

Логика-2, 3 курс М

Виктор Львович Селиванов¹

¹ФМКН СПбГУ

Весенний семестр, 2025-26

v.selivanov@spbu.ru

Важная дополнительная информация:

<https://github.com/vseliv/Logic2-25-26>

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.
2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.
3. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М: Мир, 1983, 255 с.
4. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.
5. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.

Исходные символы ЛП^σ

Выражения ЛП^σ строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- ▶ Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.

Исходные символы ЛП^σ

Выражения ЛП^σ строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- ▶ Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.
- ▶ Счетное множество Var переменных $v_0 \ v_1 \ v_2 \dots$

Исходные символы \mathcal{LP}^σ

Выражения \mathcal{LP}^σ строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- ▶ Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.
- ▶ Счетное множество Var переменных $v_0 \ v_1 \ v_2 \dots$
- ▶ Логические символы $\wedge \ \vee \ \neg \rightarrow \ \forall \ \exists$

Исходные символы \mathcal{LP}^σ

Выражения \mathcal{LP}^σ строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- ▶ Множество σ предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.
- ▶ Счетное множество Var переменных $v_0 \ v_1 \ v_2 \dots$
- ▶ Логические символы $\wedge \ \vee \ \neg \rightarrow \ \forall \ \exists$
- ▶ Вспомогательные символы $(\) ,$

Осмысленные выражения $\Lambda\Gamma^\sigma$

σ -ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n -местный функциональный символ из σ и t_1, \dots, t_n — термы, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ тоже терм.

Осмысленные выражения ЛП σ

σ -ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если f — n -местный функциональный символ из σ и t_1, \dots, t_n — термы, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ тоже терм.

σ -ФОРМУЛЫ:

выражение $P(t_1, \dots, t_n)$,

где t_1, \dots, t_n — термы, а P — n -местный предикатный символ из σ , является формулой;
если φ и ψ — формулы, а x — переменная, то выражения

$(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), \neg \varphi, \forall x \varphi, \exists x \varphi$
суть формулы.

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных

формулы φ определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$ состоит из переменных,

входящих хотя бы в один из термов t_1, \dots, t_n ;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для

\vee, \rightarrow, \neg ;

$FV(\forall x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для \exists .

Свободные и связанные переменные

Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$ состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов t_1, \dots, t_n ;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, и аналогично для \vee, \rightarrow, \neg ;

$FV(\forall x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$, и аналогично для \exists .

Переменные, которые входят в формулу, но не

являются свободными, называются связанными.

Формулы без свободных переменных называются предложениями.

Запись $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ означает, что

$FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$. Аналогично для термов.

σ -Структуры

σ -Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n -местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n -местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$, а каждому n -местному функциональному символу f из σ — некоторую n -местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

σ -Структуры

σ -Структура — пара $\mathbb{A} = (A; I)$, состоящая из непустого множества A и интерпретации I всех сигнатурных символов в A (I сопоставляет n -местному предикатному символу $P \in \sigma$ некоторый n -местный предикат $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$, а каждому n -местному функциональному символу f из σ — некоторую n -местную функцию $f^I = f^{\mathbb{A}}$ на A).

Изоморфизмом \mathbb{A} на \mathbb{B} называется биекция g множества A на множество B такая, что

$P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$ и
 $g(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$ для любых $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{A}$.

Структуры \mathbb{A} и \mathbb{B} называются изоморфными ($\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$), если существует изоморфизм \mathbb{A} на \mathbb{B} .

