

Логика-2, 3 курс М

Виктор Львович Селиванов ¹

¹ФМКН СПбГУ

Весенний семестр, 2024

Важная дополнительная информация:

<https://github.com/vseliv/Logic2-2023/tree/main>

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.
2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.
3. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М: Мир, 1983, 255 с.
4. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.
5. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.

Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения $ЛП^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа

Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения $ЛП^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- ▶ Счетное множество Var переменных $v_0 \ v_1 \ v_2 \dots$

Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения $ЛП^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- ▶ Счетное множество Var переменных $v_0 v_1 v_2 \dots$
- ▶ Логические символы $\wedge \vee \rightarrow \neg \forall \exists$

Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения $ЛП^\sigma$ строятся из следующих исходных различных символов:

- ▶ Непустое множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа
- ▶ Счетное множество Var переменных $v_0 v_1 v_2 \dots$
- ▶ Логические символы $\wedge \vee \rightarrow \neg \forall \exists$
- ▶ Вспомогательные символы $() ,$

Осмысленные выражения $ЛП^\sigma$

σ -ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n -местный функциональный символ из σ и t_1, \dots, t_n — термы, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ тоже терм.

Осмысленные выражения ЛП^σ

σ -ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n -местный функциональный символ из σ и t_1, \dots, t_n — термы, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ тоже терм.

σ -ФОРМУЛЫ:

выражение $P(t_1, \dots, t_n)$,

где t_1, \dots, t_n — термы, а P — n -местный предикатный символ из σ , является формулой;
если φ и ψ — формулы, а x — переменная, то выражения

$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$
суть формулы.

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов t_1, \dots, t_n ;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для \vee, \rightarrow, \neg ;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для \exists .

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов t_1, \dots, t_n ;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для \vee, \rightarrow, \neg ;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для \exists .

Переменные, которые входят в формулу, но не являются свободными, называются связанными.

Формулы без свободных переменных называются предложениями.

Запись $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ означает, что

$FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$. Аналогично для термов.

σ -Структуры

σ -Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n -местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n -местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$, а каждому n -местному функциональному символу f из σ — некоторую n -местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

σ -Структуры

σ -Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n -местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n -местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$, а каждому n -местному функциональному символу f из σ — некоторую n -местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

Изоморфизмом \mathbb{A} на \mathbb{B} называется биекция g множества A на множество B такая, что

$P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$ и
 $g(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$ для любых $a_1, \dots, a_n \in A$.

Структуры \mathbb{A} и \mathbb{B} называются изоморфными ($\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$), если существует изоморфизм \mathbb{A} на \mathbb{B} .

Значения термов и формул

Для любой σ -структуры \mathbb{A} и означивания $\nu : Var \rightarrow A$ определяем значения $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{И, Л\}$ индукцией:

$$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x), \quad f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

Значения термов и формул

Для любой σ -структуры \mathbb{A} и означивания $\nu : Var \rightarrow A$ определяем значения $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{И, Л\}$ индукцией:

$$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x), \quad f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

$$P(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

$$(\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu} \wedge \psi^{\mathbb{A},\nu}, \text{ аналогично для } \vee, \rightarrow, \neg;$$

$$(\forall x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigwedge_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x} \text{ и } (\exists x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigvee_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x}$$

,

где ν_a^x — означивание, полученное из ν изменением значения x на a .

Значения термов и формул

Пусть $t = t(x_1, \dots, x_m)$ и $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$.

- ▶ Если означивания μ и ν согласованы на x_1, \dots, x_m , то $t^{\mathbb{A}, \mu} = t^{\mathbb{A}, \nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A}, \mu} = \varphi^{\mathbb{A}, \nu}$. Поэтому вместо $t^{\mathbb{A}, \nu}$ часто пишут $t^{\mathbb{A}}(x_1/a_1, \dots, x_m/a_m)$ или, короче, $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)$, где $a_i = \nu(x_i)$; аналогично для формул. Вместо $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) = \text{И}$ часто пишут $\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$.
- ▶ Если a — изоморфизм \mathbb{A} на \mathbb{B} , то $g(t^{\mathbb{A}, \nu}) = t^{\mathbb{A}, g \circ \nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \varphi^{\mathbb{A}, g \circ \nu}$. Иными словами, $g(t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)) = t^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_m))$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_m))$.
- ▶ Если $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$, то эти структуры элементарно эквивалентны ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), т.е. в них истинны одни и те же σ -предложения.

