Задание 9. Рекурсивные функции и предикаты.

1. Докажите, что:

Если предикаты $P(\bar{x})$, $Q(\bar{x})$ и $R(\bar{x}, y)$ рекурсивны, то предикаты $P(\bar{x}) \wedge Q(\bar{x})$, $P(\bar{x}) \vee Q(\bar{x})$, $P(\bar{x}) \to Q(\bar{x})$, $\neg p(\bar{x})$, $\forall y < z R(\bar{x}, y)$ и $\exists y < z R(\bar{x}, y)$ рекурсивны.

Пусть $P_1(\bar{x}), \ldots, P_k(\bar{x})$ — рекурсивные предикаты такие, что для любого $\bar{x} \in \mathbb{N}$ истинен ровно один из этих предикатов, а $g_1(\bar{x}), \ldots, g_k(\bar{x})$ — рекурсивные функции. Тогда рекурсивна и функция

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} g_1(\bar{x}), & \text{если } P_1(\bar{x}) = \text{И} \\ \ldots\ldots\ldots \\ g_k(\bar{x}), & \text{если } P_k(\bar{x}) = \text{И} \end{cases}$$

2. Докажите рекурсивность следующих функций: $max\{x, y\}$; $[\sqrt{x}]$; $[x\sqrt{2}]$; $|x-y|$; $max\{0, x-y\}$; $f(x) = n$, если $x = 2n$, и $f(x) = 0$ в противном случае; $div(x, y)$ — неполное частное от деления x на y ($div(x, 0) = 0$).

3. Докажите рекурсивность следующих функций: $rest(x, y)$ — остаток от деления x на y ($rest(x, 0) = x$); НОД(x, y) — наибольший общий делитель x и y (НОД$(0, 0) = 0$); НОК(x, y) — наименьшее общее кратное x и y (НОК$(x, 0) =$НОК$(0, y) = 0$).

4. Докажите, что существует рекурсивная биекция между $\mathbb{N}^2$ и $\mathbb{N}$. Более того, существет такая биекция, задаваемая рациональными полиномами.

5. Докажите, что следующие функции рекурсивны: $y!$; x^y; функция, перечисляющая без повторения простые числа в порядке возрастания; последовательность Фибоначчи; количество простых чисел, не превосходящих y.