Задание 14. Арифметичесая иерархия.

Пусть Σ_n^ρ (Π_n^ρ) — множество всех предикатов, определимых в $\mathbb{N}$ Σ_n-формулами (Π_n-формулами) сигнатуры ρ, состоящей из всех рекурсивных предикатов. Эти множества называются уровнями арифметической иерархии. Предикаты из $\bigcup_n \Sigma_n^\rho$ называются *арифметическими*.

1. Докажите, что:
$\Sigma_n^\rho \cup \Pi_n^\rho \subseteq \Sigma_{n+1}^\rho \cap \Pi_{n+1}^\rho = \Delta_{n+1}^\rho$;
$A \in \Sigma_n^\rho \Leftrightarrow \overline{A} \in \Pi_n^\rho$;
$A \leq_m B \in \Sigma_n^\rho \Rightarrow A \in \Sigma_n^\rho$;
Σ_n^ρ совпадает со множеством предикатов вида $\exists y_1 \forall y_2 \cdots Q y_n R(\bar{x}, \bar{y})$, где R — рекурсивный предикат.

2. Докажите, что:
множества Σ_n^ρ и Π_n^ρ замкнуты относительно $\wedge$, $\vee$, и ограниченных кванторов;
множества из Σ_1^ρ — это в точности РП множества.

3. Докажите, что $B \leq_T A \in \Sigma_1^\rho \Rightarrow B \in \Sigma_2^\rho$.

4. Пусть $\emptyset^{(0)} = \emptyset$ и $\emptyset^{(n+1)} = (\emptyset^{(n)})'$, и $\emptyset^{(\omega)} = \{\langle n, x\rangle \mid x \in \emptyset^{(n)}\}$.
Докажите, что $\emptyset^{(n)} <_T \emptyset^{(n+1)} <_T \emptyset^{(\omega)}$ для любого n.

5. Докажите, что для любых $A \subseteq \mathbb{N}$ и $n \geq 1$ справедливы соотношения $A \in \Sigma_n^\rho \Leftrightarrow A \leq_m \emptyset^{(n)}$ и $A \in \Delta_n^\rho \Leftrightarrow A \leq_T \emptyset^{(n-1)}$.