Общезначимость и ее варианты

- ▶ φ общезначима (тождественно истинна), если $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \text{И}$ для любых \mathbb{A} и ν .
- ▶ φ и ψ равносильны ($\varphi \equiv \psi$), если $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \psi^{\mathbb{A}, \nu}$ для любых \mathbb{A} и ν .
- ▶ Моделью множества предложений T называется структура, в которой все предложения из T истинны.
- ▶ Предложение φ логически следует из множества предложений T ($T \models \varphi$), если φ истинно в любой модели множества T .

Общезначимость и ее варианты

- ▶ φ общезначима $\iff \models \varphi$.
- ▶ $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ общезначима.
- ▶ $\varphi(\bar{x})$ общезначима $\iff \forall \bar{x} \varphi$ общезначима.
- ▶ $T \models (\varphi \rightarrow \psi) \iff T \cup \{\varphi\} \models \psi$.
- ▶ $T \models \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$ не имеет модели.
- ▶ $T \models \varphi \iff \bigwedge T \rightarrow \varphi$ общезначима, где T — конечное множество предложений.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$ для любого $A \subseteq I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

1. Ультрафильтры на I — это в точности максимальные фильтры по включению.
2. Если F — ультрафильтр, то $A \in F \iff (I \setminus A) \notin F$ и $A \cup B \in F \iff (A \in F \vee B \in F)$, для любых $A, B \subseteq I$.
3. Любой фильтр на I содержится в некотором ультрафильтре.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ — семейство σ -структур и F — фильтр на I .

Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \rightarrow \bigcup_i A_i \mid \forall i (a(i) \in A_i)\}$.

Определим σ -структуру \mathbb{A}_F на A/\equiv_F так:

$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F,$

$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a],$ где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i));$

это определение корректно.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ — семейство σ -структур и F — фильтр на I . Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \rightarrow \bigcup_i A_i \mid \forall i (a(i) \in A_i)\}$. Определим σ -структуру \mathbb{A}_F на A/\equiv_F так:
 $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F$,
 $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$;
это определение корректно.

ТЕОРЕМА. Для любых ультрафильтра F , σ -формулы $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ и $a_1, \dots, a_m \in A$ имеем:
 $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_m]) \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_m(i))\} \in F$.

В частности, при $m = 0$: $\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F$.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений T имеет модель, то и все множество T имеет модель.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений T имеет модель, то и все множество T имеет модель.

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двухместный предикатный символ). σ -Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество данного множества предложений T сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество T имеет нормальную модель.

Для доказательства надо применить предыдущую теорему к множеству $T \cup E_\sigma$, где E_σ — аксиомы равенства (утверждающие, что $=$ есть σ -конгруэнтность) и профакторизовать полученную модель \mathbb{A} по конгруэнтности $=^{\mathbb{A}}$.

Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x), \forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x),$$

$$\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n =$$
$$y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)).$$

Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x), \forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x),$$

$$\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)).$$

ТЕОРЕМА. Если теория содержит аксиомы равенства и имеет модель, то она имеет и нормальную модель.

Понижение мощности

- ▶ \mathbb{A} — *подструктура* \mathbb{B} ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$, $P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$ и $f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$ для всех $a_1, \dots, a_n \in A$;
- ▶ *вложение* структуры \mathbb{A} в структуру \mathbb{B} — это изоморфизм \mathbb{A} на подструктуру структуры \mathbb{B} ;
- ▶ \mathbb{A} — *элементарная подструктура* \mathbb{B} ($\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(\bar{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\bar{a})$ для всех $\bar{a} \in A$ и для всех формул $\varphi(\bar{x})$;
- ▶ *элементарное вложение* \mathbb{A} в \mathbb{B} — это изоморфизм \mathbb{A} на элементарную подструктуру структуры \mathbb{B} ;
- ▶ \mathbb{A} *элементарно эквивалентно* \mathbb{B} ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть \mathbb{A} , $X \subseteq A$, $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$.

Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть \mathbb{A} , $X \subseteq A$, $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$.
Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность

$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$ по индукции:

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\},$$

где E_n и $\eta : E_n \rightarrow A$ определены так:

$E_n = \{(\bar{a}, \varphi(\bar{x}, y)) \mid \bar{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)\}$ и
 $\mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, \eta(e))$ для всех $e \in E_n$. $B = \bigcup_n S_n$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть \mathbb{A} , $X \subseteq A$, $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$.
Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность

$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$ по индукции:

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\},$$

где E_n и $\eta : E_n \rightarrow A$ определены так:

$$E_n = \{(\bar{a}, \varphi(\bar{x}, y)) \mid \bar{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)\} \text{ и } \mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, \eta(e)) \text{ для всех } e \in E_n. B = \bigcup_n S_n.$$

Известен следующий важный результат: Не существует логики, собственным образом расширяющей логику предикатов и удовлетворяющей теоремам компактности и понижения мощности.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ . Если \mathbb{A} — σ -структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \setminus \sigma$ в A , получим τ -структуру \mathbb{B} , называемую обогащением структуры \mathbb{A} . Наоборот: если \mathbb{B} — τ -структура, то, “забывая” интерпретацию символов из $\tau \setminus \sigma$, получим σ -обеднение $B|_\sigma$ структуры \mathbb{B} . Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ . Если $\mathbb{A} — \sigma$ -структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \setminus \sigma$ в A , получим τ -структуру \mathbb{B} , называемую обогащением структуры \mathbb{A} . Наоборот: если $\mathbb{B} — \tau$ -структура, то, “забывая” интерпретацию символов из $\tau \setminus \sigma$, получим σ -обеднение $B|_\sigma$ структуры \mathbb{B} . Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Например, пусть $\mathbb{A} — \sigma$ -структура, а $\sigma_A = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$ ее обогащение новыми константными символами c_a такими, что $c_a \neq c_b$ при $a \neq b$. Стандартным константным обогащением структуры \mathbb{A} называется ее σ_A -обогащение, в котором новые символы интерпретируются так: $c_a \mapsto a$, для любого $a \in A$.

Диаграммы структур

Диаграмма σ -структуры \mathbb{A} — это множество $D(\mathbb{A})$ σ_A -предложений вида $f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a$, $P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$, $\neg P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$, истинных в \mathbb{A}_A при естественной интерпретации новых константных символов.

Полная диаграмма σ -структуры \mathbb{A} — это множество $D^(\mathbb{A})$ всех σ_A -предложений, истинных в \mathbb{A}_A при естественной интерпретации новых константных символов.*

Диаграммы структур

Диаграмма σ -структуры \mathbb{A} — это множество $D(\mathbb{A})$ σ_A -предложений вида $f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a$, $P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$, $\neg P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$, истинных в \mathbb{A}_A при естественной интерпретации новых константных символов.

Полная диаграмма σ -структуры \mathbb{A} — это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех σ_A -предложений, истинных в \mathbb{A}_A при естественной интерпретации новых константных символов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1. σ -Структура \mathbb{A} изоморфно вкладывается в σ -структуру $\mathbb{B} \iff \mathbb{B}$ является σ -обеднением некоторой модели множества $D(\mathbb{A})$.

2. σ -Структура \mathbb{A} элементарно вкладывается в σ -структуру $\mathbb{B} \iff \mathbb{B}$ является σ -обеднением некоторой модели множества $D^*(\mathbb{A})$.

Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная σ -структура \mathbb{A} и кардинал $\kappa \geq \max(|A|, |\text{For}_\sigma|)$. Тогда \mathbb{A} элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности κ .

Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная σ -структура \mathbb{A} и кардинал $\kappa \geq \max(|A|, |\text{For}_\sigma|)$. Тогда \mathbb{A} элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности κ .

В качестве следствий получаем:

ТЕОРЕМА. Если σ -теория T имеет модель мощности $\geq n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то она имеет модель любой мощности $\kappa \geq |\text{For}_\sigma|$.

ТЕОРЕМА. Если σ -теория T имеет единственную с точностью до изоморфизма модель некоторой мощности $\kappa \geq |\text{For}_\sigma|$ и не имеет конечных моделей, то она полна (т.е. $T \models \varphi \vee T \models \neg\varphi$ для любого σ -предложения φ).

Аксиоматизируемые классы

- ▶ Теория T — множество σ -предложений.
- ▶ Теории T соответствует класс ее моделей $\text{Mod}(T) = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \models T\}$
- ▶ Классу структур $K \subseteq \text{Str}_\sigma$ соответствует его теория $\text{Th}(K) = \{\varphi \in \text{Sent}_\sigma \mid \forall \mathbb{A} \in K (\mathbb{A} \models \varphi)\}$.
- ▶ Класс структур K *аксиоматизируем*, если $K = \text{Mod}(T)$ для некоторой теории T .
- ▶ Класс структур K *конечно аксиоматизируем*, если $K = \text{Mod}(T)$ для некоторой конечной теории $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Это равносильно аксиоматизируемости одной формулой $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$.

