

Основы теории множеств, 1 курс Математика

Виктор Львович Селиванов¹

¹ФМКН СПбГУ

Осенний семестр, 2025

Важная дополнительная информация

Мой адрес:

v.selivanov@spbu.ru

Страница курса в интернете:

<https://github.com/vseliv/sets-2025/tree/main>

Литература:

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. ч. 1. Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 2012.
2. К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств. М.: Мир, 1970.
3. Т. Йех, Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
4. И.А. Лавров, Л.Л.Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 2001.

Зачем нужна теория множеств?

Теория множеств имеет двоякую природу. С одной стороны, это раздел математической логики со своими задачами, открытыми вопросами, подходами и идеями, которой занимается ограниченный круг специалистов.

С другой стороны, она является инструментом для других дисциплин. Эта её роль является особенно существенной, поскольку она выработала общий язык и стала фундаментом для всей математики.

Зачем нужна теория множеств?

Теория множеств имеет двоякую природу. С одной стороны, это раздел математической логики со своими задачами, открытыми вопросами, подходами и идеями, которой занимается ограниченный круг специалистов.

С другой стороны, она является инструментом для других дисциплин. Эта её роль является особенно существенной, поскольку она выработала общий язык и стала фундаментом для всей математики.

Более того, она позволила преодолеть кризис оснований математики, позникший на рубеже 19 и 20 веков, когда в математике были обнаружены противоречия (парадоксы).

Зачем нужна теория множеств?

Важной идеей является возможность сведения одних математических объектов к другим. Один из известнейших примеров такого сведения принадлежит Рене Декарту, который предложил отождествлять вещественные числа с точками на обычной Евклидовой прямой. Это привычное нам сейчас, но тогда совершенно революционное соображение привело к созданию метода координат, перевернувшего всё тогдашнее естествознание, и позволило считать, что геометрия, в определённом смысле, сводится к вещественной арифметике.

Зачем нужна теория множеств?

Важной идеей является возможность сведения одних математических объектов к другим. Один из известнейших примеров такого сведения принадлежит Рене Декарту, который предложил отождествлять вещественные числа с точками на обычной Евклидовой прямой. Это привычное нам сейчас, но тогда совершенно революционное соображение привело к созданию метода координат, перевернувшего всё тогдашнее естествознание, и позволило считать, что геометрия, в определённом смысле, сводится к вещественной арифметике.

Выяснилось, что ВСЕ математические понятия сводятся к понятию множества, т.е. (почти) все математические дисциплины можно считать разделами теории множеств. Т.о., изучая ТМ мы лучше поймем и другие разделы математики. Создание теории множеств заложило прочный фундамент для математики и показало ее единство.

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.

Идеи, близкие к идеям ТМ, возникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.

Идеи, близкие к идеям ТМ, возникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

2. Аксиоматическая ТМ (ZFC и ее варианты).

Возникла как попытка преодоления противоречий, возникших в наивной ТМ (Цермело, Френкель, Гёдель, Бернайс, фон Нейман,...).

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.

Идеи, близкие к идеям ТМ, возникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

2. Аксиоматическая ТМ (ZFC и ее варианты).

Возникла как попытка преодоления противоречий, возникших в наивной ТМ (Цермело, Френкель, Гёдель, Бернайс, фон Нейман,...).

3. Альтернативы ZFC.

Рассел, Мычельский, Штейнгауз, Мартин-Лёф, Ловер,...

Множества и операции над ними

Все переменные обозначают множества. Принадлежность:
 $a \in A$.

Равенство: $A = B$ означает $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Включение: $A \subseteq B$ означает $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

Множества часто задаются в виде $\{x \mid \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — выражение, построенное из переменных и отношений $=, \in$ с помощью логических операций $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$. Самое популярное множество: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

Множества и операции над ними

Все переменные обозначают множества. Принадлежность:
 $a \in A$.

Равенство: $A = B$ означает $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Включение: $A \subseteq B$ означает $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

Множества часто задаются в виде $\{x \mid \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — выражение, построенное из переменных и отношений $=, \in$ с помощью логических операций $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$. Самое популярное множество: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

Объединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Разность: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Симметрическая разность: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Дополнение: $\overline{A} = U \setminus A$ (если все рассматриваемые множества содержатся в U).

Свойства булевых операций

$$A \cup A = A, A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{\overline{A}} = A.$$

Все написанные выше свойства справедливы при замене объединения на пересечение и наоборот.

Свойства булевых операций

$$A \cup A = A, A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{\overline{A}} = A.$$

Все написанные выше свойства справедливы при замене объединения на пересечение и наоборот.

Δ коммутативна и ассоциативна, \cap дистрибутивна относительно Δ

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$A \setminus (A \setminus B) = (A \cap B)$$

$$A \setminus B = (A \setminus (A \cap B))$$

Отношения

Декартово произведение: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$, где $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ — упорядоченная пара.