Значения термов и формул

Для любой σ -структуры \mathbb{A} и означивания

$\nu : Var \rightarrow A$ определяем значения $t^{\mathbb{A}, \nu} \in A$ и

$\varphi^{\mathbb{A}, \nu} \in \{\text{И}, \text{Л}\}$ индукцией:

$$x^{\mathbb{A}, \nu} = \nu(x), f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A}, \nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}, \nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A}, \nu});$$

Значения термов и формул

Для любой σ -структуры \mathbb{A} и означивания

$\nu : Var \rightarrow A$ определяем значения $t^{\mathbb{A}, \nu} \in A$ и

$\varphi^{\mathbb{A}, \nu} \in \{\text{И}, \text{Л}\}$ индукцией:

$$x^{\mathbb{A}, \nu} = \nu(x), f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A}, \nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}, \nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A}, \nu});$$

$$P(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A}, \nu} = P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}, \nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A}, \nu});$$

$(\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{A}, \nu} = \varphi^{\mathbb{A}, \nu} \wedge \psi^{\mathbb{A}, \nu}$, аналогично для \vee, \rightarrow, \neg ;

$$(\forall x \varphi)^{\mathbb{A}, \nu} = \bigwedge_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A}, \nu_a^x} \text{ и } (\exists x \varphi)^{\mathbb{A}, \nu} = \bigvee_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A}, \nu_a^x}$$

,

где ν_a^x — означивание, полученное из ν изменением значения x на a .

Значения термов и формул

Пусть $t = t(x_1, \dots, x_m)$ и $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$.

- ▶ Если означивания μ и ν согласованы на x_1, \dots, x_m , то $t^{\mathbb{A},\mu} = t^{\mathbb{A},\nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A},\mu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu}$. Поэтому вместо $t^{\mathbb{A},\nu}$ часто пишут $t^{\mathbb{A}}(x_1/a_1, \dots, x_m/a_m)$ или, короче, $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)$, где $a_i = \nu(x_i)$; аналогично для формул. Вместо $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) = \text{И}$ часто пишут $\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$.
- ▶ Если g — изоморфизм \mathbb{A} на \mathbb{B} , то $g(t^{\mathbb{A},\nu}) = t^{\mathbb{B},g \circ \nu}$ и $\varphi^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{B},g \circ \nu}$. Иными словами,
 $g(t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)) = t^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_m))$ и
 $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_m))$.
- ▶ Если $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$, то эти структуры элементарно эквивалентны ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), т.е. в них истинны одни и те же σ -предложения.

Общезначимость и ее варианты

- ▶ φ общезначима (тождественно истинна), если $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \text{И}$ для любых \mathbb{A} и ν .
- ▶ φ и ψ равносильны ($\varphi \equiv \psi$), если $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \psi^{\mathbb{A}, \nu}$ для любых \mathbb{A} и ν .
- ▶ Моделью множества предложений T называется структура, в которой все предложения из T истинны.
- ▶ Предложение φ логически следует из множества предложений T ($T \models \varphi$), если φ истинно в любой модели множества T .
- ▶ Теория — множество предложений. Замкнутая теория — теория, замкнутая относительно логического следования. $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ — замыкание теории T .

Общезначимость и ее варианты

- ▶ φ общезначима $\iff \models \varphi$.
- ▶ $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
общезначима.
- ▶ $\varphi(\bar{x})$ общезначима $\iff \forall \bar{x} \varphi$ общезначима.
- ▶ $T \models (\varphi \rightarrow \psi) \iff T \cup \{\varphi\} \models \psi$.
- ▶ $T \models \varphi \iff T \cup \{\neg \varphi\}$ не имеет модели.
- ▶ $T \models \varphi \iff \bigwedge T \rightarrow \varphi$ общезначима,
где T — конечное множество предложений.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Фильтры и ультрафильтры

Фильтр F на множестве I — это собственное подмножество множества $P(I)$, замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр F называется ультрафильтром, если $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$ для любого $A \subseteq I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

1. Ультрафильтры на I — это в точности максимальные фильтры по включению.
2. Если F — ультрафильтр, то $A \in F \iff (I \setminus A) \notin F$ и $A \cup B \in F \iff A \in F \vee B \in F$, для любых $A, B \subseteq I$.
3. Любой фильтр на I содержится в некотором ультрафильтре.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ — семейство σ -структур и F — фильтр на I .

Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \rightarrow \bigcup_i A_i \mid \forall i(a(i) \in A_i)\}$.

Определим σ -структуру \mathbb{A}_F на A/\equiv_F так:

$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F$,

$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$;

это определение корректно.