Аксиоматизируемые классы: свойства

1. Если $T \subseteq T'$, то $\text{Mod}(T) \supseteq \text{Mod}(T')$;
2. Если $K \subseteq K'$, то $\text{Th}(K) \supseteq \text{Th}(K')$;
3. $K \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(K))$ и $T \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(T))$;
4. Класс K аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = \text{Mod}(\text{Th}(K))$;
5. Любое пересечение аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом. Объединение двух аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом;
6. Класс K конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K и $\text{Str}_\sigma \setminus K$ аксиоматизируемы;
7. Класс K — аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

Классификация формул

- ▶ Σ_0 — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- ▶ Σ_1 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{y})$, где ψ — бескванторная;
- ▶ Σ_2 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$, где ψ — бескванторная, и т.д.;
- ▶ множество Π_n определяется аналогично множеству Σ_n с заменой \exists на \forall и наоборот.

Классификация формул

- ▶ Σ_0 — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- ▶ Σ_1 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{y})$, где ψ — бескванторная;
- ▶ Σ_2 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$, где ψ — бескванторная, и т.д.;
- ▶ множество Π_n определяется аналогично множеству Σ_n с заменой \exists на \forall и наоборот.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$;

$\varphi \in \Pi_n$ тогда и только тогда, когда $\neg \varphi \in \Sigma_n$;

$\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = \text{For}_\sigma$.

Π_1 - и Π_2 -аксиоматизируемость

В теории моделей имеется ряд теорем об аксиоматизируемости классов структур предложениями того или иного вида. Приведем два важных примера.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_1 -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур (т.е. если какая-то структура лежит в классе, то и любая её подструктура тоже лежит в нём).

Π_1 - и Π_2 -аксиоматизируемость

В теории моделей имеется ряд теорем об аксиоматизируемости классов структур предложениями того или иного вида. Приведем два важных примера.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_1 -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур (т.е. если какая-то структура лежит в классе, то и любая её подструктура тоже лежит в нём).

Класс структур K замкнут относительно объединений цепей структур, если из $\forall n (\mathbb{A}_n \in K)$ и $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots$ следует $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_2 -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

Полные теории

σ -Теория T называется *полной*, если она имеет модель и, для любого σ -предложения φ , либо $T \models \varphi$, либо $T \models \neg\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории T , имеющей модель, равносильны следующие условия:

T — полна;

$[T] = \text{Th}(\mathbb{A})$, для любой $\mathbb{A} \models T$ (где $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ — множество всех логических следствий теории T ;

$\text{Th}(\mathbb{A}) = \text{Th}(\mathbb{B})$ для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$.

Полные теории

σ -Теория T называется *полной*, если она имеет модель и, для любого σ -предложения φ , либо $T \models \varphi$, либо $T \models \neg\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории T , имеющей модель, равносильны следующие условия:

T — полна;

$[T] = \text{Th}(\mathbb{A})$, для любой $\mathbb{A} \models T$ (где $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ — множество всех логических следствий теории T ;

$\text{Th}(\mathbb{A}) = \text{Th}(\mathbb{B})$ для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$.

Теория называется *категоричной в мощности κ* , если она имеет единственную с точностью до изоморфизма модель мощности κ .

Ранее уже доказали простую, но важную теорему:

Если σ -теория не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\geq |\text{For}_\sigma|$, то она полна.

Модельно полные теории

Теория T *модельно полна*, если она имеет модель и отношения \subseteq, \preceq совпадают на $\text{Mod}(T)$.

Модельно полные теории

Теория T модельно полна, если она имеет модель и отношения \subseteq, \preceq совпадают на $\text{Mod}(T)$.

ТЕОРЕМА. Для теории T , имеющей модель, равносильны:

1. T — модельно полна.
2. Для любой $\mathbb{A} \models T$, теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна.
3. Для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ из $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ следует, что любое Σ_1 -предложение в сигнатуре σ_A , которое истинно в \mathbb{B}_A , будет истинно и в \mathbb{A}_A .
4. $\Sigma_1 = \Pi_1$ по модулю T (т.е. любая Σ_1 -формула $\varphi(\bar{x})$ равносильна подходящей Π_1 -формуле $\psi(\bar{x})$ в T : $T \models \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$).
5. $For_\sigma = \Pi_1$ по модулю T .

