Логика-2, 3 курс М

Виктор Львович Селиванов [1]

[1]ФМКН СПбГУ

Весенний семестр, 2024-25

v.selivanov@spbu.ru

Важная дополнительная информация:
https://github.com/vseliv/Logic2-2024

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.

2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.

3. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М: Мир, 1983, 255 с.

4. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.

5. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$
- Логические символы $\wedge\ \vee\ \ \rightarrow\ \ \neg\ \forall\ \exists$

Исходные символы ЛП$^\sigma$

Выражения ЛП$^\sigma$ строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.
- Счетное множество Var переменных $v_0\ v_1\ v_2 \ldots$
- Логические символы $\wedge\ \vee\ \to\ \neg\ \forall\ \exists$
- Вспомогательные символы ( ) ,

Осмысленные выражения ЛП$^\sigma$

σ-ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n-местный функциональный символ из σ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже терм.

Осмысленные выражения ЛП$^\sigma$

σ-ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n-местный функциональный символ из σ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже терм.

σ-ФОРМУЛЫ:

выражение $P(t_1, \ldots, t_n)$,

где t_1,. . ., t_n — термы, а P - n-местный предикатный символ из σ, является формулой;

если φ и ψ — формулы, а x — переменная, то выражения

$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$

суть формулы.

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \ldots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов $t_1, \ldots, t_n$;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для $\vee, \to, \neg$;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для $\exists$.

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:
$FV(P(t_1, \ldots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов $t_1, \ldots, t_n$;
$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для $\vee, \rightarrow, \neg$;
$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для $\exists$.

Переменные, которые входят в формулу, но не являются свободными, называются связанными. Формулы без свободных переменных называются предложениями.

Запись $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ означает, что $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$. Аналогично для термов.

σ-Структуры

σ-Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n-местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n-местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{И},\text{Л}\}$, а каждому n-местному функциональному символу f из σ — некоторую n-местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

σ-Структуры

σ-Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n-местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n-местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{И,Л}\}$, а каждому n-местному функциональному символу f из σ — некоторую n-местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

Изоморфизмом $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$ называется биекция g множества A на множество B такая, что $P^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ и $g(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{A}$.

Структуры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ называются изоморфными ($\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$), если существует изоморфизм $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$.

Значения термов и формул

Для любой σ-структуры $\mathbb{A}$ и означивания $\nu : Var \to A$ определяем значения $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{\text{И},\text{Л}\}$ индукцией:

$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x)$, $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \ldots, t_n^{\mathbb{A},\nu})$;

Значения термов и формул

Для любой σ-структуры $\mathbb{A}$ и означивания $\nu : Var \to A$ определяем значения $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{$И,Л$\}$ индукцией:

$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x)$, $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu})$;

$P(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu})$;
$(\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu} \wedge \psi^{\mathbb{A},\nu}$, аналогично для $\vee, \to, \neg$;

$$(\forall x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigwedge_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x} \text{ и } (\exists x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigvee_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x}$$

,
где ν_a^x — означивание, полученное из ν изменением значения x на a.

Значения термов и формул

Пусть $t = t(x_1, \ldots, x_m)$ и $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$.

- Если означивания μ и ν согласованы на $x_1, \ldots, x_m$, то $t^{\mathbb{A},\mu} = t^{\mathbb{A},\nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A},\mu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu}$. Поэтому вместо $t^{\mathbb{A},\nu}$ часто пишут $t^{\mathbb{A}}(x_1/a_1, \ldots, x_m/a_m)$ или, короче, $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)$, где $a_i = \nu(x_i)$; аналогично для формул. Вместо $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) =$И часто пишут $\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_m)$.
- Если g — изоморфизм $\mathbb{A}$ на $\mathbb{B}$, то $g(t^{\mathbb{A},\nu}) = t^{\mathbb{A},g\circ\nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{A},g\circ\nu}$. Иными словами, $g(t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = t^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_m))$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_m))$.
- Если $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$, то эти структуры элементарно эквивалентны ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), т.е. в них истинны одни и те же σ-предложения.

Общезначимость и ее варианты

- φ общезначима (тождественно истинна), если $\varphi^{\mathbb{A},\nu}$ =И для любых $\mathbb{A}$ и ν.
- φ и ψ равносильны ($\varphi \equiv \psi$), если $\varphi^{\mathbb{A},\nu} = \psi^{\mathbb{A},\nu}$ для любых $\mathbb{A}$ и ν.
- Моделью множества предложений T называется структура, в которой все предложения из T истинны.
- Предложение φ логически следует из множества педложений T ($T \models \varphi$), если φ истинно в любой модели множества T.
- Теория — множество предложений. Замкнутая теория — теория, замкнутая относительно логического следования. $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ — замыкание теории T.

