Задание 6. Игры Эренфойхта и элементарная эквивалентность.

- 1. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ структуры сигнатуры $\{=,<\}$ с обычным отношением порядка. С помощью игр Эренфойхта обоснуйте, какие из этих сруктур элементарно эквивалентны, а какие нет. В последнем случае найдите наименьшее n, для которого первый игрок имеет выигрышную стратегию в соответствующей n-игре Эренфойхта, и опишите эту стратегию.
- 2. Решите задачу 1 для структур $\mathbb{N}, \mathbb{N} + \mathbb{N}, \mathbb{N} + \mathbb{Q}, \mathbb{N} + \mathbb{Z}$, где сумма двух порядков определяется как их дизъюнктное объединение, в котором каждый элемент первого порядка меньше каждого элемента второго.
- 3. Докажите, что теория линейных порядков, каждый элемент которых имеет непосредственного предшественника и непосредственного последователя, является полной. Запишите аксиомы этой теории в сигнатуре $\{=,<\}$.
- 4. Докажите, что для любого n найдется m такое, что любые два линейных порядка с > m элементами n-элементарно эквивалентны.

Выведите из этого, что не существует {=, <}-предложения, которое истинно на всех конечных линейных порядках с четным числом элементов и ложно на всех конечных линейных порядках с нечетным числом элементов.

5. Структуры сигнатуры $\{=,<,P\}$ (P- одноместный предикатный символ) на множестве $\mathbb N$ естественным образом отождествляются с бесконечными двоичными словами (т.е. с последовательностями битов). Докажите, что не существует $\{=,<,P\}$ -предложения, истинного в точности на бесконечных двоичных словах с четным числом единиц.