Дополнительные свойства

ТЕОРЕМА.

1. Любая модельно полная теория Π_2 -аксиоматизируемая.
2. Если модельно полная теория T имеет модель, которая вкладывается в любую модель T , то T полна.
3. Если для любых двух моделей модельно полной теории T существует третья модель, в которую они обе вкладываются, то T полна.
4. Теория T допускает элиминацию кванторов (т.е. $For_\sigma = \Pi_0$ по модулю T) в точности тогда, когда теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна для любой $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \models T$.
5. Если теория Π_2 -аксиоматизируема, не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\lambda \geq |For_\sigma|$, то она модельно полна.

Игры Эренфойхта

Считаем, что σ конечна, содержит $=$, и не содержит функциональных символов местности >0 . Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — σ -структуры с непересекающимися носителями.

Игры Эренфойхта

Считаем, что σ конечна, содержит $=$, и не содержит функциональных символов местности >0 . Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — σ -структуры с непересекающимися носителями.

В игре Эренфойхта с n ходами $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ каждый из игроков I и II делает по n ходов (при $n = 0$ ходов нет). При $n > 0$, на первом ходе I выбирает элемент $a \in A$ или $b \in B$, II отвечает выбором элемента в другой структуре; получили обогащение каждой структуры константой: $(\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)$. Далее игра идет как $G_{n-1}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))$.

Игры Эренфойхта

Считаем, что σ конечна, содержит $=$, и не содержит функциональных символов местности >0 . Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — σ -структуры с непересекающимися носителями.

В игре Эренфойхта с n ходами $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ каждый из игроков I и II делает по n ходов (при $n = 0$ ходов нет). При $n > 0$, на первом ходе I выбирает элемент $a \in A$ или $b \in B$, II отвечает выбором элемента в другой структуре; получили обогащение каждой структуры константой: $(\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)$. Далее игра идет как $G_{n-1}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))$.

II выигрывает в описанной партии, если конечные подструктуры, порождённые построенными кортежами элементов \bar{a}, \bar{b} , изоморфны относительно соответствия $a_i \mapsto b_i$, $c^{\mathbb{A}} \mapsto c^{\mathbb{B}}$; пустые подструктуры изоморфны по определению.

Игры Эренфойхта

Считаем, что σ конечна, содержит $=$, и не содержит функциональных символов местности >0 . Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — σ -структуры с непересекающимися носителями.

В игре Эренфойхта с n ходами $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ каждый из игроков I и II делает по n ходов (при $n = 0$ ходов нет). При $n > 0$, на первом ходе I выбирает элемент $a \in A$ или $b \in B$, II отвечает выбором элемента в другой структуре; получили обогащение каждой структуры константой: $(\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)$. Далее игра идет как $G_{n-1}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))$.

II выигрывает в описанной партии, если конечные подструктуры, порождённые построенными кортежами элементов \bar{a}, \bar{b} , изоморфны относительно соответствия $a_i \mapsto b_i$, $c^{\mathbb{A}} \mapsto c^{\mathbb{B}}$; пустые подструктуры изоморфны по определению.

Игра $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ отличается только тем, что первый ход I начинается выбором числа n ; далее игра идёт как $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

Стратегии

Стратегия для игрока в ИЭ — правило, определяющее его ход в любой текущей позиции. Более формально, стратегия для I может быть задана функцией $(A \cdot B)^* \rightarrow A \cup B$ (используются обозначения из теории формальных языков), а стратегия для II — парой функций $(A \cdot B)^* \cdot A \rightarrow B$ и $(A \cdot B)^* \cdot B \rightarrow A$. Еще точнее, в игре $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ достаточны ограничения этих функций на слова длины $< 2n$, а для игры $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ в начале стратегия I еще должна выбрать n .

Стратегии

Стратегия для игрока в ИЭ — правило, определяющее его ход в любой текущей позиции. Более формально, стратегия для I может быть задана функцией $(A \cdot B)^* \rightarrow A \cup B$ (используются обозначения из теории формальных языков), а стратегия для II — парой функций $(A \cdot B)^* \cdot A \rightarrow B$ и $(A \cdot B)^* \cdot B \rightarrow A$. Еще точнее, в игре $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ достаточны ограничения этих функций на слова длины $< 2n$, а для игры $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ в начале стратегия I еще должна выбрать n .