Общезначимость и ее варианты

- φ общезначима $\iff$ $\models \varphi$.
- $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ общезначима.
- $\varphi(\bar{x})$ общезначима $\iff$ $\forall \bar{x} \varphi$ общезначима.
- $T \models (\varphi \to \psi) \iff T \cup \{\varphi\} \models \psi$.
- $T \models \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$ не имеет модели.
- $T \models \varphi \iff \bigwedge T \to \varphi$ общезначима, где T — конечное множество предложений.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$ для любого $A \subseteq I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

1. Ультрафильтры на I — это в точности максимальные фильтры по включению.
2. Если F — ультрафильтр, то $A \in F \iff (I \setminus A) \notin F$ и $A \cup B \in F \iff A \in F \vee B \in F$, для любых $A, B \subseteq I$.
3. Любой фильтр на I содержится в некотором ультрафильтре.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$ — семейство σ-структур и F — фильтр на I. Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \to \bigcup_i A_i \mid \forall i(a(i) \in A_i)\}$.
Определим σ-структуру $\mathbb{A}_F$ на $A/_{\equiv_F}$ так:
$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in F$,
$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$;
это определение корректно.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$ — семейство σ-структур и F — фильтр на I. Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \to \bigcup_i A_i \mid \forall i(a(i) \in A_i)\}$. Определим σ-структуру $\mathbb{A}_F$ на $A/_{\equiv_F}$ так:
$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in F$,
$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$;
это определение корректно.

ТЕОРЕМА. Для любых ультрафильтра F, σ-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ и $a_1, \ldots, a_m \in A$ имеем:
$\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \ldots, [a_m]) \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_m(i))\} \in F$.

В частности, при $m = 0$: $\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F$.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T имеет модель, то T имеет модель.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T имеет модель, то T имеет модель.

Пусть $I = \{i \mid i$ — конечное подмножество $T\}$. Каждое $i \in I$ имеет модель. По аксиоме выбора, существует семейство структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ такое, что $\mathbb{A}_i \models i$ для любого $i \in I$. Пусть $G_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$. Для любых $i, k \in I$ выполнено $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$. Поэтому $F = \{A \subseteq I \mid \exists i (G_i \subseteq A)\}$ — фильтр на I. По доказанному ранее, существует ультрафильтр $H \supseteq F$.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T имеет модель, то T имеет модель.

Пусть $I = \{i \mid i$ — конечное подмножество $T\}$. Каждое $i \in I$ имеет модель. По аксиоме выбора, существует семейство структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ такое, что $\mathbb{A}_i \models i$ для любого $i \in I$. Пусть $G_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$. Для любых $i, k \in I$ выполнено $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$. Поэтому $F = \{A \subseteq I \mid \exists i (G_i \subseteq A)\}$ — фильтр на I. По доказанному ранее, существует ультрафильтр $H \supseteq F$.

Утверждаем, что ультрапроизведение $\mathbb{A}_H$ является моделью для T, т.е. $\mathbb{A}_H \models \varphi$ для любого $\varphi \in T$. Но $\{\varphi\} \in I$, откуда $G_{\{\varphi\}} \in F \subseteq H$ и $G_{\{\varphi\}} \subseteq \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in H$. По теореме об ультрапоизведении, $\mathbb{A}_H \models \varphi$.

Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двухместный предикатный символ). σ-Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двухместный предикатный символ). σ-Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество T имеет нормальную модель.

Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двухместный предикатный символ). σ-Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество T имеет нормальную модель.

Для доказательства надо применить предыдущую теорему к множеству $T \cup E_\sigma$, где E_σ — аксиомы равенства (утверждающие, что $=$ есть σ-конгруэнтность) и профакторизовать полученную модель $\mathbb{A}$ по конгруэнтности $=^{\mathbb{A}}$.

Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x),\ \forall x \forall y(x = y \to y = x),$$
$$\forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \to x = z),$$

$$\forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \land \dots \land x_n = y_n \to$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)),$$
$$\forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \land \dots \land x_n =$$
$$y_n \land P(x_1, \dots, x_n) \to P(y_1, \dots, y_n)).$$

Аксиомы равенства, нормальные модели

$\forall x(x = x)$, $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$,
$\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z)$,

$\forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_n \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \to$
$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n))$,
$\forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_n \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n =$
$y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \to P(y_1, \dots, y_n))$.

ТЕОРЕМА. Если теория содержит аксиомы равенства и имеет модель, то она имеет и нормальную модель.

Понижение мощности

- $\mathbb{A}$ — *подструктура* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$, $P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$ и $f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$ для всех $a_1, \dots, a_n \in A$;
- *вложение* структуры $\mathbb{A}$ в структуру $\mathbb{B}$ — это изоморфизм $\mathbb{A}$ на подструктуру структуры $\mathbb{B}$;
- $\mathbb{A}$ — *элементарная подструктура* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(\overline{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\overline{a}))$ для всех $\overline{a} \in \mathbb{A}$ и для всех формул $\varphi(\overline{x})$;
- *элементарное вложение* $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$ — это изоморфизм $\mathbb{A}$ на элементарную подструктуру структуры $\mathbb{B}$;
- $\mathbb{A}$ *элементарно эквивалентно* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathsf{For}_\sigma|$.
Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathsf{For}_\sigma|$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \le |\mathsf{For}_\sigma|$. Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \le |\mathsf{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность
$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ по индукции:
$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\}$,
где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены так:
$E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) \mid \overline{a} \in S_n$ и $\mathbb{A} \models \exists y\ \varphi(\overline{a}, y)\}$ и
$\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))$ для всех $e \in E_n$. $B = \bigcup_n S_n$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$. Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность $X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ по индукции: $S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\}$, где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены так: $E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) \mid \overline{a} \in S_n$ и $\mathbb{A} \models \exists y\ \varphi(\overline{a}, y)\}$ и $\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))$ для всех $e \in E_n$. $B = \bigcup_n S_n$.