Подмножества $R \subseteq A \times B$ называются отношениями между A и B . Запись $(a, b) \in R$ иногда упрощают до aRb . Бывают также n -местные отношения (подмножества множества $A_1 \times \dots \times A_n$).

$\text{dom}(R) := \{a \mid \exists b(aRb)\}$ — область определения R ,

$\text{rng}(R) := \{b \mid \exists a(aRb)\}$ — область значений R ,

$R(a) := \{b \mid aRb\}$ — значение R в точке A .

Отношения

Декартово произведение: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$, где $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ — упорядоченная пара.

Подмножества $R \subseteq A \times B$ называются отношениями между A и B . Запись $(a, b) \in R$ иногда упрощают до aRb . Бывают также n -местные отношения (подмножества множества $A_1 \times \dots \times A_n$).

$\text{dom}(R) := \{a \mid \exists b(aRb)\}$ — область определения R ,

$\text{rng}(R) := \{b \mid \exists a(aRb)\}$ — область значений R ,

$R(a) := \{b \mid aRb\}$ — значение R в точке A .

Пусть $R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$, тогда $R^{-1} \subseteq B \times A$ называется обратным отношением к R . $(R^{-1})^{-1} = R$.

Композицией отношений $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ называется отношение $S \circ R \subseteq A \times C$ такое, что

$a(S \circ R)c \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists b \in B(aRb \wedge bSc)$. Композиция ассоциативна и $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ функционально, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \rightarrow b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b ; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B .

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ функционально, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \rightarrow b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b ; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B .

Отношение R называется *функцией*, если оно функционально и $\text{dom}(R) = A$. В этом случае $R(a) = \{b\}$ для единственного b , которое называют значением функции R в точке a и пишут $R(a) = b$. Для функций используется стандартная терминология. Функция f из A в B часто обозначается $f : A \rightarrow B$. Композиция функций является функцией.

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ функционально, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \rightarrow b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b ; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B .

Отношение R называется *функцией*, если оно функционально и $\text{dom}(R) = A$. В этом случае $R(a) = \{b\}$ для единственного b , которое называют значением функции R в точке a и пишут $R(a) = b$. Для функций используется стандартная терминология. Функция f из A в B часто обозначается $f : A \rightarrow B$. Композиция функций является функцией.

Функция $f : A \rightarrow B$ называется *инъекцией* (сюръекцией), если $\forall a, a_1 \in A (a \neq a_1 \rightarrow f(a) \neq f(a_1))$ ($\forall b \in B \exists a \in A (f(a) = b)$). Функция называется *биекцией*, если она является и инъекцией, и сюръекцией. Биекции из A на A образуют группу относительно композиции.

Предпорядки и эквивалентности

Некоторые важные свойства отношений $R \subseteq A \times A$:

$\forall a \in A (aRa)$ рефлексивность,

$\forall a \in A \neg (aRa)$ антирефлексивность,

$\forall a, b \in A (aRb \rightarrow bRa)$ симметричность,

$\forall a, b \in A (aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$ антисимметричность,

$\forall a, b, c \in A ((aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc)$ транзитивность

Предпорядки и эквивалентности

Некоторые важные свойства отношений $R \subseteq A \times A$:

$\forall a \in A (aRa)$ рефлексивность,

$\forall a \in A \neg (aRa)$ антирефлексивность,

$\forall a, b \in A (aRb \rightarrow bRa)$ симметричность,

$\forall a, b \in A (aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$ антисимметричность,

$\forall a, b, c \in A ((aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc)$ транзитивность

Предпорядок = рефлексивность и транзитивность; типичные обозначения $\leq, \preceq, \subseteq, \sqsubseteq$.

Частичный порядок = антисимметричный предпорядок.

Линейный порядок = Частичный порядок +

$\forall a, b \in A (aRb \vee bRa)$.

Строгий частичный порядок = антирефлексивность и транзитивность; типичные обозначения $<, \prec, \subset, \sqsubset$

Эквивалентность = рефлексивность, симметричность и транзитивность; типичные обозначения $=, \simeq, \equiv$

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть \equiv — эквивалентность на A . Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество A/\equiv всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению \equiv .

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть \equiv — эквивалентность на A . Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество A/\equiv всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению \equiv .

ТЕОРЕМА. Если \equiv — эквивалентность на A , то классы эквивалентности непусты, попарно не пересекаются и их объединение равно A .

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть \equiv — эквивалентность на A . Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество A/\equiv всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению \equiv .

ТЕОРЕМА. Если \equiv — эквивалентность на A , то классы эквивалентности непусты, попарно не пересекаются и их объединение равно A .

Д-ВО. В качестве объединения классов эквивалентности множество A представляется: любой элемент $a \in A$ эквивалентен самому себе, а значит принадлежит классу $[a]$. Остаётся показать, что разные классы не пересекаются.

