

# Логика-2, 3 курс М

Виктор Львович Селиванов <sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФМКН СПбГУ

Весенний семестр, 2025-26

Важная дополнительная информация:

<https://github.com/vseliv/Logic2-25-26>

## Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.
2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.
3. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М: Мир, 1983, 255 с.
4. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.
5. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- ▶ Множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- ▶ Множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.
- ▶ Счетное множество  $Var$  переменных  $v_0 v_1 v_2 \dots$

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- ▶ Множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.
- ▶ Счетное множество  $Var$  переменных  $v_0 v_1 v_2 \dots$
- ▶ Логические символы  $\wedge \vee \neg \rightarrow \forall \exists$

## Исходные символы $ЛП^\sigma$

Выражения  $ЛП^\sigma$  строятся из исходных символов, разбитых на следующие множества:

- ▶ Множество  $\sigma$  предикатных и функциональных символов, каждому из которых сопоставлено натуральное число — местность этого символа; множество предикатных символов непусто.
- ▶ Счетное множество  $Var$  переменных  $v_0 v_1 v_2 \dots$
- ▶ Логические символы  $\wedge \vee \neg \rightarrow \forall \exists$
- ▶ Вспомогательные символы  $( ) ,$

## Осмысленные выражения $\text{ЛП}^\sigma$

$\sigma$ -ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если  $f$  —  $n$ -местный функциональный символ из  $\sigma$  и  $t_1, \dots, t_n$  — термы, то выражение  $f(t_1, \dots, t_n)$  тоже терм.

## Осмысленные выражения $\text{ЛП}^\sigma$

$\sigma$ -ТЕРМЫ:

любая переменная есть терм;

если  $f$  —  $n$ -местный функциональный символ из  $\sigma$  и  $t_1, \dots, t_n$  — термы, то выражение  $f(t_1, \dots, t_n)$  тоже терм.

$\sigma$ -ФОРМУЛЫ:

выражение  $P(t_1, \dots, t_n)$ ,

где  $t_1, \dots, t_n$  — термы, а  $P$  —  $n$ -местный предикатный символ из  $\sigma$ , является формулой;  
если  $\varphi$  и  $\psi$  — формулы, а  $x$  — переменная, то выражения

$(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$ ,  $\neg\varphi$ ,  $\forall x\varphi$ ,  $\exists x\varphi$   
суть формулы.



## Свободные и связанные переменные

Множество  $FV(\varphi)$  свободных переменных формулы  $\varphi$  определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$  состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов  $t_1, \dots, t_n$ ;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ , и аналогично для  $\vee, \rightarrow, \neg$ ;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$ , и аналогично для  $\exists$ .

## Свободные и связанные переменные

Множество  $FV(\varphi)$  свободных переменных формулы  $\varphi$  определяется по индукции:

$FV(P(t_1, \dots, t_n))$  состоит из переменных, входящих хотя бы в один из термов  $t_1, \dots, t_n$ ;

$FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ , и аналогично для  $\vee, \rightarrow, \neg$ ;

$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$ , и аналогично для  $\exists$ .

Переменные, которые входят в формулу, но не являются свободными, называются связанными.

Формулы без свободных переменных называются предложениями.

Запись  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$  означает, что

$FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$ . Аналогично для термов.

## $\sigma$ -Структуры

$\sigma$ -Структура — пара  $\mathbb{A} = (A; I)$ , состоящая из непустого множества  $A$  и интерпретации  $I$  всех сигнатурных символов в  $A$  ( $I$  сопоставляет  $n$ -местному предикатному символу  $P \in \sigma$  некоторый  $n$ -местный предикат  $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$ , а каждому  $n$ -местному функциональному символу  $f$  из  $\sigma$  — некоторую  $n$ -местную функцию  $f^I = f^{\mathbb{A}}$  на  $A$ ).

# $\sigma$ -Структуры

$\sigma$ -Структура — пара  $\mathbb{A} = (A; I)$ , состоящая из непустого множества  $A$  и интерпретации  $I$  всех сигнатурных символов в  $A$  ( $I$  сопоставляет  $n$ -местному предикатному символу  $P \in \sigma$  некоторый  $n$ -местный предикат  $P^I = P^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$ , а каждому  $n$ -местному функциональному символу  $f$  из  $\sigma$  — некоторую  $n$ -местную функцию  $f^I = f^{\mathbb{A}}$  на  $A$ ).

Изоморфизмом  $\mathbb{A}$  на  $\mathbb{B}$  называется биекция  $g$  множества  $A$  на множество  $B$  такая, что

$P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$  и  
 $g(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$  для любых  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

Структуры  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  называются изоморфными ( $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ ), если существует изоморфизм  $\mathbb{A}$  на  $\mathbb{B}$ .