Известен следующий важный результат: Не существует логики, собственным образом расширяющей логику предикатов и удовлетворяющей теоремам компактности и понижения мощности.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ. Если $\mathbb{A}$ — σ-структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$ в A, получим τ-структуру $\mathbb{B}$, называемую обогащением структуры $\mathbb{A}$. Наоборот: если $\mathbb{B}$ — τ-структура, то, "забывая" интерпретацию символов из $\tau \backslash \sigma$, получим *σ-обеднение* $\mathbb{B}|_\sigma$ структуры $\mathbb{B}$. Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ. Если $\mathbb{A}$ — σ-структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \setminus \sigma$ в A, получим τ-структуру $\mathbb{B}$, называемую обогащением структуры $\mathbb{A}$. Наоборот: если $\mathbb{B}$ — τ-структура, то, “забывая” интерпретацию символов из $\tau \setminus \sigma$, получим *σ-обеднение* $\mathbb{B}|_\sigma$ структуры $\mathbb{B}$. Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Например, пусть $\mathbb{A}$ — σ-структура, а $\sigma_A = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$ ее обогащение новыми константными символами c_a такими, что $c_a \neq c_b$ при $a \neq b$. Стандартным константным обогащением структуры $\mathbb{A}$ называется ее σ_A-обогащение, в котором новые символы интерпретируются так: $c_a \mapsto a$, для любого $a \in A$.

Диаграммы структур

Диаграмма σ-структуры $\mathbb{A}$ — это множество $D(\mathbb{A})$ σ_A-предложений вида $f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = c_a$, $P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, $\neg P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, истинных в $\mathbb{A}_A$ при естественной интерпретации новых константных символов.

Полная диаграмма σ-структуры $\mathbb{A}$ — это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех σ_A-предложений, истинных в $\mathbb{A}_A$ при естественной интерпретации новых константных символов.

Диаграммы структур

Диаграмма σ-структуры $\mathbb{A}$ — это множество $D(\mathbb{A})$ σ_A-предложений вида $f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = c_a$, $P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, $\neg P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, истинных в $\mathbb{A}_A$ при естественной интерпретации новых константных символов.

Полная диаграмма σ-структуры $\mathbb{A}$ — это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех σ_A-предложений, истинных в $\mathbb{A}_A$ при естественной интерпретации новых константных символов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1. σ-Структура $\mathbb{A}$ изоморфно вкладывается в σ-структуру $\mathbb{B}$ $\iff$ $\mathbb{B}$ является σ-обеднением некоторой модели множества $D(\mathbb{A})$.

2. σ-Структура $\mathbb{A}$ элементарно вкладывается в σ-структуру $\mathbb{B}$ $\iff$ $\mathbb{B}$ является σ-обеднением некоторой модели множества $D^*(\mathbb{A})$.

Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная σ-структура $\mathbb{A}$ и кардинал $\kappa \geq \max(|A|, |\mathsf{For}_\sigma|)$. Тогда $\mathbb{A}$ элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности κ.

Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная σ-структура $\mathbb{A}$ и кардинал $\kappa \geq \max(|A|, |\mathsf{For}_\sigma|)$. Тогда $\mathbb{A}$ элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности κ.

Обогатим σ до $\tau = \sigma_A \cup \{d_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$, добавив κ новых различных константных символов в σ_A, и рассмотрим τ-теорию

$$T = D^*(A) \cup \{\neg(d_\alpha = d_\beta) \mid \alpha, \beta \in \kappa, \alpha \neq \beta\}.$$

Любое конечное $T_0 \subseteq T$ имеет модель, являющуюся τ-обогащением структуры $\mathbb{A}_A$, в котором константы $\{d_\alpha\}$, входящие в T_0, интерпретируются различными элементами A. По теореме компактности, T имеет модель $\mathbb{C}$. Поскольку $\alpha \mapsto d_\alpha^{\mathbb{C}}$ — инъекция из κ в C, $\kappa \leq |C|$. Пусть $X \subseteq C$ — множество мощности κ, содержащее $\mathbb{C}$-интерпретации всех c_a, $a \in A$. По теореме о понижении мощности, найдется $\mathbb{B}' \preceq \mathbb{C}$ мощности $|\mathbb{B}'| \leq |\mathsf{For}_\tau| \leq \kappa$. С другой стороны, $B' \supseteq X$, поэтому $|B'| \geq |X| = \kappa$, откуда $|\mathbb{B}'| = \kappa$. Обеднение $\mathbb{B} = \mathbb{B}'|\sigma$ имеет мощность κ и $\mathbb{A}$ элементарно вкладывается в $\mathbb{B}$.

Мощность моделей теории

В качестве следствий теорем о повышении и понижении мощности получаем:

Мощность моделей теории

В качестве следствий теорем о повышении и понижении мощности получаем:

ТЕОРЕМА. Если σ-теория T имеет модель мощности $\geq n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то она имеет модель любой мощности $\kappa \geq |\mathrm{For}_\sigma|$.

Мощность моделей теории

В качестве следствий теорем о повышении и понижении мощности получаем:

ТЕОРЕМА. Если σ-теория T имеет модель мощности $\geq n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то она имеет модель любой мощности $\kappa \geq |\mathrm{For}_\sigma|$.

ТЕОРЕМА. Если σ-теория T имеет единственную с точностью до изоморфизма модель некоторой мощности $\kappa \geq |\mathrm{For}_\sigma|$ и не имеет конечных моделей, то она полна (т.е. $T \models \varphi \vee T \models \neg\varphi$ для любого σ-предложения φ).

