \varphi$.

2. $T \vdash (\varphi \vee \psi) \iff T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

3. $T \vdash (\varphi \to \psi) \iff T \nvdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

4. $T \vdash \exists x \theta(x) \iff T \vdash \theta(t)$ для некоторого терма t без переменных.

5. $T \vdash \forall x \theta(x) \iff T \vdash \theta(t)$ для любого терма t без переменных.

6. Любая непротиворечивая теория не более чем счетной сигнатуры σ может быть расширена до теории Хенкина сигнатуры σ_C, где C — счетное множество новых константных символов.