## Значения термов и формул

Для любой  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$  и означивания  $\nu : Var \rightarrow A$  определяем значения  $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$  и  $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{И, Л\}$  индукцией:

$$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x), \quad f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

## Значения термов и формул

Для любой  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$  и означивания  $\nu : Var \rightarrow A$  определяем значения  $t^{\mathbb{A},\nu} \in A$  и  $\varphi^{\mathbb{A},\nu} \in \{И, Л\}$  индукцией:

$$x^{\mathbb{A},\nu} = \nu(x), \quad f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

$$P(t_1, \dots, t_n)^{\mathbb{A},\nu} = P^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A},\nu}, \dots, t_n^{\mathbb{A},\nu});$$

$$(\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{A},\nu} = \varphi^{\mathbb{A},\nu} \wedge \psi^{\mathbb{A},\nu}, \text{ аналогично для } \vee, \rightarrow, \neg;$$

$$(\forall x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigwedge_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x} \text{ и } (\exists x \varphi)^{\mathbb{A},\nu} = \bigvee_{a \in A} \varphi^{\mathbb{A},\nu_a^x}$$

,

где  $\nu_a^x$  — означивание, полученное из  $\nu$  изменением значения  $x$  на  $a$ .

# Значения термов и формул

Пусть  $t = t(x_1, \dots, x_m)$  и  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ .

- ▶ Если означивания  $\mu$  и  $\nu$  согласованы на  $x_1, \dots, x_m$ , то  $t^{\mathbb{A}, \mu} = t^{\mathbb{A}, \nu}$  и  $\varphi^{\mathbb{A}, \mu} = \varphi^{\mathbb{A}, \nu}$ . Поэтому вместо  $t^{\mathbb{A}, \nu}$  часто пишут  $t^{\mathbb{A}}(x_1/a_1, \dots, x_m/a_m)$  или, короче,  $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)$ , где  $a_i = \nu(x_i)$ ; аналогично для формул. Вместо  $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) = \text{И}$  часто пишут  $\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$ .
- ▶ Если  $g$  — изоморфизм  $\mathbb{A}$  на  $\mathbb{B}$ , то  $g(t^{\mathbb{A}, \nu}) = t^{\mathbb{A}, g \circ \nu}$  и  $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \varphi^{\mathbb{A}, g \circ \nu}$ . Иными словами,  $g(t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)) = t^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_m))$  и  $\varphi^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) = \varphi^{\mathbb{B}}(g(a_1), \dots, g(a_m))$ .
- ▶ Если  $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ , то эти структуры элементарно эквивалентны ( $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ), т.е. в них истинны одни и те же  $\sigma$ -предложения.

# Общезначимость и ее варианты

- ▶  $\varphi$  общезначима (тождественно истинна), если  $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \text{И}$  для любых  $\mathbb{A}$  и  $\nu$ .
- ▶  $\varphi$  и  $\psi$  равносильны ( $\varphi \equiv \psi$ ), если  $\varphi^{\mathbb{A}, \nu} = \psi^{\mathbb{A}, \nu}$  для любых  $\mathbb{A}$  и  $\nu$ .
- ▶ Моделью множества предложений  $T$  называется структура, в которой все предложения из  $T$  истинны.
- ▶ Предложение  $\varphi$  логически следует из множества предложений  $T$  ( $T \models \varphi$ ), если  $\varphi$  истинно в любой модели множества  $T$ .
- ▶ Теория — множество предложений. Замкнутая теория — теория, замкнутая относительно логического следования.  $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$  — замыкание теории  $T$ .



# Общезначимость и ее варианты

- ▶  $\varphi$  общезначима  $\iff \models \varphi$ .
- ▶  $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$  общезначима.
- ▶  $\varphi(\bar{x})$  общезначима  $\iff \forall \bar{x} \varphi$  общезначима.
- ▶  $T \models (\varphi \rightarrow \psi) \iff T \cup \{\varphi\} \models \psi$ .
- ▶  $T \models \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$  не имеет модели.
- ▶  $T \models \varphi \iff \bigwedge T \rightarrow \varphi$  общезначима, где  $T$  — конечное множество предложений.

# Фильтры и ультрафильтры

Фильтр  $F$  на множестве  $I$  — это собственное подмножество множества  $P(I)$ , замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр  $F$  называется ультрафильтром, если  $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$  для любого  $A \subseteq I$ .

# Фильтры и ультрафильтры

Фильтр  $F$  на множестве  $I$  — это собственное подмножество множества  $P(I)$ , замкнутое относительно пересечения и надмножеств. Фильтр  $F$  называется ультрафильтром, если  $A \in F \vee (I \setminus A) \in F$  для любого  $A \subseteq I$ .

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

1. Ультрафильтры на  $I$  — это в точности максимальные фильтры по включению.
2. Если  $F$  — ультрафильтр, то  $A \in F \iff (I \setminus A) \notin F$  и  $A \cup B \in F \iff A \in F \vee B \in F$ , для любых  $A, B \subseteq I$ .
3. Любой фильтр на  $I$  содержится в некотором ультрафильтре.

## Фильтрованные произведения

Пусть  $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$  — семейство  $\sigma$ -структур и  $F$  — фильтр на  $I$ .

