

Задание 2. Компактность и мощность моделей.

1. Докажите, что если теория ZFC имеет модель, то она имеет и счетную модель. Имеет ли она конечную модель? Модель мощности континуум? Ответы обоснуйте.

Является ли любая модель теории ZFC фундированной по отношению принадлежности? Ответ обоснуйте.

2. Любая ли модель теории $Th(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ фундирована по отношению $<$? Существует ли модель этой теории, являющаяся группой по сложению? Имеет ли эта теория модель мощности континуум? Ответы обоснуйте.

Любая ли модель теории $Th(\mathbb{Z}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$ является упорядоченным кольцом? Существует ли модель этой теории, являющаяся упорядоченным полем? Ответы обоснуйте.

3. Докажите, что теория $Th(\omega + \omega; =, <)$. имеет единственную с точностью до изоморфизма фундированную модель.

4. Докажите с помощью теоремы компактности, что любой частичный порядок на данном множестве можно продолжить до линейного порядка на этом множестве.

5. Докажите с помощью теоремы компактности, что любой (не только конечный) плоский граф можно раскрасить в 4 цвета.