

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА 2

Виктор Львович Селиванов

v.selivanov@spbu.ru

Важная дополнительная информация:

<https://github.com/vseliv/Logic2-2023/tree/main>

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.
2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.
3. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М: Мир, 1983, 255 с.
4. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.:

Наука, 2001. 256 с.

5. Дж. Шенфилд. Математическая логика.
М.: Наука, 1975. 528 с.

σ -ТЕРМЫ:

предметная переменная есть терм;

константный символ из σ есть терм;

если f — n -местный функциональный символ из σ и t_1, \dots, t_n — термы, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ тоже терм.

σ -ФОРМУЛЫ:

выражения $s = t$ и $P(t_1, \dots, t_n)$,

где s, t, t_1, \dots, t_n — термы, а p — n -местный предикатный символ из σ , суть формулы;

если φ и ψ — формулы, а x — предметная переменная, то выражения

$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ суть формулы.

σ -СТРУКТУРА: пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I сигнатурных символов в A .

Интерпретация I — отображение, сопоставляющее каждому n -местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n -местный предикат P^I на A , каждому n -местному функциональному символу $f \in \sigma$ — n -местную функцию f^I на A и каждому константному символу $c \in \sigma$ — элемент $c^I \in A$.

ЗНАЧЕНИЕ $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k)$ ТЕРМА

$t = t(x_1, \dots, x_k)$ В СТРУКТУРЕ \mathbb{A} ,

при заданных значениях $x_i = a_i \in A$:

Если $t = x_i$, то $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) = a_i$;

если $t = c \in \sigma$, то $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) = c^{\mathbb{A}}$;

если $t = f(t_1, \dots, t_n)$ и значения

$b_j = t_j^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k)$ уже определены по пред-

положению индукции, то

$t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) = f^{\mathbb{A}}(b_1, \dots, b_n)$.

ЗНАЧЕНИЕ $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k)$ ФОРМУЛЫ
 $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_k)$ В СТРУКТУРЕ \mathbb{A} при
 $x_i = a_i \in A$:

Если φ есть $s = t$, то $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) = \text{И}$ в
точности тогда, когда совпадают $s^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k)$
и $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k)$;

если φ есть $P(t_1, \dots, t_n)$, то $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) =$
 $P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k), \dots, t_n^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k))$;

если φ есть $(\psi \wedge \theta)$, то $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) =$
 $\psi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) \wedge \theta^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k)$, и аналогич-
но для операций \vee , \rightarrow и \neg ;

если φ есть $\forall x \psi(x, x_1, \dots, x_k)$, то
 $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) = \text{И}$ в точности тогда, когда
 $\psi^{\mathbb{A}}(b, a_1, \dots, a_k) = \text{И}$ при любом $b \in A$;

если φ есть $\exists x \psi(x, x_1, \dots, x_k)$, то
 $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) = \text{И}$ в точности тогда, когда
 $\psi^{\mathbb{A}}(b, a_1, \dots, a_k) = \text{И}$ хотя бы при одном
 $b \in A$.

ОСНОВНЫЕ РАВНОСИЛЬНОСТИ

1. $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$;
2. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$;
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$;
4. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
5. $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$;
6. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$;
7. $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$;
8. $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$;
9. $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$;
10. $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$.

11. $\neg(\forall x\varphi) \equiv \exists x(\neg\varphi)$;
12. $\neg(\exists x\varphi) \equiv \forall x(\neg\varphi)$;
13. $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$;
14. $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$;
15. $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$;
16. $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$;
(x не входит свободно в ψ)
17. $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$;
18. $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$.
(y не входит в φ)

ОСНОВНЫЕ ТАВТОЛОГИИ

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
2. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$;
3. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$;
4. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$;
5. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$;
6. $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;
7. $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;
8. $(\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \theta))$;
9. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$;
10. $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

ГИЛЬБЕРТОВСКОЕ ИП_σ АКСИОМЫ:

Тавтологии сигнатуры σ ;

Кванторные аксиомы

$$\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(t) \text{ и } \varphi(t) \rightarrow \exists x\varphi(x);$$

Аксиомы равенства

$$\forall x(x = x),$$

$$\forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x),$$

$$\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)).$$

ПРАВИЛА ВЫВОДА:

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}, \quad \frac{\psi \rightarrow \varphi(y)}{\psi \rightarrow \forall x\varphi(x)}, \quad \frac{\varphi(y) \rightarrow \psi}{\exists x\varphi(x) \rightarrow \psi},$$

где y — переменная, не входящая свободно в нижнюю формулу.

Вариант ИП_σ^{*} получается, если вместо всех тавтологий берутся только ОСНОВНЫЕ тавтологии.

ГЕНЦЕНОВСКОЕ ИП_σ (без равенства)
АКСИОМЫ:

$\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$

ПРАВИЛА ВЫВОДА:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}, \\
 \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta; \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}, \\
 \frac{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta; \Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}, \\
 \frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash \Delta; \Gamma, \varphi(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta}, \\
 \frac{\Gamma, \varphi(y) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta},
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}, \\
 \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}, \\
 \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi; \Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg \varphi}, \\
 \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(y)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)}, \\
 \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi(x)},
 \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

МИНИМАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА МА:

1. $0 + 1 = 1$; 2. $\forall x \neg(x + 1 = 0)$;
3. $\forall x \forall y (x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$;
4. $\forall x (x + 0 = x)$;
5. $\forall x \forall y (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$;
6. $\forall x (x \cdot 0 = 0)$;
7. $\forall x \forall y (x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x)$;
8. $\forall x \neg(x < 0)$;
9. $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$;
10. $\forall x \forall y (x < y + 1 \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$.