Стратегия для данного игрока называется выигрышной, если игрок, следуя этой стратегии, выигрывает в любой партии, при любых ходах своего оппонента.

Стратегии

Стратегия для игрока в ИЭ — правило, определяющее его ход в любой текущей позиции. Более формально, стратегия для I может быть задана функцией $(A \cdot B)^* \rightarrow A \cup B$ (используются обозначения из теории формальных языков), а стратегия для II — парой функций $(A \cdot B)^* \cdot A \rightarrow B$ и $(A \cdot B)^* \cdot B \rightarrow A$. Еще точнее, в игре $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ достаточны ограничения этих функций на слова длины $< 2n$, а для игры $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ в начале стратегия I еще должна выбрать n .

Стратегия для данного игрока называется выигрышной, если игрок, следуя этой стратегии, выигрывает в любой партии, при любых ходах своего оппонента.

Выражение $G_n^I(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ означает, что игрок I имеет выигрышную стратегию в игре $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$. Аналогично определяются сокращения $G_n^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, $G^I(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, $G^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

Свойства выигрышных стратегий

1. $G_{n+1}^I(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow$
 $(\exists a \in \mathbb{A} \forall b \in \mathbb{B} G_n^I((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))) \vee$
 $(\exists b \in \mathbb{B} \forall a \in \mathbb{A} G_n^I((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)))$
2. $G_{n+1}^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow$
 $(\forall a \in \mathbb{A} \exists b \in \mathbb{B} G_n^{II}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))) \wedge$
 $(\forall b \in \mathbb{B} \exists a \in \mathbb{A} G_n^{II}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)))$
3. $G^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow \forall n G_n^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$
4. $G^I(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow \exists n G_n^I(\mathbb{A}, \mathbb{B})$
5. В любой игре $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ ровно один из игроков имеет выигрышную стратегию.
6. В любой игре $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ ровно один из игроков имеет выигрышную стратегию.

Кванторная глубина

Кванторная глубина формулы φ — натуральное число $q(\varphi)$, определяемое рекурсией по φ :

Если φ атомарная, то $q(\varphi) = 0$;

Если $\varphi = \neg\varphi_1$, то $q(\varphi) = q(\varphi_1)$;

Если $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, то $q(\varphi) = \max(q(\varphi_1), q(\varphi_2))$;

Если $\varphi = \exists x \varphi_1$, то $q(\varphi) = q(\varphi_1) + 1$.

Кванторная глубина

Кванторная глубина формулы φ — натуральное число $q(\varphi)$, определяемое рекурсией по φ :

Если φ атомарная, то $q(\varphi) = 0$;

Если $\varphi = \neg\varphi_1$, то $q(\varphi) = q(\varphi_1)$;

Если $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, то $q(\varphi) = \max(q(\varphi_1), q(\varphi_2))$;

Если $\varphi = \exists x \varphi_1$, то $q(\varphi) = q(\varphi_1) + 1$.

Пусть $C_n^{\bar{x}}$ — множество всех σ -формул $\varphi(\bar{x})$ глубины не более n . Если φ — предложение, сокращаем $C_n^{\bar{x}}$ до C_n .

Кванторная глубина

Кванторная глубина формулы φ — натуральное число $q(\varphi)$, определяемое рекурсией по φ :

Если φ атомарная, то $q(\varphi) = 0$;

Если $\varphi = \neg\varphi_1$, то $q(\varphi) = q(\varphi_1)$;

Если $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, то $q(\varphi) = \max(q(\varphi_1), q(\varphi_2))$;

Если $\varphi = \exists x \varphi_1$, то $q(\varphi) = q(\varphi_1) + 1$.

Пусть $C_n^{\bar{x}}$ — множество всех σ -формул $\varphi(\bar{x})$ глубины не более n . Если φ — предложение, сокращаем $C_n^{\bar{x}}$ до C_n .

ЛЕММА. Фактор-множество $C_n^{\bar{x}} / \equiv$ по отношению равносильности формул конечно.

