Основы теории множеств, 1 курс Математика

Виктор Львович Селиванов [1]

[1]ФМКН СПбГУ

Осенний семестр, 2025

Важная дополнительная информация

Мой адрес:
v.selivanov@spbu.ru

Страница курса в интернете:
https://github.com/vseliv/sets-2025/tree/main

Литература:

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. ч. 1. Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 2012.

2. К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств. М.: Мир, 1970.

3. Т. Йех, Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.

4. И.А. Лавров, Л.Л.Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 2001.

Зачем нужна теория множеств?

Теория множеств имеет двоякую природу. С одной стороны, это раздел математической логики со своими задачами, открытыми вопросами, подходами и идеями, которой занимается ограниченный круг специалистов.

С другой стороны, она является инструментом для других дисциплин. Эта её роль является особенно существенной, поскольку она выработала общий язык и стала фундаментом для всей математики.

Зачем нужна теория множеств?

Теория множеств имеет двоякую природу. С одной стороны, это раздел математической логики со своими задачами, открытыми вопросами, подходами и идеями, которой занимается ограниченный круг специалистов.

С другой стороны, она является инструментом для других дисциплин. Эта её роль является особенно существенной, поскольку она выработала общий язык и стала фундаментом для всей математики.

Более того, она позволила преодолеть кризис оснований математики, позникший на рубеже 19 и 20 веков, когда в математике были обнаружены противоречия (парадоксы).

Зачем нужна теория множеств?

Важной идеей является возможность сведения одних математических объектов к другим. Один из известнейших примеров такого сведения принадлежит Рене Декарту, который предложил отождествлять вещественные числа с точками на обычной Евклидовой прямой. Это привычное нам сейчас, но тогда совершенно революционное соображение привело к созданию метода координат, перевернувшего всё тогдашнее естествознание, и позволило считать, что геометрия, в определённом смысле, сводится к вещественной арифметике.

Зачем нужна теория множеств?

Важной идеей является возможность сведения одних математических объектов к другим. Один из известнейших примеров такого сведения принадлежит Рене Декарту, который предложил отождествлять вещественные числа с точками на обычной Евклидовой прямой. Это привычное нам сейчас, но тогда совершенно революционное соображение привело к созданию метода координат, перевернувшего всё тогдашнее естествознание, и позволило считать, что геометрия, в определённом смысле, сводится к вещественной арифметике.

Выяснилось, что ВСЕ математические понятия сводятся к понятию множества, т.е. (почти) все математические дисциплины можно считать разделами теории множеств. Т.о., изучая ТМ мы лучше поймем и другие разделы математики. Создание теории множеств заложило прочный фундамент для математики и показало ее единство.

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.

Идеи, близкие к идеям ТМ, воникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.
Идеи, близкие к идеям ТМ, воникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

2. Аксиоматическая ТМ (ZFC и ее варианты).
Возникла как попытка преодоления противоречий, возникшихих в наивной ТМ (Цермело, Френкель, Гёдель, Бернайс, фон Нейман,...).

Этапы развития теории множеств

1. Наивная теория множеств.
Идеи, близкие к идеям ТМ, воникали у многих ученых, однако в явном виде она начала развиваться примерно полтора века назад в работах Георга Кантора и его последователей.

2. Аксиоматическая ТМ (ZFC и ее варианты).
Возникла как попытка преодоления противоречий, возникших в наивной ТМ (Цермело, Френкель, Гёдель, Бернайс, фон Нейман,...).

3. Альтернативы ZFC.
Рассел, Мычельский, Штейнгауз, Мартин-Лёф, Ловер,...

Множества и операции над ними

Все переменные обозначают множества. Принадлежность: $a \in A$.
Равенство: $A = B$ означает $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.
Включение: $A \subseteq B$ означает $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

Множества часто задаются в виде $\{x \mid \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — выражение, построенное из переменных и отношений $=, \in$ с помощью логических операций $\wedge, \vee, \to, \neg, \forall, \exists$. Самое популярное множество: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

Множества и операции над ними

Все переменные обозначают множества. Принадлежность: $a \in A$.
Равенство: $A = B$ означает $\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$.
Включение: $A \subseteq B$ означает $\forall x (x \in A \to x \in B)$.

Множества часто задаются в виде $\{x \mid \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — выражение, построенное из переменных и отношений $=, \in$ с помощью логических операций $\wedge, \vee, \to, \neg, \forall, \exists$. Самое популярное множество: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

Объединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
Пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
Разность: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.
Симметрическая разность: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Дополнение: $\overline{A} = U \setminus A$ (если все рассматриваемые множества содержатся в U).

Свойства булевых операций

$A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{C}$, $\overline{\overline{A}} = A$.

Все написанные выше свойства справедливы при замене объединения на пересечение и наоборот.

Свойства булевых операций

$A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{C}$, $\overline{\overline{A}} = A$.

Все написанные выше свойства справедливы при замене объединения на пересечение и наоборот.

$\triangle$ коммутативна и ассоциативна, $\cap$ дистрибутивна относительно $\triangle$

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$A \setminus (A \setminus B) = (A \cap B)$

$A \setminus B = (A \setminus (A \cap B)$

Отношения

Декартово произведение: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$, где $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ — упорядоченная пара.
Подмножества $R \subseteq A \times B$ называются отношениями между A и B. Запись $(a, b) \in R$ иногда упрощают до aRb. Бывают также n-местные отношения (подмножества множества $A_1 \times \cdots \times A_n$).
$dom(R) := \{a \mid \exists b(aRb)\}$ — область определения R,
$rng(R) := \{b \mid \exists a(aRb)\}$ — область значений R,
$R(a) := \{b \mid aRb\}$ — значение R в точке A.