Тогда отношение  $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$  есть эквивалентность на  $A = \{a : I \rightarrow \bigcup_i A_i \mid \forall i (a(i) \in A_i)\}$ .

Определим  $\sigma$ -структуру  $\mathbb{A}_F$  на  $A/\equiv_F$  так:

$P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F,$

$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a],$  где  $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i));$

это определение корректно.

## Фильтрованные произведения

Пусть  $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$  — семейство  $\sigma$ -структур и  $F$  — фильтр на  $I$ . Тогда отношение  $a \equiv_F b \iff \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F$  есть эквивалентность на  $A = \{a : I \rightarrow \bigcup_i A_i \mid \forall i (a(i) \in A_i)\}$ . Определим  $\sigma$ -структуру  $\mathbb{A}_F$  на  $A/\equiv_F$  так:  
 $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff \{i \mid P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in F$ ,  
 $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [a]$ , где  $a(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ ;  
это определение корректно.

ТЕОРЕМА. Для любых ультрафильтра  $F$ ,  $\sigma$ -формулы  $\varphi(x_1, \dots, x_m)$  и  $a_1, \dots, a_m \in A$  имеем:  
 $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_m]) \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_m(i))\} \in F$ .

В частности, при  $m = 0$ :  $\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F$ .

# Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений  $T$  имеет модель, то  $T$  имеет модель.

# Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений  $T$  имеет модель, то  $T$  имеет модель.

Пусть  $I = \{i \mid i \text{ — конечное подмножество } T\}$ . Каждое  $i \in I$  имеет модель. По аксиоме выбора, существует семейство структур  $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$  такое, что  $\mathbb{A}_i \models i$  для любого  $i \in I$ .

Пусть  $G_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$ . Для любых  $i, k \in I$  выполнено  $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$ . Поэтому  $F = \{A \subseteq I \mid \exists i (G_i \subseteq A)\}$  — фильтр на  $I$ . По доказанному ранее, существует ультрафильтр  $H \supseteq F$ .

# Теорема компактности

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений  $T$  имеет модель, то  $T$  имеет модель.

Пусть  $I = \{i \mid i \text{ — конечное подмножество } T\}$ . Каждое  $i \in I$  имеет модель. По аксиоме выбора, существует семейство структур  $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$  такое, что  $\mathbb{A}_i \models i$  для любого  $i \in I$ .

Пусть  $G_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$ . Для любых  $i, k \in I$  выполнено  $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$ . Поэтому  $F = \{A \subseteq I \mid \exists i (G_i \subseteq A)\}$  — фильтр на  $I$ . По доказанному ранее, существует ультрафильтр  $H \supseteq F$ .

Утверждаем, что ультрапроизведение  $\mathbb{A}_H$  является моделью для  $T$ , т.е.  $\mathbb{A}_H \models \varphi$  для любого  $\varphi \in T$ . Но  $\{\varphi\} \in I$ , откуда  $G_{\{\varphi\}} \in F \subseteq H$  и  $G_{\{\varphi\}} \subseteq \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in H$ . По теореме об ультрапроизведении,  $\mathbb{A}_H \models \varphi$ .



# Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что  $\sigma$  содержит символ равенства  $=$  (двухместный предикатный символ).  $\sigma$ -Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

# Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что  $\sigma$  содержит символ равенства  $=$  (двухместный предикатный символ).  $\sigma$ -Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений  $T$  сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество  $T$  имеет нормальную модель.

# Теорема компактности для нормальных моделей

Далее предполагаем, что  $\sigma$  содержит символ равенства  $=$  (двухместный предикатный символ).  $\sigma$ -Структура называется нормальной, если символ равенства в ней интерпретируется стандартным образом, как отношение равенства элементов.

ТЕОРЕМА. Если любое конечное подмножество множества предложений  $T$  сигнатуры с равенством имеет нормальную модель, то и все множество  $T$  имеет нормальную модель.

Для доказательства надо применить предыдущую теорему к множеству  $T \cup E_\sigma$ , где  $E_\sigma$  — аксиомы равенства (утверждающие, что  $=$  есть  $\sigma$ -конгруэнтность) и профакторизовать полученную модель  $\mathbb{A}$  по конгруэнтности  $=^{\mathbb{A}}$ .

## Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x), \forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x),$$

$$\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n =$$
$$y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)).$$

## Аксиомы равенства, нормальные модели

$$\forall x(x = x), \forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x),$$

$$\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)),$$

$$\forall x_1\forall y_1 \dots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n =$$
$$y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)).$$

ТЕОРЕМА. Если теория содержит аксиомы равенства и имеет модель, то она имеет и нормальную модель.

