Задание 10. Кодирование ИП$_\sigma$, арифметика.

1. Докажите, что следующие множества рекурсивны:
множество всех кодов термов сигнатуры $\sigma = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$;
множество всех кодов имен $\hat{n}$ натуральных чисел;
множество всех кодов формул сигнатуры σ;
множество всех кодов аксиом минимальной арифметики.

2. Докажите рекурсивность функции f:
если a и b — коды термов t и s соответственно, то $f(a, b)$ — код терма $t + s$, иначе $f(a, b) = 0$;
если a — код терма t, то $f(a)$ — код формулы $t+0 = t$, иначе $f(a) = 0$;
если a — код формулы φ, то $f(a)$ — код формулы $\neg\varphi$, иначе $f(a) = 0$;
если a, b, c — коды формул φ, ψ, θ соответственно, то $f(a, b, \mathrm{c})$ — код формулы $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$, иначе $f(a, b, c) = 0$.

3. Докажите, что множество (кодов) логических следствий рекурсивно аксиоматизируемой теории конечной сигнатуры рекурсивно перечислимо.

Докажите, что множество (кодов) логических следствий полной рекурсивно аксиоматизируемой теории конечной сигнатуры рекурсивно.

4. Докажите, что для любых $x, y \in \mathbb{N}$ в минимальной арифметике выводимы предложения $\vdash \hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}$ и $\vdash \hat{x} \cdot \hat{y}_2 = \widehat{x \cdot y}$. Предложение $\hat{x} < \hat{y}$ выводимо в минимальной арифметике в точности тогда, когда $x < y$.

5. Докажите, что коммутативность сложения и умножения доказуемы в арифметике Пеано, но не доказуемы в минимальной арифметике.