Аксиоматизируемые классы

- *Теория* T — множество σ-предложений.
- Теории T соответствует класс ее моделей $\mathrm{Mod}(T) = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \models T\}$
- Классу структур $K \subseteq \mathrm{Str}_\sigma$ соответствует его теория $\mathrm{Th}(K) = \{\varphi \in \mathrm{Sent}_\sigma \mid \forall \mathbb{A} \in K\ (\mathbb{A} \models \varphi)\}$.
- Класс структур K *аксиоматизируем*, если $K = \mathrm{Mod}(T)$ для некоторой теории T.
- Класс структур K *конечно аксиоматизируем*, если $K = \mathrm{Mod}(T)$ для некоторой конечной теории $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Это равносильно аксиоматизируемости одной формулой $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

Аксиоматизируемые классы: свойства

1. Если $T \subseteq T'$, то $\mathsf{Mod}(T) \supseteq \mathsf{Mod}(T')$;
2. Если $K \subseteq K'$, то $\mathsf{Th}(K) \supseteq Th(K')$;
3. $K \subseteq \mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(K))$ и $T \subseteq \mathsf{Th}(\mathsf{Mod}(T))$;
4. Класс K аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = \mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(K))$;
5. Любое пересечение аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом. Объединение двух аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом;
6. Класс K конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K и $\mathsf{Str}_\sigma \setminus K$ аксиоматизируемы;
7. Класс K — аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

Доказательство свойства 7

Достаточно доказать, что из замкнутости следует $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(K)) \subseteq K$, т.е. любая $\mathbb{A} \models \mathrm{Th}(K)$ элементарно эквивалентна ультрапроизведению подходящего семейства $\{\mathbb{B}_i\}_{i \in I}$, $\mathbb{B}_i \in K$, по некоторому ультрафильтру G на I.
Зафиксируем $\mathbb{A} \models \mathrm{Th}(K)$ и проверим сначала, что для любого $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A})$ существует $\mathbb{B} \in K$ такая, что $\mathbb{B} \models \varphi$. Пусть нет, т.е. $\mathbb{B} \models \neg\varphi$ для любой $\mathbb{B} \in K$. Тогда $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(K)$ и следовательно $\mathbb{A} \models \neg\varphi$ – противоречие. Т. о., существует семейство $\{\mathbb{B}_\varphi\}_{\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A})}$ K-структур такое, что $\mathbb{B}_\varphi \models \varphi$.
Для $\varphi \in I$, пусть $U_\varphi = \{\psi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A}) \mid \psi \to \varphi$ общезначима$\}$.
Тогда $\varphi \in U_\varphi$ и $U_\varphi \cap U_{\varphi'} = U_{\varphi \wedge \varphi'} \neq \emptyset$, поэтому $F = \{J \subseteq \mathrm{Th}(\mathbb{A}) \mid \exists\varphi\,(J \supseteq U_\varphi)\}$ – фильтр на I. Пусть G — ультрафильтр, расширяющий F.
Остается проверить, что $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}_G$. Достаточно проверить, что $\mathbb{B}_G \models \varphi$ для любого $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A})$. Поскольку для любого $\psi \in U_\phi$ выполнены $\mathbb{B}_\psi \models \psi \to \varphi$ и $\mathbb{B}_\psi \models \psi$, получаем $\mathbb{B}_\psi \models \varphi$. Отсюда $U_\varphi \subseteq \{\psi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A}) \mid \mathbb{B}_\psi \models \varphi\} \in F \subseteq G$, значит $\mathbb{B}_G \models \varphi$.

Классификация формул

- Σ_0 — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- Σ_1 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists\overline{x}\,\psi(\overline{x},\overline{y})$, где ψ — бескванторная;
- Σ_2 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists\overline{x_1}\,\forall\overline{x_2}\,\psi(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{y})$, где ψ — бескванторная, и т.д.;
- множество Π_n определяется аналогично множеству Σ_n с заменой $\exists$ на $\forall$ и наоборот.

Классификация формул

- Σ_0 — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- Σ_1 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \overline{x}\, \psi(\overline{x}, \overline{y})$, где ψ — бескванторная;
- Σ_2 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \overline{x_1}\, \forall \overline{x_2}\, \psi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{y})$, где ψ — бескванторная, и т.д.;
- множество Π_n определяется аналогично множеству Σ_n с заменой $\exists$ на $\forall$ и наоборот.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1. $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$.
2. Множества Σ_n и Π_n замкнуты относительно $\wedge, \vee$.
3. $\varphi \in \Pi_n \iff \neg\varphi \in \Sigma_n$.
4. $\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = \mathrm{For}_\sigma$.

Основные равносильности

1. $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$; 2. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$;
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$; 4. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
5. $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$; 6. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$;
7. $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$;
8. $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$;
9. $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$;
10. $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$.
11. $\neg(\forall x\varphi) \equiv \exists x(\neg\varphi)$;
12. $\neg(\exists x\varphi) \equiv \forall x(\neg\varphi)$;
13. $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$;
14. $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$;
15. $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$ (x не входит свободно в ψ);
16. $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$ (x не входит свободно в ψ);
17. $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$ (y не входит в φ);
18. $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$ (y не входит в φ).