## Понижение мощности

- ▶  $\mathbb{A}$  — *подструктура*  $\mathbb{B}$  ( $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ ), если  $A \subseteq B$ ,  $P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$  и  $f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$  для всех  $a_1, \dots, a_n \in A$ ;
- ▶ *вложение* структуры  $\mathbb{A}$  в структуру  $\mathbb{B}$  — это изоморфизм  $\mathbb{A}$  на подструктуру структуры  $\mathbb{B}$ ;
- ▶  $\mathbb{A}$  — *элементарная подструктура*  $\mathbb{B}$  ( $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$ ), если  $A \subseteq B$  и  $\varphi^{\mathbb{A}}(\bar{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\bar{a})$  для всех  $\bar{a} \in A$  и для всех формул  $\varphi(\bar{x})$ ;
- ▶ *элементарное вложение*  $\mathbb{A}$  в  $\mathbb{B}$  — это изоморфизм  $\mathbb{A}$  на элементарную подструктуру структуры  $\mathbb{B}$ ;
- ▶  $\mathbb{A}$  *элементарно эквивалентно*  $\mathbb{B}$  ( $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

## Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть  $\mathbb{A}$ ,  $X \subseteq A$ ,  $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$ .

Тогда существует  $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$ :  $X \subseteq B$  и  $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$ .

## Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть  $\mathbb{A}$ ,  $X \subseteq A$ ,  $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$ .  
Тогда существует  $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$ :  $X \subseteq B$  и  $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$ .

Д. Определим последовательность

$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$  по индукции:

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\},$$

где  $E_n$  и  $\eta : E_n \rightarrow A$  определены так:

$E_n = \{(\bar{a}, \varphi(\bar{x}, y)) \mid \bar{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)\}$  и  
 $\mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, \eta(e))$  для всех  $e \in E_n$ .  $B = \bigcup_n S_n$ .



## Понижение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть есть  $\mathbb{A}$ ,  $X \subseteq A$ ,  $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$ .  
Тогда существует  $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$ :  $X \subseteq B$  и  $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$ .

Д. Определим последовательность

$X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$  по индукции:

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\},$$

где  $E_n$  и  $\eta : E_n \rightarrow A$  определены так:

$$E_n = \{(\bar{a}, \varphi(\bar{x}, y)) \mid \bar{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)\} \text{ и } \mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, \eta(e)) \text{ для всех } e \in E_n. B = \bigcup_n S_n.$$

Известен следующий важный результат: Не существует логики, собственным образом расширяющей логику предикатов и удовлетворяющей теоремам компактности и понижения мощности.

## Константное обогащение

Если  $\sigma \subseteq \tau$ , то сигнатура  $\tau$  называется *обогащением* сигнатуры  $\sigma$ . Если  $\mathbb{A}$  —  $\sigma$ -структура, то, определив интерпретацию символов из  $\tau \setminus \sigma$  в  $A$ , получим  $\tau$ -структуру  $\mathbb{B}$ , называемую обогащением структуры  $\mathbb{A}$ . Наоборот: если  $\mathbb{B}$  —  $\tau$ -структура, то, “забывая” интерпретацию символов из  $\tau \setminus \sigma$ , получим  $\sigma$ -обеднение  $\mathbb{B}|_\sigma$  структуры  $\mathbb{B}$ . Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

## Константное обогащение

Если  $\sigma \subseteq \tau$ , то сигнатура  $\tau$  называется *обогащением* сигнатуры  $\sigma$ . Если  $\mathbb{A} — \sigma$ -структура, то, определив интерпретацию символов из  $\tau \setminus \sigma$  в  $A$ , получим  $\tau$ -структуру  $\mathbb{B}$ , называемую обогащением структуры  $\mathbb{A}$ . Наоборот: если  $\mathbb{B} — \tau$ -структура, то, “забывая” интерпретацию символов из  $\tau \setminus \sigma$ , получим  $\sigma$ -обеднение  $\mathbb{B}|_\sigma$  структуры  $\mathbb{B}$ . Чаще всего сигнатуры обогащаются константными символами.

Например, пусть  $\mathbb{A} — \sigma$ -структура, а  $\sigma_A = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$  ее обогащение новыми константными символами  $c_a$  такими, что  $c_a \neq c_b$  при  $a \neq b$ . Стандартным константным обогащением структуры  $\mathbb{A}$  называется ее  $\sigma_A$ -обогащение, в котором новые символы интерпретируются так:  $c_a \mapsto a$ , для любого  $a \in A$ .

## Диаграммы структур

*Диаграмма  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$*  — это множество  $D(\mathbb{A})$   $\sigma_A$ -предложений вида  $f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a$ ,  $P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ ,  $\neg P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ , истинных в  $\mathbb{A}_A$  при естественной интерпретации новых константных символов.

*Полная диаграмма  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$*  — это множество  $D^*(\mathbb{A})$  всех  $\sigma_A$ -предложений, истинных в  $\mathbb{A}_A$  при естественной интерпретации новых константных символов.

# Диаграммы структур

*Диаграмма  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$*  — это множество  $D(\mathbb{A})$   $\sigma_A$ -предложений вида  $f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a$ ,  $P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ ,  $\neg P(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ , истинных в  $\mathbb{A}_A$  при естественной интерпретации новых константных символов.

