

В.Л. Селиванов
Основы теории множеств (план лекций)
ФМКН СПбГУ, 1 курс М, 2025-2026 учебный год

Одна пара лекций и одна пара практики в неделю, всего 8 недель.

Краткое содержание лекций (16 часов)

Лекция 1. Зачем нужна теория множеств? Основные этапы ее развития (наивная ТМ, аксиоматическая ТМ, современные исследования). Операции над множествами, их свойства. Отношения и функции. Специальные бинарные отношения: классы предпорядков и частичных порядков. Отношения эквивалентности, фактор-множества.

Лекция 2. Определение основных числовых структур (натуральных, целых, рациональных, вещественных (набросок), и комплексных чисел) в теории множеств.

Лекция 3. Мощность множества, сравнение мощностей. Теорема Шрёдера-Бернштейна. Теорема Кантора о булеане. Конечные, счетные и континуальные множества. Континуум-гипотеза. Парадоксы теории множеств, необходимость ее аксиоматизации.

Лекция 4. Аксиомы теории множеств ZFC как основа большей части современной математики. Примеры вывода установленных ранее фактов из аксиом.

Лекция 5. Фундированные частичные порядки и доказательства по индукции. Вполне упорядоченные множества. Сравнимость порядковых типов вполне упорядоченных множеств.

Лекция 6. Ординалы и порядковые типы вполне упорядоченных множеств. Шкала ординалов. Рекурсивные определения по ординалам. Примеры утверждений, равносильных аксиоме выбора в теории ZF (включая теорему Цермело и лемму Цорна).

Лекция 7. Сравнимость мощностей. Кардиналы, шкала кардиналов. Кумулятивная иерархия. Арифметика ординалов и кардиналов. Непротиворечивость ZFC. Независимость аксиомы выбора и континуум-гипотезы (без доказательства). Критика ZFC. Теорема Банаха-Тарского (без доказательства). Существование неизмеримых множеств.

Лекция 8. Игры Гейла-Стюарта. Определимость замкнутых игр и аксиома выбора. Аксиома детерминированности AD как альтернатива аксиомы выбора. Противоречивость теории ZF+AC+AD. Континуум-гипотеза и отсутствие неизмеримых множеств в ZF+AD.

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 112 с.
2. Т. Йех. Теория множеств и метод форсинга. Перевод с английского В. И. Фуксона под редакцией В.Н. Гришина. М.:Мир, 1973. 150 с.
3. К. Куратовский, А. Мостовский. Теория множеств. Перевод с английского М.И. Кратко под редакцией А.Д. Тайманова. М.:Мир, 1970. 416 с.
4. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.