Π_1-аксиоматизируемость

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс K является Π_1-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.

Π_1-аксиоматизируемость

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс K является Π_1-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.

Д-во $\Leftarrow$. Пусть $K = \mathsf{Mod}(T)$. Достаточно проверить $K = \mathsf{Mod}(\Gamma)$, $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_1 \mid T \models \varphi\}$. Включение K в $\mathsf{Mod}(\Gamma)$ очевидно. Проверим, что $\mathbb{B} \in K$ для любой $\mathbb{B} \models \Gamma$. Заметим, что существует $\mathbb{A} \models T \cup \mathsf{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$ (иначе, по компактности, $T \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ не имеет модели для конечного множества $\psi_i \in \mathsf{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$, откуда $\psi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \in \Sigma_1$, $T \models \neg\psi \in \Pi_1$, а значит, $\mathbb{B} \models \neg\psi \wedge \psi$, противоречие).

Π_1-аксиоматизируемость

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс K является Π_1-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.

Д-во $\Leftarrow$. Пусть $K = \mathrm{Mod}(T)$. Достаточно проверить $K = \mathrm{Mod}(\Gamma)$, $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_1 \mid T \models \varphi\}$. Включение K в $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ очевидно. Проверим, что $\mathbb{B} \in K$ для любой $\mathbb{B} \models \Gamma$. Заметим, что существует $\mathbb{A} \models T \cup \mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$ (иначе, по компактности, $T \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ не имеет модели для конечного множества $\psi_i \in \mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$, откуда $\psi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \in \Sigma_1$, $T \models \neg\psi \in \Pi_1$, а значит, $\mathbb{B} \models \neg\psi \wedge \psi$, противоречие).

Для проверки $\mathbb{B} \in K$ достаточно вложить $\mathbb{B}$ в некоторую $\mathbb{C} \in K$, т.е. проверить, что $T \cup D(\mathbb{B})$ имеет модель. По компактности, достаточно проверить, что $T \cup \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ имеет модель, где $\delta_i = \delta_i(\bar{c})$ $(c \in \sigma_B)$. Поскольку $\mathbb{B} \models \exists \bar{x} \delta(\bar{x}) \in \Sigma_1$, $\delta = \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_m$, $\mathbb{A} \models \exists \bar{x} \delta(\bar{x})$. Значит, $\mathbb{A}$ можно обогатить до модели $T \cup \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$.

Π_2-аксиоматизируемость

Класс структур K *замкнут относительно объединений цепей*, если из $\mathbb{A}_n \in K$ и $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \ldots$ следует $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_2-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

Π_2-аксиоматизируемость

Класс структур K *замкнут относительно объединений цепей*, если из $\mathbb{A}_n \in K$ и $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \ldots$ следует $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_2-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

Д. Начало аналогично предыдущему: для $K = \mathsf{Mod}(T)$ рассмотрим $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_2 \mid T \models \varphi\}$ и докажем $K = \mathsf{Mod}(\Gamma)$; достаточно проверить, что $\mathbb{B} \models T$ для любой $\mathbb{B} \models \Gamma$. Как и раньше, существует $\mathbb{A} \models T \cup \mathsf{Th}_{\Sigma_2}(\mathbb{B})$.

Π_2-аксиоматизируемость

Класс структур K *замкнут относительно объединений цепей*, если из $\mathbb{A}_n \in K$ и $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \ldots$ следует $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_2-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

Д. Начало аналогично предыдущему: для $K = \mathrm{Mod}(T)$ рассмотрим $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_2 \mid T \models \varphi\}$ и докажем $K = \mathrm{Mod}(\Gamma)$; достаточно проверить, что $\mathbb{B} \models T$ для любой $\mathbb{B} \models \Gamma$. Как и раньше, существует $\mathbb{A} \models T \cup \mathrm{Th}_{\Sigma_2}(\mathbb{B})$.

Покажем, что существуют $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$ и $\mathbb{B}' \succeq \mathbb{B}$ такие, что $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}' \subseteq \mathbb{B}'$.
Рассмотрим $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$, где $\mathbb{B}_B$ — σ_B-обогащение $\mathbb{B}$.
Для любого конечного $\{\delta_1(\bar{c}), \ldots, \delta_m(\bar{c})\} \subseteq \mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$ имеем $\mathbb{B} \models \exists \bar{x}(\delta_1(\bar{x}) \wedge \ldots \wedge \delta_m(\bar{x})) \in \Sigma_2$, откуда
$\mathbb{A} \models \exists \bar{x}(\delta_1(\bar{x}) \wedge \ldots \wedge \delta_m(\bar{x}))$.

Π_2-аксиоматизируемость

Значит, некоторое $\sigma_{\bar{c}}$-обогащение $\mathbb{A}$ является моделью $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \{\delta_1(\bar{c}), \ldots, \delta_m(\bar{c})\}$. По компактности, есть модель $\mathbb{A}'_B$ теории $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$; пусть $\mathbb{A}'$ – ее σ-обеднение. Тогда $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$, $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}'$, и $\mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B}_B) \supseteq \mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{A}'_B)$ (поскольку $\mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B) \subseteq \mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{A}'_B)$).

Рассмотрим теперь $D(\mathbb{A}'_B) \cup \mathrm{Th}(\mathbb{B}_B)$. Рассуждая как и выше, видим что эта теория имеет модель $\mathbb{B}'_{A'}$, такую, что $\mathbb{B} \preceq \mathbb{B}'$.