Фильтрованные произведения

Пусть $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ — семейство σ -структур и F — фильтр на I .

Тогда отношение $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$ есть эквивалентность на $A = \{a : I \rightarrow \bigcup_i A_i \mid \forall i(a(i) \in A_i)\}$.

Определим σ -структуру \mathbb{A}_F на A/\equiv_F так:

$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F$,

$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a]$, где $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$;

это определение корректно.

ТЕОРЕМА. Для любых ультрафильтра F , σ -формулы

$\varphi(x_1, \dots, x_m)$ и $a_1, \dots, a_m \in A$ имеем:

$\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_m]) \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models$

$\varphi(a_1(i), \dots, a_m(i))\} \in F$.

В частности, при $m = 0$: $\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F$.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T имеет модель, то T имеет модель.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T имеет модель, то T имеет модель.

Пусть $I = \{i \mid i — \text{конечное подмножество } T\}$. Каждое $i \in I$ имеет модель. По аксиоме выбора, существует семейство структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ такое, что $\mathbb{A}_i \models i$ для любого $i \in I$.

Пусть $G_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$. Для любых $i, k \in I$ выполнено $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$. Поэтому $F = \{A \subseteq I \mid \exists i (G_i \subseteq A)\}$ — фильтр на I . По доказанному ранее, существует ультрафильтр $H \supseteq F$.

Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T имеет модель, то T имеет модель.

Пусть $I = \{i \mid i \text{ — конечное подмножество } T\}$. Каждое $i \in I$ имеет модель. По аксиоме выбора, существует семейство структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ такое, что $\mathbb{A}_i \models i$ для любого $i \in I$.

Пусть $G_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$. Для любых $i, k \in I$ выполнено $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$. Поэтому $F = \{A \subseteq I \mid \exists i (G_i \subseteq A)\}$ — фильтр на I . По доказанному ранее, существует ультрафильтр $H \supseteq F$.

Утверждаем, что ультрапроизведение \mathbb{A}_H является моделью для T , т.е. $\mathbb{A}_H \models \varphi$ для любого $\varphi \in T$. Но $\{\varphi\} \in I$, откуда $G_{\{\varphi\}} \in F \subseteq H$ и $G_{\{\varphi\}} \subseteq \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in H$. По теореме об ультрапроизведении, $\mathbb{A}_H \models \varphi$.

Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства $=$ (двуиместный предикатный символ). σ -Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства = (двуухместный предикатный символ). σ -Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество T имеет нормальную модель.

Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что σ содержит символ равенства = (двуухместный предикатный символ). σ -Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений T сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество T имеет нормальную модель.

Для доказательства надо применить предыдущую теорему к множеству $T \cup E_\sigma$, где E_σ — аксиомы равенства (утверждающие, что = есть σ -конгруэнтность) и профакторизовать полученную модель \mathbb{A} по конгруэнтности $=^{\mathbb{A}}$.

Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x), \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x),$$

$$\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z),$$

$$\forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_n \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)),$$

$$\forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_n \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)).$$

Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\begin{aligned} & \forall x(x = x), \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x), \\ & \forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z), \\ & \forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow \\ & f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)), \\ & \forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_n \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = \\ & y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА. Если теория содержит аксиомы равенства и имеет модель, то она имеет и нормальную модель.

Понижение мощности

- ▶ \mathbb{A} — подструктура \mathbb{B} ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$,
 $P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$ и
 $f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$ для всех $a_1, \dots, a_n \in A$;
- ▶ вложение структуры \mathbb{A} в структуру \mathbb{B} — это изоморфизм \mathbb{A} на подструктуру структуры \mathbb{B} ;
- ▶ \mathbb{A} — элементарная подструктура \mathbb{B} ($\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi^{\mathbb{A}}(\bar{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\bar{a})$ для всех $\bar{a} \in \mathbb{A}$ и для всех формул $\varphi(\bar{x})$;
- ▶ элементарное вложение \mathbb{A} в \mathbb{B} — это изоморфизм \mathbb{A} на элементарную подструктуру структуры \mathbb{B} ;
- ▶ \mathbb{A} элементарно эквивалентно \mathbb{B} ($\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть \mathbb{A} , $X \subseteq A$, $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$.

Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$.

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть \mathbb{A} , $X \subseteq A$, $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$.

Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность

$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$ по индукции:

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\},$$

где E_n и $\eta : E_n \rightarrow A$ определены так:

$$E_n = \{(\bar{a}, \varphi(\bar{x}, y)) \mid \bar{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)\} \text{ и}$$

$$\mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, \eta(e)) \text{ для всех } e \in E_n. B = \bigcup_n S_n.$$

Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть \mathbb{A} , $X \subseteq A$, $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$.

Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$.

Д. Определим последовательность

$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$ по индукции:

$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\}$,

где E_n и $\eta : E_n \rightarrow A$ определены так:

$E_n = \{(\bar{a}, \varphi(\bar{x}, y)) \mid \bar{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)\}$ и
 $\mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, \eta(e))$ для всех $e \in E_n$. $B = \bigcup_n S_n$.

Известен следующий важный результат: Не существует логики, собственным образом расширяющей логику предикатов и удовлетворяющей теоремам компактности и понижения мощности.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ . Если \mathbb{A} — σ -структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \setminus \sigma$ в A , получим τ -стрктуру \mathbb{B} , называемую обогащением структуры \mathbb{A} . Наоборот: если \mathbb{B} — τ -структура, то, “забывая” интерпретацию символов из $\tau \setminus \sigma$, получим σ -*обеднение* $\mathbb{B}|_{\sigma}$ структуры \mathbb{B} . Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Константное обогащение

Если $\sigma \subseteq \tau$, то сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ . Если \mathbb{A} — σ -структура, то, определив интерпретацию символов из $\tau \setminus \sigma$ в A , получим τ -стрктуру \mathbb{B} , называемую обогащением структуры \mathbb{A} . Наоборот: если \mathbb{B} — τ -структура, то, “забывая” интерпретацию символов из $\tau \setminus \sigma$, получим σ -*обеднение* $\mathbb{B}|_{\sigma}$ структуры \mathbb{B} . Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Например, пусть \mathbb{A} — σ -структура, а $\sigma_A = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$ ее обогащение новыми константными символами c_a такими, что $c_a \neq c_b$ при $a \neq b$. Стандартным константным обогащением структуры \mathbb{A} называется ее σ_A -обогащение, в котором новые символы интерпретируются так: $c_a \mapsto a$, для любого $a \in A$.

Диаграммы структур

Диаграмма σ -структуры \mathbb{A} — это множество $D(\mathbb{A})$ σ_A -предложений вида $f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a$, $P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$, $\neg P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$, истинных в \mathbb{A}_A при естественной интерпретации новых константных символов.

Полная диаграмма σ -структуры \mathbb{A} — это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех σ_A -предложений, истинных в \mathbb{A}_A при естественной интерпретации новых константных символов.

Диаграммы структур

Диаграмма σ -структуры \mathbb{A} — это множество $D(\mathbb{A})$ σ_A -предложений вида $f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a$, $P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$, $\neg P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$, истинных в \mathbb{A}_A при естественной интерпретации новых константных символов.

Полная диаграмма σ -структуры \mathbb{A} — это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех σ_A -предложений, истинных в \mathbb{A}_A при естественной интерпретации новых константных символов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1. σ -Структура \mathbb{A} изоморфно вкладывается в σ -структуре $\mathbb{B} \iff \mathbb{B}$ является σ -обеднением некоторой модели множества $D(\mathbb{A})$.

2. σ -Структура \mathbb{A} элементарно вкладывается в σ -структуре $\mathbb{B} \iff \mathbb{B}$ является σ -обеднением некоторой модели множества $D^*(\mathbb{A})$.

Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная σ -структур A и кардинал $\kappa \geq \max(|A|, |\text{For}_\sigma|)$. Тогда A элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности κ .

Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная σ -структурة \mathbb{A} и кардинал $\kappa \geq \max(|A|, |\text{For}_\sigma|)$. Тогда \mathbb{A} элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности κ .

Обогатим σ до $\tau = \sigma_A \cup \{d_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$, добавив κ новых различных константных символов в σ_A , и рассмотрим τ -теорию

$$T = D^*(A) \cup \{\neg(d_\alpha = d_\beta) \mid \alpha, \beta \in \kappa, \alpha \neq \beta\}.$$

Любое конечное $T_0 \subseteq T$ имеет модель, являющуюся τ -обогащением структуры \mathbb{A}_A , в котором константы $\{d_\alpha\}$, входящие в T_0 , интерпретируются различными элементами A . По теореме компактности, T имеет модель \mathbb{C} . Поскольку $\alpha \mapsto d_\alpha^\mathbb{C}$ — инъекция из κ в C , $\kappa \leq |C|$. Пусть $X \subseteq C$ — множество мощности κ , содержащее \mathbb{C} -интерпретации всех c_a , $a \in A$. По теореме о понижении мощности, найдется $\mathbb{B}' \preceq \mathbb{C}$ мощности $|\mathbb{B}'| \leq |\text{For}_\tau| \leq \kappa$. С другой стороны, $B' \supseteq X$, поэтому $|B'| \geq |X| = \kappa$, откуда $|\mathbb{B}'| = \kappa$. Обеднение $\mathbb{B} = \mathbb{B}'|\sigma$ имеет мощность κ и \mathbb{A} элементарно вкладывается в \mathbb{B} .

Мощность моделей теории

В качестве следствий теорем о повышении и понижении мощности получаем:

Мощность моделей теории

В качестве следствий теорем о повышении и понижении мощности получаем:

ТЕОРЕМА. Если σ -теория T имеет модель мощности $\geq n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то она имеет модель любой мощности $\kappa \geq |\text{For}_\sigma|$.

Мощность моделей теории

В качестве следствий теорем о повышении и понижении мощности получаем:

ТЕОРЕМА. Если σ -теория T имеет модель мощности $\geq n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то она имеет модель любой мощности $\kappa \geq |\text{For}_\sigma|$.

ТЕОРЕМА. Если σ -теория T имеет единственную с точностью до изоморфизма модель некоторой мощности $\kappa \geq |\text{For}_\sigma|$ и не имеет конечных моделей, то она полна (т.е. $T \models \varphi \vee T \models \neg\varphi$ для любого σ -предложения φ).

Аксиоматизируемые классы

- ▶ Теория T — множество σ -предложений.
- ▶ Теории T соответствует класс ее моделей
 $\text{Mod}(T) = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \models T\}$
- ▶ Классу структур $K \subseteq \text{Str}_\sigma$ соответствует его теория
 $\text{Th}(K) = \{\varphi \in \text{Sent}_\sigma \mid \forall \mathbb{A} \in K (\mathbb{A} \models \varphi)\}.$
- ▶ Класс структур K аксиоматизируем, если $K = \text{Mod}(T)$ для некоторой теории T .
- ▶ Класс структур K конечно аксиоматизируем, если $K = \text{Mod}(T)$ для некоторой конечной теории $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Это равносильно аксиоматизируемости одной формулой $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$.

Аксиоматизируемые классы: свойства

1. Если $T \subseteq T'$, то $\text{Mod}(T) \supseteq \text{Mod}(T')$;
2. Если $K \subseteq K'$, то $\text{Th}(K) \supseteq \text{Th}(K')$;
3. $K \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(K))$ и $T \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(T))$;
4. Класс K аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = \text{Mod}(\text{Th}(K))$;
5. Любое пересечение аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом. Объединение двух аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом;
6. Класс K конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K и $\text{Str}_\sigma \setminus K$ аксиоматизируемы;
7. Класс K — аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