*Полная диаграмма  $\sigma$ -структуры  $\mathbb{A}$*  — это множество  $D^*(\mathbb{A})$  всех  $\sigma_A$ -предложений, истинных в  $\mathbb{A}_A$  при естественной интерпретации новых константных символов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1.  $\sigma$ -Структура  $\mathbb{A}$  изоморфно вкладывается в  $\sigma$ -структуру  $\mathbb{B} \iff \mathbb{B}$  является  $\sigma$ -обеднением некоторой модели множества  $D(\mathbb{A})$ .

2.  $\sigma$ -Структура  $\mathbb{A}$  элементарно вкладывается в  $\sigma$ -структуру  $\mathbb{B} \iff \mathbb{B}$  является  $\sigma$ -обеднением некоторой модели множества  $D^*(\mathbb{A})$ .

## Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная  $\sigma$ -структура  $\mathbb{A}$  и кардинал  $\kappa \geq \max(|A|, |\text{For}_\sigma|)$ . Тогда  $\mathbb{A}$  элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности  $\kappa$ .

## Повышение мощности

ТЕОРЕМА. Пусть имеется бесконечная  $\sigma$ -структура  $\mathbb{A}$  и кардинал  $\kappa \geq \max(|A|, |\text{For}_\sigma|)$ . Тогда  $\mathbb{A}$  элементарно вкладывается в некоторую структуру мощности  $\kappa$ .

Обогатим  $\sigma$  до  $\tau = \sigma_A \cup \{d_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ , добавив  $\kappa$  новых различных константных символов в  $\sigma_A$ , и рассмотрим  $\tau$ -теорию

$$T = D^*(A) \cup \{\neg(d_\alpha = d_\beta) \mid \alpha, \beta \in \kappa, \alpha \neq \beta\}.$$

Любое конечное  $T_0 \subseteq T$  имеет модель, являющуюся  $\tau$ -обогащением структуры  $\mathbb{A}_A$ , в котором константы  $\{d_\alpha\}$ , входящие в  $T_0$ , интерпретируются различными элементами  $A$ . По теореме компактности,  $T$  имеет модель  $\mathbb{C}$ . Поскольку  $\alpha \mapsto d_\alpha^{\mathbb{C}}$  — инъекция из  $\kappa$  в  $C$ ,  $\kappa \leq |C|$ . Пусть  $X \subseteq C$  — множество мощности  $\kappa$ , содержащее  $\mathbb{C}$ -интерпретации всех  $c_a$ ,  $a \in A$ . По теореме о понижении мощности, найдется  $\mathbb{B}' \preceq \mathbb{C}$  мощности  $|\mathbb{B}'| \leq |\text{For}_\tau| \leq \kappa$ . С другой стороны,  $\mathbb{B}' \supseteq X$ , поэтому  $|\mathbb{B}'| \geq |X| = \kappa$ , откуда  $|\mathbb{B}'| = \kappa$ . Обеднение  $\mathbb{B} = \mathbb{B}'|_\sigma$  имеет мощность  $\kappa$  и  $\mathbb{A}$  элементарно вкладывается в  $\mathbb{B}$ .

# Мощность моделей теории

В качестве следствий теорем о повышении и понижении мощности получаем:



# Мощность моделей теории

В качестве следствий теорем о повышении и понижении мощности получаем:

ТЕОРЕМА. Если  $\sigma$ -теория  $T$  имеет модель мощности  $\geq n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , то она имеет модель любой мощности  $\kappa \geq |\text{For}_\sigma|$ .

# Мощность моделей теории

В качестве следствий теорем о повышении и понижении мощности получаем:

ТЕОРЕМА. Если  $\sigma$ -теория  $T$  имеет модель мощности  $\geq n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , то она имеет модель любой мощности  $\kappa \geq |\text{For}_\sigma|$ .

ТЕОРЕМА. Если  $\sigma$ -теория  $T$  имеет единственную с точностью до изоморфизма модель некоторой мощности  $\kappa \geq |\text{For}_\sigma|$  и не имеет конечных моделей, то она полна (т.е.  $T \models \varphi \vee T \models \neg\varphi$  для любого  $\sigma$ -предложения  $\varphi$ ).

## Аксиоматизируемые классы

- ▶ Теория  $T$  — множество  $\sigma$ -предложений.
- ▶ Теории  $T$  соответствует класс ее моделей  $\text{Mod}(T) = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \models T\}$
- ▶ Классу структур  $K \subseteq \text{Str}_\sigma$  соответствует его теория  $\text{Th}(K) = \{\varphi \in \text{Sent}_\sigma \mid \forall \mathbb{A} \in K (\mathbb{A} \models \varphi)\}$ .
- ▶ Класс структур  $K$  *аксиоматизируем*, если  $K = \text{Mod}(T)$  для некоторой теории  $T$ .
- ▶ Класс структур  $K$  *конечно аксиоматизируем*, если  $K = \text{Mod}(T)$  для некоторой конечной теории  $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . Это равносильно аксиоматизируемости одной формулой  $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ .

## Аксиоматизируемые классы: свойства

1. Если  $T \subseteq T'$ , то  $\text{Mod}(T) \supseteq \text{Mod}(T')$ ;
2. Если  $K \subseteq K'$ , то  $\text{Th}(K) \supseteq \text{Th}(K')$ ;
3.  $K \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(K))$  и  $T \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(T))$ ;
4. Класс  $K$  аксиоматизируем тогда и только тогда, когда  $K = \text{Mod}(\text{Th}(K))$ ;
5. Любое пересечение аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом. Объединение двух аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом;
6. Класс  $K$  конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда  $K$  и  $\text{Str}_\sigma \setminus K$  аксиоматизируемы;
7. Класс  $K$  — аксиоматизируем тогда и только тогда, когда  $K$  замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

## Доказательство свойства 7

Достаточно доказать, что из замкнутости следует  $\text{Mod}(\text{Th}(K)) \subseteq K$ , т.е. любая  $\mathbb{A} \models \text{Th}(K)$  элементарно эквивалентна ультрапроизведению подходящего семейства  $\{\mathbb{B}_i\}_{i \in I}$ ,  $\mathbb{B}_i \in K$ , по некоторому ультрафильтру  $G$  на  $I$ .

Зафиксируем  $\mathbb{A} \models \text{Th}(K)$  и проверим сначала, что для любого  $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{A})$  существует  $\mathbb{B} \in K$  такая, что  $\mathbb{B} \models \varphi$ . Пусть нет, т.е.  $\mathbb{B} \models \neg\varphi$  для любой  $\mathbb{B} \in K$ . Тогда  $\neg\varphi \in \text{Th}(K)$  и следовательно  $\mathbb{A} \models \neg\varphi$  – противоречие. Т. о., существует семейство  $\{\mathbb{B}_\varphi\}_{\varphi \in \text{Th}(\mathbb{A})}$   $K$ -структур такое, что  $\mathbb{B}_\varphi \models \varphi$ .

Для  $\varphi \in I$ , пусть  $U_\varphi = \{\psi \in \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \psi \rightarrow \varphi \text{ общезначима}\}$ .

Тогда  $\varphi \in U_\varphi$  и  $U_\varphi \cap U_{\varphi'} = U_{\varphi \wedge \varphi'} \neq \emptyset$ , поэтому

$F = \{J \subseteq \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \exists \varphi (J \supseteq U_\varphi)\}$  – фильтр на  $I$ . Пусть  $G$  – ультрафильтр, расширяющий  $F$ .

Остается проверить, что  $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}_G$ . Достаточно проверить, что  $\mathbb{B}_G \models \varphi$  для любого  $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{A})$ . Поскольку для любого  $\psi \in U_\varphi$  выполнены  $\mathbb{B}_\psi \models \psi \rightarrow \varphi$  и  $\mathbb{B}_\psi \models \psi$ , получаем  $\mathbb{B}_\psi \models \varphi$ . Отсюда  $U_\varphi \subseteq \{\psi \in \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \mathbb{B}_\psi \models \varphi\} \in F \subseteq G$ , значит  $\mathbb{B}_G \models \varphi$ .

# Классификация формул

- ▶  $\Sigma_0$  — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- ▶  $\Sigma_1$  — множество всех формул, равносильных формулам вида  $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ , где  $\psi$  — бескванторная;
- ▶  $\Sigma_2$  — множество всех формул, равносильных формулам вида  $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$ , где  $\psi$  — бескванторная, и т.д.;
- ▶ множество  $\Pi_n$  определяется аналогично множеству  $\Sigma_n$  с заменой  $\exists$  на  $\forall$  и наоборот.

# Классификация формул

- ▶  $\Sigma_0$  — множество всех формул, равносильных бескванторным формулам;
- ▶  $\Sigma_1$  — множество всех формул, равносильных формулам вида  $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ , где  $\psi$  — бескванторная;
- ▶  $\Sigma_2$  — множество всех формул, равносильных формулам вида  $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$ , где  $\psi$  — бескванторная, и т.д.;
- ▶ множество  $\Pi_n$  определяется аналогично множеству  $\Sigma_n$  с заменой  $\exists$  на  $\forall$  и наоборот.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1.  $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$ .

2. Множества  $\Sigma_n$  и  $\Pi_n$  замкнуты относительно  $\wedge, \vee$ .

3.  $\varphi \in \Pi_n \iff \neg \varphi \in \Sigma_n$ .

4.  $\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = \text{For}_\sigma$ .

# Основные равносильности

1.  $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$ ;      2.  $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ ;
3.  $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ ;      4.  $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ ;
5.  $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$ ;      6.  $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$ ;
7.  $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$ ;
8.  $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$ ;
9.  $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$ ;
10.  $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$ .
11.  $\neg(\forall x\varphi) \equiv \exists x(\neg\varphi)$ ;
12.  $\neg(\exists x\varphi) \equiv \forall x(\neg\varphi)$ ;
13.  $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$ ;
14.  $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$ ;
15.  $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$  ( $x$  не входит свободно в  $\psi$ );
16.  $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$  ( $x$  не входит свободно в  $\psi$ );
17.  $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$  ( $y$  не входит в  $\varphi$ );
18.  $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$  ( $y$  не входит в  $\varphi$ ).