Покажем, что если $a \in [b] \cap [c]$, то $[b] = [c]$. В самом деле, пусть $b' \in [b]$, тогда $b' \equiv b$. Но также и $a \equiv b$, что по транзитивности означает, что $b' \equiv a$. Аналогично можно показать, что если $c' \in [c]$, то $c' \equiv a$. Отсюда по транзитивности $b' \equiv c'$, т.е. $b' \equiv c$, т.е. $b' \in [c]$. Таким образом, $[b] \subseteq [c]$.

Натуральные числа в теории множеств

Пусть \mathbb{N} — наименьшее по включению множество, содержащее \emptyset и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$.

Можно проверить, что $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано (т.е. удовлетворяет условиям $x' \neq \emptyset$, $x' = y' \rightarrow x = y$, и $[\emptyset \in P \wedge \forall x \in P (x' \in P)] \rightarrow P = \mathbb{N}$, для любого $P \subseteq \mathbb{N}$). Такая структура единственна с точностью до изоморфизма.

Натуральные числа в теории множеств

Пусть \mathbb{N} — наименьшее по включению множество, содержащее \emptyset и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$.

Можно проверить, что $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано (т.е. удовлетворяет условиям $x' \neq \emptyset$, $x' = y' \rightarrow x = y$, и $[\emptyset \in P \wedge \forall x \in P (x' \in P)] \rightarrow P = \mathbb{N}$, для любого $P \subseteq \mathbb{N}$). Такая структура единственна с точностью до изоморфизма.

Определим на \mathbb{N} отношение $<$ и операции $+$, \cdot так:

$x < y \leftrightarrow x \in y$; $+$ — единственная бинарная операция на \mathbb{N} такая, что $x + 0 = x$ и $x + y' = (x + y)'$; \cdot — единственная бинарная операция на \mathbb{N} такая, что $x \cdot 0 = 0$ и $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

Натуральные числа в теории множеств

Пусть \mathbb{N} — наименьшее по включению множество, содержащее \emptyset и замкнутое относительно операции $x' = x \cup \{x\}$.

Можно проверить, что $(\mathbb{N}; \emptyset, ')$ — структура Пеано (т.е. удовлетворяет условиям $x' \neq \emptyset$, $x' = y' \rightarrow x = y$, и $[\emptyset \in P \wedge \forall x \in P (x' \in P)] \rightarrow P = \mathbb{N}$, для любого $P \subseteq \mathbb{N}$). Такая структура единственна с точностью до изоморфизма.

Определим на \mathbb{N} отношение $<$ и операции $+$, \cdot так:

$x < y \leftrightarrow x \in y$; $+$ — единственная бинарная операция на \mathbb{N} такая, что $x + 0 = x$ и $x + y' = (x + y)'$; \cdot — единственная бинарная операция на \mathbb{N} такая, что $x \cdot 0 = 0$ и $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

Свойства $(\mathbb{N}; +, \cdot, <, 0, 1)$: $+$, \cdot ассоциативны и коммутативны; \cdot дистрибутивна относительно $+$; $0, 1$ нейтральны относительно $+$, \cdot ; $0 < 1 < 2 < \dots$ и между соседями нет других чисел;

$[P(0) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow P(x + 1))] \rightarrow \forall x P(x)$;

$\forall x (\forall y < x P(y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x)$.

Целые числа в теории множеств

$\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c.$$

$$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [a + c, b + d],$$

$$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac + bd, ad + bc],$$

$$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow a + d \leq b + c,$$

$$\tilde{0} := [0, 0], \tilde{1} := [1, 0].$$

Целые числа в теории множеств

$\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c.$$

$$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [a + c, b + d],$$

$$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac + bd, ad + bc],$$

$$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow a + d \leq b + c,$$

$$\tilde{0} := [0, 0], \tilde{1} := [1, 0].$$

Свойства $(\mathbb{Z}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это упорядоченное кольцо

(т.е. $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$ ассоциативны и коммутативны;

$\tilde{\cdot}$ дистрибутивна относительно $\tilde{+}$;

$\tilde{0}, \tilde{1}$ нейтральны относительно $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$;

$$\forall x \exists y (x + y = 0),$$

$$\forall x, y, z (x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z)),$$

$$\forall x, y, z (x \leq y \wedge 0 < z \rightarrow (x \cdot z \leq y \cdot z)),$$

в котором любой элемент является разностью двух натуральных чисел.

Рациональные числа в теории множеств

$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}) / \sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc.$$

$$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [ad + bc, bd],$$

$$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac, bd],$$

$$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow ad \leq bc,$$

$$\tilde{0} := [0, 1], \tilde{1} := [1, 1].$$

Рациональные числа в теории множеств

$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}) / \sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc.$$

$$[a, b] \tilde{+} [c, d] := [ad + bc, bd],$$

$$[a, b] \tilde{\cdot} [c, d] := [ac, bd],$$

$$[a, b] \tilde{\leq} [c, d] \leftrightarrow ad \leq bc,$$

$$\tilde{0} := [0, 1], \tilde{1} := [1, 1].$$

Свойства $(\mathbb{Q}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

это упорядоченное поле (т.е. упорядоченное кольцо, в котором $\forall x \neq 0 \exists y (x \cdot y = 1)$)

такое, что любой элемент получается делением целого числа на положительное целое.

