

**Математическая логика 2, ФМКН СПбГУ
(математика 3 к., весенний семестр 2025-26)**

Лектор В.Л. Селиванов

Основные экзаменационные вопросы

1. Значение формулы логики предикатов в структуре. Общезначимые формулы, равносильность формул, модели, логическое следование, связь между этими понятиями.
2. Изоморфизм и элементарная эквивалентность структур. Элементарная эквивалентность изоморфных структур. Определимость и автоморфизмы.
3. Фильтры и ультрафильтры. Расширение фильтра до ультрафильтра.
4. Фильтрованные произведения структур. Теорема об ультрапроизведении.
5. Теорема о компактности.
6. Диаграммы и полные диаграммы структур. Их связь со вложениями и элементарными вложениями структур.
7. Теорема о понижении мощности.
8. Теорема о повышении мощности. Возможные мощности моделей данной теории.
9. Аксиоматизируемые классы структур. Критерий конечной аксиоматизируемости.
10. Иерархия формул по числу перемен кванторов в предваренной форме. Включения классов иерархии.
11. Критерий Π_1 -аксиоматизируемости.
12. Критерий Π_2 -аксиоматизируемости.
13. Полные теории, их характеристизации, тест Бoотa.
14. Модельно полные теории, их характеристизации, тест Робинсона.
15. Элиминация кванторов. Характеризация теорий, допускающих элиминацию кванторов.
16. Игры Эренфойхта. Выигрышные стратегии. Кванторная глубина формулы, конечность множества формул ограниченной кванторной глубины с точностью до равносильности.
17. Характеризации элементарной эквивалентности и ее ограниченных вариантов в терминах выигрышных стратегий соответствующих игр Эренфойхта.
18. Типы, их реализация и опускание. Теорема об опускании типа.
19. Простые и атомные модели, примеры.
20. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов, их свойства. Корректность исчисления предикатов, теории Хенкина.
21. Теоремы о существовании модели и о полноте исчисления предикатов.
22. Вычислимость. Рекурсивные функции и предикаты, их свойства. Тезис Чёрча. Бета-функция Гёделя.
23. Кодирование последовательностей чисел и его свойства. Замкнутость класса рекурсивных функций относительно рекурсивных определений.
24. Кодирование исчисления предикатов, его свойства. Рекурсивность множества выводов в случае конечной сигнатуры. Перечислимость множества выводимых секвенций в случае конечной сигнатуры.
25. Минимальная арифметика. Представление рекурсивных предикатов в минимальной арифметике.
26. Теорема о неразрешимости арифметики. Неразрешимость минимальной арифметики, арифметики Пеано, теории стандартной модели арифметики.
27. Неразрешимость логики предикатов. Примеры разрешимых и неразрешимых теорий.
28. Теорема Гёделя о неполноте арифметики. Неполнота минимальной арифметики и арифметики Пеано.

29. R-программы и R-вычислимые функции. Замкнутость класса R-вычислимых функций относительно суперпозиции и минимизации.
30. Кодирование R-вычислений. Совпадение классов R-вычислимых и рекурсивных тотальных функций.
31. R-вычислимые частичные функции. Рекурсивные частичные функции. Совпадение этих классов частичных функций.
32. R-вычислимые функции с оракулом h. Функции, рекурсивные относительно h. Совпадение этих двух классов (частичных) функций.
33. Существование главной вычислимой нумерации R-вычислимых частичных функций.
34. Теорема о неподвижной точке. Теорема Райса.
35. Характеризация рекурсивно перечислимых множеств. m-Сводимость и ее свойства. m-Полные рекурсивно перечислимые множества.
36. Тьюрингова сводимость и тьюрингов скачок, их свойства.
37. Арифметическая иерархия и ее свойства. Арифметические множества.
38. Связь арифметической иерархии с иерархией предикатов, определимых в стандартной модели арифметики.
39. Связь арифметической иерархии с итерациями тьюрингова скачка.
40. Теорема о неопределимости истины.