## $\Pi_1$ -аксиоматизируемость

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс  $K$  является  $\Pi_1$ -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.

## $\Pi_1$ -аксиоматизируемость

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс  $K$  является  $\Pi_1$ -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.

Д-во  $\Leftarrow$ . Пусть  $K = \text{Mod}(T)$ . Достаточно проверить  $K = \text{Mod}(\Gamma)$ ,  $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_1 \mid T \models \varphi\}$ . Включение  $K$  в  $\text{Mod}(\Gamma)$  очевидно. Проверим, что  $\mathbb{B} \in K$  для любой  $\mathbb{B} \models \Gamma$ . Заметим, что существует  $\mathbb{A} \models T \cup \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$  (иначе, по компактности,  $T \cup \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  не имеет модели для конечного множества  $\psi_i \in \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$ , откуда  $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \in \Sigma_1$ ,  $T \models \neg\psi \in \Pi_1$ , а значит,  $\mathbb{B} \models \neg\psi \wedge \psi$ , противоречие).

## $\Pi_1$ -аксиоматизируемость

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс  $K$  является  $\Pi_1$ -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.

Д-во  $\Leftarrow$ . Пусть  $K = \text{Mod}(T)$ . Достаточно проверить  $K = \text{Mod}(\Gamma)$ ,  $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_1 \mid T \models \varphi\}$ . Включение  $K$  в  $\text{Mod}(\Gamma)$  очевидно. Проверим, что  $\mathbb{B} \in K$  для любой  $\mathbb{B} \models \Gamma$ . Заметим, что существует  $\mathbb{A} \models T \cup \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$  (иначе, по компактности,  $T \cup \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  не имеет модели для конечного множества  $\psi_i \in \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$ , откуда  $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \in \Sigma_1$ ,  $T \models \neg\psi \in \Pi_1$ , а значит,  $\mathbb{B} \models \neg\psi \wedge \psi$ , противоречие).

Для проверки  $\mathbb{B} \in K$  достаточно вложить  $\mathbb{B}$  в некоторую  $\mathbb{C} \in K$ , т.е. проверить, что  $T \cup D(\mathbb{B})$  имеет модель. По компактности, достаточно проверить, что  $T \cup \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$  имеет модель, где  $\delta_i = \delta_i(\bar{c})$  ( $c \in \sigma_B$ ). Поскольку  $\mathbb{B} \models \exists \bar{x} \delta(\bar{x}) \in \Sigma_1$ ,  $\delta = \delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_m$ ,  $\mathbb{A} \models \exists \bar{x} \delta(\bar{x})$ . Значит,  $\mathbb{A}$  можно обогатить до модели  $T \cup \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ .

## $\Pi_2$ -аксиоматизируемость

Класс структур  $K$  замкнут относительно объединений цепей, если из  $\mathbb{A}_n \in K$  и  $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots$  следует  $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$ .

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является  $\Pi_2$ -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

## $\Pi_2$ -аксиоматизируемость

Класс структур  $K$  замкнут относительно объединений цепей, если из  $\mathbb{A}_n \in K$  и  $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots$  следует  $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$ .

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является

$\Pi_2$ -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

Д. Начало аналогично предыдущему: для  $K = \text{Mod}(T)$  рассмотрим  $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_2 \mid T \models \varphi\}$  и докажем  $K = \text{Mod}(\Gamma)$ ; достаточно проверить, что  $\mathbb{B} \models T$  для любой  $\mathbb{B} \models \Gamma$ . Как и раньше, существует  $\mathbb{A} \models T \cup \text{Th}_{\Sigma_2}(\mathbb{B})$ .

## $\Pi_2$ -аксиоматизируемость

Класс структур  $K$  замкнут относительно объединений цепей, если из  $\mathbb{A}_n \in K$  и  $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots$  следует  $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$ .

ТЕОРЕМА. Аксиоматизируемый класс является  $\Pi_2$ -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.

Д. Начало аналогично предыдущему: для  $K = \text{Mod}(T)$  рассмотрим  $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_2 \mid T \models \varphi\}$  и докажем  $K = \text{Mod}(\Gamma)$ ; достаточно проверить, что  $\mathbb{B} \models T$  для любой  $\mathbb{B} \models \Gamma$ . Как и раньше, существует  $\mathbb{A} \models T \cup \text{Th}_{\Sigma_2}(\mathbb{B})$ .

Покажем, что существуют  $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}' \succeq \mathbb{B}$  такие, что  $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}' \subseteq \mathbb{B}'$ .