Арифметика Пеано ПА получается из МА добавлением схемы аксиом индукции:

$$(\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1))) \rightarrow \forall x \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — любая формула сигнатуры МА.

АКСИОМЫ ZFC (сигнатура $\{=, \in\}$)

0. $\exists x(x = x)$.

1. $\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y$.

2. $\forall u \forall v \exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v)$.

3. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u))$.

4. $\forall X \exists Y \forall u \forall z(u \in z \wedge z \in X \rightarrow u \in Y)$.

5. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$.

6. $\forall x \forall y \forall y'(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y') \rightarrow y = y') \rightarrow \forall X \exists Y \forall x \forall y(x \in X \wedge \varphi(x, y) \rightarrow y \in Y)$.

7. $\exists Y(\emptyset \in Y \wedge \forall y(y \in Y \rightarrow y \cup \{y\} \in Y))$.

8. $\forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists x(x \in X \wedge \forall u(u \in x \rightarrow u \notin X)))$.

9. $\forall X \exists f((f : (P(X) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow X) \wedge \forall Y(Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \rightarrow f(Y) \in Y))$.

СВОЙСТВА АКСИОМ И ПРАВИЛ

1. Все аксиомы тождественно истинны.
2. Если формула получена по некоторому правилу из формул, тождественно истинных в структуре \mathbb{A} , то она тождественно истинна в \mathbb{A} .
3. Если в любой аксиоме (любом правиле вывода) заменить все вхождения константного символа c на переменную z , не входящую в эту аксиому (это правило вывода), то получим аксиому (правило вывода).

Выводом формулы φ из множества формул T называют последовательность формул $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, в которой $\varphi_k = \varphi$ и каждый элемент либо аксиома, либо принадлежит T , либо выведен из предшествующих формул последовательности по одному из правил вывода.

Формулу φ называют выводимой из множества формул T ($T \vdash \varphi$), если существует вывод формулы φ из T .

СВОЙСТВА ВЫВОДИМОСТИ

Теорема дедукции: Соотношения $T \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ и $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ равносильны для всех предложений φ , формул ψ и множеств формул T .

1. Если $\varphi \in T$, то $T \vdash \varphi$.
2. Если $T \vdash \varphi$, то $T_0 \vdash \varphi$ для подходящего конечного множества $T_0 \subseteq T$.
3. Если $S \vdash \varphi$ и все формулы множества S выводимы из T , то $T \vdash \varphi$.
4. Если $T \cup \{\varphi\} \vdash \theta$ и $T \cup \{\psi\} \vdash \theta$, то $T \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \theta$ (φ и ψ — предложения).
5. Если $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ и $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$, то $T \vdash \neg\varphi$ (φ — предложение).
6. $T \vdash \varphi \wedge \psi$ тогда и только тогда, когда $T \vdash \varphi$ и $T \vdash \psi$.

СВОЙСТВА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

Множество формул противоречиво, если из него выводима любая формула.

1. T противоречиво тогда и только тогда, когда из него выводима хотя бы одна формула вида $\theta \wedge \neg\theta$.
2. Если $T_n (n \in \mathbb{N})$ непротиворечивы и $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots$ то $\bigcup_n T_n$ непротиворечиво.
3. Если φ — предложение, и $T \cup \{\varphi\}$ противоречиво, то $T \vdash \neg\varphi$.
4. Если T непротиворечиво, то для любого предложения φ непротиворечиво хотя бы одно из $T \cup \{\varphi\}$ и $T \cup \{\neg\varphi\}$.
5. Если множество предложений $S = T \cup \{\exists x\psi(x)\}$ непротиворечиво, то и множество $S \cup \{\psi(c)\}$ непротиворечиво для любого не входящего в формулы из S сигнатурного константного символа c .

СВОЙСТВА ТЕОРИЙ ХЕНКИНА

Пусть T — теория Хенкина, т.е. T непротиворечива, любое предложение или его отрицание выводимо из T , и для любого выводимого из T предложения вида $\exists x\psi(x)$ существует константный символ $c \in \sigma$ такой, что $T \vdash \psi(c)$.

1. $T \vdash \neg\varphi \iff T \nvdash \varphi$.
2. $T \vdash (\varphi \vee \psi) \iff T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.
3. $T \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \iff T \nvdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.
4. $T \vdash \exists x\theta(x) \iff T \vdash \theta(t)$ для некоторого терма t без переменных.
5. $T \vdash \forall x\theta(x) \iff T \vdash \theta(t)$ для любого терма t без переменных.
6. Любая непротиворечивая теория не более чем счетной сигнатуры σ может быть расширена до теории Хенкина сигнатуры σ_C , где C — счетное множество новых константных символов.