Отношения

Декартово произведение: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \land b \in B\}$, где $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ — упорядоченная пара.
Подмножества $R \subseteq A \times B$ называются отношениями между A и B. Запись $(a,b) \in R$ иногда упрощают до aRb. Бывают также n-местные отношения (подмножества множества $A_1 \times \cdots \times A_n$).
$dom(R) := \{a \mid \exists b(aRb)\}$ — область определения R,
$rng(R) := \{b \mid \exists a(aRb)\}$ — область значений R,
$R(a) := \{b \mid aRb\}$ — значение R в точке A.

Пусть $R^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$, тогда $R^{-1} \subseteq B \times A$ называется обратным отношением к R. $(R^{-1})^{-1} = R$.
Композицией отношений $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ называется отношение $S \circ R \subseteq A \times C$ такое, что
$a(S \circ R)c \overset{\text{def}}{\iff} \exists b \in B(aRb \land bSc)$. Композиция ассоциативна и $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ *функционально*, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \to b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B.

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ *функционально*, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \to b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B.

Отношение R называется *функцией*, если оно функционально и $dom(R) = A$. В этом случае $R(a) = \{b\}$ для единственного b, которое называют значением функции R в точке a и пишут $R(a) = b$. Для функций используется стандартная терминолгия. Функция f из A в B часто обозначается $f : A \to B$. Композиция функций является функцией.

Функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ *функционально*, если $\forall a, b, b'(aRb \wedge aRb' \to b = b')$. В этом случае $R(a) = \emptyset$ или $R(a) = \{b\}$ для единственного b; в последнем случае часто пишут $R(a) = b$. Функциональные отношения $R \subseteq A \times B$ известны также как *частичные функции* из A в B.

Отношение R называется *функцией*, если оно функционально и $dom(R) = A$. В этом случае $R(a) = \{b\}$ для единственного b, которое называют значением функции R в точке a и пишут $R(a) = b$. Для функций используется стандартная терминолгия. Функция f из A в B часто обозначается $f : A \to B$. Композиция функций является функцией.

Функция $f : A \to B$ называется инъекцией (сюръекцией), если $\forall a, a_1 \in A(a \neq a_1 \to f(a) \neq f(a_1))$ ($\forall b \in B \exists a \in A(f(a) = b)$). Функция называется биекцией, если она является и инъекцией, и сюръекцией. Биекции из A на A образуют группу относительно композиции.

Предпорядки и эквивалентности

Некоторые важные свойства отношений $R \subseteq A \times A$:

$\forall a \in A(aRa)$ рефлексивность,
$\forall a \in A \neg(aRa)$ антирефлексивность,

$\forall a, b \in A(aRb \to bRa)$ симметричность,
$\forall a, b \in A(aRb \wedge bRa \to a = b)$ антисимметричность,

$\forall a, b, c \in A((aRb \wedge bRc) \to aRc)$ транзитивность

Предпорядки и эквивалентности

Некоторые важные свойства отношений $R \subseteq A \times A$:

$\forall a \in A(aRa)$ рефлексивность,
$\forall a \in A \neg(aRa)$ антирефлексивность,

$\forall a, b \in A(aRb \to bRa)$ симметричность,
$\forall a, b \in A(aRb \wedge bRa \to a = b)$ антисимметричность,

$\forall a, b, c \in A((aRb \wedge bRc) \to aRc)$ транзитивность

Предпорядок = рефлексивность и транзитивность; типичные обозначения $\leq$, $\preceq$, $\subseteq$, $\sqsubseteq$.
Частичный порядок = антисимметричный предпорядок.
Линейный порядок = Частичный порядок +
$\forall a, b \in A(aRb \vee bRa)$.
Строгий частичный порядок = антирефлексивность и транзитивность; типичные обозначения $<$, $\prec$, $\subset$, $\sqsubset$

Эквивалентность = рефлексивность, симметричность и транзитивность; типичные обозначения $=$, $\simeq$, $\equiv$

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть $\equiv$ — эквивалентность на A. Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество $A/_{\equiv}$ всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению $\equiv$.

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть $\equiv$ — эквивалентность на A. Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество $A/_{\equiv}$ всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению $\equiv$.

ТЕОРЕМА. Если $\equiv$ — эквивалентность на A, то классы эквивалентности непусты, попарно не пересекаются и их объединение равно A.

Эквивалентности и фактор-множества

Пусть $\equiv$ — эквивалентность на A. Каждому $a \in A$ сопоставим множество $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{a' \in A \mid a' \equiv a\}$, называемое его *классом эквивалентности*. Множество $A/_{\equiv}$ всех таких классов называется фактор-множеством множества A по отношению $\equiv$.

ТЕОРЕМА. Если $\equiv$ — эквивалентность на A, то классы эквивалентности непусты, попарно не пересекаются и их объединение равно A.

Д-ВО. В качестве объединения классов эквивалентности множество A представляется: любой элемент $a \in A$ эквивалентен самому себе, а значит принадлежит классу $[a]$. Остаётся показать, что разные классы не пересекаются. Покажем, что если $a \in [b] \cap [c]$, то $[b] = [c]$. В самом деле, пусть $b' \in [b]$, тогда $b' \equiv b$. Но также и $a \equiv b$, что по транзитивности означает, что $b' \equiv a$. Аналогично можно показать, что если $c' \in [c]$, то $c' \equiv a$. Отсюда по транзитивности $b' \equiv c'$, т.е. $b' \equiv c$, т.е. $b' \in [c]$. Таким образом, $[b] \subseteq [c]$.