## ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ.

## Задание 1. Определимость

- 1. Докажите, что вещественное число определимо в структуре ( $\mathbb{R}$ ; =  $,+,\cdot,0,1$ ) тогда и только тогда, когда оно алгебраическое. Охарактеризуйте вещественные числа, определимые в структуре ( $\mathbb{R}$ ; =, +,0,1).
- 2. Докажите, что комплексное число определимо в структуре ( $\mathbb{C}$ ; =  $,+,\cdot,0,1$ ) тогда и только тогда, когда оно рациональное.
- 3. Докажите, что в стандартной модели арифметики  $(\mathbb{N};+,\cdot,=)$  определимы: любое конкретное натуральное число; отношения строгого порядка и делимости; множество всех простых чисел; отношение быть простыми близнецами; множества степеней двойки, тройки, четверки, пятерки.
- 4. Пусть A-k-буквенный алфавит,  $k \geq 2$ . Определим бинарные отношения  $\leq_p, \leq_s, \leq_i, \leq$  на  $A^*$  следующим образом:

```
u \leq_p v, если ux = v для некоторого x \in A^*;
```

 $u \leq_s v$ , если xu = v для некоторого  $x \in A^*$ ;

 $u \leq_i v$ , если xuy = v для некоторых  $x, y \in A^*$ ;

 $u \leq v$ , если u получается из v стиранием некоторых букв.

Докажите, что:

отношение  $\leq_i$  определимо в  $A^*$  через отношения  $\leq_p$  и  $\leq_s$ ;

пустое слово определимо через любое из этих отношений;

множество всех слов фиксированной длины определимо через любое из этих отношений;

никакое фиксированное непустое слово не определимо через все эти отношения;

существует двухбуквенное слово, не определимое через отношения  $\leq_i, \preceq$  и однобуквенные слова;

опишите все слова, не определимые как в предыдущем вопросе.

5. Докажите, что любой элемент структуры  $(A^*; \leq_i)$ , обогащенной константами для всех слов длины не более двух, определим. Охарактеризуйте группу автоморфизмов структуры  $(A^*; \leq_i)$ . Докажите аналогичные результаты для отношения  $\preceq$  вместо  $\leq_i$ .