Вещественные числа в теории множеств

$\mathbb{R} := S / \sim$, где S — множество всех последовательностей Коши
 $\{q_i\}$ рациональных чисел

(т.е. $\forall n \exists m \forall i, j > m (|q_i - q_j| < 2^{-n})$),

$\{q_i\} \sim \{r_i\} \leftrightarrow \lim_i (q_i - r_i) = 0$.

$[\{q_i\}] \tilde{+} [\{r_i\}] := [\{q_i + r_i\}]$,

$[\{q_i\}] \tilde{\cdot} [\{r_i\}] := [\{q_i \cdot r_i\}]$,

$[\{q_i\}] \tilde{<} [\{r_i\}] \leftrightarrow \exists n, m \forall i > m (q_i - r_i < -2^{-n})$,

$\tilde{0} := [0, 0, \dots]$, $\tilde{1} := [1, 1, \dots]$.

Вещественные числа в теории множеств

$\mathbb{R} := S / \sim$, где S — множество всех последовательностей Коши $\{q_i\}$ рациональных чисел

(т.е. $\forall n \exists m \forall i, j > m (|q_i - q_j| < 2^{-n})$),

$\{q_i\} \sim \{r_i\} \leftrightarrow \lim_i (q_i - r_i) = 0$.

$[\{q_i\}] \tilde{+} [\{r_i\}] := [\{q_i + r_i\}]$,

$[\{q_i\}] \tilde{\cdot} [\{r_i\}] := [\{q_i \cdot r_i\}]$,

$[\{q_i\}] \tilde{<} [\{r_i\}] \leftrightarrow \exists n, m \forall i > m (q_i - r_i < -2^{-n})$,

$\tilde{0} := [0, 0, \dots]$, $\tilde{1} := [1, 1, \dots]$.

СВОЙСТВА $(\mathbb{R}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\leq}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это полное упорядоченное поле (т.е. упорядоченное поле, в котором любое непустое ограниченное сверху множество имеет супремум).

Комплексные числа в теории множеств

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$(x, y) \tilde{+} (x_1, y_1) := (x + x_1, y + y_1),$$

$$(x, y) \tilde{\cdot} (x_1, y_1) := (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1),$$

$$\tilde{0} := (0, 0), \tilde{1} := (1, 0), \tilde{i} := (0, 1),$$

Комплексные числа в теории множеств

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$(x, y) \tilde{+} (x_1, y_1) := (x + x_1, y + y_1),$$

$$(x, y) \tilde{\cdot} (x_1, y_1) := (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1),$$

$$\tilde{0} := (0, 0), \tilde{1} := (1, 0), \tilde{i} := (0, 1),$$

СВОЙСТВА $(\mathbb{C}; \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{0}, \tilde{1})$:

Это поле, содержащее копию поля вещественных чисел $\tilde{\mathbb{R}} := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, в котором есть квадратный корень i из -1 , и в котором каждый элемент представим в виде $x + i \cdot y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \rightarrow B$.

2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \rightarrow B$.

3. A меньше по мощности B ($A \prec B$), если $A \preceq B$ и $A \not\sim B$.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \rightarrow B$.

2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \rightarrow B$.

3. A меньше по мощности B ($A \prec B$), если $A \preceq B$ и $A \not\sim B$.

СВОЙСТВА. 1. Отношение \sim рефлексивно, симметрично и транзитивно.

2. Отношение \preceq рефлексивно и транзитивно.

Мощность множества

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. A и B равномощны ($A \sim B$), если существует биекция $f : A \rightarrow B$.

2. A не превосходит по мощности B ($A \preceq B$), если существует инъекция $f : A \rightarrow B$.

3. A меньше по мощности B ($A \prec B$), если $A \preceq B$ и $A \not\sim B$.

СВОЙСТВА. 1. Отношение \sim рефлексивно, симметрично и транзитивно.

2. Отношение \preceq рефлексивно и транзитивно.

Заметим, что \sim “неформально” является отношением эквивалентности, но ввести фактор-множество нельзя, так как множества всех множеств не существует (покажем позже).

Теорема Шрёдера-Бернштейна

ТЕОРЕМА. Если $A \preceq B$ и $B \preceq A$, то $A \sim B$.

Теорема Шрёдера-Бернштейна

ТЕОРЕМА. Если $A \preceq B$ и $B \preceq A$, то $A \sim B$.

Д-во. Пусть $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ — инъекции. Тогда $h = g \circ f : A \rightarrow A$ — инъекция.

Пусть $A_1 = g(B)$, $A_2 = h(A)$. Заметим, что $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ и $A_1 \sim B$, потому что $g : B \rightarrow A_1$ — биекция. Аналогично $h : A \rightarrow A_2$ — биекция.