Доказательство свойства 7

Достаточно доказать, что из замкнутости следует
 $\text{Mod}(\text{Th}(K)) \subseteq K$, т.е. любая $\mathbb{A} \models \text{Th}(K)$ элементарно
эквивалентна ультрапроизведению подходящего семейства
 $\{\mathbb{B}_i\}_{i \in I}$, $\mathbb{B}_i \in K$, по некоторому ультрафильтру G на I .
Зафиксируем $\mathbb{A} \models \text{Th}(K)$ и проверим сначала, что для любого
 $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{A})$ существует $\mathbb{B} \in K$ такая, что $\mathbb{B} \models \varphi$. Пусть нет, т.е.
 $\mathbb{B} \models \neg\varphi$ для любой $\mathbb{B} \in K$. Тогда $\neg\varphi \in \text{Th}(K)$ и следовательно
 $\mathbb{A} \models \neg\varphi$ – противоречие. Т. о., существует семейство
 $\{\mathbb{B}_\varphi\}_{\varphi \in \text{Th}(\mathbb{A})}$ K -структур такое, что $\mathbb{B}_\varphi \models \varphi$.

Для $\varphi \in I$, пусть $U_\varphi = \{\psi \in \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \psi \rightarrow \varphi \text{ общезначима}\}$.

Тогда $\varphi \in U_\varphi$ и $U_\varphi \cap U_{\varphi'} = U_{\varphi \wedge \varphi'} \neq \emptyset$, поэтому

$F = \{J \subseteq \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \exists \varphi (J \supseteq U_\varphi)\}$ – фильтр на I . Пусть G –
ультрафильтр, расширяющий F .

Остается проверить, что $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}_G$. Достаточно проверить, что
 $\mathbb{B}_G \models \varphi$ для любого $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{A})$. Поскольку для любого $\psi \in U_\varphi$
выполнены $\mathbb{B}_\psi \models \psi \rightarrow \varphi$ и $\mathbb{B}_\psi \models \psi$, получаем $\mathbb{B}_\psi \models \varphi$. Отсюда
 $U_\varphi \subseteq \{\psi \in \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \mathbb{B}_\psi \models \varphi\} \in F \subseteq G$, значит $\mathbb{B}_G \models \varphi$.

Классификация формул

- ▶ Σ_0 — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- ▶ Σ_1 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{y})$, где ψ — бескванторная;
- ▶ Σ_2 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$, где ψ — бескванторная, и т.д.;
- ▶ множество Π_n определяется аналогично множеству Σ_n с заменой \exists на \forall и наоборот.

Классификация формул

- ▶ Σ_0 — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- ▶ Σ_1 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{y})$, где ψ — бескванторная;
- ▶ Σ_2 — множество всех формул, равносильных формулам вида $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$, где ψ — бескванторная, и т.д.;
- ▶ множество Π_n определяется аналогично множеству Σ_n с заменой \exists на \forall и наоборот.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1. $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$.

2. Множества Σ_n и Π_n замкнуты относительно \wedge, \vee .

3. $\varphi \in \Pi_n \iff \neg\varphi \in \Sigma_n$.

4. $\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = \text{For}_\sigma$.

Основные равносильности

1. $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi);$
2. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi;$
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi);$
4. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi);$
5. $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi);$
6. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi);$
7. $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta;$
8. $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta;$
9. $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta);$
10. $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta).$
11. $\neg(\forall x\varphi) \equiv \exists x(\neg\varphi);$
12. $\neg(\exists x\varphi) \equiv \forall x(\neg\varphi);$
13. $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi);$
14. $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi);$
15. $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$ (x не входит свободно в ψ);
16. $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$ (x не входит свободно в ψ);
17. $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$ (y не входит в φ);
18. $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$ (y не входит в φ).

Π_1 -аксиоматизируемость

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс K является Π_1 -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.

Π_1 -аксиоматизируемость

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс K является Π_1 -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.

