

Математическая логика 2

(математика 3 к., весенний семестр 2025)

Примерный план лекций (возможны изменения).

Одна пара лекций и одна пара практики в неделю (М). 32 часа лекций и 32 часа практики.

Лекция 1. Структуры, гомоморфизмы и изоморфизмы. Логика предикатов, синтаксис и семантика. Модели. Тавтологически истинные предложения, равносильность, логическое следование.

Лекция 2. Ультрафильтры и ультрапроизведения. Теорема Лоса. Теорема Гёделя-Мальцева о компактности.

Лекция 3. Теоремы Левенгейма-Сколема о понижении и повышении мощности. Парадокс Сколема, нестандартные модели арифметики.

Лекция 4. Аксиоматизируемые классы структур. Критерии конечной аксиоматизируемости, Π_1 - и Π_2 -аксиоматизируемости.

Лекция 5. Полные теории, их характеристики, тест Лоса-Воота. Модельно полные теории, их характеристики, тест Линдстрёма. Элиминация кванторов. Модельная характеристика теорий, допускающих элиминацию кванторов.

Лекция 6. Элементарная эквивалентность и ее ограниченные варианты. Игры Эренфойхта.

Лекция 7. Исчисление предикатов. Выводимость, ее свойства.

Непротиворечивые множества формул, их свойства. Теории Хенкина, их свойства.

Лекция 8. Теоремы о существовании модели и полноте ИП.

Лекция 9. Вычислимость. Рекурсивные функции и предикаты. Тезис Чёрча. Бета-функция Гёделя. Кодирование последовательностей.

Лекции 10. Арифметизация исчисления предикатов. Представление рекурсивных предикатов в слабой арифметике. Неразрешимость арифметики. Неполнота арифметики.

Лекция 11. Перечислимость и неразрешимость логики предикатов.

Разрешимость полной перечислимо аксиоматизируемой теории. Примеры разрешимых и неразрешимых теорий.

Лекции 12. Регистровые машины. R-вычислимые функции и предикаты. R-вычислимость рекурсивных функций.

Лекции 13. Кодирование R-вычислений. Совпадение классов R-вычислимых и рекурсивных тотальных функций.

Лекции 14. R-вычислимость частичных функций. Рекурсивность частичных функций. Совпадение классов R-вычислимых и рекурсивных частичных функций. R-Вычислимость с оракулом и относительная рекурсивность. Совпадение классов R-вычислимых с оракулом h и рекурсивных относительно h тотальных (а также частичных) функций.

Лекции 15. Главная вычислимая нумерация R-вычислимых частичных функций. Существование главной вычислимой нумерации. Теорема о неподвижной точке. Теорема Райса. Характеристики рекурсивно перечислимых множеств. m -Сводимость и ее свойства. Тьюрингова

сводимость и тьюрингов скачок, их свойства. m -Универсальные рекурсивно перечислимые множества.

Лекции 16. Арифметические множества. Арифметическая иерархия и ее свойства. Связь арифметической иерархии с итерациями тьюрингова скачка. Теорема Тарского о неопределимости истины.

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.
2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.
3. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М: Мир, 1983, 255 с.
4. И.А. Лавров, Л.Л.Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.
5. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.