Достаточно доказать, что $A \sim A_1$.

Теорема Шрёдера-Бернштейна

ТЕОРЕМА. Если $A \preceq B$ и $B \preceq A$, то $A \sim B$.

Д-во. Пусть $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ — инъекции. Тогда $h = g \circ f : A \rightarrow A$ — инъекция.

Пусть $A_1 = g(B)$, $A_2 = h(A)$. Заметим, что $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ и $A_1 \sim B$, потому что $g : B \rightarrow A_1$ — биекция. Аналогично $h : A \rightarrow A_2$ — биекция.

Достаточно доказать, что $A \sim A_1$.

Множество $X \subseteq A$ назовем хорошим, если $X \supseteq (A \setminus A_1) \cup h(X)$ (например, A хорошее). Пересечение хороших множеств — хорошее.

Пусть C — пересечение всех хороших множеств. Тогда C хорошее, $C = (A \setminus A_1) \cup h(C)$, и $h(C) \subseteq A_2$.

Поэтому $id_{A \setminus C} \cup h|_C$ — биекция из A на A_1 .

Теорема Кантора

ТЕОРЕМА. Для любого множества A справедливо $A \prec P(A)$, т.е. $A \preceq P(A)$ и $A \not\sim P(A)$.

Теорема Кантора

ТЕОРЕМА. Для любого множества A справедливо $A \prec P(A)$, т.е. $A \preceq P(A)$ и $A \not\sim P(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $A \preceq P(A)$, поскольку $a \mapsto \{a\}$ — инъекция из A в $P(A)$.

Теперь докажем, что $A \not\sim P(A)$. Предположим противное: $A \sim P(A)$, тогда есть биекция $g : A \rightarrow P(A)$.

Рассмотрим множество $B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$.

Поскольку $B \in P(A)$, $B = g(a)$ для некоторого $a \in A$. Но тогда

$$a \in B \leftrightarrow a \in g(a) \leftrightarrow a \notin B,$$

противоречие.

Конечные множества

Множество называется конечным, если оно равномощно n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

Конечные множества

Множество называется конечным, если оно равномощно n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

ТЕОРЕМА. Для множества A равносильны условия:

1. A конечно.
2. Любое непустое подмножество булеана $P(A)$ имеет максимальный элемент по включению.
3. Любая инъекция $f : A \rightarrow A$ является биекцией.

Конечные множества

Множество называется конечным, если оно равномощно n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

ТЕОРЕМА. Для множества A равносильны условия:

1. A конечно.
2. Любое непустое подмножество булеана $P(A)$ имеет максимальный элемент по включению.
3. Любая инъекция $f : A \rightarrow A$ является биекцией.

ТЕОРЕМА. Если A конечно и B бесконечно, то $A \prec B$.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно \mathbb{N} .
Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.

Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно \mathbb{N} .
Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.

Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

ТЕОРЕМА. Если A счетно и B бесконечно, то $A \preceq B$.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно \mathbb{N} .
Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.

Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

ТЕОРЕМА. Если A счетно и B бесконечно, то $A \preceq B$.

Шкала мощностей: $0, 1, 2, \dots$, счетные, несчетные.

Счетные и несчетные множества

Множество называется счетным, если оно равномощно \mathbb{N} .
Множества, не являющиеся конечными или счетными, называются несчетными.

Множество называется континуальным, если оно равномощно $P(\mathbb{N})$.

ТЕОРЕМА. Если A счетно и B бесконечно, то $A \preceq B$.

Шкала мощностей: $0, 1, 2, \dots$, счетные, несчетные.

Континуум-гипотеза (первая проблема Гильберта): если A несчетно, то $P(\mathbb{N}) \preceq A$.

Более простая, но нетривиальная задача: верно ли, что $\forall A, B (A \preceq B \vee B \preceq A)$?

Противоречия наивной теории множеств

Пусть $V = \{x \mid x = x\}$ — множество всех множеств. Тогда $P(V) \subseteq V$, поэтому $P(V) \preceq V$. Однако по теореме Кантора $V \prec P(V)$ — противоречие.

Противоречия наивной теории множеств

Пусть $V = \{x \mid x = x\}$ — множество всех множеств. Тогда $P(V) \subseteq V$, поэтому $P(V) \preceq V$. Однако по теореме Кантора $V \prec P(V)$ — противоречие.

Рассмотрим множество $Y = \{x \mid x \notin x\}$. Имеем $Y \in Y \leftrightarrow Y \notin Y$ — противоречие.

Противоречия наивной теории множеств

Пусть $V = \{x \mid x = x\}$ — множество всех множеств. Тогда $P(V) \subseteq V$, поэтому $P(V) \preceq V$. Однако по теореме Кантора $V \prec P(V)$ — противоречие.

Рассмотрим множество $Y = \{x \mid x \notin x\}$. Имеем $Y \in Y \leftrightarrow Y \notin Y$ — противоречие.