Д-во \Leftarrow . Пусть $K = \text{Mod}(T)$. Достаточно проверить $K = \text{Mod}(\Gamma)$, $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_1 \mid T \models \varphi\}$. Включение K в $\text{Mod}(\Gamma)$ очевидно. Проверим, что $\mathbb{B} \in K$ для любой $\mathbb{B} \models \Gamma$. Заметим, что существует $\mathbb{A} \models T \cup \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$ (иначе, по компактности, $T \cup \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ не имеет модели для конечного множества $\psi_i \in \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$, откуда $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \in \Sigma_1$, $T \models \neg\psi \in \Pi_1$, а значит, $\mathbb{B} \models \neg\psi \wedge \psi$, противоречие).

Π_1 -аксиоматизируемость

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс K является Π_1 -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.

Д-во \Leftarrow . Пусть $K = \text{Mod}(T)$. Достаточно проверить $K = \text{Mod}(\Gamma)$, $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_1 \mid T \models \varphi\}$. Включение K в $\text{Mod}(\Gamma)$ очевидно. Проверим, что $\mathbb{B} \in K$ для любой $\mathbb{B} \models \Gamma$. Заметим, что существует $\mathbb{A} \models T \cup \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$ (иначе, по компактности, $T \cup \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ не имеет модели для конечного множества $\psi_i \in \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$, откуда $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \in \Sigma_1$, $T \models \neg\psi \in \Pi_1$, а значит, $\mathbb{B} \models \neg\psi \wedge \psi$, противоречие).

Для проверки $\mathbb{B} \in K$ достаточно вложить \mathbb{B} в некоторую $\mathbb{C} \in K$, т.е. проверить, что $T \cup D(\mathbb{B})$ имеет модель. По компактности, достаточно проверить, что $T \cup \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ имеет модель, где $\delta_i = \delta_i(\bar{c})$ ($c \in \sigma_B$). Поскольку $\mathbb{B} \models \exists \bar{x} \delta(\bar{x}) \in \Sigma_1$, $\delta = \delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_m$, $\mathbb{A} \models \exists \bar{x} \delta(\bar{x})$. Значит, \mathbb{A} можно обогатить до модели $T \cup \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$.

Π_2 -аксиоматизируемость

Класс структур K замкнут относительно объединений цепей, если из $\mathbb{A}_n \in K$ и $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots$ следует $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_2 -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

Π_2 -аксиоматизируемость

Класс структур K замкнут относительно объединений цепей, если из $\mathbb{A}_n \in K$ и $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots$ следует $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является Π_2 -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

Д. Начало аналогично предыдущему: для $K = \text{Mod}(T)$ рассмотрим $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_2 \mid T \models \varphi\}$ и докажем $K = \text{Mod}(\Gamma)$; достаточно проверить, что $\mathbb{B} \models T$ для любой $\mathbb{B} \models \Gamma$. Как и раньше, существует $\mathbb{A} \models T \cup \text{Th}_{\Sigma_2}(\mathbb{B})$.

Π_2 -аксиоматизируемость

Класс структур K замкнут относительно объединений цепей, если из $\mathbb{A}_n \in K$ и $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots$ следует $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$.

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является

Π_2 -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

Д. Начало аналогично предыдущему: для $K = \text{Mod}(T)$ рассмотрим $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_2 \mid T \models \varphi\}$ и докажем $K = \text{Mod}(\Gamma)$; достаточно проверить, что $\mathbb{B} \models T$ для любой $\mathbb{B} \models \Gamma$. Как и раньше, существует $\mathbb{A} \models T \cup \text{Th}_{\Sigma_2}(\mathbb{B})$.

Покажем, что существуют $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$ и $\mathbb{B}' \succeq \mathbb{B}$ такие, что $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}' \subseteq \mathbb{B}'$.

Рассмотрим $\text{Th}(\mathbb{A}) \cup \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$, где \mathbb{B}_B — σ_B -обогащение \mathbb{B} . Для любого конечного $\{\delta_1(\bar{c}), \dots, \delta_m(\bar{c})\} \subseteq \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$ имеем $\mathbb{B} \models \exists \bar{x}(\delta_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \delta_m(\bar{x})) \in \Sigma_2$, откуда $\mathbb{A} \models \exists \bar{x}(\delta_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \delta_m(\bar{x}))$.