Выигрышные стратегии и элементарная эквивалентность

ТЕОРЕМА. $G_n^{II} \iff \forall \varphi \in C_n (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}).$

Выигрышные стратегии и элементарная эквивалентность

ТЕОРЕМА. $G_n^{II} \iff \forall \varphi \in C_n (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}).$

СЛЕДСТВИЕ. $G^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \iff \forall \varphi \in \text{Sent}_\sigma (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}) \iff \mathbb{A} \equiv \mathbb{B}.$

Выигрышные стратегии и элементарная эквивалентность

ТЕОРЕМА. $G_n^{II} \iff \forall \varphi \in C_n (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}).$

СЛЕДСТВИЕ. $G^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \iff \forall \varphi \in \text{Sent}_\sigma (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}) \iff \mathbb{A} \equiv \mathbb{B}.$

Отношение элементарной эквивалентности структур гораздо грубее чем отношение изоморфизма, однако во многих случаях оно полезно, поскольку дает важную классификацию структур, и с ним легче работать. В приложениях важны также следующие варианты элементарной эквивалентности: говорят, что \mathbb{A} n -эквивалентно \mathbb{B} (обозначение $\mathbb{A} \equiv_n \mathbb{B}$), если $\forall \varphi \in C_n (\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}).$

Основной результат ЛП

Множество всех общезначимых предложений любой конечной сигнатуры перечислимо, т.е. существует алгоритм, который перечисляет все элементы этого множества, и никакие другие предложения. Схема доказательства:

Основной результат ЛП

Множество всех общезначимых предложений любой конечной сигнатуры перечислимо, т.е. существует алгоритм, который перечисляет все элементы этого множества, и никакие другие предложения. Схема доказательства:

- 1) фиксируются некоторые конкретные простые общезначимые предложения (называемые аксиомами);
- 2) фиксируются некоторые простые правила, позволяющие чисто синтаксически выводить одни формулы из других;
- 3) доказывается, что многократное применение правил вывода к аксиомам и уже выведенным формулам порождает все общезначимые формулы.

Основной результат ЛП

Множество всех общезначимых предложений любой конечной сигнатуры перечислимо, т.е. существует алгоритм, который перечисляет все элементы этого множества, и никакие другие предложения. Схема доказательства:

- 1) фиксируются некоторые конкретные простые общезначимые предложения (называемые аксиомами);
- 2) фиксируются некоторые простые правила, позволяющие чисто синтаксически выводить одни формулы из других;
- 3) доказывается, что многократное применение правил вывода к аксиомам и уже выведенным формулам порождает все общезначимые формулы.

Глубина основного результата в том, что определение Тарского не дает никакой верхней границы для вычислительной сложности множества общезначимых предложений. Известно, что не существует логики, расширяющей ЛП и удовлетворяющей теоремам компактности и основному результату.

Исчисление секвенций

Известно много способов фиксации аксиом и правил вывода. Напомним *исчисление секвенций с равенством*. Секвенция — упорядоченная пара (Γ, Δ) конечных множеств σ -формул, записанная в виде $\Gamma \vdash \Delta$. Неформальный смысл: из всех формул слева от \vdash вытекает хотя бы одна формула справа.

Исчисление секвенций

Известно много способов фиксации аксиом и правил вывода. Напомним *исчисление секвенций с равенством*. Секвенция — упорядоченная пара (Γ, Δ) конечных множеств σ -формул, записанная в виде $\Gamma \vdash \Delta$. Неформальный смысл: из всех формул слева от \vdash вытекает хотя бы одна формула справа.

Аксиомы: $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi; \quad \Gamma \vdash \Delta, t = t$

Исчисление секвенций

Известно много способов фиксации аксиом и правил вывода. Напомним *исчисление секвенций с равенством*. Секвенция — упорядоченная пара (Γ, Δ) конечных множеств σ -формул, записанная в виде $\Gamma \vdash \Delta$. Неформальный смысл: из всех формул слева от \vdash вытекает хотя бы одна формула справа.

Аксиомы: $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi; \quad \Gamma \vdash \Delta, t = t$

Правила: $\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

$$\frac{\Gamma \varphi(t) \vdash \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t=t', \varphi(t') \vdash \Delta, \psi(t')}$$

$$\frac{\Gamma \varphi(t) \vdash \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t'=t, \varphi(t') \vdash \Delta, \psi(t')}$$

Дополнительные правила см. ниже

Дополнительные правила вывода

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta},$$
$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta; \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg \varphi \vdash \Delta},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(y) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg \varphi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(y)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi(x)}$$