Из каждого из этих противоречий (известных также как парадоксы) можно вывести вообще все возможные утверждения, и истинные, и ложные. Звучит неприятно.

Можно было бы, конечно, разочароваться в самой идее построения оснований математики, но мыслители начала XX века всё-таки не сдались и придумали ряд выходов из положения, предполагающих создание аксиоматической теории множеств, учитывающей ошибки наивного подхода и дающей надежные основания математики.

Множества и классы

Формулы аксиоматической теории множеств строятся так же, как и раньше: с помощью логических операций из простейших формул $x = y$, $x \in y$; переменные в формулах обозначают множества. Разница с наивной теорией множеств состоит в ограничении способов построения множеств. Например, парадоксы показывают, что выражение $\{x \mid \varphi(x)\}$ для некоторых формул не может задавать множества.

Множества и классы

Формулы аксиоматической теории множеств строятся так же, как и раньше: с помощью логических операций из простейших формул $x = y, x \in y$; переменные в формулах обозначают множества. Разница с наивной теорией множеств состоит в ограничении способов построения множеств. Например, парадоксы показывают, что выражение $\{x \mid \varphi(x)\}$ для некоторых формул не может задавать множества.

Удобно считать, что такие выражения задают классы $C_\varphi = \{x \mid \varphi(x)\}$, т.е. совокупности объектов x , для которых $\varphi(x)$ истинно. Любое множество является классом, но обратное неверно (например, классы V, Y с предыдущего слайда не являются множествами). Элемент класса всегда является множеством.

Множества и классы

Формулы аксиоматической теории множеств строятся так же, как и раньше: с помощью логических операций из простейших формул $x = y, x \in y$; переменные в формулах обозначают множества. Разница с наивной теорией множеств состоит в ограничении способов построения множеств. Например, парадоксы показывают, что выражение $\{x \mid \varphi(x)\}$ для некоторых формул не может задавать множества.

Удобно считать, что такие выражения задают классы $C_\varphi = \{x \mid \varphi(x)\}$, т.е. совокупности объектов x , для которых $\varphi(x)$ истинно. Любое множество является классом, но обратное неверно (например, классы V, Y с предыдущего слайда не являются множествами). Элемент класса всегда является множеством.

Для классов можно определить булевские операции $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$, что на самом деле просто модифицирует задающие классы формулы. Так, $A \cap B = \{x \mid \phi_A(x) \wedge \phi_B(x)\}$.

Аксиомы ZFC

0. $\exists x(x = x)$.
1. $\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y$.
2. $\forall u \forall v \exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v)$.
3. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u))$.
4. $\forall X \exists Y \forall u \forall z(u \in z \wedge z \in X \rightarrow u \in Y)$.
5. $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$.
6. $\forall x \forall y \forall y'(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y') \rightarrow y = y')$
 $\rightarrow \forall X \exists Y \forall x \forall y(x \in X \wedge \varphi(x, y) \rightarrow y \in Y)$.
7. $\exists Y(\emptyset \in Y \wedge \forall y(y \in Y \rightarrow y \cup \{y\} \in Y))$.
8. $\forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists x(x \in X \wedge \forall u(u \in x \rightarrow u \notin X)))$.
9. $\forall X \exists f((f : (P(X) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow X) \wedge \forall Y(Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \rightarrow f(Y) \in Y))$.

Примеры следствий аксиом ZFC

1. Существует упорядоченная пара любых двух множеств.
2. Существует пустое множество.
3. Существует объединение всех элементов любого множества, а также пересечение всех элементов данного непустого множества.
4. Существуют объединение, пересечение и разность любых двух данных множеств.

Примеры следствий аксиом ZFC

1. Существует упорядоченная пара любых двух множеств.
2. Существует пустое множество.
3. Существует объединение всех элементов любого множества, а также пересечение всех элементов данного непустого множества.
4. Существуют объединение, пересечение и разность любых двух данных множеств.
5. Теорема о фактор-множестве.
6. Существует декартово произведение любых двух данных множеств.
7. Теоремы Кантора и Шрёдера-Бернштейна.
8. Существует наименьшее по включению индуктивное множество.
9. Существуют изоморфные копии всех числовых структур.

Фундированные порядки

ОПР. 1. Частичный порядок $\mathbb{A} = (A; <_A)$ называют фундированным, если любое непустое подмножество его элементов содержит минимальный элемент.

2. Фундированные линейные порядки называют также вполне упорядоченными множествами.

3. Начальным сегментом $\mathbb{A} = (A; <_A)$ называют любое подмножество A , замкнутое вниз относительно $<_A$. Пример — множество $\hat{a} = \{x \mid x <_A a\}$ для любого $a \in A$.

Фундированные порядки

ОПР. 1. Частичный порядок $\mathbb{A} = (A; <_A)$ называют фундированным, если любое непустое подмножество его элементов содержит минимальный элемент.