Π_2-аксиоматизируемость

Значит, некоторое $\sigma_{\bar{c}}$-обогащение $\mathbb{A}$ является моделью $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \{\delta_1(\bar{c}), \dots, \delta_m(\bar{c})\}$. По компактности, есть модель $\mathbb{A}'_B$ теории $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$; пусть $\mathbb{A}'$ – ее σ-обеднение. Тогда $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$, $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}'$, и $\mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B}_B) \supseteq \mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{A}'_B)$ (поскольку $\mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B) \subseteq \mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{A}'_B)$).

Рассмотрим теперь $D(\mathbb{A}'_B) \cup \mathrm{Th}(\mathbb{B}_B)$. Рассуждая как и выше, видим что эта теория имеет модель $\mathbb{B}'_{A'}$ такую, что $\mathbb{B} \preceq \mathbb{B}'$.

Итерируя конструкцию $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mapsto (\mathbb{A}', \mathbb{B}')$, определим структуры $(\mathbb{A}_0, \mathbb{B}_0) = (\mathbb{A}, \mathbb{B})$ и $(\mathbb{A}_{n+1}, \mathbb{B}_{n+1}) = (\mathbb{A}'_n, \mathbb{B}'_n)$.

Тогда $\mathbb{B}_n \subseteq \mathbb{A}_{n+1} \subseteq \mathbb{B}_{n+1}$, $\mathbb{A}_{n+1} \equiv \mathbb{A}_n \equiv \mathbb{A}$, и $\mathbb{B}_n \preceq \mathbb{B}_{n+1}$.

Тогда $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \preceq \mathbb{B}_1 \preceq \cdots$, откуда $\mathbb{B} \preceq \bigcup_n \mathbb{B}_n = \bigcup_n \mathbb{A}_n \models T$.

Значит, $\mathbb{B} \models T$.

Полные теории

σ-Теория T называется *полной*, если она имеет модель и, для любого σ-предложения φ, либо $T \models \varphi$, либо $T \models \neg\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории T, имеющей модель, равносильны следующие условия:
T — полна;
$[T] = \mathrm{Th}(\mathbb{A})$, для любой $\mathbb{A} \models T$ (где $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ — множество всех логических следствий теории T);
$\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \mathrm{Th}(\mathbb{B})$ для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$.

Полные теории

σ-Теория T называется *полной*, если она имеет модель и, для любого σ-предложения φ, либо $T \models \varphi$, либо $T \models \neg\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории T, имеющей модель, равносильны следующие условия:
T — полна;
$[T] = \mathrm{Th}(\mathbb{A})$, для любой $\mathbb{A} \models T$ (где $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ — множество всех логических следствий теории T);
$\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \mathrm{Th}(\mathbb{B})$ для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$.

Теория называется *категоричной в мощности* κ, если она имеет единственную с точностью до изоморфизма модель мощности κ.
Ранее уже доказали простую, но важную теорему:

Если σ-теория не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\geq |\mathrm{For}_\sigma|$, то она полна.

Модельно полные теории

Теория T *модельно полна*, если она имеет модель и отношения $\subseteq, \preceq$ совпадают на $\mathrm{Mod}(T)$.

Модельно полные теории

Теория T *модельно полна*, если она имеет модель и отношения $\subseteq, \preceq$ совпадают на $\mathrm{Mod}(T)$.

ТЕОРЕМА. Для теории T, имеющей модель, равносильны:

1. T — модельно полна.
2. Для любой $\mathbb{A} \models T$, теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна.
3. Для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ из $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ следует, что любое Σ_1-предложение в сигнатуре σ_A, которое истинно в $\mathbb{B}_A$, будет истинно и в $\mathbb{A}_A$.
4. $\Sigma_1 = \Pi_1$ по модулю T (т.е. любая Σ_1-формула $\varphi(\overline{x})$ равносильна подходящей Π_1-формуле $\psi(\overline{x})$ в T: $T \models \forall \overline{x}\ (\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$).
5. $For_\sigma = \Pi_1$ по модулю T.

Доказательство $3 \Rightarrow 4$

Пусть $\varphi(\overline{y}) \in \Sigma_1$, нужно проверить, что $T \models \forall \overline{y}\ (\varphi(\overline{y}) \leftrightarrow \psi(\overline{y}))$ для некоторой $\psi(\overline{y}) \in \Pi_1$; достаточно получить $T \models \varphi(\overline{c}) \leftrightarrow \psi(\overline{c})$ для новых констант $\overline{c}$. Пусть $\Gamma = \{\gamma \in \Pi_1 \mid T \models \varphi(\overline{c}) \to \gamma\}$. Достаточно доказать $T \cup \Gamma \models \varphi(\overline{c})$, поскольку тогда $T \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \models \varphi(\overline{c})$ по компактности, и $\psi = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_k \in \Pi_1$ годится.

Доказательство $3 \Rightarrow 4$

Пусть $\varphi(\overline{y}) \in \Sigma_1$, нужно проверить, что $T \models \forall\overline{y}\ (\varphi(\overline{y}) \leftrightarrow \psi(\overline{y}))$ для некоторой $\psi(\overline{y}) \in \Pi_1$; достаточно получить $T \models \varphi(\overline{c}) \leftrightarrow \psi(\overline{c})$ для новых констант $\overline{c}$. Пусть $\Gamma = \{\gamma \in \Pi_1 \mid T \models \varphi(\overline{c}) \to \gamma\}$. Достаточно доказать $T \cup \Gamma \models \varphi(\overline{c})$, поскольку тогда $T \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \models \varphi(\overline{c})$ по компактности, и $\psi = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_k \in \Pi_1$ годится.

