Задание 2. Предпорядки и эквивалентности

1. Проверьте, что: обращение любого частичного порядка на множестве X является частичным порядком на X; декартово произведение $(x, y)T(x_1, y_1) \leftrightarrow xRx_1 \wedge ySy_1$, $T = R \times S$, частичных порядков R на X и S на Y является частичным порядком на $X \times Y$; объединение произвольной возрастающей по включению последовательности частичных порядков на X является частичным порядком на X; пересечение частичных порядков на X является частичным порядком на X.

2. а) Пусть $\mathcal{P}(X)$ — множество всех частичных порядков на X. Докажите, что максимальные элементы в $(\mathcal{P}(X); \subseteq)$ — это в точности линейные порядки на X. Существует ли наименьший элемент в $(\mathcal{P}(X); \subseteq)$?

б) Является ли декартово произведение двух предпорядков (соотв. линейных порядков) снова предпорядком (соотв. линейным порядком)?

3. а) Докажите, что существует биекция между множеством всех частичных порядков на X и множеством всех строгих частичных порядков на X. Аналогично для линейных порядков.

б) Докажите, что существует биекция между множеством всех эквивалентностей на X и множеством всех разбиений множества X.

4. а) Линейный порядок на X называется полным, если любое непустое ограченное сверху подмножество X имеет супремум. Являются ли полными обычные линейные порядки на множествах всех натуральных, целых, рациональных, и вещественных чисел? Ответ обоснуйте.

б) Проверьте, что любое подмножество множества $P(X)$ имеет инфимум и супремум по отношению включения.

5. а) Опишите фактор-множества для следующих эквивалентностей: эквивалентность "$x - y$ делится на 5" на множестве $\mathbb{Z}$; эквивалентность $x - y \in \mathbb{Z}$ на множестве $\mathbb{R}$; отношение параллельности прямых на множестве всех прямых на плоскости.

б) Проверьте, что: если $\leq$ — предпорядок на X, то отношение "$x \leq y \wedge y \leq x$" есть эквивалентность на X; если $f : X \to Y$, то отношение "$f(x) = f(x_1)$" есть эквивалентность на X.