2. Фундированные линейные порядки называют также вполне упорядоченными множествами.

3. Начальным сегментом $\mathbb{A} = (A; <_A)$ называют любое подмножество A , замкнутое вниз относительно $<_A$. Пример — множество $\hat{a} = \{x \mid x <_A a\}$ для любого $a \in A$.

ОПР. 1. Изоморфизмом \mathbb{A} на \mathbb{B} называется биекция $f : A \rightarrow B$ такая, что $a <_A a_1 \leftrightarrow f(a) <_B f(a_1)$ для любых $a, a_1 \in A$.

Инъекция с таким свойством называется вложением \mathbb{A} в \mathbb{B} .

2. Частичные порядки \mathbb{A} и \mathbb{B} называются изоморфными ($\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$), если существует изоморфизм \mathbb{A} на \mathbb{B} .

3. Запись $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}$) означает, что \mathbb{A} изоморфно некоторому (собственному) начальному сегменту \mathbb{B} .

Свойства вполне упорядоченных множеств

1. Отношение \simeq рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. Отношение \sqsubseteq рефлексивно и транзитивно.
3. Для любого вложения $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ верно: $\forall a (a \leq_{\mathbb{A}} f(a))$.
4. Отношение \sqsubset антирефлексивно и транзитивно.
5. $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$ или $\mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{A}$.
6. $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$ или $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}$ или $\mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}$, причем выполняется ровно одно из условий.
7. Если $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$ и $\mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{A}$, то $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$.

Доказательства свойств в.у.м.

3. Пусть нет: $f(a) <_A a$ для некоторого $a \in A$, и возьмем наименьшее a . Тогда $f(f(a)) <_A f(a) <_A a$ — противоречие.

4. Пусть \sqsubset не антирефлексивно, т.е. $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{A}$ для некоторого \mathbb{A} . Тогда $f : \mathbb{A} \simeq \hat{a}$ для некоторых $a \in A$ и f . Тогда $f(a) <_A a$ — противоречие.

5. Отношение $I = \{(a, b) \mid \hat{a} \simeq \hat{b}\}$, а также обратное отношение I^{-1} , функциональны. Поэтому I — биекция из $D = \text{dom}(I)$ на $R = \text{rng}(I)$. Если $a_1 <_A a \in D$, то существует $f : \hat{a} \simeq \widehat{I(a)}$, откуда $\hat{a}_1 \simeq \widehat{f(a_1)}$, а значит $I(a_1) = f(a_1) <_B I(a)$. Поэтому D — начальный сегмент \mathbb{A} , R — начальный сегмент \mathbb{B} , и ограничение $I|_D$ — изоморфизм из \mathbb{D} на \mathbb{R} .

Заметим, что $D = A$ или $R = B$ (в противном случае $D = \hat{d}$ и $R = \hat{r}$ для некоторых $d \in A$ и $r \in B$, откуда $I(d) = r$ и $d \in D$ — противоречие). В случае $D = A$ получаем $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$, а в случае $R = B$ получаем $\mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{A}$.

Фундированность и индукция

ТЕОРЕМА. Фундированность порядка $(X; <)$ равносильна правилу индукции в $(X; <)$, утверждающему, что для любого свойства $P(x)$ элементов множества X выполняется условие $\forall x(\forall y < x P(y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x)$.

Фундированность и индукция

ТЕОРЕМА. Фундированность порядка $(X; <)$ равносильна правилу индукции в $(X; <)$, утверждающему, что для любого свойства $P(x)$ элементов множества X выполняется условие $\forall x(\forall y < x P(y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x)$.

Теорема справедлива для произвольных фундированных отношений. Отношение $\rho \subseteq X \times X$ называется фундированным, если любое непустое множество $A \subseteq X$ имеет минимальный элемент $a \in A$ (т.е. не существует $b \in A$ такого, что $b\rho a$). Это верно и для случая, когда X является классом (например, это верно для фундированного отношения \in на классе V всех множеств).

Фундированность и индукция

ТЕОРЕМА. Фундированность порядка $(X; <)$ равносильна правилу индукции в $(X; <)$, утверждающему, что для любого свойства $P(x)$ элементов множества X выполняется условие $\forall x(\forall y < x P(y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x)$.

Теорема справедлива для произвольных фундированных отношений. Отношение $\rho \subseteq X \times X$ называется фундированным, если любое непустое множество $A \subseteq X$ имеет минимальный элемент $a \in A$ (т.е. не существует $b \in A$ такого, что $b\rho a$). Это верно и для случая, когда X является классом (например, это верно для фундированного отношения \in на классе V всех множеств).

Нетрудно показать, что на фундированных множествах и классах можно также определять функции по рекурсии; важный частный случай рассмотрим ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Множество S называется транзитивным, если $\bigcup S \subseteq S$, т.е.
 $x \in y \in S \rightarrow x \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Множество S называется транзитивным, если $\bigcup S \subseteq S$, т.е.
 $x \in y \in S \rightarrow x \in S$.