Для любой $\mathbb{A} \models T \cup \Gamma$ проверим $\mathbb{A} \models \varphi$. Сначала докажем, что $T \cup \{\varphi\} \cup D(\mathbb{A})$ имеет модель. Пусть нет, тогда по компактности для некоторых $\{\delta_1, \ldots, \delta_m\} \subseteq D(\mathbb{A})$ у $T \cup \{\varphi\} \cup \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ нет модели. Пусть $\delta = \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_m$. По определению диаграммы, $\mathbb{A} \models \exists\overline{x}\ \delta(\overline{x})$. С другой стороны, из-за отсутствия модели $T \cup \{\varphi\} \models \forall x \neg\delta(\overline{x})$, поэтому $T \models \varphi \to \forall\overline{x}\ \neg\delta(\overline{x})$. По определению Γ, $\forall\overline{x}\ \neg\delta(\overline{x}) \in \Gamma$, значит эта формула верна в $\mathbb{A}$. Но и её отрицание верно в $\mathbb{A}$. Противоречие.
Пусть $\mathbb{B} \models T \cup \{\varphi\} \cup D(\mathbb{A})$. Тогда $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, φ — Σ_1-предложение. Из 3) получаем $\mathbb{A} \models \varphi$, чтд.

Дополнительные свойства

ТЕОРЕМА.

1. Любая модельно полная теория Π_2-аксиоматизируема.
2. Если модельно полная теория T имеет модель, которая вкладывается в любую модель T, то T полна.
3. Если для любых двух моделей модельно полной теории T существует третья модель, в которую они обе вкладываются, то T полна.
4. Теория T допускает элиминацию кванторов (т.е. $For_\sigma = \Pi_0$ по модулю T) в точности тогда, когда теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна для любой $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \models T$.
5. Если теория Π_2-аксиоматизируема, не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\lambda \geq |\mathrm{For}_\sigma|$, то она модельно полна.

Д-во свойства 4)

Пусть T допускает ЭК и $\mathbb{A}$ вкладывается в некоторую модель T; надо показать, что теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна. Достаточно доказать, что любые две модели $\mathbb{B}, \mathbb{C}$ этой теории элементарно эквивалентны, т.е. $\varphi^{\mathbb{B}} = \varphi^{\mathbb{C}}$ для любого предложения φ сигнатуры σ_A. По свойству диаграммы, существуют изоморфные вложения $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}|_\sigma$ и $g : \mathbb{A} \to \mathbb{C}|_\sigma$. Пусть $\bar{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ — все константы из $\sigma_A \setminus \sigma$, входящие в $\varphi = \varphi(d_1, \ldots, d_m)$. Поскольку T допускает ЭК, можем считать φ бескванторной. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — интерпретации констант $\bar{d}$ в $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$. Тогда $\varphi^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_m)) = \varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \varphi^{\mathbb{C}}(g(a_1), \ldots, g(a_m)) = \varphi^{\mathbb{C}}(c_1, \ldots, c_m)$.

Д-во свойства 4)

Пусть T допускает ЭК и $\mathbb{A}$ вкладывается в некоторую модель T; надо показать, что теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна. Достаточно доказать, что любые две модели $\mathbb{B}, \mathbb{C}$ этой теории элементарно эквивалентны, т.е. $\varphi^{\mathbb{B}} = \varphi^{\mathbb{C}}$ для любого предложения φ сигнатуры σ_A. По свойству диаграммы, существуют изоморфные вложения $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}|_\sigma$ и $g : \mathbb{A} \to \mathbb{C}|_\sigma$. Пусть $\bar{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ — все константы из $\sigma_A \setminus \sigma$, входящие в $\varphi = \varphi(d_1, \ldots, d_m)$. Поскольку T допускает ЭК, можем считать φ бескванторной. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — интерпретации констант $\bar{d}$ в $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$. Тогда $\varphi^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_m)) = \varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \varphi^{\mathbb{C}}(g(a_1), \ldots, g(a_m)) = \varphi^{\mathbb{C}}(c_1, \ldots, c_m)$.

Обратно, пусть $T \cup D(\mathbb{A})$ полна для любой $\mathbb{A}$, вкладывающейся в некоторую модель T. Надо доказать, что любая σ-формула $\varphi(\bar{x})$ равносильна подходящей бескванторной $\psi(\bar{x})$ в T. Обогатим σ новыми константами $\bar{c}$ до $\sigma_{\bar{c}}$ и подберем $\psi(\bar{x})$ так, что $T \models \varphi(\bar{c}) \leftrightarrow \psi(\bar{c})$ в обогащённой структуре.

