

Задание 7. Исчисление предикатов.

1. Докажите, что “основные равносильности” (см. файл reminderLogic2.pdf) выводимы в исчислении секвенций.

(Равносильность $\varphi \equiv \psi$ выводима, если секвенции $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$ выводимы.)

2. Докажите, что “основные тавтологии логики высказываний”, а также кванторные аксиомы гильбертовского ИП (см. файл reminderLogic2.pdf), выводимы в исчислении секвенций.

(Формула φ выводима, если секвенция $\vdash \varphi$ выводима.)

3. Докажите, что все аксиомы равенства выводимы в исчислении секвенций.

4. Докажите, что из аксиом упорядоченных абелевых групп выводимы формулы, выражающие следующие утверждения:

если элемент x положителен, то элементы $x + x$ и $x + x + x$ также положительны;

если элемент x отрицателен, то элементы $x + x$ и $x + x + x$ также отрицательны.

5. Докажите, что из аксиом ZFC выводимы формулы, выражающие следующие утверждения:

существует единственное пустое множество;

для любых двух множеств существуют и единственны их объединение, пересечение, и разность;

две упорядоченные пары (в смысле Куратовского) равны в точности тогда, когда равны их первые и вторые компоненты;

если x — ординал, то $x + 1 = x \cup \{x\}$ тоже ординал, и между ними нет других ординалов.