Задание 1. Повторение.

1. Докажите, что вещественное число определимо в структуре $(\mathbb{R};=,+,\cdot,0,1)$ тогда и только тогда, когда оно алгебраическое. Охарактеризуйте вещественные числа, определимые в структуре $(\mathbb{R};=,+,0,1)$.

2. Докажите, что комплексное число определимо в структуре $(\mathbb{C};=,+,\cdot,0,1)$ тогда и только тогда, когда оно рациональное.

3. Докажите, что в стандартной модели арифметики $(\mathbb{N};+,\cdot,=)$ определимы: любое конкретное натуральное число; отношения строгого порядка и делимости; множество всех простых чисел; отношение быть простыми близнецами; множества степеней двойки, тройки, четверки, пятерки.

4. Пусть Σ_2 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists\overline{x_1}\,\forall\overline{x_2}\,\psi(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{y})$, где ψ — бескванторная, и т.д. Множество Π_n определяется аналогично множеству Σ_n с заменой $\exists$ на $\forall$ и наоборот. Докажите, что:

$\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$;

множества Σ_n и Π_n замкнуты относительно $\wedge, \vee$;

$\varphi \in \Pi_n \iff \neg\varphi \in \Sigma_n$.

$\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = \mathrm{For}_\sigma$.

5. а) Докажите, что любую конечную структуру конечной сигнатуры можно описать с точностью до изоморфизма одним предложением этой сигнатуры, а любую бесконечную структуру нельзя описать с помощью даже бесконечного множества предложений.

б) Докажите, что каждую из структур $(\mathbb{Q};\leq)$, $(\mathbb{N};\leq)$ можно описать одним предложением с точностью до элементарной эквивалентности.