

В.Л. Селиванов

Основы теории множеств

ФМКН СПбГУ, 1 курс М, осенний семестр 2025-2026

Вопросы по курсу

1. Зачем нужна теория множеств? Основные этапы ее развития.
2. Множества. Равенство и включение множеств. Операции над множествами.
3. Свойства операций над множествами.
4. Отношения и операции над ними. Область определения и область значений.
5. Функциональные отношения, частичные и тотальные функции.
6. Инъекции, сюръекции, биекции.
7. Классы предпорядков и частичных порядков.
8. Отношения эквивалентности. Теорема о фактор-множестве.
9. Мощность множества, сравнение мощностей, примеры.
10. Теорема Шрёдера-Бернштейна.
11. Теорема Кантора о булеане.
12. Конечные множества, их определения и свойства.
13. Счетные множества. Определение, примеры и свойства.
14. Континуальные множества. Определение и примеры. Континуум-гипотеза.
15. Определение структуры натуральных чисел в теории множеств.
16. Основные свойства структуры натуральных чисел.
17. Определение структуры целых чисел в теории множеств.
18. Основные свойства структуры целых чисел.
19. Определение структуры рациональных чисел в теории множеств.
20. Основные свойства структуры рациональных чисел.
21. Определение структуры вещественных чисел в теории множеств.
22. Основные свойства структуры вещественных чисел.
23. Определение структуры комплексных чисел в теории множеств.
24. Основные свойства структуры комплексных чисел.
25. Парадоксы теории множеств, необходимость ее аксиоматизации.
26. Аксиомы нетривиальности и объемности.
27. Аксиома пары. Упорядоченные пары в ZFC.
28. Аксиома выделения.
29. Аксиома объединения.
30. Аксиома степени.
31. Аксиома замены.
32. Аксиома бесконечности.
33. Аксиома фундирования.
34. Аксиома выбора.
35. Фундированные частичные порядки и доказательства по индукции.
36. Вполне упорядоченные множества, их свойства.
37. Сравнимость порядковых типов вполне упорядоченных множеств.
38. Ординалы и их свойства.
39. Ординалы как порядковые типы вполне упорядоченных множеств.
40. Рекурсивные определения по ординалам.
41. Лемма Цорна.
42. Теорема Цермело.
43. Равносильные формулировки аксиомы выбора.
44. Сравнимость мощностей. Кардиналы.

45. Шкала кардиналов.
46. Кумулятивная иерархия.
47. Арифметика кардиналов.
48. Арифметика ординалов.
49. Независимость аксиомы выбора и континуум-гипотезы.
50. Критика ZFC. Теорема Банаха-Тарского.
51. Существование неизмеримых множеств.
52. Игры Гейла-Стьюарта. Определимость замкнутых игр и аксиома выбора.
53. Аксиома детерминированности AD как альтернатива аксиомы выбора.
54. Континуум-гипотеза и отсутствие неизмеримых множеств в ZF+AD.
55. Противоречивость теории ZF+AC+AD.

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 112 с.
2. Т. Йех. Теория множеств и метод форсинга. Перевод с английского В. И. Фуксона под редакцией В.Н. Гришина. М.:Мир, 1973. 150 с.
3. К. Куратовский, А. Мостовский. Теория множеств. Перевод с английского М.И. Кратко под редакцией А.Д. Тайманова. М.:Мир, 1970. 416 с.
4. И.А. Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.