Д-во свойства 4)

Пусть Γ — множество всех бескванторных $\sigma_{\overline{c}}$-предложений таких, что $T \models \varphi(\overline{c}) \to \gamma$. Достаточно проверить $T \cup \Gamma \models \varphi(\overline{c})$, т.е. $\varphi(\overline{c})$ истинна в любой модели $\mathbb{B} \models T \cup \Gamma$. Пусть $\mathbb{A}$ — подструктура $\mathbb{B}$, порожденная элементами $a_i = c_i^{\mathbb{B}}$, $i = 1, \ldots, k$, и пусть $Diag(\mathbb{A})$ — множество всех бескванторных $\sigma_{\overline{c}}$-предложений, истинных в $\mathbb{A}$. Тогда $\mathrm{Diag}(\mathbb{A})$ обладает свойством диаграммы, т.е. σ-обеднения моделей этого множества — это в точности σ-структуры, в которые изоморфно вкладывается $\mathbb{A}|_{\sigma}$. В частности, $\mathbb{B} \models T \cup \mathrm{Diag}(\mathbb{A})$.

Д-во свойства 4)

Пусть Γ — множество всех бескванторных $\sigma_{\overline{c}}$-предложений таких, что $T \models \varphi(\overline{c}) \to \gamma$. Достаточно проверить $T \cup \Gamma \models \varphi(\overline{c})$, т.е. $\varphi(\overline{c})$ истинна в любой модели $\mathbb{B} \models T \cup \Gamma$. Пусть $\mathbb{A}$ — подструктура $\mathbb{B}$, порожденная элементами $a_i = c_i^{\mathbb{B}}$, $i = 1, \ldots, k$, и пусть $Diag(\mathbb{A})$ — множество всех бескванторных $\sigma_{\overline{c}}$-предложений, истинных в $\mathbb{A}$. Тогда $\mathrm{Diag}(\mathbb{A})$ обладает свойством диаграммы, т.е. σ-обеднения моделей этого множества — это в точности σ-структуры, в которые изоморфно вкладывается $\mathbb{A}|_{\sigma}$. В частности, $\mathbb{B} \models T \cup \mathrm{Diag}(\mathbb{A})$.

Поскольку теория $T \cup \mathrm{Diag}(\mathbb{A})$ по условию полна, достаточно доказать, что $T \cup \mathrm{Diag}(\mathbb{A}) \cup \{\varphi(\overline{c})\}$ имеет модель. Предположим противное. Тогда $T \cup \{\delta_1(\overline{c}), \ldots, \delta_n(\overline{c}))\} \cup \{\varphi(\overline{c})\}$ не имеет модели для некоторого конечного $\{\delta_1(\overline{c}), \ldots, \delta_n(\overline{c}))\} \subseteq \mathrm{Diag}(\mathbb{A})$. Тогда $T \models \varphi(\overline{c}) \to \bigvee_i \neg\delta_i(\overline{c})$, значит предложение $\gamma = \bigvee \neg\delta_i(\overline{c})$ лежит в Γ, откуда $\mathbb{B} \models \gamma$, а значит и $\mathbb{A} \models \gamma$. Но по определению $\mathrm{Diag}(\mathbb{A})$ выполнено $\mathbb{A} \models \neg\gamma$. Противоречие.

Игры Эренфойхта

Считаем, что σ конечна, содержит $=$, и не содержит функциональных символов местности >0. Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — σ-структуры с непересекающимися носителями.

Игры Эренфойхта

Считаем, что σ конечна, содержит $=$, и не содержит функциональных символов местности >0. Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — σ-структуры с непересекающимися носителями.

В *игре Эренфойхта с n ходами* $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ каждый из игроков I и II делает по n ходов (при $n = 0$ ходов нет). При $n > 0$, на первом ходе I выбирает элемент $a \in A$ или $b \in B$, II отвечает выбором элемента в другой структуре; получили обогащение каждой структуры константой: $(\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)$. Далее игра идет как $G_{n-1}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))$.

Игры Эренфойхта

Считаем, что σ конечна, содержит $=$, и не содержит функциональных символов местности >0. Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — σ-структуры с непересекающимися носителями.

В *игре Эренфойхта с n ходами* $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ каждый из игроков I и II делает по n ходов (при $n = 0$ ходов нет). При $n > 0$, на первом ходе I выбирает элемент $a \in A$ или $b \in B$, II отвечает выбором элемента в другой структуре; получили обогащение каждой структуры константой: $(\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)$. Далее игра идет как $G_{n-1}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))$.
II выигрывает в описанной партии, если конечные подструктуры, порождённые построенными кортежами элементов $\overline{a}, \overline{b}$, изоморфны относительно соответствия $a_i \mapsto b_i$, $c^{\mathbb{A}} \mapsto c^{\mathbb{B}}$; пустые подструктуры изоморфны по определению.

Игры Эренфойхта

Считаем, что σ конечна, содержит $=$, и не содержит функциональных символов местности >0. Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — σ-структуры с непересекающимися носителями.

В *игре Эренфойхта с* n *ходами* $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ каждый из игроков I и II делает по n ходов (при $n = 0$ ходов нет). При $n > 0$, на первом ходе I выбирает элемент $a \in A$ или $b \in B$, II отвечает выбором элемента в другой структуре; получили обогащение каждой структуры константой: $(\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)$. Далее игра идет как $G_{n-1}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))$.
II выигрывает в описанной партии, если конечные подструктуры, порождённые построенными кортежами элементов $\overline{a}, \overline{b}$, изоморфны относительно соответствия $a_i \mapsto b_i$, $c^{\mathbb{A}} \mapsto c^{\mathbb{B}}$; пустые подструктуры изоморфны по определению.

Игра $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ отличается только тем, что первый ход I начинает выбором числа n; далее игра идёт как $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.