

Задание 2. Компактность и мощность моделей.

1. Докажите, что если теория ZFC имеет модель, то она имеет и счетную модель. Имеет ли она конечную модель? Модель мощности континуум? Ответы обоснуйте.

Является ли любая модель теории ZFC фундированной по отношению принадлежности? Ответ обоснуйте.

2. Любая ли модель теории  $Th(\mathbb{N}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$  фундирована по отношению  $<$ ? Существует ли модель этой теории, являющаяся группой по сложению? Имеет ли эта теория модель мощности континуум? Ответы обоснуйте.

Любая ли модель теории  $Th(\mathbb{Z}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$  является упорядоченным кольцом? Существует ли модель этой теории, являющаяся упорядоченным полем? Ответы обоснуйте.

3. Докажите, что теория  $Th(\omega + \omega; =, <)$  имеет единственную с точностью до изоморфизма фундированную модель.

4. Докажите с помощью теоремы компактности, что любой частичный порядок на данном множестве можно продолжить до линейного порядка на этом множестве.

5. Докажите с помощью теоремы компактности, что любой (не только конечный) плоский граф можно раскрасить в 4 цвета.