2. Множество S называется ординалом, если оно транзитивно и линейно упорядочено отношением \in , т.е. $\forall x, y \in S (x \in y \vee y \in x \vee x = y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Множество S называется транзитивным, если $\bigcup S \subseteq S$, т.е.
 $x \in y \in S \rightarrow x \in S$.

2. Множество S называется ординалом, если оно транзитивно и линейно упорядочено отношением \in , т.е. $\forall x, y \in S (x \in y \vee y \in x \vee x = y)$.

3. Ординалы обозначаем $\alpha, \beta, \gamma, \dots$,
класс всех ординалов обозначаем Ord ,
сужение отношения \in на Ord обозначаем $<$.

Свойства ординалов

1. $x \in \alpha \rightarrow x \in Ord$.
2. $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$.
3. $(\alpha; <) \simeq (\beta; <) \iff \alpha = \beta$.
4. $\alpha < \beta \vee \beta < \alpha \vee \alpha = \beta$.
5. $\alpha \subseteq \beta \iff \alpha \leq \beta$.
6. $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ — наименьший ординал, больший α .
7. Для любого множества A ординалов, $(A; <)$ есть в.у.м., а $\bigcup A$ — ординал, являющийся супремумом этого множества.
8. Класс Ord не является множеством.
9. Любое в.у.м. \mathbb{A} изоморфно единственному ординалу.

Доказательства свойств ординалов

3. Проверим, что $\alpha \simeq \beta \rightarrow \alpha = \beta$. Пусть $f : \alpha \simeq \beta$; достаточно показать $\alpha \subseteq \beta$, а для этого достаточно $\forall x \in \alpha (x = f(x))$.

Пусть нет, т.е. $x \neq f(x)$ для некоторого (наименьшего) $x \in \alpha$.

Тогда $x = \{z \mid z < x\}$. С другой стороны,

$f(x) = \{f(z) \mid z < x\}$, откуда $x = f(x)$, противоречие.

Доказательства свойств ординалов

3. Проверим, что $\alpha \simeq \beta \rightarrow \alpha = \beta$. Пусть $f : \alpha \simeq \beta$; достаточно показать $\alpha \subseteq \beta$, а для этого достаточно $\forall x \in \alpha (x = f(x))$.

Пусть нет, т.е. $x \neq f(x)$ для некоторого (наименьшего) $x \in \alpha$.

Тогда $x = \{z \mid z < x\}$. С другой стороны,

$f(x) = \{f(z) \mid z < x\}$, откуда $x = f(x)$, противоречие.

7. Первое — по аксиоме фундирования.

Для второго достаточно транзитивности $\bigcup A$. Пусть

$x \in y \in \bigcup A$. Тогда $\exists \alpha \in A (y \in \alpha)$. Тогда $x \in \alpha$ по

транзитивности, откуда $x \in \bigcup A$. $\bigcup A$ — верхняя граница A по

отношению $<$, поскольку $\forall \alpha \in A (\alpha \leq \bigcup A)$ и $\leq = \subseteq$. Остается

д-ть, что $\bigcup A \leq \beta$ для любой верхней границы β для A . Это

так, поскольку $\forall \alpha \in A (\alpha \subseteq \beta)$.

Доказательства свойств ординалов

3. Проверим, что $\alpha \simeq \beta \rightarrow \alpha = \beta$. Пусть $f : \alpha \simeq \beta$; достаточно показать $\alpha \subseteq \beta$, а для этого достаточно $\forall x \in \alpha (x = f(x))$.

Пусть нет, т.е. $x \neq f(x)$ для некоторого (наименьшего) $x \in \alpha$.

Тогда $x = \{z \mid z < x\}$. С другой стороны,

$f(x) = \{f(z) \mid z < x\}$, откуда $x = f(x)$, противоречие.

7. Первое — по аксиоме фундирования.

Для второго достаточно транзитивности $\bigcup A$. Пусть

$x \in y \in \bigcup A$. Тогда $\exists \alpha \in A (y \in \alpha)$. Тогда $x \in \alpha$ по

транзитивности, откуда $x \in \bigcup A$. $\bigcup A$ — верхняя граница A по

отношению $<$, поскольку $\forall \alpha \in A (\alpha \leq \bigcup A)$ и $\leq = \subseteq$. Остается

д-ть, что $\bigcup A \leq \beta$ для любой верхней границы β для A . Это

так, поскольку $\forall \alpha \in A (\alpha \subseteq \beta)$.

9. Рассмотрим $I = \{(a, \alpha) \mid \hat{a} \simeq \alpha\}$. Как для в.у.м., I —

изоморфизм \mathbb{D} на \mathbb{R} для начальных сегментов $D \subseteq A$,

$R \subseteq Ord$ причем $D = A$ или $R = Ord$. Последнее невозможно

(поскольку Ord было бы множеством), значит $D = A$ и I —

искомый изоморфизм на ординал R .