Рассмотрим  $\text{Th}(\mathbb{A}) \cup \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$ , где  $\mathbb{B}_B$  —  $\sigma_B$ -обогащение  $\mathbb{B}$ . Для любого конечного  $\{\delta_1(\bar{c}), \dots, \delta_m(\bar{c})\} \subseteq \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$  имеем  $\mathbb{B} \models \exists \bar{x}(\delta_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \delta_m(\bar{x})) \in \Sigma_2$ , откуда  $\mathbb{A} \models \exists \bar{x}(\delta_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \delta_m(\bar{x}))$ .

## $\Pi_2$ -аксиоматизируемость

Значит, некоторое  $\sigma_{\bar{c}}$ -обогащение  $\mathbb{A}$  является моделью  $\text{Th}(\mathbb{A}) \cup \{\delta_1(\bar{c}), \dots, \delta_m(\bar{c})\}$ . По компактности, есть модель  $\mathbb{A}'_B$  теории  $\text{Th}(\mathbb{A}) \cup \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$ ; пусть  $\mathbb{A}'$  – ее  $\sigma$ -обеднение. Тогда  $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}'$ , и  $\text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B}_B) \supseteq \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{A}'_B)$  (поскольку  $\text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B) \subseteq \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{A}'_B)$ ).

Рассмотрим теперь  $D(\mathbb{A}'_B) \cup \text{Th}(\mathbb{B}_B)$ . Рассуждая как и выше, видим что эта теория имеет модель  $\mathbb{B}'_{A'}$  такую, что  $\mathbb{B} \preceq \mathbb{B}'$ .

## $\Pi_2$ -аксиоматизируемость

Значит, некоторое  $\sigma_{\bar{c}}$ -обогащение  $\mathbb{A}$  является моделью  $\text{Th}(\mathbb{A}) \cup \{\delta_1(\bar{c}), \dots, \delta_m(\bar{c})\}$ . По компактности, есть модель  $\mathbb{A}'_B$  теории  $\text{Th}(\mathbb{A}) \cup \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$ ; пусть  $\mathbb{A}'$  – ее  $\sigma$ -обеднение. Тогда  $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}'$ , и  $\text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B}_B) \supseteq \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{A}'_B)$  (поскольку  $\text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B) \subseteq \text{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{A}'_B)$ ).

Рассмотрим теперь  $D(\mathbb{A}'_B) \cup \text{Th}(\mathbb{B}_B)$ . Рассуждая как и выше, видим что эта теория имеет модель  $\mathbb{B}'_{A'}$  такую, что  $\mathbb{B} \preceq \mathbb{B}'$ .

Итерируя конструкцию  $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mapsto (\mathbb{A}', \mathbb{B}')$ , определим структуры  $(\mathbb{A}_0, \mathbb{B}_0) = (\mathbb{A}, \mathbb{B})$  и  $(\mathbb{A}_{n+1}, \mathbb{B}_{n+1}) = (\mathbb{A}'_n, \mathbb{B}'_n)$ .

Тогда  $\mathbb{B}_n \subseteq \mathbb{A}_{n+1} \subseteq \mathbb{B}_{n+1}$ ,  $\mathbb{A}_{n+1} \equiv \mathbb{A}_n \equiv \mathbb{A}$ , и  $\mathbb{B}_n \preceq \mathbb{B}_{n+1}$ .

Тогда  $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \preceq \mathbb{B}_1 \preceq \dots$ , откуда  $\mathbb{B} \preceq \bigcup_n \mathbb{B}_n = \bigcup_n \mathbb{A}_n \models T$ .

Значит,  $\mathbb{B} \models T$ .



# Полные теории

$\sigma$ -Теория  $T$  называется *полной*, если она имеет модель и, для любого  $\sigma$ -предложения  $\varphi$ , либо  $T \models \varphi$ , либо  $T \models \neg\varphi$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории  $T$ , имеющей модель, равносильны следующие условия:

$T$  — полна;

$[T] = \text{Th}(\mathbb{A})$ , для любой  $\mathbb{A} \models T$  (где  $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$  — множество всех логических следствий теории  $T$ );

$\text{Th}(\mathbb{A}) = \text{Th}(\mathbb{B})$  для любых  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ .

# Полные теории

$\sigma$ -Теория  $T$  называется *полной*, если она имеет модель и, для любого  $\sigma$ -предложения  $\varphi$ , либо  $T \models \varphi$ , либо  $T \models \neg\varphi$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для теории  $T$ , имеющей модель, равносильны следующие условия:

$T$  — полна;

$[T] = \text{Th}(\mathbb{A})$ , для любой  $\mathbb{A} \models T$  (где  $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$  — множество всех логических следствий теории  $T$ );

$\text{Th}(\mathbb{A}) = \text{Th}(\mathbb{B})$  для любых  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ .

Теория называется *категоричной в мощности  $\kappa$* , если она имеет единственную с точностью до изоморфизма модель мощности  $\kappa$ .

Ранее уже доказали простую, но важную теорему:

Если  $\sigma$ -теория не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности  $\geq |\text{For}_\sigma|$ , то она полна.