Π_2 -аксиоматизируемость

Значит, некоторое $\sigma_{\bar{c}}$ -обогащение \mathbb{A} является моделью $\text{Th}(\mathbb{A}) \cup \{\delta_1(\bar{c}), \dots, \delta_m(\bar{c})\}$. По компактности, есть модель \mathbb{A}'_B теории $\text{Th}(\mathbb{A}) \cup \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$; пусть \mathbb{A}' – ее σ -обеднение. Тогда $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$, $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}'$, и $\text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B}_B) \supseteq \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{A}'_B)$ (поскольку $\text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B) \subseteq \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{A}'_B)$).

Рассмотрим теперь $D(\mathbb{A}'_B) \cup \text{Th}(\mathbb{B}_B)$. Рассуждая как и выше, видим что эта теория имеет модель $\mathbb{B}'_{A'}$ такую, что $\mathbb{B} \preceq \mathbb{B}'$.

Π_2 -аксиоматизируемость

Значит, некоторое $\sigma_{\bar{c}}$ -обогащение \mathbb{A} является моделью $\text{Th}(\mathbb{A}) \cup \{\delta_1(\bar{c}), \dots, \delta_m(\bar{c})\}$. По компактности, есть модель \mathbb{A}'_B теории $\text{Th}(\mathbb{A}) \cup \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$; пусть \mathbb{A}' – ее σ -обеднение. Тогда $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$, $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}'$, и $\text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B}_B) \supseteq \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{A}'_B)$ (поскольку $\text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B) \subseteq \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{A}'_B)$).

Рассмотрим теперь $D(\mathbb{A}'_B) \cup \text{Th}(\mathbb{B}_B)$. Рассуждая как и выше, видим что эта теория имеет модель $\mathbb{B}'_{A'}$ такую, что $\mathbb{B} \preceq \mathbb{B}'$.

Итерируя конструкцию $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mapsto (\mathbb{A}', \mathbb{B}')$, определим структуры $(\mathbb{A}_0, \mathbb{B}_0) = (\mathbb{A}, \mathbb{B})$ и $(\mathbb{A}_{n+1}, \mathbb{B}_{n+1}) = (\mathbb{A}'_n, \mathbb{B}'_n)$.

Тогда $\mathbb{B}_n \subseteq \mathbb{A}_{n+1} \subseteq \mathbb{B}_{n+1}$, $\mathbb{A}_{n+1} \equiv \mathbb{A}_n \equiv \mathbb{A}$, и $\mathbb{B}_n \preceq \mathbb{B}_{n+1}$.

Тогда $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \preceq \mathbb{B}_1 \preceq \dots$, откуда $\mathbb{B} \preceq \bigcup_n \mathbb{B}_n = \bigcup_n \mathbb{A}_n \models T$.

Значит, $\mathbb{B} \models T$.

Полные теории

σ -Теория T называется *полной*, если она имеет модель и, для любого σ -предложения φ , либо $T \models \varphi$, либо $T \models \neg\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории T , имеющей модель, равносильны следующие условия:

T — полна;

$[T] = \text{Th}(\mathbb{A})$, для любой $\mathbb{A} \models T$ (где $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ — множество всех логических следствий теории T);

$\text{Th}(\mathbb{A}) = \text{Th}(\mathbb{B})$ для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$.

Полные теории

σ -Теория T называется *полной*, если она имеет модель и, для любого σ -предложения φ , либо $T \models \varphi$, либо $T \models \neg\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории T , имеющей модель, равносильны следующие условия:

T — полна;

$[T] = \text{Th}(\mathbb{A})$, для любой $\mathbb{A} \models T$ (где $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ — множество всех логических следствий теории T);

$\text{Th}(\mathbb{A}) = \text{Th}(\mathbb{B})$ для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$.

Теория называется *категоричной в мощности κ* , если она имеет единственную с точностью до изоморфизма модель мощности κ .

Ранее уже доказали простую, но важную теорему:

Если σ -теория не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\geq |\text{For}_\sigma|$, то она полна.